Estruturas Algébricas

Prof.ª Maricélia Soares

UNIASSELVI

2012

Elaboração:

Prof.ª Maricélia Soares

Revisão, Diagramação e Produção:

Centro Universitário Leonardo da Vinci – UNIASSELVI

Ficha catalográfica elaborada na fonte pela Biblioteca Dante Alighieri

UNIASSELVI – Indaial.

512
S676a Soares, Marciléia
Álgebra / Marciléia Soares. Indaial : Uniasselvi, 2012.
192. p.: il

Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-7830- 539-0

1. Álgebra; 2. Cálculo.
I. Centro Universitário Leonardo da Vinci
II. *Núcleo de Ensino a Distância* III. Título

Impresso por:

Apresentação

Prezado acadêmico!

É com satisfação que apresento a você a disciplina de Estruturas Algébricas: a linguagem dos símbolos, das definições, dos axiomas e dos teoremas.

É fato que esta disciplina exigirá muita dedicação, empenho e concentração. Porém você irá se deliciar quando da apropriação da maravilhosa linguagem algébrica. Quando se deparar com dificuldades no entendimento das definições, procure utilizar exemplos numéricos para uma primeira compreensão e depois, faça a generalização do conceito.

Desenvolva cada atividade proposta e retome os conceitos sempre que necessário. Passe por esse período de estudos com muita dedicação, pois você que hoje é acadêmico, mas também um futuro professor, tem compromisso com a melhoria da Educação Matemática em seu país.

Lembre-se de que a paixão pela Matemática deriva do seu entendimento; a beleza desta área do conhecimento é a compreensão da lógica envolvida na sua construção. Por isso, bons professores de Matemática encontram-se sempre apaixonados!

Bom estudo!

Maricélia Soares

NOTA

Você já me conhece das outras disciplinas? Não? É calouro? Enfim, tanto para você que está chegando agora à UNIASSELVI quanto para você que já é veterano, há novidades em nosso material.

Na Educação a Distância, o livro impresso, entregue a todos os acadêmicos desde 2005, é o material base da disciplina. A partir de 2017, nossos livros estão de visual novo, com um formato mais prático, que cabe na bolsa e facilita a leitura.

O conteúdo continua na íntegra, mas a estrutura interna foi aperfeiçoada com nova diagramação no texto, aproveitando ao máximo o espaço da página, o que também contribui para diminuir a extração de árvores para produção de folhas de papel, por exemplo.

Assim, a UNIASSELVI, preocupando-se com o impacto de nossas ações sobre o ambiente, apresenta também este livro no formato digital. Assim, você, acadêmico, tem a possibilidade de estudá-lo com versatilidade nas telas do celular, *tablet* ou computador.

Eu mesmo, UNI, ganhei um novo *layout*, você me verá frequentemente e surgirei para apresentar dicas de vídeos e outras fontes de conhecimento que complementam o assunto em questão.

Todos esses ajustes foram pensados a partir de relatos que recebemos nas pesquisas institucionais sobre os materiais impressos, para que você, nossa maior prioridade, possa continuar seus estudos com um material de qualidade.

Aproveito o momento para convidá-lo para um bate-papo sobre o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE.

Bons estudos!

BATE PAPO SOBRE O ENADE!

Olá, acadêmico!

Você já ouviu falar sobre o **ENADE**?

Se ainda não ouviu falar nada sobre o ENADE, agora você receberá algumas informações sobre o tema.

Ouviu falar? Ótimo, este informativo reforçará o que você já sabe e poderá lhe trazer novidades.

Vamos lá!

Qual é o significado da expressão ENADE?

EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

Em algum momento de sua vida acadêmica você precisará fazer a prova ENADE.

Que prova é essa?

É **obrigatória**, organizada pelo INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

Quem determina que esta prova é obrigatória... O **MEC – Ministério da Educação**.

O objetivo do MEC com esta prova é o de avaliar seu desempenho acadêmico assim como a qualidade do seu curso.

Fique atento! Quem não participa da prova fica impedido de se formar e não pode retirar o diploma de conclusão do curso até regularizar sua situação junto ao MEC.

Não se preocupe porque a partir de hoje nós estaremos auxiliando você nesta caminhada.

Você receberá outros informativos como este, complementando as orientações e esclarecendo suas dúvidas.

Você tem uma trilha de aprendizagem do ENADE, receberá e-mails, SMS, seu tutor e os profissionais do polo também estarão orientados.

Participará de webconferências entre outras tantas atividades para que esteja preparado para #mandar bem na prova ENADE.

Nós aqui no NEAD e também a equipe no polo estamos com você para vencermos este desafio.

Conte sempre com a gente, para juntos mandarmos bem no ENADE!

UNIASSELVI

SUMÁRIO

UNIDADE 1

TEORIA DOS NÚMEROS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Esta unidade tem por objetivos:

- caracterizar relação binária, operação binária e suas respectivas propriedades;

- inferir sobre as propriedades dos números naturais e fazer demonstrações algébricas utilizando o Princípio da Indução Matemática sobre **N**;

- definir as operações elementares em **Z** e suas propriedades operatórias;

- reconhecer o conjunto dos números reais enquanto um corpo ordenado e caracterizar seus elementos.

PLANO DE ESTUDOS

Esta unidade de ensino está dividida em quatro tópicos. No final de cada um deles você encontrará atividades que contribuirão para a apropriação dos conteúdos.

TÓPICO 1 – RELAÇÕES, APLICAÇÕES E OPERAÇÕES

TÓPICO 2 – NÚMEROS NATURAIS

TÓPICO 3 – NÚMEROS INTEIROS

TÓPICO 4 – NÚMEROS REAIS

UNIDADE 1

TÓPICO 1

RELAÇÕES, APLICAÇÕES E OPERAÇÕES

1 INTRODUÇÃO

Na disciplina de Introdução ao Cálculo, você realizou um vasto estudo sobre a Teoria dos Conjuntos. Agora estes conjuntos irão se relacionar entre si formando novas estruturas algébricas – trata-se de uma construção sobre a qual já possuímos a base e estamos erguendo os pilares, relacionando estes conjuntos dois a dois, obtendo o que denominamos de relações binárias.

Vamos observar que todas essas relações possuem estruturas internas e que podem ser representadas por símbolos matemáticos, muitos dos quais já nos familiarizamos na disciplina de Introdução ao Cálculo. Todavia, a tabela de símbolos matemáticos está disponível também no início deste Caderno; utilize-a sempre que necessário.

Ao estudarmos as estruturas, leis internas, veremos que poderemos resolver de uma maneira única um conjunto grande de problemas que possuem a mesma estrutura. Começaremos estudando conceitos simples como par ordenado, produto cartesiano e relações em geral.

2 PAR ORDENADO

O conceito de par ordenado também já foi explorado na disciplina de Introdução ao Cálculo. Vamos apenas relembrá-lo:

Sejam os conjuntos A e B (não vazios). Chamamos de **par ordenado dos elementos de A e B** ao par **(a, b)**, onde **a** $\in$ A e **b** $\in$ B, **nesta ordem**.

Exemplos:

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$. Então:

a) (1, 4) é par ordenado de A e B, pois $1 \in A$ e $4 \in B$.
b) (8, 2) não é par ordenado de A e B, pois $8 \notin A$ e $2 \in B$.
c) (1, 1) é par ordenado de A e B, pois $1 \in A$ e $1 \in B$.
d) (3, 16) é par ordenado de A e B, pois $3 \in A$ e $16 \in B$.

Observe que **a** é a primeira componente do par ordenado e **b** é a segunda componente, permitindo que se distinga o par ordenado de coordenadas **(a, b)** do par ordenado de coordenadas **(b, a)**, exceto no caso em que **a** = **b**. Observe também que a definição indica **a** $\in$ A e **b** $\in$ B. Naturalmente que os conjuntos A e B podem ser iguais, definindo-se assim pares ordenados de dois elementos de um mesmo conjunto.

Podemos ter também ternas ordenadas, implicando uma terceira componente. De modo geral, podemos generalizar este conceito de par ordenado e terna ordenada para *n-upla* ordenada:

Sejam os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (não vazios), chamamos de **n-upla ordenada** a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde $x_j \in A_j$, com $j = 1, 2, 3, \ldots$, ou seja, $(x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2, \ldots)$.
Se o número de conjuntos for finito, a n-upla é finita, se for infinito a n-upla é dita infinita.

3 PRODUTO CARTESIANO

O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B, indicado por $A \times B$ (lê-se: "A cartesiano B"), é o conjunto dos **pares ordenados** com primeiras componentes no conjunto A e segundas componentes no conjunto B.

Matematicamente, representamos:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Analogamente, temos:

$$\mathbf{B \times A = \{(b, a) \mid b \in B \text{ e } a \in A\}}$$

Observe que a definição possibilita averiguar que $A \times B \neq B \times A$, se $A \neq B$. No caso de $A = B$, então indicamos o produto cartesiano por $A^2 = A \times A$.

Exemplos:

a) Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y\}$, então $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$, ou seja, todos os possíveis pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$.

b) Seja $A = B = \{a, b\}$, então $A \times B = A^2 = B^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

c) Seja $A = B = \mathbf{N}$, então $A \times B = \mathbf{N} \times \mathbf{N} = \mathbf{N}^2$, que consiste em infinitas n-uplas ordenadas de números naturais. Observe que, como os conjuntos relacionados são infinitos, o produto cartesiano resulta em n-uplas infinitas.

d) Seja $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$ e $C = \{1, 2\}$, então $A \times B \times C = \{(a, c, 1). (a, c, 2), (b, c, 1), (b, c, 2)\}$.

e) Seja $A = \varnothing$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então $A \times B = \varnothing$, isto é, não há pares ordenados derivados deste produto cartesiano, haja vista que A é conjunto vazio, não é possível a relação com os elementos de B.

Os exemplos (a) e (b) permitem perceber que o número de pares ordenados derivados da relação $A \times B$ será igual ao produto entre o número de elementos de A (designamos por n(A)) e o número de elementos de B (designamos por n(B)). No exemplo (e), temos que $n(A) = 0$ e $n(B) = 3$ e o produto $0 \cdot 3 = 0$, ou seja, não há elementos derivados de $A \times B$.

Matematicamente, representamos:

$$\boxed{n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)}$$

Neste estudo, usaremos com maior frequência o produto cartesiano de dois conjuntos. Os produtos cartesianos do tipo A^n estão bastante associados à Álgebra Linear e às geometrias.

3.1 REPRESENTAÇÕES DOS PRODUTOS CARTESIANOS

3.1.1 Representação descritiva

Representar descritivamente um produto cartesiano, assim como já estudamos em Teoria dos Conjuntos, é apresentar todos os elementos deste produto cartesiano entre chaves e separados por vírgula, como vínhamos fazendo nos exemplos que apresentamos até agora.

Exemplo: Sejam os conjuntos A = {a, b, c} e B = {b, c, d}.

Representando A × B de modo descritivo, apresentamos todos os pares ordenados que façam parte desta relação:

A × B = {(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d)}.

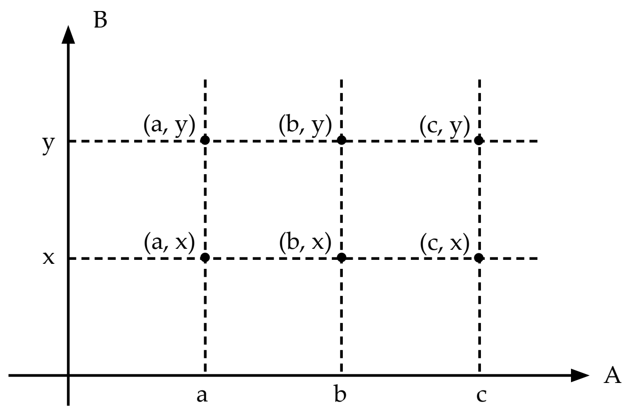
3.1.2 Representação cartesiana ortogonal

Na representação cartesiana ortogonal, os pares ordenados que compõem o produto cartesiano são apresentados graficamente.

Exemplos:

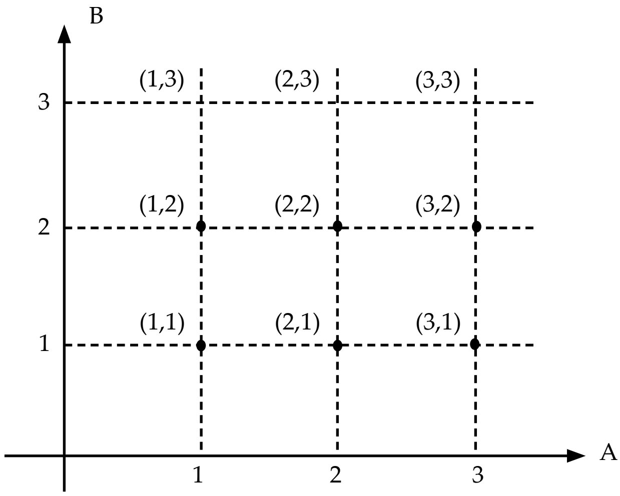
a) Seja A = {a, b, c} e B = {x, y}. Então, na forma descritiva, teríamos a seguinte representação de A × B = {(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)}.

Na representação cartesiana ortogonal, o produto cartesiano será representado pelo gráfico a seguir:



b) Seja A = B = {1, 2, 3}. A representação cartesiana ortogonal será composta dos pares ordenados:

$A \times B = A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

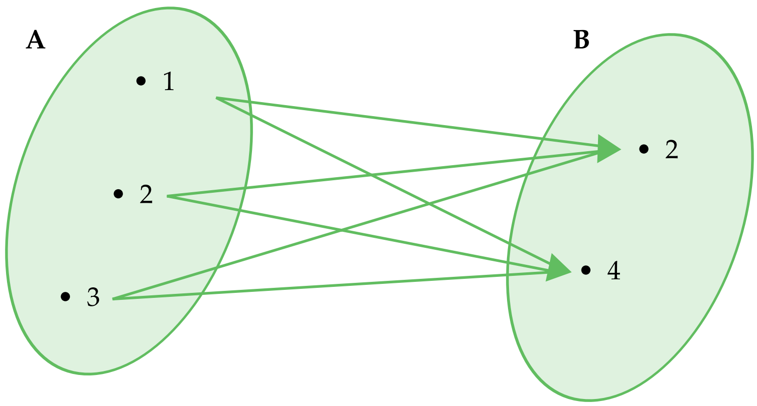


3.1.3 Representação por diagrama de Venn

Do mesmo modo como representamos um conjunto através de um diagrama de Venn, na Unidade 1, também o produto cartesiano entre dois conjuntos pode ser assim representado. Isto implica descrever os elementos que, no caso do produto cartesiano entre A e B, são pares ordenados, simbolizando-os por pontos interiores a uma região plana, limitada por uma linha fechada que não se entrelaça.

No caso do produto cartesiano, existe uma relação entre os conjuntos A e B, o que aqui será simbolizado por flechas, como no exemplo a seguir.

Exemplo: Seja A = {1, 2, 3} e B = {2, 4}, a relação $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$; em diagramas de Venn, temos:



4 RELAÇÕES BINÁRIAS

De modo geral, dizemos que uma relação binária é uma relação entre elementos de dois conjuntos. Assim como o produto cartesiano que estudamos no item anterior, a relação binária é um conjunto de pares ordenados. Todavia, esses pares podem ou não atender a uma condição ou propriedade específica.

As relações binárias são comuns em muitas áreas da Matemática para definir conceitos como "é múltiplo de" e "é maior que" na Aritmética, como também "é congruente a" na Geometria, entre outros.

Dados dois conjuntos A e B, ambos não vazios, definimos como sendo uma relação binária, entre A e B, qualquer subconjunto de $A \times B$ ou qualquer elemento do conjunto $A \times B$ e indicamos essa relação por R.

Observe que os elementos de $A \times B$ (produto cartesiano entre os conjuntos A e B) são pares ordenados.

Em outras palavras, uma **relação binária** é definida como sendo um subconjunto do produto cartesiano entre dois conjuntos A e B, isto é, uma relação R é um conjunto de pares ordenados. Em particular, temos que um subconjunto de $A \times A$ pode ser chamado simplesmente de relação binária em A.

Matematicamente, representamos:

R é relação binária entre A e B se, e somente se, $R \subset (A \times B)$, com A e B não vazios.

Seja R uma relação de A para B. Como já definimos, R será um conjunto de pares ordenados onde cada primeiro elemento pertence a A e cada segundo elemento pertence a B, isto é, para cada par ordenado $(a,b) \in R$, $a \in A$ e $b \in B$. Então uma, e somente uma, das seguintes afirmativas será verdadeira:

- Se $(a,b) \in R$, então dizemos que "**a** é relacionado a **b** a partir da relação R", escrevendo aRb.

- Se $(a,b) \notin R$ então dizemos que "**a** não é relacionado a **b** a partir da relação R", escrevendo $a \not{R} b$.

Exemplos:

a) Sendo $A = \{a, b\}$ e $B = \{x, y, z\}$:

Da definição de produto cartesiano, temos: $A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}$.

Qualquer subconjunto (parte) de $A \times B$ é uma relação binária de A e B ou entre A e B. Logo:

- $R_1 = \{(a, x), (b, x), (b, z)\} \subset (A \times B)$ é relação binária entre A e B.

- $R_2 = \{(a, x), (b, x)\} \subset (A \times B)$ é relação binária entre A e B.

- $R_3 = \varnothing \subset (A \times B)$ é relação binária entre A e B.

- $R_4 = \{(a, x), (b, y), (b, z), (a, z)\} \subset (A \times B)$ é relação binária entre A e B.

- $R_5 = (A \times B) \subseteq (A \times B)$ é relação binária entre A e B.

Observe que no exemplo, R_5 é o próprio produto cartesiano entre A e B, que também é uma relação binária. Assim, todo produto cartesiano entre dois conjuntos pode ser entendido como uma relação binária entre eles.

Como $n(A \times B) = 6$, então $2^6 = 64$ indicará a existência de 64 possíveis relações entre A e B, incluindo o conjunto vazio e o próprio conjunto $A \times B$.

b) Numa relação R definida por $R = \{(a, b) \in \mathbf{N}^2 \mid a + b = 2\}$

- $R_1 = \{(2, 0), (0, 2), (1, 1)\} \subset (\mathbf{N} \times \mathbf{N})$ é relação binária de $\mathbf{N}^2$.

- $R_2 = \{(0, 2)\} \subset (\mathbf{N} \times \mathbf{N})$ é relação binária de $\mathbf{N}^2$.
- $R_3 = \{(-1, 3)\} \not\subset (\mathbf{N} \times \mathbf{N})$, pois o elemento $\mathbf{a} \notin \mathbf{N}$. Logo R_3 não é relação binária de $\mathbf{N}^2$.

Observe que $R = \{(a, b) \in N^2 \mid a + b = 2\}$ é a relação entre os infinitos números naturais a e b que satisfazem à condição $a + b = 2$.

c) Admita o conjunto de objetos A = {carro, bola, boneca, bala} e o conjunto B constituido de quatro pessoas B = {João, Maria, Marcos, Pedro}.

Considere que "João tem a bola", "Maria tem a boneca", "Pedro tem o carro", "Ninguém tem a bala", "Marcos não tem nada".

Então a relação binária R = "pertence a", entre A e B, é dada pelos seguintes pares ordenados: R = {(bola, João), (boneca, Maria), (carro, Pedro)}.

d) Seja $A = B = \{a, b, c\}$, temos:

$$A \times B = A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}.$$

Como $n(A^2) = 9$, então, a partir de A^2 são definidas $2^9 = 512$ possíveis relações binárias; vejamos algumas:

- $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\} \subset A^2$.
- $R_2 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\} \subset A^2$.
- $R_3 = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\} \subset A^2$.
- $R_4 = \varnothing \subset A^2$. Este exemplo apresenta uma relação binária em A, pois $R \subset A \times A$ ou $R \subset A^2$.

Sobre este tipo particular de relação binária, algumas propriedades são apresentadas na sequência.

4.1 PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES BINÁRIAS EM A

Para entender as propriedades derivadas das relações binárias em A, vamos, inicialmente, particularizar a definição de relação binária entre A e B para o caso em que A = B.

Assim, considere A um conjunto não vazio. Uma relação binária R sobre o conjunto A (ou endorrelação ou autorrelação) é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times A$, isto é, $R \subset A \times A$. Um par ordenado $(a, b) \subset A \times A$ satisfaz a relação R quando (a, b) R ou aRb, caso contrário, $(a, b) \not\subset R$ ou $a \not R\, b$.

A partir do exemplo seguinte, vamos definir algumas propriedades sobre R em A.

Seja A = {1, 2, 3, 4}, temos que o produto cartesiano A × A = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2) (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}.

Considere as seguintes relações em A × A:

- R_1 = {(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)};
- R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)};
- R_3 = {(1, 3), (2, 1)};
- $R_4 = \emptyset$, a relação vazia;
- $R_5 = A \times A$, a relação universal.

4.1.1 Reflexividade

A relação binária R é dita **reflexiva** se aRa para todo $a \in A$, isto é, se $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$. Ou seja, se todos os elementos se relacionam com si próprios.

Matematicamente, representamos:

$$\boxed{R \text{ é reflexiva em } A \Leftrightarrow \forall a \in A,\ aRa}$$

Uma relação é **irreflexiva** se nenhum elemento se relaciona com si próprio.

Dos exemplos citados, como A = {1, 2, 3, 4}, uma relação R em (A × A) é reflexiva se contém os quatro pares (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4). Portanto, apenas R_2 e a relação universal R_5 são reflexivas. Note que R_1 , R_3 e R_4 não são reflexivas, uma vez que, por exemplo, o par ordenado (2, 2) não pertence a nenhuma delas. Além disso, as relações R_3 e R_4 podem ser chamadas de irreflexivas, visto que não possuem nenhum desses 4 pares ordenados.

4.1.2 Simetria

A relação binária R é dita **simétrica** se, para todo **a**, **b** $\in$ A, aRb implica bRa.

Matematicamente, representamos:

$$R \text{ é simétrica em } A \Leftrightarrow (\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R)$$
ou
$$R \text{ é simétrica em } A \Leftrightarrow (aRb \Rightarrow bRa).$$

Observe que R_1 não é simétrica, já que (1, 2) $\in R_1$, mas (2, 1) $\notin R_1$. A relação binária R_3 também não é simétrica, pois o par ordenado (1, 3) $\in R_3$, mas (3, 1) $\notin R_3$. As demais relações apresentadas no exemplo são simétricas.

Uma relação **antissimétrica** é tal que se aRb e bRa então a = b. Perceba que R_2 não é antissimétrica, já que (1, 2) e (2, 1) pertencem a R_2 , mas 1 ≠ 2. Analogamente, a relação universal R_5 não é antissimétrica.

Matematicamente, representamos:

$$R \text{ é antissimétrica em } A \Leftrightarrow (\forall a, b \in A, (a, b) \in R, (b, a) \in R \quad a = b)$$
ou
$$R \text{ é antissimétrica em } A \Leftrightarrow (aRb \text{ e } bRa \Rightarrow a = b).$$

Observe que R_1 não é simétrica, já que (1, 2) $\in R_1$, mas (2, 1) $\notin R_1$. A relação binária R_3 também não é simétrica, pois o par ordenado (1, 3) $\in R_3$, mas (3, 1) $\notin R_3$. As demais relações apresentadas no exemplo são simétricas.

Uma relação **antissimétrica** é tal que se aRb e bRa então a = b. Perceba que R_2 não é antissimétrica, já que (1, 2) e (2, 1) pertencem a R_2 , mas 1 ≠ 2. Analogamente, a relação universal R_5 não é antissimétrica.

Matematicamente, representamos:

R é antissimétrica em A $\Leftrightarrow$ ($\forall$a, b $\in$ A, (a, b) $\in$ R, (b, a) $\in$ R a = b)
ou
R é antissimétrica em A $\Leftrightarrow$ (aRb e bRa $\Rightarrow$ a = b).

Observe que as propriedades de simetria e antissimetria não são mutuamente excludentes. Por exemplo, a relação R = {(1, 3), (3, 1), (2, 3)} não é nem simétrica (pois o par (3, 2) $\notin$ R) nem antissimétrica (pois os pares (1, 1), (2, 2), (3, 3) $\notin$ R). Por outro lado, a relação R = {(1, 1), (2, 2)} é simétrica e antissimétrica.

Uma relação binária é dita **assimétrica** quando aRb implica a não existência de bRa, ou seja, quando não é simétrica.

4.1.3 Transitividade

A relação binária R é dita **transitiva** quando aRb e bRc implicam aRc, para todos **a**, **b**, **c** $\in$ A.

Matematicamente, representamos:

R é transitiva em A $\Leftrightarrow$ ($\forall$a, b, c $\in$ A, (a, b), (b, c) $\in$ R $\Rightarrow$ (a, c) $\in$ R)
ou
R é transitiva em A $\Leftrightarrow$ (aRb, bRc $\Rightarrow$ aRc).

Voltando ao exemplo inicial, temos que a relação R_3 não é transitiva porque (2, 1) e (1, 3) $\in$ R_3, mas (2, 3) $\notin$ R_3 . Todas as outras relações são transitivas.

A relação se diz **antitransitiva** quando aRb e bRc, mas a $\not R$ c.

Exemplo:

Vamos considerar o conjunto **Z**, dos números inteiros, e as seguintes relações "x é múltiplo de y", "x é igual a y", "x é menor ou igual a y" e "x é menor que y". Vamos classificá-las em reflexiva, simétrica, antissimétrica e transitiva, conforme o que acabamos de estudar.

O quadro a seguir sintetiza as propriedades válidas para cada uma das relações:

QUADRO 1 – PROPRIEDADES VÁLIDAS PARA CADA UMA DAS RELAÇÕES

Relação (xRy)	Reflexiva	Simétrica	Antissimétrica	Transitiva
x é múltiplo de y			✓	✓
$x = y$	✓	✓	✓	✓
$x \leq y$	✓		✓	✓
$x < y$			✓	✓

FONTE: A autora

Uma relação que é, simultaneamente, reflexiva, simétrica e transitiva é chamada de uma relação de equivalência.

5 APLICAÇÕES BINÁRIAS

Uma aplicação binária é um caso particular de relação entre dois conjuntos A e B. Dentre todas as possíveis relações binárias em um determinado produto cartesiano, existe um tipo de subconjunto em especial: são relações em que cada elemento de A está relacionado com um único elemento de B. Uma relação que satisfaz a essa propriedade recebe o nome de função ou aplicação binária, como vamos definir formalmente a seguir.

Este tipo de relação infere em muitas aplicações na Matemática, pois no estudo científico de qualquer fato, sempre se procura identificar grandezas mensuráveis ligadas a ele, verificando a existência ou não de possíveis padrões e, em seguida, estabelecendo as relações entre essas grandezas. Os diferentes tipos de funções possibilitam modelar diversas situações reais, servindo de aporte e ferramental matemático para compreensão de fenômenos científicos.

Se $x \in A$ e $y \in B$ são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor para y, dizemos que y é uma aplicação de A em B ou uma função f(x) (lê-se "f de x") $f \subset (A \times B)$.

Nem todas as relações no produto cartesiano são aplicações.

IMPORTANTE

Uma relação $R \subset (A \times B)$ é dita **aplicação**, **função** ou **transformação** se:
i) $D(R) = A$, isto é, todos os elementos $x \in A$ estão envolvidos na relação;
ii) para cada elemento $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$ que lhe corresponde.

Se houver algum elemento $x \in A$ relacionado com mais de um elemento $y \in B$, ou algum $x \in A$ não relacionado a algum $y \in B$, então a relação não é uma aplicação de A em B.

Uma notação usual para uma aplicação binária ou uma função f definida no produto cartesiano $A \times B$, é $f: A \rightarrow B$, a qual se lê "função f de A em B" ou ainda $f \subset (A \times B)$, que significa "função f contida em A cartesiano B", ambas simbolizando a mesma ideia.

Não nos deteremos a um estudo das particularidades das aplicações, pois o mesmo já foi realizado na disciplina de Introdução ao Cálculo.

6 OPERAÇÕES BINÁRIAS

Dado um conjunto A, não vazio, consideramos uma **operação binária sobre A**, a aplicação do produto cartesiano de A em A, ou seja $A \times A$, sobre o próprio conjunto A. Podemos representá-la como: $f: A \times A \rightarrow A$. Desta forma, toda operação binária é uma função com duas variáveis de entrada, ou cujo domínio possui duas variáveis oriundas do produto cartesiano em A.

Matematicamente, definimos:

Seja A um conjunto não vazio.
Toda aplicação binária $f: (A \times A) \rightarrow A$ recebe o nome de operação binária sobre A ou lei de composição interna em A.

Uma operação binária pode também ser definida em conjuntos distintos, por exemplo, f: (A × B) → C, com A, B, C não vazios. Porém, para nossos estudos posteriores sobre Estruturas Algébricas (Unidade 2), abordando as características dos Grupos, Anéis e Corpos, será de interesse apenas as operações binárias sobre um único conjunto.

As operações da aritmética como adição, divisão e multiplicação são exemplos de operações binárias. As operações utilizadas em linguagens de programação, através de predicados lógicos como OR (ou); XOR (ou exclusivo) e AND (e), também são exemplos de operações binárias.

Exemplos: Seja **N** o conjunto dos números naturais.

a) A aplicação f: **N** × **N** → **N**, tal que f(x, y) = x + y é uma operação binária, onde '+' é a adição usual. A operação envolvida associa a cada par ordenado de números naturais (x, y) sua soma x + y.

b) A aplicação f: **N** × **N** → **N** definida por f(x, y) = x · y é uma operação binária, onde '·' é a multiplicação usual. A aplicação f associa a cada par ordenado de números naturais (x, y) seu produto x · y.

c) A aplicação f: **N** × **N** → **N** definida por f(x, y) = x – y **não é uma operação binária**, pois nem sempre a diferença x – y resultará em um número pertencente ao conjunto **N** dos números naturais.

d) A aplicação f: N × N → N definida por f(x, y) = $\frac{x}{y}$ não é uma operação binária, pois nem sempre o quociente resultante de $\frac{x}{y}$ pertencerá ao conjunto N dos números naturais.

6.1 PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES BINÁRIAS

Para analisarmos cada uma das propriedades das operações binárias, vamos considerar A um conjunto não vazio e, sobre A, uma operação binária qualquer, que denotaremos por '♦'.

Desse modo, a operação binária '♦' possui a propriedade:

- Fechamento: quando (m ♦ n) ∈ A, ∀m, n ∈ A.

Dizemos que a operação binária '♦' é fechada em A. Esta propriedade faz parte da própria definição de operação binária sobre um conjunto.

- Associativa: quando m ♦ (n ♦ p) = (m ♦ n) ♦ p, ∀m, n, p ∈ A.

- Comutativa: quando m ♦ n = n ♦ m, ∀m, n ∈ A.

- Elemento Neutro (ou Identidade): existe $\boldsymbol{e} \in A$ tal que, $\forall m \in A$, $(m \blacklozenge \boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e} \blacklozenge m) = m$. Chamamos $\boldsymbol{e}$ de elemento neutro da operação binária.

- Elemento Simétrico (oposto ou inverso): $\forall m \in A$, $\exists\, x \in A$, tal que: $(m \blacklozenge x) = (x \blacklozenge m) = \boldsymbol{e}$, onde $\boldsymbol{e}$ é o elemento neutro da operação binária.

Esta propriedade, designada por elemento simétrico, pode se referir ao **elemento oposto** ou **elemento inverso**, dependendo da operação utilizada. Por exemplo: se a operação envolvida for a adição usual, o simétrico aditivo de $m \in A$ é denotado por $-m$ e conhecido como oposto, mas se a operação binária em questão for a multiplicação usual, o simétrico multiplicativo de $m \in A$ é denotado por m^{-1} e conhecido como inverso.

- Distributiva: Uma operação binária '$\bullet$' é dita distributiva sobre '$\blacklozenge$' quando:

$$\forall m, n, p \in A,\ x \bullet (y \blacklozenge z) = (x \bullet y) \blacklozenge (x \bullet z);$$
$$\forall m, n, p \in A,\ (x \blacklozenge y) \bullet z = (x \bullet z) \blacklozenge (y \bullet z).$$

6.2 TEOREMAS ASSOCIADOS

- **Teorema 1:** Se y é um simétrico de x com respeito à operação binária $\blacklozenge$, então y é único, ou seja, cada elemento x possui um único simétrico.

Demonstração: Vamos partir da ideia contrária a que queremos provar, ou seja, vamos supor que, para algum $x \in A$, existem $y, w \in A$, ambos simétricos de x com relação à operação binária $\blacklozenge$. Seja $\boldsymbol{e}$ o elemento neutro para a operação binária $\blacklozenge$ sobre A. Assim, temos que:

$$y = y \blacklozenge \boldsymbol{e} = y \blacklozenge (x \blacklozenge w) = (y \blacklozenge x) \blacklozenge w = \boldsymbol{e} \blacklozenge w = w.$$

Logo $y = w$, portanto, existe um único elemento simétrico para cada $x \in A$.

- **Teorema 2:** A identidade para uma operação binária é única.

Demonstração: Seja A um conjunto e $\blacklozenge$ uma operação binária definida em A. Como no teorema anterior, vamos partir da ideia contrária a que queremos provar, ou seja, vamos supor que existam $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \in A$, ambos elementos neutros para $\blacklozenge$. Assim, temos que:

$$\forall x \in A \begin{cases} x \blacklozenge e = e \blacklozenge x = x \\ x \blacklozenge f = f \blacklozenge x = x \end{cases} \qquad \text{Em particular} \begin{cases} e \blacklozenge f = f \blacklozenge e = e \\ e \blacklozenge f = f \blacklozenge e = f \end{cases}$$

Logo $e = f$. Portanto, existe um único elemento identidade para a operação binária ♦.

6.3 TABELAS DE OPERAÇÕES BINÁRIAS

Uma operação binária sobre A, sendo A um conjunto finito, pode ser representada através de uma tabela de dupla entrada, na forma matricial, onde a operação em questão relaciona elementos de uma linha com elementos de uma coluna. Essa representação também é denominada de tábua de Cayley, em referência a Arthur Cayley (1821-1895).

Exemplos:

a) Considere a operação ⊕ sobre o conjunto **S** = {0, 1, 2, 3}, definida na tabela a seguir. Essa operação é também conhecida como Matemática das Classes Residuais.

⊕	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Desta tabela operatória, podemos identificar as seguintes propriedades:

✓ O conjunto **S** é fechado, ou seja, todos os elementos resultantes da operação binária pertencem a **S**.

✓ A associatividade é verificada para todos os elementos.

✓ A simetria dos elementos em relação à diagonal principal apresenta a comutatividade da operação sobre **S**.

✓ O elemento neutro é o zero.

✓ O simétrico de 0 é 0, o simétrico de 1 é 3, o simétrico de 2 é 2 e o simétrico de 3 é 1.

b) Considere a operação binária • sobre o conjunto **S** = {a, b, c, d, e}, definida na tabela operatória a seguir:

•	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	a	e	d	c
c	c	b	a	e	d
d	d	c	b	a	e
e	e	d	c	b	a

Desta tabela operatória, podemos identificar as seguintes propriedades:

✓ O conjunto **S** é fechado com relação à operação •, ou seja, todos os elementos resultantes da operação binária pertencem a **S**.

- ✓ Não apresenta associatividade entre seus elementos.
- ✓ Não é comutativa. Observe, por exemplo, que $c \bullet b \neq b \bullet c$.
- ✓ O elemento neutro da operação é **a**.
- ✓ O simétrico de **a** é **a**, o simétrico de **b** é **b**, o simétrico de **c** é **c**, o simétrico de **d** é **d** e o simétrico de **e** é **e**.

RESUMO DO TÓPICO 1

- Quanto à definição de par ordenado:

Sejam os conjuntos A e B (não vazios); chamamos de par ordenado dos elementos de A e B ao par (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$, nesta ordem.

- Quanto ao produto cartesiano entre A e B:

O produto cartesiano $(A \times B)$ é o conjunto dos pares ordenados com primeiras componentes no conjunto A e segundas componentes no conjunto B.

- Quanto à definição de relação binária:

R é relação binária entre A e B se, e somente se, $R \subset (A \times B)$.

- Quanto às propriedades de uma relação binária sobre o conjunto A:

- Reflexiva: R é reflexiva em A $\Leftrightarrow (\forall a \in A, (a, a) \in R)$.

- Simétrica: R é simétrica em A $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R)$.

- Anti-Simétrica: R é antissimétrica em A $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A, (a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b)$.

- Transitiva: R é transitiva em A $\Leftrightarrow (\forall a, b, c \in A, (a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R)$.

- Quanto à definição de aplicação binária:

Uma relação $R \subset (A \times B)$ é dita aplicação, função ou transformação se:

i) $D(R) = A$, todos os elementos x de A estão envolvidos na relação;
ii) para cada elemento $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$ que lhe corresponde.

- Quanto à definição de operação binária:

Seja A um conjunto não vazio. Toda aplicação binária $f: (A \times A) \rightarrow A$ recebe o nome de operação binária sobre A ou lei de composição interna em A.

- Quanto às propriedades de uma operação binária sobre o conjunto A:

Fechamento; Associativa; Comutativa; Elemento Neutro (ou Identidade); Elemento Simétrico (oposto ou inverso) e Distributiva.

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico!

Seguem algumas autoatividades que permitirão a você exercitar os conceitos que acabamos de estudar.

Bom trabalho!

1 Sendo $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 2, 4\}$, determine:

a) $n(A \times B)$;
b) a representação cartesiana ortogonal de $A \times B$;
c) a representação cartesiana ortogonal de $B \times A$.

2 Determinar o produto cartesiano dos conjuntos $A = \{0, 1\}$ e $B = \{0, 2, 4\}$ e construir um gráfico. Mostrar que $(A \times B) \neq (B \times A)$, o que significa que a lei comutativa não é válida para o produto cartesiano.

3 Sejam $S = \{a, A\}$, $T = \{b, B\}$, $U = \{c, C\}$. Definir todos os possíveis ternos ordenados resultantes do produto cartesiano $S \times T \times U$.

4 Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. A desigualdade $x + y \geq 3$ define uma relação no produto cartesiano $(A \times A)$, ou seja, $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A \text{ e } x + y \geq 3\}$. Quantos dos 25 pares $(x, y) \in (A \times A)$ satisfazem a esta desigualdade?

5 Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{x, y, z, w, t\}$.

a) Escreva cinco pares ordenados de A e B.
b) Por que (a, a), (x, a), (w, c), (x, x) não são pares ordenados de A e B?
c) Quantos pares ordenados podemos obter de A e B?
d) Escreva três pares ordenados em que o 2º elemento é t.
e) Escreva $A \times B$.
f) Escreva $B \times A$.

6 Seja $A = B = \{x, y, z, t, u\}$. Escreva:

a) Duas relações reflexivas.
b) Duas relações simétricas.
c) Três relações transitivas.
d) Duas relações reflexivas e simétricas.
e) Duas relações reflexivas, simétricas e transitivas.

7 Para as relações seguintes indique as suas propriedades. Diga se a relação é reflexiva, irreflexiva, simétrica, antissimétrica, transitiva. Todas as relações são consideradas no conjunto dos seres humanos:

"x é irmão de y"
"x é pai de y"
"x é casado com y"
"x é primo de y"

8 Para cada uma das tabelas operatórias a seguir, verifique quais propriedades das operações binárias são válidas:

a) Considere o conjunto A = { -1, 1}, cuja operação binária é a multiplicação usual:

-	**-1**	**1**
-1	1	-1
1	-1	1

b) Considere o conjunto B = {1, i, -1, -i} de números complexos que são raízes da equação $x^4 - 1 = 0$, cuja operação binária é a multiplicação usual:

-	**1**	**i**	**-1**	**-i**
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

c) Considere o conjunto C = {0, 1}, cuja operação binária é a adição ⊕:

⊕	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

TÓPICO 2

NÚMEROS NATURAIS

1 INTRODUÇÃO

Alguns objetos matemáticos são admitidos de forma primitiva, não sendo necessário defini-los. Um *conjunto*, por exemplo, é um desses objetos, denominado de entes primitivos, enquanto que uma *função* não o é, sendo necessário defini-la.

Outra forma de se conceber objetos matemáticos é estabelecendo propriedades que aquele objeto deve satisfazer, independente de qualquer conceituação anterior. Neste caso, tais propriedades são chamadas *axiomas* ou *postulados* e dizemos que tal objeto foi construído *axiomaticamente*. Os axiomas são proposições aceitas sem demonstração; são evidentes por si mesmas.

