Seja A um anel, e seja M um conjunto não-vazio e suponha que existam funções:

$$+ : M \times M \longrightarrow M$$
$$(u,v) \longrightarrow u+v$$

$$\cdot : A \times M \longrightarrow M$$
$$(a,v) \longrightarrow av$$

$(M, +, \cdot)$

① Dizemos que M é um módulo sobre A (ou A-módulo) se:

1) $u+v = v+u$, $\forall u,v \in M$.;
2) $u+(v+w) = (u+v)+w$, $\forall u,v,w \in M$
3) Existe $0_M \in M$, elemento neutro da soma tal que $v+0_M = v$, $\forall v \in M$.; $0_M+v=v$

4) Para todo $v \in M$, existe $-v \in M$ (inverso aditivo de v), tal que $v+(-v) = 0_M$.;

5) $a(u+v) = au+av$ $\forall a \in A$ e $u,v \in M$
6) $\underbrace{(a+b)}_{\text{Soma de } A} v = \underbrace{av+bv}_{\text{Soma de } M}$ $\forall a,b \in A$ e $v \in M$

7) $\underbrace{a}_{A}\underbrace{(bv)}_{M} = \underbrace{(ab)}_{A}\underbrace{v}_{M}$, $\forall a,b \in A$ e $v \in M$

8) $\underbrace{1_A}_{A}\ \underbrace{v}_{M} = \underbrace{v}_{M}$, $\forall v \in M$

Propriedades:

1) O elemento neutro da soma em M é único.,

2) O inverso aditivo de qualquer elemento em M é único.,

3) $0_A v = 0_M, \forall v \in M$.,

4) $a 0_M = 0_M, \forall a \in A$.,

5) $(-1_A)v = -v$

Exemplos:

1) Todo espaço vetorial sobre um corpo K é um K-módulo.

2) Sejam A um anel e (a) um ideal de A. As operações $(+)$ e $(\cdot)$ em A induzem operações.

$$+ \Big| \begin{array}{l} : (a) \times (a) \longrightarrow (a) \\ (x, y) \longrightarrow x + y \end{array} \qquad \cdot \Big| \begin{array}{l} : A \times (a) \longrightarrow (a) \\ (\alpha, x) \longrightarrow \alpha x \end{array}$$

em a e: $(a, +|_a, \cdot|_a)$ é um A-módulo

Assim, todo ideal de um anel A é um A-módulo.

3) Seja A um anel, com a operação:

$$\cdot : \mathbb{Z} \times A \longrightarrow A \qquad \Big\{ A \text{ é um } \mathbb{Z}\text{-módulo}$$
$$(n, x) \longrightarrow nx$$

4) $\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo com a soma usual de $\mathbb{Z}/_{N\mathbb{Z}}$ e o produto.

$$\bullet : \mathbb{Z} \times \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$$

$$(m, \bar{x}) \longrightarrow m\bar{x} = \overline{mx}$$

Exemplo: Seja V um K-espaço vetorial, se $\alpha \in K$ e $v \in V$ tais que $\alpha v = 0_V$ então $\alpha = 0_K$ e $v = 0_V$.
Mas para módulos:

$$a \in A \text{ e } v \in M, \ av = 0_M \not\longrightarrow a = 0_A \text{ ou } v = 0_M$$

Exemplo: $M = \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$ sobre $\mathbb{Z}$

módulo

$$\underbrace{2}_{\neq 0_{\mathbb{Z}}} . \underbrace{\bar{2}}_{\neq 0_M} = \overline{2.2} = \bar{4} = \bar{0} = 0_M$$

Submódulos

Seja M um A-módulo. Um subconjunto $N \subset M$ é chamado A-submódulo de M se:

1) $0_M \in N$,
2) $u + v \in N$, $\forall u, v \in N$
3) $av \in N$, $\forall a \in A$ e $v \in N$

Exemplos:
1) $\{0_M\} = \langle 0_M \rangle$ é um A-submódulo de M
2) M é um A-submódulo de M

Proposição: Seja M um A-módulo. Se (N_i) com $i \in I$ é uma coleção de A-submódulo de M então $\bigcap_{i \in I} N_i$ é um A-submódulo de M.

Demonstração:

i) Temos $0_M \in N_i$, $\forall i \in I \rightarrow 0_M \in \bigcap_{i \in I} N_i$

Obs: $0_M \in N \leftarrow au + v \in N$ $\forall u, v \in N$ e $a \in A$.

ii) Sejam $u, v \in \bigcap_{i \in I} N_i$ e $a \in A$, para cada $i \in I$ e como N_i é A-submódulo de M então $au + v \in N_i$. Logo, $au + v \in \bigcap_{i \in I} N_i$.

