Agora um módulo M finitamente gerado sobre A é um quociente de um módulo livre de posto finito: se $M = A\omega_1 + \cdots + A\omega_n$, temos uma sobrejeção

$$\begin{aligned} A^n &\twoheadrightarrow M \\ (a_1, \ldots, a_n) &\mapsto a_1\omega_1 + \cdots + a_n\omega_n \end{aligned}$$

e novamente pelo item anterior M é noetheriano.

□

6.2 Teorema da base de Hilbert

Nesta seção, provaremos o principal resultado deste capítulo, o teorema da base de Hilbert. Como corolário imediato, concluiremos que toda álgebra finitamente gerada sobre $\mathbb{Z}$ ou sobre um corpo k é automaticamente noetheriana. Em particular, obtemos finalmente a prova de que conjuntos algébricos podem ser sempre definidos por um número finito de polinômios.

Teorema 6.2.1 *Seja A um anel noetheriano. Então*

1. *$A/\mathfrak{a}$ é noetheriano para todo ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$;*

2. *se $S \subseteq A$ é um conjunto multiplicativo, então $S^{-1}A$ é noetheriano;*

3. *(Base de Hilbert) $A[x]$ e $A[\![x]\!]$ são noetherianos;*

4. *qualquer A-álgebra finitamente gerada B é noetheriana.*

DEMONSTRAÇÃO:

1. Segue diretamente do teorema 6.1.6 na página 182.

2. Seja $\rho\colon A \to S^{-1}A$ o mapa de localização. Se $\mathfrak{b}_0 \subseteq \mathfrak{b}_1 \subseteq \cdots$ é uma cadeia ascendente de ideais em $S^{-1}A$, então $\rho^{-1}\mathfrak{b}_0 \subseteq \rho^{-1}\mathfrak{b}_1 \subseteq \cdots$ é uma cadeia ascendente de ideais em A; por hipótese, $\rho^{-1}\mathfrak{b}_i = \rho^{-1}\mathfrak{b}_{i+1}$ para $i \gg 0$. Mas isto significa que $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_{i+1}$ para $i \gg 0$ pelo teorema 4.3.1 na página 126, logo $S^{-1}A$ é noetheriano.

3. Mostremos que qualquer ideal $\mathfrak{a} \subseteq A[x]$ é finitamente gerado. Para cada inteiro $d \geq 0$, defina o ideal em A

$$\mathfrak{c}_d \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ a \in A \;\middle|\; \begin{array}{c} a \text{ é coeficiente líder de algum} \\ f(x) \in \mathfrak{a} \text{ de grau } d \end{array} \right\} \cup \{0\}$$

Dados $r, s \in A$ e polinômios $f(x), g(x) \in \mathfrak{a}$ de grau d, temos que $rf(x) + sg(x) \in \mathfrak{a}$ é de grau $\leq d$, donde segue que $\mathfrak{c}_d \subseteq A$ é de fato um ideal. Além disso, de $f(x) \in \mathfrak{a} \implies xf(x) \in \mathfrak{a}$ concluímos ainda que $\mathfrak{c}_d \subseteq \mathfrak{c}_{d+1}$. Como A é noetheriano, obtemos portanto uma cadeia ascendente estacionária (digamos a partir de $d \geq D$) de ideais finitamente gerados de A

$$\mathfrak{c}_0 \subseteq \mathfrak{c}_1 \subseteq \mathfrak{c}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{c}_D = \mathfrak{c}_{D+1} = \mathfrak{c}_{D+2} = \cdots$$

Para cada $d = 0, 1, \ldots, D$, escolha um conjunto finito $S_d \subseteq \mathfrak{a}$ de polinômios de grau d cujos coeficientes líderes geram $\mathfrak{c}_d$ e seja $S = \bigcup_{0 \leq d \leq D} S_d$ (um subconjunto finito de $\mathfrak{a}$). Mostremos que S gera $\mathfrak{a}$.

