$$M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_n} M_{n+1}$$ homomorfismos

de A-módulos é uma "sequencia exata"

se $\operatorname{Im}(\phi_i) = \operatorname{Ker}(\phi_{i+1}) \quad \forall i$

@ $N \subseteq M$ submodulo

então

$$0 \to N \xhookrightarrow{i} M \xrightarrow{\phi} M/N \to 0$$

$$x \mapsto x, \qquad y \mapsto \bar{y}$$

é uma sequencia exata

- $\{0\} = \operatorname{Ker}(i)$ é verdadeiro pois i é injetiva
- $\operatorname{Im}(i) = N$

  $\operatorname{Ker}(\phi) = \{u \in M \mid \bar{u} = \bar{0}\}$

  $= \{u \in M \mid u + N = N\} = N$
- ϕ é sobre $\Rightarrow \operatorname{Im}(\phi) = M/N$

  núcleo $M/N \to 0$ é M/N

$b \longmapsto a$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\phi_1"'] & M_2 \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\phi_2"] \arrow[dr, phantom, "///"] & M_3 \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "\phi_3"] \arrow[dr, phantom, "///"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_4"] & 0 \arrow[d, dashed, "\phi_5"] \\
0 \arrow[r] & N_2 \arrow[r, "\rho_2"'] & N_3 \arrow[r, "\rho_3"'] & N_4 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ sequências exatas

$0 \quad 0$

ⓐ Se ϕ_2 e ϕ_4 são injetivos $\Rightarrow$ ϕ_3 é injetivo

$$\ker(\phi_3) \overset{??}{=} \{0\}$$

Seja $a \in M_3$ tal que $\phi_3(a) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \psi_2 \text{ e } \rho_2 \text{ são injetivos} \\ \bullet\ \psi_3 \text{ e } \rho_3 \text{ são sobre} \\ \bullet\ \operatorname{Im}(\psi_2) = \ker(\psi_3) \qquad \bullet\ \operatorname{Im}(\rho_2) = \ker(\rho_3) \end{array}} \Leftarrow$$

$$\rho_3(\phi_3(a)) = \rho_3(0) = 0$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \phi_4(\psi_3(a)) \end{array}$$

Mas ϕ_4 é injetivo $\Rightarrow$ $\psi_3(a) = 0$

$\Rightarrow \quad a \in \ker(\psi_3) = \operatorname{Im}(\psi_2)$

Logo existe $b \in M_2$ tal que $\psi_2(b) = a$

$$0 = \phi_3(a) = \phi_3(\psi_2(b)) = \rho_2(\phi_2(b))$$

$$\Rightarrow \phi_2(b) \in \ker(\rho_2)$$

Mas ρ_2 é injetivo $\Rightarrow \phi_2(b) = 0$

mas ϕ_2 é injetivo $\Rightarrow b = 0$

$$\Rightarrow a = \psi_2(b) = \psi_2(0) = 0 \quad \checkmark$$

Lema dos cinco

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_4"] & M_5 \arrow[d, "\phi_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

Exatas

ⓐ Se ϕ_2 e ϕ_4 são <u>injetivo</u> e ϕ_1 é sobre então ϕ_3 é injetivo

ⓑ Se ϕ_2 e ϕ_4 são sobre e ϕ_5 é injetivo então ϕ_3 é sobre

+ sobre ✓ injetivo

ⓒ Se ϕ_1 ϕ_2 ϕ_4 ϕ_5 são isomorfismo então ϕ_3 é isomorfismo

$$\begin{tikzcd} \overset{d}{M_1} \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/\!/"] & \overset{b}{M_2} \arrow[r, "\theta_2"] \arrow[d, "\phi_2"] \arrow[dr, phantom, "/\!/\!/"] & \overset{a}{M_3} \arrow[r, "\theta_3"] \arrow[d, "\phi_3"] \arrow[dr, phantom, "/\!/\!/"] & M_4 \arrow[r, "\theta_4"] \arrow[d, "\phi_4"] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & M_5 \arrow[d, "\phi_5"] \\ \underset{c}{N_1} \arrow[r, "\rho_1"'] & \underset{\phi_2(b)}{N_2} \arrow[r, "\rho_2"'] & \underset{0}{N_3} \arrow[r, "\rho_3"'] & N_4 \arrow[r, "\rho_4"'] & N_5 \end{tikzcd}$$

