$N \leq G$. Suponha que para cada $a \in G$ existe $b \in G$ tal que $aN = Nb$

Mostrar que N é um subgrupo normal

$\Downarrow$

$\boxed{N \text{ é normal em } G \text{ se } \forall c \in G \quad cN = Nc}$

$c \in G \Rightarrow \exists d \in G \quad cN = Nd$

elemento neutro

Como $e \in N \Rightarrow \underset{\overset{\|}{c}}{ce} \in cN = Nd$

$\Rightarrow \boxed{c \in Nd}$ Logo existe $f \in N$ tal que $\boxed{c = fd}$

$\underbrace{fdN = Nd}$ $\Rightarrow \underbrace{f^{-1}f}dN = \underbrace{f^{-1}N}_{\overset{\|}{N}}d$

$dN = Nd$

$cN = Nd \Rightarrow cN \ni d$

$cg = d$ com $g \in N$

$cN = Ncg \Rightarrow cNg^{-1} = Ncgg^{-1}$

$\boxed{cN = Nc}$ $\forall c \in G$

Logo N é normal em G

Pag 211 - 14

H K subgrupos de G

ⓐ Mostrar um exemplo tal que $H \cup K$ não é subgrupo

$\mathbb{Z}_{20} = \{0, 1, 2, \ldots, 19\}$ $(\mathbb{Z}_{20}, +)$

é um grupo com 20 elementos

$H = \{0, 4, 8, 12, 16\}$ $H \leqslant \mathbb{Z}_{20}$

$K = \{0, 5, 10, 15\}$ $K \leqslant \mathbb{Z}_{20}$

$H \cup K = \{0, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 16\}$ não é subgrupo

$4+5=9 \notin H \cup K$ não é fechado pela operação !!

(b) Prove que $H \cup K$ é grupo $\Leftrightarrow$ $\underbrace{H \subseteq K \text{ ou } K \subseteq H}$

$(\Rightarrow)$

Suponhamos que $H \nsubseteq K$

Logo $H \setminus K \neq \emptyset$ $\quad$ fixo $\quad$ $\underline{h} \in H \setminus \underline{K}$

Seja $\underline{\underline{a \in K}}$ arbitrário $\quad$ $h, a \in \underbrace{H \cup K}$

e estamos supondo que $H \cup K$ é grupo $\Rightarrow$ $h \cdot a \in \underline{H} \cup \underline{K}$

temos 2 possibilidades $\rightarrow$

(i) $\underbrace{h \cdot a} \in H$ $\quad \Rightarrow a \in h^{-1}(h \cdot a) \in \underline{\underline{H}}$

ou

(ii) $h \cdot a \in K$ $\quad h = (\underline{h \cdot a})\, \underline{a^{-1}} \in K \leftarrow$ é contraditório ((ii) nunca é possível

Logo (i) sempre é verdadeiro

Logo $H \subseteq K$

($\Leftarrow$) Se $H \subseteq K \Rightarrow \underline{\underline{H \cup K = K}}$

qe é grupo

Se $K \subseteq H \Rightarrow H \cup K = H$

qe também é grupo.

---

subgrupos

Se $H, K \leq G$ então

$H \cap K$ é subgrupo

$a, b \in H \cap K \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} a,b \in H \Rightarrow a \cdot b \in H \\ a,b \in K \Rightarrow a \cdot b \in K \end{array}\right\}$

$\underline{\underline{a \cdot b \in H \cap K}}$

<u>Exemplos de aneis</u>

$+, \cdot$ são definidas coordenada a coordenada

$A = \underline{\underline{\mathbb{Z}_{20}}}$ $\quad B = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$

$= \left\{ (a,b) \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}_4 \\ b \in \mathbb{Z}_5 \end{array} \right\}$

$$\begin{aligned} \psi : A &\longrightarrow B \\ c &\longrightarrow (c \bmod 4, c \bmod 5) \end{aligned}$$

$$\varphi(6) = (6 \bmod 4, 6 \bmod 5)$$
$$= (2, 1)$$

- φ é um isomorfismo de aneis
- φ está bem definido? ✓

Seja $c, d \in \mathbb{Z}$ $\quad c \equiv d \bmod 20$

20 divide $c-d$ $\to$ 4 divide $c-d$
$\to$ 5 divide $c-d$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} c \equiv d \bmod 4 \\ c \equiv d \bmod 5 \end{array}$$

φ é homomorfismo?

$$\varphi(c+d) = (c+d \bmod 4, c+d \bmod 5)$$

$$= \underbrace{(c \bmod 4, c \bmod 5)}_{\varphi(c)} + \underbrace{(d \bmod 4, d \bmod 5)}_{\varphi(d)}$$

✓

de igual forma se prova que

$$\varphi(c \cdot d) = \varphi(c) \cdot \varphi(d)$$ ✓

$\psi(1) = (1 \bmod 4, 1 \bmod 5)$ ← neutro para o produto

$\psi(0) = (0 \bmod 4, 0 \bmod 5)$ ← neutro para a soma

ψ é isomorfismo? → injectivo

$\psi(c) = (0, 0) \Leftrightarrow$ $c \equiv 0 \bmod 4$

$c \equiv 0 \bmod 5$

$\Rightarrow \quad c \equiv 0 \bmod 20$

Logo c está na classe do zero em $\mathbb{Z}_{20}$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(\psi) = \{0\} \Rightarrow \psi$ é <u>injetivo</u>.

