a) Seja N o $\mathbb{Z}$-módulo de matriz 2×2 com coeficientes inteiros. Considere $f: N \to N$ o homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos definido por $f(A) = AB$ onde:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ determine duas matrizes A_1 e A_2 tais que:

$A = A_1 + A_2$
$A_1 \in \ker(f)$
$A_2 \in \operatorname{Im}(f)$

Continua a b

b) Seja $f: M \to M$ um homomorfismo de A-módulos tal forma que: $f(f(m)) = f(m)$ para todo $m \in M$. Mostrar que: $M = \text{Nuc}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

i) Admitindo que N é dado somando direto, N' tal que $M = N \oplus N'$. Seja $f: M \to M$ dada por $f(n+n') = n$.

Assim definida, f é um homomorfismo de A-módulos. Com isso:

$(f \circ f)(n+n') = f(f(n+n')) = f(n) = n = f(n+n')$, o que mostra que:

$$f \circ f = f.$$

Por definição da f temos que:

$$\text{Im} f \subset N$$

E dado $n \in N$, temos que $f(n+n') = n$ o que mostra que $N \subset \text{Im}(f)$ e portanto, $\text{Im}(f) = N$.

Reciprocamente, admitimos a existência de tal endomorfismo,

Considere $N' = \{m - f(m); m \in M\}$.
Então $M = N \oplus N'$.

Assim, podemos verificar que N' é um A-submódulo.

Sejam $x, y \in N'$, então:

$$x = m_1 - f(m_1)$$
$$y = m_2 - f(m_2)$$

com m_1 e m_2 em M. Assim,

$$x + y = (m_1 - f(m_1)) + (m_2 - f(m_2))$$
$$= [m_1 + m_2] - [f(m_1) + f(m_2)]$$
$$= [m_1 + m_2] - [f(m_1 + m_2)] \in N'$$

E se $r \in R$, temos que:

$$rx = r(m_1 - f(m_1)) = rm - rf(m_1) =$$
$$rm - f(rm) \in N'$$

Portanto N' é um A-submódulo.

Para mostrar que $N \cap N' = \{0\}$, temos que f deixa os elementos de N fixos. De fato, dado $n \in N$, como $\operatorname{Im}(f) = N$, $\exists x \in M$ tal que $f(x) = n$ e como $f \circ f = f$,

$$n = f(x) = f(f(x)) = f(n)$$

Agora, seja $a \in N \cap N'$, então temos que $N' \subseteq Nuc(f)$, pois:

$$f(m - f(m)) = f(m) - f(f(m)) = f(m) - f(m) = 0$$

Portanto, como $a \in N'$, $f(a) = 0$ e como $a \in N$, $f(a) = a$. Logo $a = 0$.

Assim podemos ver que M se escreve como soma direta de elementos de N e N', dado $m \in M$, temos que:

$$m = f(m) + [m - f(m)]$$

E como a $Im(f)$ e o $Nuc(f)$ são submódulos temos que:

$$M = Nuc(f) \oplus Im(f).$$