Aneis Noetherianos $\boxed{\text{(comutativo)}}$?

A é Noetheriano se todo ideal é finitamente gerado, i.e.

Dado $I \subseteq A$ existem $\underbrace{x_1, \dots, x_k}_{} \in I$ tal que $\forall a \in I$ existem $b_1 \dots b_k \in A$ tal que

$$a = \underbrace{b_1 x_1 + b_2 x_2 \dots + b_k x_k}_{I \text{ ideal à esquerda}}$$

$$a = \underbrace{x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_k b_k}_{I \text{ ideal à direita}}$$

<u>Def</u>: Dizemos que A cumpre a condição da cadeia ascendente se

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq, \quad \subseteq A$

cadeia ascendente de ideais então existe $N \geq 1$ tal que $\forall n \geq N \quad I_n = I_N$

((usamos que é comutativo?))

<u>Teorema</u>: A é Noetheriano $\Leftrightarrow$ cumpre a condição da cadeia ascendente

$\mathbb{Z}$ é DIP $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ é noetheriano

$\mathbb{Z}[x]$ é noetheriano ??

Teorema da Base de Hilbert: Se A anel noetheriano, então $\underline{A[x]}$ é noetheriano

<u>Prova</u>: Seja $J \subseteq A[x]$ ideal de $A[x]$. Queremos mostrar que J é finitamente gerado. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

Por enquanto conjunto $\rightarrow$ $I_n = \left\{ a \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} a \text{ é coeficiente líder} \\ \text{de um polinômio em } J \\ \text{de grau } n \end{array} \right\}$

Afirmação: I_n é ideal: $a, b \in I_n$

$\exists\, f(x) = ax^n + \dots \in J$
$g(x) = bx^n + \dots \in J$ $\Rightarrow f(x) + g(x) = (a+b)x^n + \dots \in J$

$\Rightarrow \underline{a+b \in I_n}$

Se $a \in I_n \Rightarrow f(x) = ax^n + \dots \in J$ e se $c \in A$

$\Rightarrow c f(x) \in J \Rightarrow c f(x) = cax^n + \dots \in J$ ✓

$\boxed{f(x)c \in J \Rightarrow f(x)c = acx^n + \dots \in J}$ ✓

$\Rightarrow \quad ac \in I_n \quad \forall c \in A$

$\Rightarrow \quad I_n$ é ideal

Se $a \in I_n \Rightarrow \exists f(x) = a x^n + \cdots \in J \subset A[x]$

$\Rightarrow \quad x f(x) = a x^{n+1} + \cdots \in J$

Logo $a \in I_{n+1} \Rightarrow I_n \subseteq I_{n+1}$

$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots I_k \subseteq \cdot \quad \subseteq A$

Mas A é Noetheriano. Logo existe $N \geq 0$ tal que $\underline{\underline{I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \cdots}}$

Alem disso todos os I_n são finitamente gerados, logo

$I_j = \langle a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{t_j j} \rangle \quad 0 \leq j \leq N$

$\rightarrow t_j$ geradores

$\exists \; f_{1j} = a_{1j} x^j + \cdots, \; f_{2j} = a_{2j} x^j + \cdots$ etc

$\quad\;\; \cap \qquad\qquad\qquad \cap$

$\quad\;\; J \qquad\qquad\qquad J$

$S = \langle \overbrace{f_{10}\, f_{20} \ldots f_{t_0 0}}, \; f_{11}\, f_{21} \ldots f_{t_2 1} \ldots f_{1N} \ldots f_{t_N N} \rangle$

Assim $S \subseteq J$

Afirmação $S = J$ (Temos que mostrar $J \subseteq S$)

Indução sobre o grau dos polinomios

- $n=0$ Se $f \in J$ polinomio de grau 0

$\Rightarrow$ $\underline{f}$ é uma constante (Logo f é em si seu coeficiente principal

$\Rightarrow f \in I_0$ $\quad f \in \langle f_{10}, f_{20}, \ldots, f_{t_0 0} \rangle \subseteq S$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overset{\shortparallel}{I_0}$

O caso inicial está provado

H.I.: Suponhamos que se $f \in \underline{J}$

e $\deg(f) < k$ $(k>0)$ então

$f \in S$

$\boxed{k \in N}$

Passo indutivo: Seja $\underline{f} \in J$, $\deg(f) = k$

$f(x) = a x^k + \ldots$ e $a \in I_k$

Geradores de

$a = \underline{c_1} a_{1k} + c_2 a_{2k} + \ldots c_{t_k} a_{t_k k}$

(Podemos mult a direita

$$\underbrace{f_{1k} \qquad f_{2k} \qquad f_{t_k k}}_{\text{tem grau } k} \in S$$

$$h = c_1 f_{1k} + c_2 f_{2k} + \cdots + c_{t_k} f_{t_k k} \in S \subseteq J$$
$$= \underline{a}\, x^k + \cdots$$

$\underset{\in J}{f} - \underset{\in J}{h}$ • tem grau $< k$

• $f-h$ está em J

Logo por HI $f-h \in S$

$$\Rightarrow f = (\underset{\in S}{f-h}) + \underset{\in S}{h} \in S$$

Caso $k > N$: Seja $f \in J$, $\deg(f) = k$

$$f(x) = a x^k + \cdots \quad e \quad a \in I_k = I_N$$

$$a = c_1 \underset{f_{1N}}{a_{1N}} + c_2 \underset{f_{2N}}{a_{2N}} + \cdots c_{t_N} \underset{f_{t_N N}}{a_{t_N N}}$$

tem grau N

$$h = \underbrace{c_1 f_{1N} + \cdots + c_{tN} f_{t_N N}}_{\text{tem grau } N} \in S \subset J$$

$$= a x^N + \cdots$$

$$\underset{\substack{\| \\ a x^k + \cdots}}{x^{k-N} h} \in S \subset J$$

$$\underset{\substack{\cap \\ J}}{f} - \underset{\substack{\cap \\ J}}{x^{k-N} h} \in J$$

Logo $\text{gra}\left(f - x^{k-N} h\right) < K$

Por HI $\quad f - x^{k-N} h \in S$

$$\Rightarrow \quad f = \underset{\substack{\cap \\ S}}{\left(f - x^{k-N} h\right)} + \underset{\substack{\cap \\ S}}{x^{k-N} h} \in S$$

$\Rightarrow \quad J \subseteq S$ e portanto são iguais.