Seja $\mathfrak{s} \subseteq A[x]$ o ideal gerado por S. Claramente $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{a}$. Reciprocamente, dado $f(x) \in \mathfrak{a}$, vamos mostrar por indução em $d = \deg f(x)$ que $f(x) \in \mathfrak{s}$, o que é evidente se $f(x) = 0$. Suponha $d \geq 0$. Se $d \leq D$, existe uma combinação A-linear dos polinômios em S_d com mesmo coeficiente líder de $f(x)$. E se $d > D$, como $\mathfrak{c}_d = \mathfrak{c}_D$, existe uma combinação A-linear dos polinômios em $\{x^{d-D} \cdot p(x) \mid p(x) \in S_D\}$ com mesmo coeficiente líder de $f(x)$. Assim, em ambos os casos, existem monômios $m_i(x) = c_i x^{e_i}$ ($c_i \in A$) e polinômios $p_1(x), \ldots, p_n(x) \in S$ tais que $f(x)$ e $m_1(x)p_1(x) + \cdots + m_n(x)p_n(x)$ têm o mesmo grau d e mesmo coeficiente líder, de modo que

$$\deg\big(f(x) - m_1(x)p_1(x) - \cdots - m_n(x)p_n(x)\big) < d = \deg f(x)$$

Por hipótese de indução, $f(x) - m_1(x)p_1(x) - \cdots - m_n(x)p_n(x) \in \mathfrak{s}$, logo $f(x) \in \mathfrak{s}$, como desejado.

A demonstração para $A[\![x]\!]$ é análoga; a única diferença é que, no lugar do grau, utilizamos a função $v\colon A[\![x]\!] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por (c.f. exemplo 10.1.4 na página 252)

$$v\Big(\sum_{n \geq 0} a_n x^n\Big) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

de modo que o "termo inicial" $a_n \neq 0$ com n mínimo passa a fazer o papel de "coeficiente líder". Assim, dado um ideal $\mathfrak{a} \subsetneq A[\![x]\!]$, para cada $d \geq 0$ consideramos agora os ideais de A

$$\mathfrak{c}_d = \{a \in A \mid \text{existe } ax^d + a_{d+1}x^{d+1} + a_{d+2}x^{d+2} + \cdots \in \mathfrak{a}\} \cup \{0\}$$

que formam uma cadeia ascendente de ideais finitamente gerados, estacionária para $d \geq D$. Novamente sendo $S_d \subsetneq \mathfrak{a}$ um subconjunto finito de séries da forma $ax^d + a_{d+1}x^{d+1} + \cdots$ cujos termos iniciais a geram $\mathfrak{c}_d$ e sendo $S = \bigcup_{0 \leq d \leq D} S_d = \{p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$. temos que S gera $\mathfrak{a}$. Para isto, dado $f(x) \in \mathfrak{a}$, construímos $g_1(x), \ldots, g_n(x) \in A[\![x]\!] = \operatorname{proj\,lim}_{r \in \mathbb{N}} A[x]/(x^r)$ tais que

$$f(x) = g_1(x)p_1(x) + \cdots + g_n(x)p_n(x)$$

definindo $g_i(x) \bmod x^r$ indutivamente em r. Detalhes são deixados como exercício para o leitor.

4. Por indução, temos que o teorema da base de Hilbert implica que $A[x_1, \ldots, x_n]$ é noetheriano. O resultado agora segue pelo item (1) já que B é quociente de $A[x_1, \ldots, x_n]$: se B é gerado sobre A por $\omega_1, \ldots, \omega_n$, temos uma sobrejeção de A-álgebras

$$\begin{aligned} A[x_1, \ldots, x_n] &\twoheadrightarrow B \\ x_i &\mapsto \omega_i \end{aligned}$$

Sendo $\mathfrak{a}$ o kernel desta sobrejeção, temos $B \cong A[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$.

□

Observação 6.2.2 *O produto tensorial de álgebras noetherianas sobre um anel noetheriano nem sempre é noetheriano. Verifique, por exemplo, que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ e $\mathbb{C}[\![x]\!] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![y]\!]$ não são noetherianos.*

6.3 Álgebras e módulos de presentação finita

Nesta seção, apresentamos a noção "relativa" de anel noetheriano.

6.3.1 Definição Seja A um anel qualquer (não necessariamente noetheriano).