Mostre que o polinômio $p(x) = x^5 + 51x^3 + (15-8i)x + 5 + 3i$ é um polinômio irredutível em $\mathbb{Z}[i][x]$.

Teorema (Critério de Eisenstein): Seja $f(x)$

com: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Suponha que existe um primo "p" tal que:

i) $p \nmid a_n$
ii) $p \mid a_i, \forall i = \{0, 1, \dots, n-1\}$
iii) $p^2 \nmid a_0$

Temos que $5+3i$ e $N(5+3i) = 25+9 = 34$
Mas $34 = 2 \cdot 17$

$|2| = (1+i) \cdot (1-i) = 1 - i + i - i^2 = 1 + 1 = 2$
$|17| = (1+4i)(1-4i) = 1 - 4i + 4i - 16i^2 = 1 + 16 = 17$

Temos então que: $(5+3i) = (1+i) \cdot (1+4i)$

$(1+i) \cdot (1+4i) = 1 + 4i + i - 4 = 5i - 3$
$(1+i)(1-4i) = 1 - 4i + i + 4 = 5 - 3i$
$(1-i)(1+4i) = 1 + 4i - i - 4i^2 = 3i + 5$

Portanto $(5+3i) = (1-i) \cdot (1+4i)$, que será $p_1 = (1-i)$ e $p_2 = (1+4i)$

Sabemos que $(1-i)$ é primo e divide $(5+3i)$
$p_1^2 = (1-i)^2 = 1 - 2i - i^2 = 1 + 1 - 2i = (2-2i)$

Temos que $p_1^2 \nmid (5+3i)$, então:

$$(2+2i) \nmid (5+3i)$$

Então é valida a condição de $p_1 \mid (5+3i)$ e $p_1^2 \nmid (5+3i)$

ii) Segunda condição: $p_1 \mid a_3$ e $p_1 \mid a_1$

$$\begin{cases} (1-i) \mid (15-8i) \text{ e } \dfrac{(15-8i)}{(1-i)} = \dfrac{7i}{2} + \dfrac{23}{2} \\ (2-2i) \mid (15-8i) \quad \dfrac{(15-8i)}{(2-2i)} = \dfrac{7i}{4} + \dfrac{23}{4} \end{cases}$$

$$(1-i) \mid 51 \longrightarrow \frac{51}{(1-i)} = \frac{51i}{2} + \frac{51}{2}$$

iii) 3º condição: $p_1 \nmid a_5$

$$(1-i) \nmid 1$$

Então temos que: $p(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 x^0$

$$p(x) = 1x^5 + 0x^4 + 51x^3 + 0x^2 + (15-8i)x + (5+3i)$$

Temos que $(1-i) \mid 0$, e portanto pelo Critério de Eisenstein $p(x)$ é irredutível.