$\mathbb{Z}\sqrt{2}$ — função $f(a+b\sqrt{2}) = |a^2-2b^2|$

Temos $\alpha = a_1 + a_2\sqrt{2}$ e $\beta = b_1 + b_2\sqrt{2}$ sendo elementos de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ com $\beta \neq 0$.

Desejamos mostrar que existe θ e γ em $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sendo que $\alpha = \theta\beta + \gamma$ e $N(\gamma) < N(\beta)$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, temos: $\frac{\alpha}{\beta} = c_1 + c_2\sqrt{2}$, onde:

$$c_1 = \frac{a_1 b_1 - 2a_2 b_2}{b_1^2 - 2b_2^2}, \quad c_2 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1^2 - 2b_2^2}$$

Temos q_1 sendo um inteiro mais próximo de c_1 e q_2 um inteiro mais próximo de c_2. Então:

$$|c_1 - q_1| \leq \frac{1}{2} \text{ e } |c_2 - q_2| \leq 1/2$$

Agora temos $\theta = q_1 + q_2\sqrt{2}$, e certamente $\theta \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Portanto:

$\theta = (c_1 - q_1) + (c_2 - q_2)\sqrt{2}$, e temos $f = \frac{\alpha}{\beta} - \theta$, então $f\beta = \alpha - \theta\beta$

Assim $\gamma = f\beta$, e temos que $\alpha = \theta\beta + \gamma$.

Como $N(\gamma) < N(\beta)$, podemos:

$N(f) = |(c_1 - q_1)^2 - 2(c_2 - q_2)^2| \leq |(c_1 - q_1)^2| + |-2(c_2 - q_2)^2|$

Assim, pela desigualdade triangular temos:

$$N(\gamma) \leq |c_1 - q_1|^2 + 2|c_2 - q_2|^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} < 1.$$

Portanto, $N(\gamma) \leq \frac{3}{4} N(\beta)$.