Teorias matemáticas são elaboradas a partir de *axiomas*. Nestes casos, objetos são concebidos de forma primitiva e estabelecem as propriedades (os axiomas) que devem satisfazer. Uma teoria assim construída é dita *teoria axiomática* e o exemplo clássico disto é a Geometria Plana (ou euclidiana). A Geometria Plana foi construída admitindo-se entes primitivos como *ponto*, *reta* e *plano* e axiomas como "*dois pontos distintos determinam uma única reta*", "*por um ponto não pertencente a uma reta passa uma única reta que é paralela à reta dada*", entre outros.

Neste tópico, vamos estudar o conjunto dos números naturais sobre a ótica axiomática que o estabelece. O conceito de número natural, entretanto, esteve, durante muitos séculos, associado apenas à ideia de contagem; só muito mais tarde adquiriu o caráter axiomático e de abstração com que hoje o usamos.

> Os números naturais constituem um modelo matemático, uma escala padrão, que nos permite a operação de contagem. A sequência desses números é uma livre e antiga criação do espírito humano. Comparar conjuntos de objetos com essa escala abstrata ideal é o processo que torna mais precisa a noção de quantidade [...]. (LIMA, 2010, p. 1).

A primeira forma tomada pela noção de número foi a de número natural. Não se pode fixar datas que marquem o aparecimento do conceito de número natural; "ele é certamente muito remoto e constitui uma das primeiras manifestações do despertar da inteligência no homem." (CARAÇA, 1966, p. 4).

Tal manifestação progrediu ao ponto em que temos um sistema de numeração perfeito, que nos permite representar, mediante o uso apropriado dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, todos os números naturais. “Além disso, nossa linguagem também fornece nomes para os primeiros termos da sequência dos números naturais. Números muito grandes não têm nomes específicos, ao contrário dos menores como “mil novecentos e noventa e oito”. Quem sabe, por exemplo, o nome do número de átomos do universo?”

Desde os primeiros anos escolares, trabalhamos com os números naturais, porém associando-os sempre à ideia de contagem. Esse processo (a contagem) pressupõe apenas o conhecimento da sequência numérica que constitui os números naturais. Aprendemos a somar e a multiplicar tais números, mas não estabelecemos exatamente o que eles são. Este tópico possibilitará um estudo dos números naturais sobre esta ótica.

2 OS AXIOMAS DE PEANO

Giussepe Peano (1858-1932), matemático italiano, elaborou toda a teoria dos números naturais a partir de quatro princípios básicos, conhecidos como os *Axiomas de Peano*. São quatro propriedades fundamentais, das quais resultam como consequências lógicas todas as afirmações verdadeiras que se podem fazer sobre esses números.

Essas propriedades estabelecem axiomaticamente que o conjunto dos números naturais é o conjunto **N** que satisfaz aos seguintes postulados ou axiomas:

1 Existe uma função s: $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, que associa a cada $n \in \mathbf{N}$, um elemento $s(n) \in \mathbf{N}$, chamado de sucessor de n.

2 A função s: $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ é injetora.

3 Em **N** existe um elemento, chamado *um* e indicado por 1, tal que $s(\mathbf{N}) = \mathbf{N} - \{1\}$.

4 Se um subconjunto $X \subset \mathbf{N}$ é tal que $1 \in \mathbf{N}$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$) então $X = \mathbf{N}$.

Observe que, como estamos chamando de **N** o conjunto dos números naturais, a notação $n \in \mathbf{N}$ significa que n é um número natural.

Reescrevendo os axiomas de Peano numa linguagem corrente, temos que:

1 Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.
2 Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes, ou ainda: números que têm o mesmo sucessor são iguais.
3 Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um".
4 Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com **N**, isto é, contém todos os números naturais.

A partir do elemento 1, dizemos então que o seu sucessor chama-se "dois", o sucessor de dois chama-se "três", e assim por diante, formando todo o conjunto que designamos por **N**.

A notação s(n), utilizada nos axiomas de Peano, simboliza o sucessor do número natural n. Desse modo, dizemos que $2 = s(1)$, $3 = s(2)$, $4 = s(3)$, $5 = s(4)$, e assim por diante. Neste caso, a igualdade $2 = s(1)$ significa apenas que estamos usando o símbolo 2 para representar o sucessor de 1.

3 O ZERO

O zero é considerado por alguns matemáticos como um número natural. Porém, a ideia de zero, da não existência, está ligada apenas à noção de quantidade. Nem nas mais antigas civilizações conhecidas, nem nos povos primitivos de hoje, se encontra o zero tomado como número, nem o uso de um símbolo para o zero. Este é relativamente recente e a sua introdução foi devida às exigências da numeração escrita.

O zero enquanto símbolo foi introduzido ao sistema de numeração "[...] devido aos matemáticos hindus que foram provavelmente os criadores da numeração de posição, hoje universalmente adaptada, [...], encontram-se alusões a essa numeração a partir do século VI da nossa era." (CARAÇA, 1966, p. 15).

Na construção da teoria axiomática dos números naturais não consideramos o zero; assim dizemos que o elemento 1 é o único natural que não é sucessor de nenhum outro.

4 O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Um dos *axiomas de Peano*, o último, possui claramente uma natureza mais elaborada do que os demais. Esta proposição é habitualmente designada pelo nome de *princípio da indução matemática, axioma da indução* ou ainda *princípio da indução finita* e serve de base ao *método de raciocínio por recorrência*. Este método possui um papel fundamental na teoria dos números naturais e, de modo geral, em toda a Matemática, pois possibilita a prova de muitos teoremas, usando um princípio lógico e simples de demonstração. Vamos nos deter a uma análise deste importante axioma, acompanhada de exemplos.

De modo simplificado e informal, o 4º axioma de Peano implica que todo número natural pode ser obtido a partir de 1 por meio de repetidas aplicações da operação de "tomar o sucessor". Por exemplo, 2 é o sucessor de 1, 3 é o sucessor do sucessor de 1, e assim por diante.

No entanto, 1 não goza da propriedade de "ser sucessor", mas todos os demais números gozam desta propriedade. Assim, o Princípio da Indução diz que:

Seja P(n) uma afirmação, ou propriedade, que pode ser **verdadeira** ou **falsa**, relativa a algum número natural n.

Seja $K = \{k \in \mathbf{N} \mid P(k) \text{ é verdadeira}\}$

Então:

i) P(1) é verdadeira $\Rightarrow 1 \in K$;
ii) P(k) é verdadeira por hipótese;
iii) Prova-se que P(s(k)) é verdadeira para todo $k \in N$.

Se verificarmos as proposições acima então K = N, isto é, todo número natural goza da propriedade P(n) em prova.

Em outras palavras: Seja P uma propriedade referente aos números naturais. Se 1 goza desta propriedade e se, além disso, o fato de o número natural k gozar de P implica que seu sucessor s(k) também goza, então todos os números naturais gozam da propriedade P, ou seja, ela é válida para todos os números naturais.

A prova procede da seguinte forma:

i) Mostra-se que P(1) é verdadeira, ou seja, que a propriedade é válida para k = 1.

ii) Aceita-se P(k), por hipótese, como verdadeira, para $k \in \mathbf{N}$.

iii) Prova-se que $P(k)$ é válida para o sucessor de k (ou $s(k)$), ou seja, prova-se que $P(s(k))$ é verdadeira, fazendo a propriedade valer para qualquer número natural.

Nas demonstrações por indução, a hipótese de que a propriedade P é válida para o número natural k, chama-se hipótese de indução.

O princípio da indução é utilizado, principalmente, como método de demonstração de propriedades básicas dos números naturais.

Algumas propriedades são demonstradas, a seguir, pelo método da indução:

Exemplos:

a) Demonstre que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2, ou seja, que $\forall n \in \mathbf{N}$, temos que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Antes de iniciarmos a demonstração através do Princípio da Indução Matemática, vamos verificar alguns exemplos da propriedade. Observe:

$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$
$n = 2 \Rightarrow 1 + 3 = 2^2$
$n = 3 \Rightarrow 1 + 3 + 5 = 3^2$
$n = 4 \Rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

Observe também que o conjunto dos números ímpares pode ser representado genericamente por $2n - 1$, ou seja:

$n = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 = 1$ (1º ímpar positivo)
$n = 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 - 1 = 3$ (2º ímpar positivo)
$n = 3 \Rightarrow 2 \cdot 3 - 1 = 5$ (3º ímpar positivo)
$n = 4 \Rightarrow 2 \cdot 4 - 1 = 7$ (4º ímpar positivo)

e assim por diante, até o n-ésimo ímpar que será $2n - 1$.

Vejamos, agora, como demonstrar a propriedade. Seguindo os passos do Principio da Indução Matemática, temos que:

$$P(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

i) Mostrar que $P(1)$ é verdadeira. Substituindo n por 1, temos $2n - 1 = 1$ e $P(1)$: $1 = 1^2$.

ii) Supor $P(k)$ como verdadeira para $k \in \mathbf{N}$, ou seja, admitimos que: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$.

iii) Provar que P(k) é válida para o sucessor de k (ou s(k)), ou seja, provar que P(s(k)) é verdadeira, fazendo a propriedade valer para qualquer número natural.

Provar que P(k) é válida para o sucessor de k significa provar que a propriedade é válida para k + 1. Para sequência que estamos provando, temos que:

$$P(k+1): \quad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + \underbrace{[2(k+1)-1]}_{s(k)} = k^2 + [2(k+1)-1]$$

Ou seja, adiciona-se o último termo da sequência, substituindo k por (k + 1) em ambos os membros da igualdade.

No item (ii) admitimos, por hipótese, que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$. Então, podemos substituir $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)$ por k^2:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)}_{k^2} + [2(k+1)-1] = k^2 + [2(k+1)-1]$$

$$\begin{aligned}
+ [2(k+1)-1] &= k^2 + [2(k+1)-1] \\
k^2 + 2k + 2 - 1 &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\
k^2 + 2k + 1 &= k^2 + 2k + 1 \\
(k+1)\cdot(k+1) &= (k+1)\cdot(k+1) \\
(k+1)^2 &= (k+1)^2
\end{aligned}$$

A igualdade confirma a prova da propriedade para o sucessor de k. Assim, temos que a sequência $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ para qualquer n pertencente ao conjunto dos números naturais.

b) Demonstre que $n \in \mathbf{N}$, temos que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

i) Mostrar que P(1) é verdadeira: $P(1): 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$

$$1 = 1$$

ii) Supor P(k) como verdadeira, para $k \in \mathbf{N}$.

$$P(k): \; 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

iii) Provar que P(k) é válida para (k + 1); deste modo adicionamos (k + 1) a ambos os membros da igualdade, obtendo:

$$P(k+1): \; 1 + 2 + 3 + \ldots + k + \underbrace{(k+1)}_{s(k)} = \frac{k(k+1)}{2} + \underbrace{(k+1)}_{s(k)}$$

Observe que adicionamos o último termo da sequência, substituindo k por (k + 1) em ambos os membros da igualdade.

No item (ii) admitimos, por hipótese, que 1 + 2 + 3 + ... + k = $\frac{k\,(k+1)}{2}$. Então, podemos substituir 1 + 2 + 3 + ... + k por $\frac{k\,(k+1)}{2}$:

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k}\ +\ (k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$\frac{k\,(k+1)}{2}\ +\ (k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$\frac{(k+1)+(k+2)}{2} = \frac{(k+1)+(k+2)}{2}$$

A igualdade confirma a prova da propriedade para o sucessor de k. Assim, temos que a sequência em prova é válida para qualquer n pertencente ao conjunto dos números naturais.

Observe ainda que a “contraprova” pode ser verificada substituindo k na expressão geral $\frac{k\,(k+1)}{2}$ por (k + 1), donde obteremos $\frac{(k+1)+(k+2)}{2}$, validando a demonstração do teorema que acabamos de desenvolver.

5 PROPRIEDADES OPERACIONAIS DOS NÚMEROS NATURAIS

Prezado acadêmico!

Quando houver dificuldade no entendimento dos teoremas/propriedades ou mesmo das definições, procure atribuir valores numéricos (neste caso, números naturais) às expressões algébricas, buscando melhor compreensão do texto.

5.1 PROPRIEDADES DA ADIÇÃO EM **N**

Das propriedades básicas da adição de números naturais, destacamos as seguintes; $\forall m, n, p \in \mathbf{N}$:

- Fechamento: $n + m \in \mathbf{N}$.
- Comutativa: $n + m = m + n$.
- Associativa: $m + (n + p) = (m + n) + p$.
- Elemento Neutro: $0 + m = m + 0 = m$, onde 0 é dito elemento neutro aditivo.
- Lei do cancelamento: $m + p = n + p \Rightarrow m = n$.

5.2 PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO EM **N**

Das propriedades básicas da multiplicação de números naturais, destacamos as seguintes; $\forall m, n, p \in \mathbf{N}$:

- Fechamento: $n \cdot m \in \mathbf{N}$.
- Comutativa: $n \cdot m = m \cdot n$.
- Associativa: $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$.
- Elemento Neutro: $1 \cdot m = m \;\; 1 = m$, onde 1 é dito elemento neutro multiplicativo.
- Lei do cancelamento: $m \cdot p = n \cdot p \;\Rightarrow m = n$.
- Distributiva da multiplicação em relação à adição: $m \cdot (n + p) = m{\cdot}n + m{\cdot}p$.

As demonstrações destas propriedades podem ser feitas através do Princípio da Indução Matemática.

Procure entender, acadêmico, para o que cada uma destas propriedades nos remete em termos de conceitos operacionais. Atente, em especial, para a lei do cancelamento, para a qual, muitos professores, no afã de tornar simples o processo operacional, utilizam o jargão “corta o termo”, inviabilizando a compreensão, por parte dos estudantes, da ideia de equivalência em ambos os membros da igualdade e, por isso, a possibilidade de simplificação.

6 RELAÇÃO DE ORDEM NO CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Consideremos no conjunto **N** a relação indicada pelo símbolo ≤ (chamado *menor ou igual a*) definida por:

$$n \leq m \Leftrightarrow n = m \text{ ou } n + x = m \text{ para algum } x \in \mathbf{N}.$$

A operação de adição de números naturais permite introduzir uma relação de ordem em **N**.

Dados os números naturais m, n diremos que m é menor do que n, e escreveremos $m < n$, para significar que existe $p \in \mathbf{N}$ tal que $n = m + p$. Neste caso, diz-se também que n é maior do que m e escreve-se $n > m$.

A notação $m \leq n$ significa que $m < n$ ou $m = n$. Por definição, tem-se, portanto, $m < m + p$ para quaisquer $m, p \in \mathbf{N}$.

Em particular, $m < m + 1$. Segue-se também da definição que $1 < n$ para todo número natural $n \neq 1$. Esta definição corrobora com o axioma 3 de Peano, $n \neq 1$ implica que n é sucessor de algum número natural m, ou seja, $n = m + 1 = 1 + m$, logo $n > 1$. Assim, 1 é o menor dos números naturais.

Seguem cinco teoremas que são propriedades básicas da relação de ordem $m < n$ que acabamos de definir:

6.1 PROPRIEDADES DA RELAÇÃO DE ORDEM EM **N**

- Transitividade: Dados $m, n, p \in \mathbf{N}$, se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.

- Comparabilidade: Todo número natural n é comparável com qualquer número natural m.

- Tricotomia: Apenas uma das afirmações é verdadeira: $m < n$, $m = n$ ou $n < m$.

- Não existem números naturais entre n e $n + 1$.

- Monotonicidade: Dados $m, n \in \mathbf{N}$, se $m < n$, então $m + p < n + p$ e $mp < np$.

Procuramos, neste tópico, de modo simplificado, desenvolver a teoria dos números naturais: definições, axiomas, propriedades são elementos fundamentais que constituem toda e qualquer teoria matemática.

RESUMO DO TÓPICO 2

- Quanto aos axiomas (ou postulados) de Peano:

1 Todo número natural possui um único sucessor, que também é natural.
2 Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes.
3 Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro, que é o número 1.
4 Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com **N**, isto é, contém todos os números naturais.

- Quanto ao Princípio da Indução Matemática:

A demonstração por indução matemática deve atender aos seguintes itens:

i) Mostrar que P(1) é verdadeira, substituindo n por 1 e verificando a igualdade.
ii) Admitir, por hipótese, que P(k) é verdadeira, substituindo n por k.
iii) Provar que P(k) é verdadeira para (k + 1), ou seja, substituir n por (k + 1) e verificar a igualdade.

- Quanto às propriedades da Adição em **N:**

- Fechamento: $\forall n, m \in \mathbf{N}$, temos que $n + m \in \mathbf{N}$.
- Comutativa: $\forall n, m \in \mathbf{N}$, temos que é válida a igualdade: $n + m = m + n$.
- Associativa: $\forall m, n, p \in \mathbf{N}$, temos que: $m + (n + p) = (m + n) + p$.
- Elemento Neutro: $\forall m \in \mathbf{N}$, temos que, se $m + 0 = m$.
- Lei do cancelamento: $\forall m, n, p \in \mathbf{N}$, temos que, se $m + p = n + p$, então $m = n$.

- Quanto às propriedades da Multiplicação em **N:**

- Fechamento: $\forall n, m \in \mathbf{N}$, temos que $n \cdot m \in \mathbf{N}$.
- Comutativa: $\forall n, m \in \mathbf{N}$, temos que é válida a igualdade: $n \cdot m = m \cdot n$.
- Associativa: $\forall m, n, p \in \mathbf{N}$, temos que: $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$.
- Elemento Neutro: $\forall m \in \mathbf{N}$, temos que, se $m \cdot 1 = m$.
- Lei do cancelamento: $\forall m, n, p \in \mathbf{N}$, temos que, se $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$.
- Distributiva da multiplicação em relação à adição: $m, n, p \in \mathbf{N}$, temos que, se $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$.

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico!

As autoatividades que seguem destinam-se à averiguação da aprendizagem do processo demonstrativo através do Princípio da Indução Matemática, que estudamos neste tópico.

Utilize os serviços de auxílio disponíveis, se necessário.

Prove os teoremas a seguir, utilizando o Princípio da Indução Matemática:

1 $\forall n \in \mathbf{N}$, temos que $1 + 5 + 9 + ... + (4n + 1) = (n + 1)(2n + 1)$.

2 $\forall n \in \mathbf{N}$, temos que $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right]^2$.

3 $\forall n \in \mathbf{N}$, temos que $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

4 $\forall n \in \mathbf{N}$, temos que $2 + 5 + 8 + ... + (2 + 3n) = \frac{\left(4+3n\right)\left(n+1\right)}{2}$; $\forall n \in \mathbf{N}$.

5 $\forall n \in \mathbf{N}$, temos que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$

6 Demonstre que a soma dos n primeiros números pares é $n \cdot (n + 1)$, ou seja, que $\forall n \in \mathbf{N}$, temos que $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n \cdot (n + 1)$.

UNIDADE 1

TÓPICO 3

NÚMEROS INTEIROS

1 INTRODUÇÃO

Este tópico busca um estudo algébrico sobre as operações em **Z** e suas propriedades. Não faremos uma construção axiomática apurada e extensiva do conjunto dos números inteiros, todavia vamos abordar definições e propriedades essenciais das operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação em **Z**.

2 O CONJUNTO DOS INTEIROS E A RELAÇÃO DE ORDEM EM Z

O conjunto dos números inteiros, comumente simbolizado pela letra **Z** (*"die Zahlen"* - do alemão "os números") é constituído dos números naturais {0, 1, 2, ...} e dos seus **opostos** {-1, -2, -3, ...}.

Denominamos número oposto de $a \in Z^*$ ao número $(-a) \in Z^*$, de modo que $a + (-a) = 0$.

2.1 PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES DE ORDEM EM **Z**

As relações de igualdade (=), maior (>) e menor (<) apresentam as características de uma relação binária sobre **Z**:

- Reflexiva: $m \leq m$, $\forall m \in \mathbf{Z}$.
- Antissimétrica: se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$, $\forall m \in \mathbf{Z}$.
- Transitiva: se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \quad p$, $\forall m, n, p \in \mathbf{Z}$.
- Totalidade: $m \leq n$ ou $n \leq m$, $\forall m, n \in \mathbf{Z}$.

No conjunto **Z**, a ordem é compatível com as operações de adição e multiplicação. Podemos então enunciar outras duas propriedades:

- Compatibilidade com a adição: se $m \leq n$, então $m + p \leq n + p$, $\forall m, n, p \in \mathbf{Z}$.
- Compatibilidade com a multiplicação: se $0 \quad m$ e $0 \leq n$, então $0 \leq m \cdot n$, $\forall m, n \in \mathbf{Z}$.

As propriedades de ordem antisimétrica, transitiva e de totalidade, caracterizam o conjunto numérico **Z** como um conjunto ordenado.

A ordem em **Z** é dada por $\ldots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots$ e faz de **Z** um conjunto sem limite superior ou inferior. Denotamos por inteiro positivo o número $a \in \mathbf{Z}^*$ se ele for maior que zero (o próprio zero não é considerado um número positivo).

Em decorrência da compatibilidade da multiplicação na relação de ordem, derivam as regras de sinais em **Z**. Assim valem as seguintes implicações para a, $b \in \mathbf{Z}$:

(i) $\mathbf{0 < a}$ **e** $\mathbf{0 < b \Rightarrow 0 < a \cdot b}$ (se a e b são inteiros positivos, o produto $a \cdot b$ é positivo)

(ii) $\mathbf{0 < a}$ **e** $\mathbf{b < 0 \Rightarrow a \cdot b < 0}$ (se a é positivo e b é negativo, o produto $a \cdot b$ é negativo)

(iii) $\mathbf{a < 0}$ **e** $\mathbf{b < 0 \Rightarrow 0 < a \cdot b}$ (se a e b sao inteiros negativos, o produto $a \cdot b$ é positivo)

3 OPERAÇÕES NO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

3.1 ADIÇÃO EM **Z**

É a operação mais simples e da qual todas as outras dependem. A ideia de adicionar já está incluída na própria noção de número natural.

A operação elementar de passagem de um número natural para outro é a operação de adicionar uma unidade ao número anterior. Assim, somar um número **a** a outro número **b** é efetuar, a partir de **a**, **b** passagens sucessivas pela operação elementar. Por exemplo, para resolver 2 + 3, efetuamos três passagens sucessivas pela operação elementar, a partir de 2. Para somar 2 + (-3) também efetuamos três passagens sucessivas, a partir de 2, mas em sentido oposto.

Os termos de uma adição denominam-se parcelas e o seu resultado, soma.

3.1.1 Propriedades da adição em **Z**

Das propriedades básicas da adição de números inteiros, destacamos as seguintes, $\forall n, m, p \in \mathbf{Z}$:

- Fechamento: $n + m \in \mathbf{Z}$.
- Comutativa: $n + m = m + n$.
- Associativa: $m + (n + p) = (m + n) + p$.
- Lei do cancelamento: se $m + p = n + p$, então $m = n$.
- Elemento Neutro: $0 + m = m + 0 = m$, onde 0 é dito elemento neutro aditivo.
- Elemento Oposto: $\exists s \in \mathbf{Z}$, tal que $m + s = 0$. Denotamos s por (-s) e o chamamos de simétrico aditivo ou elemento oposto a m.

3.2 SUBTRAÇÃO EM **Z**

A operação de subtração define-se como a operação inversa da adição. Dados **a**, **b**, **c** $\in$ **Z**, definimos (**a** – **b**) como sendo o número **c** que, somado a **b** resulte em **a**, ou seja, **a** – **b** = **c** $\Rightarrow$ **b** + **c** = **a**.

Dados, portanto, **c** e **a**, pela operação de subtração determina-se um número **b**, que se representa pelo símbolo **b** = **c** – **a**, tal que **a** + **b** = **c**.

3.2.1 Propriedades da subtração em **Z**

Das propriedades básicas da subtração de números inteiros, destacamos as seguintes:

- **Modular:** $\forall m \in Z$, $m - 0 = m$ e $(m - n = m \Rightarrow n = 0)$.
- $\forall n, m, p \in Z$, $m + (n - p) = (m + n) - p$
- $\forall m, n, p \in Z$, $m - (n + p) = (m - n) - p$
- $\forall m, n, p \in Z$, $m - (n - p) = (m + p) - n$
- $\forall m, n, p \in Z$, $(m + p) - (n + p) = m - n$
- $\forall m, n, p \in Z$, $(m - p) - (n - p) = m - n$

3.3 MULTIPLICAÇÃO EM **Z**

A operação de multiplicação define-se a partir da adição do seguinte modo: Sejam dados dois números naturais **a** e **b**, sendo **b** > 1; diz-se produto do número **a** pelo número **b**. Essa operação é representada pelos símbolos **a** × **b**, **a** · **b** ou ainda **ab**, o número que é igual à soma de **b** parcelas iguais a **a**.

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ \dots \ + a}_{\text{b parcelas iguais}}$$

Decorrentes da definição têm-se:

- $1 \ \ a = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = a$
- $0 \cdot a = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 0$

3.3.1 Propriedades da multiplicação em **Z**

Das propriedades básicas da multiplicação de números inteiros, destacamos as seguintes:

- Fechamento: $\forall m, n \in \mathbf{Z}, m \cdot n \in \mathbf{Z}$.
- Comutativa: $\forall m, n \in \mathbf{Z}, m \cdot n = n \cdot m$.
- Associativa: $\forall m, n, p \in \mathbf{Z}, m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$.
- Lei do cancelamento: $\forall m, n, p \in \mathbf{Z}, m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$.
- Elemento Neutro: $\forall m \in \mathbf{Z}, 1 \cdot m = m \cdot 1 = m$, onde 1 é dito elemento neutro multiplicativo.
- Distributiva da multiplicação em relação à adição: $\forall m, n, p \in \mathbf{Z}, m \cdot (n + p) = m{\cdot}n + m{\cdot}p$.
- Lei do anulamento do produto: $\forall m, n \in \mathbf{Z}, m{\cdot}n = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

3.4 DIVISÃO EM **Z**

A operação de divisão define-se como a inversa da multiplicação, do seguinte modo: Se o número natural a é o produto dos dois números naturais b e c, isto é, $a = b \cdot c$, o número c diz-se quociente da divisão de a por b e representa-se pelo símbolo $c = a : b$ ou $c = \frac{a}{b}$

Da definição de divisão, decorre que $0 : a = 0, \forall a \in \mathbf{Z}$. Já a operação $a : 0$ não tem significado. Vamos entender por quê?

Seja a um número inteiro não nulo e suponhamos que exista $m \in \mathbf{Z}$ tal que $a : 0 = m$. Então, pela definição de divisão, $m \cdot 0 = a$. Por outro lado, $m \cdot 0 = 0$; logo $a = m \cdot 0 = 0$, implicando em $a = 0$. Mas isso contradiz o fato de a ser não nulo. Logo $a : 0 \neq m, \forall m \in \mathbf{Z}$, ou seja, $a : 0$ não tem significado, como queríamos demonstrar.

3.4.1 Propriedades da divisão em **Z**

Das propriedades básicas da divisão de números inteiros, destacamos as seguintes:

- Modular: $\forall m, n \in \mathbf{Z}, m : 1 = m$ e $0 : n = 0$.

- Distributiva em relação à soma e diferença: $\forall n, m, p \in \mathbf{Z}$:

$$(m + n) : p = m : p + n : p \qquad \text{e} \qquad (m - n) : p = m : p - n : p$$

- Divisão da divisão: $\forall m, n, p \in Z$, $(m : n) : p = m : (n \cdot p)$

3.5 POTENCIAÇÃO EM **Z**

Dados dois números naturais **a** e **n**, chama-se potência **n** de **a**, e representa-se por $\mathbf{a^n}$, ao número obtido efetuando o produto de n fatores iguais a **a**.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a}_{\text{n fatores iguais}}$$

Chamamos a de base, n de expoente e ao resultado da operação a^n denominamos potência.

Decorrentes da definição e das propriedades da multiplicação, têm-se:

- $1^n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$
- $0^n = 0$

3.5.1 Propriedades da potenciação em **Z**

Das propriedades básicas da potenciação de números inteiros, destacamos as seguintes:

- Produto de potências de mesma base: $\forall a, m, n \in \mathbf{Z}$, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- Quociente de potências de mesma base: $\forall a, m, n \in \mathbf{Z}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$.
- Distributiva em relação ao produto e à divisão: $\forall a, b, m \in \mathbf{Z}$:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^n \qquad \text{e} \qquad (a : b)^m = a^m : b^n$$

- Potência de potência: $a, m, n \in \mathbf{Z}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

3.6 OPERAÇÕES INVERSAS DA POTENCIAÇÃO

A operação pela qual, dada a potência e o expoente, se determina a base é denominada radiciação; já a operação pela qual, dada a potencia e a base, se determina o expoente, é chamada logaritmação.

Dados três números naturais a, b, n tais que $a = b^n$, o número b é dito raiz de índice n de a e representa-se pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$.

Assim, $a = b^n$ implica que $\sqrt[n]{a} = b$, onde a é dito radicando, n índice do radical e b raiz n-ésima de a.

Dizemos que n é logaritmo de a na base b, e o representamos pelo símbolo $n = \log_b a$. Assim, $a = b^n$ implica ainda em $n = \log_b a$. O número a é chamado de logaritmando, o número b de base e o resultado da operação de logaritmo.

3.6.1 Propriedades da radiciação

Das propriedades básicas da radiciação, destacamos as seguintes:

- **Distributiva em relação ao produto e à divisão:** $\forall a, b, m \in \mathbf{Z}$:
  $\sqrt[n]{a\,.\,b} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$ e $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$

- $\forall a, m, n \in \mathbf{Z}$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

- $\forall a, m, n \in \mathbf{Z}$, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

- $\forall a, m, n \in \mathbf{Z}$, $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[m.n]{a}$

3.6.2 Propriedades da logaritmação

Das propriedades básicas da logaritmação, destacamos as seguintes:

- Logaritmo de um Produto: $\forall a, b, c \in \mathbf{Z}_+^*$ e $b \neq 1$, $\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$

- Logaritmo de um Quociente: $\forall a, b, c \in \mathbf{Z}_+^*$ e $b \neq 1$, $\log_b (a : c) = \log_b a - \log_b c$

- Logaritmo de uma Potência: $\forall a, b \in \mathbf{Z}_+^*$ e $b \neq 1$, $n \in \mathbf{R}$, $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$

3.7 CLASSIFICAÇÃO DOS TERMOS DAS OPERAÇÕES EM Z

Como estudamos neste tópico, as operações podem classificar-se em três graus: a adição e sua inversa, a multiplicação e sua inversa e a potenciação e suas inversas.

O quadro a seguir sintetiza como são classificados os termos em cada uma das operações estudadas.

QUADRO 2 – CLASSIFICADOS OS TERMOS EM CADA UMA DAS OPERAÇÕES ESTUDADAS

Operação	*Exemplo*	*Número Passivo*	*Número Ativo*	*Resultado*
Adição	$7 + 3 = 10$	**Parcela 7 (adendo)**	**Parcela 3 (adicionador)**	**Soma**
Subtração	$7 - 3 = 4$	**Diminuendo 7**	**Diminuidor 3**	**Diferença**
Multiplicação	$8 \cdot 4 = 32$	**Multiplicando 8**	**Multiplicador 4**	**Produto**
Divisão	$8 : 4 = 2$	**Dividendo 8**	**Divisor 4**	**Quociente**
Potenciação	$10^3 = 1000$	**Base 10**	**Expoente 3**	**Potência**
Radiciação	$\sqrt[3]{1000} = 10$	**Radicando 1000**	**Índice do Radical 3**	**Raiz**
Logaritmação	$\log_{10} 1000 = 3$	**Logaritmando 1000**	**Base 10**	**Logaritmo**

FONTE: Adaptado de: Caraça, (1966, p. 30)

RESUMO DO TÓPICO 3

- Quanto à operação de adição:
  a + b implica acrescentar, a partir da parcela a, b passagens sucessivas pela operação elementar.

- Quanto à operação de subtração:
  $a + b = c$ implica $b = c - a$

- Quanto à operação de multiplicação:
  $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{\text{b parcelas iguais}}$

- Quanto à operação de divisão:
  $a = b \cdot c$ implica em $c = a : b$ ou $\mathbf{c = \frac{a}{b}}$

- Quanto à operação de potenciação:
  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{n fatores iguais}}$

- Quanto à operação de radiciação:
  $a = b^n$ implica em $\mathbf{\sqrt[n]{a} = b}$

- Quanto à operação de logaritmação:
  $a = b^n$ implica em $n = \log_b a$

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico!

A atividade que segue foi extraída do texto "Erros comuns em Álgebra", de June Marquis.

Trata-se de erros algébricos conceituais e operacionais que, tomando conhecimento, os alunos têm menos probabilidade de cometê-lo; por isso, resolva com atenção!

Segue um pequeno teste, envolvendo erros conceituais e operacionais comuns (MARQUIS, 1995). Todas as afirmações são falsas. Corrija cada uma delas tornando todas verdadeiras; procure buscar justificativas conceituais ou de propriedades para fazer a correção.

a) $|-3| = -3$

b) $3^2 \cdot 3^3 = 9^5$

c) $a^2 \cdot b^5 = (ab)^7$

d) $x + y - 3(z + w) = x + y - 3z + w$

e) $\frac{r}{4} - \frac{(6-s)}{2} = \frac{r - 12 - 2s}{4}$

f) $3a + 4b = 7ab$

g) $3x^{-1} = \frac{1}{3x}$

h) $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$

i) $\frac{x+y}{x+z} = \frac{y}{z}$

j) $\frac{1}{x-y} = \frac{-1}{x+y}$

k) $\frac{x}{y} + \frac{r}{s} = \frac{x+r}{y+s}$

l) $x\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{ax}{bx}$

m) $\frac{xa + xb}{x + xd} = \frac{a+b}{d}$

n) $\sqrt{-x}\sqrt{-y} = \sqrt{xy}$

o) Se $2(2 - z) < 12$ então $z < -4$

p) $\frac{1}{1 - \frac{x}{y}} = \frac{y}{1-x}$

q) $a^2 \cdot a^5 = a^{10}$

r) $(3a)^4 = 3a^4$

s) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$

t) $(x + 4)^2 = x^2 + 16$

u) $\frac{r}{4} - \frac{6-s}{4} = \frac{r-6-s}{4}$

v) $(a^2)^5 = a^7$

TÓPICO 4

NÚMEROS REAIS

1 INTRODUÇÃO

A construção algébrica dos números reais pode ser conduzida de duas formas. Um dos caminhos é partir do conjunto **Q** dos números racionais, onde, através de um raciocínio construtivo, definimos o conjunto **R** dos números reais.

Neste tópico vamos fazer esta construção, que chamaremos de construção intuitiva de **R**, mas também vamos iniciar um estudo sobre **R** considerando-o um corpo, embasado em um processo axiomático, ou seja, aceitando a existência de certos objetos que verificam determinadas propriedades básicas, traduzidas num certo número de axiomas. Este é o outro caminho ao qual nos referimos e a ele chamaremos de construção axiomática de **R**.

A partir de alguns axiomas, deduzem-se todas as propriedades dos números reais de que necessitaremos na sequência do nosso estudo sobre Estruturas Algébricas, na próxima Unidade.

2 CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS (Q)

Os números racionais foram criados a partir da necessidade de dividir dois números inteiros, cujo quociente não resultasse, necessariamente, em um inteiro.

Dessa forma, os números racionais são todos aqueles que podem ser representados na forma de fração (com o numerador pertencente a **Z** e o denominador pertencente a **Z***). Ou seja, o conjunto dos números racionais é a união do conjunto dos números inteiros com as frações positivas e negativas.

Então: $-5, -\frac{3}{4}, -1, \frac{7}{5}, 1, \frac{3}{2}$ são exemplos de números racionais.

Matematicamente, podemos representar o conjunto dos números racionais, por:

$$\mathbf{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} \text{ e } b \neq 0\}$$

Cabe ressaltar que todo número inteiro é racional, pois todo inteiro pode ser escrito sob forma de razão entre inteiros; e como todo número natural é inteiro, então todo natural é também racional. Assim, temos que $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

É interessante considerar também a representação decimal de um número racional $\frac{a}{b}$, que se obtém dividindo a por b, formando uma dízima periódica.

Exemplos:

a) decimais exatas ou finitas

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ $\quad$ $-\frac{5}{4} = -1{,}25$ $\quad$ $\frac{75}{20} = 3{,}75$

b) decimais periódicas ou infinitas

$\frac{1}{3} = 0{,}333...$ $\quad$ $\frac{6}{7} = 0{,}857142857142...$ $\quad$ $\frac{7}{6} = 1{,}16666...$

Toda decimal exata ou periódica pode ser representada na forma de número racional.

2.1 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS EM Q

Com relação ao conjunto dos números racionais, podemos enunciar as seguintes propriedades operatórias:

- Fechamento: **Q** é fechado para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, ou seja, a soma, a subtração, o produto ou o quociente (sendo o divisor diferente de zero) entre dois números racionais quaisquer é sempre um número racional.

- Dados dois números racionais m e n, com m < n, existe um número racional r tal que m < r < n. Essa propriedade nos garante que entre dois números racionais distintos sempre existe outro número racional.

- Oposto Aditivo: $\forall m \in \mathbf{Q}$, existe o racional -m, denominado **oposto** de m, tal que: $m + (-m) = -m + m = 0$.

- Inverso Multiplicativo: $\forall m \in \mathbf{Q}$, existe o racional $\frac{1}{m}$, denominado **inverso** de m, tal que: $m.\frac{1}{m} = 1$.

2.2 TEOREMAS ASSOCIADOS

- Teorema 1: O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

Demonstração: Sejam m e n dois números racionais. Existem inteiros a, b, c e d, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, tais que $m = \frac{a}{b}$ e $n = \frac{c}{d}$. Temos que o produto $m \,.\, n = \frac{a}{b} \,.\, \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Como a, c, b e d são inteiros, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, pela propriedade do fechamento, os produtos $a \cdot c$ e $b \cdot d$ também são inteiros, com $b \cdot d \neq 0$. Logo, pela definição de número racional, $\frac{ac}{bd} \in Q$.

- Teorema 2: O quociente de dois números racionais quaisquer, sendo o divisor diferente de zero, é um número racional.

Demonstração: Sejam m e n dois números racionais, com $n \neq 0$. Então, existem inteiros a, b, c e d, com $b \neq 0$, $c \neq 0$ e d 0, tais que $m = \frac{a}{b}$ e $n = \frac{c}{d}$ e $\frac{m}{n} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. Como a, b, c e d são inteiros, com $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$, então os produtos $a \cdot d$ e $b \cdot c$ também são inteiros, com $b \cdot c \neq 0$, haja vista que o conjunto dos números inteiros possui a propriedade do fechamento para a multiplicação. Logo, pela definição de número racional, $\frac{ad}{bc} \in Q$.

3 CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

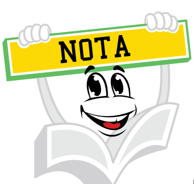
Os números irracionais são decimais infinitas não periódicas, ou seja, os números que **não podem ser escritos na forma de fração** (razão entre dois inteiros).

Como exemplos de números irracionais, temos a raiz quadrada de 2, a raiz quadrada de 3, de modo geral, números que não formam dízimas periódicas, ou seja, os algarismos após a vírgula não se repetem periodicamente, não comportando, portanto, a representação fracionária.

a) $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$

b) $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$

c) 1,212112111...



Um número irracional bastante conhecido é o número Pi: π = 3.1415926535...

A representação do conjunto dos números irracionais é variável. Alguns autores utilizam a letra **I** de irracionais, outros utilizam a simbologia $\mathbf{Q}^{C}$, indicando que os irracionais são os complementares dos racionais com relação ao conjunto dos números reais, considerado aqui como conjunto universo. Neste texto vamos utilizar a letra **I** para designar o conjunto dos irracionais.

3.1 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS EM I

Com relação ao conjunto dos números irracionais, podemos enunciar as seguintes propriedades operatórias:

- Se o número $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbf{N}^*$ e $a \in \mathbf{N}$, não é inteiro, então é irracional.

Ou seja, as raízes exatas resultam em números inteiros e as raízes não exatas resultam em números racionais.

- A soma ou a diferença de um número **racional** com um número **irracional** é um número **irracional**.

Exemplos:

a) $1+\pi = 1 + 3{,}14159265... = 4{,}14159265...$

b) $1+\pi = 1 - 3{,}14159265... = -2{,}14159265...$

- O produto ou o quociente de um número **racional** (não nulo) com um número **irracional** é um número **irracional**.

