Perguntas (Nestas 2 semanas finais de 2☹2☹ No Forúm Moodle)

Aneis

$(A,+,\cdot)$ $\to$ $(A,+)$ grupo abeliano

$\to$ $(A,\cdot)$: • fechada • associativa $\leftarrow$

e satisfaz $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$

??

- Octoniões (não associativa)
- loop de Moufang (Escrutura não associativa)

$(\mathbb{Z},-)$ $\to$ Não é associativo / comutativo

$$\begin{cases} a-0=a \checkmark \\ 0-a=-a \times \end{cases}$$

$(\mathbb{R}^3, +, \times)$ ~~anel~~ não comutativo

Não é associativo

$(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)$

Def: Dado $(A, +, \cdot)$ anel um subconjunto $B \subseteq A$ é chamado subanel se $(B, +, \cdot)$ é um anel anel

Exemplos: $M(\mathbb{R}, 3)$ matrizes quadradas 3×3 com coeficientes em $\mathbb{R}$

$S = \{ A \in M(\mathbb{R}, 3) \mid A = A^t \}$

A é simétrica

$(S, +, \cdot)$ é subanel ??

$A, B \in S$

$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i j$

$b_{ij} = b_{ji}$

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}) \qquad a_{ij}+b_{ij}=a_{ji}+b_{ji}$$

$$A^t=A \quad B^t=B \Rightarrow AB=A^tB^t$$

$$(AB)^t=B^tA^t=BA\neq AB$$

Não necessariamente

S não é subanel

$$M(\mathbb{Z},3)\subseteq M(\mathbb{Q},3)\subseteq M(\mathbb{R},3)$$

$$\mathbb{Z}(\sqrt[4]{2})=\{a+b\sqrt[4]{2}+c\sqrt[4]{4}+d\sqrt[4]{8} \mid a,b,c,d\in\mathbb{Z}\}$$

$$(1+\sqrt[4]{2}+3\sqrt[4]{8})(3-\sqrt[4]{4})$$

$$3+2\sqrt[4]{2}+9\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{8}-6\sqrt[4]{2}$$

$$3-4\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{4}+8\sqrt[4]{8} \;//$$

subanel

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\subseteq\mathbb{Z}[\sqrt[4]{2}]$$

$$\mathbb{Z}[x] \supseteq 2\mathbb{Z}[x]$$

Polinomios com
coeficientes pares

$$\mathbb{Z}[x] \supseteq x \cdot \mathbb{Z}[x]$$

Polinomios sem
termo independente

$$\mathbb{Z}[x] \supset A_a = \{ f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(a) = 0 \}$$

A_a é um subanel

$$f(x), g(x) \in A_a \Rightarrow f(x) + g(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

$$f(a) + g(a) = 0 + 0 = 0 \checkmark$$

Ideais: $(A, +, \cdot)$ anel e

$I \subseteq A$ é chamado de ideal de A
a esquerda

Se I é um $\underline{\underline{\text{subanel}}}$ e

$\forall a \in A \quad \forall c \in I \Rightarrow ac \in I$

$\mathbb{Z}[\sqrt[2]{2}] \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt[4]{2}]$ é ideal??

$\sqrt[4]{2} \cdot 1 \notin \mathbb{Z}[\sqrt[2]{2}]$

Logo não é ideal

$I \subsetneq A$ é ideal (A anel com unidade)

então $1 \notin I$ pois caso contrario $I \ni \overset{\in I}{1} \cdot \overset{\in A}{a} = a \in A$

$I \subsetneq A$ ideal (A anel com unidade)

então $I \cap \mathcal{U}(A) = \phi$

$\mathcal{U}(A) = \{a \in A \mid \exists b \in A \quad ab = 1\}$

Pois caso qe $I \cap U(A) \neq \emptyset$

se $c \in I \cap U(A)$ $(\exists d \quad cd = 1)$

$$I \ni \overset{\in I}{c} \cdot \overset{\in A}{d}\, a = a \qquad \forall a \in A$$

<u>Correção da definição</u>:

Um subconjunto $I \subset A$ é um ideal à <u>direita</u> de A se

I é um subanel e

$$\forall a \in A \quad \forall c \in I \Rightarrow c \cdot a \in I$$

Quando $I \subseteq A$ é ideal à direita e à esquerda dizemos qe I é ideal bilateral

---

$$M(\mathbb{R}, 2) \ni I = ??$$

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$(I, +)$ fechado ✓

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ c_1 a_2 & 0 \end{pmatrix} \quad ✓$$

$$\overset{\in I}{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}} \overset{\in M}{\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} as & at \\ cs & ct \end{pmatrix} \quad \times$$

I não é ideal à direita

$$\overset{\in M}{\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}} \overset{\in I}{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} as + ct & 0 \\ au + cv & 0 \end{pmatrix} \quad ✓$$

I é um ideal à esquerda.

<u>Pergunta:</u> Determine todos os ideais à esquerda de $M(\mathbb{R}, 2)$

v vetor em $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$C_v = \left\{ A \in M(\mathbb{R},2) \mid Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M(\mathbb{R},2)$$

C_v é ideal à esquerda ?
direita ?

$A, B \in C_v$ $\qquad$ $(A+B)\cdot v = Av + Bv$
$= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

é fechado $+$

$A \in C_v \Rightarrow -A \in C_v$

$A, B \in C_v$ $\qquad$ $ABv = A(Bv) = A\vec{0} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ C_v é subanel

C_v é ideal ??

$\overset{\in M(\mathbb{R},2)}{M}, A \in C_v \Rightarrow (MA)v = M(Av)$
$= M\vec{0} = \vec{0}$

$\Rightarrow MA \in C_v$ $\Rightarrow$ C_v é ideal à esquerda

$(AM)v = \underline{A}(Mv) =$ Não da para falar nada

C_v são ideais à esquerda.

Pegando $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_v = I$ do exemplo anterior.

<u>Teorema de Kaplanski</u>: Todo ideal à esquerda de $M(\underset{\uparrow \text{corpo}}{\mathbb{K}}, n)$ é da forma $C_v = \{A \in M(\mathbb{K}, n) \mid Av = 0\}$

$v \in \mathbb{K}^n \to$ vetor com n coordenadas

($\mathbb{K}$ corpo é um anel $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ é grupo)

Equivalentemente

$D_v = \{A \in M(\mathbb{K}\, n) \mid v^t A = \vec{0}\}$

são todos os ideais à direita de $M(\mathbb{K}\, n)$

<u>Definição</u>: Dados A, B aneis

Uma função $\varphi: A \to B$ é chamado de homomorfismo de aneis se • $\varphi: (A,+) \to (B,+)$ é um homomorfismo de grupo.

• $\varphi(a_1 \cdot a_2) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2)$ para todo $a_1, a_2 \in A$

Afirmação: $Ker(\varphi)$ é ideal de A

$a \in A \quad c \in Ker(\varphi) \quad \varphi(c) = 0$

$$\varphi(a \cdot c) = \varphi(a)\,\varphi(c) = \varphi(a) \cdot 0 = 0$$

$$\varphi(c \cdot a) = \varphi(c)\,\varphi(a) = 0 \cdot \varphi(a) = 0$$

Ker(ψ) é um ideal bilateral.

$$\psi: \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[x].$$
$$f(x) \longmapsto x f(x)$$

$$\psi(f+g) = x(f+g) = xf + xg = \psi(f) + \psi(g)$$

$$\psi(0) = x \cdot 0 = 0$$
$$\|$$
$$\psi(f-f) = \psi(f) + \psi(-f)$$

homomorfismo de grupo

$$\psi(fg) = xfg \neq \underbrace{\psi(f)\,\psi(g)}_{xf \cdot xg}$$

Não é homomorfismo de Aneis!!

