Soma direta de Módulos Aija A um anel, Mil uma Oslegão de A-modulos. iEI Considere o produto cartisiano ILM; = 1 (Vi) IiEI / VIGMin VIEIE. iEI Dufina: +: J[M; & J[Mi - D] Mi · · · A X TM; — D ST Mi i ET i ET (a, (vilieT) — D (avi) Mi i ET A soma direta da coleção Milet de A-modulos P':

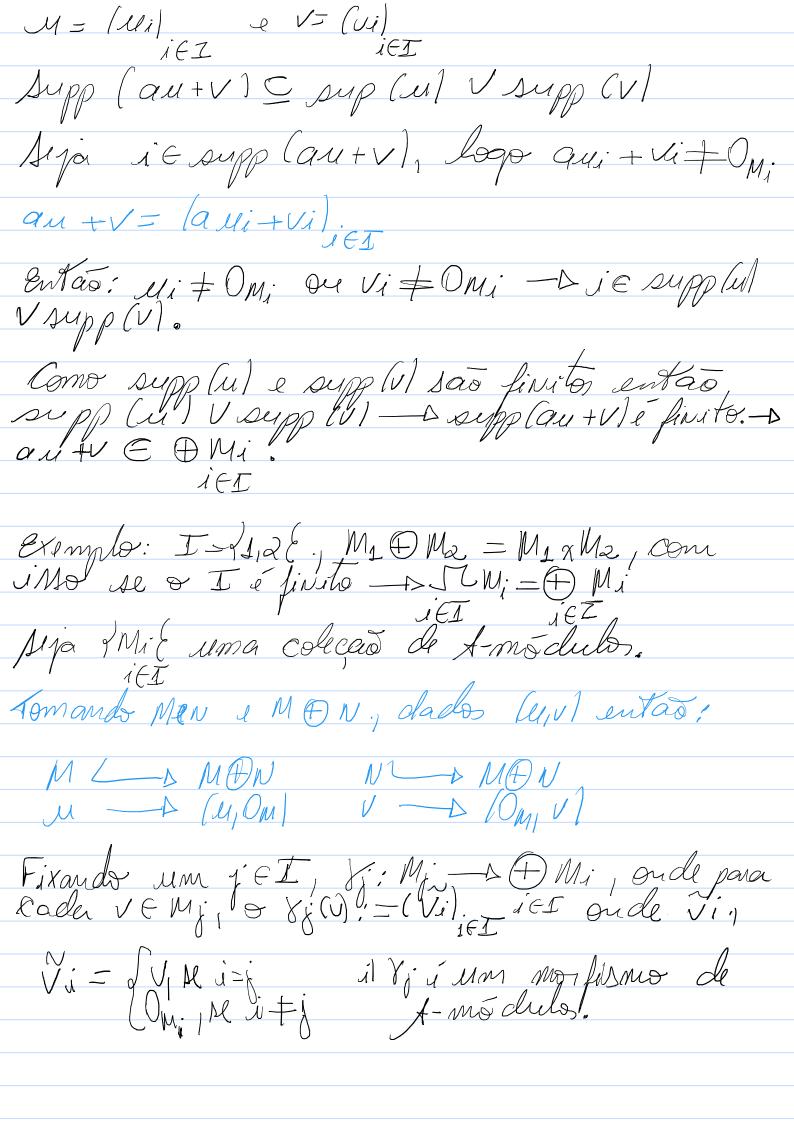
(Suporta)