$|\mathbb{Z}_{20}| = \underline{20} \qquad |\mathbb{Z}_4| = 4 \quad |\mathbb{Z}_5| = 5$

$\Rightarrow \quad |\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5| = \underline{20}$

Logo ψ é sobre

$A = \mathbb{Z}_{n \cdot m}$ $\qquad B = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi : \mathbb{Z}_{n \times m} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \\ \quad a \longrightarrow (a \bmod n, a \bmod m) \end{array} \right.$$

homomorfismo.

Se $\psi(a) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{array}{l} a \equiv 0 \bmod n \\ a \equiv 0 \bmod m \end{array}$

$\Rightarrow$ a é divisível mmc(n,m)

no caso mdc$(n,m) = 1$

$\Rightarrow$ mmc$(n,m) = nm$ e nesse caso

$\mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$ e logo é injetivo.

Pag 149 - 7 : $c \in R$ $\qquad I = \{rc \mid r \in R\}$

I é ideal à esquerdo

$$\boxed{I \subseteq R \text{ é ideal à esquerda} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall s \in R \\ \forall i \in I \end{array} \; si \in I}$$

$I \subset R$ é <u>ideal</u> de R se I é ideal à esquerda e à direita

No caso R comutativo

(a) $I = \{rc \mid r \in R\} = \{cr \mid r \in R\}$

$s \in R$, $rc \in I$ $\qquad rc \cdot s = \underbrace{rs}_{R} \cdot c \in I$

(c) Exemplo R não comutativo tal que I é ideal à esquerda mas não ideal à direita!

$$R = M(2, \mathbb{Q})$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

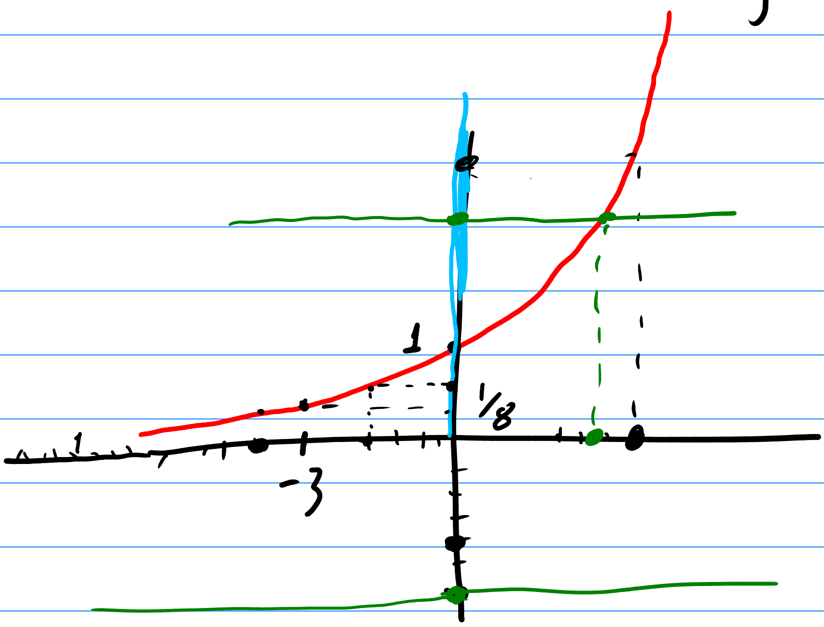
$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é um ideal à esquerda

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}}_{\in I \setminus \{\vec{0}\}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in R} = \begin{pmatrix} a & a \\ f & f \end{pmatrix} \notin I$$

Logo I não é ideal à direita.

Pag 223 - 8



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$

$x \mapsto 2^x$

$-3 \mapsto 1/8$

$\leftarrow -3$

$Im(f) = \mathbb{R}_{>0}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$

$x \mapsto 2^x$

é uma bijeção

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injetiva ✓

$a \mapsto 2a$

$? \longrightarrow 1$

$g: \mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathbb{N}$ é injetiva?

