Proposição 4.1: Um anel comutativo R com identidade é Noetheriano, se e somente se, todo ideal primo é finitamente gerado.

$\mathbb{Z}$ é DIP $\rightarrow$ $\mathbb{Z}$ é Noetheriano
$\mathbb{Z}[x]$ é Noetheriano??

Teorema da base de Hilbert: Se A é anel Noetheriano, então $A[x]$ é Noetheriano.

Corolário: Se A é Noetheriano então $A[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$ é Noetheriano.

Definição: Se A um anel e definimos:

$A[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \mid a_j \in A\}$
é um anel.

$U(A) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \mid a_j \in R$ e $a_0 \in U(A)\}$

$\hookrightarrow$ unidades de A

$\hookrightarrow$ elemento inversível

Ex: $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)(b_0 + b_1x + \ldots) = 1$

$$\underbrace{a_0b_0}_{1} + (\underbrace{a_1b_0 + a_0b_1}_{0})x + (\underbrace{a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2}_{0})x^2 + \ldots = 1$$

Se $a_0 \in U(A) \rightarrow \exists b_0$ com $a_0b_0 = 1$.

Teorema: Se A é Noetheriano então $A[x]$ é Noetheriano.

① Dado ideal $J \subset A[x]$ definimos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$I_n = \{a \in A \mid$ existe $s(x) \in J$ com $s(x) = ax^n \ldots\}$

Passos: i) mostrar que $I_n \subset A$ é ideal

ii) $I_n \subset I_{n+1}$, é crescente

$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subseteq \cdots \subset A$ $\exists N > 0$ tal que $I_N = I_{N+1} = I_{N+1} = \ldots$

Cada I_j é finitamente gerado: $a_i \rightsquigarrow f_i$ polinômio

$\sim s_j$ série

<u>Teorema</u>: Se A é Noetheriano e $I \subset A$ ideal então $A/_I$ é Noetheriano.

<u>Conteúdo Prova</u>:

- 10.5 Fatoração única de polinômios sobre domínio
- Se A é DFU $\rightarrow$ $A[x]$ é DFU
- Anéis Noetherianos: Anel tal que <u>todo</u> ideal é finitamente gerado. Se $I_1 \subset I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_N \subseteq \rightarrow \exists N$ tal que $I_N = I_{N+1} = \ldots$
- Teorema da base de Hilbert: Se A é Noetheriano $\rightarrow$ $A[x]$ é Noetheriano

<u>Corolário</u>: A é Noetheriano $\rightarrow$ $A[x_1, x_2 \ldots x_n]$ é Noetheriano

C.C.A: Condição de Cadeias Ascendentes

O anel A cumpre a condição de cadeia ascendente se para toda cadeia ascendente de ideais:

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots\ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots \subset A$$

existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \ldots$

- Se A tem um # finito de ideais $\longrightarrow$ trivialmente A cumpre CCA
- Se A cumpre CCA $\leftrightarrow$ A é noetheriano

Teorema: Dado A anel existem ideais maximais (lema de Zorn)

Corolário 4.7: Se R é um anel local noetheriano com ideal Maximal M, então $\bigcap_{N=1}^{\infty} M^N = 0$.

Definição: $I \subset A$ é ideal primo se sempre que $ab \in I$, então $a \in I$ ou $b \in I$.