(Mi = (Vi) Sl Mi | Supp (V) & finito {

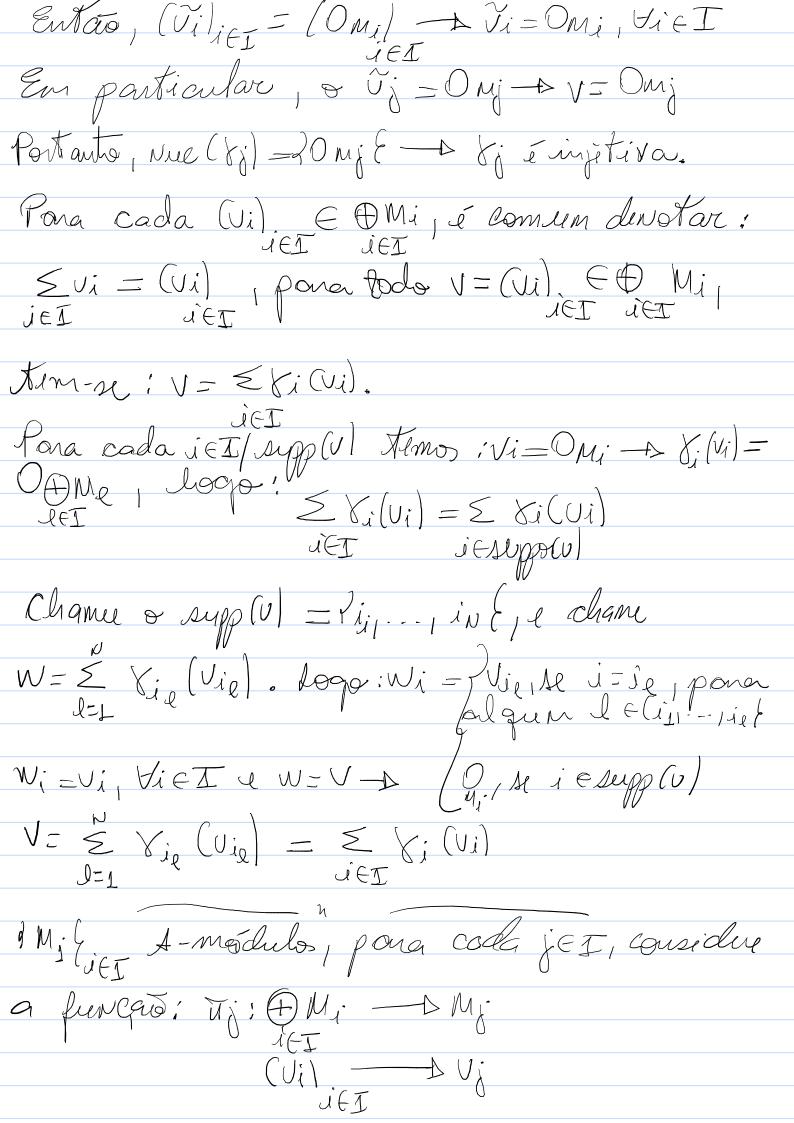
i(I vitIi(I)

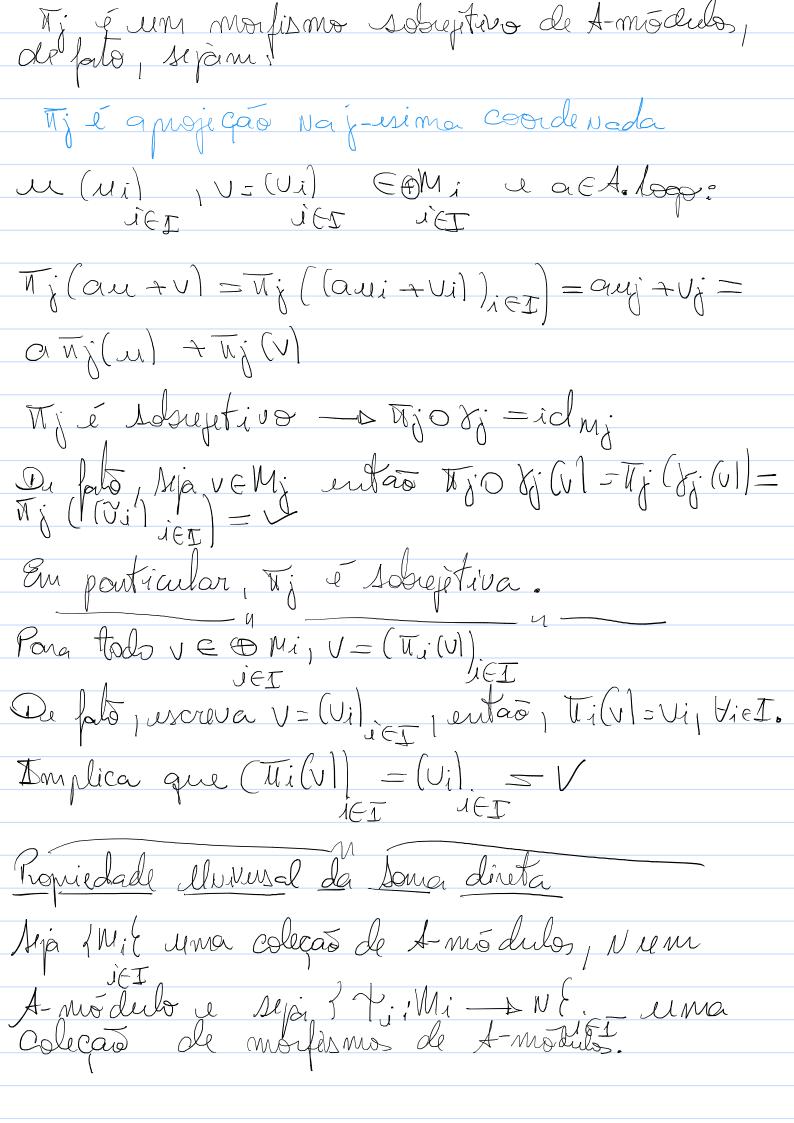
Pena cada v= (Vi) \ e Sl Mi, supp (V) = \} i \i \i \tall \/ Vi \dig O\_{Mi} {

i \i \tall I \i \i \i \tall I \i \tall Afrimação: (1) Mi é um A-submodulo de SZ Mi. il Ogni E & Mi, observe que supp (Osc Mi) = \$ que iEI + IEI : o finito. suin on mi E DMi JEI JEI il fijom u, v E D Mi e a E A, es creve-se;



