al Alja M Um Z-módulo fivitamente grado Xal que am ±0 para todo a E Z × e m E M×. Motharque M é um Z-modulo livre. Como Mé fivitamente quado, entro existe um X E M fivito tal que M= AX. Este X é um A-gerador de M. Min temos que Méjum A-módido livre, A i somente se, admite pelo menos ung bose. Como Temos a E Z*, ou Plja, & sem o zeno, e M&, ou sija é um conjusto sem o zeno. Entad a m + 0, para Foch on E Z* e m EMA. Como Z#é um anul, métad como todo apel é um módulo sobre si mesono, tomamos a soma direta de Z# com ele momo a Il vezes". Se I=21,..., n é entaw: $T = Z^{*}(T) = Z^{*}(T) = Z^{*}(T)$ Veorema: Sija M um t-módulo, entañ

Mé livre, se e somente se, admite
pelo menos uma t-base. il Por hipstere existe um conjunto I+b tal que M = ZI então existe um isomorfis mo de Z-modulo: p; zII — DM

Il tomarmos a proposição: (J:M-DN Monnorfismo de A-modello, 15 é A-6 ase de M então (15) é uma A-base de N. Continuando se tomamo: S= leil 1:ET & é uma base de ZII então y (\$1 é uma x-base de M. ii) Supondo agora que Madmite uma 1-bare 5, considere: S=3Vic. e considere a função: ics $f: Z^{(I)} \longrightarrow M$ $(\pi i)_{i \in I} \longrightarrow Z \times i \vee i = Z \times i \vee i$ $f \notin Mm \text{ morfis mo de } Z \text{-modulos, e}$ $Supam \quad \chi = (\pi i) \quad \text{, } y \text{-}(y i) \quad \in Z \text{-} e$ $\alpha \in A. \quad \text{Entaō}:$ flanty = flani tyil. = $\sum_{j \in I} (ax_j + y_j) V_j = a \sum_{j \in I} x_j u_j + \sum_{j \in I} y_j u_j = a \sum_{j \in I} x_j u_j + \sum_{j \in I} x_j u_j = a \sum_{j \in I} x_j u$ 1) I é injetiva, entao seja N= (Vil E mucq, seja i et greafgerer se its i e suporte M entao Ni=Oz.

Supondo que i E suporte (2), logo; $O_{M} = f(x) = \sum_{l \in suportels}$ a como Sé li, entao Ne=OzticI-D 2) I é sobre je tiver, Aja vEM e como 5 lé um z-grador de M, entao: V=2,V1+,,,+«NN», Com:«j,...,»NEZ «ij,...,inEt. Defini-se $\chi = (\chi_i)$ dado por: $\chi_i = \chi_i = \chi_$ logo: $Q(N) = \sum xivi = 0$ para tocho os indices fora de l, e portanto se tomarmos elementor em Z# e M# podemos des considerar este caso. Entao Lemos somente o outro caso. Portanto, P: A - DM, e um Bomor fils mo de Z- moduelos, e M e um Z-mothelo

Tomamos um Zgo. 10, M = M+M+,,, +M = 5 Dude 10 EZ e Zgo eM Entao Zo wao e Z-mó dulo line. Quitro exemplo: $f = \frac{Z}{4Z}$, entao $f^2 = 40A$ e um A-mó dulo leve. Asim:	Mre, possii uma base.
40.M = M+M++M=0 $40.M=50$	b) Mostrar com um axemplo, que va parte a) que a conclusão poele sur falsa se M vão satals faz a condição de que am +0 para Aodo a coix e m EM.
Pove $SO \in \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_{10} \in \mathbb{M}$ Entaō \mathbb{Z}_{10} was é \mathbb{Z} -módulo line. Quitro usemplo: $f = \mathbb{Z}_{10}$ entaō $f^2 = fOA$ é um A -módulo line. Asim: $\mathbb{Z} \in A_{10} = \mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}_{10}$ $\mathbb{Z} \in A_{10} = \mathbb{Z}_{10}$ $\mathbb{Z} \in A_{10} = \mathbb{Z}_{10}$ Porém: $\mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}_{10}$	Tomamos um Zjo.
Entaō Z_{D} wao é Z -mó dulo line. Outro exemplo: $f = \frac{Z}{4Z}$, entaō f^{2} = ADA é um A -mó dulo line. Asim: $Z \in A$, $Z \neq Q = Q_{A}$ $V = Q_{1}Z$) $\in A^{2}$, e $V \neq Q_{A}^{2}$ Porém: $Z \cdot V = (Z \cdot Z $)
$ \frac{1}{2} \in A $ $ \sqrt{2} + 0 = 0 $ $ V = (2,2) \in A^{2}, e V \neq 0 $ $ V = (2,2) = (5,0) = 0 $ $ V = (2,2,2,2) = (5,0) = 0 $	Entaō Zp vao é Z-môdulo livre.
Porémi 2.V=(2.2, 2.2)=(0,0)=0A2	Outro exemplo: $f = Z$, entato $f^2 = ADA$ é un A-módulo levre. Assim:
	$\frac{1}{2} \in A$ $12 \pm 0 = 0_A$ $12 \in A$ $12 \in A^2$ $12 \in A^2$ $12 \in A^2$
Mothe com um exemplo, que va parte al que a con cleisão pode ser foisa se M vão por fivi tamente operado.	
	Motre com um exemplo, que va parte al que a con clusão pode ser forsa se M vão Tor firir tamente oprado.

Tomamos o Zp, onde Zp-modulo. Temos que 1 E base de Tp, entas: a.1=027 a=0, mos acz « e m e z* Entaō Zp-modulo com psendo primo de ve ser finestamente quado.