$c \longmapsto \phi_2(b)$

(a) Queremos mostrar $\ker(\phi_3) = 0$

$a \in \ker(\phi_3) \Rightarrow \phi_3(a) = 0 \Rightarrow \rho_3(\phi_3(a)) = 0$

$\phi_4(\theta_3(a)) = \rho_3(\phi_3(a)) = 0$

Por Hipótese é injetivo $\theta_3(a) = 0 \Rightarrow a \in \ker(\theta_3)$

$a \in \operatorname{Im}(\theta_2)$ Logo existe $b \in M_2$ tq

$\theta_2(b) = a \Rightarrow 0 = \phi_3(a) = \phi_3(\theta_2(b)) = 0$

$$\phi_3(\theta_2(b)) = \rho_2(\phi_2(b))$$

$\Rightarrow \phi_2(b) \in \ker(\rho_2) = \operatorname{Im}(\rho_1)$

Logo existe $c \in N_1$ tal que

$\rho_1(c) = \phi_2(b)$

Como ϕ_1 é sobre existe $d \in M_1$

tal que $\phi_1(d) = c$

$\phi_2(b) = \rho_1(\phi_1(d)) = \phi_2(\theta_1(d))$ como ϕ_2 é injetivo

$$b = \Theta_1(d) \in Im(\Theta_1) = Ker(\Theta_2)$$

$$\Rightarrow a = \Theta_2(b) = 0$$

Logo ϕ_3 é injetivo

Independencia linear

<u>Def</u>: $S \subset M$ subconjunto M - Amódulo
Os elemente de S são ditos linearmente independentes se para todo subconjunto $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq S$ e para todo $a_1 \dots a_n \in A$ tais que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_1 = \dots = a_n = 0$$

<u>Def</u>: $S \subseteq M$ é um conjunto gerador de M $(M = \langle S \rangle_A)$ se para todo $m \in M$ existem $v_1, \dots, v_n \in S$ $a_1 \dots a_n \in A$ tais que $m = a_1 v_1 + a_2 v_2 \dots + a_n v_n$

Def: Uma base de M é um conjunto de geradores linearmente independentes.

Exemplos: $\mathbb{Z}^k = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{k}$

Uma base $e_1 \dots e_k$ $\qquad e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (1 na posição j)

$v_1 \dots v_n$ $\qquad v_i = \sum_j a_{ij} e_j \qquad a_{ij} \in \mathbb{Z}$

$e_i = \sum b_{ij} v_j \qquad b_{ij} \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \qquad BA = I$$

$v_1 \dots v_n$ é base se A é invertível e A^{-1} tem coeficientes inteiros

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \qquad \det(A) = \pm 1$$

Def: Dizemos que M é cíclico se existe $v \in M$ tal que $M = \langle v \rangle$
$= \{av \mid a \in A\}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & M \\ a & \longmapsto & av \end{array}$$

Usando o 1º teorema do isomorfismo

$$M = Im(\phi) = \frac{A}{Ker\,\phi} = \frac{A}{ann(v)}$$

$\mathbb{Z}_n$ é um $\mathbb{Z}$-modulo

$\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, $m \in \mathbb{Z}$

$$m \cdot \bar{a} = \overline{ma}$$

$$\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{Z}_n \\ m & \longmapsto & m\bar{1} \end{array}$$

$$\mathbb{Z}_n \approx \frac{\mathbb{Z}}{Ker(\theta)} = \frac{\mathbb{Z}}{(n)}$$

$\Rightarrow Ker\,\Theta =$ multiplos de n

Def: $\underbrace{X \text{ conjunto}}$ A anel definimos

o A-módulo **livre**

$$M = \bigoplus_{x \in X} A \Longleftarrow$$

$\bigoplus_{j \in J} M_j$ é o menor módulo dentro $\prod_{j \in J} M_j$

tal que $M_\ell \hookrightarrow \bigoplus M_j$

$$m_\ell \longmapsto (v_j) = \begin{cases} m_\ell & j = \ell \\ 0 & j \neq \ell \end{cases}$$

está bem definido

$M_1 \oplus M_2 \cdots \oplus M_k = \{(m_1, \ldots m_k) \mid m_j \in M_j\}$

$$\prod_{j \in J} M_j = \{ (v_j)_J \mid v_j \in M_j \}$$

$$\{ f : J \to \cup M_j \mid f(j) \in M_j \} \leftarrow$$

$$\bigoplus_{j \in J} M_j = \{ (v_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \mid v_j = 0 \text{ para quase todo } j \}$$