Man u, ve Mj e alt, logo: Yj(u) = (ūi) e yj(u)=(i)
iet Onde: ii. = Ju sei=j e Vi=Juse i=j Omi, Mi#j Omi, sei#j Portanto, si (au+v):=(Wi)ieI, onde: Wi = Jantu, Aligi
Omi, Alifi Destjomo mostrar que: sj(qu+v/= a sj(u/+ sj/v), timos que: asj(u) + sj(v)=a(ui) + (vi)iEI = (aŭ; +Ūi); = (Wi); HIEI Alja i EI qualquer, se i + j entao: rej = 0 mj e vi = 0 mj e vi = 0 mj Entao: Wi=alli+VI. Supomos agora que i=j/ Nuxte cars, Wj=au+V=anij+Vj logo: (Wi) iEI = (au; +Vi) iEI -> \( j(au+V) = ay(m) + yj(v).ill Xj: Mj - De Mi à injetab. Aip ve vuccifil, lop filul=(OmilieI





Mi Si De Mi Entato existe um P. /iEI único morfismo de X/3!7 A-módulos: T: (A Mi - N , tal que N + O X;= ti, V; EI. iEI 4 XE I Y Demo; Definer: Y;⊕M; →N Vi um morfismo de A-modulos. Sejam U=(u.) V=(Ui) E DMi e a EA. Entaō:  $\begin{aligned}
\uparrow \left( au + v \right) &= \uparrow \left( \left( au + v \right) \right) - \sum_{i \in I} \uparrow_{i} \left( au + v \right) = \\
&= \sum_{i \in I} \left( a + \gamma_{i} \left( u_{i} \right) \right) + \sum_{i \in I} \gamma_{i} \left( u_{i} \right) + \sum_{i \in I} \gamma_{i} \left( u_{i} \right) \\
&= \alpha + \gamma + \gamma
\end{aligned}$ Agence or teste da comutação vo diagrama; Al to 8; = Yj, Yj EI, Aljo j EI ev EMj. Entar i +0  $\forall i \cup 1 = \uparrow ((\tilde{v}_i)_{i \in I}) = \underbrace{\Rightarrow}_{i \in I} \uparrow ((\tilde{v}_i)_i) = \uparrow_i (\tilde{v}_i)_i = \uparrow_i$ Agra Vamos mostrar a unicidade: 4. Suponha que t: (A) Mi - AN, Seja um monfismos de A-médulos tal que to V; = t; 178 EI.

Entao, pona todo:  $V=(Vi) \in \emptyset$  Mi  $i\in I$   $i\in I$ Proposição: Sija d'i: Mi - Nit. uma cole-ção de morfismo de A-mostelos. M Mi fi DUj N FIAI
80 A D Ni

JEI JEI Então existe um úxico morpismos de A-modulo; Ofi-fi-fi-Mi-DHi, talque Sofi-fosym Mi Demo: Aplicando a

iet noprie dade universal,

Xi III seque que existe em

iet noprie dade universal,

iet seque que existe em

iet = N

iet = N f: DM: DE NI, Kalque for M= KNOff, VjEI Formando  $\forall v_i$  onde  $V \in \bigoplus M_i, V = (Vi) = \sum_{i \in I} f(x_i M v_i) = \sum_{i \in I} f(v_i) = (f_i (Vi))_{i \in I}$ 

Afirmações: 1) fi é soriettiva, ViEI - A f é sorietuva 2) fi é injetura, ti et - L fé injetura 3/ fi é isom or fis mo fic I - » f é isomor fis mo Crordáno; Sija (Mit uma colição de A-módulo, e para cada jet iti seja Ni um A-submódulo de los Mi. Então Pri um A-submódulo de PMi e: iti Demo: Para cada jet, PMi set EMi Ni Ni Ni V—AV+Mi its Pela proposição existe um únito morfismo de l-módulos;

Ti: (+) Mi - D (-) Mi , Sal que its vi M((vil.) = [Mi [Wi]], H[Wi], E() Mi Como N; é sobrejetiva, HieI então is é sobre-fetiva. Pelo J. Herema de Jisomon fils mos de Modulos; e Nuer = Dyi HUI = HUI JET JET VI Nuc tr

Alja  $v = (vi) \in \bigoplus Mi$  jentão;  $v \in vi \in I$   $i \in I$   $v \in vi \in I$   $v \in v \in vi \in I$   $v \in v \in v \in vi \in I$   $v \in v \in v \in v \in v$   $v \in v \in v \in v \in v$   $v \in v \in v \in v \in v$   $v \in v \in v \in v \in v$   $v \in v \in v \in v \in v$   $v \in v \in v \in v \in v$   $v \in v \in v \in v \in v$   $v \in v \in v \in v \in v$   $v \in v \in v \in v \in v$   $v \in v \in v \in v \in v$   $v \in v \in v \in v \in v$   $v \in v \in v \in v \in v$   $v \in v$   $v \in v \in v$   $v \in v$