Funções aditivas e Lema do Cinco

Seja C um classe de A-módulos, onde A é um anel. Uma função:

$$\lambda : C \longrightarrow \mathbb{Z}$$

é aditiva se para qualquer sequência exata de A-módulos.

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Com $M', M, M'' \in C$ tem-se que:

$$\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$$

<u>Observação</u>: Se $0 \in C$ então $\lambda(0) = 0$.

De fato, como $0 \in C$ e a sequência:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

é exata e λ é aditiva então:

$$\lambda(0) = \lambda(0) + \lambda(0) = 2\lambda(0) \longrightarrow \lambda(0) = 0$$

<u>Proposição</u>: Sejam k um corpo e $C = \{V \mid V$ é um k-espaço vetorial com $\dim_k V < \infty\}$

Considere a função $\dim_k : C \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$V \longrightarrow \dim_k V$$

Vamos mostrar que a função $\dim_k$ é uma função aditiva.

Sejam $V', V, V'' \in C$ e seja: $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \longrightarrow 0$

Uma sequência exata de K-espaços vetoriais.

Como $g: V \to V''$ é uma transformação K-linear então, pelo teorema do núcleo e da imagem:

$$\dim_K V = \dim_K \operatorname{nuc} g + \dim_K \operatorname{Im} g$$
$$= \dim_K \operatorname{Im} f + \dim_K V''$$

$f: M \to N$ e $M \cong \operatorname{Im} f$

$$= \dim_K V' + \dim_K V''$$

$$0 \to V_4 \to V_3 \to V_2 \to V_1 \to 0$$

$$-(\dim_K V_4 + \dim_K V_3 + \dim_K V_2 + \dim_K V_1) = 0$$

<u>Proposição</u>: Sejam C uma classe de A-módulos e $\lambda: C \to \mathbb{Z}$ uma função aditiva. Se

$$0 \xrightarrow{f_{N+1}} M_N \xrightarrow{f_N} M_{N-1} \to \cdots \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} 0$$

Onde f_{N+1}, f_1 são morfismos nulos

é uma sequência exata, então $\sum_{i=1}^{N} (-1)^i \lambda(M_i) = 0$

0, M_i, $\operatorname{Im}(f_i)$, $\operatorname{nuc}(f_i) \in C$, $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$

<u>Demo</u>: Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, $N_i = \operatorname{Im}(f_{i+1})$, temos que:

$$0 \to N_i \hookrightarrow M_i \xrightarrow{\tilde{f_i}} N_{i-1} \to 0$$

é uma sequência exata. Como:

$N_i, M_i, N_{i-1} \in \mathcal{C}$ e λ é aditiva, então:

$$\lambda(M_i) = \lambda(N_i) + \lambda(N_{i-1})$$

Logo: $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (-1)^i \lambda(M_i) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \left(\lambda(N_i) + \lambda(N_{i-1})\right) =$

$$(-1)\lambda(N_0) + (-1)^N \lambda(N_N) = (-1).0 + (-1)^N.0 = 0$$

<u>Lema dos 5</u>: Considere o seguinte diagrama de A-módulos (diagrama comutativo).

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_1"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f_2", "\sim"'] & N \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "f_3"] & P \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f_4", "\sim"'] & Q \arrow[d, "f_5"] \\
L' \arrow[r, "\alpha'"'] & M' \arrow[r, "\beta'"'] & N' \arrow[r, "\lambda'"'] & P' \arrow[r, "\gamma'"'] & Q'
\end{tikzcd}$$

Temos que as linhas horizontais são sequências exatas, f_2 e f_4 são isomorfismos de A-módulos, f_1 é sobrejetiva e f_5 é injetiva. "$\underline{f_3 = ?}$":

Então f_3 é isomorfismo de A-módulos.

<u>Demo</u>: f_3 é injetiva.

Seja $v \in \ker f_3$, temos que $f(\lambda(v)) = \lambda'(f_3(v)) = \lambda'(0_{N'}) = 0_{P'} \Rightarrow \lambda(v) \in \ker f_4 = \{0_P\} \Rightarrow \lambda(v) = 0_P \Rightarrow v \in \ker \lambda = \mathrm{Im}\,\beta \Rightarrow \exists x \in M$ tal que $\boxed{v = \beta(x)}$.

Note que $\beta'(f_2(x)) = f_3(\beta(x)) = f_3(v) = 0_{N'} \rightarrow$ $f_2(x) \in \text{nuc}\,\beta' = \text{Im}\,\alpha' \rightarrow \exists\, l' \in L'$ tal que $\boxed{f_2(x) = \alpha'(l')}$.

Como f_1 é sobrejetiva, então existe $l \in L$ tal que $\boxed{f_1(l) = l'}$.

Note que $f_2(\alpha(l)) = \alpha'(f_1(l)) = \alpha'(l') = f_2(x)$ e como f_2 é injetiva então $\boxed{x = \alpha(l)}$

Logo: $v = \beta(x) = \beta(\alpha(x)) = 0_N$, pois a $\text{Im}\,\alpha = \text{nuc}\,\beta$. Com isso mostramos a injetividade.

Vamos agora mostrar que f_3 é sobrejetiva.

Seja $v' \in N'$, como $\lambda'(v') \in P'$ e f_4 é sobrejetiva, então existe $y \in P$ tal que: $\boxed{f_4(y) = \lambda'(v')}$.

Observe que $f_5(\gamma(y)) = \gamma'(f_4(y)) = \gamma'(\lambda'(v')) = 0_{Q'}$ pois a $\text{Im}\,\lambda' = \text{nuc}\,\gamma'$.

Como f_5 é injetiva então $\gamma(y) = 0_Q \rightarrow y \in \text{nuc}\,\gamma = \text{Im}\,\lambda \rightarrow \exists\, v \in N$ tal que $\lambda(v) = y$.

$f_3(v) \in N'$ e $v' \in N'$

$\lambda'(f_3(v)) = f_4(\lambda(v)) = f_4(y) = \lambda'(v')$

Note que $\lambda'(v' - f_3(v)) = \lambda'(v') - \lambda'(f_3(v)) = \lambda'(v') - f_4(\lambda(v)) = \lambda'(v') - f_4(y) = 0_{P'} \longrightarrow v' - f_3(v) \in \text{nuc}\,\lambda' = \text{Im}\,\beta'$

$\exists\, x' \in M'$ tal que $\boxed{v' - f_3(v) = \beta'(x')}$

$$\begin{cases} f_4(y) = \lambda'(v') \\ \lambda(v) = y \\ v' - f_3(v) = \beta'(x') \end{cases}$$

Seja $v' \in N'$, como f_2 é sobrejetiva, então existe $x \in M$ tal que $\boxed{f_2(x) = x'}$.

Note que: $f_3(\beta(x)) = \beta'(f_2(x)) = \beta'(x') = v' - f_3(v)$

Implica que:

$v' = f_3(\beta(x)) + f_3(v) = f_3(\beta(x) + v) \in \operatorname{Im} f_3$.

E temos que $(\beta(x) + v) \in N$

Assim f_3 é sobrejetiva, e portanto é isomorfismo.