Exemplos:

a) $2 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$

b) $15 : \sqrt{5} = \dfrac{15}{\sqrt{5}} = \dfrac{15}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{15\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \dfrac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$

3.2 TEOREMA ASSOCIADO

- **Teorema:** O produto de um número racional, não nulo, por um número irracional é um número irracional.

Demonstração: Sejam: r um número racional não nulo, i um número irracional, e k um número real, tais que $k = r \cdot i$.

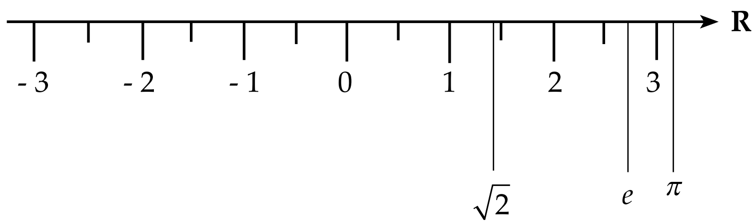
Queremos mostrar que k é um número irracional. Então vamos supor que k é racional e chegar a um absurdo. Como $k = r \cdot i$, podemos escrever i como $i = \dfrac{k}{r}$. Visto que r é racional e usando o fato de k ser racional, segue que $\dfrac{k}{r}$ também é racional (**Q** é fechado para divisão), ou seja, $i = \dfrac{k}{r}$ precisa ser racional. Mas isso é um absurdo, pois i é irracional por hipótese. Segue que k não pode ser racional e, portanto, é irracional, como queríamos demonstrar.

4 CONSTRUÇÃO INTUITIVA DE R

Intuitivamente, podemos construir o conjunto dos números reais a partir dos racionais da seguinte forma: uma reta formada por números racionais tem "buracos" (por exemplo, existe um buraco onde deveria estar a raiz quadrada de 2); assim como também entre dois inteiros existe "um buraco", pois sabemos que entre 1 e 2, por exemplo, podemos assumir infinitos números fracionários.

O conjunto dos números reais completa essa reta, "tapando todos os buracos", de forma que é classificado como um conjunto **denso** (termo que você estudará com maior propriedade na disciplina de Análise Matemática).

FIGURA 1 – CONJUNTO DENSO



FONTE: Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Imagem:Real_number_line.svg>. Acesso em: 28 fev. 2012.

Assim, dados os conjuntos dos números racionais (**Q**) e dos irracionais (**I**), definimos o conjunto dos números reais como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$$

Esta também poderia ser uma definição de número real: Todo número real possui uma forma decimal com parte inteira e parte decimal infinita.

Exemplos:

a) $2{,}000000... = 2 \in R$

b) $\frac{1}{2} = 0{,}500000... = 0{,}5 \in R$

c) $0{,}000000000... = 0 \in R$

d) $\sqrt{2} = 1{,}4142... \in R$

e) $-\frac{72}{94} = -0{,}7272... \in R$

f) $-472{,}36050050005... \in R$

Observe que todos os exemplos possuem uma parte inteira e uma parte decimal.

5 OPERAÇÕES COM OS NÚMEROS REAIS

Uma **operação** sobre um conjunto é uma correspondência que a cada par ordenado de elementos desse conjunto associa um único elemento do conjunto.

No conjunto dos números reais, são válidas todas as técnicas operatórias que estudamos no tópico anterior, tais como adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação, logaritmação.

Porém, é importante atentar que, em **R**, definimos duas operações: a **adição**, que a cada par ordenado (a, b) de números reais associa um único número real a + b, chamado soma de a e b, e a **multiplicação**, que a cada par ordenado (a, b) de números reais associa um único número real a·b, chamado produto de a e b. Assim, temos que a subtração é uma adição com o oposto de um número. A divisão é uma multiplicação com o inverso de um número. A potenciação é um produto de fatores iguais. Ou seja, as demais operações derivam da adição e da multiplicação.

5.1 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS NÚMEROS REAIS

Das operações definidas em **R**, adição e multiplicação, derivam as seguintes propriedades operatórias:

Sendo $a, b, c \in \mathbf{R}$:

- **Fechamento:** $a + b \in \mathbf{R}$ e $a \cdot b \in \mathbf{R}$
- **Comutativa:** $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$
- **Associativa:** $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- **Distributiva:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- **Elemento Neutro Aditivo:** $a + 0 = 0 + a = a$; portanto 0 é o elemento neutro aditivo
- **Elemento Neutro Multiplicativo:** $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; portanto 1 é o elemento neutro multiplicativo.
- **Oposto Aditivo:** $a + (-a) = 0$; logo $-a$ é o oposto aditivo
- **Inverso Multiplicativo:** $a \cdot a^{-1} = 1$; logo a^{-1}, com $a \neq 0$, é o inverso multiplicativo.
- **Tricotomia:** $a = b$ ou $a < b$ ou $b < a$.
- **Regras de Sinal:** $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ e $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Costumeiramente, usamos a forma decimal para operarmos em **R**, mas devemos observar que, como não podemos operar com demais infinitos, esses cálculos são aproximados. Ao usarmos as calculadoras ou os computadores, mesmo os de grande porte, devemos lembrar que eles possuem uma certa capacidade, sempre finita, e que por isso "trabalham" com um certo número limitado de "casas" após a vírgula. Isso significa que estaremos trabalhando com números racionais decimais.

Em geral, os cálculos são efetuados na forma decimal, isto é, usando a base 10 como sistema de numeração. Porém se usamos outra base, as representações serão completamente diferentes. "Um exemplo bem ilustrativo é quando usamos a base binária ou hexadecimal nos cálculos na área de informática". (MAIO, 2007, p. 169).

Devemos atentar para os erros de aproximação que são introduzidos nos cálculos operacionais em **R**. Observe alguns exemplos:

Exemplos:

a) Considere a adição $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{7+3}{21} = \frac{10}{21}$

Erros de aproximação ficam evidentes quando efetuamos o cálculo acima trabalhando com decimais: 0,33 + 0,14 = 0,47. Observe que $\frac{10}{21}$ "tende mais" para 0,48 do que para 0,47; o cálculo com duas casas decimais impossibilita verificar isso.

b) Considere a multiplicação $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$. Se efetuassemos esse cálculo como 1,41 · 1,41, obteríamos 1,98, apresentando um erro de arredondamento que, em alguns casos, pode ser expressivo.

É evidente que o erro depende da capacidade da calculadora; aqui estamos dando exemplos extremos, onde o arredondamento foi feito para duas casas decimais, mas, por melhor que seja a máquina, sempre dará resultados aproximados, pois sempre limitará seu número de casas decimais em algum valor e sabemos que os reais apresentam dízimas infinitas periódicas (racionais) ou não (irracionais).

Erros de arredondamento serão estudados com maior propriedade numa outra disciplina de seu curso, chamada Cálculo Numérico.

6 O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS COMO CORPO

Até o momento, abordamos o conjunto dos números reais como a união entre números racionais e irracionais.

No entanto, na construção axiomática dos números reais, admitimos a existência de um conjunto **R** no qual se definem duas operações: uma chamada adição e outra multiplicação.

Número real, adição e multiplicação são entendidos como conceitos primitivos da teoria axiomática. Para fundamentar a teoria, temos ainda os axiomas, isto é, proposições que, convencionalmente, aceitamos sem demonstração e que exprimem certas propriedades impostas aos conceitos primitivos.

Um conjunto qualquer, munido das operações de adição e multiplicação e atendendo a esse grupo de axiomas é chamado de **corpo**.

Vejamos então quais são os axiomas que caracterizam um conjunto como um corpo.

6.1 AXIOMAS DE CORPO

- Axioma 1: A adição e a multiplicação são operações comutativas, no conjunto dos reais.

  Ou seja, quaisquer que sejam a, b $\in$ **R**, são válidas as igualdades:

  $a + b = b + a$ $\qquad$ $a \cdot b = b \cdot a$

- Axioma 2: A adição e a multiplicação são associativas em **R**. Ou seja, quaisquer que sejam a, b, c $\in$ **R**, são válidas as igualdades:

  $a + (b + c) = (a + b) + c$ $\qquad$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

- Axioma 3: A multiplicação é distributiva com relação à adição. Ou seja, quaisquer que sejam a, b, c $\in$ **R**, é válida a igualdade:

  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

- Axioma 4: A adição e a multiplicação são operações com elemento neutro; os elementos neutros de ambas operações são números reais distintos.

  Para a adição, existe um número real ***e*** tal que, para todo a $\in$ **R**, temos:

  $a + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} + a = a$

Para a multiplicação, existe um número real n tal que, para todo a $\in$ **R**, temos:

$a \cdot n = n \cdot a = a$

Pelas propriedades operatórias estudadas no item anterior, vimos que, no conjunto dos reais, o elemento neutro aditivo é 0 e o elemento neutro multiplicativo é 1.

- Axioma 5: Sendo a $\in$ **R**, o simétrico de a, designado por –a é o único real cuja soma com a é igual a 0. Sendo a $\in$ $\mathbf{R}^*$, o inverso de a, designado por a^{-1}, é o único real cujo produto com a é igual a 1. Ou seja, todo o número real tem simétrico e todo o real distinto de zero tem inverso. Nessas condições:

$\forall a \in \mathbf{R}$, $a + (-a) = (-a) + a = 0$ $\qquad$ $\forall a \in \mathbf{R}^*$, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Qualquer conjunto onde se definam as operações de "adição" e "multiplicação", e onde sejam válidos os 5 axiomas acima, é usualmente chamado **corpo**. O conjunto dos números reais atende esses axiomas, conforme já verificamos ao estudar as propriedades operatórias em **R**.

Portanto, **R** é um corpo.

Dos axiomas de corpo, resultam de os seguintes teoremas:

6.2 TEOREMAS ASSOCIADOS

- **Teorema 1: Lei do corte para a adição:** Quaisquer que sejam a, b e c $\in$ **R**, a igualdade:

$a + b = a + c$ implica $b = c$.

Demonstração: Se a, b, c $\in$ **R**, existe (-a) $\in$ **R** tal que $a + (-a) = -a + a = 0$ (Axioma 05). Por outro lado:

$$a + b = a + c \Rightarrow (-a) + (a + b) = (-a) + (a + c) \overset{\text{Axioma 02}}{\Rightarrow} (-a + a) + b = (-a + a) + c \Rightarrow 0 + b = 0 + c$$

$\overset{\text{Axioma 04}}{\Rightarrow}$ b = c, como queríamos demonstrar.

- **Teorema 2: Unicidade da subtração:** Quaisquer que sejam a, b $\in$ **R**, existe um e só um c, tal que $c = a - b$.

Demonstração: Dados a, b $\in$ **R**, suponhamos que existam c, d $\in$ **R**, tais que $\begin{cases} a - b = c \\ a - b = d \end{cases}$

Então: $\begin{cases} a - b = c \\ a - b = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + (-b) = c \\ a + (-b) = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + (-b) + b = c + b \\ a + (-b) + b = d + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + (-b + b) = c + b \\ a + (-b + b) = d + b \end{cases}$

$\begin{cases} a = c + b \\ a = d + b \end{cases} \Rightarrow c + b = d + b \Rightarrow (c + b) + (-b) = (d + b) + (-b) \;\; c + (b - b) = d + (b - b) \Rightarrow$

$\Rightarrow c + 0 = d + 0 \Rightarrow c = d.$

Portanto, existe um único elemento c **R**, tal que c = a – b, como queríamos demonstrar.

- **Teorema 3: Unicidade da divisão**: Quaisquer que sejam a $\in$ **R** e b $\in$ **R***, existe um só c $\in$ **R**, tal que c = $\frac{a}{b}$.

Demonstração: Sejam a $\in$ **R**, b $\in$ **R*** e suponhamos que existam c, d $\in$ **R**, tais que $\frac{a}{b}$ = c e $\frac{a}{b}$ = d. Então:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = c \\ \frac{a}{b} = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot b^{-1} = c \\ a \cdot b^{-1} = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a \cdot b^{-1}) \cdot b = c \cdot b \\ (a \cdot b^{-1}) \cdot b = d \cdot b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a \cdot b^{-1} \cdot b) = c \cdot b \\ (a \cdot b^{-1} \cdot b) = d \cdot b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1 = c \cdot b \\ a \cdot 1 = d \cdot b \end{cases}$$

$\Rightarrow c{\cdot}b = a = d{\cdot}b \Rightarrow (c{\cdot}b)(b^{-1}) = (d{\cdot}b)(b^{1}) \Rightarrow c(b{\cdot}b^{1}) = d(b{\cdot}b^{1}) \Rightarrow c{\cdot}1 = d{\cdot}1 \Rightarrow c = d.$

Portanto, existe um único c $\in$ **R**, tal que c = $\frac{a}{b}$, como queríamos demonstrar.

- **Teorema 4:** A igualdade a · b = 0, verifica-se se, e somente se, a = 0 ou b = 0.

Demonstração: Vamos supor que a ≠ 0 e mostrar que, neste caso, b = 0. Então existe -a $\in$ **R**, tal que (-a)·(a) = 1. Logo (-a)(a·b) = (-a) ·0 = 0 $\Rightarrow$ (-a·a)·b = 0 $\Rightarrow$ 1·b = 0 $\Rightarrow$ b = 0.

Analogamente, se supomos que b ≠ 0, concluiremos que a precisa ser nulo.

Portanto, se a·b = 0, necessariamente a = 0 ou b = 0, como queríamos demonstrar.

6.3 CARACTERÍSTICAS DE UM CORPO ORDENADO

Um conjunto **S** qualquer é chamado de **corpo ordenado** se verificar o seguinte axioma:

Axioma de Corpo Ordenado: Existe um subconjunto P de S, onde cada elemento de P é chamado de **positivo**, e atende as seguintes características:

- Se a e b pertencem a P, então a + b e a · b também pertencem a P.
- Se a pertence a S, então ou a pertence a P, ou –a pertence a P, ou ainda a = 0, sendo que estas três possibilidades são mutuamente exclusivas.

6.4 PROPRIEDADES DA RELAÇÃO DE ORDEM EM UM CORPO

Em todo corpo ordenado é válido que:

- **Tricotomia:** Dados a e b pertencentes ao corpo ordenado, temos três possibilidades mutuamente exclusivas: a < b, a = b ou a > b.
- **Transitividade:** Se a < b e b < c então a < c.
- a < b se e somente se a + c < b + c.
- Se c > 0 então a < b se e somente se a · c < b · c.
- Se c < 0 então a < b se e somente se a · c > b · c.

Portanto, **R** é um corpo ordenado.

LEITURA COMPLEMENTAR

A TEORIA DOS NÚMEROS ENQUANTO SABER CIENTÍFICO: UM SOBREVOO HISTÓRICO

O surgimento dos números naturais, devido à necessidade de contar, está nas raízes da história da Teoria dos Números e presente nas civilizações mais antigas. Assim, podemos observar que a matéria-prima dessa importante área da matemática está posta desde épocas remotas, e o estudo das propriedades e das relações envolvendo os números inteiros foi sendo realizado, mesmo que ainda de modo não formal e não sistematizado, ao longo da história das civilizações.

Os povos egípcios e os babilônios buscaram formas de representar os números naturais e modos de operar com eles. Registraram relações, como se pôde observar na tábua Plimpton 322, escrita pelos babilônios por volta de 1900 a 1600 a.C. e descoberta recentemente. Nela estão registradas triplas de números, que mais tarde foram denominados números pitagóricos, pois satisfazem o teorema conhecido como de Pitágoras. Essa tabela tem um importante significado na teoria dos números, pois os ternos pitagóricos primitivos são soluções para as equações do tipo $x^2 + y^2 = z^2$, mais tarde chamadas de equações diofantinas.

Foi na Grécia, no entanto, que o estudo dos inteiros positivos ganhou caráter mais formal, atrelado a um forte misticismo, em especial na escola pitagórica. A filosofia desta escola baseava-se no pressuposto de que a causa última das coisas são os números naturais. Isto levava consequentemente a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido da teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia. Os pitagóricos levaram ao extremo a admiração aos números, baseando neles a sua filosofia e seu modo de viver. O número *um*, diziam eles, é o gerador dos números, o número da razão; o *dois* é o primeiro número par ou feminino, o número da opinião; o *três*, o primeiro número masculino verdadeiro, o da harmonia; o *quatro* é o número da justiça; o *cinco* é o número do casamento, união do masculino com o feminino; o *seis* é o número da criação; e o *dez* é o mais sagrado, pois representava a soma de todas as dimensões geométricas.

É importante considerar que, na Grécia a palavra *número* se referia apenas aos números inteiros. Uma fração não era considerada número, mas uma razão entre dois números inteiros. Assim, a ênfase no número como instrumento de cálculo ou de aproximações de medidas era reduzida. A arte de calcular era chamada pelos gregos de *logística*, e o estudo das relações abstratas era chamado de *aritmética*, hoje conhecida como *teoria dos números*. Deste modo, a artimética passou a ser considerada uma disciplina intelectual e não apenas uma técnica.

[...] Muitos dos problemas da teoria dos números foram tratados por Euclides nos *Elementos*, em três dos treze livros. Os livros VII, VIII e IX, que têm no total cento e duas proposições, tratam do que poderia ser chamado de teoria elementar dos números. Neles encontram-se: a definição de número primo, o algoritmo, hoje denominado euclidiano que é um método para determinar o máximo divisor comum entre dois números, o estudo de números perfeitos, a demonstração de que há infinitos números primos, feita por absurdo e que ainda hoje é encontrada nos livros.

Outro matemático grego que deu contribuição significativa para a teoria dos números, foi Diofanto de Alexandria. Acredita-se que ele tenha vivido no século III de nossa era, teve uma importância enorme para o desenvolvimento da Álgebra e uma grande influência sobre os matemáticos que se dedicaram mais tarde à teoria dos números. Diofanto escreveu três trabalhos, sendo um deles *Arithmetica*, uma obra diferente das anteriormente publicadas, pois era um tratado caracterizado por um alto grau de habilidades matemáticas. É uma abordagem da teoria algébrica dos números. Contém 130 problemas que levam a equações de primeiro e segundo graus e uma cúbica. Não há métodos gerais, mas resoluções engenhosas para problemas específicos. Diofanto só admitia respostas que fossem números racionais positivos, e satisfazia-se com, apenas, uma resposta do problema. Há, em sua obra, enunciados que mereceram a atenção de matemáticos, como Viète, Fermat, Lagrange e Euler. Os problemas algébricos indeterminados em que se devem achar soluções inteiras tornaram-se conhecidos como equações diofantinas. Porém, Diofanto não foi o primeiro a se preocupar com estes problemas, mas talvez tenha sido o primeiro a dar uma notação algébrica. Ele tinha notações para a incógnita, para potências da incógnita até a de expoente seis, para a subtração, para igualudade e para inversos. Foi um passo importante para avançar da álgebra retórica para a álgebra sincopada. Por isso considero o fundador da álgebra.

Embora a matemática continuasse a ser estudada em outras civilizações, nos séculos seguintes ao III d.C., somente a partir do século XVII, a Teoria dos Números ganhou novo impulso, em especial, com as contribuições de grandes nomes da matemática, como os de Fermat, Euler, Lagrange e Gauss.

FONTE: RESENDE, Marilene Ribeiro. **Re-significando a disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática na licenciatura**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - PUC, São Paulo, 2007. p. 68-72.

RESUMO DO TÓPICO 4

- Quanto à definição simplificada de número real:

Todo número real possui uma forma decimal com parte inteira e parte decimal infinita, ou $x \in \mathbf{R} \Rightarrow x$ é do tipo: x = inteiro, decimal infinito; observando que esse decimal infinito será periódico ou não, dependendo do caso em que seja racional ou irracional.

- Quanto às operações em **R**:

Todas as operações que estudamos no tópico anterior são válidas em R, observando os possíveis erros de aproximação oriundos do cálculo com reais.

- Quanto às propriedades operatórias em **R**:

Das operações definidas em R, adição e multiplicação, derivam as seguintes propriedades, sendo $a, b, c \in \mathbf{R}$:

- Fechamento: $a + b \in \mathbf{R}$ e $a \cdot b \in \mathbf{R}$
- Comutativa: $a + b = b + a$ e $ab = b \cdot a$
- Associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Elemento Neutro Aditivo: $a + 0 = 0 + a = a$; portanto 0 é o elemento neutro aditivo
- Elemento Neutro Multiplicativo: $a \;\; 1 = 1 \cdot a = a$; portanto 1 é o elemento neutro multiplicativo.
- Oposto Aditivo: $a + (-a) = 0$; logo $-a$ é o oposto aditivo
- Inverso Multiplicativo: $a \cdot a^{-1} = 1$; logo a^{-1}, com $a \neq 0$, é o inverso multiplicativo.
- Tricotomia: $a = b$ ou $a < b$ ou $b < a$.
- Regras de Sinal: $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ e $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

- Quanto aos axiomas de corpo:

- Axioma 1: A adição e a multiplicação são operações comutativas, no conjunto dos reais.
- Axioma 2: A adição e a multiplicação são associativas em **R**.
- Axioma 3: A multiplicação é distributiva com relação à adição.
- Axioma 4: A adição e a multiplicação são operações com elemento neutro. No conjunto dos reais, o elemento neutro aditivo é 0 e o elemento neutro multiplicativo é 1.
- Axioma 5: Sendo $a \in \mathbf{R}$, o simétrico de a, que designamos por $-a$ é o único real cuja soma com a é igual a 0. Sendo $a \in \mathbf{R}^*$, o inverso de a, que designamos por a^{-1}, é o único real cujo produto com a é igual a 1.

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico!

As autoatividades que seguem buscam fazer com que você compreenda melhor o conceito e as propriedades relacionadas aos números reais.

Bom trabalho!

1 Complete, usando a propriedade especificada: (BOULOS, 2001, p. 4)

a) $23 + 31 =$ __________ (comutativa)
b) $37 \cdot 45 =$ ___________ (comutativa)
c) $6 + (5 + 3) =$ _________ (associativa)
d) $(23 \cdot 54) \cdot 5 =$ _________ (associativa)
e) $4 + 0 =$ ___________ (elemento neutro)
f) $7 \cdot 1 =$ _________ (elemento neutro)
g) $3 + (-3) =$ _________ (elemento oposto)
h) $4 \cdot \frac{1}{4} =$ __________ (elemento inverso)
i) $8 \cdot (3 + 5) =$ _________ (distributiva)
j) $(9 + 8) \cdot 4 =$ __________ (distributiva)

2 Classifique como **V** ou **F** cada uma das afirmações:

a) ( ) O oposto de um número inteiro é inteiro.
b) ( ) O oposto de um número racional é racional.
c) ( ) O oposto de zero é o próprio zero.
d) ( ) O inverso de um número racional não nulo é um número racional.
e) ( ) O inverso de um número inteiro não nulo é um número inteiro.
f) ( ) O inverso de zero é o próprio zero.
g) ( ) O oposto de $\frac{3}{4}$ é $-\frac{3}{4}$.
h) ( ) O oposto de 5 é $\frac{1}{5}$.
i) ( ) Todo número racional tem inverso.
j) ( ) Todo número racional tem oposto.

3 Classifique como **V** ou **F** cada uma das afirmações: (Adaptado de: PAIVA, 2000, p. 63)

a) ( ) Toda dízima não-periódica é número irracional.
b) ( ) Toda dízima é um número irracional.
c) ( ) Toda dízima periódica é um número racional.
d) ( ) Todo número que pode ser escrito sob a forma decimal é real.

e) ( ) Números reais são somente aqueles que podem ser representados pela razão entre dois números inteiros.
f) ( ) O produto de um número racional por um número irracional é um número irracional.
g) ( ) O oposto de um número irracional é irracional.
h) ( ) O inverso de um número irracional é irracional.

4 Prove que o quociente de um número racional, não nulo, por um número irracional é um número irracional.

5 Prove a lei do corte para a adição: Quaisquer que sejam a, b e c $\in$ **R**, a igualdade: a + b = a + c implica em b = c.

6 Sejam a e b números irracionais quaisquer. Das afirmações: (FACITEC-SP, 2012)

I- ab é um número irracional;
II- a + b é um número irracional;
III- a – b pode ser um número racional;

pode-se concluir que:

a) ( ) As três são falsas.
b) ( ) A três são verdadeiras.
c) ( ) Somente I e III são verdadeiras.
d) ( ) Somente I é verdadeira.
e) ( ) Somente I e II são falsas.

7 Uma das instruções de um exame vestibular afirmava que cada teste que compunha a prova apresentava cinco alternativas, das quais apenas uma era correta. Passados alguns dias da prova, foi divulgado que um dos testes havia sido anulado. O teste anulado apresentava as seguintes alternativas: (PAIVA, 2000)

a) ( ) x é um número natural.
b) ( ) x é um número inteiro.
c) ( ) x é um número racional.
d) ( ) x é um número irracional.
e) ( ) x é um número real.

Explique por que o teste foi anulado.

UNIDADE 2

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

A partir desta unidade você será capaz de:

- identificar um conjunto munido de uma operação binária como grupo;
- identificar um conjunto munido de duas operações binárias como anel;
- operar com classes de equivalência;
- realizar operações com polinômios cujos coeficientes pertencem a um anel complexo;
- decompor um polinômio em fatores do 1º grau;
- relacionar coeficientes e raízes de uma equação polinomial.

PLANO DE ESTUDOS

Esta unidade de ensino está dividida em quatro tópicos. No final de cada um deles você encontrará atividades que contribuirão para a apropriação dos conteúdos.

TÓPICO 1 – TEORIA DOS GRUPOS

TÓPICO 2 – TEORIA DOS ANÉIS E ANÉIS DE POLINÔMIOS

TÓPICO 3 – ARITMÉTICA MODULAR

TÓPICO 4 – EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS

TÓPICO 1

TEORIA DOS GRUPOS

1 INTRODUÇÃO

Foi através dos escritos deixados pelo matemático francês Évariste Galois (1811-1832) que nasceu a Teoria dos Grupos.

A Teoria dos Grupos faz parte de uma área da Matemática que denominamos de Estruturas Algébricas e se constitui em uma importante ferramenta para o estudo de simetrias, além de possuir muitas aplicações em Física Matemática.

> O conceito de grupo é, seguramente, uma das ideias centrais da Matemática. Certamente existem poucos ramos matemáticos nos quais os grupos não sejam empregados implicitamente ou explicitamente. Teoria quântica, estrutura atômica e molecular e cristalografia são apenas algumas das áreas das ciências nas quais a ideia de grupo como uma medida de simetria tem sido utilizada com grande importância.

FONTE: Vieira; Alves (2009)

De modo geral, um grupo é definido por meio de leis que combinam seus elementos. Neste tópico, vamos estudar essas leis que classificam um conjunto enquanto grupo e analisar alguns exemplos.

UNI

Segundo a Sociedade Brasileira de Cristalografia (SBCr), a cristalografia consiste numa ciência que estuda a disposição interatômica da matéria sólida, as suas causas, a sua natureza e as suas consequências. A cristalografia não é somente a ciência que estuda os cristais limitados por faces planas, mas também a ciência que estuda o estado cristalino e a disposição atômica em substâncias amorfas, líquidos, gases, assim como a estrutura da matéria viva.

FONTE: Disponível em: <http://www.sbcr.org.br/>. Acesso em: 28 fev. 2012.

2 DEFINIÇÃO DE GRUPO

Seja **G** um conjunto não vazio, no qual uma operação binária qualquer, que representaremos por $\circ$, está definida. Esse conjunto G é chamado de grupo em relação a esta operação se, para arbitrários elementos **a**, **b**, **c** $\in$ G, as seguintes propriedades forem válidas:

I- **Fechamento:** O conjunto G é fechado em relação à operação considerada se $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{c}$ então $\mathbf{c} \in G$.
II- **Associativa:** $(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = \mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \circ \mathbf{c})$
III- **Existência do Elemento Neutro:** Existe $e \in G$ tal que: $\mathbf{a} \circ e = e \circ \mathbf{a} = \mathbf{a}$
IV- **Existência de Inversos:** Para cada $\mathbf{a} \in G$, existe $\mathbf{a}^* \in G$, tal que: $\mathbf{a} \circ \mathbf{a}^* = \mathbf{a}^* \circ \mathbf{a} = e$

Com relação à propriedade IV, usamos a notação $\mathbf{a}^*$ para simbolizar um elemento que operado com **a**, resultará no elemento identidade da operação em questão. Assim, se o grupo for aditivo, a operação envolvida será a adição e, consequentemente, $\mathbf{a}^*$ será (–**a**), ou seja, na adição $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = 0$, que é elemento neutro aditivo.

Todavia, se o grupo for multiplicativo, a operação binária em questão será a multiplicação. Então, $\mathbf{a}^*$ corresponderá a $\mathbf{a}^{-1}$, pois $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^{-1}) = (\mathbf{a}^{-1}) \cdot \mathbf{a} = 1$, que, por sua vez, é elemento neutro multiplicativo. Em síntese, a notação $\mathbf{a}^*$ foi utilizada para simbolizar, de modo genérico, o elemento inverso de qualquer operação binária.

Atente também com relação ao símbolo utilizado para operação binária. Na definição de Grupo, representamos simbolicamente a operação binária envolvida por (○). Assim, para **a** ○ **b**, lemos: "**a** operação **b**", e, para indicar que ao par (**a**, **b**) corresponde **c**, escrevemos **a** ○ **b** = **c**.

Assim, o símbolo ○ pretende designar qualquer operação binária envolvida. Se o grupo for aditivo, ○ representará a operação de adição e será expresso por "+"; da mesma forma, se o grupo for multiplicativo, ○ representará a operação de multiplicação e será expresso por "·".

Por fim, de forma simplificada, podemos dizer que um grupo é um conjunto não vazio G munido de uma operação fechada, associativa, admitindo elemento neutro e inverso para cada um de seus elementos.

Ao nos referirmos ao conjunto G e à operação binária ○, podemos escrever apenas (G, ○).

2.1 GRUPO COMUTATIVO OU ABELIANO

Um grupo se diz **comutativo** ou **abeliano** se, além das propriedades que o caracterizam como grupo, é verificada a propriedade comutativa da operação binária em questão.

A expressão **grupo abeliano** é em homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829), que precedeu Galois no estudo dos grupos.

2.2 GRUPO MULTIPLICATIVO

Um grupo é classificado como **multiplicativo** quando a operação binária considerada sobre ele é a multiplicação. Nesses grupos, denota-se a operação pelo sinal "·" de multiplicação ou apenas por justaposição.

2.3 GRUPO ADITIVO

Um grupo é classificado como **aditivo** quando a operação binária considerada sobre ele é a adição. Nesses grupos, denota-se a operação pelo sinal "+" de adição.

2.4 GRUPO FINITO

Um **grupo finito** é um grupo (G, ○) no qual o conjunto G é finito. O número de elementos de G, nesse caso, é chamado de **ordem** do grupo G.

Por se tratar de um conjunto finito, é possível construir a tábua deste grupo. A tábua de um grupo finito (G, ○) é a tabela operatória da operação binária considerada em G, também chamada de tábua de Cayley, onde as propriedades que o definem como grupo podem ser facilmente visualizadas, como veremos nos exemplos a seguir.

3 EXEMPLOS E CONTRAEXEMPLOS DE GRUPOS

Vamos analisar situações que classificam ou não um conjunto, munido de uma operação binária, como um grupo.

a) Vamos considerar o conjunto G = {-1, 1} e a operação binária multiplicação usual.

Será que (G, ·) é um grupo finito?

Vamos construir a tabela operatória referente a operação binária:

·	**-1**	**1**
-1	1	-1
1	-1	1

Através da tabela operatória ao lado, podemos averiguar se as quatro propriedades que definem em grupo são válidas para o conjunto G:

I- Fechamento: Todos os elementos resultantes da operação de multiplicação pertencem a G, logo, G é fechado para esta operação binária.

II- Associativa: Observe, pela tabela, que a propriedade associativa também se verifica. Como G possui dois elementos, teríamos 16 possibilidades de associá-los (8 pela direita e 8 pela esquerda). Todavia, como o conjunto G é formado por números inteiros e a associatividade é válida para o produto de números inteiros, por restrição, é válida também para G.

III- Existência do Elemento Identidade: O elemento neutro multiplicativo é 1.

IV- Existência de Inverso: O inverso de -1 é -1, pois $-1 \cdot (-1) = 1$ que é o elemento identidade. Da mesma forma, o inverso de 1 é 1.

Verificamos assim que G é um grupo em relação à multiplicação usual, pois verifica as quatro propriedades apresentadas na definição de grupo.

Observamos ainda que, conforme estudamos no Tópico 1 da unidade anterior, a simetria dos elementos da tabela operatória em relação à diagonal principal apresenta a comutatividade da operação sobre G.

Assim, classificamos o conjunto G como grupo finito de ordem 2 (G possui 2 elementos), multiplicativo, comutativo ou abeliano.

$$\boxed{(G, \cdot) \text{ é um grupo abeliano finito.}}$$

b) Considere o conjunto A = {1, 2, 3, 6} e a operação binária (♦): (x, y) → mdc(x, y) que associa a cada par ordenado (x, y) o seu máximo divisor comum. (A, ♦) é um grupo?

Vamos construir a tabela operatória para esta operação binária:

♦	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

Na tabela ao lado, a resultante para cada operação x ♦ y, simboliza o máximo divisor comum entre x e y.

Observe, por exemplo, que, no encontro da terceira linha com a quarta coluna, encontramos o máximo divisor comum entre 3 e 6.

Para caracterizar (A, ♦) como grupo, faz-se necessário atender as quatro propriedades que definem um conjunto como grupo. Pela tabela operatória, verificamos que:

I- Fechamento: Cada elemento de A relacionado com outro elemento de A gerou um novo elemento, a partir da operação binária definida sobre A, ao qual denominamos máximo divisor comum, que, por sua vez, também pertence ao conjunto A. Portanto, o conjunto A é fechado para a operação binária em questão.

II- Associativa: É fácil perceber a associatividade nesta operação binária. Como A possui quatro elementos, teríamos 128 possibilidades de associá-los. Vejamos alguns exemplos:

$(2 \blacklozenge 3) \blacklozenge 6 = 2 \blacklozenge (3 \blacklozenge 6)$	$(2 \blacklozenge 1) \blacklozenge 3 = 2 \blacklozenge (1 \blacklozenge 3)$	$(6 \blacklozenge 3) \blacklozenge 6 = 6 \blacklozenge (3 \blacklozenge 6)$
$1 \blacklozenge 6 = 2 \blacklozenge 3$	$1 \blacklozenge 3 = 2 \blacklozenge 1$	$3 \blacklozenge 6 = 6 \blacklozenge 3$
$1 = 1$	$1 = 1$	$3 = 3$

Todavia A é subconjunto de **N** (números naturais) e, como a associatividade é válida em **N**, por restrição, é válida para A.

III- Existência do Elemento Neutro: O elemento neutro de cada elemento $x \in A$ é o próprio x. Pela definição de elemento neutro, temos que se trata de um número que, operado com x, resulte no próprio x. Pois bem, observe na tabela que:

$1 \blacklozenge 6 = 1$ (ou seja, o máximo divisor comum entre 1 e 1 é 1)

$2 \blacklozenge 6 = 2$ $\quad$ $3 \blacklozenge 6 = 3$ $\quad$ $6 \blacklozenge 6 = 6$

IV- Existência de Inversos: Não há existência de elemento inverso nesta operação. Pois para que isso ocorresse seria necessário que cada elemento $x \in A$ operado com $x \in A$ gerasse o elemento identidade, que neste caso é 6. Observe na tabela que isso não ocorre.

$$\boxed{\text{Portanto } (A, \blacklozenge) \text{ não é um grupo.}}$$

c) Os números inteiros formam um grupo sobre a adição usual (+). De fato, o conjunto **Z** é fechado para adição, existe o elemento neutro aditivo – o zero, e o inverso de cada elemento é seu oposto, ou seja, $\forall x \in \mathbf{Z}$, temos que $x + (-x) = 0$. Assim, verificamos que todos os quatro requisitos da definição são satisfeitos por essa coleção, além da adição ser comutativa. Logo, (**Z**, +) é um grupo abeliano.

$$\boxed{(\mathbf{Z}, +) \text{ é um grupo abeliano.}}$$

d) Considere o conjunto **Z** dos números inteiros, munido da operação (★): $(x, y) \to x + y - 1$. (**Z**, ★) é um grupo?

O resultado da operação definida por (★): (x, y) → x + y – 1 sempre será um número inteiro, portanto é válido o **fechamento**.

A propriedade **associativa** também é válida para a adição de inteiros. O elemento identidade é 1.

O inverso de -2 é 4, pois (-2 ★ 4) resulta 1, que é o elemento identidade. O inverso de -1 é 3, o inverso de 0 é 2, o inverso de 1 é 1, o inverso de 2 é 0, e assim por diante. Todo elemento pertencente a **Z terá inverso para operação** binária em questão.

A **comutatividade** também é verificada através da simetria dos elementos com relação à diagonal principal.

(**Z**, ★) é um grupo abeliano.

e) O conjunto $\mathbf{R}^*$ dos números reais não nulos com o produto usual, ($\mathbf{R}^*$, ·) é um grupo. O grupo multiplicativo dos reais não nulos. Podemos verificar a validade de todas as propriedades que assim o caracterizam. $\mathbf{R}^*$ é fechado com relação à multiplicação, a propriedade associativa é válida para o produto de números reais, o elemento identidade é 1 e o elemento inverso de $x \in \mathbf{R}^*$ é $\frac{1}{x}$. Além disso, a multiplicação é comutativa em $\mathbf{R}^*$. Portanto, o grupo multiplicativo dos reais não nulos é abeliano.

($\mathbf{R}^*$, ·) é um grupo abeliano.

f) Também o conjunto **R** dos números reais com a adição usual é um grupo. Denotado por (**R**, +), este grupo é denominado grupo aditivo dos reais, onde todas as propriedades de grupo se verificam, assim como a comutatividade.

(**R**, +) é um grupo abeliano.

g) Considere o conjunto **N** dos números naturais, munido da operação de multiplicação usual. (**N**, ·) é um grupo?

O conjunto dos números naturais é **fechado** para a operação de multiplicação, a propriedade **associativa** também é válida para o produto de números naturais, existe o **elemento neutro** multiplicativo, o número 1.

Todavia **não existe elemento inverso** multiplicativo nos naturais, o que não faz com que (**N**, ·) seja caracterizado com um grupo.

(**N**, ·) não é um grupo.

h) Considere o conjunto G = {1, -1, i, -i} de números complexos, munido da operação de multiplicação usual. (G, ·) é um grupo?

Vamos construir a tabela operatória desta operação binária sobre G:

·	**1**	**-1**	**i**	**-i**
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

I- Fechamento: Todo elemento gerado a partir da operação binária sobre G pertence a G. Logo, G é fechado para operação de multiplicação usual.

II- Associativa: Como G possui 4 elementos, teríamos 128 possibilidades de associá-los.

Todavia, G é subconjunto de **C** (conjunto dos números complexos) e, como a associatividade é válida em **C**, por restrição, consideramos válida para G.

III- Existência do Elemento Neutro: O elemento neutro multiplicativo é 1, ou seja: $\exists\, 1 \in G \mid x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \ \forall x \in G$.

IV- Existência do Elemento Inverso: O inverso de 1 é 1, o inverso de -1 é -1, o inverso de i é -i e o inverso de –i é i.

A simetria com relação à diagonal principal nos faz validar ainda a propriedade comutativa para a operação binária de multiplicação sobre G.

Portanto, (G, ·) é um grupo abeliano.

i) Considere o conjunto **N** dos números naturais, munido da operação de adição usual. (**N**, +) é um grupo?

O conjunto dos naturais **N** com a operação de adição não é grupo. Apesar de ter 0 como elemento identidade, nenhum de seus elementos positivos tem inverso.

(**N**, +) não é um grupo.

j) O conjunto das matrizes quadradas de ordem n, cujos elementos são constituídos de números reais, com a operação de adição usual de matrizes, é um grupo denotado por (M_n(**R**), +).

A adição de duas matrizes quadradas de ordem n resultará em uma matriz quadrada de mesma ordem, portanto é válida a propriedade do fechamento para este conjunto.

A associatividade também se verifica, haja vista que os elementos de M_{nxn} são números reais.

O elemento identidade é a matriz nula de ordem n e o elemento inverso para cada matriz A do conjunto M é a matriz quadrada de ordem – A, cujos elementos são opostos aos de A.

