4) Seja $f: \mathbb{Z}_{120} \to \mathbb{Z}_{40} \times \mathbb{Z}_{15}$ a função definida por $[a]_{120} \to ([a]_{40}, [a]_{15})$.

Mostre que f é um homomorfismo de aneis bem definidos.

$\mathbb{Z}_{120} = \{0, 1, 2, \ldots, 119\}$

$\mathbb{Z}_{40} = \{0, 1, 2, \ldots, 39\}$
$\mathbb{Z}_{15} = \{0, 1, 2, \ldots, 14\}$

Definição de Homomorfismo de aneis: Temos $f: R \to S$ sendo um homomorfismo de aneis. Então o núcleo de f é o conjunto:

$K = \{r \in R / f(r) = 0_S\}$.

Assim dado o conjunto $\mathbb{Z}_{120}$ temos que para cada $\mathbb{Z}$ temos uma imagem em produto cartesiano.

Vamos determinar os geradores de $\mathbb{Z}_{120}$:

$120 = 2.2.2.3.5 = 2^3.3.5$
$40 = 2.2.2.5 = 2^3.5$
$15 = 5.3 = 3.5$

Então como 120, 40 e 15 possuem fatores em comum é possível ~~det~~ ~~det~~ determinar para cada elemento de $\mathbb{Z}_{120}$ um valor na imagem. Logo é um homomorfismo.

Temos que determinar o núcleo, que são todos os valores onde a imagem é nula ou zero.

Então como $\mathbb{Z}_{40}$, e $\mathbb{Z}_{15}$ possuem fatores primos em comum. Temos que para todos os múltiplos de 15 e 40 em comum a imagem é zero, ou seja, para todos os valores de $\mathbb{Z}_{120}$ onde $f(\mathbb{Z}_{40} \times \mathbb{Z}_{15}) = (0,0)$

$40 = 2^3.5$ e $15 = 3.5$, então temos que os valores que possuem primos com: $2^3.3.5$ terão $f(\mathbb{Z}_{40} \times \mathbb{Z}_{15}) = (0,0)$.

Portanto Núcleo de $f = \{0\}$

E pelo teorema 6.11: Temos $f: R \to S$ sendo um homomorfismo de aneis com núcleo. Então se R = núcleo $= (0_R)$, temos que f é injetiva. Logo $\mathbb{Z}_{120} \to \mathbb{Z}_{40} \times \mathbb{Z}_{15}$ é injetiva.

- Quantos elementos tem a imagem de f?

Como é um produto cartesiano a imagem é formada pela combinação de cada elemento de $\mathbb{Z}_{40}$ com de $\mathbb{Z}_{15}$.

Logo: $([a]_{40}, [a]_{15})$. Temos que:

$40 \times 15 = 600$ elementos.