$\{M_j\}_{j\in J}$ A-modulos

$$\prod M_j = \left\{ f : J \to \bigcup_{j\in J} M_j \;\middle|\; f(j) \in M_j \right\}$$

Se J fosse enumeravel $J = \mathbb{N}$.

$$\prod_{j\in \mathbb{N}} M_j = \left\{ (m_j)_{j\in\mathbb{N}} \;\middle|\; m_j \in M_j \right\}$$

$$f : \mathbb{N} \to \bigcup_{j\in J} M_j$$

- $f, g \in \prod_{j\in J} M_j$ $\quad (f+g)(j) = \underbrace{\underset{\substack{\cap \\ M_j}}{f(j)} + \underset{\substack{\cap \\ M_j}}{g(j)}}$

- $a \in A$ $\quad (af)(j) = \underset{\substack{\cap \\ A}}{a}\,\underset{M_j}{\underbrace{f(j)}} \in M_j \quad \forall i$

$$\bigoplus_{j\in J} M_j \subseteq \prod_{j\in J} M_j$$

$$\bigoplus_{j\in J} M_j = \left\{ f \in \prod_{j\in J} M_j \;\middle|\; \begin{array}{l} f(j)=0 \text{ para} \\ \text{quase todo } j\in J \end{array} \right\}$$

$$\left\{ f \in \prod_{j\in J} M_j \;\middle|\; \begin{array}{l} f(j)\neq 0 \text{ somente} \\ \text{para um } \# \text{ finito} \\ \text{de } j\in J \end{array} \right\}$$

Se J é **finito** $\displaystyle\bigoplus_{j\in J} M_j = \prod_{j\in J} M_j = M_{j_1}\oplus M_{j_2}\oplus \dots \oplus M_{j_\ell}$

$M = \mathbb{Z}_2 \qquad A = \mathbb{Z}_2$

$J = \mathbb{R} \qquad M_x = M \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$\prod_{j\in\mathbb{R}} M_j = \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}_2 \}$$

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{R}} M_j = \{ f:\mathbb{R}\to \underset{\{0,1\}}{\mathbb{Z}_2} \mid f^{-1}(1) \text{ é finito} \}$$

$$f, g \in \bigoplus_{j\in\mathbb{R}} M_j \Rightarrow \underbrace{(f+g)^{-1}(1)}_{\text{finito}} \subseteq \underbrace{f^{-1}(1)}_{} \cup \underbrace{g^{-1}(1)}_{}$$

finito $\Leftarrow$ finitos

$$\bigoplus_{j\in J} M_j \simeq \bigoplus_{j\in J} N_j$$

existe $f : J \to J$ bijeção tal que

$$M_j \simeq N_{f(j)}$$

$J = \mathbb{N}$ $\quad M_j = \mathbb{Z}_2$ $\quad A = \mathbb{Z}_2$

$N_j = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} M_j \longmapsto \boxed{\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} N_j}$$

$f(j) = 0$ para quase todo $j \in \mathbb{N}$

$f : J \to \bigcup M_j$ $\longmapsto$ $g : J \to \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j$

$j \mapsto f(j) \in M_j$

$j \mapsto g(j) = (f(2j), f(2j+1))$

$f : J \to \bigcup M_j \leftarrow g : J \to \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j$

$$j \mapsto \begin{cases} a_{j/2} & j \text{ par} \\ b_{\frac{j+1}{2}} & j \text{ ímpar} \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

ψ

$((a_1, b_1), (a_2, b_2) (a_3, b_3)$

1 2 3 4 4 3

$$\underset{\Downarrow}{\overset{M_j}{}}\quad (a_1\, a_2\, a_3\, \ldots a_j\, a_n \ldots) \longmapsto ((a_1, a_2), (a_3\, a_4), (a_5\, a_6), \overset{N_j}{(a_{2j+1}\, a_{2j+2})}$$

Pag 65

Exercicio 3.2: R é um R-módulo

$$\mathbb{R}^\infty = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{R} = \left\{ (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_j \neq 0 \text{ para um} \\ \text{número finito de } j \end{array} \right\}$$

Dado $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \Rightarrow$ existe ℓ (que depende da sequencia)

tal que $a_j = 0 \quad \forall j > \ell$

ⓐ o conjunto $A = End(\mathbb{R}^\infty)$ das transformações lineares de $\mathbb{R}^\infty$ é um anel unitário para as seguintes operações

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n + c_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\mathbb{R}$

$$(f+g)((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) + g((a_n)_{n\in\mathbb{N}}))$$

$$f\cdot g((a_n)) := f(g((a_n))) = (f\circ g((a_n)))$$

- $+$
  - associativo ✓
  - Comutativo ✓
  - inverso aditivo ✓

$0((a_n)) = (b_j) \quad \underset{\forall j}{b_j = 0}$

↳ função nula

- $id((a_n)_n) := (a_n)$
- $id(f((a_n)_n)) = f((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{id \cdot f = f}$
- $f(id((a_n)_n)) = f((a_n)_n) \Rightarrow f \cdot id = f$

- $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$ Vale pois composição de funções é associativa

(b) $\underset{=\,End(\mathbb{R}^\infty)}{A}$ anel $\rightsquigarrow$ A como A-modulo

$A \cong A \oplus A$ como modulos

$$\boxed{End(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{\Psi} \underline{End(\mathbb{R}^\infty)} \times \underline{End(\mathbb{R}^\infty)}}$$

bijeção

$f \longmapsto \Psi(f) := (g, h)$ onde

$g((a_n)) := f((a_{2n}))$ ✓

$h((a_n)) := f((a_{2n+1}))$ ✓

Seja $(g, h) \in End(\mathbb{R}^\infty) \times End(\mathbb{R}^\infty)$

Queremos um $f \in End(\mathbb{R}^\infty)$ tal que $\Psi(f) = (g, h)$

$$f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \begin{cases} g((a_n)) = (c_n) \\ h((a_n)) = (d_n) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} c_{n/2} & n \text{ par} \\ d_{\frac{n+1}{2}} & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

