Seja $f: R \to S$ um homomorfismo de anéis sobrejetivo.

a) Mostrar que se R é domínio de ideais principais então todo ideal de S é principal.

Supomos $I \subseteq S$ é de fato um ideal de S, e mostraremos que I é principal.

Temos que R é um domínio de ideal principal (DIP), e $f^{-1}(I) = (x)_R$ para algum $x \in R$.

Assim f é sobrejetiva, $f(f^{-1}(I)) = I$.

Temos que todo elemento de I é da forma $f(y)$ para qualquer $y \in (x)$. Mas todos os y são da forma $y = rx$.

E todo elemento de I tem a forma $f(rx) = f(r)f(x)$. Em particular, eles são todos múltiplos de x.

No entanto, r pode ser arbitrário e f é sobrejetivo, e todos $s \in S$ aparece como $s = f(r)$. Assim $f(f^{-1}(I)) = (f(x))_S$ e então ele é principal. Ou seja S é principal.

b) Mostre um exemplo de homomorfismo sobrejetivo no qual R é Dip, mas não é domínio.

Por exemplo: $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{mod 4}$, com uma mapeamento sobrejetivo:

$$\text{map } f(n) = n \pmod 4$$

Este mapa é sobrejetivo, mas $\mathbb{Z}_{mod 4}$ certamente não é um domínio de integralidade.