Como a comutatividade também é válida na soma de matrizes, então temos um grupo abeliano ou comutativo.

(M_n(**R**), +) é um grupo abeliano.

k) O conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n com a operação de multiplicação usual de matrizes não é um grupo, pois nem toda matriz admite inversa.

(M_n(**R**), ·) não é um grupo.

4 PROPRIEDADES DE UM GRUPO

Seja (G, ○) um grupo. Sobre (G, ○) valem as seguintes propriedades:

4.1 LEI DO CANCELAMENTO

Seja (G, ♦) um grupo, então $\forall$ a, b, c $\in$ G, vale:

(i) a ♦ b = a ♦ c $\Rightarrow$ b = c
(ii) b ♦ a = c ♦ a $\Rightarrow$ b = c

Demonstração:

(i) Partimos da hipótese de que:

a ♦ b = a ♦ c

Como a, b, c $\in$ G e (G, ♦) é grupo, todo elemento possui um único inverso. Vamos simbolizar o inverso de a como a´:

a´ ♦ (a ♦ b) = a´♦ (a ♦ c)

Pela lei associativa, temos:

(a´ ♦ a) ♦ b = (a´ ♦ a) ♦ c

Todavia, pela definição de inverso, um elemento operado com seu inverso resulta no elemento identidade da operação, que vamos simbolizar por e, logo:

(a´ ♦ a) ♦ b = (a´ ♦ a) ♦ c
e ♦ b = e ♦ c

Por fim, pela definição de elemento identidade, temos que todo elemento operado com o elemento identidade da operação resulta nele próprio, donde concluímos:

b = c

(ii) Análogo a (i).

4.2 EQUAÇÃO ALGÉBRICA DE SOLUÇÃO ÚNICA

Seja (G, ♦) um grupo, então $\forall$ a, b $\in$ G, a equação algébrica:

(i) a ♦ x = b tem solução única;
(ii) y ♦ a = b tem solução única.

Demonstração:

(i) Partimos da hipótese de que:

a ♦ x = b

Como a, b $\in$ G e (G, ♦) é grupo, em um grupo todo elemento possui um único inverso.

Vamos simbolizar o inverso de a como a´:

a´ ♦ (a ♦ x) = a´♦ b

Pela lei associativa, temos:

(a´ ♦ a) ♦ x = (a´ ♦ a) ♦ b

Todavia, pela definição de inverso, um elemento operado com seu inverso resulta no elemento identidade da operação, que vamos simbolizar por e, obtendo assim:

(a´ ♦ a) ♦ x = (a´ ♦ a) ♦ b
e ♦ x = e ♦ b

Por fim, pela definição de elemento identidade, temos que todo elemento operado com o elemento identidade da operação resulta nele próprio, donde concluímos:

x = b

Devemos provar agora que essa solução é única. Para tanto, vamos admitir a existência de duas soluções e provar que ambas são iguais.

Vamos considerar que são válidas as duas soluções: x e q; assim, temos:

$a \blacklozenge x = b \quad e \quad a \blacklozenge p = b$

Pela lei do cancelamento, temos:

$a \blacklozenge x = a \blacklozenge p$
$x = p$

Portanto, a solução é única.

(ii) Análogo a (i).

4.3 INVERSO DO INVERSO

Seja (G, ♦) um grupo, então $\forall\, a \in G, \exists\, a' \in G$, definido como inverso de a. É válido que $(a')' = a$.

Demonstração: Pela definição de elemento inverso, temos que:

$a' \blacklozenge a = \mathbf{e}$, **(1)**

onde **e** é o elemento identidade da operação (♦).

Considerando novamente a definição de elemento inverso:

$(a')' \blacklozenge a' = \mathbf{e}$ **(2)**

Comparando **(1)** e **(2)**, temos:

$a' \blacklozenge a = (a')' \blacklozenge a'$

Pela propriedade da lei do cancelamento:

$(a')' = a$

5 SUBGRUPOS

Seja (G, O) um grupo e $G' \subset G$ com $G' \neq \varnothing$.
Se (G′, O) é também um grupo, então dizemos que (G′, O) é um subgrupo de (G, O), e denotamos por $G' \leq G$.

Exemplo:

Vamos considerar o conjunto G = {1, -1, i, -i}, o qual verificamos se tratar de um grupo no exemplo (h) do item 3, em “exemplos e contraexemplos de grupos”.

Vamos recordar a tábua de Cayley (tabela operatória) deste grupo:

·	**1**	**-1**	**i**	**-i**
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Pergunta-se:

a) Considerando G′ = {1, -1}, podemos dizer que (G′, ·) é um subgrupo de (G, ·)?

b) E G′′ = {1, i} munido da operação de multiplicação usual, é um subgrupo de (G, ·)?

a) As condições para que (G′, ·) seja considerado um subgrupo de (G, ·) são:

- $G' \subset G$ e $G' \neq \varnothing$, ou seja, G′deve ser um subconjunto de G e deve um conjunto não vazio, o que é válido, pois G′possui elementos e estes elementos pertencem a G;

- (G′, ·) também deve ser um grupo, atendendo assim as condições que definem um grupo. Para isso, vamos construir a tabela operatória de (G′,):

·	**1**	**-1**
1	1	-1
-1	-1	1

Vamos verificar se (G′, ·) é grupo, analisando as propriedades que definem um conjunto como grupo:

I- Fechamento: G′ é fechado para a multiplicação usual, pois os resultados da operação são elementos de G′.

II- Associativa: A associativa é herdada, pois o grupo possui, logo todo subconjunto atende a esta propriedade.

III- Existência do Elemento Identidade: O elemento neutro multiplicativo é 1.

IV- Elemento Inverso: O elemento inverso de 1 é 1 e o elemento inverso de -1 é -1.

$$\boxed{\text{Portanto, } (G', \cdot) \text{ é subgrupo de } (G, \cdot).}$$

b) Agora vamos analisar se (G′′, ·) é subgrupo de (G, ·):

- G′′ = {1, i} também está contido em G e, portanto, atende a condição de ser subconjunto de G.

- Vamos analisar se (G′′, ·) é grupo:

·	**1**	**i**
1	1	i
i	i	-1

Pela tabela operatória é possível observar que a propriedade do fechamento não é válida para (G′′, ·). Temos que $i \cdot i = -1$ e $-1 \notin G''$.

Logo, (G′′, ·) não é grupo e também não pode ser subgrupo de (G, ·).

$$\boxed{(G'', \cdot) \text{ não é subgrupo de } (G, \cdot).}$$

Para todo gupo (G,○) temos a existência de, pelo menos, dois subgrupos: (G, ○), ou seja, o próprio grupo **e** ({**e**}, ○), o elemento identidade.

5.1 TEOREMA ASSOCIADO

Teorema: Seja $(G, \circ)$ um grupo e $G' \subset G$, $G \neq \varnothing$, tal que G' contém o inverso de cada um dos seus elementos. Então $(G', \circ)$ é um subgrupo de $(G, \circ)$.

Demonstração: Por hipótese temos que $(G, \circ)$ é grupo, $G' \subset G$ e $G \neq \varnothing$.

Também, por hipótese, temos que G' contém o inverso de cada dos seus elementos, isto é: $\forall a \in G'$, $\exists\, a' \in G'$ $a \circ a' = \boldsymbol{e}$, sendo $\boldsymbol{e}$ o elemento identidade da operação $\circ$. Como G'está contido em G, a única condição que deve ser satisfeita para que $(G', \circ)$ seja subgrupo de $(G, \circ)$ é que $(G', \circ)$ também seja grupo. Vejamos:

A associatividade é válida por herança, pois $G' \subset G$. A existência do elemento identidade é verificada: $G' \neq \varnothing$ por hipótese; logo existe $a \in G'$. Por hipótese, $\forall a \in G'$, $\exists a' \in G'$. Assim $a \circ a' = \boldsymbol{e} \in G' \Rightarrow \boldsymbol{e} \in G'$. Por hipótese, G' possui o inverso de cada um dos seus elementos, logo a existência do elemento inverso também é verificada.

Portanto, $(G', \circ)$ é subgrupo de $(G, \circ)$.

6 GRUPO DE SIMETRIA DE ROTAÇÃO

Um grupo pode ser formado por qualquer tipo de elementos, não necessariamente numéricos. Um exemplo interessante é o grupo das simetrias sobre um polígono regular.

> Quando construímos polígonos regulares, podemos ordenar os seus vértices, para formar uma espécie de referência. Seja um polígono regular de ordem n, ao considerarmos apenas as diversas configurações que não alteram o formato do polígono - modificando, portanto, somente as posições de seus vértices - temos o conjunto diedral de ordem n (representado por D_n).”

FONTE: Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Grupo_(matem%C3%A1tica)>. Acesso em: 20 set. 2010.

Vamos considerar um quadrado cujos vértices estão enumerados de 1 a 4. As possíveis configurações (ou movimentos) obtidas a partir de rotações ou reflexões em um polígono são denominadas grupos diedrais. No caso específico do quadrado dizemos que se trata de um grupo diedral D_4.

Vamos analisar porque a simetria de rotação sobre um quadrado pode ser considerada um grupo.

Existem quatro tipos de simetria: rotação, translação, reflexão, reflexão do deslize (ou reflexão transladada). Dizemos que um modelo é simétrico se houver ao menos um tipo de simetria que não mude o modelo.

Para saber mais sobre simetria acesse o *site*: <http://www.tele.ed.nom.br/ag/py16t.html>.

Nele é possível encontrar uma animação com 17 exemplos de simetria plana que podem ser observados após um clique com o mouse nos ícones presentes na animação.

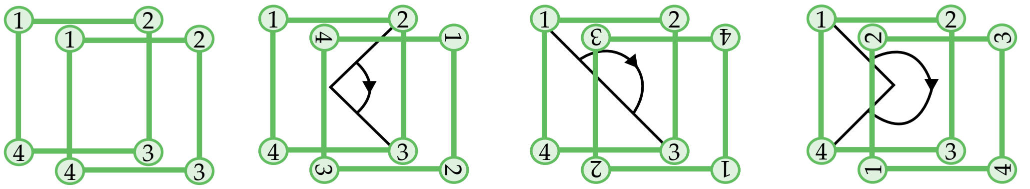
A simetria de rotação que vamos analisar sobre um quadrado implica rotacionar o polígono ou girá-lo ao redor de um ponto. Cada rotação tem um centro e um ângulo.

Vamos considerar o conjunto $R = \{id, r_1, r_2, r_3\}$, com $R \subset D_4$ e cujos elementos r_n são rotações realizadas no quadrado, a saber:

$\mathbf{r_0}$ consiste em uma rotação de 0º no sentido horário que, no conjunto R está simbolizada por **id**.
$\mathbf{r_1}$ consiste em uma rotação de 90º no sentido horário.
$\mathbf{r_2}$ implica em uma rotação de 180º no sentido horário.
$\mathbf{r_3}$ consiste em uma rotação de 270º no sentido horário.

A figura a seguir, apresenta as possíveis simetrias de rotação em um quadrado:

FIGURA 1 – POSSÍVEIS SIMETRIAS DE ROTAÇÃO EM UM QUADRADO



id (mantê-lo como está) r_1 (rotação de 90° à direita) r_2 (rotação de 180° à direita) r_3 (rotação de 270° à direita)

FONTE: Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Grupo_(matem%C3%A1tica)>. Acesso em: 28 fev. 2012.

Vamos construir a tabela operatória para a operação de rotação sobre R, a qual vamos simbolizar por (/).

↻	**id**	**r_1**	**r_2**	**r_3**
id	id	r_1	r_2	r_3
r_1	r_1	r_2	r_3	id
r_2	r_2	r_3	id	r_1
r_3	r_3	id	r_1	r_2

Caro acadêmico, vamos entender os resultados obtidos na tabela operatória ao lado:

Observe, por exemplo, que r_1 ↻ r_1 = r_2.

E o que isso significa? Isso significa que a partir da posição original (id), o quadrado foi rotacionado 90º (r_1) e depois, novamente, 90º (r_1).

Ora, duas rotações consecutivas de 90º farão com que o quadrado fique a 180º da posição original (id), que é, portanto, r_2.

Vejamos outra situação: r_3 ↻ r_1 = id. O quadrado estava a 270º da posição original (r_3) e foi rotacionado 90º (r_1), resultando em uma rotação total 360º e retornando, portanto, a posição original designada por id.

Agora, vamos verificar se o conjunto R = {id, r_1, r_2, r_3}, munido da operação de rotação sobre um quadrado, simbolizada por (↻), é um grupo.

Para que (R, ↻) seja um grupo, faz-se necessário atender às propriedades que assim definem um conjunto. Vejamos:

I- **Fechamento:** A partir da operação entre quaisquer elementos de R, é possível verificar que o resultado também é um elemento de R. Assim, R é fechado para a operação ↻.

II- **Associativa:** Como R é um conjunto finito com 4 elementos, há 128 possibilidades de associatividade entre seus elementos. A tabela operatória permite perceber que $\forall$a, b, c $\in$ R, temos: (a ↻ b) ↻ c = a ↻ (b ↻ c).

III- **Existência do Elemento Identidade:** O elemento id é o elemento identidade da operação ↻, pois id operado com qualquer outro elemento do conjunto R não tem sua configuração alterada. Portanto $\exists$ id | x ↻ id = id ↻ x = x, com x $\in$ R.

IV- **Existência do Elemento Inverso:** O elemento inverso é tal que, operado com x $\in$ R resulte no elemento identidade. Portanto, o inverso de id é id, o inverso de r_1 é r_3, o inverso de r_2 é r_2 e o inverso de r_3 é r_1.

Além dessas propriedades é possível verificar a comutatividade da operação ↻ através da simetria dos elementos com relação à diagonal principal tracejada sobre a tabela operatória.

Desse modo, verificamos que (R, ↻) é um grupo abeliano.

Não apenas a simetria de rotação é um grupo, como também os demais tipos de simetrias possíveis de serem realizadas sobre um polígono também o são. De modo geral, dizemos que qualquer conjunto diedral é um grupo.

7 GRUPO DE PERMUTAÇÕES

Além do grupo de simetrias há certos conjuntos de permutações que também formam grupos. Um grupo de permutação é um grupo cujos elementos são permutações de elementos de um conjunto A, com a operação binária de composição de funções.

Uma permutação é um rearranjo de um conjunto de objetos. Assim, fazer a permutação dos n elementos de um conjunto A implica em agrupar esses n elementos de todas as formas possíveis.

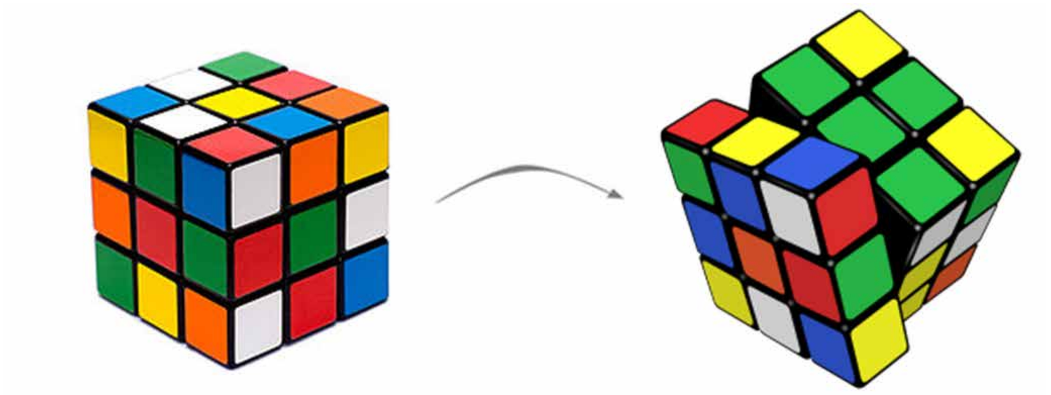
Por exemplo, vamos considerar o conjunto A = {1, 2, 3} e a operação de permutação que simbolizaremos por (↔). A análise combinatória nos permite saber que a permutação de n elementos é n! e, portanto, como A possui 3 elementos possibilitará 3! = 6 permutações, as quais consistirão em um conjunto que chamaremos de P:

P = {(1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2), (3, 2, 1)}

Assim como as possíveis simetrias sobre um polígono, o conjunto das possíveis permutações de n elementos de A, que geraram o conjunto P consiste em um grupo, admitindo as quatro propriedades que assim o caracterizam. Todavia (P,) não é um grupo abeliano, tendo em vista que a comutatividade não se verifica na permutação.

Um grupo muito interessante de permutações é denominado grupo de Rubik. Você já ouviu falar em um brinquedo chamado Cubo de Rubik? Certamente sim, mas talvez não com esse nome. O Cubo de Rubik é o famoso Cubo Mágico: um brinquedo tridimensional, feito em plástico, geralmente encontrado na versão 3 x 3 x 3 com 6 faces e 6 cores distintas, conforme você pode observar na figura a seguir:

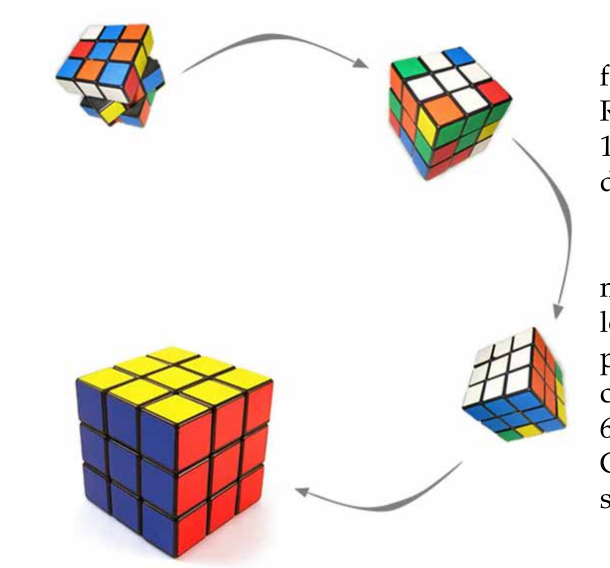
FIGURA 2 – CUBO MÁGICO



FONTE: Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/O_cubo_m%C3%A1gico>. Acesso em: 28 fev. 2012.

O objetivo deste brinquedo é organizar a peça de forma a deixar cada face do cubo com uma única cor.

FIGURA 3 – CUBO MÁGICO



FONTE: Disponível em: <http://www.cubovelocidade.com.br/solucoes/>. Acesso em: 28 fev. 2012.

O inventor do cubo mágico foi o professor de arquitetura Ernő Rubik (Budapeste, 13.07.1944) em 1974, donde deriva o nome Cubo de Rubik.

O recorde mundial de menor tempo para solucioná-lo é de 7.08 segundos, atingido pelo holandês Erik Akkersdijk no campeonato tcheco, em 2008. Em 6º lugar encontra-se o brasileiro Gabriel Dechichi Barbar, com 7,78 segundos.

Você pode fazer o *download* de um programa que simula o cubo mágico e seus movimentos em <http://www.geometer.org/rubik/>.

O brasileiro Renan Cerpe construiu um *site* com dicas de resolução e vídeos instrutivos. Muito interessante! Acesse: <http://www.cubovelocidade.com.br>.

O conjunto de todas as **permutações** das faces do cubo forma um grupo R chamado Grupo de Rubik, que podemos denotar por (R, ↔). Assim, o número total de elementos do grupo R é exatamente o número de todas as possíveis configurações do cubo. Isso não significa que R deva conter todas as permutações das facetas, mas apenas aquelas que podem ser atingidas por meio dos movimentos possíveis de serem realizados no cubo. Assim, (↔) indica a operação das possíveis permutações sobre o Cubo de Rubik.

O professor Waldeck Schützer, da Universidade Federal de São Carlos, em um trabalho sobre o cubo mágico e suas relações com a Teoria dos Grupos, diz que podemos solucionar o cubo mágico através dos seguintes métodos:

- **Método empírico:** é o método adotado pela maioria das pessoas. É demorado, mas pode ser muito instrutivo, e com perseverança pode-se chegar lá.

- **Método estratégico:** usar um conjunto de macros para realizar tarefas específicas com o cubo a fim de levá-lo gradativamente à solução.

- **Método algébrico:** encontrar a solução fazendo procedimentos algébricos, o que requer conhecimentos da Teoria de Grupos.

Para saber mais sobre o cubo mágico e sua relação com a teoria dos grupos acesse a homepage do professor Waldeck Schützer: <http://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/rubik>.

RESUMO DO TÓPICO 1

- Quanto à definição de grupo:

Seja G um conjunto não vazio, no qual uma operação binária qualquer, que representaremos por $\bigcirc$, está definida. Esse conjunto G é chamado de grupo em relação a esta operação se, para arbitrários elementos **a**, **b**, **c** $\in$ G, as seguintes propriedades forem válidas:

I- Fechamento: O conjunto G é fechado em relação à operação considerada: $\mathbf{a} \bigcirc \mathbf{b} = \mathbf{c}$, tal que $\mathbf{c} \in G$.
II- Associativa: $(\mathbf{a} \bigcirc \mathbf{b}) \bigcirc \mathbf{c} = \mathbf{a} \bigcirc (\mathbf{b} \bigcirc \mathbf{c})$
III-Existência do Elemento Identidade: Existe $e \in G$ tal que: $\mathbf{a} \bigcirc e = e \bigcirc \mathbf{a} = \mathbf{a}$
IV-Existência de Inversos: Para cada $\mathbf{a} \in G$, existe $\mathbf{a}^* \in G$, tal que: $\mathbf{a} \bigcirc \mathbf{a}^* = \mathbf{a}^* \bigcirc \mathbf{a} = e$

- Alguns tipos especiais de grupo:

- **Grupo Comutativo ou Abeliano:** se, além das propriedades que o caracterizam como grupo, é verificada a propriedade comutativa da operação binária em questão.
- **Grupo Multiplicativo:** quando a operação binária considerada sobre ele é dita multiplicação.
- **Grupo Aditivo:** quando a operação binária considerada sobre ele é dita adição.
- **Grupo Finito:** Um **grupo finito** é um grupo $(G, \bigcirc)$ no qual o conjunto G é finito.

- Quanto às propriedades válidas para um grupo:

- **Lei do Cancelamento:** Seja $(G, \blacklozenge)$ um grupo, então $\forall$ a, b, c $\in$ G, vale:
  (i) $a \blacklozenge b = a \blacklozenge c \Rightarrow b = c$ (ii) $b \blacklozenge a = c \blacklozenge a \Rightarrow b = c$
- **Equação Algébrica de Solução Única:** Seja $(G, \blacklozenge)$ um grupo, então $\forall$ a, b $\in$ G, a equação algébrica:
  (i) $a \blacklozenge x = b$ tem solução única; (ii) $y \blacklozenge a = b$ tem solução única.
- **Inverso do Inverso:** Seja $(G, \blacklozenge)$ um grupo, então $\forall\, a \in G$, $\exists\, a' \in G$, definido como inverso de a. É válido que $(a')' = a$.

- Quanto à definição de subgrupo:

Seja $(G, \bigcirc)$ um grupo e $G' \subset G$ com $G' \neq \varnothing$. Se $(G', \bigcirc)$ é também um grupo, então diz-se que $(G', \bigcirc)$ é um subgrupo de $(G, \bigcirc)$.

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico!

Empenhe-se na realização das auto-atividades que seguem, a fim de averiguar sua aprendizagem sobre Teoria dos Grupos.

Bom trabalho!

1 Mostrar que cada uma das tabelas operatórias a seguir define uma operação que confere ao conjunto E = {e, a, b, c} uma estrutura de grupo: (IEZZI, DOMINGUES, 1982, p. 91).

a)

♦	**e**	**a**	**b**	**c**
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

b)

○	**e**	**a**	**b**	**c**
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

2 Seja G = {e, a, b, c} um grupo com relação à operação binária dada pela tabela operatória a seguir:

⊙	**e**	**a**	**b**	**c**
e	e	a	b	c
a	a			
b	b	c		
c	c	e	a	

a) Complete a tabela.

b) Por que (G, ⊙) é um grupo abeliano? Justifique.

3 Com relação ao grupo (G, ⊙) apresentado na questão anterior, crie os subgrupos possíveis de ordem 1, 2 e 4.

4 Considere o conjunto dos números reais **R** munido da operação definida por $x \star y = x + y - 3$. Mostre que (**R**, ★) é um grupo abeliano.

5 Construir a tábua de um grupo G = {e, a, b, c, d, f}, de ordem 6, sabendo que:

I- G é abeliano;
II- o neutro é e;
III- a operação binária envolvida é ($\star$);
IV- $a \bigstar f = b \bigstar d = e$
V- $a \bigstar d = b \bigstar c = f$
VI- $a \bigstar c = b \bigstar b = d$
VII- $c \bigstar d = a$

6 Seja o conjunto dos números reais **R** munido da operação ($\blacklozenge$) definida por: $x \blacklozenge y = x + y - 3$. Provar que (**R**,$\blacklozenge$) é um grupo comutativo.

7 Prove que ($M_{2\times2}$, +) é um grupo abeliano.

8 Por que o conjunto dos inteiros **Z** com a operação de multiplicação usual não é um grupo?

9 Provar o item (ii) da propriedade "Lei do Cancelamento" para os grupos:

Seja (G, $\blacklozenge$) um grupo, então $\forall$ a, b, c $\in$ G, vale:

(i) $a \blacklozenge b = a \blacklozenge c \Rightarrow b = c$
(ii) $b \blacklozenge a = c \blacklozenge a \Rightarrow b = c$
(Dica: coloque o elemento inverso à direita)

10 Provar o item (ii) da propriedade "Equação Algébrica de Solução Única":

Seja (G, $\blacklozenge$) um grupo, então a, b $\in$ G, a equação algébrica:

(i) $a \blacklozenge x = b$ tem solução única;
(ii) $y \blacklozenge a = b$ tem solução única.

TEORIA DOS ANÉIS E ANÉIS DE POLINÔMIOS

1 INTRODUÇÃO

No tópico anterior, fizemos um estudo sobre a Teoria dos Grupos, onde um conjunto, munido de uma operação binária se caracterizava como grupo ao atender algumas propriedades associadas aos seus elementos.

Neste tópico, nosso objeto de estudo será a Teoria dos Anéis. Anel, assim como grupo, é uma estrutura algébrica que consiste num conjunto, porém, munido agora de duas operações binárias relacionadas a esse conjunto (normalmente chamadas de adição e multiplicação), onde cada operação combina dois elementos para formar um terceiro elemento.

Essas operações também sugerem algumas propriedades que, quando verificadas, caracterizam um conjunto como anel.

O estudo dos anéis originou-se da teoria de anéis de polinômios e da teoria de inteiros algébricos. O matemático alemão Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) foi quem introduziu o conceito de anel, porém, o termo anel (Zahlring) foi criado pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943) e a primeira definição axiomática de anéis foi dada por Adolf Fraenkel (1891-1965).

2 DEFINIÇÃO DE ANEL

Sejam $(x, y) \rightarrow x + y$ e $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ operações binárias sobre um conjunto A não vazio. A terna $(A, +, \cdot)$, é dita anel em relação às operações binárias de adição e de multiplicação no conjunto A, para as quais é fechado, se forem válidas as seguintes propriedades:

(A_1) Associativa para adição: $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall\ a, b, c \in A$.
(A_2) Comutativa para adição: $a + b = b + a, \forall\ a, b \in A$.
(A_3) Elemento neutro aditivo: $\exists\ e \in A \mid a + e = a, \forall\ a \in A$.
(A_4) Elemento simétrico aditivo: $\forall\ a \in A, \exists\ (-a) \in A \mid a + (-a) = e$.

(M_1) Associativa para multiplicação: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall\ a, b, c \in A$.

(AM) Distributiva da multiplicação com relação à adição (à direita e à esquerda):
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall\ a, b, c \in A$.
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + bc, \forall\ a, b, c \in A$.

Observe que a estrutura (A, +), que satisfaz às condições A_1 a A_4, forma um grupo aditivo abeliano, estudado no tópico anterior.

"Normalmente, a referência a um anel genérico é feita apenas pela referência ao conjunto, ficando subentendidas as operações de adição e multiplicação." (EVARISTO; PERDIGÃO, 2002, p. 50).

É importante atentar para o fato de que o sinal de "+", que aparece na definição, não significa o símbolo de adição (em alguns casos, sim, os quais denotamos por 'adição usual'), e sim o sinal da primeira operação. Da mesma forma o sinal de "·" representa a segunda operação que, quando for a multiplicação, terá o significado usual.

Assim, quando não se tratar da adição e da multiplicação usual, faremos uso de outros símbolos para denotar as operações, para que não haja interpretação errônea.

2.1 ANEL COMUTATIVO

A multiplicação não necessita ser comutativa. Porém, quando isto ocorrer, dizemos que **A** é um anel comutativo.

Matematicamente, dizemos que um conjunto A, munido das operações de adição e multiplicação, é anel comutativo se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$.

2.2 ANEL COM UNIDADE

Um anel que também possua um elemento neutro com relação à multiplicação é chamado de **anel com unidade** ou **anel com identidade**. Alguns autores incluem este axioma na definição de anel.

Matematicamente, dizemos que um conjunto A, munido das operações de adição e multiplicação, é anel com unidade se $\exists\, f \in A$, com $f \neq e \mid \mathbf{a} \cdot f = \mathbf{a}$, $\forall\, \mathbf{a} \in A$, sendo e o elemento neutro aditivo.

3 EXEMPLOS E CONTRAEXEMPLOS DE ANÉIS

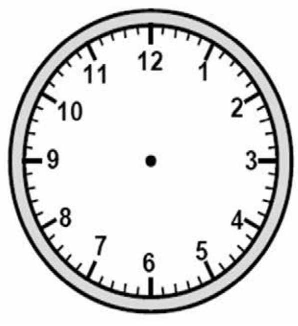
Assim como fizemos no estudo dos grupos, vamos aqui também analisar situações que classificam ou não um conjunto, como anel.

a) Como as propriedades que definem um anel consistem em uma lista parcial das propriedades comuns aos inteiros (**Z**), racionais (**Q**), reais (**R**) e complexos (**C**) sob a adição e a multiplicação usuais, concluímos que esses sistemas são exemplos de anéis.

(**Z**, +,·), (**Q**, +,·), (**R**, +,·) e (**C**, +,·) formam anel.

b) Vamos analisar com um exemplo muito interessante para compreensão de anel, apresentado por Evaristo e Perdigão (2002, p. 50):

Consideremos, para exemplificar, um mostrador de um relógio.



Imagine que num determinado instante o ponteiro das horas esteja sobre a marca das 11 horas:

Três horas após este instante, o ponteiro estará sobre a marca das 2 horas;

seis horas após aquele instante, o ponteiro estará sobre 5 horas:

e 11 horas após, ele estará sobre as 10 horas:

Naturalmente, podemos expressar estes fatos através de uma operação definida no conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ pondo $11 + 3 = 2$, $11 + 6 = 5$ e $11 + 11 = 10$.

Imagine agora que o ponteiro das horas esteja sobre a marcação das doze horas. Decorrido três vezes o intervalo de tempo de sete horas, o ponteiro ocupará a marca das nove horas o que justifica a igualdade $3 \cdot 7 = 9$.

Isto mostra que, de forma natural, pode-se definir uma adição e uma multiplicação em I_{12} de acordo com as seguintes tabelas operatórias:

Adição em I_{12}

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

Multiplicação em I_{12}

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	3	6	9	12	3	6	9	12
4	4	8	12	4	8	12	4	8	12	4	8	12
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	12
6	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	12
8	8	4	12	8	4	12	8	4	12	8	4	12
9	9	6	3	12	9	6	3	12	9	6	3	12
10	10	8	6	4	2	12	10	8	6	4	2	12
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 52)

[...] Observe que $a + 12 = a$, para todo $a \in I_{12}$, o que mostra que 12 é elemento neutro da adição. Observe também que $a \cdot 1 = a$, qualquer que seja $a \in I_{12}$, o que mostra que 1 é elemento neutro da multiplicação. Além disso, deve ser observado que as duas operações são claramente comutativas.

As demonstrações de que estas operações são associativas e que a multiplicação é distributiva em relação à adição requereriam que se verificassem todos os casos possíveis, o que evidentemente seria extremamente desgastante. [...] Por ora, observe (lembrando que isto não é uma demonstração, são apenas exemplos!) que:

$$\begin{gathered}(5 + 9) + 8 = 5 + (9 + 8)\\ 2 + 8 = 5 + 5\\ 10 = 10\end{gathered} \qquad \begin{gathered}(5 \cdot 8) \cdot 9 = 5 \cdot (8 \cdot 9)\\ 4 \cdot 9 = 5 \cdot 12\\ 12 = 12\end{gathered} \qquad \begin{gathered}5 \cdot (7 + 3) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 3\\ 5 \cdot 10 = 11 + 3\\ 2 = 2\end{gathered}$$

É fácil ver também que todo elemento tem simétrico: o simétrico de 1 é 11, o simétrico de 2 é 10, o simétrico de 3 é 9, e assim por diante. Temos então que I_{12} munido destas operações é um anel.

$(I_{12}, +, \cdot)$ é anel comutativo.

c) Outra situação também apresentada por Evaristo e Perdigão (2002, p. 53) refere-se aos dias da semana, associando os números naturais 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 aos dias de domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado, respectivamente.

Como se sabe, se estivermos numa quinta, após o decurso de seis dias iremos para uma quarta. Isto poderia ser expresso por $5 + 6 = 4$; do mesmo modo, se estivermos num domingo e forem decorridos sete dias iremos para outro domingo. Ou seja, $1 + 7 = 7$. De forma semelhante, se estivermos num sábado e forem decorridos três vezes o período de quatro dias, a partir do domingo, iremos parar numa quinta-feira (o primeiro período terminaria numa quarta, o segundo terminaria num domingo e, então, o terceiro acabaria numa quinta). Assim, $3 \cdot 4 = 5$.

Desta forma, estabelecemos duas operações no conjunto $I_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dadas pelas tabelas a seguir:

Adição em I_7

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	2	3	4	5	6	7	1
2	3	4	5	6	7	1	2
3	4	5	6	7	1	2	3
4	5	6	7	1	2	3	4
5	6	7	1	2	3	4	5
6	7	1	2	3	4	5	6
7	1	2	3	4	5	6	7

Multiplicação em I_7

·	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	1	3	5	7
3	3	6	2	5	1	4	7
4	4	1	5	2	6	3	7
5	5	3	1	6	4	2	7
6	6	5	4	3	2	1	7
7	7	7	7	7	7	7	7

FONTE: Tábuas de Cayley. Evaristo e Perdigão (2002, p. 54)

Do mesmo modo que I_{12}, o conjunto I_7 munido das operações acima é um anel.

d) O conjunto dos números naturais (**N**), munido das operações de adição e multiplicação usuais não é anel, pois não há elemento simétrico para a adição, não se verificando a propriedade (A_4) da definição de anel.

Portanto, ($\mathbf{N}$, +,·) não é anel.

e) Vamos considerar o conjunto S = {a, b} com a adição e a multiplicação definidas pelas tabelas operatórias a seguir:

$\oplus$	**a**	**b**
a	a	b
b	b	a

e

$\odot$	**a**	**b**
a	a	a
b	a	b

Pergunta-se: (S, $\oplus$, $\odot$) forma uma estrutura de anel?

Para responder, devemos mostrar que são válidas todas as propriedades que definem um conjunto, munido de duas operações, como anel. Então, vamos lá!

(A_1) Associativa para a adição: Como o conjunto S possui dois elementos, então podemos associá-los de 16 formas diferentes. Verifique, pela tabela operatória, que:

$$\begin{aligned} (a \oplus a) \oplus a &= a \oplus (a \oplus a) \\ a \oplus a &= a \oplus a \\ a &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \oplus a) \oplus b &= a \oplus (a \oplus b) \\ a \oplus b &= a \oplus b \\ b &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b \oplus a) \oplus a &= b\ \ (a \oplus a) \\ b \oplus a &= b \oplus a \\ b &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b \oplus b) \oplus a &= b \oplus (b \oplus a) \\ a \oplus a &= b \oplus b \\ a &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus a &= a \oplus (b \oplus a) \\ b \oplus a &= a \oplus b \\ b &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b \oplus a) \oplus b &= b \oplus (a \oplus b) \\ b \oplus b &= b \oplus b \\ a &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus b &= a \oplus (b \oplus b) \\ b \oplus b &= a \oplus a \\ a &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b \oplus b) \oplus b &= b \oplus (b \oplus b) \\ a \oplus b &= b \oplus a \\ b &= b \end{aligned}$$

(A_2) Comutativa para adição: Pela tabela operatória, observa-se que $a \oplus b = b \oplus a = b$.

(A_3) Elemento neutro aditivo: O elemento neutro aditivo é a.

(A_4) Elemento simétrico aditivo: O simétrico de a é ele próprio, assim também o simétrico de b é o próprio elemento b.

(M_1) Associativa para multiplicação: Assim como procedemos com a adição, vamos verificar as possíveis formas de associar os elementos de S, através da multiplicação:

$$\begin{gathered}(a \odot a) \odot a = a \odot (a \odot a)\\ a \odot a = a \odot a\\ a = a\end{gathered} \qquad \begin{gathered}(a \odot a) \odot b = a \odot (a \odot b)\\ a \odot b = a \odot a\\ a = a\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(b \odot a) \odot a = b\ (a \odot a)\\ a \odot a = b \odot a\\ a = a\end{gathered} \qquad \begin{gathered}(b \odot b) \odot a = b \odot (b \odot a)\\ b \odot a = b \odot a\\ a = a\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(a \odot b) \odot a = a \odot (b \odot a)\\ a \odot a = a \odot a\\ a = a\end{gathered} \qquad \begin{gathered}(b \odot a) \odot b = b \odot (a \odot b)\\ a \odot b = b \odot a\\ a = a\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(a \odot b) \odot b = a \odot (b \odot b)\\ a \odot b = a \odot a\\ a = a\end{gathered} \qquad \begin{gathered}(b \odot b) \odot b = b \odot (b \odot b)\\ b \odot b = b \odot b\\ b = b\end{gathered}$$

(AM) Distributiva da multiplicação com relação à adição (à direita e à esquerda): Quanto à distributividade dos elementos de S, podemos obter as seguintes possibilidades, todas verificadas a seguir:

À direita	**À esquerda**
$(a \oplus a) \odot a = a \odot a \oplus a \odot a$ $a \odot a = a \oplus a$ $a = a$	$a \odot (a \oplus a) = a \odot a \oplus a \odot a$ $a \odot a = a \oplus a$ $a = a$
$(a \oplus b) \odot a = a \odot b \oplus a \odot a$ $b \odot a = a \oplus a$ $a = a$	$a \odot (a \oplus b) = a \odot a \oplus a \odot b$ $a \odot b = a \oplus a$ $a = a$
$(b \oplus a) \odot a = a \odot a \oplus a \odot b$ $b \odot a = a \oplus a$ $a = a$	$a \odot (b \oplus a) = a \odot b \oplus a \odot a$ $a \odot b = a \oplus a$ $a = a$
$(b \oplus b) \odot a = a \odot b \oplus a \odot b$ $a \odot a = a \oplus a$ $a = a$	$a \odot (b \oplus b) = a \odot b \oplus a \odot b$ $a \odot a = a \oplus a$ $a = a$
$(a \oplus a) \odot b = b \odot a \oplus b \odot a$ $a \odot b = a \oplus a$ $a = a$	$b \odot (a \oplus a) = b \odot a \oplus b \odot a$ $b \odot a = a \oplus a$ $a = a$
$(a \oplus b) \odot b = b \odot b \oplus b \odot a$ $b \odot b = b \oplus a$ $b = b$	$b \odot (a \oplus b) = b \odot a \oplus b \odot b$ $b \odot b = a \oplus b$ $b = b$
$(b \oplus a) \odot b = b \odot a \oplus b \odot b$ $b \odot b = a \oplus b$ $b = b$	$b \odot (b \oplus a) = b \odot b \oplus b \odot a$ $b \odot b = b \oplus a$ $b = b$
$(b \oplus b) \odot b = b \odot b \oplus b \odot b$ $a \odot b = b \oplus b$ $b = b$	$b \odot (b \oplus b) = b \odot b \oplus b \odot b$ $b \odot a = b \oplus b$ $a = a$

Além de todas as propriedades da definição verificadas, observamos também, pela simetria apresentada na segunda tabela operatória, que a comutatividade é válida para a multiplicação. Logo, a estrutura $(S, \oplus, \odot)$ se caracteriza como um anel comutativo.