$\frac{a}{b} \longmapsto 2^a \cdot 3^b$ $\frac{c}{d} \mapsto 2^c 3^d$

$(a\ b) = 1$

Não é sobre $\qquad ? \longmapsto 5$

$$\boxed{\text{Isomorfismo} = \text{homomorfismo} + \text{bijeção}}$$

$$\boxed{\text{homomorfismo}: \quad \begin{array}{l} \psi(a \cdot b) = \psi(a) \cdot \psi(b) \qquad \psi(a^{-1}) = \psi(a)^{-1} \\ \psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b) \end{array}}$$

$$\overset{20}{\mathbb{Z}_{20}} \to \overbrace{\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_4}^{40} \qquad \text{homomorfismo.}$$

$$a \longmapsto (a \bmod 10,\ a \bmod 4)$$

Pag 223 - 2 $\qquad g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ $\qquad$ isomorfismo de grupos

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

$\mathbb{R}_{>0}$ não é grupo com $+$ pois $2 \in \mathbb{R}_{>0}$ na tem inverso em $\mathbb{R}_{>0}$

$\mathbb{R}_{>0}$ é grupo com o produto!!

$a \in \mathbb{R}_{>0} \qquad a^{-1} \in \mathbb{R}_{>0}$ ✓

- $g(a^{-1}) = \sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} =$

$$= (\sqrt{a})^{-1} = (g(a))^{-1} \checkmark$$

- $g(ab) = \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$$= g(a) \cdot g(b) \checkmark$$

Logo g é homomorfismo de grupos.

$$g(a) = g(b) \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b$$

Logo injetivo

Seja $c \in \underline{\underline{\mathbb{R}_{>0}}}$ $\Rightarrow$ consideremos o polinomio $P(x) = x^2 - c$. tem raizes reais $P(0) = -c < 0$ $\lim_{x \to \infty} P(x) = \infty$

Como P é contínua $\exists\, d \in (0, \infty)$ tal que $P(d) = 0 \Rightarrow d^2 - c = 0$

$\Rightarrow$ $d = \sqrt{c}$ ou $d = -\sqrt{c}$ mas $d > 0$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{d = \sqrt{c}}}$

Logo g é sobre

Pag 160 + 14 I ideal de R

Prove que todo elemento em R/I é solução de $x^2 = x$ $\Leftrightarrow$ $\forall a \in R$ se tem $a^2 - a \in I$

($\Rightarrow$) $a \in R$ $\Rightarrow$ $\bar{a} \in R/I$

$\bar{a}^2 = \bar{a}$ $\Rightarrow$ $\bar{a}^2 - \bar{a} = \bar{0} \in$

$\overline{a^2 - a} = \bar{0}$ $\Rightarrow$ $a^2 - a \in I$

($\Leftarrow$) Seja $\bar{c} \in R/I$ e seja

$c \in R$ representante $\Rightarrow$ $c^2 - c \in I$

$\overline{c^2 - c} = \bar{0}$ $\Rightarrow$ $\bar{c}^2 - \bar{c} = \bar{0}$ $\Rightarrow$ $\bar{c}^2 = \bar{c}$

$\bar{c} \in R/I$ é solução $x^2 = x$

$R = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \qquad I = 2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}$

$= \{(2a, 2b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$$R/I \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}_{} \ni (\bar{a}, \bar{b}) = x$$

$\bar{a}, \bar{b} \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$$x^2 = (\bar{a}, \bar{b})^2 = (\bar{a}, \bar{b})\cdot(\bar{a}, \bar{b})$$
$$= (\bar{a}\cdot\bar{a}, \bar{b}\cdot\bar{b})$$
$$= (\bar{a}^2, \bar{b}^2) = (\bar{a}, \bar{b})$$
$$= \underset{\sim}{x}$$

$$(a,b)^2 - (a,b) = (\underbrace{a^2 - a}_{\text{par}}, \underbrace{b^2 - b}_{\text{par}}) \in I$$

"Prova" $\leftrightarrow$ Moodle

<u>Prova</u>: $\left\{\begin{array}{l}\text{Abre } 16{:}40 \\ \text{Fecha } 23{:}00\end{array}\right\}$

$\hookrightarrow$ Tem 3 horas para fazer.

Tem que postar a solução de cada problema (pdf)

- Grupos exemplos até homomorfismo
- Aneis exemplo ideais homomorfismo (isomorfismo)

$$\varphi: A \longrightarrow B \quad \text{aneis}$$

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq A \longrightarrow \text{Ideal}$$

$$\left(\frac{A}{\mathrm{Ker}(\varphi)}, +, \cdot\right)$$

$$\frac{A}{\mathrm{Ker}\,\varphi} \longrightarrow B \quad \text{homomorfismo injetivo}$$

$$\bar{a} \longmapsto \varphi(a)$$

$$\frac{A}{\mathrm{Ker}} \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \quad \text{isomorfismo}$$