3.21 $\;{}_R M$ R-módulo. $A, B \in M$

$F, G \sqsubseteq M \qquad \alpha \in Z(R)$ (centro) Então

ⓐ $F \cap G \sqsubseteq M$

v, w $\qquad v, w \in F \Rightarrow v+w \in F$
$\qquad\qquad v, w \in G \Rightarrow v+w \in G$ $\Big\} \Rightarrow v+w \in F \cap G$

$v \in F \cap G \qquad av \in F$
$a \in R \qquad\;\;\; av \in G \quad \Rightarrow \; av \in F \cap G$ ✓

ⓑ $F \cup G \sqsubseteq M \iff F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$

($\Leftarrow$) obvio pois $F \subseteq G \Rightarrow F \cup G = G \sqsubseteq M$

($\Rightarrow$) Suponhamos que $F \not\subseteq G$ e $G \not\subseteq F$

Logo existem $v \in F \setminus G$
$\qquad\qquad\quad w \in G \setminus F$

logo $\quad v \in F \cup G$
$\qquad\quad\; w \in G \cup F \quad \Rightarrow \quad v+w \in F \cup G$

logo $\quad v+w \in F$ ou $v+w \in G$

Como $v \in F \Rightarrow w = \underset{F}{(v+w)} - \underset{F}{v} \in F$ contradição

Como $w \in G \Rightarrow v = (v+w) - w \in G$ contradição

(c) $F+G \subseteq M$

$v_1+w_1 \in F+G$

$v_2+w_2 \in F+G$

$\Rightarrow (v_1+w_1)+(v_2+w_2) = \underbrace{(v_1+v_2)}_{\in F} + \underbrace{(w_1+w_2)}_{\in G}$

v_1

$a \in R$ $\qquad a(\underbrace{v+w}_{\in F+G}) = a\underbrace{v}_{\in F} + a\underbrace{w}_{\in G}$ ✓

(d) $\alpha F \subseteq M$

$\alpha v, \alpha w \in \alpha F$ $\qquad \alpha v + \alpha w = \alpha(\underbrace{v+w}_{\in F}) \in \alpha F$

$a \in R$ $\qquad \underbrace{a}_{\in R}(\underbrace{\alpha v}_{\in \alpha F}) = (a\alpha)v = (\alpha a)v$

$= \alpha(av) \in \alpha F$

(e) $\underbrace{\langle A \rangle}_{v} + \underbrace{\langle B \rangle}_{w} = \langle A \cup B \rangle$

$(r_1a_1 + r_2a_2 \dots + r_na_n) + (s_1b_1 + s_2b_2 + \dots + s_mb_m)$

onde $r_j \in R$ $\quad s_j \in R$ $\quad a_j \in A$ $\quad b_j \in B$

Mas $\underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_{\in A}\ \underbrace{b_1 b_2 \dots}_{\in B} b_n \in A \cup B$

$r_1a_1 \dots + r_na_n + s_1b_1 + \dots + s_mb_m \in \langle A \cup B \rangle$

Como isso provamos que $\langle A \rangle + \langle B \rangle \overset{?}{\subseteq} \langle A \cup B \rangle$

$R = 2\mathbb{Z}$ anel sem unidade

$R^2 = \{(a,b) \mid a,b \in 2\mathbb{Z}\}$ R-módulo

ψ

$(a_1,b_1), (a_2,b_2) \ldots (a_s,b_s)$

$c_1(a_1,b_1) + \cdots + c_s(a_s,b_s)$

$R^2 \ni (2,0), (0,2), ($

$a,b \in 2\mathbb{Z}$

$a(2,0) + b(0,2) = (2a, 2b)$

$\langle R^2 \rangle_R \neq R^2$ Pois R não é unitário

3.2.6 Mostre ${}^I R$ é um ${}^I R$-módulo com base

${}^I R = \{ f : I \to R \}$??

$\in$

f, g $\quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $x \in I$, $f(x)+g(x) \in R$

$(f \odot g)(x) = \underline{f(x)} \cdot \underline{g(x)}$ $\quad ({}^I\mathbb{R}, +, \odot)$

$+$ cumprem as propriedades associativa
comutativa
inverso

$\odot$ cumpre as propriedades associatividade

${}^I\mathbb{R}$ é um ${}^I\mathbb{R}$ modulo

modulo $\quad$ anel

Para cada $a \in I$ $\quad f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = a \\ 0 & \text{se } x \neq a \end{cases}$

$\in {}^I\mathbb{R}$

$\{f_a\}_{a \in I} \subseteq {}^I\mathbb{R}$ são LI

$\underbrace{f_{a_1}\, f_{a_2} \ldots f_{a_n}}$ um conjunto finito

$g_1 f_{a_1} + g_2 f_{a_2} \ldots + g_n f_{a_n} (x) = 0 \quad \forall x$

em particular $x = a_j$ temos

$g_1(a_j)\, f_{a_1}(a_j) + \ldots + g_j(a_j) f_{a_j}(a_j) + \ldots g_n(a_j)\, f_{a_n}(a_j) = 0$

$\quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0$

$g_j(a_j) = 0$

A parte da Base precisamos pensar!!!