Portanto, $(S, \oplus, \odot)$ é anel comutativo.

Após conhecermos as três estruturas algébricas: corpos, grupos e anéis, podemos caracterizar os conjuntos numéricos, munidos das operações de adição e multiplicação, da seguinte forma:

Estrutura	Corpo	Grupo	Anel
$(\mathbf{N}, +, \cdot)$			
$(\mathbf{Z}, +, \cdot)$		✓	✓
$(\mathbf{Q}, +, \cdot)$	✓	✓	✓
$(\mathbf{R}, +, \cdot)$	✓	✓	✓
$(\mathbf{C}, +, \cdot)$	✓	✓	✓

4 ANÉIS DE POLINÔMIOS

Seja C um anel complexo comutativo. O conjunto dos símbolos formais
$C(x) = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_i\ C, n \in N\}$
é chamado anel de polinômios sobre C na indeterminada x.

4.1 FUNÇÃO POLINOMIAL OU POLINÔMIO

Na disciplina de Introdução ao Cálculo, você estudou as funções polinomiais de domínio real. Agora vamos estudar essas funções para o domínio complexo.

Polinômio ou **Função Polinomial** na variável x é toda função P: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definida por:
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$
Para todo $x \in \mathbf{C}$, sendo $n \in \mathbf{N}$ e $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ números complexos.

Atente para as seguintes denominações:

- Os números complexos $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0$ são os **coeficientes** do polinômio P(x).

- Os monômios $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ são os **termos** do polinômio P(x), sendo a_0 o **termo independente** de x.

- Um polinômio é **constante** quando formado apenas por um número complexo (que pode ser, em particular, um número real).

- Um polinômio é **nulo**, ou **identicamente nulo**, quando todos os seus coeficientes são iguais a zero.

NOTA

Para simplificar a notação, o polinômio P(x) é, por vezes, expresso apenas como polinômio P.

4.2 GRAU DE UM POLINÔMIO

Considere $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio não nulo. **Grau** de P(x) é o maior expoente da variável x dentre os termos (monômios) com coeficiente diferente de zero.

ATENÇÃO

- Se $a_n \neq 0$, o grau de P(x) é n, e indica-se gr(P) = n.
- Se P(x) é um polinômio constante, seu grau é zero.
- Se P(x) é polinômio nulo, não se define o seu grau.
- O coeficiente do termo que determina o grau de um polinômio é chamado de coeficente dominante.

4.3 VALOR NUMÉRICO E RAIZ DE UM POLINÔMIO

Em um polinômio P(x), quando substituímos a variável x por um número complexo z qualquer e efetuamos os cálculos indicados, obtemos P(z), que é o **valor numérico** de P(x) para x = z.

Quando P(z) = 0, dizemos que o número complexo z é **raiz** do polinômio P(x).

Vejamos alguns exemplos dos conceitos sobre polinômios que vimos até então.

Exemplos:

a) Sobre o polinômio $P(x) = 6x^3 + 2x^2 - 3$, temos:

- O grau de P(x) é 3, ou seja, gr(P) = 3;
- 6 é o coeficiente dominante, pois é coeficiente do termo que determina o grau do polinômio;
- Os coeficientes de P(x) são 6, 2 e -3;
- -3 é termo independente;
- O coeficiente do termo x é nulo, por isso não aparece em P(x);
- $P(1) = 6(1)^3 + 2(1)^2 - 3 = 6 + 2 - 3 = 5$, ou seja, o valor numérico de P(x) para x = 1 é 5.

b) Sobre o polinômio $Q(x) = -3x^3 - 5x^2 + 4x$, temos:

- Assim como no exemplo anterior, o grau de Q(x) também é 3, logo gr(Q) = 3;
- -3 é o coeficiente dominante;
- Os coeficientes de Q(x) são -3, -5 e 4;
- O termo independente é nulo;
- $Q(-2i) = -3(2i)^3 - 5(2i)^2 + 4(2i)$
  $= -3(8i^3) - 5(4i^2) + 8i =$
  $= -3(-8i) - 5(-4) + 8i =$
  $= 24i + 20 + 8i =$
  $= 32i + 20$. O valor numérico do polinômio Q(x) para x = 2i é 32i + 20.
- $Q(0) = -3(0)^3 - 5(0)^2 + 4(0) = 0$. Como Q(0) = 0, dizemos que 0 é raiz do polinômio Q(x).

4.4 OPERAÇÕES ENTRE POLINÔMIOS

Vamos relembrar algumas operações entre polinômios.

4.4.1 Adição e subtração de polinômios

Dados dois polinômios, P(x) e Q(x), obtemos:

- a soma dos polinômios P(x) e Q(x) adicionando os coeficientes dos termos semelhantes de P(x) e Q(x);

- a diferença entre os polinômios P(x) e Q(x) fazendo a adição do primeiro polinômio com o oposto do segundo, ou seja $P(x) – Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$.

Exemplo: Dados os polinômios $P(x) = 3x^3 + 5x^2 – 3x + 1$ e $Q(x) = 7x^3 + 10x + 4$, obter:

- $P(x) + Q(x) = (3x^3 + 5x^2 – 3x + 1) + (7x^3 + 10x + 4) =$
  $= 3x^3 + 5x^2 – 3x + 1 + 7x^3 + 10x + 4 =$
  $= \mathbf{10x^3 + 5x^2 + 7x + 5}$.

- $P(x) – Q(x) = (3x^3 + 5x^2 – 3x + 1) – (7x^3 + 10x + 4) =$
  $= 3x^3 + 5x^2 – 3x + 1 – 7x^3 – 10x – 4 =$
  $= \mathbf{-4x^3 + 5x^2 – 13x – 3}$.

- $Q(x) – P(x) = (7x^3 + 10x + 4) – (3x^3 + 5x^2 – 3x + 1) =$
  $= 7x^3 + 10x + 4 – 3x^3 – 5x^2 + 3x – 1 =$
  $= \mathbf{4x^3 – 5x^2 + 13x + 3}$.

4.4.2 Multiplicação de polinômios

O produto de dois polinômios, P(x) e Q(x), é obtido multiplicando-se cada termo de P(x) por todos os termos de Q(x) e reduzindo-se os termos semelhantes.

Exemplo: Dados os polinômios $P(x) = x^2 + 3x + 1$ e $Q(x) = x + 4$, obter:

- $P(x) \cdot Q(x) = (x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 4) =$
  $= (x^2 + 3x + 1) \cdot x + (x^2 + 3x + 1) \cdot 4 =$
  $= x^3 + 4x^2 + 3x^2 + 12x + x + 4 =$
  $= \mathbf{x^3 + 7x^2 + 13x + 4}$.

- $[Q(x)]^2 = (x + 4)^2 =$
  $= (x + 4) \cdot (x + 4) =$
  $= (x + 4) \cdot x + (x + 4) \cdot 4 =$
  $= x^2 + 4x + 4x + 16 =$
  $= \mathbf{x^2 + 8x + 16}$.

4.4.3 Divisão de polinômios

Considere dois polinômios P(x) e D(x), com D(x) não-nulo. Dividir P(x) por D(x), significa determinar os polinômios Q(x) e R(x) que satisfazem as duas condições:

- $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$
- $gr(R) < gr(D)$ ou $R(x) = 0$

Assim como na divisão de números reais, dizemos que P(x) é o dividendo, D(x) é o divisor, Q(x) é o quociente e R(x) é o resto.

Quando **R(x) = 0**, dizemos que o polinômio **P(x) é divisível pelo polinômio D(x)** ou, que a divisão de P(x) por D(x) é exata. Neste caso, termos $\mathbf{P(x) = Q(x) \cdot D(x)}$.

Vejamos alguns métodos de divisão entre polinômios.

a) Método da Chave

O método da chave utiliza o mesmo algoritmo da divisão de dois números naturais. Observe o exemplo detalhado, apresentado em Barroso (2008, p.174):

Exemplos:

a) Efetuar a divisão, através do método da chave, de $P(x) = 8x^3 + 4x^2 + 1$ por $D(x) = 4x^2 + 1$.

QUADRO 3 – MÉTODO DA CHAVE

Escrevemos, ordenadamente, dividendo e divisor segundo as potências decrescentes de x, completando-os, se necessário, com termos de coeficiente zero.	$\begin{array}{l\|l} 8x^3 + 4x^2 + 0x + 1 & 4x^2 + 0x + 1 \\ \hline \end{array}$
Dividimos o termo de maior grau de P pelo termo de maior grau de D (**$8x^3 : 4x^2$**), obtendo o primeiro termo de Q (**$2x$**).	$\begin{array}{l\|l} 8x^3 + 4x^2 + 0x + 1 & 4x^2 + 0x + 1 \\ \hline & 2x \end{array}$
Multiplicamos o termo encontrado pelo divisor e subtraímos do dividendo o resultado obtido (**$8x^3 + 2x$**), chegando ao resto parcial (**$4x^2 - 2x + 1$**).	$\begin{array}{l\|l} 8x^3 + 4x^2 + 0x + 1 & 4x^2 + 0x + 1 \\ \hline \underline{-8x^3 + 0x^2 - 2x} & 2x \\ \quad 4x^2 - 2x + 1 & \end{array}$
Dividimos o termo de maior grau do resto parcial pelo termo de maior grau do divisor (**$4x^2 : 4x^2$**), obtendo o próximo termo do quociente (**1**). Repetimos o passo anterior para obter um novo resto parcial.	$\begin{array}{l\|l} 8x^3 + 4x^2 + 0x + 1 & 4x^2 + 0x + 1 \\ \hline \underline{-8x^3 + 0x^2 - 2x} & 2x + 1 \\ \quad 4x^2 - 2x + 1 & \\ \quad \underline{-4x^2 - 0x - 1} & \\ \quad -2x & \end{array}$
A divisão termina quando o grau do resto é menor que o grau do divisor (neste caso, menor que 2) ou quando obtemos resto zero.	$Q(x) = 2x + 1$ $R(x) = -2x$

FONTE: Barroso et al. (2008, p.174)

b) Dividir $P(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ por $D(x) = x + 2$, fazendo uso do método da chave.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 + 5x + 6 & x + 2 \\ \hline \underline{-x^3 - 2x \qquad\qquad} & x^2 + x + 3 \\ \qquad x^2 - 5x + 6 & \\ \qquad \underline{-x^2 - 2x \quad} & \\ \qquad\quad 3x + 6 & \\ \qquad\quad \underline{-3x - 6} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

b) Divisão por binômios do tipo (x – a)

A divisão de um polinômio P(x) por um binômio do 1º grau do tipo D(x) = (x – a) é um caso que merece especial atenção devido a sua aplicabilidade na resolução de equações algébricas, as quais estudaremos no próximo tópico desta unidade.

Observe que o número a é raiz do binômio D(x) = (x – a), pois D(a) = 0. Tendo em vista que o binômio D(x) = (x – a) é de primeiro grau e, portanto, tem grau 1, o resto da divisão de qualquer polinômio por D(x) resultará em um polinômio constante, haja vista que o resto sempre possui um grau inferior ao do divisor. Neste caso, por se tratar de um polinômio constante, vamos indicar o resto simplesmente por R.

Como exemplo, vamos efetuar a divisão de $P(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ por $D(x) = x - 1$ e, posteriormente, determinar P(1).

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5 & x - 1 \\
\cline{2-2}
 & x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 1 \\
\underline{-x^5 + x^4} & \\
-x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 5 & \\
\underline{x^4 - x^3} & \\
-2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 & \\
\underline{2x^3 - 2x^2} & \\
x^2 - 2x + 5 & \\
\underline{-x^2 + x} & \\
-x + 5 & \\
\underline{x - 1} & \\
4 &
\end{array}
$$

$P(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 5$
$P(1) = (1)^5 - 2\cdot(1)^4 - (1)^3 + 3\cdot(1)^2 - 2\cdot(1) + 5$
$P(1) = 1 - 2 - 1 + 3 - 2 + 5$
$P(1) = 4$

Observe que o valor numérico de P(1) corresponde ao resto da divisão de P(x) por D(x) = (x – 1). Essa relação não é casual e se formaliza no teorema a seguir.

Teorema do Resto: Dado um polinômio P(x) com grau igual ou maior que 1, o resto da divisão de P(x) por (x – **a**) é igual a P(**a**).

Demonstração: Na divisão de P(x) por (x – **a**), temos: P(x) = Q(x) · (x – **a**) + R, com $R \in \mathbf{C}$, $\forall x \in \mathbf{C}$. Substituindo x por **a**, temos: P(**a**) = Q(**a**) · (**a** – **a**) + R $\Rightarrow$ P(**a**) = 0 + R $\Rightarrow$ P(**a**) = R.

O teorema do resto nos permite determinar o resto de uma divisão de um polinômio P(x) por um binômio do tipo (x – **a**), sem a necessidade de efetuá-la.

Vejamos alguns exemplos:

a) Determine o resto da divisão de $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ por $D(x) = x - 5$, sem efetuar a divisão, apenas fazendo uso do teorema do resto.

Pelo Teorema do Resto, basta determinar P(5):

$P(5) = 5\cdot(5)^3 + 2\cdot(5)^2 + 3\cdot(5) - 1 = 625 + 50 + 15 - 1 = 689.$

b) Encontrar o resto da divisão de $P(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 2$ por $D(x) = x + 3$.

O Teorema do Resto refere-se à divisão de um polinômio P(x) por um binômio do tipo (x – a), logo D(x) = x + 3 = x – (-3), logo, a = -3.

Assim, para determinar o resto da divisão de P(x) por D(x), basta calcular P(-3):

$P(-3) = (-3)^3 + 5\cdot(-3)^2 + 2\cdot(-3) - 2 = -27 + 45 - 6 - 2 = 10.$

Juntamente com o Teorema do Resto, outro teorema de grande importância no estudo dos polinômios é o Teorema de D´Alembert, que demonstramos na sequência.

Teorema de D´Alembert: Um polinômio P(x) é divisível por (x – **a**) se, e somente se, **a** é raiz de P(x), isto é, P(**a**) = 0.

Demonstração: Vamos mostrar a ida do Teorema, isto é, P(x) é divisível por (x – **a**) $\Rightarrow$ P(**a**) = 0.

Se P(x) é divisível por (x – **a**), existe Q(x) tal que P(x) = Q(x) · (x – **a**), $\forall x \in$ **C**. Em particular, se x = **a**, então:

P(**a**) = Q(**a**) · (**a** – **a**) = Q(**a**) · 0 = 0. Portanto, P(**a**) = 0.

Mostremos agora a volta:

P(**a**) = 0 $\Rightarrow$ P(x) é divisível por (x – **a**).

Sejam Q(x) e R o quociente e o resto da divisão de P(x) por (x – **a**) respectivamente. Então P(x) = Q(x) · (x – **a**) + R, $\forall x \in$ **C**. Pelo Teorema do Resto, R = P(**a**). Como P(0) = 0 por hipótese, R = 0 e P(x) = Q(x) · (x – **a**). Portanto, P(x) é divisível por (x – **a**), como queríamos demonstrar.

Vejamos alguns exemplos do uso do Teorema de D´Alembert.

a) Pelo teorema de D´Alembert podemos concluir que o polinômio $P(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ é divisível por (x – i), pois i é raiz de P(x), veja:
$P(i) = i^5 - 2\cdot(i)^4 - (i)^3 + 3\cdot(i)^2 - 2\cdot(i) + 5 = i - 2 - (-i) - 3 - 2i + 5 = i - 2 + i - 3 - 2i + 5 = 0$.

Como P(i) = 0, i é raíz de P(x).

b) Pelo teorema de D´Alembert, concluímos que $P(x) = x^2 + 3x$ é divisível por (x + 3), pois P(-3) = 0, ou seja, -3 é raiz de P(x).

Para determinação do quociente, além do método da chave, temos uma outra técnica denominada dispositivo de Briot-Ruffini, que vamos estudar na sequência, todavia esta técnica possui uma restrição com relação ao método da chave: ela serve apenas para divisores do tipo (x – **a**).

c) Dispositivo de Briot-Ruffini

A divisão de um polinômio P(x) por um binômio da forma (x – **a**) também pode ser feita utilizando-se o **dispositivo de Briot-Ruffini**. Este algoritmo se caracteriza pela sua agilidade na divisão de polinômios por binômios do 1º grau do tipo (x – **a**).

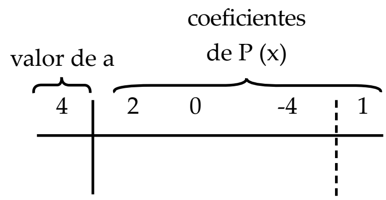
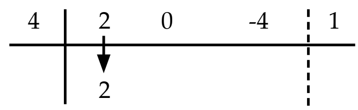
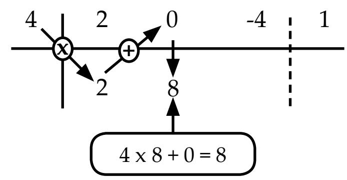
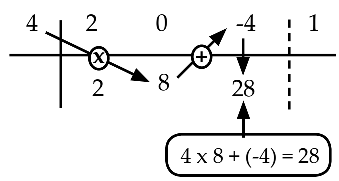
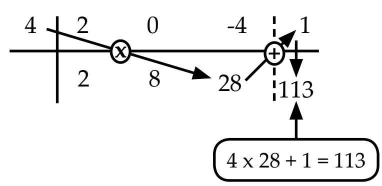
Vamos analisar o exemplo detalhado, apresentado em Barroso (2008, p.178):

Exemplos:

a) Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de $P(x) = 2x^3 - 4x + 1$ por D(x) = x – 4, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini.

Inicialmente, colocamos os coeficientes de P(x) em ordem decrescente segundo o grau do termo e completamos com zero, caso necessário. Assim, temos $P(x) = 2x^3 + 0x^2 - 4x + 1$.

QUADRO 4 – CHAVE

Dispomos os valores que participam do cálculo para montar o dispositivo.	
Repetimos o coefiente dominante do dividendo P(x) na linha de baixo.	
Multiplicamos o valor de a por esse coeficiente e somamos o produto obtido com o próximo coeficiente de P(x), colocando o resultado abaixo dele.	
Multiplicamos o valor de a pelo resultado que acabamos de obter, somamos o produto com o próximo coeficiente de P(x) e colocamos esse novo resultado abaixo desse coeficiente.	
Repetimos o processo até o último coefiente de P(x), que está separado, à direita.	

FONTE: Barroso et al. (2008, p.174)

O último resultado é o resto da divisão, e os demais números obtidos são os coeficientes do quociente, dispostos ordenadamente segundo as potências decrescentes de x.

Dessa forma, no exemplo apresentado no quadro acima, temos que $Q(x) = 2x^2 + 8x + 28$ e $R(x) = 113$.

ATENÇÃO

$gr(Q) = gr(P) - 1$, uma vez que o grau do divisor (x – **a**) é 1.

RESUMO DO TÓPICO 2

- Quanto à definição de Anel:

Sejam $(x, y) \to x + y$ e $(x, y) \to x \cdot y$ operações binárias sobre um conjunto A não vazio. A terna $(A, +, \cdot)$, é dita anel em relação às operações binárias de adição e de multiplicação no conjunto A, para as quais é fechado, se forem válidas as seguintes propriedades:

(A_1) Associativa para adição: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall$ a, b, c $\in$ A.
(A_2) Comutativa para adição: $a + b = b + a$, $\forall$ a, b $\in$ A.
(A_3) Elemento neutro aditivo: $\exists\ e \in A \mid a + e = a$, $\forall$ a $\in$ A.
(A_4) Elemento simétrico aditivo: $\forall\ a \in A$, $\exists\ (-a) \in A \mid a + (-a) = e$.
(M_1) Associativa para multiplicação: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall$ a, b, c $\in$ A.
(AM) Distributiva da multiplicação com relação à adição (à direita e à esquerda):
$a \cdot (b + c) = a\cdot b + a\cdot c$, $\forall$ a, b, c $\in$ A.
$(a + b) \cdot c = a\cdot c + b\cdot c$, $\forall$ a, b, c $\in$ A.

- Alguns tipos especiais de anéis:

- **Anel Comutativo:** A multiplicação não necessita ser comutativa. Porém, quando isto ocorrer, dizemos que A é um anel comutativo. Matematicamente, dizemos que um conjunto A, munido das operações de adição e multiplicação, é anel comutativo se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, $\forall$ **a**, **b** $\in$ A.

- **Anel com unidade:** Um anel que também possua um elemento neutro com relação à multiplicação é chamado de **anel com unidade** ou **anel com identidade**. Matematicamente dizemos que um conjunto A, munido das operações de adição e multiplicação, é anel com unidade se $\exists\ \boldsymbol{f} \in \mathbf{A}$, com $\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{e} \mid \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{f} = \mathbf{a}$, $\forall\ \mathbf{a} \in A$, sendo ***e*** o elemento neutro aditivo.

- Quanto à definição de polinômio:

Polinômio ou **Função Polinomial** na variável x é toda função P: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definida por:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, para todo $x \in \mathbf{C}$, sendo $n \in \mathbf{N}$ e $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ números complexos.

- Termos importantes sobre polinômios:

Grau de um polinômio: é o maior expoente da variável x dentre os termos (monômios) com coeficiente diferente de zero.

Valor numérico e raiz de um polinômio: Em um polinômio P(x), quando substituímos a variável x por um número complexo z qualquer e efetuamos os cálculos indicados, obtemos P(z), que é o **valor numérico** de P(x) para x = z. Quando P(z) = 0, dizemos que o número complexo z é **raiz** do polinômio P(x).

- Teoremas relacionados ao estudo dos polinômios:

- **Teorema do Resto:** Dado um polinômio P(x) com grau igual a 1 ou maior que 1, o resto da divisão de P(x) por (x – a) é igual a P(a).

- **Teorema de D´Alembert:** Um polinômio P(x) é divisível por (x – **a**) se, e somente se, **a** é raiz de P(x), isto é, P(**a**) = 0.

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico!

Realize as autoatividades que seguem e verifique sua compreensão sobre o tema deste tópico: Teoria dos Anéis.

Bom trabalho!

1 Seja dado o conjunto Q dos números racionais sobre o qual se definem as operações binárias (♦) e (✶), a saber:

$x \blacklozenge y \rightarrow x + y - 3$
$x \ast y \rightarrow x + y - \dfrac{xy}{3}$

Responda, justificando: (Q, ♦, ✶) é um anel comutativo com elemento unidade?

2 Seja dado (Q, ⊕, ⊗) e define-se:

$x \oplus y \rightarrow x + y - 1$
$x \otimes y \rightarrow x + y - xy$

Pergunta-se: (Q, ⊕, ⊗) é um anel? É comutativo? Tem unidade? Justifique.

3 Dê exemplos que mostram a validade dos teoremas a seguir:

a) Se dois polinômios P(x) e Q(x) não nulos têm graus m e n, então: gr(PQ) = m + n.
b) Sejam P(x) e Q(x) polinômios não nulos de graus m e n, respectivamente, com $m \geq n$, então:

- Se $m \neq n$: gr(P + Q) = gr(P – Q) = m;
- Se m = n: gr(P + Q) m e gr(P – Q) $\leq$ m ou o polinômio resultante é nulo.

4 Dados os polinômios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5i$ e $Q(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 6$, determine:

a) P(x) + Q(x)
b) P(x) – Q(x)
c) Q(x) – P(x)

5 Dados os polinômios $P(x) = 4x^2 - (2i)x + 1$ e $Q(x) = 3x + 2i$, determine:

a) $P(x) \cdot Q(x)$
b) $[P(x)]^2$
c) $2Q(x) \cdot 3P(x)$

6 Encontre o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos, fazendo uso do método da chave:

a) $P(x) = 2x^4 + 9x^3 + x^2 - 15x + 6$ $\quad D(x) = x^2 + 3x - 2$
b) $P(x) = -2x^5 + 4x^4 - 6x - 1 + 4i$ $\quad D(x) = 2x^3 + ix - 4$

7 Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, encontre o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$:

a) $P(x) = 3x^2 + 2x - 4$ $\quad D(x) = x + 3$
b) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ $\quad D(x) = x + i$
c) $P(x) = 5x^4 - 14x^3 - 10x^2 - 7x + 7$ $\quad D(x) = x - 2$

TÓPICO 3

ARITMÉTICA MODULAR

1 INTRODUÇÃO

Uma das ferramentas mais importantes na teoria dos números é a aritmética modular, cuja abordagem principal é o conceito de congruência. De modo geral, dizemos que dois números inteiros são congruentes se, quando divididos por um terceiro, chamado módulo de congruência, deixam o mesmo resto.

Uma vez que este tipo de aritmética apenas considera um número finito de “números”, também se diz que a aritmética modular é uma aritmética finita. Para melhor compreensão do conceito de congruência, nossos estudos começarão abordando os conceitos de relação de equivalência, classe de equivalência, divisor de um número e, por fim, o conceito de congruência e as operações de adição e multiplicação na aritmética modular.

2 RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

No Tópico 1 da Unidade 1 deste caderno, você estudou as relações binárias e três de suas propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva.

Quando essas três propriedades são verificadas conjuntamente, dizemos que a relação R é chamada de **relação de equivalência**.

Vamos relembrar essas propriedades:

- A relação binária R é dita **reflexiva** se aRa para todo a ∈ A, isto é, se (a, a) ∈ R para todo a ∈ A. Ou seja, se todos os elementos se relacionam com si próprios.
- A relação binária R é dita **simétrica** se qualquer aRb implica bRa, para todo a, b ∈ A. Ou seja, se existe aRb, implica necessariamente que haja a sua recíproca, bRa.
- A relação binária R é dita **transitiva** quando aRb e bRc implicam em aRc.

Definição: Uma relação binária R será chamada relação de equivalência se R for reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplos:

a) A relação R = {(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)} é uma relação de equivalência sobre E = {a, b, c}, ou seja, apresenta as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Observe que a propriedade reflexiva é expressa nos pares ordenados (a, a), (b, b) e (c, c) pertencentes à relação R. A propriedade simétrica se verifica nos pares ordenados (a, c) e (c, a) e a propriedade transitiva é expressa pela tríade de pares ordenados (a, c), (c, a), (a, a).

b) A relação de igualdade sobre os reais, onde: xRy x = y é uma relação de equivalência, pois verifica as propriedades:

Reflexiva: ∀x ∈ **R**, temos que x = x.
Simétrica: ∀x, y ∈ **R**, temos que, se x = y, então y = x.
Transitiva: ∀x, y, z ∈ **R**, temos que se x = y e y = z, então x = z.

3 CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Para entendermos o conceito de classes de equivalência, consideremos uma situação concreta.

A relação de equivalência dada por "ter a mesma idade que" no conjunto dos alunos de uma escola classifica-os em um subconjunto de alunos de mesma idade. Todos os alunos de 10 anos, por exemplo, são equivalentes por esta relação, e ficam dentro de uma mesma "classe". Já os alunos que tiverem 11 anos não serão equivalentes aos que têm 10, mas eles próprios formarão uma nova classe: a classe dos alunos de 11 anos de idade.

Esta classificação é expressa pelo conceito de **classe de equivalência** ou classes residuais, que definimos:

Seja S um conjunto e R uma **relação de equivalência** em S e seja **a** S. Denominamos de **classe de equivalência de a** e denotamos por **[a]** ao conjunto de elementos y ∈ S relacionados com **a**, isto é: **[a] = {y ∈ S | yRa}**

Alguns autores utilizam a representação **ā**. Todavia, neste texto, adotaremos a representação **[a]** para designar a classe de equivalência de **a**.

Observe que, na definição apresentada, **a** é sempre o elemento que ocupa a segunda posição do par ordenado na relação R, ou seja, (y, **a**) ∈ **R**.

Além disso, a classe de equivalência de **a** é o conjunto formado pelos elementos que ocupam a primeira posição dos pares ordenados (y, a).

Exemplo:

Sejam A = {1, 2, 3, 4, 5} e R_5 uma relação de equivalência em A, cujos elementos são R_5 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4)}. Observe que R_5 é uma relação de equivalência, pois apresenta as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

As classes de equivalência ficam assim determinadas:

[1] = {1, 2, 3}
[2] = {1, 2, 3}
[3] = {1, 2, 3}
[4] = {4, 5}
[5] = {4, 5}

Observe que **[a]** é o conjunto dos primeiros elementos dos pares ordenados onde **a** é o segundo elemento.

3.1 TEOREMAS ASSOCIADOS – PROPRIEDADES DAS CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Considere R uma relação de equivalência. São válidas as seguintes propriedades:

1ª Propriedade: a [a]

Demonstração: R é relação de equivalência, portanto R é reflexiva.

Sendo R reflexiva, o par ordenado (a, a) pertence a R, logo $a \in$ **[a]**.

2ª Propriedade: Se $b \in [a]$, então $[b] = [a]$

Demonstração: Para mostrar que $[b] = [a]$, devemos provar que: $[b] \subset [a]$ e $[a] \subset [b]$.

i) $[b] \subset [a]$

Suponha que $b \in [a]$ e seja $c \in [b]$. Isso significa que $(b, a) \in R$ e $(c, b) \in R$. Como R é transitiva, temos que $(c, a) \in R$.

Portanto $c \in [a]$. Logo $[b] \subset [a]$.

ii) $[a] \subset [b]$

Seja $c \in [a] \Rightarrow (c, a) \in R$. De $b \in [a]$, temos $(b, a) \in R \Rightarrow$ pela simetria (a, b) R.

De $(c, a) \in R$ e $(a, b) \in R$, conclui-se pela transitividade que $(c, b) \in R$.

Portanto $c \in [b]$ e assim $[a] \subset [b]$.

Concluindo: Se $[b] \subset [a]$ e $[a] \subset [b]$, temos que $[a] = [b]$.

3ª Propriedade: Se $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, então $[a] = [b]$

Demonstração: Se [a] ∩ [b] ∅, então, pela definição de intersecção, existe $c \in [a] \cap [b]$. Então cRa e cRb (definição de classe de equivalência). Por simetria temos aRc e cRb e, por transitividade, aRb. Então, pela definição de classe de equivalência, $b \in [a]$ e, portanto, (pela 2ª propriedade já demonstrada) $[a] = [b]$.

Antes de estudarmos a relação de equivalência "congruente módulo m", vamos definir algebricamente o que é um divisor de um número inteiro.

4 DIVISOR DE UM NÚMERO

Seja **a** um número inteiro não nulo.
O número **a** é dito divisor de **b** $\in \mathbf{Z}$ se, e somente se, existir **c** **Z** tal que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$.
Matematicamente:
$\forall\ \mathbf{a} \in \mathbf{Z};\ \mathbf{a} \neq 0$ é divisor de $\mathbf{b} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \exists\ \mathbf{c} \in \mathbf{Z} \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$

Denota-se **a** | **b** e lê-se "**a** divide **b**" ou "**a** é divisor de **b**".
Diz-se também que **b** é múltiplo de **a**.
Para negação, denotamos $\mathbf{a} \nmid \mathbf{b}$ e lê-se "**a** não divide **b**" ou "**a** não é divisor de **b**"

Exemplos:

a) 6 | 12, pois existe 2 tal que: $6 \cdot 2 = 12$

b) (-4) | 12, pois existe (-3) tal que: $(-4) \cdot (-3) = 12$

c) 5 | 25, pois existe 5 tal que: $5 \cdot 5 = 25$

d) (-3) | 15, pois existe (-5) tal que: $(-5) \cdot (-3) = 15$

4.1 CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO

- Qualquer inteiro b é divisor de zero, pois $b \cdot 0 = 0$.

- $\forall\ a \in \mathbf{Z},\ a \neq 0$, tem-se 4 divisores: {1, -1, a, -a}, pois: $\begin{cases} a = a \cdot 1 \\ a = (-a) \cdot (-1) \end{cases}$, exceto o número 1 que possui apenas dois divisores.

4.2 TEOREMA ASSOCIADO

Teorema: A relação | (divide) é reflexiva e transitiva, porém não é simétrica.

Demonstração:

Reflexiva: Seja $a \in \mathbf{Z}$, $a \mid a$, pois existe $p \in \mathbf{Z}$ tal que $a \cdot p = a$, ou seja, $p = 1$.

Transitiva: Sejam $a, b, c \in \mathbf{Z}$ tais que $a \mid b$ e $b \mid c$

Se $a \mid b$, então existe $p \in \mathbf{Z}$ tal que $p \cdot a = b$ **(1)**

Se $b \mid c$, então existe $q \in \mathbf{Z}$ tal que $q \cdot b = c$ **(2)**

Substituindo **(1)** em **(2)** temos:

$q \cdot (p \cdot a) = c \Rightarrow (q \cdot p) \cdot a = c$ (pela propriedade associativa da multiplicação)

Como q e p são números inteiros, temos que $q \cdot p$ também é um número inteiro, logo $t \cdot a = c$, onde $t = q \cdot p$. Logo $a \mid c$.

Portanto, se $a \mid b$ e $b \mid c$ temos que $a \mid c$. Assim é válida a transitividade.

A propriedade simétrica não é válida para a relação |.
Observe que, por exemplo, que $4 \mid 12$, pois $12 = 4 \cdot 3$.
Porém $12 \nmid 4$, pois não existe um número inteiro a tal que $12 \cdot a = 4$.

5 CONGRUÊNCIA

"O conceito de congruência, bem como a notação através da qual essa noção se tornou um dos instrumentos mais poderosos da teoria dos números, foi introduzido por Karl Friedrich Gauss (1777-1855), em sua obre *Disquisitiones Arithmeticae* (1801)." (IEZZI; DOMINGUES, 2003, p. 53).

Seja **m** um número inteiro positivo. Dados dois números inteiros **a** e **b**, dizemos que **a** é congruente a **b** módulo **m** [a ≡b (mod m)] se **m** divide (**a** – **b**). Neste caso, podemos dizer que **a** e **b** são congruentes módulo **m**.
a ≡ b (mod m) ⇔ m | a – b.

Pela definição acima, temos que 20 ≡ 8 (mod 12), pois 12 é divisor de 20 – 8, ou seja, 12 é divisor de 12. Neste caso o número 20 é identificado como número 8, ou seja, o número 20 é equivalente ao número 8 na aritmética módulo 12.

Equivalente a estes dois, temos ainda uma infinidade de outros números como, por exemplo, 32, 44, 56, etc. Esse conjunto de números {8, 20, 32, 44, 56, 68,...} possuem equivalência módulo 12, logo, dizemos que esse conjunto compõe a **classe de equivalência módulo 12** e esta classe vai ser identificada pelo menor dentre eles, ou seja, pelo 8. De modo análogo, temos ainda mais 11 classes de equivalência nesta aritmética representadas pelos números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11. Estes serão nossos números na aritmética módulo 12: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11.

De modo geral, dizemos que os números considerados na **aritmética modular módulo *m*** são: 0, 1, 2, ..., $m - 2$, $m - 1$.

Observe outros exemplos de relação de congruência módulo m:

a) 89 ≡ 25 (mod 4), pois 4 | (89 – 25), ou seja, 4 | 64
b) 89 ≡ 1 (mod 4), pois 4 | (89 – 1), ou seja, 4 | 88
c) 25 ≡ 1 (mod 4), pois 4 | (25 – 1), ou seja, 4 | 24
d) 24 ≡ 3 (mod 5), pois 5 | (24 – 3), ou seja, 5 | 21
e) 24 ≡ 3 (mod 7), pois 7 | (24 – 3), ou seja, 7 | 21
f) 3 ≡ 24 (mod 7), pois 7 | (3 – 24), ou seja, 7 | (-21)
g) 25 ≡ 13 (mod 4), pois 4 | (25 – 13), ou seja, 4 | 12
h) 12 ≡ 12 (mod 5), pois 5 | 12 – 12, ou seja, 5 | 0

Qualquer conceito como "congruente", "equivalente", "igual" ou "similar", em matemática deve satisfazer as três propriedades que classificam uma relação em relação de equivalência: reflexiva, simétrica e transitiva.

Sendo assim, vamos demonstrar então que a relação "congruente módulo m" é uma relação de equivalência.

5.1 TEOREMA ASSOCIADO

Teorema: A relação de congruência módulo m é uma relação de equivalência, qualquer que seja m ∈ **Z** .

Demonstração: Consideremos m ∈ **Z** e vamos provar que a relação de congruência módulo m é reflexiva, simétrica e transitiva.

Reflexiva:

Para cada a ∈ **Z**, a ≡ a (mod m), pois m | (a – a), ou seja, m | 0.

Simétrica:

Se a ≡ b (mod m), então m | (a – b), ou seja, existe c ∈ **Z** tal que m · c = a – b. Multiplicando ambos os membros da igualdade por (-1)), temos m · (-c) = b – a. Logo b ≡ a (mod m).

Transitiva:

Se a ≡ b (mod m) e b ≡ c (mod m) , então m | (a – b) e m (b – c).

Mas, m | (a – b) ⇒ ∃ p ∈ **Z** | p · m = a – b
m | (b – c) ⇒ ∃ q ∈ **Z** | q · m = b – c

Somando ambas as equações, temos:

$$\begin{array}{c} p \cdot m = a - b \\ q \cdot m = b - c \\ \hline pm + qm = a - b + b - c \end{array}$$

Colocando m em evidência, obtemos (p + q)·m = a – c, que é a definição de "divisor".

Então m | (a – c), ou seja, a ≡ c (mod m).

Como a relação **é congruente módulo m** é reflexiva, simétrica e transitiva, temos que "≡ (mod m)" **é uma relação de equivalência**, conforme queríamos provar.

O próximo passo é estudar as operações que se podem efetuar na aritmética modular, em particular, a adição e a multiplicação que apresentaremos na sequência.

5.2 OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E DE MULTIPLICAÇÃO EM ARITMÉTICA MODULAR

No tópico 2 da Unidade 2 deste caderno, apresentamos um exemplo de anel (Evaristo e Perdigão, 2002) baseado em um mostrador de um relógio. Neste anel, sobre o conjunto $I_{12} = \{1, 2, 3 ..., 11, 12\}$, verificamos algumas operações como $5 \cdot 8 = 4$, $11 \cdot 8 = 4$, dentre outras. Na multiplicação entre números inteiros, $5 \cdot 8 = 40$ e $11 \cdot 8 = 88$. O que há em comum entre 12, 4, 40 e 88? Simplesmente que o resto da divisão de 40 por 12 é igual ao resto da divisão de 88 por 12 que, em ambos os casos, é 4.

Algebricamente representamos por **r(a, b)** o **resto da divisão euclidiana de a por b**. Dessa forma, no exemplo dado, podemos representar deste modo: $r(40, 12) = r(88, 12) = 4$.

A análise do resto da divisão euclidiana entre dois números inteiros é outra forma de representar a congruência módulo m entre inteiros.

Observe os mesmos exemplos que estudamos anteriormente, sobre a ótica da análise do resto da divisão euclidiana entre **a** e **b**:

a) $89 \equiv 25 \pmod 4$, pois $r(89, 4) = r(25, 4) = 1$
b) $89 \equiv 1 \pmod 4$, pois $r(89, 4) = r(1, 4) = 1$
c) $25 \equiv 1 \pmod 4$, pois $r(25, 4) = r(1, 4) = 1$
d) $24 \equiv 3 \pmod 5$, pois $r(25, 5) \neq r(3, 5)$
e) $24 \equiv 3 \pmod 7$, pois $r(24, 7) = r(3, 7) = 3$
f) $3 \equiv 24 \pmod 7$, pois $r(3, 7) = r(24, 7) = 3$
g) $25 \equiv 13 \pmod 4$, pois $r(25, 4) = r(13, 4) = 1$
h) $12 \equiv 12 \pmod 5$, pois $r(12, 5) = r(12, 5) = 2$

Agora vamos realizar algumas operações na aritmética modular.

Uma maneira de visualizar as operações de soma e de multiplicação de classes em $\mathbf{Z}_m$ é através de tabelas. Nelas, listamos todas as classes na primeira linha e na primeira coluna. Cada entrada na tabela corresponde à operação dos elementos indicados na primeira linha e na primeira coluna.

Como exemplo, vamos fazer as tabelas de soma e de multiplicação de $\mathbf{Z}_5$, que possuem cinco classes de equivalência, sendo elas [0], [1], [2], [3], [4], que correspondem ao resto da divisão por 5.

+	**[0]**	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

Observe, por exemplo, na última entrada da tabela que [3] = [4] + [4]. O que isso significa? Significa que $8 \equiv 3 \pmod 5$, porque $5 \mid (8 - 3)$, ou ainda porque r(8, 5) = r(3, 5) = 3.

