1) b) Mostre que o conjunto de unidades do anel $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ possui infinitos elementos.

Temos que $(-1)^N$ é ± 1 dependendo se N é par ou ímpar. Assim se for possível encontrar apenas uma unidade diferente de ± 1 com norma ± 1, então poderemos encontrar infinitas outras unidades simplesmente elevando essa unidade a potências inteiras.

Temos $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$:

$$(a + b\sqrt{7}) + (c + d\sqrt{7}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{7}$$
$$(a + b\sqrt{7})(c + d\sqrt{7}) = (ac + 7bd) + (ad + bc)\sqrt{7}$$

Tomamos $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]^*$ sendo o grupo de unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, e sabemos que $(a+b\sqrt{7})$ é invertível, se existe algum $(c + d\sqrt{7})$ sendo que:

$$(ac + 7bd) + (ad + bc)\sqrt{7} = 1, \text{ então:}$$

$$\begin{cases} ac + 7bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$$

E existe uma norma Natural sobre $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, dada por:

$$N(a + b\sqrt{7}) = a^2 - 7b^2$$

Como a norma é multiplicativa, temos que para $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]^*$, $N(x) = \pm 1$

Teorema 10.20: Temos d sendo um "inteiro livre" de quadrados. Então $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ é uma unidade, se e somente se, $N(u) = \pm 1$.

Testamos: $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, para $(3+2\sqrt{7})$,

$N(3 \pm 2\sqrt{7}) = 9 - 4.7 = 9-28 = -19$
Não é unidade.

• para $(8+3\sqrt{7}) \longrightarrow N(8+3\sqrt{7}) = 64 - 9.7 = 1$

Logo podemos verificar o inverso de $(8+3\sqrt{7})$ que é $(8-3\sqrt{7})$. Toda potência de uma unidade é também uma unidade, então $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ tem infinitamente muitas unidades:

$(8+3\sqrt{7})^0, (8+3\sqrt{7})^1, (8+3\sqrt{7})^2, \ldots\ldots$

Portanto, é um conjunto com infinitos elementos.

9) Determine o conjunto de unidades do anel $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]$.

Tomamos como $w = \frac{1+\sqrt{-7}}{2}$, e temos que a Norma de um elemento: $a+bw$ em $\mathbb{Z}[w]$ é:

$$(a+bw).(a+b\bar{w}) = a^2+ab+b^2$$

Como a norma é multiplicativa, todas as unidades deve ter norma 1. Isto significa que estamos procurando por soluções de:

$$a^2 + ab + b^2 = 1$$

Caso 1: Se ab é não-negativo, então:

$1 = a^2 + ab + b^2 \geq a^2 + b^2$, temos que $a = \pm 1$ e $b = 0$, ou $a = 0$ e $b = \pm 1$

Caso 2: Se ab é negativo, então a, b são diferentes de zero, e então:

$$1 = a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - ab$$
$$= (a+b)^2 - ab$$

Temos: $a = 1$ e $b = -1$, e $a = -1$ e $b = 1$

Então o conjunto de unidades:

$$S = \{(a + b\omega) \mid a = -1, 0, 1,\ b = -1, 0, 1\}$$