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}_n \quad \text{é um homomorfismo de aneis}$$

n fixo

$$a \longmapsto \bar{a}$$

$$\operatorname{Ker}(\theta) = \{ a \in \mathbb{Z} \mid \theta(a) = \bar{a} = \bar{0} \}$$

$= \text{multiplos de } n$

$= n\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}[x] \ni f(x)$ mônico

$$\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{\phi} \{\text{Polinomios módulo } f(x)\}$$

$$\| $$

$$\{\text{restos quando divido por } f(x)\}$$

$$g(x) \longmapsto \text{resto } g(x) \text{ quando divido por } f(x)$$

X^2+1 resto da divisão por $2x$

$$\begin{array}{r|l} x^2 \quad +1 & 2x \\ \hline 0 \quad +1 & \frac{1}{2}x \notin \mathbb{Z}[x] \end{array}$$

ϕ é homomorfismo de aneis

$$\phi(g_1+g_2) = \phi(g_1) + \phi(g_2)$$

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\,\phi(g_2).$$

$\mathrm{Ker}(\phi)$ = polinomios qe são multiplos de $f(x)$

$= (f(x)) \to$ Ideal bilateral

<u>Def</u>: A anel e I ideal bilateral

Definimos $a \sim b$ se

$a + (-b) \in I$

$\left(A/I, +, \cdot\right)$ é um anel com as operações herdadas de A

definindo

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}.$$

Precisamos mostrar que independe dos representantes

$a_1 \sim a_2$ $\quad$ $b_1 \sim b_2$

$a_1 = a_2 + c_1$ $\quad$ $c_1, c_2 \in I$

$b_1 = b_2 + c_2$

$$\underline{a_1 b_1} = (a_2 + c_1)(b_2 + c_2)$$

$$= \underline{a_2 b_2} + \underbrace{\underset{\underset{I}{\cap}}{a_2 c_2} + \underset{\underset{I}{\cap}}{c_1 b_2} + \underset{\underset{I}{\cap}}{c_1 c_2}}_{I}$$

$a_1 b_1 \sim a_2 b_2$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$ está bem definido.

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) \overset{?}{=} \bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c}$$

$$\parallel$$

$$\bar{a} \cdot (\overline{b+c}) = \overline{ab+ac}$$

$$= \overline{ab} + \overline{ac}$$

$$= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$$

Teorema de Isomorfismo de Aneis

$\varphi : A \to B$ homomorfismo de aneis $\qquad Ker(\varphi)$ ideal de A

$$\begin{tikzcd}
a & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & B & \varphi(a) \\
\bar{a} \in \arrow[u, dotted] \arrow[urrr, bend right] & A/Ker(\varphi) \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

Então $\dfrac{A}{Ker\varphi}$ é isomorfo $\varphi(A)$

$$(A, \odot) \xrightarrow{\psi} (B, \odot)$$

$$\psi(a \odot b) = \psi(a) \odot \psi(b)$$

$$(A, *, \mp) \quad \begin{matrix} \nearrow (A\ *) \text{ grupo} \\ \searrow (A\ \mp) \text{ fechado asociativo.} \end{matrix}$$

$$G \cdot \xrightarrow{\psi} H \cdot$$

$$\psi(1_G) = 1_H$$

$$\underbrace{\psi(1_G)} = \psi(1_G 1_G) = \underbrace{\psi(1_G)} \cdot \psi(1_G)$$

$$1_H = \psi(1_G)$$

$$1_G \in Ker(\psi)$$

$$Ker(\psi) = \{1_G\} \Leftrightarrow \psi \text{ é injetivo}$$

$$(\Rightarrow) \qquad \psi(a) = \psi(b) \Rightarrow \psi(a)\psi(b)^{-1} = 1_H$$

$$\psi(\underline{ab^{-1}}) = \mathbb{1}_H \qquad ab^{-1} = \mathbb{1}_G \quad \Rightarrow a = b$$

$(\Leftarrow)$ trivial

$\ker(\psi) = \{1\}$ $\qquad \underline{G} \simeq \underline{\psi(G)} \leqslant \underline{H}$

Logo podemos "ver" G como subgrupo de H

$$\left\| \begin{aligned} (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot) \\ a &\longmapsto e^a \end{aligned} \right.$$

homomorfismo de grupo

$$a+b \longmapsto e^a e^b$$