$R \times R' = \{(a,b) \mid a \in R, b \in R'\}$

é um anel

$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$

$(a,b) \cdot (a',b') = (a \cdot a', b \cdot b')$

$R \times R'$ pode ser visto como um $R \times R'$-módulo (α, β)

$(\alpha, \beta) \bullet (a,b) = (\alpha a, \beta b)$

$\{(1,0), (0,1)\}$ não são L.I.

$(0\ a) \cdot (1,0) + (b\ 0) \cdot (0\ 1) = (0,0)$

$(1,1)$ é base

$(a,b) = (a,b) \cdot (1,1)$

anel $R \times R'$ Modulo $R \times R'$

R anel pode ser visto $\underline{R}$-módulo
se R unitário

$R = \langle 1 \rangle_R$ 1 é base

(b) $\underline{R \times \{0_{R'}\}} \subset \underline{R \times R'} = M$ é um $\underline{R \times R'}$-módulo

fechado com $+$
fechado por produto por $R \times R'$

$(r_1, 0) + (r_2, 0) = (r_1 + r_2, 0)$ ✓

$\underset{R \times R'}{\underset{\in}{(a,b)}} \cdot \underset{M}{\underset{\in}{(r,0)}} = (ar, b \cdot 0) = (ar, 0)$ ✓

(c) O submódulo $R \times \{0_{R'}\}$ não tem base

(1,0) não é L.I.

$\underset{R \times R'}{\underset{\in}{(0,a)}} \underset{R \times \{0\}}{\underset{\in}{(1,0)}} = (0,0)$ mas $(0,a)$ não é $(0,0)$

(1,0) gera $R \times \{0_{R'}\}$ mas (1,0) não é L.I.

$M \quad M'$ R-módulo à esquerda

$$\underbrace{Mor(M, M')}_{} = \{ \phi : M \to M' \mid \phi \text{ é um morfismo de R-módulos} \}$$

Tem estrutura de R-módulo

ϕ_1, ϕ_2 $\quad$ $\phi_1 : M \to M'$, $\phi_2 : M \to M'$ $\rightarrow (\phi_1 + \phi_2)(m)$ ✓

$= \phi_1(m) + \phi_2(m)$

$\phi \rightsquigarrow -\phi$ tal que $\phi + (-\phi)$ é o morfismo 0

$a \in R$ $\quad$ $a\phi : M \longrightarrow M'$ é morfismo

$x \mapsto a\phi(x)$

3.32 (b) $Mor({}_R M \; {}_R N_S)$ é um S-módulo à direita

$(\phi + \psi)(m) = \phi(m) + \psi(m)$ ✓

$\phi \in Mor \quad s \in S \quad \phi s(\underset{\in M}{m}) := \phi(m) \cdot \underset{\in N}{s}$

$\phi s(m_1 + m_2) = \phi(m_1 + m_2) \cdot s = (\phi(m_1) + \phi(m_2)) \cdot s$

$= \phi(m_1) s + \phi(m_2) s = \phi s(m_1) + \phi s(m_2)$

$$\boxed{\phi s}(rm) = \phi(rm)\cdot s = (r\,\phi(m))\cdot s$$

$$= r\,(\phi(m)\cdot s) = r\,\boxed{\phi s}(m)$$

$$\Rightarrow \phi s \in Mor({}_RM, {}_RN_S)$$

(a) $\boxed{Mor(M_S \;\; {}_RN_S)_S}$ é R-módulo

ψ

$$\phi(m\cdot s) = \phi(m)\cdot s$$

$$r\cdot\phi := ? \qquad (r\phi)(m) := r\cdot\underbrace{\phi(m)}^{\in N}$$

$$(r\cdot\phi)(m_1+m_2) = r(\phi(m_1+m_2))$$

$$= r(\phi(m_1)+\phi(m_2))$$

$$= r\,\phi(m_1) + r\,\phi(m_2)$$

$$= (r\phi)(m_1) + (r\phi)(m_2)$$

$$(r\phi)(m\cdot s) = r\,(\phi(m\cdot s)) = r\,(\phi(m)\cdot s)$$

$$= (r\,\phi(m))\cdot s = ((r\phi)(m))\cdot s$$