Ideais Maximais

Seja A um anel (comutativo e com unidade)

① Def: Um ideal próprio m de A é chamado ideal maximal de A, se para qualquer ideal $\underline{a}$ de $\underline{A}$ tal que $m \subseteq a \subsetneq A$, tem-se que $a = m$ ou $a = A$.

$M \subsetneq A$ e $M \subsetneq^{?} A$ Não tem ninguém

Proposição: Seja A um anel não-nulo.

Anéis quocientes foram desenvolvidos como uma generalização natural de anéis $\mathbb{Z}_p$ e $F[x]/(p(x))$. Quando p é primo e $p(x)$ irredutível, então $\mathbb{Z}_p$ e $F[x]/(p(x))$ são conjuntos. Temos primos em $\mathbb{Z}$ e irredutíveis em $F[x]$ tem essencialmente o mesmo papel na estrutura de classe de congruência de anéis.

Nossa primeira tarefa em anéis comutativos arbitrários é encontrar algum modo razoável para descrever este papel em termos de ideais.

① De acordo com o teorema 1.5: um inteiro "p" diferente de zero (ou melhor ± 1) é primo se e somente se, "p" tem esta propriedade.

sempre que $p|bc$, então $p|b$ ou $p|c$.
Ao dizer que $p|a$ significa que $\underline{a}$ é múltiplo de p, isto é, $\underline{a}$ é um elemento do ideal principal (p) de todos os múltiplos de p.

Seja A um anel e I um ideal de A. O ideal será chamado "um ideal principal" de A se existir $x \in A$, tal que: $I = A.x$.

Assim $\underline{a}$ é um elemento que é múltiplo de Ax.

Assim esta propriedade dos primos pode ser reescrita em termos de ideais:

"Se $p \neq 0, \pm 1$, então p é primo se e somente se sempre que $bc \in (p)$, então $b \in p$ ou $c \in p$."

A condição $p \neq \pm 1$ garante que 1 não é múltiplo de p e, assim, temos que o ideal (p) não é todo $\mathbb{Z}$! Usando esta situação como um modelo, temos:

<u>Definição</u>: Um ideal P em um anel comutativo R é dito ser primo se $P \neq R$ e sempre que $bc \in P$, então $b \in P$ ou $c \in P$.

<u>Exemplo</u>: ① Dado um ideal principal (p) é primo em $\mathbb{Z}$ sempre que p é um inteiro primo.
Por outro lado, o ideal $P = (6)$ não é primo em $\mathbb{Z}$ porque $2.3 \in P$, mas $2 \notin P$ e $3 \notin P$.

Isto porque os elementos devem ser multiplos de p, ou seja, multiplos de 6:

$$P=(6)=\{6,12,18,\ldots\}$$

Exemplo: O ideal zero em qualquer domínio de integridade R é primo, porque $ab=0_R \longrightarrow a=0_R$ ou $b=0_R$.

Teorema 6.14: Temos P sendo um ideal em um anel comutativo R com identidade. Então P é um ideal primo se e somente se o anel quociente R/P é um domínio de integralidade.

Domínio de integridade: é um anel comutativo com identidade sem divisores de zero.
Em um anel A, um divisor de zero é um elemento diferente de zero que, multiplicado por outro elemento também diferente de zero, gera zero.

Exemplo 6: ideal (3) em $\mathbb{Z}$, então $\mathbb{Z}/(3)=\mathbb{Z}_3$

é um conjunto. Tomamos um J (ideal) sendo que: $(3)\subseteq J\subseteq \mathbb{Z}$. Se $J\neq(3)$, então existe $a\in J$ com $a\notin 3$.

$$(3)\subseteq \underset{a\in J}{J}\subseteq\mathbb{Z},\ e\ 3\nmid a\ e\ a,3\ \text{são primos entre si.}$$

Assim, existe inteiros u, v, tal que: $3u+av=1$.
Como 3, a estão no ideal J, segue que: $1\in J$.

Assim $J = \mathbb{Z}$, e não existem ideais estritamente entre (3) e $\mathbb{Z}$.

Definição: Um ideal M em um anel R é dito ser maximal se $M \neq R$ e sempre que J é um ideal sendo que $M \subseteq J \subseteq R$, então $M = J$ ou $J = R$.

$\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

. $\{0, 2, 4\}$ é um ideal em $\mathbb{Z}6$, porque atende as propriedades.

