3.3.4 M_R R-módulo à direito de Quem??

ⓐ Se f é um anti-automorfismo, então M é um R modulo à esquerda se para todo $\alpha \in R$ $\alpha x = x f(\alpha)$

R-modulo à direita

$$\boxed{\begin{array}{l} f: M \to N \text{ é um antimorfismo} \quad \text{R-módulo à esquerda} \\ \text{se} \quad f(r \cdot m) = f(m) \cdot r \end{array}}$$

$\cdot f: R \to R$ tal que

$$f(ab) = f(b) f(a) \quad \text{(antimorfismo)}$$

Por hipotese M é um R-módulo à direita $\parallel$ $m \in M$, $a \in R$ $\Rightarrow ma \in M$

Que condição devo impor para qe M possa ser visto como um R-módulo à direita

$m \in M$

$a, b \in R$

$$\boxed{(ab) \odot m \doteq a \odot (b \odot m)}$$

$$m \odot (a+b) = m \odot a + m \odot b$$

$m \cdot a$ bem definido

?

$$\boxed{a \odot m := m \cdot f(a)}$$

definimos a operação $\odot$

$$a \odot (b \odot m) = a \odot (m \cdot f(b))$$

$$= (m \cdot f(b)) \cdot f(a)$$

$$= m \cdot (f(b) \cdot f(a))$$

$$= m \cdot f(ab)$$

$$= (ab) \odot m$$

$$(a+b) \odot m = m \cdot (f(a+b))$$

$$= m\,(f(a) + f(b))$$

$$= m \cdot f(a) + m \cdot f(b) = a \odot m + b \odot m$$

(b) $f \in \mathrm{Mor}(R)$. Será que podemos concluir que M é um R módulo à esquerda

$$am := m \cdot f(a)$$

Exemplo $R = \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$ab \neq bc \qquad a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$M = M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

$$m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} f : R &\to R \\ a &\mapsto a \end{aligned} \quad \underline{\underline{\text{morfismo}}}$$

$$m \cdot a := \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M$$

$$a \odot m = m \cdot f(a)$$

$$\underline{(ab) \odot m} = m \cdot \boxed{ab} = \cancel{\gg}$$

$a \circ (b \circ m) = m \cdot \boxed{b \cdot a}$ ''

3.3.5 R anel unitário

e M um R-modulo à direita

dual de M

$M^* : \underline{Mor(M, R)_R}$

M^* é um R-módulo à esquerda:

$\varphi : M \to R \qquad \psi : M \to R$

$(\varphi + \psi)(m) := \varphi(m) + \psi(m)$

$(r\varphi)(m) := r\,\varphi(m)$

definimos assim e precisamos verificar se M^*_R é um R-modulo à esquerda

$\varphi : M \to R \in M^*_R$ se

$$\boxed{\varphi(mr) = \varphi(m) \cdot r}$$

$$\boxed{(r\varphi)(m) := r \cdot \varphi(m)} =$$

$r\varphi$ é um elemento de M^*

$$(r\varphi)(m\overset{R}{s}) = r\cdot(\varphi(ms))$$
$$= r(\varphi(m)\cdot s)$$
$$= (r\,\varphi(m))\cdot s$$
$$(r\varphi)(m)\cdot s$$

(b) ${}_RM^* = \mathrm{Mor}({}_RM, R)$ é um R módulo à direita ←

No item a) se M é um R-modulo à esquerdo então $r\varphi$ não seria um elemento de M^*

$$(r\varphi)(sm) = r(\varphi(sm)) = r(s\,\varphi(m)) = (rs)\,\varphi(m).$$

é falso a menos que R seja comutativo

$$\stackrel{?}{=} (s\cdot r)\varphi(m) = s(r\,\varphi(m)) = s\cdot(r\varphi)(m)$$

é mesmo se R é comutativo

M módulo à direita

$\varphi \in M^*$

$r\varphi$ Como definimo?

