Soma direta de Módulos

Seja A um anel, $\{M_i\}_{i\in I}$ uma coleção de A-módulos.
Considere o produto cartesiano $\prod_{i\in I} M_i = \{(v_i)_{i\in I} \mid v_i \in M_i, \forall i \in I\}$.

Defina:

$$+ : \prod_{i\in I} M_i \times \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$$
$$((u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I}) \longrightarrow (u_i +_{M_i} v_i)_{i\in I}$$

$$\cdot : A \times \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$$
$$(a, (v_i)_{i\in I}) \longrightarrow (a \cdot_{M_i} v_i)_{i\in I}$$

A soma direta da coleção $\{M_i\}_{i\in I}$ de A-módulos é:

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid \underset{\text{(suporte)}}{\operatorname{supp}(v)} \text{ é finito}\}$$

Para cada $v = (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$, $\operatorname{supp}(v) = \{i \in I \mid v_i \neq 0_{M_i}\}$

Afirmação: $\bigoplus_{i\in I} M_i$ é um A-submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$.

i) $0_{\prod_{i\in I} M_i} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, observe que $\operatorname{supp}(0_{\prod_{i\in I} M_i}) = \emptyset$ que é finito. Assim $0_{\prod_{i\in I} M_i} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$

ii) Sejam $u, v \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ e $a \in A$, escreve-se:

$u = (u_i)_{i \in I}$ e $v = (v_i)_{i \in I}$

$\operatorname{supp}(au+v) \subseteq \operatorname{supp}(u) \cup \operatorname{supp}(v)$

Seja $i \in \operatorname{supp}(au+v)$, logo $au_i + v_i \neq 0_{M_i}$

$au+v = (au_i+v_i)_{i \in I}$

Então: $u_i \neq 0_{M_i}$ ou $v_i \neq 0_{M_i}$ $\rightarrow$ $i \in \operatorname{supp}(u) \cup \operatorname{supp}(v)$.

Como $\operatorname{supp}(u)$ e $\operatorname{supp}(v)$ são finitos então $\operatorname{supp}(u) \cup \operatorname{supp}(v) \rightarrow \operatorname{supp}(au+v)$ é finito. $\rightarrow$ $au+v \in \bigoplus_{i \in I} M_i$.

Exemplo: $I = \{1,2\}$, $M_1 \oplus M_2 = M_1 \times M_2$, com isso se o I é finito $\rightarrow \prod_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I} M_i$

Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma coleção de A-módulos.

Tomando M e N e $M \oplus N$, dados (u,v) então:

$$M \hookrightarrow M \oplus N \qquad N \hookrightarrow M \oplus N$$
$$u \mapsto (u, 0_M) \qquad v \mapsto (0_M, v)$$

Fixando um $j \in I$, $\gamma_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$, onde para cada $v \in M_j$, o $\gamma_j(v) := (\tilde{v}_i)_{i \in I}$ onde $\tilde{v}_i$,

$$\tilde{v}_i = \begin{cases} v, \text{ se } i = j \\ 0_{M_i}, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

e γ_j é um morfismo de A-módulos!

Sejam $u, v \in M_j$ e $a \in A$, logo:

$\gamma_j(u) = (\tilde{u}_i)_{i \in I}$ e $\gamma_j(v) = (\tilde{v}_i)_{i \in I}$

Onde: $\tilde{u}_i = \begin{cases} u, & \text{se } i = j \\ 0_{M_i}, & \text{se } i \neq j \end{cases}$ e $\tilde{v}_i = \begin{cases} v, & \text{se } i = j \\ 0_{M_i}, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Portanto, $\gamma_j(au+v) := (\tilde{w}_i)_{i \in I}$, onde:

$\tilde{w}_i = \begin{cases} au+v, & \text{se } i = j \\ 0_{M_i}, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

(I) Desejamos mostrar que: $\gamma_j(au+v) = a\gamma_j(u) + \gamma_j(v)$,

temos que: $a\gamma_j(u) + \gamma_j(v) = a(\tilde{u}_i)_{i \in I} + (\tilde{v}_i)_{i \in I} =$

$(a\tilde{u}_i + \tilde{v}_i)_{i \in I} \overset{?}{=} (\tilde{w}_i)_{i \in I}$, $\forall i \in I$

Seja $i \in I$ qualquer, se $i \neq j$ então:

$\tilde{u}_i = 0_{M_i}$ e $\tilde{v}_i = 0_{M_i}$ e $\tilde{w}_i = 0_{M_i}$

Então: $\tilde{w}_i = a\tilde{u}_i + \tilde{v}_i$. Suponos agora que $i = j$, neste caso, $\tilde{w}_j = au+v = a\tilde{u}_j + \tilde{v}_j$

logo: $(\tilde{w}_i)_{i \in I} = (a\tilde{u}_i + \tilde{v}_i)_{i \in I} \rightarrow \gamma_j(au+v) =$
$a\gamma_j(u) + \gamma_j(v)$.

ii) $\gamma_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ é injetivo.