Observe agora a tabela de multiplicação de $\mathbf{Z}_5$:

·	**[0]**	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

Nesta operação, temos [1] = [4] · [4]. Isto implica que $16 \equiv 1 \pmod 5$, porque $5 \mid (16 - 1)$, ou ainda porque r(16, 5) = r(1, 5) = 1.

Analise cuidadosamente todas as entradas dessas tabelas. Confira cada uma delas para ter certeza de que você entendeu sua construção.

RESUMO DO TÓPICO 3

- Quanto às propriedades de uma relação binária que a classificam em relação de equivalência:

A relação binária R é dita ser uma relação de equivalência se R for

- **reflexiva** (aRa para todo a $\in$ A);
- **simétrica** (aRb $\Leftrightarrow$ bRa, para todo a, b $\in$ A).
- **transitiva** (aRb e bRc $\Leftrightarrow$ aRc, para todos a, b, c $\in$ A).

- Quanto à definição de classe de equivalência:

Seja S um conjunto e R uma **relação de equivalência** em S e seja **a** $\in$ S.

Denominamos de **classe de equivalência de a** e denotamos por **[a]** ao conjunto de elementos y $\in$ S relacionados com **a**, isto é: **[a] = {y $\in$ S | yRa}**

- Quanto à definição de divisor:

Seja **a** um número inteiro não nulo. O número **a** é dito divisor de **b, para algum b** $\in$ **Z** se, e somente se, existir **c** **Z** tal que **a** · **c** = **b.**

Matematicamente: $\forall$ **a** $\in$ **Z**; **a** $\neq$ 0 é divisor de **b** $\in$ **Z** $\Leftrightarrow$ $\exists$ **c** $\in$ **Z** | **a** · **c** = **b**

- Quanto à definição relação congruência módulo m:

Seja **m** um número inteiro positivo. Dados dois inteiros a e b, dizemos que a é congruente a b se **m** | **(a – b), e denotamos por**: **a** $\equiv$ **b (mod m)**.

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico!

Seguem algumas autoatividades que permitirão a você exercitar os conceitos que acabamos de estudar.

Bom trabalho!

1 Indique quais da relações a seguir são relações de equivalência sobre o conjunto A = {a, b, c}:

a) ( ) $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$
b) ( ) $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c)\}$
c) ( ) $R_3 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}$
d) ( ) $R_4 = A \times A$
e) ( ) $R_5 = \varnothing$

2 Quais são as relações de equivalência sobre A = {a, b}?

3 Quantas são as relações de equivalência sobre B = {a, b, c, d}?

4 Seja A o conjunto dos triângulos do espaço euclidiano. Seja R a relação em A definida por: $xRy \Leftrightarrow x$ é semelhante a y. Mostrar que R é uma relação de equivalência.

5 Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:

a) ( ) 25 1 (mod 12)
b) ( ) $-5 \equiv -14 \pmod 3$
c) ( ) $12 \equiv -2 \pmod 3$
d) ( ) $5 + 7t \equiv 5 \pmod 7, \forall t \in Z$

6 Construa as tabelas de soma e de multiplicação de Z_5 na aritmética modular.

TÓPICO 4

EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS

1 INTRODUÇÃO

Equações algébricas são as equações em que as incógnitas são submetidas apenas às chamadas operações algébricas, ou seja, soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação. Um caso particular deste tipo de equações são as equações polinomiais.

> Quando se estuda a obra matemática de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) tem-se a sensação de que em todos os campos onde atuou ele não apenas fez o melhor possível mas, também, nada deixou para que outros, no futuro, viessem superá-lo. Assim, por exemplo, aconteceu com seu doutoramento, aos 21 anos, em 1799, quando apresentou o que ainda hoje é considerado a maior tese de doutorado em Matemática de todos os tempos. Ela nos interessa diretamente por ser o mais importante dos alicerces da teoria das equações algébricas e é conhecida como o Teorema Fundamental da Álgebra (denominação dada pelo próprio Gauss). Este teorema afirma que **toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz**. (GARBI, 1997, p. 116).

Neste tópico, vamos estudar o Teorema Fundamental da Álgebra, o Teorema da Decomposição e suas implicações na resolução de equações algébricas, bem como as relações estabelecidas entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial.

2 DEFINIÇÃO DE EQUAÇÃO ALGÉBRICA

De modo geral, dado P(x) um polinômio em **C**, chama-se equação algébrica à igualdade P(x) = 0. Portanto, as raízes da equação algébrica são as mesmas do polinômio P(x).

Matematicamente, definimos:

Equação polinomial ou **algébrica** é toda equação redutível à forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

sendo $x \in \mathbf{C}$ a incógnita, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ coeficientes complexos (reais ou não), com $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbf{N}^*$.

Observe que a expressão $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$, é um polinômio P(x) de grau n. Dizemos que a equação polinomial correspondente também tem grau n, ou seja, o grau da equação polinomial é definido pelo polinômio que a caracteriza.

São exemplos de equações algébricas:

a) $2x^3 – 2x^2 + x – 1 = 0$, que é uma equação polinomial do 3º grau, na incógnita x.

b) $4y^4 – 5y^2 + y – 1 = 0$, que é uma equação polinomial do 4º grau, na incógnita y.

3 RAIZ DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA

Um número complexo z (real ou não) é raiz de uma equação P(x) = 0 se, e somente se, P(z) = 0.

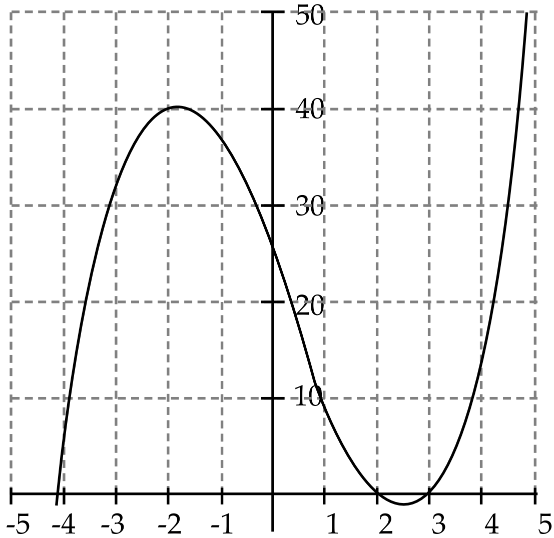
Por exemplo, a equação do 3º grau expressa por $x^3 – x^2 – 14x + 24 = 0$ possui como raízes o conjunto solução S = {-4, 2, 3}.

Observe:

Para x = -4, temos: $(-4)^3 – (-4)^2 – 14\cdot(-4) + 24 = 0$
Para x = 2, temos: $(2)^3 – (2)^2 – 14\cdot(2) + 24 = 0$
Para x = 3, temos: $(3)^3 – (3)^2 – 14\cdot(3) + 24 = 0$

Se considerássemos a equação $x^3 – x^2 – 14x + 24 = 0$ como uma função $f(x) = x^3 – x^2 – 14x + 24$ e construíssemos sua representação gráfica, obteríamos a figura a seguir:

FIGURA 4 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA



FONTE: Software Freeware DeadLine 2.36

Observe no gráfico ao lado que a curva intersecta o eixo x em -4, 2 e 3, que correspondem às raízes da equação.

Ora, no ponto em que o gráfico intersecta o eixo x, temos ordenada (valor de y) nula. A esses pontos denominamos raízes ou zeros da função, que se referem às raízes da equação algébrica correspondente.

Na disciplina de Cálculo Numérico, você aprenderá como resolver equações algébricas através de métodos numéricos. Os métodos numéricos são abordagens distintas dos métodos algébricos.

Vejamos agora como determinar as raízes de **algumas equações do 3º grau**, usando fatoração:

a) Determinar as raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$.

Como a incógnita x aparece em todos os termos do 1º membro da equação, vamos colocar x em evidência, obtendo:

$$x \cdot (x^2 - 7x + 12) = 0$$

Temos que o produto entre dois termos é nulo quando o primeiro é nulo ou o segundo é nulo, daí segue que:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

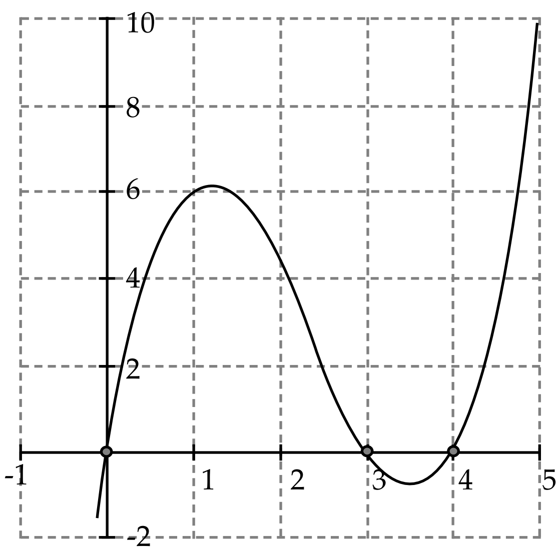
Em $\mathbf{x' = 0}$ temos uma raiz. Observe que **sempre teremos uma raiz igual a zero quando o termo independente do polinômio for nulo**. As demais raízes serão determinadas resolvendo a equação polinomial do 2º grau $x^2 - 7x + 12 = 0$ através da fórmula resolutiva (fórmula de Bháskara), obtendo $\mathbf{x'' = 3}$ e $\mathbf{x''' = 4}$. Portanto, o conjunto solução da equação do 3º grau, expressa por $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$, é $S = \{0, 3, 4\}$.

Vamos averiguar esse resultado substituindo os valores de S na equação:

Para $x = 0$, temos: $(0)^3 - 7\cdot(0)^2 + 12\cdot(0) = 0$
Para $x = 3$, temos: $(3)^3 - 7\cdot(3)^2 + 12\cdot(3) = 0$
Para $x = 4$, temos: $(4)^3 - 7\cdot(4)^2 + 12\cdot(4) = 0$

Construindo o gráfico de $f(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$, podemos constatar visualmente a existência dessas raízes:

FIGURA 5 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA



Acadêmico! Você sabe diferenciar **função** de **equação**?

Na função f(x): **R** → **R**, expressa por $y = x^3 - 7x^2 + 12x$, cujo gráfico está representado na figura ao lado, f(x) = y e x são **variáveis**, ou seja, assumem valores infinitos em **R**.

Na equação $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$, temos que x é **incógnita**, ou seja, assume apenas valores do conjunto $S = \{0, 3, 4\}$, que tornam a igualdade verdadeira.

FONTE: Software Freeware DeadLine 2.36

Quando substituímos y por zero na **função** $y = x^3 - 7x^2 + 12x$, passamos a ter a **equação** $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$, cujas raízes são os valores 0, 3 e 4. É por isso que podemos visualizar estas raízes no gráfico da função f(x) = y, pois os pontos de coordenadas (0, 0), (3, 0) e (4, 0) possuem ordenadas nulas (y = 0).

b) Determinar as raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$.

Fatorando o polinômio de 3º grau, temos:

$$x^2\cdot(x - 5) + 4\cdot(x - 5) = 0$$

Como (x – 5) é termo em ambas as parcelas, podemos simplificar a expressão, escrevendo:

$$(x^2 + 4)\cdot(x - 5) = 0$$

Temos que o produto entre dois termos é nulo quando o primeiro é nulo ou o segundo é nulo, daí segue que:

$$x^2 + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0$$

Da primeira equação, obtemos:

$$x^2 + 4 = 0$$
$$x^2 = -4$$
$$x = \sqrt{-4}$$
$$x = \sqrt{4\cdot(-1)}$$
$$x = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}$$
$$\mathbf{x' = 2i} \quad \text{ou} \quad \mathbf{x'' = -2i}$$

E da segunda equação, temos:

$$x - 5 = 0$$
$$\mathbf{x''' = 5}$$

Portanto, o conjunto solução da equação do 3º grau, expressa por $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$, é $S = \{5, -2i, 2i\}$.

4 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Para as equações algébricas, é válida a seguinte propriedade:

> Toda equação algébrica $P(x) = 0$ de grau n, com $n \geq 1$, admite, pelo menos, uma raiz complexa (real ou não).

Essa propriedade foi demonstrada pelo matemático Carl Friedrich Gauss, em sua tese de doutorado, em 1799, que ficou conhecida como Teorema Fundamental da Álgebra.

Como consequência do Teorema Fundamental da Álgebra, temos o Teorema da Decomposição, enunciado a seguir e cuja demonstração foi extraída de Barroso et al. (2008, p. 183):

Teorema da Decomposição: Todo polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ de grau n maior ou igual a 1, em **C**, pode ser fatorado da seguinte forma:

$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1)\cdot(x - \alpha_2)\cdot(x - \alpha_3) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_{n-1})\cdot(x - \alpha_n)$ sendo a_n o coeficiente dominante e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n$ as raízes desse polinômio.

Demonstração: Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, o polinômio P(x) tem pelo menos uma raiz complexa α_1. Portanto, pelo Teorema de D´Alembert, P(x) é divisível por $(x - \alpha_1)$. Daí, existe $Q_1(x)$ de grau (n – 1) tal que: $P(x) = Q_1(x)\cdot(x - \alpha_1)$.

- Se P(x) tem grau 1, $Q_1(x) = k$ tem grau zero. Assim: $P(x) = k \cdot (x - \alpha_1)$.
- Se P(x) tem grau 2, $Q_1(x)$ tem grau 1. Então, aplicando o Teorema Fundamental da Álgebra e o teorema de D´Alembert a $Q_1(x)$, existem α_2, raiz complexa de $Q_1(x)$, e $Q_2(x)$ tal que: $P(x) = Q_2(x) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_1)$.
- Usando esse raciocínio, aplicamos o Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema de D´Alembert até obter um polinômio constante $Q_n(x) = k$, de modo que: $P(x) = k \cdot (x - \alpha_n). (x - \alpha_{n-1})\cdot ... \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_1)$.

Desenvolvendo esse produto, verificamos que k é o coeficiente dominante a_n de P(x) e, portanto, obtemos P(x) decomposto da seguinte forma:

$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) . (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot ... \cdot (x - {}_{n-1}) \cdot (x - \alpha_n)$.

Essa decomposição é única, exceto pela ordem dos fatores.

Pelo Teorema da Decomposição, podemos concluir que:

Toda equação algébrica de grau n (com $n \geq 1$) admite, em **C**, exatamente n raízes complexas (reais ou não), não necessariamente distintas.

Vejamos alguns exemplos onde faremos uso do Teorema da Decomposição:

a) O conjunto S = {-2, 1, 4} representa as raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$. Sabendo disto, vamos decompor P(x) em fatores de grau 1.

Pelo Teorema da Decomposição, temos que P(x) pode ser reescrito em um produto de fatores do 1º grau: $P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \,.\, (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3)$, onde a_n é o coeficiente dominante e α_1, α_2, α_3 são suas raízes.

Dessa forma, temos:

$$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \,.\, (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3)$$
$$P(x) = 2 \cdot [x - (-2)] \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$$
$$\mathbf{P(x) = 2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)}$$

b) Vamos escrever o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ na forma fatorada, sabendo que uma de suas raízes é 2.

Se 2 é raiz de P(x), então, de acordo com o Teorema de D´Alembert, P(x) é divisível por x – 2. Assim, podemos reescrever P(x) como $P(x) = (x - 2) \cdot Q(x)$.

Para determinar Q(x), vamos dividir P(x) por x – 2, através do dispositivo prático de Briot-Ruffini, estudado no tópico anterior:

$$\begin{array}{c|c:c} 2 & 1 \quad -3 \quad -10 & 24 \\ \hline & \underbrace{1 \quad -1 \quad -12}_{\text{Coeficientes de } Q(x)} & 0 \end{array}$$

Assim, temos que $Q(x) = x^2 - x - 12$.

Resolvendo a equação polinomial do 2º grau $x^2 - x - 12 = 0$, através da fórmula de Bháskara, encontramos as outras duas raízes:

$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = -12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-12)$$
$$\Delta = 1 + 48$$
$$\Delta = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{1 \pm 7}{2}$$
$$x' = 4 \quad x'' = -3$$

Logo, as raízes de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ são -3, 2 e 4, o que nos permite realizar a decomposição de P(x) em um produto de fatores do 1º grau, conforme o Teorema da Decomposição:

$$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) . (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3)$$
$$P(x) = 1 \cdot [x - (-3)] \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$$
$$\mathbf{P(x) = (x + 3) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)}$$

5 RELAÇÕES DE GIRARD

As relações entre os coeficientes de uma equação algébrica e as raízes da mesma equação foram enunciadas em 1629 pelo matemático Albert Girard (1595-1632). Essas relações poderão ser úteis na resolução de equações algébricas quando tivermos mais alguma informação a respeito de suas raízes.

5.1 RELAÇÕES ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ cujas raízes são α_1 e α_2. Pelo Teorema da Decomposição, temos que:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)$$

Como $a \neq 0$, pois se trata de uma equação polinomial do 2º grau, podemos dividir membro a membro da expressão acima por a:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - \alpha_2)$$
$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{a \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)}{a}$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)$$

Agora, vamos desenvolver o produto no 2º membro e agrupar os termos semelhantes, obtendo:

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} + x^2 - \left(\alpha_1 - \alpha_2\right)x + \alpha_1\alpha_2$$

Observe que, pela identidade de polinômios, obtemos as seguintes relações:

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} + x^2 - \underbrace{\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)}x + \overbrace{\alpha_1\alpha_2}$$

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \qquad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{c}{a}}$$

5.2 RELAÇÕES ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 3º GRAU

Considere a equação do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ cujas raízes são α_1, α_2 e α_3. Procedendo de modo análogo ao que fizemos no item anterior, obtemos as seguintes relações entre coeficientes e raízes:

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} \qquad \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 = \frac{c}{a} \qquad \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -\frac{d}{a}}$$

5.3 RELAÇÕES ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DE GRAU "n"

As relações de Girard podem ser generalizadas para equações de grau n, com $n > 3$. Considere a equação $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$, cujas n raízes são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$.

As relações de Girard para essa equação são:

- $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1} \cdot \alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1}\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Vejamos alguns exemplos em quem faremos uso das relações de Girard:

a) Determinar a soma e o produto das raízes da equação $x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$.

Na equação do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d$, valem as relações:

- Soma das raízes: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a}$
- Produto das raízes: $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -\frac{d}{a}$

Logo a soma e o produto são: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{1}{1} = -1$ e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -\frac{(-4)}{1} = 4$

b) Vamos escrever as relações de Girard para a equação $2x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 26x + 120 = 0$.

Os coeficientes dessa equação são:

a = 2
b = -2
c = -25
d = 26
e = 120

Sendo α_1, α_2, α_3 e α_4 as raízes desta equação, temos as eguintes relações:

- $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$
- $\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_4 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_4 + \alpha_3 \cdot \alpha_4 = \frac{c}{a} = -\frac{25}{2}$
- $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_4 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot {}_4 = -\frac{d}{a} = -\frac{26}{2} = -13$
- $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 = \frac{e}{a} = \frac{120}{2} = 60$

LEITURA COMPLEMENTAR

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS: TEMPOS DE MUDANÇA

Como é comum em Matemática, a descoberta da solução das equações de graus 3 e 4 no século XVI deu origem a outras questões de maior abrangência. Uma delas: será que, como G. Cardano (1501-1576) suspeitava, baseado na sua experiência com equações de graus 2 e 3, uma equação de grau n tem sempre n raízes? A veracidade dessa conjectura só seria comprovada definitivamente cerca de dois séculos e meio mais tarde, em 1799, depois de frustrar os dois maiores matemáticos do século XVIII, L. Euler (1707-1783) e Joseph L. Lagrange (1736-1813).

O autor desse feito matemático foi o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em sua tese de doutorado, defendida por ele com 21 anos de idade. Gauss batizou esse resultado como *teorema fundamental da álgebra*, nome que se consagrou na literatura matemática.

Noutra linha, levantou-se também a questão de saber se as equações de grau ≥ 5 são, em geral, resolúveis algebricamente, como o são as de grau 1 a 4; ou seja, se é possível expressar suas raízes em função dos coeficientes por meio das quatro operações básicas e da radiciação.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)
FONTE: Disponível em: <http://www.sil.si.edu/digitalcollections/hst/>.

A fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, para as raízes de ax2 + bx + c = 0, com a ≠ 0, mostra que as equações de grau 2 são resolúveis algebricamente. Para as equações cúbicas, veja-se a fórmula de Cardano.

As primeiras luzes em torno da questão das equações de grau ≥ 5 somente começariam a se acender no século XVIII, deixando entrever uma situação nova. Lagrange, que pesquisou a fundo o assunto, descobriu um método que reduzia a resolução das equações de graus 2, 3 e 4 à de uma equação de grau uma unidade menos, mas que, quando aplicado a uma de grau 5, levava a uma de grau 6. Esse resultado, entre outros, levou-o a duvidar da possibilidade da solução algébrica de uma equação de grau 5. Em 1799, o médico e matemático italiano Paolo Ruffini (1765-1822) deu uma demonstração dessa impossibilidade. Mas os argumentos de Ruffini foram considerados vagos e imprecisos, e a questão continuou pendente.

Contudo, três anos depois, na Finlândia, numa família pobre e numerosa, nasceria Niels H. Abel (1802-1829), que, a despeito de sua vida breve e sofrida, iria dar uma resposta definitiva, com argumentos sólidos, a essa secular questão. Abel não revelou, nos seus primeiros anos de escola, nenhum gosto especial pela matemática. Mas quando se tornou aluno de B. Holmböe (1795-1850), um professor competente e que sabia motivar seus alunos vigorosamente, toda a sua genialidade matemática latente veio à tona. Cerca de um ano depois de conhecê-lo, Holmböe vaticinou que Abel estava destinado a ser o maior matemático do mundo.

Abel começou a se interessar pelas equações algébricas muito cedo, haja vista que aos 16 anos de idade supôs ter resolvido a equação de grau 5. Mas logo descobriu seu erro e, persistindo, acabou demonstrando o contrário: que as equações de grau ≥ 5 não são em geral resolúveis algebricamente – resultado que publicou a suas expensas em 1824 e que hoje é conhecido como *teorema de Ruffini-Abel*. Mas esse trabalho não lhe granjeou o reconhecimento merecido, em parte por sua limitada circulação, em parte porque o autor era um ilustre desconhecido. O próprio Gauss esteve com uma cópia em mãos, mas não lhe deu atenção. Em 1826, o teorema seria publicado numa revista especializada, com outros quatro de sua autoria, todos de alto nível. Mas mesmo assim o imenso valor matemático de Abel só seria devidamente reconhecido depois de sua morte, com menos de 27 anos de idade.

A preocupação dos algebristas passava agora para outra fronteira: se, de um modo geral, as equações algébricas não são resolúveis algebricamente, como Abel já provara, e se algumas classes de equações o são, como as binomiais $x^p – 1 = 0$, com p primo, como Gauss já provara, o que diferencia essencialmente uma classe da outra? O próprio Abel tentou esclarecer a questão, mas, talvez por ter vivido tão pouco, não alcançou esse objetivo. Porém, menos de uma década depois, o francês Evariste Galois (1811-1832) descobriria critérios gerais de resolubilidade que, fechando um ciclo da álgebra, ajudaram decisivamente a abrir o da álgebra moderna.

O temperamento inquieto e arrojado de Galois fez com que sua breve vida fosse marcada por muitas agruras. Ao que parece, seu gosto pela matemática só se manifestou claramente quando ele – com pouco mais de 15 anos de idade – leu a obra *Elementos de Geometria*, de Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Depois disso, e já com muitas leituras matemáticas, tentou ingressar por duas vezes na Escola Politécnica de Paris – que na ocasião reunia alguns dos maiores matemáticos do mundo –, mas fracassou em ambas por falta de preparo sistemático. Em 1829, ingressou na Escola Normal, que formava para a carreira de magistério. Porém, durante a revolução de julho de 1830, que destronou Carlos X e pôs em seu lugar Luís Filipe, Galois criticou o diretor da escola por favorecer a “legitimidade” contra a “liberdade” e foi expulso. Sua atividade política subseqüente levou-o à prisão por vários meses. Em 31 de maio de 1832, foi morto num duelo cujas causas jamais foram bem esclarecidas, mas que talvez tivessem conotações políticas.

Aos 17 anos de idade, Galois apresentou seu primeiro trabalho sobre as equações algébricas à Academia de Ciência de Paris. O encarregado de examiná-lo, Augustin L. Cauchy (1789-1857), perdeu-o. O único trabalho completo de Galois sobre o assunto, submetido à mesma instituição, em 1831, foi considerado ininteligível. Na véspera do duelo em que morreu, ele escreveu um testamento científico, em forma de carta a um amigo, sobre suas ignoradas descobertas.

O que Galois tanto queria dizer ao mundo, e não conseguiu em vida, era que havia encontrado um critério que tornava possível saber se uma equação poderia ou não ser resolvida algebricamente, usando para isso um conceito criado no próprio século XIX, ao qual ele deu o nome de ***grupo***. Mas só em 1870 seus escritos forma decifrados, mostrando o quanto ele estava à frente de seu tempo e abrindo novos caminhos para a álgebra.

FONTE: IEZZI, Gelson et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004. p.308-09. v. 3.

RESUMO DO TÓPICO 4

- **Quanto à definição de equação algébrica:**

Equação polinomial ou **algébrica** é toda equação redutível à forma:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

sendo $x \in \mathbf{C}$ a incógnita, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ coeficientes complexos (reais ou não), com $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbf{N}^*$.

- **Quanto à definição de raiz de uma equação algébrica:**

Um número complexo z (real ou não) é raiz de uma equação P(x) = 0 se, e somente se, P(z) = 0.

- **Teorema Fundamental da Álgebra:**

Toda equação algébrica P(x) = 0 de grau n, com $n \geq 1$, admite, pelo menos, uma raiz complexa (real ou não).

- **Teorema da Decomposição:**

Todo polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ de grau n maior ou igual a 1, em **C**, pode ser fatorado da seguinte forma: $P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1)\cdot(x - \alpha_2)\cdot(x - \alpha_3) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_{n-1})\cdot(x - \alpha_n)$ sendo a_n o coeficiente dominante e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n$ as raízes desse polinômio.

- **Relações de Girard:**

- Para equações do 2º grau:

- $\alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{b}{a}$ $\qquad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \dfrac{c}{a}$

- Para equações do 3º grau:

- $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\dfrac{b}{a}$ $\qquad$ • $\alpha_1\cdot\alpha_2 + \alpha_1\cdot\alpha_3 + \alpha_2\cdot\alpha_3 = \dfrac{c}{a}$ $\qquad$ • $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3 = -\dfrac{d}{a}$

- Para equações de grau n:

- $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

- $\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + ... + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$

- $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_4 + ... + \alpha_{n-2} \cdot \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$

  $\vdots$

- $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot ... \cdot \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico!

Realize as autoatividades com atenção e teste seus conhecimentos sobre equações polinomiais.

Bom trabalho!

1 Calcule k sabendo que 1 é uma das raízes da equação $x^4 - 8x^3 + kx^2 - 32x + 15 = 0$.

2 (BIANCHINI, 2004, p.128) Resolva as equações abaixo, sendo U = **C**:

a) $2x^3 + 10x = 0$
b) $x^3 - 9x^2 + 18x = 0$
c) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$
d) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

3 Escreva o polinômio $P(x) = 2x^4 - 2$ na forma fatorada, sendo 1, -1, i e –i as suas raízes.

4 Encontre as raízes de $x^3 - 4x^2 - 19x - 14 = 0$, sabendo que a soma de duas delas é 5.

5 Resolva a equação $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$, sabendo que o produto de duas de suas raízes é 8.

6 Fatore o polinômio $P(x) = x^3 - 8x^2 + 4x + 48$, sabendo que $P(6) = 0$.

7 Fatore o polinômio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 10x - 75$, sabendo que duas de suas raízes são 3 e -5.

8 Fatore o primeiro membro da equação $x^3 - x^2 + 10x - 10 = 0$ e determine suas raízes.

9 Estabeleça as relações de Girard para as equações:

a) $3x^4 + 19x^3 - 23x^2 - 59x + 30 = 0$
b) $x^3 - 15x^2 + 74x - 120 = 0$

10 Demonstre as relações de Girard para coeficientes e raízes de uma equação do 3º grau.

UNIDADE 3

SOBRE O ENSINO DE ÁLGEBRA

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

A partir desta unidade você será capaz de:

- refletir sobre a necessidade da construção do pensamento algébrico na fase escolar ante o pensamento mecânico e a manipulação de fórmulas;
- entender a importância do sinal de igualdade no ensino da Álgebra;
- elaborar estratégias de ensino referente aos números inteiros relativos, a fim de dirimir os obstáculos epistemológicos que comumente se apresentam nesta etapa escolar;
- fazer uso dos recursos tecnológicos, em particular o uso de *softwares*, enquanto aliados na ação docente, em especial, no ensino da Álgebra.

PLANO DE ESTUDOS

Esta unidade de ensino está dividida em três tópicos. No final de cada um deles você encontrará atividades que contribuirão para a apropriação dos conteúdos.

TÓPICO 1 – A CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

TÓPICO 2 – NÚMEROS INTEIROS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA

TÓPICO 3 – O USO DE *SOFTWARES* EM MATEMÁTICA

TÓPICO 1

A CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

1 INTRODUÇÃO

A Álgebra é um objeto matemático presente na maioria dos programas curriculares da disciplina de Matemática desde o Ensino Fundamental ao Ensino Médio. Todavia, se comparada com a Geometria e a Aritmética, a Álgebra apresenta as maiores dificuldades tanto em termos de compreensão de conceitos quanto e, consequentemente, em termos de operacionalização.

O objetivo deste tópico é proporcionar, por ora, uma pausa no estudo das estruturas algébricas para viabilizar um olhar sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem da Álgebra. Trata-se de uma análise dos erros e das suas possíveis causas, as quais, muitas vezes, se encontram associadas à falta de conexão que o acadêmico faz entre a disciplina de estruturas algébricas e o ensino de álgebra na formação básica e, em outras vezes, são decorrentes dos obstáculos que o ensino da aritmética causou na álgebra. Neste último caso, se faz necessário que o professor sugira possíveis estratégias e atividades para trabalhar em aula, como meio de superação destes obstáculos.

Para além das dificuldades que os alunos possam apresentar na introdução ao ensino da álgebra, na fase escolar, faz-se necessário desenvolver o pensamento algébrico, mostrando que não se trata de uma ideia singular, mas sim de um composto de diferentes formas de pensamento e de compreensão do simbolismo que a Álgebra requer.

2 A UTILIZAÇÃO DAS LETRAS EM ÁLGEBRA

Uma das dificuldades que os alunos apresentam na introdução ao estudo da álgebra consiste na utilização e interpretação das letras em expressões algébricas. A dificuldade consiste na transição dos números, em aritmética, para as letras, em álgebra, e a relação que estas desempenham no estudo algébrico.

Segundo Milton (1988, p. 2) apud Pinto (1997, p. 8):

> As crianças têm dificuldades em estabelecer significados às letras em álgebra. De fato, algumas crianças não percebem que uma letra é usada para significar um número generalizado, embora outras pensem que o valor numérico de uma letra varia conforme a posição em que essa letra ocupa no alfabeto, significando que **y** é maior que **a**.

Em sua pesquisa de mestrado, Pinto (1997) apresenta um exemplo desta dificuldade. Segundo a autora, em aritmética, **10m** significa **10 metros**, onde a letra **m** é o símbolo de uma unidade de medida (no caso, o metro) e não a quantidade de metros. Internalizado este conceito, o aluno acaba sendo induzido a traduzir de forma errônea, em álgebra, **3m** como **3 maçãs** ao invés de **3 vezes o número de maçãs**.

Neste caso, cabe ao professor, que de antemão já deve estar ciente dessa dificuldade que irá se apresentar no processo de transição, sinalizar ao estudante que o foco da atividade aritmética é diferente do foco da atividade algébrica. Ao operar apenas com números, o objetivo é encontrar respostas particulares. O cálculo algébrico pode não só fornecer respostas particulares únicas, como também pode expressar procedimentos e relações de maneira generalizada e simplificada.

Diante disso, outra dificuldade se impõe: a aceitação de uma expressão algébrica do tipo $x + 2$ como resposta de uma situação problema, haja vista que, em aritmética, a resposta de uma operação reduz-se sempre a um único termo. Essa ideia pode ser facilmente percebida quando os alunos simplificam uma expressão como $3x + 2y = 5xy$.

Segundo Pinto (1997), isto pode ocorrer porque alguns alunos têm uma dificuldade cognitiva em aceitar a ausência de fechamento, ou pode ser simplemente um reflexo das expectativas decorrentes de preocupações comuns em aritmética em relação à maneira como deveriam ser as “respostas bem formuladas”. (COLLINS, 1975 apud PINTO, 1997).

Neste sentido, no decorrer de sua vida escolar, o aluno é induzido a pensar somente na resposta e não no processo desenvolvido para chegar à resposta; na linguagem algébrica, o foco é o processo.

O que verificamos cotidianamente em sala de aula é que os alunos carregam com eles, para o estudo da álgebra, as concepções e competências de suas experiências em aritmética. Essas concepções não devem ser eliminadas, ao contrário, devem ser ampliadas e modificadas quando necessário, para que possam atender às demandas da álgebra.

O processo de transição da aritmética para álgebra coincide com um processo de amadurecimento da criança durante a sua fase escolar e carrega em si todas as dificuldade que ressaltamos. No entanto, esse processo deve ser entendido pelo professor como uma etapa fundamental da alfabetização matemática.

3 O SINAL DE IGUALDADE

A dificuldade que os alunos apresentam com relação aos símbolos operatórios (+, -, =, ...) usados tanto na aritmética quanto na álgebra parece ser inerente ao próprio ensino desses objetos matemáticos.

Neste conjunto de símbolos operatórios, destacamos o sinal de igualdade, pois trata-se de um dos símbolos mais importantes na aritmética elementar, na álgebra e em toda matemática.

Observa-se que nas séries iniciais, a atividade matemática enfatiza muito a solução em detrimento do processo resolutivo de um problema. À solução ou à resposta, é dada uma atenção especial, inclusive sugerindo que se escreva por extenso. Naturalmente que a intensão em volta desta ação docente é a melhor possível, desde fazer com que a criança pense a respeito da solução encontrada, verificando se esta realmente tem sentido no contexto do problema, até o próprio treino da escrita, importante no processo de alfabetização nas séries iniciais.

Todavia, esta ação carrega em si um duplo viés: se, por um lado, há uma preocupação docente compreensível e aceitável, por outro lado, a criança passa a enxergar o sinal de igualdade como o anúncio de um resultado, e não como a expressão de uma relação simétrica e transitiva.

Reporto-me, enquanto professora, a alguns comentários dos alunos, nos quais é possível identificar-se o conceito de igualdade foi ou não internalizado corretamente.

Por exemplo, na equação polinomial do 1º grau $2x + 5 = 6 + 5$, um aluno diz que é simplemente $2x = 6$ e, portanto, x vale 3. Este aluno entende que se trata de uma igualdade entre as parcelas e, subtraindo 5 unidades de um dos membros da igualdade o faz também no outro, gerando uma nova expressão equivalente a anterior.

Porém, sobre a mesma equação, outro aluno comenta: o resultado é 11! Trata-se de uma análise de encadeamento, onde 2x + 5 = 6 + 5 = 11! Ou seja, este aluno visualiza a igualdade como o anúncio de uma resposta, sendo esta única e numérica. O primeiro membro da igualdade (2x + 5) foi ignorado pelo aluno, pois na sua forma de pensar, ele é equivalente a 6 + 5 que, por sua vez, é igual a 11.

Desse modo, os alunos tendem a interpretar o símbolo de igual no cálculo algébrico da mesma forma como o faziam até então, em aritmética. É aí que reside a origem da dificuldade cognitiva em aceitar a ausência de fechamento nos cálculos algébricos, sobre a qual nos referimos no item anterior.

4 PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS: A CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Diante das dificuldades que foram expostas com relação ao uso das letras e ao significado do sinal de igualdade, verificamos que a álgebra é desprovida de significado para muitos alunos, os quais se preocupam em memorizar dados e aplicar fórmulas que serão facilmente esquecidas e não viabilizarão a construção do pensamento algébrico.

Dessa forma, seria adequado que a construção do pensamento algébrico fosse introduzido já nas séries iniciais, através de atividades concomitantes às trabalhadas em aritmética.

Nesse pensar, a álgebra não seria uma continuação da aritmética, mas sim uma abordagem paralela. "É preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra." (LINS, GIMENEZ, 1997, p. 10).

Também os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais, de Matemática para o Ensino Fundamental, enfatizam este aspecto:

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa à habilidade de pensar 'abstratamente', se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem da Álgebra mais sólida e rica em significados. (BRASIL, 1997, p.117).

Lins e Gimenez (1997) salienta ainda que a atividade algébrica não é uma consequência natural da aprendizagem da aritmética. Há aspectos da álgebra que não representam a continuação dos métodos e símbolos estudados na artimética.

Um exemplo deste fato diz respeito à resolução de equações. Considere o seguinte problema: "Um número multiplicado por quatro e somado com 10 é igual a 26. Determine esse número". Aritmeticamente, os alunos subtraem 10 de 26 e dividem o resultado por 4 (26 – 10 = 16; 16 : 4 = 4. O número é 4.). Porém, quando o problema é representado algebricamente, $4x + 10 = 26$, as operações envolvidas são multiplicação e adição.

Para escrever o problema em forma de equação algébrica, os alunos devem pensar precisamente de maneira oposta a de como pensariam usando a aritmética. Assim, eles não apenas têm de lidar com representação explícita das operações que eles usam para resolver um problema, mas também devem aprender a representar operações inversas àquelas que usam para resolver o problema de forma intuitiva.

Analisando estas dificuldades, parece ficar claro que grande número delas acontecem em decorrência da falta de compreensão ou da deturpação de conceitos aritméticos básicos. A proposta é um olhar paralelo a estes dois objetos que compõem, juntamente com a Geometria, uma mesma linguagem: a Matemática.

> Se não se introduzir a álgebra de maneira significativa, conectando os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios que os alunos já possuem, se aos objetos algébricos não se associar nenhum sentido, se a aprendizagem da álgebra for centrada na manipulação de expressões simbólicas a partir de regras que se referem a objetos abstratos, muito cedo os alunos encontrarão dificuldades nos cálculos algébricos e passarão a apresentar uma atitude negativa em relação à aprendizagem matemática, que para muitos fica desprovida de significação. (BONADIMAN, 2007, p. 51).

Ao professor cabe a importante tarefa de propiciar atividades para os alunos no sentido de favorecer a produção de significados para a álgebra simbólica.

NOTA

O filme da Disney, **Donald no país da Matemágica**, é uma animação clássica originalmente liberado para a TV em 1959 e agora disponível em DVD (DVD Fábulas Disney, Volume III).

O filme explora padrões e outras ideias interessantes em matemática de diversas maneiras. Sua formação em Licenciatura em Matemática não estará completa se você não ver esse filme! Encontre modos de usá-lo em atividades com alunos de 5ª série até 3ª série do EM. Ou apenas assista e discuta com seus colegas seu potencial para uso na escola.

RESUMO DO TÓPICO 1

- Quanto à utilização das letras em Álgebra:

Uma das dificuldades que os alunos apresentam na introdução ao estudo da álgebra consiste na utilização e interpretação das letras em expressões algébricas. A dificuldade consiste na transição dos números, em aritmética, para as letras, em álgebra, e a relação que estas desempenham no estudo algébrico.

- Quanto à correta utilização do sinal de igualdade:

O sinal de igualdade é um dos símbolos mais importantes na aritmética elementar, na álgebra e em toda matemática ao usar números e operações. Quando a compreensão do sinal de igualdade está comprometida, em geral, o aluno apresenta dificuldades ao lidar com expressões algébricas. Até resolver uma simples equação exige que o aluno observe ambos os lados do sinal de igualdade como expressões equivalentes.

- Quanto à construção do pensamento algébrico:

De modo geral, o raciocínio algébrico implica realizar generalizações da aritmética e de padrões em toda a matemática e fazer uso significativo do simbolismo algébrico.

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico!

Procure desenvolver as atividades abaixo pensando como professor preocupado com a formação algébrica de seu aluno. Pense nos conceitos envolvidos e nos ditos e não ditos necessários para compreensão de seu aluno.

1 Qual o significado correto do sinal de igualdade? Como o uso de sentenças verdadeiro/falso e sentenças abertas ajudam os estudantes a compreender esse símbolo?

