Sejam M e N são A-módulos, um morfismos de A-módulos (ou homomorfismo de A-módulos),

Obs: São módulos sobre o anel A, comutativo com unidade e M, N tem soma e produto por escalar sobre o anel A.

É uma função $f: M \to N$ que satisfaz:

1) $f(\underbrace{u+v}_{M}) = \underbrace{f(u) + f(v)}_{N}, \forall u, v \in N$

2) $f(\underbrace{av}_{M}) = \underbrace{af(v)}_{N}, \forall a \in A$ e $v \in M$

Obs: 1) Se $A = K$ é um corpo então o morfismo de K-módulo é igual a uma transformação linear em K

2) $f: M \to N$ é um morfismo de A-módulos
$\Longleftrightarrow f(\underbrace{au+v}_{M}) = \underbrace{af(u) + f(v)}_{N}, \forall u, v \in M$ e $a \in A$

Propriedades:

1) $f(0_M) = 0_N$.

2) $f(\underbrace{-v}_{M}) = \underbrace{-f(v)}_{N}, \forall v \in M$

3) $f(\underbrace{u-v}_{M}) = \underbrace{f(u) - f(v)}_{N}, \forall u, v \in M$

Obs: Sejam $u, v \in M$, $u - v = u + (-v)$

Exemplo:

1) Seja M um A-módulo, é claro que $Id_M : M \longrightarrow M$ é $v \longrightarrow v$ um morfismo de A-módulos.

2) Seja N um A-submódulo de M então a inclusão: $f : N \hookrightarrow M$
$v \longrightarrow v$
é um morfismo de A-módulos.

3) Seja $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, é um morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos.
$x \longrightarrow \overline{x}$

$$\pi(ax) = \overline{ax} = a\overline{x} = a\pi(x) \quad \forall a, x \in \mathbb{Z}$$

Logo, π é um morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos

Proposição: Seja $f : M \longrightarrow N$ um morfismo de A-módulos:

a) Se N' é um A-submódulo de N, então $f^{-1}(N')$ é um A-submódulo de M.

b) Se M' é um A-submódulo de M, então $f(M')$ é um A-submódulo de N.

Demo:

a) $0_M \in f^{-1}(N')$. De fato, $f(0_M) = 0_N \in N' \Rightarrow 0_M \in f^{-1}(N')$.
Sejam $u, v \in f^{-1}(N')$ e $a \in A$ quaisquer.

Logo, $f(u), f(v) \in N'$ e como N' é um A-submódulo de N, então:

$$af(u)+f(v) \in N' \to f(au+v) = af(u)+f(v) \in N' \to$$

$$au+v \in f^{-1}(N').$$

b) $0_N \in f(M')$. De fato, $0_N = f(0_M)$ e como $0_M \in M'$, então:

$$0_N = f(0_M) \in f(M').$$

Sejam $u, v \in f(M')$ e $a \in A$, então existem $u_0, v_0 \in M'$ tais que $u = f(u_0)$ e $v = f(v_0)$. Visto que M' é um A-submódulo de M, então: $au_0 + v_0 \in M'$.

Logo, $au+v = af(u_0) + f(v_0) = f(\underbrace{au_0+v_0}_{\in M'}) \in f(M')$

<u>Corolário</u>: Seja $f: M \to N$ um morfismo de A-módulos. Então:

a) $\text{Nuc} f = \{v \in M \mid f(v) = 0_N\}$ é um A-submódulo de M;

b) $\text{Im} f = f(M)$ é um A-submódulo de N.

<u>Dem</u>: a) Segue imediatamente do fato de $\text{Nuc} f = f^{-1}(0_N)$ e 0_N ser um A-submódulo de N.

b) Segue imediatamente do fato de M ser um A-submódulo de si mesmo.

Proposição: Seja $f: M \to N$ um morfismo de A-módulos. Então f é injetiva se, e somente se, $\ker f = \{0_N\}$.

Demo: i) $\{0_M\} \subseteq \ker f$. Agora a inclusão.

Seja $u \in \ker f$, logo $f(u) = 0_N = f(0_M)$.

Como f é injetiva então $u = 0_M$. Portanto, $\ker f \subseteq \{0_M\}$.

ii) Sejam $u, v \in M$ tais que $f(u) = f(v)$, logo

$f(u-v) = f(u) - f(v) = 0_N \to u - v \in \ker f = \{0_M\} \to u - v = 0_M \to u = v$. Portanto a f é injetiva.

Proposição: Se $f: M \to N$ e $g: N \to P$ são morfismos de A-módulos, então $g \circ f: M \to P$ é um morfismo de A-módulos.

Demo: Sejam $u, v \in M$ e $a \in A$, então: $g \circ f(au+v) =$

$g(\underbrace{f(au+v)}_{M}) = g(\underbrace{af(u) + f(v)}_{N}) =$

$a\, g(f(u)) + g(f(v)) = \underbrace{a(g\circ f(u)) + g\circ f(v)}_{P}$

Portanto, $g \circ f$ é um morfismo de A-módulos.