O submódulo gerado por um subconjunto

Sejam M um A-módulo e $S \subseteq M$, com $S \neq \emptyset$, um subconjunto.

Defina:

$$\underset{(S)}{\underset{\shortparallel}{A.S}} = \begin{cases} v \in M \mid \text{existem } n \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_n \in S \\ \text{e } a_1, \dots, a_n \in A \text{ tais que} \\ v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n. \end{cases}$$

Temos que $A.S$ é um A-submódulo de M. (Chamado A-submódulo gerado por S)

i) Como $S \neq \emptyset$ então existe $u \in S$, logo:
$0_M = 0_A . u \in A.S$

ii) Sejam $u, v \in A.S$ e $a \in A$, podemos escrever

$u = \sum_{i=1}^{M} a_i u_i$ e $v = \sum_{j=1}^{N} b_j v_j$, com $a_1, \dots, a_M$, $b_1, \dots, b_N \in A$ e $u_1, \dots, u_M, v_1, \dots, v_N \in S$.

Logo: $au + v = a \sum_{i=1}^{M} a_i u_1 + \sum_{j=1}^{N} b_j v_j$

$= a a_1 u_1 + \dots + (a a_M) u_M + b_1 v_1 + \dots + b_N v_N \in A.S$

Definição: Um A-módulo M é finitamente gerado se existe $S \subseteq M$ finito tal que $M = A.S$.

Escrevendo $S = \{v_1, \dots, v_N\}$ denotamos:
$A.S = Av_1 + \dots + Av_N$

Sejam M um A-módulo e N um A-submódulo de M. Se $S \subseteq N$ então $A.S \subseteq N$.

Sejam M um A-módulo, $S \subseteq M$ e $S \neq \emptyset$ e seja $P := \{N \mid N$ é um A-submódulo de M com $S \subseteq N\}$, então $A.S = \bigcap_{N \in P} N$.

Em particular, $A.S$ é o menor A-submódulo de M que contém S.

Soma de Submódulos

Sejam M um A-módulo e $\{M_i\}_{i \in I}$ uma coleção de A-submódulos de M. Defina:

$\sum_{i \in I} M_i = \{v \in M \mid$ existem $i_1, \dots, i_N \in I$ e $v_{i_j} \in M_{i_j}, \forall j \in \{1, \dots, N\}$ tais que $v = v_{i_1} + \dots + v_{i_N}\}$.

$M_1 + M_2 = \{ v_1 + v_2 \mid v_1 \in M_1 \text{ e } v_2 \in M_2 \}$

Vamos mostrar que $\sum M_i$ é um A-submódulo de M (chamado soma $i \in I$ da coleção $\{M_i\}_{i \in I}$)

Tome $i_0 \in I$, como $0_M \in M_{i_0}$, então $0_M \in \sum_{i \in I} M_i$.

Sejam $u, v \in \sum_{i \in I} M_i$ e $a \in A$, podemos escrever

$u = u_{i_1} + \dots + u_{i_r}$ e $v = v_{t_1} + \dots + v_{t_s}$, com $i_1, \dots, i_r, t_1, \dots, t_s \in I$, $u_{i_j} \in M_{i_j}$, $\forall j \in \{1, \dots, r\}$ e $v_{t_\ell} \in M_{t_\ell}$, $\forall \ell \in \{1, \dots, s\}$.

Logo: $au + v = (au_{i_1} + \dots + au_{i_r}) + (v_{t_1} + \dots + v_{t_s})$

Temos que: $au_{i_1} \in M_{i_1}$, $au_{i_r} \in M_{i_r}$ e $v_{t_1} \in M_{t_1}$, $v_{t_s} \in M_{t_s}$. Temos uma soma finita de elementos dentro de M_i.

Assim por definição esta contido no submódulo M_i. Também contém o elemento neutro e é fechado para a soma.

Exemplo: $M_j \subseteq \sum_{i \in I} M_i$, $\forall j \in I$, então $M_1 \subseteq M_1 + M_2$

Se $u \in M_1$ e $u = u + 0_M$, onde $u \in M$ e $0_M \in M_2$, temos que $u \in (M_1 + M_2)$.

Seja M um A-módulo, se $\{M_i\}$ é uma cadeia de A-submódulos de M $i \in I$, então:

$\bigcup M_i$ é um A-submódulo de M

Num anel A, um subconjunto a de A é um ideal, se e somente se, é um A-módulo.