. $\{0, 3\}$ é um ideal, $\{0,3\} \subseteq \mathbb{Z}6$ ($\{0,3\} < \{0,2,4\}$

$\{0,2,4\} \subseteq \mathbb{Z}6$ (

Teorema 6.15: Temos M sendo um ideal em um anel comutativo R com identidade. Então M é um ideal maximal, se e somente se, o anel quociente R/M é um conjunto.

Corolário: Em um anel comutativo R com identidade, cada ideal maximal é primo.

Exemplo: Temos T sendo um anel de funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ e temos I sendo um ideal de funções g sendo que $g(2) = 0$. Assim T/I é um conjunto isomorfo para $\mathbb{R}$.

Portanto, I é um ideal maximal em T.

Ideais Primos:

① Definição: Sejam A um anel. Seja p um ideal primo de A. Dizemos que p é um ideal primo de A se para quaisquer $a, b \in A$ tais que $a \cdot b \in p$ tem-se que $a \in p$ ou $b \in p$.

Exemplo: Se $p \in \mathbb{Z}$ primo $\rightarrow$ (p) é um ideal primo de $\mathbb{Z}$.
Ideal gerado

Proposição: Se A um anel A. Então A é um domínio, se e somente se, (0) é um ideal primo de A.
Ideal Nulo

Proposição: Sejam A um anel e p um ideal próprio de A. Então A/p é um domínio se e somente se, p é um ideal primo de A.

Proposição: Seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Se q é um ideal primo de B, então $f^{-1}(q)$ é um ideal primo de A.

Proposição: Sejam A um anel e a um ideal de A. Considere o homomorfismo quociente:

$$\pi: A \longrightarrow A/q$$
$$x \longrightarrow x+q \text{ (classe de } x)$$

Ex: Seja $p \in \mathbb{Z}_+^*$ primo. Então $\langle p \rangle$ é um ideal primo em $\mathbb{Z}$.

- $\langle p \rangle \subsetneq \mathbb{Z}$, pois $1 \notin \langle p \rangle$. (1 não é multiplo de $\langle p \rangle$)

Com isso, tomamos a definição:

Sejam A um anel comutativo com 1 e $P \subset A$ ideal. Diremos que P é ideal primo em A quando:

i) $P \subsetneq A$
ii) dados $a, b \in A$ tais que $a.b \in P$, então $a \in P$ e $b \in P$.

• Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que: $a.b \in \langle p \rangle \to a b = m.p$ com $m \in \mathbb{Z}$

$\to p \mid a.b$
$\to p \mid a$ ou $p \mid b$
$\to a = t.p$ ou $b = s.p$ com $t, s \in \mathbb{Z}$
$\to a \in \langle p \rangle$ ou $b \in \langle p \rangle$

<u>Definição</u>: Sejam A anel comutativo com 1 e $M \subset A$. Diremos que M é ideal maximal em A quando:

i) $M \subsetneq A$
ii) Se I é ideal tal que $M \subset I \subset A$, então $M = I$ ou $I = A$.

<u>Observação</u>: Sejam A anel comutativo com 1 e $I \subset A$ ideal. Então $I = A$ se, e somente se, $1 \in I$.

De fato, se $A = I$ temos que $1 \in I$.

Reciprocamente se $1 \in I$, então dado $x \in A$ temos: $x = 1 \cdot x \in I$ (pela lei de absorção). Logo $A \subset I \longrightarrow I = A$

Ex: $F_a(\mathbb{R})$ é ideal maximal em $F(\mathbb{R})$.
↳ conjunto das funções que se anulam em a

Com efeito: $F_a(\mathbb{R}) \subsetneq F(\mathbb{R})$, pois $1 \notin F_a(\mathbb{R})$

Seja J ideal tal que $F_a(\mathbb{R}) \subsetneq J \subset A$. Sendo $F_a(\mathbb{R}) \subsetneq J$, tome $f \in J$ tal que $f \notin F_a(\mathbb{R})$. Dessa forma $f(a) = k \neq 0$.

Agora defina a função $h = f - k$ e observe que $h \in F_a(\mathbb{R})$, pois: $h(a) = f(a) - k = k - k = 0$.

Note que: $k = f - h \in J$. Dessa forma,

$1 = k \cdot k^{-1} \in J$. Pela observação anterior $J = F(\mathbb{R})$

<u>Proposição</u>: Seja A anel comutativo 1. Então são equivalentes:

i) A é corpo
ii) $\{0\}$ é ideal maximal em A
iii) os únicos ideais em A são $\{0\}$ e A