Definição: Seja $f: M \to N$ um morfismo.

Dizemos que f é um <u>isomorfismo</u> de A-módulos se existir $g: N \to M$ morfismo de A-módulos tal que $g \circ f = id_M$ e $f \circ g = Id_N$.

<u>Proposição</u>: seja $f: M \to N$ um morfismo de A-módulos. Então f é um isomorfismo de A-módulos $\Longleftrightarrow$ f é uma bijeção.

<u>Demo</u>: i) imediato, $g \circ f = Id_M$ e $f \circ g = Id_N$

ii) Como f é uma bijeção então existe uma função $g: N \to M$ tal que $g \circ f = id_M$ e $f \circ g = id_N$.

E g é um morfismo de A-módulos.

Sejam $u, v \in N$ e $a \in A$, existem $u_0, v_0 \in M$ tais que $u = f(u_0)$ e $v = f(v_0)$. Logo, $g(u) = u_0$ e $g(v) = v_0$.

Assim $g(au + v) = g(af(u_0) + f(v_0)) = g(f(au_0 + v_0)) = id_M(au_0 + v_0) = au_0 + v_0 = a g(u) + g(v)$. Logo g é um morfismo de A-módulos. Portanto, f é um isomorfismo de A-módulos.

<u>Corolário</u>: Se $f: M \to N$ é um morfismo injetivo de A-módulos então $M \simeq f(M)$. Em particular, M é isomorfo a um A-submódulo de N.

Em particular, M é isomorfo a um A-submódulo de N.

Demo: Como f é injetiva, então:

$$\begin{aligned} f: M &\longrightarrow f(M) \\ v &\longrightarrow f(v) \end{aligned}$$

é um morfismo bijetivo de A-módulos. Então f é um isomorfismo de A-módulos.

Seja N um A-módulo e seja X um conjunto não vazio qualquer. $X \neq \emptyset$.
Considere o conjunto:

$$F(X,N) = f: X \longrightarrow N,\ f \text{ é função}$$

Em $F(X,N)$ defina:

$$\begin{aligned} +: F(X,N) \times F(X,N) &\longrightarrow F(X,N) \\ (f,g) &\longrightarrow f+g: X \longrightarrow N \\ & \qquad\quad x \longrightarrow f(x)+g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot: A \times F(X,N) &\longrightarrow F(X,N) \\ (a,f) &\longrightarrow af: X \longrightarrow N \\ & \qquad\quad x \longrightarrow a.f(x) \end{aligned}$$

elemento neutro: $0_{F(X,N)}: X \longrightarrow N$
$x \longrightarrow 0_N$

$$f + 0_{F(X,N)} = f,\ \forall f \in F(X,N)$$

$$\begin{aligned} -f: X &\longrightarrow N \\ x &\longrightarrow -(f(x)) \end{aligned}$$

, então: $f+(-f) = 0_{F(X,N)}$

Sejam M e N A-módulos, seja:

$Hom_A(M,N) = \{ f: M \to N \mid f$ é um morfismo de A-módulos $\}$

$Hom_A(M,N) \subseteq F(M,N)$

<u>Proposição</u>: $Hom_A(M,N)$ é um A-módulo com as operações usuais.

<u>Demo</u>: Basta mostrar que $Hom_A(M,N)$ é A-submódulo de $F(M,N)$.

i) $0_{F(M,N)} \in Hom_A(M,N)$

De fato, sejam $u, v \in M$ e $a \in A$, e:

$$0_{F(M,N)}(au+v) = 0_N = a0_N + 0_N = a\,0_{F(M,N)}(u) + 0_{F(M,N)}(v)$$

ii) Sejam $f, g \in Hom_A(M,N)$ e $a \in A$, sejam $u, v \in M$ e $\alpha \in A$. Então:

$(af+g)(\alpha u+v) = af(\alpha u+v) + g(\alpha u+v) = a(f(\alpha u+v)) + g(\alpha u+v) = a(\alpha f(u) + f(v)) + \alpha g(u) + g(v) = a\alpha f(u) + af(v) + \alpha g(u) + g(v) = \alpha(af(u) + g(u)) + (af(v) + g(v)) =$

$\alpha((af+g)(u)) + (af+g)(v) \to af+g \in Hom_A(M,N)$

Proposição: Sejam M, M', N A-módulos.

a) Para cada morfismo de A-módulos $\alpha : M' \to M$ a função $\bar{\alpha} : Hom_A(M,N) \to Hom_A(M',N)$

$$f \mapsto f \circ \alpha$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] & M' \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[dl, "f\circ\alpha"] \\ N & \end{tikzcd}$$

