Seja $S = \left\{ \frac{a}{5^t} \in \mathbb{Q} \mid a, t \in \mathbb{Z}, t \geq 0 \right\}$

a) Mostre S é um domínio.

Para S ser domínio temos que 5^t seja primo, então t deve ser igual a 1! Portanto para S ser um domínio temos que $t=1$ e a cada 2 elementos S não tenha divisores de zero.

Tomamos um ideal (a) da forma (5^t) e $\left(\frac{a}{5^t}\right) = (a_{5^t})$ e temos que se:

$\left(\frac{a}{5^t}\right)$ é domínio, então $\nexists\, \bar{a}, \bar{b} \in (a_{5^t}) \setminus \{0\}$ tais que $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$.

Se 5^t é composto então $5^t = c \cdot d$ então (a_{5^t}) não é domínio e $\bar{a} \neq \bar{0}$ e $\bar{b} \neq 0$, sendo $ab = 0$.

Se $5^t = p$ e p um primo então $a_p = \frac{(a)}{(p)}$

Assim se $\bar{a}\bar{b} = 0 \rightarrow p \mid ab$ e $p \mid a$ ou $p \mid b$

Portanto $\bar{a} = 0$ ou $\bar{b} = 0$, e conclui-se que S é um domínio.

b) Determine as unidades de S.

A unidade de um elemento é dado pelo seu inverso, portanto:

$$\frac{a}{s^t} \cdot \left(\frac{a}{s^t}\right)^{-1} = 1 \rightarrow \frac{a}{s^t} \frac{s^{-t}}{a^{-1}} = 1.$$

Então as unidade de cada elemento de S é dado por $\frac{s^t}{a} \in \mathbb{Q}$.

c) É S um domínio de fatoração única? Justifique.

Teorema 10.12: Temos R sendo um domínio de ideal principal. Todo elemento não unidade e diferente de zero de R é o produto de elementos irredutíveis, e esta fatoração é única até seus associados, isto é, se:

$$p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s$$

Com cada p_i e q_j irredutível, então $r = s$ e, depois nos organizar e reordenar se necessário:

p_i é associado de q_i p/ $i = 1, \ldots, r$

Tomamos $\left(\frac{a}{s^t}\right)$ como um DIP, e tomamos: $\frac{a_1}{s^{t_1}}$, $\frac{a_2}{s^{t_2}}$ e $\left(\frac{a}{s^t}\right)$, sendo ambos diferentes de zero e não unidades.

Então temos:

$\frac{a_i}{s^{t_j}}$, onde $i, j = 1, \ldots, N$

Logo como um domínio euclidiano é dado por uma função e 2 elementos do domínio:

$$f(a_1) \leq f(a_1 . a_2)$$

$$f\left(\frac{a_1}{5^{t_1}}\right) \leq f\left(\frac{a_1}{5^{t_1}} \cdot \frac{a_2}{5^{t_2}}\right)$$

$$\frac{1}{\cancel{5^{t}}} f(a_1) \leq \frac{1}{\cancel{5^{t_1}} . 5^{t_2}} f(a_1 a_2)$$

$$f(a_1) \leq \frac{1}{5^{t_2}} f(a_1 a_2)$$

$$5^{t_2} f(a_1) \leq f(a_1 a_2)$$

Somente é verdadeiro se a_1 ou a_2 for:

$$a_1 \geq 5^{t_2} \text{ ou } a_2 \geq 5^{t_2}$$

Portanto não é valido para todos os casos. Então não D.E.

Mas como $\frac{a}{5^t} = \frac{1}{5^t} . a$ e $a, t \in \mathbb{Z}$

Temos como a é decomposto em primos e 5^t somente em 5, temos que a decomposição não é única, e não é domínio de fatoração única.