Seja $v \in \operatorname{Nuc}(\gamma_j)$, logo $\gamma_j(v) = (0_{M_i})_{i \in I}$

Então, $(\tilde{v}_i)_{i\in I} = (0_{M_i})_{i\in I} \rightarrow \tilde{v}_i = 0_{M_i}, \forall i \in I$

Em particular, o $\tilde{v}_j = 0_{M_j} \rightarrow v = 0_{M_j}$

Portanto, $\ker(\gamma_j) = \{0_{M_j}\} \rightarrow \gamma_j$ é injetiva.

Para cada $(v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, é comum denotar:

$\sum_{i\in I} v_i = (v_i)_{i\in I}$, para todo $v = (v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$,

tem-se: $v = \sum_{i\in I} \gamma_i(v_i)$.

Para cada $i \in I / supp(v)$ temos: $v_i = 0_{M_i} \rightarrow \gamma_i(v_i) = 0_{\bigoplus_{l\in I} M_l}$, logo:

$$\sum_{i\in I} \gamma_i(v_i) = \sum_{i\in supp(v)} \gamma_i(v_i)$$

Chame o $supp(v) = \{i_1, \dots, i_N\}$, e chame

$w = \sum_{l=1}^{N} \gamma_{i_l}(v_{i_l})$. Logo: $w_i = \begin{cases} v_{i_l}, \text{ se } i = i_l, \text{ para algum } l \in \{i_1, \dots, i_N\} \\ 0_{M_i}, \text{ se } i \notin supp(v) \end{cases}$

$w_i = v_i, \forall i \in I$ e $w = v \rightarrow$

$v = \sum_{l=1}^{N} \gamma_{i_l}(v_{i_l}) = \sum_{i\in I} \gamma_i(v_i)$

$\{M_j\}_{j\in I}$ A-módulos, para cada $j \in I$, considere

a função: $\pi_j : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$

$(v_i)_{i\in I} \longmapsto v_j$

π_j é um morfismo sobrejetivo de A-módulos, de fato, sejam:

π_j é a projeção na j-ésima coordenada

$u = (u_i)_{i \in I}$, $v = (v_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ e $a \in A$. Logo:

$\pi_j(au+v) = \pi_j\left((au_i + v_i)_{i \in I}\right) = au_j + v_j =$
$a\pi_j(u) + \pi_j(v)$

π_j é sobrejetivo $\longrightarrow \pi_j \circ \gamma_j = id_{M_j}$

De fato, seja $v \in M_j$ então $\pi_j \circ \gamma_j(v) = \pi_j(\gamma_j(v)) =$
$\pi_j\left((\tilde{v}_i)_{i \in I}\right) = v$

Em particular, π_j é sobrejetiva.

Para todo $v \in \bigoplus_{i \in I} M_i$, $v = (\pi_i(v))_{i \in I}$

De fato, escreva $v = (v_i)_{i \in I}$, então, $\pi_i(v) = v_i$, $\forall i \in I$.

Implica que $(\pi_i(v))_{i \in I} = (v_i)_{i \in I} = v$

Propriedade Universal da Soma direta

Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma coleção de A-módulos, N um A-módulo e seja $\{f_i : M_i \longrightarrow N\}_{i \in I}$ uma coleção de morfismos de A-módulos.

" $j \in I$ "

Então existe um único morfismo de A-módulos:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\gamma_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

$\varphi: \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$, tal que $\varphi \circ \gamma_j = \varphi_j, \forall j \in I$.

<u>Demo:</u> Defina: $\varphi: \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$

$$(v_i)_{i\in I} \longrightarrow \sum_{i\in I} \varphi_i(v_i)$$

φ é um morfismo de A-módulos. Sejam $u=(u_i)_{i\in I}$, $v=(v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ e $a \in A$. Então:

$$\varphi(au+v) = \varphi\left((au_i+v_i)_{i\in I}\right) = \sum_{i\in I} \varphi_i(au_i+v_i) =$$

$$\sum_{i\in I} \left(a\varphi_i(u_i)+\varphi_i(v_i)\right) = a\left(\sum_{i\in I}\varphi_i(u_i)\right) + \sum_{i\in I}\varphi_i v_i$$

$$= a\varphi u + \varphi v$$

Agora o teste da comutação no diagrama:

Se $\varphi \circ \gamma_j = \varphi_j, \forall j \in I$, seja $j \in I$ e $v \in M_j$. Então:

$$\varphi \circ \gamma_j(v) = \varphi\left((\tilde{v}_i)_{i\in I}\right) = \sum_{i\in I} \varphi_i(\tilde{v}_i) = \varphi_j(\tilde{v}_j) = \varphi_j(v).$$

Agora vamos mostrar a unicidade: φ.

