Início do conteúdo Pag 183

1) Se $c^2 = c$ em um grupo, prove que $c = e$.

Temos que $c^2 = c$ ou $c.c = c$, então:

$$(c^{-1}).c.c = (c^{-1})c$$
$$e.c = e$$
$$c = e$$

Portanto $c = e$.

---

3) Se $a, b, c, d \in G$, então $(abcd)^{-1} = ?$

$(abcd)^{-1} = ?$

$$(abcd)(a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}) = dcba(a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}) =$$

$$dcbeb^{-1}c^{-1}d^{-1} = dcc^{-1}d^{-1} \overset{e}{=} ded^{-1} = e$$

$$(abcd)^{-1} = d^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1}$$

Temos que: $d^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1}.(abcd) = e$

Como o inverso de $abcd$ é único então:

$$d^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1} = (abcd)^{-1}$$

---

4) Se $a, b \in G$ e $ab = e$, prove que $ba = e$.

Se $ab = e \rightarrow a = b^{-1}$ e $b^{-1}.b = e$

Se $a = b^{-1}$ então: $ba = b.b^{-1} = e$

5| Temos $f: G \rightarrow G$ sendo dado por: $f(a) = a^{-1}$

Prove que f é uma bijeção.

Temos que f é uma função de G em G.

Então;

$$f(a) = \frac{1}{a} = a^{-1}$$

Se tomarmos: a_i com $i: 1, \ldots, n$. Então

$f(a) = a^{-i}$ (temos uma injeção).

E como cada a_i possui uma imagem temos uma sobrejeção. Logo a $f(a) = a^{-1}$ é um bijeção em G!

6| Dê exemplo de um grupo em que a equação $x^2 = e$ tem mais do que 2 soluções.

Tomamos $x^2 = e$ como um polinômio:

$x^2 - e = 0$ se $e = 1$

$x^2 - 1 = 0$

Então:

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = x^2 - 1 = 0$$

Temos mais do que uma solução.

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x = \pm 1/2$$

Para $x = 1/2$:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ 0x - \frac{3}{2}y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x/2 + y = 0 \\ 0 - \frac{3}{2}y = 0 \end{cases}$$

fixamos o $y = 0$

$$\frac{x}{2} + y = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = -y \rightarrow x = -2y$$

$$(x, y) = 2(-y, y/2) = (-2y, y) = y(-2, 1)$$

Para $x = -1/2$.

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{cases} -x/2 + y = 0 \\ x - y/2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x/2 + y = 0 \\ 0 + \frac{3}{2}y = 0 \end{cases}$$

fixamos y. $y = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2y$.

$$(2y, y) = y(2, 1)$$

Como ~~todos~~ os espaços vetoriais p/ adição são grupos então:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ é um grupo.

7) Encontre a ordem de dado elemento.

a) 5 em U_8.

① Determinamos U_8 por: $\mathbb{Z}_N$ por U_N, temos que U_N consiste de todos os elementos $a \in \mathbb{Z}_N$ sendo que:

$(a, N) = 1$, ou seja a e N são primos entre si.

$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Temos que: $\{0, 2, 4, 6\}$ são divisores em 0.

$U_8 = \{1, 3, 5, 7\}$

Temos que em adição: $5+5=10$ com resto $2+5+5=12$ com resto 4.
$4+8=12$ com resto 4.

$$(5+5)+(5+5)+(5+5)+(5+5)=40$$

Em adição temos que 5 possui ordem 8 em U_8, dado que a ordem de um elemento é: $a^l = e$ e e é a identidade na operação.

A ordem de um elemento na multiplicação: $a^k = e$ $\forall k \in \mathbb{Z}+$. A ordem de $|a|$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ em $GL(2, \mathbb{R})$ det: $(0+1) = 1 \neq 0$

$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1/1 & 1/1 \\ -1/1 & 0/1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ inversa

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ordem } 2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{ordem } 3)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{ordem } 4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ordem } 5)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ordem } 6)$$

A ordem é 6

9) Encontre a ordem dos grupos U_{10}, U_{12} e U_{24}.

a) U_{10}: Todos os elementos de $\mathbb{Z}_{10}$ onde:

$(10, a) = 1$ (são primos entre si)

$\mathbb{Z}_{10}: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$U_{10} = \{1, 3, 7, 9\}$ U_{10} possui ordem 4.

b) U_{12}: ? $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$U_{12} = \{1, 5, 7, 11\}$ e U_{12} possui ordem 4.

c) $U_{24} = ?$ $\mathbb{Z}_{24} = \{0, 1, \ldots\ldots, 23\}$

$U_{24} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 23\}$

Ordem 9

b) Liste a ordem de cada elemento de U_{20}.

$\mathbb{Z}_{20} = \{0, 1, \ldots\ldots, 19\}$

$U_{20} = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

Para adição:

i) 1, $\underbrace{1+1+\ldots\ldots+1}_{20} = 20 = 0 \pmod{20}$ ↳ Ordem 20

Ordem 20

ii) 3, $\underbrace{3+3+\ldots\ldots+3}_{20} = 60 = 0 \pmod{20}$ ↳ Ordem 20

iii) 7, $\underbrace{7+7+\ldots\ldots+7}_{20} = 140 = 0 \pmod{20}$ ↳ ordem 20

$7+7+7+7+7 = 35$

$$\begin{array}{r} 7^{5} = 35 \\ 7^{5} = 35 \\ 7^{5} = 35 \\ 7^{5} = 35 \\ \hline 140 \end{array}$$

iv) 9, $\underbrace{9+9+\ldots\ldots+9}_{20} = 180 = 0 \pmod{20}$ Ordem 20

v) 11: $\underbrace{11+11+\dots+11}$ = 220 = 0 (mod 20)

$\overline{11}^{10} = 110$ } 220 ↳ ordem 20

$\overline{11}^{10} = 110$

vi) 13: $\underbrace{13+13+\dots+13}$ = 260 = 0 (mod 20)

13.x = 0 (mod 20) ↳ ordem 20

$\overline{13}^{5} = \underbrace{13+13}_{26}+\underbrace{13+13}_{26}+13 = 65$

65
65
65
65
260

vii) 17: $\underbrace{17+\dots+17}_{20}$ = 340 ↳ = 0 mod 20

↳ ordem 20

viii) 19: $\underbrace{19+\dots+19}_{20}$ = 380 = 0 (mod 20)

↳ ordem 20.

Para multiplicação: