$I \subseteq \mathbb{Z}[x,y]$ $\quad$ $\underline{\underline{I \text{ ideal}}}$ $\underline{\underline{\text{ou}}}$

$$\| \quad \left\{ f(x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} f(1,2)=0 \\ f(3,4)=0 \end{array} \right\}$$

$$\underbrace{(x-1),\ (y-2)}\qquad \underbrace{(x-3),\ (y-4)}$$

$$(x-1)(x-3),\quad (x-1)(y-4),\quad (y-2)(x-3),\quad (y-2)(y-4)$$

Afirmação $I = \langle (x-1)(x-3), \underbrace{(x-1)(y-4), (y-2)(x-3), (y-2)(y-4)} \rangle$

$\Downarrow$

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{n} a_j(y)\, x^j \qquad \begin{array}{l|l} & (x-1)(x-3) \\ \hline & a_n(y)\, x^{n-1} + \cdots \end{array}$$

$a_n(y)x^n$

$$\underset{I}{\overset{\Uparrow}{f(x,y)}} = \underbrace{(x-1)(x-3)}_{I} g(x,y) + \underbrace{h_1(y)x + h_2(y)}_{\tilde{f}(x,y)}$$

$$f(1,2) = h_1(2)\cdot 1 + h_2(2) = 0$$

$$f(3,4) = h_1(4)\, 3 + h_2(4) = 0$$

$$\tilde{f}(x,y) \;\Big|\, \frac{x-1}{g_1(xy)} \qquad \tilde{f}(x,y) = g_1(xy)(x-1)$$

$$h_3(y)$$

$$\mathbb{Z}[x,y]$$

$$yx^3 + (y^2+4)x^2 + (3y+2)x + (5y^4+1) \;\Big|\, \frac{4x+7}{\frac{y}{4}x^2}$$

$\notin \mathbb{Z}$.

esta divisão não é possível

4 não é invertível em $\mathbb{Z}$

$K[x] \rightarrow$ subemos dividir !!

$A[x] \ni f(x), g(x)$

$$f(x) \;\Big|\, \frac{g(x)}{Q(x)} \in A[x] \subset K[x]$$

$R(x) \in A[x] \in K[x]$

$$f(x) = \underbrace{Q(x)\,g(x) + R(x)}$$

Também é a divisão vista em $K[x]$

Se a divisão em $A[x]$ existe então é a mesma que em $K[x]$

Se $g(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ com

$a_n \in U(A)$ i.e. $a_n^{-1} \in A$ então

Sempre é possível dividir por $g(x)$.

$f(x) = \underbrace{b_m x^m}_{\uparrow} + \dots + b_1 x + b_0$

Asumindo $m \geq n$

$$f(x) - \underbrace{\frac{b_m}{a_n} x^{m-n} g(x)}_{\uparrow} = h(x) \Longleftarrow$$

$\frac{b_m}{a_n} \in A$

Com grau $(h(x)) \leq m - 1$

Como podemos dividir todo polinomio de grau $\leq m-1$ por $g(x)$ (HI)

$$h(x) = Q_1(x) g(x) + R(x) \qquad Q_1(x), R(x) \in A[x]$$

$$f(x) = \underset{\substack{\cap \\ A}}{\frac{b_n}{a_n}} x^{m-n} g(x) + Q_1(x) g(x) + R(x)$$

$$= \underset{\substack{\cap \\ A[x]}}{\left(\frac{b_n}{a_n} x^{m-n} + Q_1(x)\right)} g(x) + \underset{\substack{\cap \\ A[x]}}{R(x)}$$

$(1,2)$ $(3,4)$

$3-4+1=0$

$1-2+1=0$

$$\boxed{x-y+1 \in I}$$

$$\underbrace{y-2=\frac{2}{2}(x-1)}_{\in I}$$

$$f(x,y) = \underset{\in \mathbb{Z}[x,y]}{h(x,y)}\underbrace{(x-y+1)} + \underbrace{R(y)}$$

$$f(1,2) = R(2) = 0$$

$$f(3,4) = R(4) = 0$$

y^2-6y+8

$R(y)$ é divisível por $\underbrace{(y-2)(y-4)}$

$$R(y) = \underset{\in \mathbb{Z}[x]}{\tilde{R}(y)} \overbrace{(y-2)(y-4)}$$

$$I = \langle x-y+1, (y-2)(y-4) \rangle$$

$$I \ni f(x,y) = \underbrace{h(x,y)}\cdot(\underbrace{x-y+1}) + \underbrace{\tilde{R}(x)}\cdot\underbrace{(y-2)(y-4)}$$

$$I = \langle x-y+1,\ (y-2)(y-4) \rangle$$

$$= \langle x-y+1,\ (x-1)(x-3) \rangle$$

$$(-4,2) \quad (5,-3)$$

$$y-2 = \frac{-5}{9}(x+4)$$

$$9y-18 = -5x-20$$

$$9y+5x+2 = 0$$

$$9y+5x+2 \in I$$

$$\longrightarrow \mathbb{Q}[x,y]$$

$$f(x,y) = \underbrace{h(x,y)(5x+9y+2)}_{\substack{\cap \\ \mathbb{Q}[x,y]}} + R(y)$$

$\underline{a x^n y^m}$

$$\begin{array}{|l} \underline{5x + 9y + 2} \\ \frac{a}{5} x^{n-1} y \end{array}$$

Logo $h(x,y)$ somente tem potencia de 5 no den

$(-4,2)$ $(5,-3)$

$\underbrace{(x+4)(x-5)}$, $(x+4)(y+3)$, $(y-2)(x-5)$, $(y-2)(y+3)$

$\in \mathbb{Z}[x,y]$

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ I}}{f(x,y)} = h_1(x,y)\underbrace{(x+4)(x-5)}_{\substack{\Uparrow \\ I}} + \underbrace{R_1(y)x + R_2(y)}_{\tilde{f}(x,y)}$$

$f(-4,2) = R_1(2)(-4) + R_2(2) = 0$

$f(5,-3) = R_1(-3)(5) + R_2(-3) = 0$

$\tilde{f}(x,y) \in I$ $\quad \deg_x \underbrace{\tilde{f}(x,y)} \leq 1$

$$\underbrace{\tilde{f}(x,y)}_{\in I} = \underbrace{h_2(x,y)(y-2)(y+3)}_{\in I} + \mathcal{L}(x,y)$$

$\mathcal{L}(x\,y)$ tem grau em x e grau em y

≤ 1

$$\mathcal{L}(x,y) = axy + bx + cy + d \in I$$

$$\mathcal{L}(x,y) \in I$$

$$\mathcal{L}(-4,2) = 0 \Rightarrow -8a - 4b + 2c + d = 0$$

$$\mathcal{L}(5,-3) = 0 \Rightarrow -15a + 5b - 3c + d = 0$$

$$7a - 9b + 5c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$(x+4)(y+3) \qquad (x-5)(y-2)$$

$$\underbrace{xy + 4y + 3x + 12}_{} \qquad \underbrace{xy - 5y - 2x + 10}_{}$$

$$\mathcal{L}(xy) - a(x+4)(y+3) = \tilde{\mathcal{L}}(x,y) \in I$$

$$\tilde{f}(x,y) = Ax + By + C \in I$$

$$\boxed{\begin{gathered} f(x,y) = h_1(x,y)\underbrace{(x+4)(x-5)}_{\in I} + h_2(x,y)\underbrace{(y-2)(y+3)}_{\in I} - a\underbrace{(x+4)(y+3)}_{\in I} + \underbrace{\tilde{f}(x,y)}_{\in I} \\ \text{onde } \tilde{f}(x,y) = Ax + By + C \in I \end{gathered}}$$

$$\tilde{f}(-4,2) = 0 \qquad \tilde{f}(5,-3) = 0$$

$\underbrace{Ax+By+C}$ deve ser uma das equações da reta que passa por esses pontos $\underbrace{5x+9y+2} = 0$

Logo $Ax + By + C = M(\underbrace{5x+9y+2}_{\in I})$

Teorema Bezout: $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ $f, g \in K[x,y]$

$\#$ soluções é $\begin{cases} \text{infinito se } \underset{h(x,y)}{\underset{\shortparallel}{mdc(f(x,y), g(x,y))}} \neq 1 \\ \text{e } h(x,y) = 0 \text{ tem infinitas soluções} \end{cases}$

$\leq \text{grau}(f(x,y))\,\text{grau}(g(x,y))$

<u>Exemplo</u>: $f(x,y) = 3x^2y + 5xy^3 + 4x + 5$

$\cap$

$\mathbb{C}[x,y]$

$g(x,y) = 7x^9 + 4x^4y^6 + 3xy + 14$

soluções do sistema $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

é $\leq 4 \cdot 10 = 40$

<u>Módulos</u>

conjunto

Espaço vetorial $(V, K, +)$

- $(V\ +)$ grupo abeliano

(0) $c \cdot v = v \cdot c$

(1) $c \cdot (v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$ $\quad \forall c \in K$, $v_1, v_2 \in V$

(2) $(b + d) \cdot v = bv + dv$ $\quad \forall b, d \in K\ \forall v \in V$

(3) $b(d \cdot v) = (bd) \cdot v$ $\quad \forall b, d \in K\ \forall v \in V$

(4) $1 \cdot v = v$ $\quad 1 \in K\ \forall v \in V$

Em nenhum lugar usamos que K é corpo

Podemos na definição anterior trocar

K corpo por A anel com unidade

Trocando K por A (anel com unidade)

na definição de espaço vetorial

obtemos uma estrutura que vamos

chamar de módulo (à esquerda)

Podemos ter uma definição equivalente

"multiplicado" à direita

① $(v_1+v_2)\cdot c = v_1 c + v_2 c$

② $v\cdot(c+d) = v\cdot c + v\cdot d$

③ $(vc)d = v(cd)$

④ $v\cdot 1 = v$

E-mail

fbrocher@mat.ufmg.br