é um morfismo de A-módulos.

b) Se $\alpha : M' \to M$ e $\beta : M'' \to M'$ são morfismos de A-módulos então $\overline{(\alpha\circ\beta)} = \bar{\beta} \circ \bar{\alpha}$,

$$\begin{tikzcd} M'' \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend right, "\alpha\circ\beta"'] & M' \arrow[r, "\alpha"] & M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Hom_A(M',N) \arrow[r, "\bar{\beta}"] & Hom_A(M'',N) \\ Hom_A(M,N) \arrow[u, "\bar{\alpha}"] \arrow[ur, "\overline{(\alpha\circ\beta)}"'] & \end{tikzcd}$$

c) $\overline{id_M} = id_{Hom_A(M,N)}$

$Hom_A(-,N) : Mod_A \to Mod_A$
$M \mapsto Hom_A(M,N)$
$\alpha \mapsto \bar{\alpha}$

é um funtor contra-variante

Demo: a) Sejam $f, g \in Hom_A(M,N)$ e $a \in A$.

$\bar{\alpha}(af+g) = a\bar{\alpha}(f) + \bar{\alpha}(g)$, de fato para todo $v \in M'$, temos:

$\bar{\alpha}(f+g)(v) = ((af+g)\circ\alpha)(v) = (af+g)(\alpha(v)) = a(f\circ\alpha)(v) + g\circ\alpha(v) = (a\bar{\alpha}(f))(v) + (\bar{\alpha}(g))(v) = (a\bar{\alpha}(f) + \bar{\alpha}(g))(v)$

Logo:

$$\bar{\alpha}(af+g) = a\bar{\alpha}(f) + \bar{\alpha}(g)$$

b) Seja $f \in Hom_A(M,N)$. Assim:

$$\overline{(\alpha\circ\beta)}(f) = f\circ(\alpha\circ\beta) = (f\circ\alpha)\circ\beta) = (\bar{\alpha}(f))\circ\beta = \bar{\beta}(\bar{\alpha}(f)) = \bar{\beta}\circ\bar{\alpha}(f).$$

c) Se $f \in Hom_A(M,N)$ então $\overline{id_M}(f) = f\circ id_M = f = id_{Hom_A(M,N)}(f)$

Proposição: Seja A um anel.

a) Para cada A-módulo M, $\varphi_M : Hom_A(A,M) \to M$, $\alpha \mapsto \alpha(1_A)$

$Hom_A(A,M) \cong M$

Cuja inversa é: $\varphi_M^{-1} : M \to Hom_A(A,M)$

$$v \longmapsto \varphi_M^{-1}(v) : A \to M$$
$$a \longmapsto av$$

b) Para todo $f : M \to N$ morfismo de A-módulos, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_A(A,M) \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "\bar{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[d, "f"] \\
Hom_A(A,N) \arrow[r, "\varphi_N"'] & N
\end{tikzcd}$$

$$f\circ\varphi_M = \varphi_N\circ\bar{f}$$

Demo: a) φ_M é um morfismo de aneis, de fato, sejam $\alpha, \beta \in Hom_A(A,M)$ e $a \in A$. Então:

$$\varphi_M(a\alpha+\beta) = (a\alpha+\beta)(1_A)$$

$= a\alpha(1_A) + \beta(1_A)$
$= a\,\varphi_M(\alpha) + \varphi_M(\beta)$

Seja $\gamma = \varphi^{-1}_M : M \to Hom_A(A, M)$, então

$\gamma \circ \varphi_M = id_{Hom_A(A,M)}$ e seja $\alpha \in Hom_A(A, M)$.
Logo, $\gamma \circ \varphi_M(\alpha) = \gamma(\alpha(1_A))$

Seja $a \in A$ qualquer, logo $\gamma(\alpha(1_A))(a) =$

$a.\alpha(1_A)$, mas $\alpha : A \to M$, $\alpha(a.1_A) = \alpha(a)$.

Portanto, $\gamma(\alpha(1_A)) = \alpha \to \gamma \circ \varphi_M(\alpha) = \alpha$

• $\varphi_M \circ \gamma = id_M$, de fato seja $v \in M$ qualquer.
Logo:
$\varphi_M \circ \gamma(v) = \varphi_M(\gamma(v)) = (\gamma(v))(1_A) = 1_A . v$

$= v$, portanto: $\varphi_M \circ \gamma = id_M$.

b) Seja $\alpha \in Hom_A(A, M)$, então:

$f \circ \varphi_M(\alpha) = f(\varphi_M(\alpha)) = f(\alpha(1_A)) = (f \circ \alpha)(1_A) =$

$\bar{f}(\alpha)(1_A) = \varphi_N(\bar{f}(\alpha)) = \varphi_N \circ \bar{f}(\alpha)$

Portanto, $f \circ \varphi_M = \varphi_N \circ \bar{f}$.