$(r\varphi)(m) := r \cdot \varphi(m)$ ✓

$(r\varphi)(m \overset{R}{\circ} s) = (r\varphi)(m) \cdot s$ ✓

Se M for um R modulo à esquerda

$(r\varphi)(m) := r\varphi(m)$ não faz de $(r\varphi)$ um homomorfismo pois

$(r\varphi)(s \overset{R}{\circ} m) \neq s \cdot (r\varphi)(m)$

Def: Um R-módulo M é livre se existem $\mathcal{B} = \{x_i\}_{i \in J} \subseteq M$ tal que

- $\mathcal{B}$ é L.I.
- Todo elemento de M pode-se escrever como combinação linear finita

de elementos de $\mathcal{B}$

Exemplo: Todo espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ - (corpo) é um um módulo livre onde $\mathcal{B}$ é qualquer base

<u>Def</u>: Um conjunto $\mathcal{B} \subset M$ (M é R módulo) é chamado de conjunto L.I. Se sempre que tenhamos uma combinação da forma

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_n v_n = 0$$

com $a_1 \dots a_n \in R$ $v_1 \dots v_n \in \mathcal{B}$ então $\boxed{a_1 = a_2 = \dots a_n = 0}$

$A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Anel

$M = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$$A \times \underline{M} \to M$$

$$((a,b),(m,0)) \mapsto (ab)\cdot(m,0) = \underset{\in M}{(am,0)}$$

M é um A-modulo

$(1,0)$ gera os elementos de M

mas $(1\,0)$ não é base

pos $\{(1\,0)\}$ não é LI

pois $\underset{\substack{\cap \\ A}}{(0,1)} \cdot \underset{\substack{\cap \\ M}}{(1,0)} = (0,0)$

mas $(0,1) \neq (0\,0)$

Logo M Não é um A-módulo livre

---

abeliano

$G \cdot \mathbb{Z}$ $\quad n \circ g = \overbrace{g \cdot g \cdots g}^{n \text{ vezes}}$

G é um $\mathbb{Z}$-módulo

- $m(ng) = (mn)g$ ✓
- $1 \cdot g = g$ ✓
- $(m+n)g$ ✓

- $$m_0(gh) = (gh)(gh)\cdots(gh)$$
$$= \underbrace{g\cdots g}_{m}\ \underbrace{hh\cdots h}_{m}$$ abeliano
$$= (m_0 g)(m_0 h)$$

G $\boxed{\mathbb{Z}_2}$

$$0 \cdot g = e$$
$$1 \cdot g = g$$

$$0 \cdot (gh) = e = e \cdot e = (0 \cdot g)(0 \cdot h)$$
$$1(gh) = gh = (1 \cdot g)(1g)$$

G $\mathbb{Z}_3$

$0 \cdot g = e$ ✓

$1 \cdot g = g$ ✓

$2 \cdot g \stackrel{?}{=} g^{-1}$ ✓

$$2(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1} g^{-1}$$

$$= (2 \cdot h) \cdot (2g)$$

// queríamos

$$(2 \cdot g)(2 \cdot h)$$

3.3.6 M R módulo à <u>direita</u>

$$End(M) = \{ \varphi : \underline{M} \to \underline{M} \mid \text{morfismo} \}$$

$$\begin{cases} \varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2) \\ \varphi(\underset{M}{m} \cdot \underset{R}{r}) = \varphi(m) \cdot r \end{cases}$$

$(End(M), \oplus, \odot)$ que fazem de $End(M)$ anel

$$(\varphi \oplus \psi)(m) := \varphi(m) + \psi(m)$$

$$(\varphi \odot \psi)(m) := \underbrace{\varphi(m)}_{\in M} \cdot \underbrace{\psi(m)}_{\in M}$$

não tem sentido

$$\varphi \circ \psi(m) := \varphi(\psi(m))$$

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi)(m r) &= \varphi(\psi(m r)) \\ &= \varphi(\psi(m) \cdot r) \\ &= \varphi(\psi(m)) \cdot r \\ &= (\varphi \circ \psi)(m) \cdot r\end{aligned}$$

Mostrar que M pode ser visto como um $\mathrm{End}(M)$-módulo à esquerda

$$\mathrm{End}(M) \times M$$

$$(\varphi, m) = \varphi \bullet m = \varphi(m)$$

$$(\varphi \oplus \psi) \bullet m = \varphi \bullet m + \psi \bullet m$$

$$\varphi(m) + \psi(m)$$

$$\left(\varphi \odot \psi\right) \bullet m = \left(\varphi \odot \psi\right)(m)$$

$$= \varphi(\psi(m))$$

$$= \varphi \bullet (\psi(m))$$

$$\varphi \bullet (m_1 + m_2) = \varphi(m_1 + m_2)$$

$$= \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$$

$$= \varphi \bullet m_1 + \varphi \bullet m_2$$