2 Considere duas explicações completamente diferentes de porque o número 5 preenche a caixa na sentença aberta 7 – ❐= 6 – 4:

<u>Aluno A</u>: "Como 6 – 4 é 2, você precisa pegar 7 e obter 2. Então, como 7 – 5 = 2, é o número 5 que preenche a caixa."

<u>Aluno B</u>: "Sete é um a mais que 6 no outro lado da igualdade. Isso significa que você precisa tirar mais um no lado esquerdo para conseguir o mesmo número. Um a mais de 4 é 5, assim 5 preenche a caixa. Assim: [6 + 1 – 4 – 1, pois +1 – 1 = 0 e não altera nada]."

Em que exatamente essas duas respostas corretas são diferentes?

3 Como cada um dos alunos da questão anterior, resolveria essa sentença aberta: 534 + 175 = 174 + ❐ ?

4 O simbolismo, especialmente envolvendo equações e variáveis, é usado para expressar as generalizações aritméticas e a estrutura do sistema numérico. Por exemplo, a generalização de que (a + b) = (b + a) nos diz que 83 + 27 = 27 + 83 sem precisar calcular as somas em cada lado da igualdade. Em sua opinião, qual a melhor forma de introduzir esse simbolismo algébrico ao estudante e em que fase do processo de escolarização?

5 "As variáveis são símbolos que tomam o lugar de números ou domínio de números. Eles são usados para representar quantidades que variam ou mudam (variáveis), valores desconhecidos específicos (incógnitas) e como parâmetros em expressões ou fórmulas generalizadas." (WALLE, 2009, p. 287).

Como você explicaria a um aluno a diferença entre os conceitos de variável, incógnita e parâmetro. Dê um exemplo.

TÓPICO 2

NÚMEROS INTEIROS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA

1 INTRODUÇÃO

Os entraves epistemológicos e os obstáculos didáticos que permeiam a compreensão do conceito de números inteiros motivaram a inserção deste tópico como sugestão de discussão para a disciplina de Álgebra.

Para tanto, mapeamos alguns desses entraves apresentados pela literatura e organizamos propostas de atividades a fim de sanarmos algumas destas dificuldades envolvendo a compreensão de números inteiros relativos.

2 OS OBSTÁCULOS REFERENTES À APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS

Algumas grandezas variam em ambos os sentidos, a partir de um ponto previamente fixado, ao qual denominamos origem ou ponto zero. Para representarmos essas grandezas, fazemos uso de sinais que indicam posição.

Alguns exemplos:

- Uma perda de dinheiro é um fluxo de caixa negativo.

- Diminuir a velocidade de um carro é realizar um processo de desaceleração, onde podemos considerar a aceleração negativa.

- Temperaturas abaixo de zero e altuitudes abaixo do nível do mar podem ser expressas através de números negativos com relação a uma escala.

Qualquer conceito que seja quantificado e que possua direção quase sempre tem ambos os valores: positivo e negativo. Em muitas situações, os valores negativos são expressos com números inteiros relativos em detrimento do uso de frações ou decimais.

Apesar da relevância deste assunto, verifica-se a permanência de inúmeras dificuldades em sua aprendizagem, fator este que amplia sobremaneira a importância desta discussão nos cursos de formação de professores de Matemática. Os principais obstáculos na aprendizagem deste importante objeto matemático devem-se à contradição entre o que o aluno aprendeu nas séries iniciais do Ensino Fundamental e os novos conceitos e representações advindos do ensino dos números inteiros, aos diferentes significados do sinal de diferença, à dificuldade em associar um número à ideia de quantidade e ao significado prático de magnitude do número inteiro.

> Enquanto que, no conjunto dos Números Naturais, os conhecimentos espontâneos e o uso de situações pragmáticas fazem parecer que as operações matemáticas decorrem 'naturalmente' da ação humana sobre objetos, o conjunto dos Números Inteiros apresentou uma evolução lenta e de difícil aceitação. (POMMER, 2010, p. 1).

No 7º ano do Ensino Fundamental, fase escolar em que, costumeiramente, se introduz o conceito de número inteiro relativo, é perceptível aos docentes que os alunos não realizam corretamente operações neste conjunto em determinadas situações.

Conforme Nascimento (2002), muitos deles começam a demonstrar algumas dificuldades em:

- Admitir, a partir de agora, um valor numérico inferior a zero.

- Aceitar a representação de um número negativo, visto que sua ideia de número positivo está conectada à ideia de cardinalidade. Neste sentido, as analogias ficam equivocadas; por exemplo: "Como pode existir -4 bolas?"

- Realizar operações do tipo "3 – 5" haja vista que, até então, não era possível subtrair um número maior de um número menor.

- Estabelecer uma relação de ordem entre os inteiros relativos, por exemplo -2 > -5. Ao aluno esta relação parece equivocada, pois a representação simbólica do valor cinco sempre lhe foi indicada como maior que a representação simbólica do valor dois.

- Realizar operações do tipo "2 – (-5)" ou ainda "-3 – (-7)", onde o símbolo "–" é expresso como sinal operatório e como indicação de um número negativo.

- Identificar o valor zero não como ausência, mas como resultado da operação de dois valores opostos, ou como um valor que representa a separação numérica dos positivos e dos negativos representados na reta.

A não compreensão do conceito de números inteiros, além de dificultar a compreensão e a resolução de situações que envolvem as operações básicas (adição, subtração, multiplicação, divisão) neste conjunto, também pode ser um obstáculo para a aprendizagem em outros campos conceituais, haja vista sua importância para a representação gráfica de funções, para o cálculo de grandezas como aceleração, velocidade, distância, tempo, entre outras.

> Outro entrave comum se localiza na falsa concepção onde o par adição/multiplicação é considerado como aumento, assim como o par subtração/divisão é erroneamente visto como diminuição. Outro problema usual está localizado na crença em atividades que valorizam a notação, porém que não necessariamente estão introduzindo e significando um novo conjunto numérico. (POMMER, 2010, p. 2).

Partindo, portanto, da importância e da dificuldade de aprendizagem dos números inteiros, vamos verificar duas proposta didáticas que podem ser empregadas por ocasião da abordagem deste tema, no 7º ano do Ensino Fundamental, procurando minimizar ou mesmo superar os obstáculos epistemológicos que destacamos neste item.

Antes, porém, vamos falar um pouco sobre outro aspecto importante: as regras de sinais em Z.

3 REGRAS DE SINAIS EM Z

Classificar as grandezas em negativas e positivas viabilizou dar significado aos cálculos aritméticos e às regras de sinais nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

As regras de sinais não podem ser provadas ou demonstradas, mas podem ser justificadas, viabilizando a compreensão dos alunos e ressaltando que tais regras não foram simplesmente inventadas, mas são decorrentes da necessidade de manter coerência nos princípios ou fundamentos da Matemática.

A obra "Números Negativos" da coleção "Pra que serve Matemática?" é uma boa dica de leitura para você, acadêmico, futuro professor de Matemática.

Trata-se de uma leitura didática destinada a alunos de 7º ano, como introdução ao estudo dos números inteiros e suas operações.

Nesta obra, os autores apresentam, em forma de quadrinhos animados, duas justificativas para o produto de dois números negativos que resulta em um número positivo.

Na primeira, os autores fazem uso do conceito de vetor, ampliando seu módulo (comprimento) e alterando seu sentido. Na segunda, os autores sugerem que seja analisada a sequência da tabuada de (-2), atentando para o aumento de 2 unidades a cada produto. Observe:

FONTE: IMENES, JAKUBO E LELLIS, 1992, p. 34

No exemplo anterior, os autores buscaram um recurso geométrico para explicar ou justificar que a operação "(-2) (-3)" resulte em 6. A noção vetorial é introduzida, pois ao multiplicar por (-2), o objeto geométrico manteve direção, dobrou o seu módulo e alterou o sentido para o seu oposto.

No segundo exemplo, os autores atentam para a progressão aritmética de razão 2, resultante dos produtos da tabuada de (-2). Seguindo essa sequência, o personagem do quadrinho se depara com a operação "(-2) × (-1)" e observa a necessidade do sequenciamento lógico, deduzindo então que o produto deverá ser 2. Observe:

FONTE: Imenes, Jakubo e Lellis (1992, p. 34)

Observe que os autores se utilizam de uma justificativa que evidencia a própria logicidade necessária em Matemática. O personagem observe que, a fim de manter os fundamentos da própria Matemática, não há outra possibilidade coerente no seqüenciamento apresentado.

Segundo Caraça (1970) apud Pommer (2010), a Matemática tem uma lógica própria que necessita ser ressaltada e, em algumas vezes, se situa num lugar mais adequado do que a insistência no acesso ao cotidiano, que nem sempre é o contexto mais apropriado.

> Levou séculos para que os matemáticos percebessem que a regra de sinais, conjuntamente com todas as outras definições que governam os números inteiros e as frações não podem ser provadas. Elas são criadas por nós para nos darem liberdade operatória, pelo fato de preservarem as propriedades fundamentais da Aritmética. O que pode – e deve – ser provado é, unicamente, com base nestas definições, que as propriedades comutativa, associativa e distributiva são preservadas. (COURANT; ROBBINS, 1941 apud POMMER, 2010, p. 4).

Vamos analisar agora, algumas estratégias didáticas para compreensão de operações com números inteiros incluindo, naturalmente, as regras de sinais.

4 ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Reconhecidos os obstáculos epistemológicos e os entraves didáticos que permeiam o ensino das operações com números inteiros, buscamos na literatura alguns autores que propuseram estratégias pedagógicas com uso de material concreto para esse fim.

4.1 O ÁBACO DOS INTEIROS

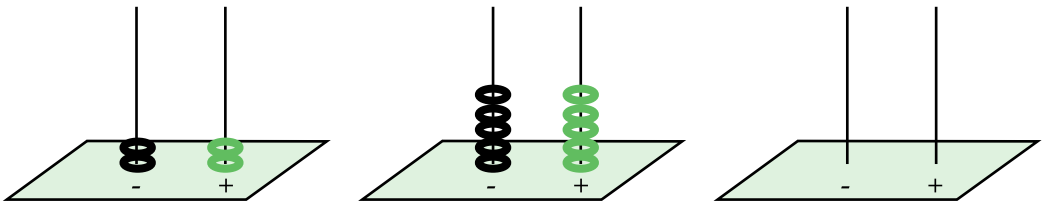
Coelho (2005) apresenta em sua pesquisa uma proposta de material didático para o ensino de operações com números inteiros, a qual denominou "Ábaco dos Inteiros". Com este material manipulável, a autora propõe uma abordagem operatória concreta da adição, subtração e multiplicação de números inteiros relativos.

O ábaco apresentado por Coelho (2005) tem duas colunas, uma onde são colocadas as unidades positivas, representadas por argolas cinzas, e outra onde são colocadas as unidades negativas representadas por argolas pretas.

O número negativo (-1) é simétrico do número positivo (+1), ou seja, (+1) + (-1) = 0. Esta definição matemática de números simétricos é respeitada também no ábaco, de tal forma que, quando temos uma argola positiva e uma negativa, essa situação equivale a ter zero, o que acontecerá com todos os números positivos e negativos que forem simétricos. Daqui resulta que teremos várias representações possíveis do zero.

Seguem-se alguns esquemas a título de exemplo:

FIGURA 6 – REPRESENTAÇÕES DO ZERO NO ÁBACO



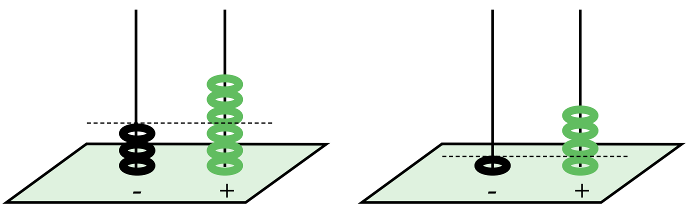
FONTE: Coelho (2005, p. 73)

As três figuras apresentadas acima representam o zero: na primeira temos duas argolas pretas, simbolizando (-2) e duas argolas cinzas, simbolizando (+2). Na segunda, temos cinco argolas pretas, simbolizando (-5) e cinco argolas cinzas, simbolizando (+5) e, na terceira, a inexistência de argolas também nos indica a representação do zero.

Diante disso, você já deve ter percebido, acadêmico, como se dão as operações de adição e subtração neste material manipulativo, mas vejamos ainda outras representações.

A seguir, a figura apresenta duas representações distintas do número (+3).

FIGURA 7 – REPRESENTAÇÕES DO NÚMERO (+3)



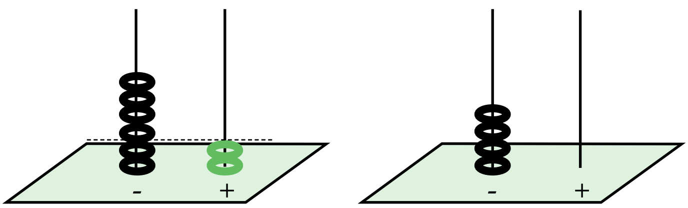
FONTE: Coelho (2005, p. 74)

Na primeira, temos três argolas pretas, simbolizando (+3) e seis argolas cinzas, simbolizando (-6). Como a equivalência de argolas simboliza o zero, então três argolas pretas "anulam" três argolas cinzas, sobrando ainda, três argolas cinzas, o que equivale a (+3).

Na segunda representação apresentada na figura acima, temos uma argola preta, simbolizando (-1) e quatro argolas cinzas, simbolizando (+4). Novamente, uma argola preta "anula" uma argola cinza, sobrando ainda três argolas cinza, ou seja, (+3).

Neste mesmo pensar, temos a representação do número (-4). Observe a figura a seguir:

FIGURA 8 – REPRESENTAÇÕES DO NÚMERO (-4)



FONTE: Coelho (2005, p. 74)

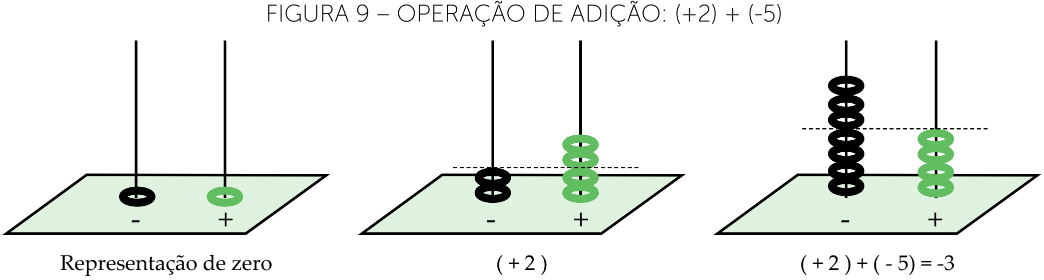
Na primeira representação, temos seis argolas pretas, simbolizando (-6) e duas argolas cinzas, simbolizando (+2). Pela ideia de equivalência, ou pela adição de números simétricos, duas argolas pretas "anulam" duas argolas cinzas, sobrando assim, quatro argolas pretas, ou seja, (-4).

E, na segunda representação, temos apenas quatro argolas pretas e nenhuma argola cinza, o que também simboliza (-4).

Para realizar operações de adição ou subtração, Coelho (2005) sugere que o aluno inicie com a representação do zero e a partir daí, efetue a operação desejada.

A figura a seguir simboliza a operação: (+2) + (-5), que resultará em (-3).

FIGURA 9 – OPERAÇÃO DE ADIÇÃO: (+2) + (-5)



FONTE: Coelho (2005, p. 74)

Iniciar com uma argola em cada haste representa a equivalência de argolas, ou seja, simboliza o zero.

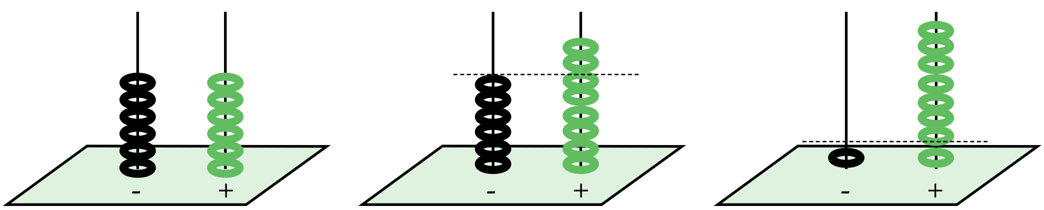
O passo seguinte consiste na representação do número (+2). No exemplo apresentado na figura, a opção foi adicionar quatro argolas cinzas (+4) e duas argolas pretas (-2), resultando em (+2).

A partir da representação do número (+2), acrescenta-se (pois se trata de uma adição), (-5). Observe que havia duas argolas pretas na primeira haste e foram acrescidas outras cinco, resultando em sete argolas pretas, ou seja, simbolizando (-7). Desse modo, com as quatro argolas cinzas da ação anterior, temos (-7) + (+4) = (-3), que é o mesmo que (+2) + (-5) = (-3).

O interessante nesta proposta é que o aluno pode iniciar com qualquer representação do zero, e isto fará com que ele encontre diferentes operações que levarão a mesma resposta da questão inicial.

Vejamos outro exemplo, agora referente à operação de subtração:

FIGURA 10 – OPERAÇÃO DE SUBTRAÇÃO: (+2) – (-5)



Representação de zero | (+ 2) | (+ 2) - (- 5) = +7

FONTE: Coelho (2005, p. 75)

Parte-se da representação do zero, com seis argolas de cada cor. Deseja-se realizar a operação (+2) – (-5), assim, o próximo passo é representar o número (+2).

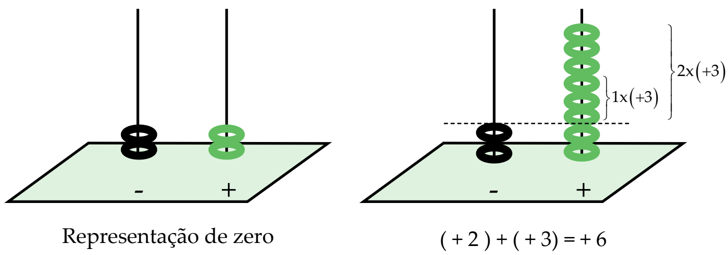
Para tanto, acrescenta-se duas argolas cinzas, totalizando oito. Por fim, vamos retirar (pois se trata de uma subtração) cinco argolas pretas (-5). Observe que ficamos com uma argola preta, que "anulará" uma argola cinza e restarão assim sete argolas cinzas.

Observe que, para realizar esta operação, a representação do zero teve de ser superior a 5 argolas, pois na última etapa, representamos (-5), ou seja, fizemos a retirada de cinco argolas e, para tanto, era necessário que na haste tivéssemos cinco ou mais argolas pretas para fazermos esta retirada.

Agora, vamos analisar alguns exemplos referentes à operação de multiplicação. Inicialmente vamos multiplicar dois inteiros positivos.

Coelho (2005) apresenta a operação (+2) × (+3) em seu ábaco dos inteiros, observe:

FIGURA 11 – OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO: (+2) × (+3).



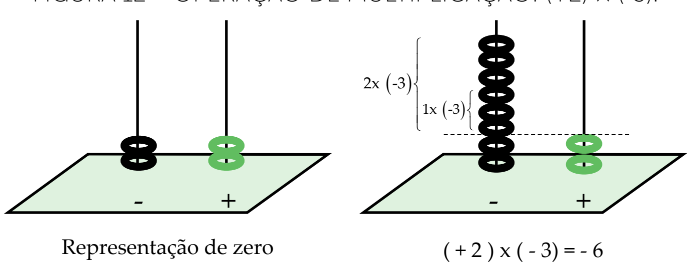
FONTE: Coelho (2005, p. 76)

Veja que a representação do zero se deu com duas argolas em cada haste. A partir daí acrescentou-se um conjunto de três argolas cinzas (1 × 3) e, em seguida, outro conjunto de três argolas cinzas (1 × 3), totalizando 8 argolas cinzas e 2 pretas. Como cada argola preta "anula" uma cinza, restaram 6 argolas cinzas, representando a solução da operação: (+6).

E como seria representado, no ábaco dos inteiros, o produto resultante da operação (+2) × (-3)?

Vejamos:

FIGURA 12 – OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO: (+2) × (-3).



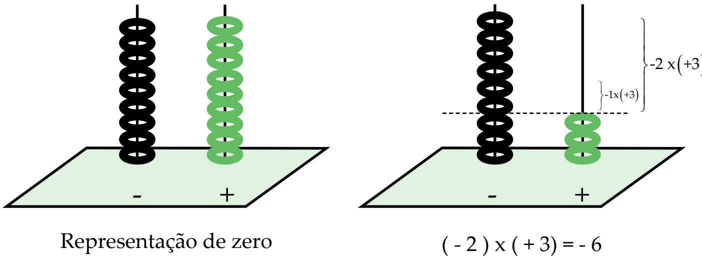
FONTE: Coelho (2005, p. 76)

Na figura, Coelho (2005) apresenta como realizar o produto (+2) × (-3) com o seu material manipulável: o ábaco dos inteiros.

A autora inicia com a representação do zero, contendo duas argolas em cada uma das hastes. A partir daí, acrescenta um conjunto de três argolas pretas (1 (-3)) e, na sequência, outro conjunto de três argolas pretas (1 × (-3)), totalizando 8 argolas pretas e duas cinzas. Como cada argola cinza "anula" uma preta, o resultado será seis argolas pretas, o que simboliza (-6) como produto da operação.

Observe, agora, a representação de (-2) × (+3):

FIGURA 13 – OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO: (-2) × (+3)

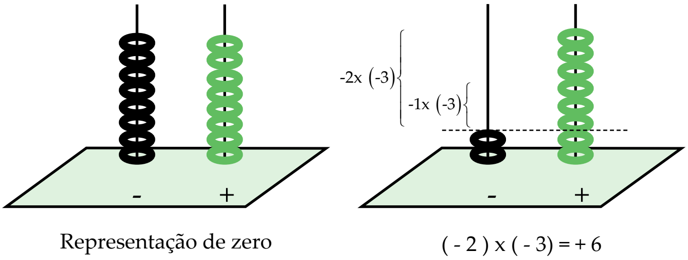


FONTE: Coelho (2005, p. 76)

A representação do zero se deu com nove argolas de cada cor. A partir daí foi retirado um conjunto de três argolas cinzas ((-1) × 3) e, na sequência, retira-se novamente, outro conjunto de três argolas cinzas ((-1) × 3). Desse modo, são retiradas, ao total, seis argolas cinzas, sobrando três das nove que inicialmente foram colocadas. Como cada argola cinza "anula" uma preta e vice-versa, então, por fim, restam seis argolas pretas, representando a solução procurada: (-6).

E, como último exemplo, vamos efetuar a operação (-2) × (-3); iniciando com oito argolas em cada haste, representamos o zero:

FIGURA 14 – OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO: (-2) × (-3)



FONTE: Coelho (2005, p. 76)

Retiramos um conjunto de três argolas pretas, o que representa (-1) × (-3). Em seguida, repetimos esta operação, retirando outro conjunto de três argolas pretas: (-1) × (-3), totalizando uma retirada de seis argolas pretas, restando apenas duas pretas e mantendo-se ainda as oito argolas cinzas inicialmente colocadas para representação do zero. Como cada argola preta "anula" uma cinza e vice-versa, sobram seis argolas cinzas, simbolizando a solução desejada: (+6).

Prezado acadêmico! Você pôde constatar que a atividade proposta aborda conceitos de equivalência, de números inteiros e de suas operações de forma visual, permitindo que o aluno manipule, concretize, compreenda e dê sentido a estes conceitos.

Embore este tipo de atividade leve um tempo para ser desenvolvida em sala de aula, ela é extremamente importante para evitar futuros problemas com relação às operações e às regras de sinais no conjunto dos inteiros o que, se não for sanado, se estenderá também para o conjunto dos racionais, irracionais, reais.

Outro fator importante é que o processo de abstração se dará de forma natural. Não é necessário que o professor se preocupe achando que o aluno ficará refém do material manipulativo para realização das operações; é um processo de alfabetização. Lembra-se de quando você aprendeu a ler? O primeiro contato com as letras, a formação de sílabas, a construção de palavras e... de repente... você estava lendo!

Lembre-se, acadêmico, a Matemática também é uma linguagem e a Álgebra é a forma mais expressiva disto.

NOTA

Se você quiser saber mais sobre esta proposta de ensino das operações com inteiros fazendo uso de material manipulativo, leia a pesquisa completa da autora Márcia Paula Fraga Coelho, acessando sua dissertação de Mestrado em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/3496/1/Tese.pdf>.

Observe as outras atividades apresentadas pela autora e comece a pensar no seu Trabalho de Graduação (TG).

Você já pensou que materiais manipulativos poderiam ser elaborados para o ensino de Geometria, por exemplo? Ou para outros campos da Álgebra?
Que tal fazer um esboço de ideias e apresentar ao(à) seu(sua) tutor(a)?

4.2 A RETA NUMÉRICA E OS CONTADORES COLORIDOS

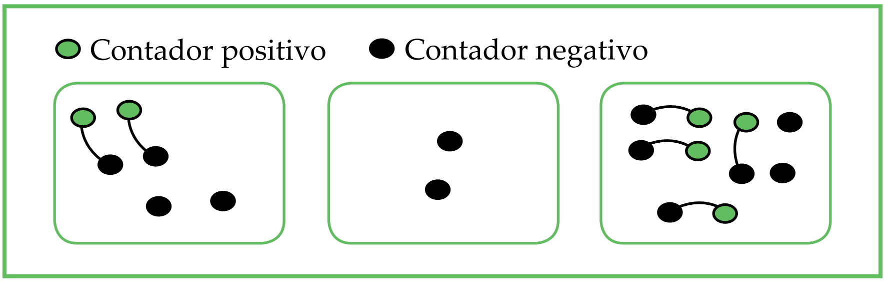
Walle (2009) apresenta dois modelos para operações com inteiros. Um deles consiste em contadores de duas cores diferentes, uma cor para os números positivos e outra cor para os números negativos. Este modelo se assemelha muito à proposta do ábaco dos inteiros, que estudamos no item anterior.

Os números inteiros positivos são representados por contadores (bolinhas) de cor clara e os números inteiros negativos por contadores de cor escura.

Na figura a seguir, você observa três representações distintas do número (-2). Na primeira, ele resulta da operação "(+2) + (-4)" ou sua comutativa "(-4) + (+2)", onde dois contadores positivos (2 bolinhas claras) são adicionados a quatro contadores negativos (4 bolinhas escuras). Como cada contador positivo "anula" um negativo, a representação mostra que resultaram dois contadores negativos (2 bolinhas escuras).

A segunda representação do número (-2) apresenta simplesmente dois contadores escuros e, na terceira representação, (-2) é resultado da operação "(+4) + (-6)" ou a sua comutativa "(-6) + (+4)".

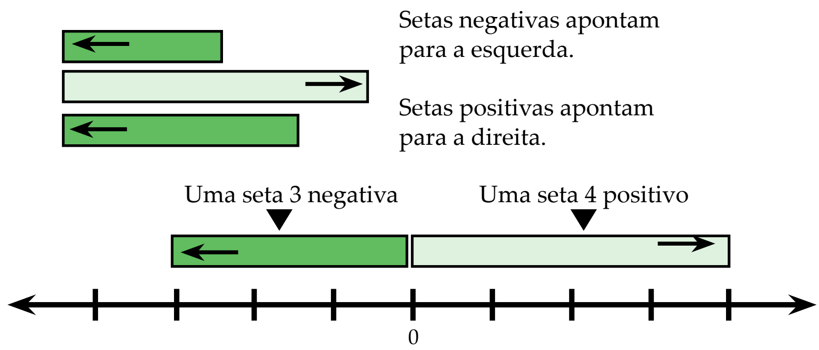
FIGURA 15 – REPRESENTAÇÕES DISTINTAS DO NÚMERO (-2)



FONTE: Walle (2009, p. 533)

O segundo modelo, comumente usado, é a reta numérica. Neste modelo, os números negativos e positivos representam distâncias medidas à direita e à esquerda de zero.

FIGURA 16 – RETA NUMÉRICA



FONTE: Walle, (2009, p. 534)

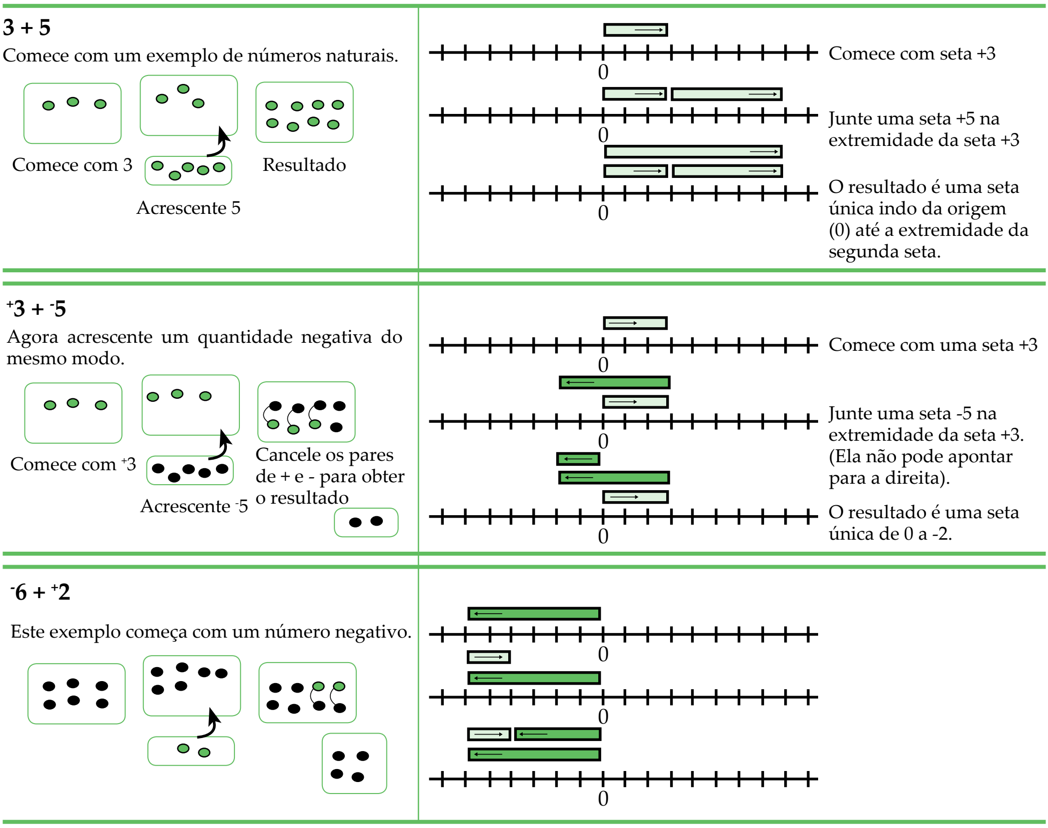
Os valores com sinais são distâncias orientadas e não os pontos em uma reta; são as distâncias orientadas que representam os modelos de inteiros. Para isso, podem ser usadas setas de papel de diferentes comprimentos para representar os números inteiros em duas cores: uma apontando para à direita, representando os inteiros positivos, outra apontando para à esquerda, representando os inteiros negativos. “Cada seta é uma quantidade com ambos os atributos: comprimento (magnitude ou valor absoluto) e sentido (sinal).” (WALLE, 2009, p. 534).

Embora os dois modelos pareçam diferentes, eles são matematicamente semelhantes. “Os inteiros envolvem dois conceitos: *quantidades* e *opostos*. A quantidade é modelada pelo número de contadores ou o comprimento das setas. A oposição é representada com cores diferentes ou sentidos diferentes.” (WALLE, 2009, p. 534).

A figura a seguir apresenta três exemplos de adição de números inteiros nos dois modelos sugeridos por Walle (2009): o modelo dos contadores coloridos e da reta numerada.

Observe:

FIGURA 17 – EXEMPLOS DE ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS



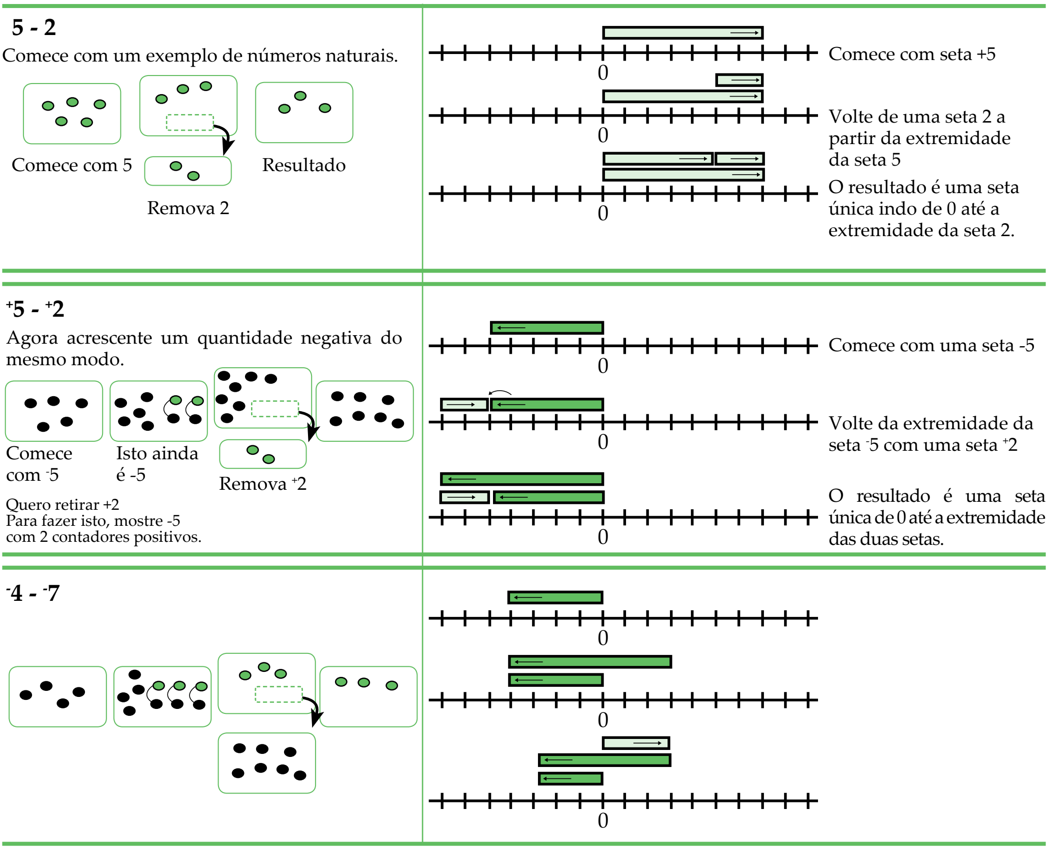
FONTE: Walle (2009, p. 535)

No segundo exemplo, no modelo dos contadores coloridos, temos a operação (+3) + (-5). Observe que após duas quantidades serem reunidas, quaisquer pares de contadores positivos e negativos cancelam-se entre si, como no modelo das argolas – o ábaco dos inteiros.

Para efetuar uma adição usando o modelo das setas, observe que cada seta adicionada começa na extremidade da seta anterior. O resultado, portanto, será sempre uma seta que começa no ponto 0 e termina onde a segunda seta termina.

A próxima figura apresenta três exemplos de subtração. “A subtração é representada como ‘remover’ em termos do modelo de contadores e ‘voltar’ em termos do modelo de setas.” (WALLE, 2009, p. 535).

FIGURA 18 – EXEMPLOS DE SUBTRAÇÃO



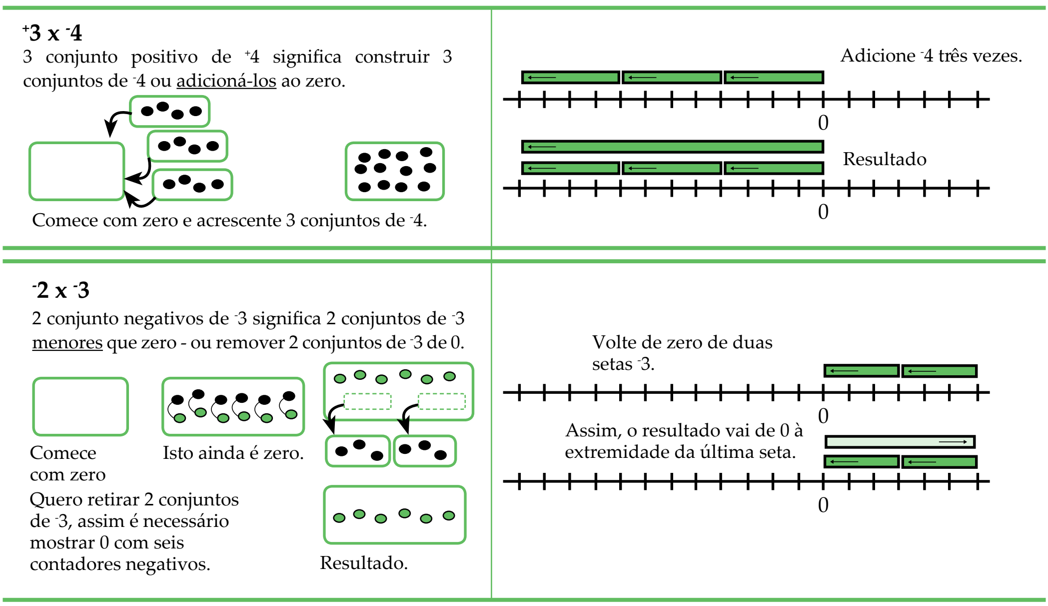
FONTE: Walle (2009, p. 536)

Observe que, com a reta numérica e o modelo de setas, a subtração implica voltar ou se mover no sentido oposto. O resultado da operação é uma seta que parte da posição 0 e tem extremidade coincidente à origem da segunda seta.

Na sequência, temos a operação de multiplicação definida sobre os modelos de contadores coloridas e setas orientadas.

A seguir, dois exemplos de produto entre números inteiros:

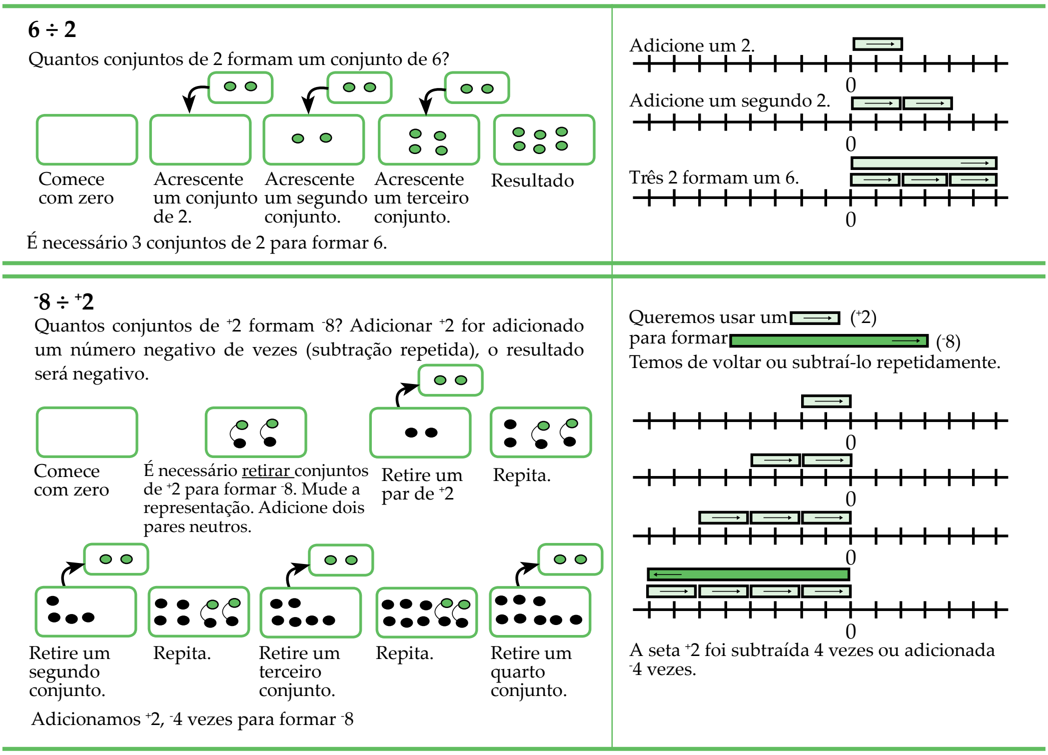
FIGURA 20 – EXEMPLOS DE PRODUTO ENTRE NÚMEROS INTEIROS



FONTE: Walle (2009, p. 537)

Por fim, vamos analisar a operação de divisão com os modelos sugeridos. O exemplo apresentado na figura a seguir explora, inicialmente, a divisão de dois números naturais. Após, temos um exemplo onde o divisor é positivo, mas o dividendo é negativo.

