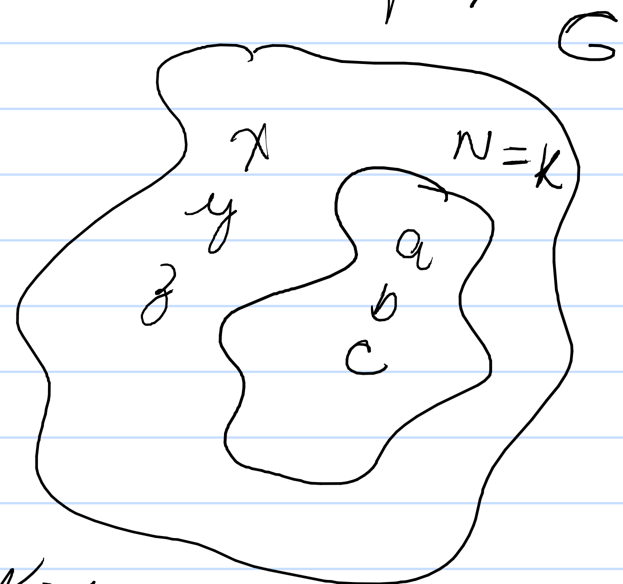
1) Temos K sendo um subgrupo de um grupo G e temos $a \in G$. Prove que $aK = K$ se e somente se $a \in K$.

Por definição um subgrupo normal possui comutatividade entre seus elementos dentro do grupo:



Temos que:

$ax = xa$

$ay = ya$

$\vdots$

$cx = xc$

$cy = yc$

Então:

i) $aK = K$, temos que:

$aK = a.a$ e $ab = ba$ e $ac = ca$

Como $a \in G$ e $K \subseteq G$, temos por definição de grupo que a operação é fechada. Como K é normal temos que vale a comutatividade.

ii) $aK = K \rightarrow aK = eK$ e como toda operação com a e e é o mesmo valor temos que

$a = e$.

Logo a deve pertencer a K, e todo o grupo possui elemento identidade.

2| Temos K sendo um subgrupo $\{r_0, v\}$ de D_4. Mostre que $r_1 \equiv t \pmod{K}$ e $r_2 \equiv h \pmod{K}$, mas $r_1 \circ r_2 \not\equiv t \circ h \pmod{K}$.

. K é subgrupo onde $K = \{r_0, v\}$

$$r_1 \equiv t \pmod{K} \rightarrow r_1 - t \equiv 0 \pmod{K}$$
$$r_2 \equiv h \pmod{K} \rightarrow r_2 - h \equiv 0 \pmod{K}$$

$$r_1 - t \equiv r_2 - h \rightarrow r_1 - r_2 = t - h$$

$r_1 \circ r_0 = r_1$ e $r_1 \circ v = d$
$r_2 \circ r_0 = r_2$ e $r_2 \circ v = h$
$r_1 \circ r_2 = r_3$ e $t \circ h = r_1$

Temos que: $r_3 \circ r_0 = r_3 \pmod{k}$
$r_3 \circ v = t \pmod{k}$

$r_1 \circ r_0 = r_1 \pmod{k}$
$r_1 \circ v = d \pmod{k}$

Erro

Temos que: $r_1 \circ v = r_1 \circ r_0 \circ v = r_1 \circ r_0 = d \pmod{k}$
$r_3 \circ v = v \circ r_1 = t \pmod{K}$
Como $K = \{v, r_0\}$ temos um subgrupo normal, mas $r_1 \circ r_2 \not\equiv t \circ h \pmod{K}$