Suponha que $\tilde{\varphi}: \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$, seja um morfismo de A-módulos tal que $\tilde{\varphi} \circ \gamma_j = \varphi_j, \forall j \in I$.

Então, para todo: $v=(v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$

$$\tilde{T}(v) = \tilde{T}\Big(\sum_{i\in I} \gamma_i(v_i)\Big) = \sum_{i\in I} \tilde{T}(\gamma_i(v_i)) = \sum_{i\in I} T_i(v_i) = T(v).$$

<u>Proposição</u>: Seja $\{f_i : M_i \to N_i\}_{i\in I}$ uma coleção de morfismos de A-módulos.

$$\begin{tikzcd}
M_j \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\gamma_j^M"'] & N_j \arrow[d, "\gamma_j^N"] \\
\bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I} N_i
\end{tikzcd} \qquad \exists! \bigoplus_{i\in I} f_i$$

Então existe um único morfismos de A-módulos:

$$\bigoplus_{i\in I} f_i = f : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i, \text{ tal que } \gamma_j^N \circ f_i = f \circ \gamma_j^M$$

$$\begin{tikzcd}
M_j \arrow[rr, "\gamma_j^M"] \arrow[dr, "\gamma_j^N \circ f_j"'] & & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, "\exists! f"] \\
& \bigoplus_{i\in I} N_i = N &
\end{tikzcd}$$

<u>Demo</u>: Aplicando a propriedade universal, segue que existe um único morfismo de A-módulos.

$$f : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i, \text{ tal que } f\circ \gamma_j^M = \gamma_j^N \circ f_j, \ \forall j \in I$$

Tomando $\forall v$, onde $v \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, $v = (v_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} f(\gamma_i^M(v_i)) =$

$$\sum_{i\in I} \gamma_i^N \circ f_i(v_i) = (f_i(v_i))_{i\in I}$$

Afirmações:

1) f_i é sobrejetiva, $\forall i \in I \longrightarrow f$ é sobrejetiva

2) f_i é injetiva, $\forall i \in I \longrightarrow f$ é injetiva

3) f_i é isomorfismo $\forall i \in I \longrightarrow f$ é isomorfismo

<u>Corolário</u>: Seja $\{M_i\}$ uma coleção de A-módulos e para cada $i \in I$ $i \in I$ seja N_i um A-submódulo de M_i. Então $\bigoplus_{i \in I} N_i$ um A-submódulo de $\bigoplus_{i \in I} M_i$ e:

$$\frac{\bigoplus_{i \in I} M_i}{\bigoplus_{i \in I} N_i} \cong \bigoplus_{i \in I} \frac{M_i}{N_i}$$

<u>Demo</u>: Para cada $i \in I$, seja $\pi_i : M_i \longrightarrow \frac{M_i}{N_i}$

$$v \longrightarrow v + N_i$$

Pela proposição existe um único morfismo de A-módulos:

$$\pi : \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \frac{M_i}{N_i}$$, tal que

$$\pi((v_i)_{i \in I}) = (\pi_i(v_i))_{i \in I}, \quad \forall (v_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$$

Como π_i é sobrejetiva, $\forall i \in I$ então π é sobrejetiva. Pelo 1º Teorema de Isomorfismos de Módulos:

$$\frac{\bigoplus_{i \in I} M_i}{\operatorname{Nuc}\pi} \cong \bigoplus_{i \in I} \frac{M_i}{N_i} \quad \text{e} \quad \operatorname{Nuc}\pi = \bigoplus_{i \in I} N_i$$

Seja $v=(v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, então:

$$v \in \operatorname{Nuc}\pi \Leftrightarrow \pi(v) = 0_{\bigoplus_{i\in I} \frac{M_i}{N_i}} \Leftrightarrow (\pi_i(v_i))_{i\in I} = \left(0_{\frac{M_i}{N_i}}\right)_{i\in I} \Leftrightarrow (v_i+N_i)_{i\in I} = (0_{M_i}+0_{N_i})_{i\in I} \Leftrightarrow$$

$$v_i + N_i = 0_{M_i}+N_i,\ \forall i\in I \Leftrightarrow v_i\in N_i,\ \forall i \in I \Leftrightarrow$$

$$v \in \bigoplus_{i\in I} N_i.$$