Se $|J| < \infty$ $\prod_{j \in J} M_j = \bigoplus_{j \in J} M_j$

Prop: A anel. As seguintes afirmações são equivalentes para um M - A-módulo

(a) M é livre

(b) Existe uma familia de submodulos cíclicos $\{\underline{N_i}\}_{i\in I}$ $N_i < M$ com

$$N_i \simeq \underline{A} \quad \text{e} \quad \underline{M} \simeq \bigoplus_{i\in I} N_i$$

(c) $M \simeq \bigoplus_{x\in X} A$ para algum $X \neq \emptyset$

(d) existe $X \neq \emptyset$ e uma função $\underline{i : X \to M}$ com a seguinte propriedade

- Para todo A-modulo N e toda função $\phi : X \to N$ existe un única homomorfismo $\overline{\Phi}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & M \arrow[d, dashed, "\overline{\Phi}"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Prova: (a) (c) são a mesma coisa

(b) $\Rightarrow$ (c) trivial

ⓒ $\Rightarrow$ ⓓ $\quad M \simeq \bigoplus_{x \in X} A \quad \boxed{A_x = A}$

Sabemos $\quad \psi : \bigoplus_{x \in X} A_x \longrightarrow M \quad$ isomorfismo

$(e_x)_{x \in X}$ tal que $\quad e_y = (v_x)_{x \in X} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}$
$y \in X$

forma uma base de $\bigoplus_{x \in X} A_x$

$\psi(e_x) \in M$

formam uma base de M

$$\begin{aligned} i : X &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \psi(e_x) \end{aligned}$$

$$x \longmapsto \psi(e_x)$$

forma uma base

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & M \arrow[d, dashed] \\ & N \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto \phi(x) \qquad \psi(e_x) \longmapsto \phi(x)$$

$$\overline{\Phi}(\psi(e_x)) := \phi(x)$$

Extendemos a todos os elementos de M usando que $(\psi(e_x))_{x\in X}$ são uma base

(d) $\Rightarrow$ (a) Basta verificar que $(i(x))_{x \in X}$ formam uma base de M

Consideremos o modulo livre $\bigoplus_{x\in X} A$

$$\phi : X \to \bigoplus_{x \in X} A$$
$$x \longmapsto e_x$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & M \arrow[d, dashed, "\bar{\phi}"] \\ & \bigoplus_{x\in X} A \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto e_x$$

existe! único $\bar{\phi}$ tal que

$$\bar{\phi}(i(x)) = \phi(e_x)$$

Se $(i(x))_{x\in X}$ não são LI

existe $x_1 \dots x_n$ tal e $a_1 \dots a_n$

tal que $a_1 i(x_1) + \dots a_n i(x_n) = 0$

$$\bar{\phi}\left(a_1 i(x_1) + \dots + a_n i(x_n)\right) = 0$$

$$a_1 \bar{\phi}(i(x_1)) + \dots + a_n \bar{\phi}(i(x_n)) = 0$$

$$a_1 e_{x_1} + \dots + a_n e_{x_n} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 \dots = a_n = 0$$

$\Rightarrow$

Concluímos $\langle \underline{\underline{i(x)}} \rangle_{x \in I} \subsetneq M$

é isomorfo a $\bigoplus_{x \in X} A$

$v \in M \quad \bar{\phi}(v) \in \bigoplus_{x \in X} A$

$$\bar{\phi}(v) = a_1 \underline{\underline{e_{x_1}}} + a_2 e_{x_2} + \dots + a_n e_{x_n} \qquad x_j \in X$$

$$= a_1 \bar{\phi}(i(x_1)) + \dots + a_n \bar{\phi}(i(x_n)) \qquad a_j \in A$$

$\bar{\Phi}(v) = \bar{\Phi}(a_1 i(x_1) + \dots + a_n i(x_n))$

$\bar{\phi}$ <u>injetiva</u> ?? $\boxed{v = a_1 i(x_1) \dots + a_n i(x_n)}$

$v \notin \langle i(x) \rangle_{x \in X}$ Poderiamos

definir $\bar{\Phi}(v)$ de qualquer jeito é

estender de forma linear $\bar{\phi}(av+w)$

$a\bar{\Phi}(v) + \bar{\phi}(w)$

e ainda o diagrama comutaria. O

que contradiz a unicidade de $\bar{\phi}$