FIGURA 20 – EXEMPLOS DE PRODUTO ENTRE NÚMEROS INTEIROS



FONTE: Walle (2009, p. 538)

Novamente ressaltamos que não há necessidade em apressar os alunos no processo de abandono dos modelos para sua abstração. Esse processo se dará de forma natural, visando ao pleno domínio das operações e dos conceitos envolvendo os números inteiros e suas operações.

NOTA

Cheia de humor, genialidade e imaginação como encontramos em *Alice no país das maravilhas*, é a paixão clara do autor por números e suas relações.

O diabo dos números envolve uma coleção de ideias interessantes sobre números em 12 capítulos de fácil leitura. Robert, um menino que odeia matemática, se encontra com um "diabo" dos números austucioso em cada um de 12 sonhos. Os sonhos cobrem as complexidades da série de Fibonacci e questões relacionadas a números primos, truques numéricos, números romanos e muito mais. [...]

"Ler qualquer capítulo em voz alta para os alunos nas séries finais do Ensino Fundamental seria 15 minutos bem-investidos, mesmo sem explorar os conceitos adicionais.

As imagens simples adicionam ludicidade à obra." (WALLE, 2009, p. 542).

RESUMO DO TÓPICO 2

- **Quanto aos obstáculos referentes à aprendizagem de números inteiros:**

Os principais obstáculos na aprendizagem dos números inteiros – seus conceitos e suas operações – devem-se à contradição entre o que o aluno aprendeu nas séries iniciais do Ensino Fundamental e os novos conceitos e representações advindos com o ensino dos números inteiros, aos diferentes significados do sinal de diferença, à dificuldade em associar um número à ideia de quantidade e ao significado prático de magnitude do número inteiro.

- **Quanto às regras de sinais em Z:**

Classificar as grandezas em negativas e positivas viabilizou dar significado aos cálculos aritméticos e às regras de sinais nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

As regras de sinais **não podem ser provadas ou demonstradas**, mas podem ser justificadas, viabilizando a compreensão dos alunos e ressaltando que tais regras não foram simplesmente inventadas, mas são decorrentes da necessidade de manter coerência nos princípios ou fundamentos da Matemática.

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico!

As atividades propostas aqui possuem um caráter pedagógico. Procure desenvolvê-las pensando nas dificuldades que um aluno de 7º ano do Ensino Fundamental encontraria e na estratégia que você usaria para saná-las.

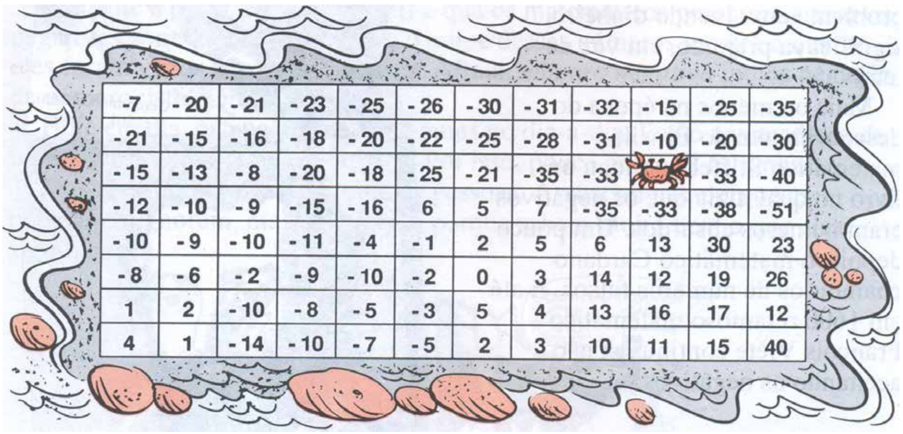
1 No ábaco dos inteiros, desenvolvido por Coelho (2005), você estudou vários exemplos de operações manipulando o material concreto. Um dos exemplos que você estudou foi a operação (-2) × (+3). Explique como se daria a sua comutativa, ou seja, (+3) × (-2). Esboce uma ilustração para tornar-se compreensível.

2 Faça uso do modelo da reta numérica e dos contadores coloridos para calcular:

a) (-10) + (+13) b) (-4) – (-9) c) (+6) – (-7)
d) (-4) × (-3) e) (+15) ÷ (-5) f) (-12) ÷ (-3)
g) (-8) ÷ (+2) h) (+9) ÷ (-3)

3 Examine o sumário de livros didáticos de matemática para 6ª série do Ensino Fundamental de duas ou três editoras diferentes. Usando estes livros como guia, desenvolva um roteiro indicando como estes autores introduzem o ensino das operações com números inteiros relativos.

4 “O siri da figura a seguir anda para a esquerda, para a direita, para frente e para trás, mas não em diagonal. Todo dia ele sai da toca e vai tomar um banho de mar, sempre pelo mesmo caminho. Qual? Ele só passa de um número para outro maior.” (IMENES; JAKUBO; LELLIS, 1992, p. 43).



FONTE: Imenes, Jakubo, Lellis (1992, p. 43)

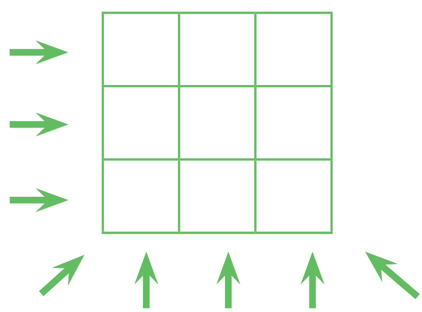
a) Descubra o caminho dele!
b) Que conceitos a criança deverá dominar para resolver esta atividade?

5 Analise a atividade proposta no quadrinho a seguir:

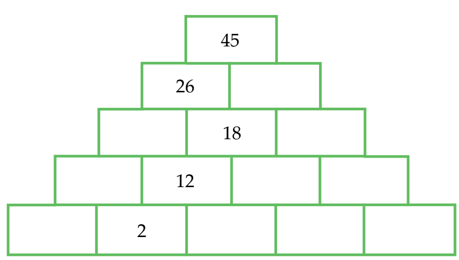
FONTE: Imenes, Jakubo, Lellis (1992, p. 42)

Que conceitos matemáticos estão envolvidos nesta atividade?

6 Complete os quadradinhos com números inteiros de -4 a 4, sem repeti-los. Em todas as direções indicadas, a soma dos três números deve ser zero.



7 Em cada tijolo sem número, escreva um. Da 2ª camada para cima, o número de cada tijolo é a soma dos números escritos nos dois tijolos em que ele se apoia.



8 Indique os conceitos matemáticos que a criança deve dominar para realizar as atividades propostas nas questões 5 e 6. Quais obstáculos epistemológicos ela poderá deparar ao realizar estas atividades?

TÓPICO 3

O USO DE *SOFTWARES* EM MATEMÁTICA

1 INTRODUÇÃO

O uso das novas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem é hoje uma realidade. Suas contribuições se estendem desde a melhoria da compreensão do aluno, favorecendo a individualização da aprendizagem e desenvolvendo sua autonomia até as diversas possibilidades de intervenção docente, seja na introdução de um objeto matemático, na verificação de um teorema ou ainda na aplicação de um conteúdo.

O advento da tecnologia aliada à sala de aula permeia todas as áreas do conhecimento e, em particular, em matemática, sendo essa uma área privilegiada com relação à qualidade de *softwares* destinados ao seu ensino.

Podemos citar, dentre os *softwares* livres: Logo, Dr. Geo, Igeom, R&C, GeoGebra, dentre outros, além do Aplusix, destinado especificamente ao ensino de Álgebra, disponível na versão demonstração por 30 dias, assim como o Cabri-Géomètre e o Cinderella.

Isso sem nos referirmos aos *softwares* pagos, que dominam outra seara, explorando um aspecto mais avançado e não tão direcionado ao ensino, todavia, exímios em qualidade e abrangência de comandos, como MathCad, MatLab, Maple e Mathematica.

Apesar dessa diversidade de recursos, a maioria dos alunos do Ensino Fundamental e Médio não tem acesso a esse tipo de ferramenta, pelo fato de seus professores desconhecerem os materiais existentes ou por não estarem preparados para usá-los.

Neste sentido, preparamos este último tópico do seu Caderno de Estudos em Álgebra com a intenção de familiarizá-lo com estes recursos. Para isso, escolhemos um *software* relativamente simples de manusear e que viabiliza dois campos da Matemática: a Álgebra, nosso objeto de estudo, e a Geometria.

Estamos falando do GeoGebra!

2 INSTALANDO O GEOGEBRA NA PLATAFORMA *WINDOWS*

Inicialmente, baixe o a última versão disponível do *software* GeoGebra, na página oficial do programa, no endereço <http://www.geogebra.org>. Assim que acessar a página, escolha a opção "Portuguese (Brazil)" no canto superior direito da tela.

Acesse a opção *download*, localizada no canto esquerdo da tela e após concluir o *download* do arquivo de instalação, execute os seguintes passos:

1 Abra o ícone do programa GeoGebra, estará localizado na pasta escolhida por você, anteriormente, no processo de *download*.

2 Abra o arquivo GeoGebra, com um clique duplo.

3 Clique em EXECUTAR.

4 Selecione o idioma, e clique no botão OK.

5 Clique em AVANÇAR.

6 Leia o termo de contrato e selecione "Aceito os termos do Contrato de Licença".

7 Clique no botão AVANÇAR em cada tela que for aparecendo.

8 Aguarde o processo de instalação.

9 Clique em AVANÇAR e em seguida em CONCLUÍDO.

10 Finalmente aparecerá o ícone do GeoGebra na área de trabalho do seu computador.

3 CONHECENDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

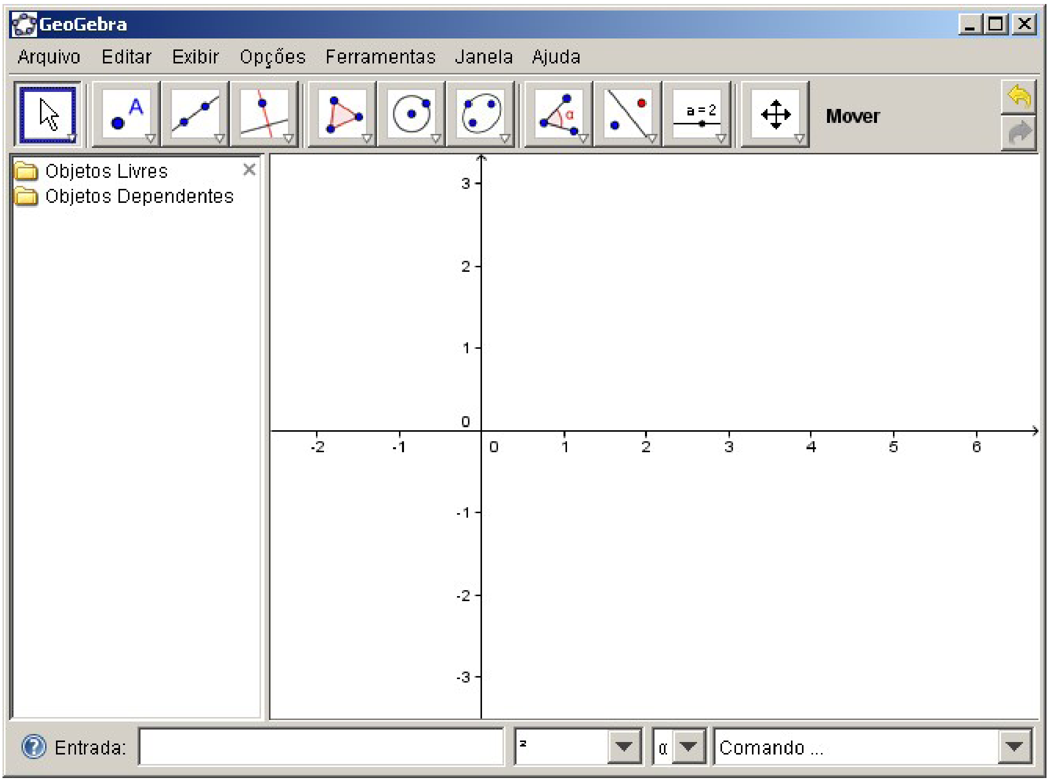
O GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica, uma tendência didática que permite ao usuário construir, explorar e interagir com objetos geométricos e algébricos. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg, na Áustria, no ano de 2001.

Sua interface é de fácil entendimento a partir da disposição de um *menu* e de uma lista desdobrável de 9 ícones que oferecem várias possibilidades de construção.

O *software* oferece a opção de inserir o plano cartesiano na área de trabalho e, sobre ele, uma malha quadriculada, o que possibilita ao aluno uma familiarização com relação aos conteúdos já visto em sala de aula e sua forma de representação.

Ao abrir o *software*, visualizamos a seguinte tela:

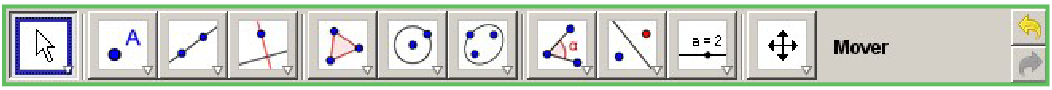
FIGURA 21 – IMAGEM *SOFTWARE* GEOGEBRA



FONTE: Disponível em: <http://stuartcarvalhais.com/site/index.php/utilitarios/41-matematica/62-geogebra>. Acesso em: 28 fev. 2012.

Observe que a janela inicial está dividida em duas: à esquerda a parte algébrica e à direita a parte geométrica, permitindo uma análise muito apurada de problemas de Geometria Analítica, por exemplo, onde o referencial algébrico se faz presente e a visualização geométrica permite uma melhor compreensão.

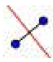
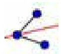
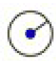
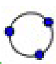
Na tela inicial ainda temos a barra de ferramentas, com 11 ícones, como pode ser visto na figura a seguir, sendo que cada um deles tem várias opções, relacionadas com as funções descritas no desenho do ícone. Estas opções são acessadas clicando na seta do canto inferior direito de cada ícone.



A tabela a seguir apresenta alguns dos principais comandos e o modo de executá-los, bem como suas funções. Porém a melhor forma de descobrir a funcionalidade de cada comando é interagindo com o programa.

TABELA 1 – COMANDOS E FUNÇÃO

Comando	Execução e Função
Novo ponto	Clicar no ícone e depois na parte geométrica. Durante o movimento, as coordenadas aparecem na parte algébrica, se ela estiver ativada.
Interseção de dois objetos	Pode ser selecionando dois objetos e os pontos de interseção serão marcados. A outra opção é clicar na interseção dos objetos, mas neste caso somente este ponto será marcado.
Ponto médio ou centro	Para utilizar esta ferramenta, clique em dois pontos para encontrar o ponto médio ou em um segmento para encontrar seu ponto médio ou ainda em uma secção cônica para obter seu centro.
Reta definida por dois pontos	A partir de dois pontos, clique neste botão e nos pontos dados para construir a reta.
Segmento definido por dois pontos	Dois pontos marcados determinam as extremidades de um segmento, observe que na janela algébrica aparece sua medida.
Segmento com dado comprimento a partir de um ponto	Marca-se a origem do segmento e digita-se a medida desejada para ele, em uma janela que abre automaticamente.
Semi-reta definida por dois pontos	Traça-se uma semirreta a partir do primeiro ponto dado, passando pelo segundo.
Vetor definido por dois pontos	Criam-se dois pontos e traça-se o vetor com origem no primeiro ponto e ponto final no segundo.
Reta perpendicular	Constrói-se uma reta e um ponto fora dela, clica-se na ferramenta e temos uma perpendicular à reta passando por tal ponto. Isso é válido também para segmento e semirreta.

 **Reta paralela**	Mesmo procedimento da reta perpendicular, explicitado acima.
 **Mediatriz**	A partir de um segmento, clica-se nele e na ferramenta e ela vai criar uma perpendicular passando pelo ponto médio.
 **Bissetriz**	Marcando-se três pontos A, B e C, constrói-se a bissetriz do ângulo ABC. Clicando-se sobre as duas retas concorrentes, já traçadas, constroem-se as bissetrizes dos ângulos determinados pelas retas.
 **Tangentes**	Podemos construí-las selecionando uma cônica e um ponto A ou selecionando uma linha e uma cônica.
 **Círculo definido pelo centro e um de seus pontos**	Marcando-se um ponto A e outro B, marca-se o círculo com centro em A, passando por B.
 **Círculo dados centro e raio**	Marca-se o centro A e digita-se a medida desejada para o raio, em uma janela que aparece automaticamente.
 **Círculo definido por três pontos**	Marcam-se três pontos não colineares e traça-se o círculo que passa por estes pontos.
 **Ângulo**	Esta ferramenta permite traçar ângulo entre três pontos; entre dois segmentos; entre duas retas (ou semirretas); entre dois vetores ou ainda interiores a um polígono.
 **Distância**	Essa ferramenta fornece, na janela algébrica, a distância entre dois pontos; duas retas ou entre um ponto e uma reta.

FONTE: Adptado de: <http://cristianopalharini.files.wordpress.com/2009/11/aplicacoes-do-geogebra-ao-ensino-de-matematica.pdf>. Acesso em: 28 fev. 2012.

Existem muitas outras ferramentas que não estão relacionadas na tabela acima, porém são de fácil acesso e ao decorrer da utilização do programa você compreenderá rapidamente como manipulá-las.

Todavia, caso julgue necessário, no *site* oficial do programa há um material de apoio que apresenta passo-a-passo as ferramentas do *software*. Para utilizá-lo, acesse: <http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/help>.

4 ATIVIDADES DE ÁLGEBRA COM O GEOGEBRA

O *software* GeoGebra é muito rico em recursos de Geometria. No entanto, vamos dar ênfase aqui em duas atividades envolvendo, em particular, aspectos algébricos. A primeira refere-se a características da função afim, e a segunda ao desenvolvimento de produtos notáveis.

4.1 ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM

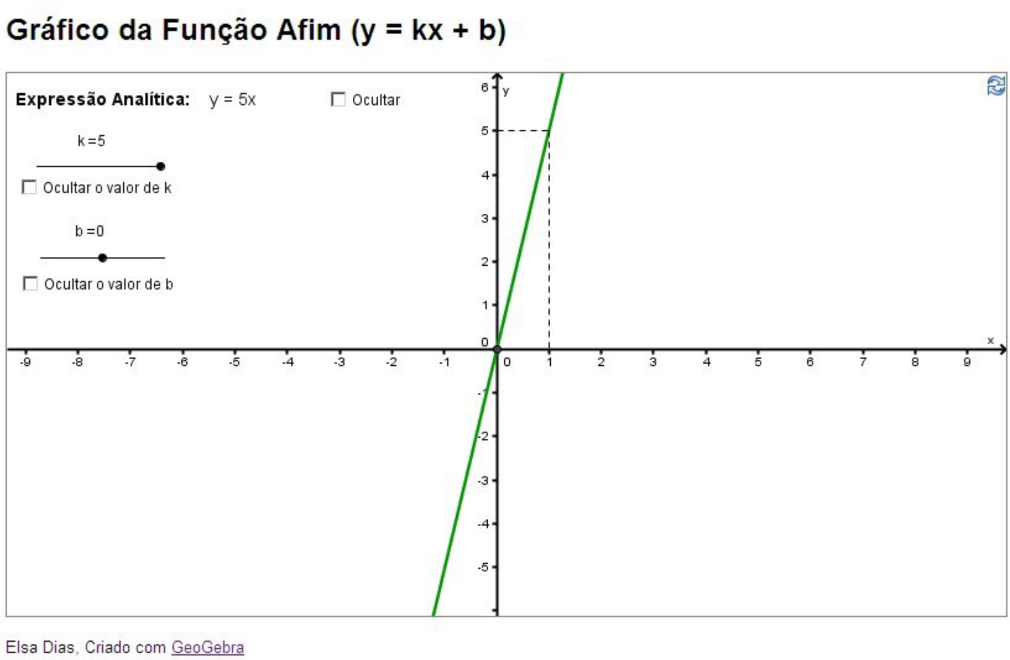
Esta atividade foi desenvolvida por Elsa Maria de Sousa Dias em um Grupo de Estudos do GeoGebra. Seu roteiro completo, incluindo a ficha de trabalho para os alunos, está disponível em: <http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Portuguese#Material_desenvolvido_pelo_G3_-_Grupo_de_Estudos_do_GeoGebra_da_Unesp_.28Rio_Claro.29>.

Trata-se de uma atividade para análise da variação do coeficiente angular e do coeficiente liner de uma função polinomial do 1º grau.

A figura a seguir apresenta o gráfico da função f(x) = 5x. Observe que no canto superior esquerdo há a possibilidade de alterar o coefienciente angular k, num intervalo de -5 a 5, movendo o ponto sobre o segmento de reta. Também há a possibilidade de variação do coeficiente linear b, num intervalo de -5 a 5.

Isto possibilita ao aluno verificar o que ocorre com a reta ao alterar o coeficiente angular e linear, viabilizando a construção de diversos conceitos relacionados à função polinomial do 1º grau.

FIGURA 22 – GRÁFICO DA FUNCÃO AFIM (v = kx + b)



FONTE: Disponível em: <http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Portuguese#Material_desenvolvido_pelo_G3_-_Grupo_de_Estudos_do_GeoGebra_da_Unesp_.28Rio_Claro.29>. Acesso em: 28 fev. 2012.

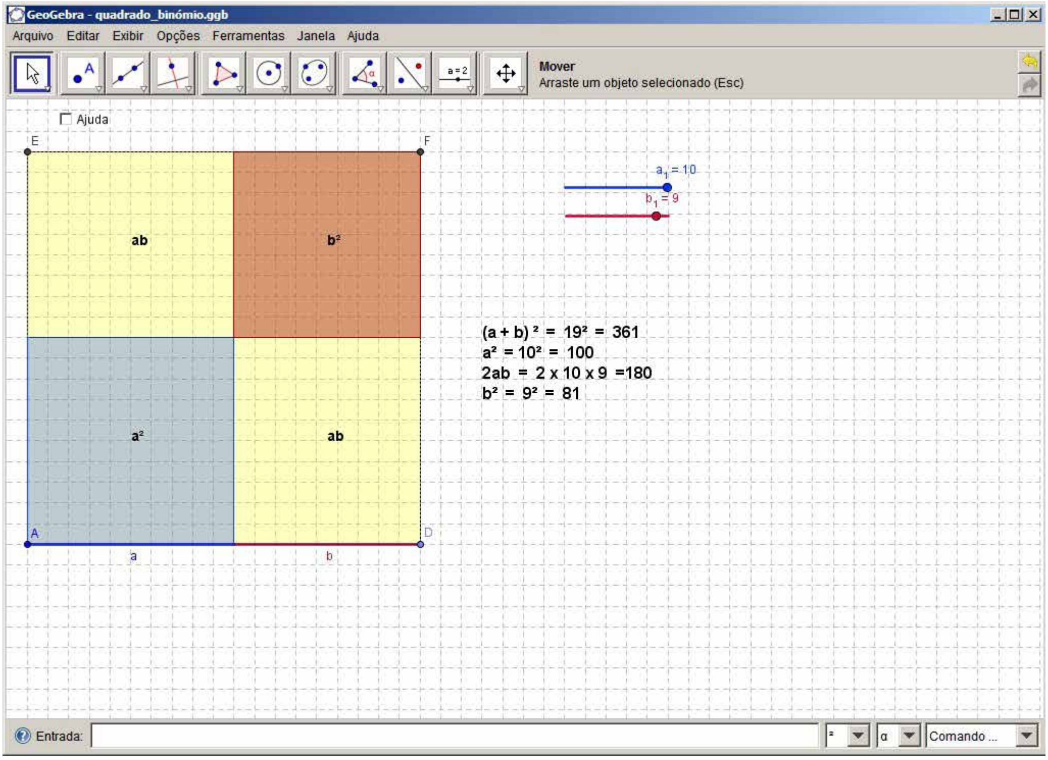
4.2 PRODUTOS NOTÁVEIS

Nesta atividade, elaborada por Isabel Afonso Fernandes, também pertencente ao Grupo de Estudos do GeoGebra, há o desenvolvimento do ponto de vista algébrico e também geométrico, do quadrado da soma do dois termos.

Aos termos a e b do quadrado $(a + b)^2$ são atribuídos valores os quais podem variar numa escala de 1 a 10. Ao variar os valores de a e b, também a área da figura é alterada.

Com esta atividade fica compreensível ao aluno que a expressão $\mathbf{(a + b)^2}$ é equivalente a $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$.

FIGURA 23 – REPRESENTAÇÃO DA EXPRESSÃO $(a + b)^2$ é equivalente a $a^2 + 2ab + b^2$.



FONTE: Isabel Afonso Fernandes. Criado com GeoGebra.

LEITURA COMPLEMENTAR

ALGUMAS CONCEPÇÕES DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA

De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), há três concepções de educação algébrica que, historicamente, vem exercendo maior influência no ensino de matemática elementar. A primeira, chamada de *linguístico-pragmática*[1] ,foi predominante durante o século XIX e estendeu-se até a metade do século XX. A segunda concepção, *a fundamentalista-estrutural*[2], predominante nas décadas de 1970 e 1980, trouxe consigo uma nova forma de interpretar a álgebra no ensino, tendo por base as propriedades estruturais, que serviam para fundamentar e justificar as passagens do transformismo algébrico. A terceira concepção - a *fundamentalista-analógica* - procura fazer uma síntese entre as duas anteriores, pois tenta recuperar o valor instrumental da álgebra e preserva a preocupação fundamentalista, só que não com base nas propriedades estruturais, mas, sim, através do uso de modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou mesmo figuras geométricas) ou físicos (como a balança) que visualizam ou justificam as passagens do transformismo algébrico.

O ponto problemático e comum entre essas três concepções, segundo Fiorentini et al. (1993), é que elas praticamente reduzem o ensino da álgebra aos seus aspectos lingüísticos e transformistas, dando mais ênfase à sintaxe da linguagem algébrica que ao pensamento algébrico e seu processo de significação (a semântica). Em outras palavras, as três concepções enfatizam o ensino de uma linguagem algébrica já constituída, priorizando o domínio, por parte do aluno, de habilidades manipulativas das expressões algébricas. Além disso, a álgebra não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas. Ela é, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo.

Essa análise nos desafia a repensar o ensino da álgebra trazendo como foco de reflexão a relação entre pensamento e linguagem. Tradicionalmente o ensino da álgebra se sustenta na crença de que o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal ou através da manipulação da linguagem simbólica da álgebra. Para nós, entretanto, tanto do ponto de vista histórico quanto cognitivo, a linguagem algébrica é também resultado de uma forma especial de pensamento (FIORENTINI ; MIORIM, 1993). Em cada época, vimos surgir, para expressar o pensamento algébrico, uma linguagem possível e integrada historicamente à cultura de uma determinada comunidade de prática.

1- Esta concepção entendia que o papel do ensino da álgebra era fornecer um instrumental técnico (superior ao da aritmética) para a resolução de equações ou de problemas equacionáveis. Para o aluno adquirir essa capacidade era considerado necessário e suficiente, primeiro, dominar, ainda que de forma mecânica, as técnicas requeridas pelo transformismo algébrico (sintaxe). [...]

2- Esta concepção entendia que o papel do ensino da álgebra era fornecer os fundamentos lógico-matemáticos para toda a matemática escolar (inclusive aqueles tradicionalmente considerados algébricos, como o cálculo algébrico e o estudo das equações). Isto era realizado através da introdução dos campos numéricos, da Teoria dos Conjuntos, das estruturas e das propriedades (fechamento, comutativa, elemento neutro,...), das relações e funções... Assim, o emprego das propriedades estruturais das operações servia para justificar logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico.

Para Vygotsky (1993), pensamento e linguagem são interdependentes, um promovendo o desenvolvimento da outra e vice-versa. Ou seja, no processo ensino-aprendizagem, a linguagem não antecede necessariamente o pensamento, embora a apropriação da linguagem possa potencializar e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A iniciação ao desenvolvimento do pensamento algébrico, portanto, pode ocorrer já desde os primeiros anos de escolarização. Segundo o educador matemático Ken Milton (1989) "aquilo que ensinamos em aritmética e a forma como a ensinamos têm fortes implicações para o desenvolvimento do pensamento algébrico".

A nossa hipótese é que a realização de atividades exploratório-investigativas - que visam levar os alunos a *pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essa regularidade através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente, estabelecer relações entre grandezas variáveis,...* (FIORENTINI; MIORIM ; MIGUEL, 1993, p. 87) – pode ser uma alternativa poderosa para o desenvolvimento inter-relacionado do pensamento e da linguagem algébrica do aluno.

Tomando por base a evolução história da álgebra, esses autores sustentam que, pedagogicamente, o pensamento algébrico pode ser desenvolvido gradativamente antes mesmo da existência de uma linguagem algébrica simbólica. Isso acontece, sobretudo, quando a criança estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invarianças; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente...

Os aspectos descritos neste último parágrafo podem ser considerados caracterizadores do pensamento algébrico. Acreditamos que tais aspectos podem ser mobilizados e desenvolvidos pelos alunos a partir de tarefas exploratórias ou investigativas cuidadosamente planejadas, tendo em vista essa finalidade. [...]

Olhando, entretanto, de outra perspectiva, não podemos deixar de reconhecer que o pensamento algébrico se potencializa à medida que, gradativamente, o estudante desenvolve uma linguagem mais apropriada a ele. Assim, se, de um lado, a introdução precoce e sem suporte empírico a uma linguagem simbólica e abstrata pode funcionar como obstáculo ao desenvolvimento do pensamento algébrico, de outro, o menosprezo ou recusa ao modo simbólico e formal de pensar algebricamente, pode representar também um freio ao pleno desenvolvimento do pensamento algébrico (FIORENTINI ; MIORIM, 1993).

Embora a linguagem ordinária ou retórica seja um meio de comunicação de ideias, a matemática desenvolveu historicamente sua própria linguagem, notadamente escrita e simbólica, para comunicar suas ideias e conceitos. Socas et al. (1996) afirmam que linguagem matemática escrita opera, atualmente, em dois níveis. O primeiro nível seria o *semântico*, no qual as notações e símbolos matemáticos são tratados com significados claros e relativamente precisos, guardando, assim, alguma semelhança com a linguagem retórica ou ordinária. O segundo seria o nível *sintático*, no qual as regras e os procedimentos podem ser operados sem referência direta a seus significados. Assim, priorizar, na prática escolar, apenas um desses níveis pode representar perda do poder matemático para os alunos.

Fiorentini et al. (1993, p. 33-34), visando desenvolver essa natureza interdependente da linguagem e do pensamento matemático, propõem uma *quarta concepção de educação algébrica*, para a qual o ensino de álgebra tem início mediante exploração de *situações-problema relativamente abertas [...] ou problematização de fatos tidos como aritméticos ou geométricos que demandem a construção de generalizações, a representação de número generalizado ou de grandezas incógnitas e variáveis*. Uma segunda etapa seria fazer o percurso inverso; partindo de uma expressão algébrica, tida como pura ou simbólica, o aluno tentaria atribuir múltiplos sentidos ou significações a ela. É somente depois dessa etapa que o transformismo algébrico - ou *cálculo algébrico*, usando a referência do currículo tradicional - ganharia certo destaque na prática pedagógica. Esta seria a terceira etapa, momento que a atenção recai sobre o modo como as expressões algébricas podem ser transformadas em expressões equivalentes e sobre os procedimentos que validam tais transformações. Essas etapas, entretanto, não acontecem necessariamente nesta ordem. Por exemplo, na exploração de padrões de sequências geométricas ou numéricas, as generalizações construídas pelos alunos podem, muitas vezes, já envolver processos de transformação de expressões algébricas. Mas, cabe, contudo, lembrar que, nesse momento, o exercício do transformismo algébrico não é o principal objetivo didático do professor.

FONTE: FIORENTINI, Dario et al. Um estudo das potencialidades pedagógicasdas investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. Projeto de pesquisa desenvolvido com auxílio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) [Processo 03/11233-4]. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>. Acesso em: 20 set. 2010.

RESUMO DO TÓPICO 3

Como resumo deste tópico, segue lista dos principais comandos do GeoGebra:

Comando	Execução e Função
Novo ponto	Clicar no ícone e depois na parte geométrica.
Interseção de dois objetos	Selecione dois objetos e os pontos de interseção serão marcados ou clique na interseção dos objetos.
Ponto médio ou centro	Clique em dois pontos para encontrar o ponto médio ou em um segmento para encontrar seu ponto médio ou ainda em uma secção cônica para obter seu centro.
Reta definida por dois pontos	A partir de dois pontos, clique neste botão e nos pontos dados para construir a reta.
Segmento definido por dois pontos	Dois pontos marcados determinam as extremidades de um segmento.
Reta perpendicular	Constrói-se uma reta e um ponto fora dela, clica-se na ferramenta e temos uma perpendicular à reta passando por tal ponto.
Reta paralela	Mesmo procedimento da reta perpendicular, explicitado acima.
Mediatriz	A partir de um segmento, clica-se nele e na ferramenta e ela vai criar uma perpendicular passando pelo ponto médio.
Bissetriz	Marcando-se três pontos A, B e C, constrói-se a bissetriz do ângulo ABC. Clicando-se sobre as duas retas concorrentes, já traçadas, constroem-se as bissetrizes dos ângulos determinados pelas retas.
Círculo dados centro e raio	Marca-se o centro A e digita-se a medida desejada para o raio, em uma janela que aparece automaticamente.
Ângulo	Esta ferramenta permite traçar ângulo entre três pontos; entre dois segmentos; entre duas retas (ou semirretas); entre dois vetores ou ainda interiores a um polígono.
Distância	Essa ferramenta fornece, na janela algébrica, a distância entre dois pontos; duas retas ou entre um ponto e uma reta.

FONTE: Adaptado de: <http://cristianopalharini.files.wordpress.com/2009/11/aplicacoes-do-geogebra-ao-ensino-de-matematica.pdf>. Disponível em: 28 fev. 2012.

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico!

As atividades abaixo foram elaboradas por Gilmara Teixeira Barcelos e Silvia Cristina Freitas Batista, com a finalidade de mostrar algumas das inúmeras formas de aplicação do *software* GeoGebra como recurso didático.

Estas e muitas outras atividades estão disponíveis em: <http://www.es.cefetcampos.br/softmat/projetotic/download/atividades1/apostilageogebra.pdf>.

Baixe o *software* e tente executá-las.

Bom trabalho!

Atividade 1

a) Abra um arquivo novo.
b) Construa uma circunferência pelo centro e um de seus pontos.
c) Construa um quadrilátero convexo inscrito na circunferência traçada.
d) Marque os ângulos internos do quadrilátero. Na janela algébrica aparecerá a medida destes ângulos.
e) Utilizando recursos do *software*, calcule a soma das medidas dos ângulos opostos, determinados no item anterior (no **Campo de entrada**, solicite a soma das medidas de cada par de ângulos, usando para isso as letras gregas apresentadas numa janela à direita do campo de entrada. Tecle **enter** ao final de cada soma). Compare os resultados encontrados.
f) Movimente um dos vértices do quadrilátero (tendo o cuidado de preservar o quadrilátero convexo) e observe novamente as somas dos ângulos, na janela algébrica.
g) Enuncie, com suas palavras, a propriedade que você observou.

Atividade 2

a) Abra um arquivo novo
b) Crie uma circunferência pelo centro (A) e um de seus pontos (B).
c) Marque dois outros pontos (C e D) da circunferência.
d) Marque um ponto E no interior da circunferência.
e) Trace $\overline{EC}$ e marque a outra interseção desta reta com a circunferência (F).
f) Trace $\overline{ED}$ e marque a outra interseção desta reta com a circunferência (G).
g) Trace $\overline{EC}$, $\overline{ED}$, $\overline{EF}$ e $\overline{EG}$ e observe suas medidas na janela algébrica.
h) Utilizando recursos do *software* determine o produto de $\overline{EC}$ por $\overline{EF}$ e o produto de $\overline{EG}$ por $\overline{ED}$ (no **Campo de entrada** solicite os referidos produtos, utilizando as letras com as quais os segmentos foram nomeados e usando símbolo * para a multiplicação). Compare os produtos obtidos.
i) Movimente um dos pontos da circunferência e observe, novamente, os referidos produtos.
j) Enuncie, com suas palavras, a propriedade que você observou.

REFERÊNCIAS

AYRES, Frank. **Álgebra moderna**. São Paulo: McGraw-Hill, 1974. 362 p. (Schaum).

BARROSO, Juliane Matsubara et al. **Matemática**: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática). Brasília: MEC/SEF, 1997. v. 3.

BONADIMAN, Adriana. **Álgebra no ensino fundamental**: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas. 2007. 298 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - UFRGS, Porto Alegre, 2007.

BOULOS, Paulo. **Pré-cálculo.** São Paulo: Pearson Education, 2001.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Lições de álgebra e análise**. 4. ed. Lisboa: Tipografia Matemática, 1966.

COELHO, Márcia Paula Fraga. **A multiplicação de números inteiros relativos no "ábaco dos inteiros"**: uma investigação com alunos do 7º ano de escolaridade. Dissertação. (Mestrado em Educação) Universidade do Minho, Braga, 2005.

EVARISTO, Jaime; PERDIGÃO, Eduardo. **Introdução à álgebra abstrata**. Maceió: EDUFAL, 2002.

FATEC-SP. Disponível em: <http://www.ednaldoernesto.com.br/FichaAutoAvaliacao/E04_Autoavaliacao_Conjuntos_Numericos_2011.pdf>. Acesso em: 8 mar. 2012.

FEY, J. T.; RICHARD, A. G. **Rethinking the sequence and priorities of High School Mathematics Curricula.** Em the Secondary School Mathematics Curriculum, 1985 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, p. 3-52. Reston, Va.: NCTM, 1985.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A. ; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 10, p. 78-91, 1993.

FIORENTINI, D. ; MIORIM, M. A. **Algumas concepções de educação algébrica**: fundamentos para repensar o ensino da matemática elementar. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 1993, Bauru. **Anais**... Bauru: SBEM, 1993.

GARBI, Gilberto Geraldo. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Makron Books, 1997. 255 p.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 3.

IEZZI, Gelson; DOMINGUES, Higino. **Álgebra moderna**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1982.

______. **Álgebra moderna.** 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

IMENES, Luiz Márcio Pereira; JAKUBO, José Jakubovic; LELLIS, Marcelo Cestari. **Números negativos**. São Paulo: Atual, 1992.

LIMA, Elon Lages. **O princípio da indução matemática**. Disponível em: <http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/inducao.doc>. Acesso em: 22 nov. 2010.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

MAIO, Waldemar de. **Fundamentos de matemática**: álgebra: estruturas algébricas básicas e fundamentos da teoria dos números. São Paulo: LTC, 2007. 192 p.

MARQUIS, June. Erros comuns em álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Orgs.). **As ideias da álgebra**. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

NASCIMENTO, R. A. **Um estudo sobre obstáculos em adição e subtração de números inteiros relativos**: explorando a reta numérica dinâmica. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2000.

PINTO, Renata Anastácio. **Erros e dificuldades no ensino da álgebra**: o tratamento dado por professoras da 7ª série em aula. 1997. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

POMMER, Wagner M. Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em Z. Seminários de Ensino de Matemática – SEMA/FEUSP. Coordenação Prof. Dr. Nilson José Machado. Disponível em <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20100316.pdf>. Acesso em: 25 out. 2010.

RESENDE, Marilene Ribeiro. **Re-significando a disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática na licenciatura**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - PUC, São Paulo, 2007.

SCHEINERMAN, Edward R. **Matemática discreta**: uma introdução. São Paulo: Thomson, 2003.

SILVA, Edgar Alves da. **Introdução do pensamento algébrico para alunos da EJA**: uma proposta de ensino. Dissertação (Mestrado em Educação) - PUC, São Paulo, 2007.

VIEIRA, Ana Cristina; ALVES, Sandra Mara. Grupos. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~anacris/Grupos.pdf>. Acesso em: 7 set. 2010.

VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

WALLE, John A. Van de. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Traduzido por Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ANOTAÇÕES