<u>Ideia:</u>

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} & \text{é uma bijeção} \\ j \longmapsto \begin{cases} j/2 & \text{se } j \text{ é par} \\ -\frac{j+1}{2} & \text{se } j \text{ é ímpar} \end{cases} & \end{array}}$$

Modulo livre M é A-modulo livre se $\exists\, \mathcal{B} \subseteq M$ com as seguintes propriedades

• Os elementos de $\mathcal{B}$ são L.I.

ie Sempre que temos uma combinação linear finita da forma

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_k m_k = 0$$

com $m_j \in \mathcal{B}$ distintos e $a_j \in A$

então $a_j = 0 \quad \forall j$

• Para todo $m \in M$ existem $m_1, \dots, m_k \in \mathcal{B}$ e $a_1, \dots, a_k \in A$ tal que

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_k m_k = m$$

Domínio de integridade

Pergunta: $\mathbb{Z}_{10}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre?

NÃO!! pois sempre que $m \in \mathbb{Z}_{10}$ temos que

$$\underset{\mathbb{Z}}{10} \cdot \underset{\mathbb{Z}_{10}}{m} = \underbrace{m + m + \dots + m}_{10 \text{ vezes}} = \bar{0}$$

Logo nenhum elemento (sozinho) é LI

$\mathbb{Z}_K$ como $\mathbb{Z}$-módulo não tem elementos livres $K \cdot m = 0$

$K \in \mathbb{Z}^*$, $m \in \mathbb{Z}_K$

$\mathbb{Z}_p$ pode ser visto como um $\mathbb{Z}_p$-módulo

$1 \in \mathbb{Z}_p$ é base $\qquad \bar{a} \cdot 1 = 0 \iff \bar{a} = \bar{0}$

$\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$

$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z}_p \text{ com } \mathbb{Z}\text{-modulo NÃO é livre} \\ \mathbb{Z}_p \text{ como } \mathbb{Z}_p\text{-modulo SIM é livre} \end{array} \right.$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \bigsqcup_{j \in J} A_j \qquad A/\sim \\ a, b \in A \quad a \sim b \iff a \text{ e } b \text{ estão no mesmo } A_j \end{array}}$$

Dado $(A, \sim)$ relação de equivalencia

/

$\psi : M \to N$ homomorfismo de A-módulos

$Ker(\psi)$ é um submodulo de M

$m_1, m_2 \in Ker(\psi) \Rightarrow m_1 + m_2 \in Ker(\psi)$

$a \in A \quad m \in Ker(\psi) \quad am \in Ker(\psi)$

$$\frac{M}{Ker(\psi)} = \{ m + Ker(\psi) \mid m \in M \}$$

$$\boxed{m_1 + Ker(\psi) \overset{?}{=} m_2 + Ker(\psi)}$$

$$(m_1 - m_2) + Ker(\psi) = Ker(\psi)$$

$$\boxed{m_1 - m_2 \in Ker\ \psi} \Leftrightarrow m_1 \sim m_2 \doteq$$

$$m + Ker(\psi) = \{ m + u \mid u \in Ker\ \psi \}$$

$$(m + Ker\ \psi) + (n + Ker\ \psi) := (m + n + Ker\ \psi)$$

$$(m+u)+(n+v) = (m+n)+(u+v) \in \ker\varphi)$$

$$(m+w)+(n+0) = (m+n)+w$$

ker ker ker

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{a+n\mathbb{Z} \mid \underline{a\in\mathbb{Z}}\}$$

$1,\ n+1,\ 2n+1,\ 3n+1$

$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$

Supunhamanos que M é um A-módulo livre logo existe

$\mathcal{B} = \{m_j\}_{\underline{j\in J}}$

$A_j = \underline{A}$ como Amódulo

$$\bigoplus_{j \in J} A_j \xrightarrow{\varphi} M = \sum_{j \in J} a_j v_j$$

$$(a_j)_{j \in J} \longmapsto \underline{a_{j_1} m_{j_1} + a_{j_2} m_{j_2} + \dots a_{j_k} m_{j_k} = m}$$

$a_j \neq 0$ só é verdade para um número finito de j's

se são $\neq 0$ para os indices $\{j_1\ j_2 \dots j_k\}$

$v_1 \dots v_k$ é suporte de m

- φ é homomorfismo de A-módulos
- φ isomorfismo → injetivo, → sobre

Se M é A-módulo livre então M é isomorfo a uma soma direta de copias de A

$J = [0,1]$ $\quad \bigoplus_{j \in [0,1]} A_j \quad A_j = A$

$f \in$

$f:[0,1] \to A$ tal que $f(x) \neq 0$ somente para um número finito de $x \in [0,1]$

$A \oplus A \oplus A$

$\downarrow$

(a, b, c)

$\{1,2,3\} \to A$

$1 \longmapsto a$

$2 \longmapsto b$

$3 \longmapsto c$

M A-modulo

$\in$

$m_1 \; m_2 \dots m_k$

$\langle m_1 \dots m_k \rangle_A = \{ a_1 m_1 + \dots + a_k m_k \; / \; a_j \in A \}$

$\hookrightarrow$ é um módulo

fbrocher@mat.ufmg.br

---

exatas

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r, "f_3"] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

$a \qquad f_3(a)$