Corolário: Se A é noetheriano então $A[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ é noetheriano

Def: Seja A anel definimos

$$A[[x]] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \mid a_j \in A \}$$

é anel

$$U(A) = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \;\middle|\; \begin{array}{l} a_j \in A \\ a_0 \in U(A) \end{array} \right\}$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + \cdots) = 1$$

$$\boxed{\underbrace{a_0 b_0}_{=1}} + (\underbrace{a_1 b_0 + a_0 b_1}_{=0}) x + (\underbrace{a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2}_{=0}) x^2 + \cdots = 1$$

Se $a_0 \in U(A) \Rightarrow \exists\, b_0$ com $a_0 b_0 = 1$

$$b_1 = -a_0^{-1}(a_1 b_0)$$

$$b_2 = -a_0^{-1}(a_2 b_0 + a_1 b_1)$$ e segue indutivamente

Teorema: Se A é noetheriano então $A[\![x]\!]$ é noetheriano

Algebra Comutativa em quatro movimentos Hemivelto Borges & Eduardo Tengan Cap 6 pag 184

Prova: Na prova anterior construímos I_n usando o grau dos polinômios.

$$\gamma : A[\![x]\!] \to \mathbb{N}$$

$$S(x) \longmapsto \gamma(S(x)) = n \quad \text{tal que}$$

$$S(x) = \underline{a x^n} + a_{n+1} x^{n+1} + \dots \quad \text{onde} \quad a \neq 0$$

$$\gamma(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots) = 1$$

$$\gamma(5x^6 + 6x^7 + 7x^8 + \dots) = 6$$

$\gamma_{5} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $a \longmapsto k$ → onde k é o maior número natural tal que 5^k divide a

$$\boxed{\begin{aligned} \nu_5 &: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \\ &\tfrac{a}{b} \mapsto \nu_5(a) - \nu_5(b) \end{aligned}}$$

Dado um ideal $J \subset A[[x]]$

definimos para cado $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \{ a \in A \mid \text{existe } s(x) \in J \text{ com } s(x) = \underline{a}\, x^n + \cdots \}$$

- $I_n \subset \underline{A}$ é ideal
- $I_n \subset I_{n+1}$

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subset A$$

$\exists N > 0$ tal que $I_N = I_{N+1} = I_{N+1} = \cdots$

Cada I_j é finitamente gerado

$a_{ij} \rightsquigarrow f_{ij} \rightsquigarrow \tilde{S}_j$

Da para adaptar a prova anterior

$f_1(x_1 \dots x_n)$ $f_2(x_1, x_2 \dots x_n)$ .... $f_m(x_1 \dots x_n)$

pode ser infinto $A[x_1 \dots x_n]$

Que podemo dizer das soluções do sistema

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \vdots \\ f_m = 0 \\ \vdots \end{array}\right.$$

$S_\Delta \Rightarrow$

o conjunto solução do sistema

$I = \langle f_j \rangle_{j \in \Delta}$ Δ infinito

Se A é Noeteriano $\Rightarrow$ I é finitamente gerado

$I = \langle f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_t} \rangle$ $t \in \mathbb{N}$

S_t o conjunto solução

$$\left\{\begin{array}{l} f_{i_1} = 0 \\ f_{i_2} = 0 \\ \vdots \\ f_{i_t} = 0 \end{array}\right.$$

Afirmação $S_\Delta \subseteq S_t$

Suponhamo $(a_1 a_2 \dots a_n) \in S_t$

$\Rightarrow \quad f_{i_j}(a_1 \dots a_n) = 0$ para $j = 1, 2, \dots, t$

Seja $u \in \Lambda$ a pergunta é o valor de $f_u(\underbrace{a_1 \dots a_n}_{\vec{a}}) = ??$

acontece que $f_u = I = \langle \underbrace{f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_t}}\rangle$

Logo $f_u = g_1 f_{i_1} + g_2 f_{i_2} \dots g_t f_{i_t}$

Com $g_j \in A[x_1, \dots x_n]$

$$f_u(\vec{a}) = g_1(\vec{a}) \underbrace{f_{i_1}(\vec{a})}_{0} + g_2(\vec{a}) \underbrace{f_{i_2}(\vec{a})}_{0} \dots + g_t(\vec{a}) \underbrace{f_{i_t}(\vec{a})}_{0}$$

$= 0$

$\Rightarrow \quad (a_1, \dots, a_n) \in S_\Lambda$

Teorema: Se A é Noetheriano e $I \subset A$ ideal então A/I é noetheriano

Prova: $J \subset A/I$

e para cada clase de J

Construimos $L = \{a \in A \mid \bar{a} \in J\}$

L é um ideal

- Se $a, b \in L$ $\quad \bar{a}, \bar{b} \in J \Rightarrow \underbrace{\bar{a} + \bar{b}}_{= \overline{a+b}} \in J$

$a+b \in J \Leftarrow$

- Se $a \in L$ $\quad c \in A \quad \bar{a} \in J \Rightarrow \underbrace{\bar{c}\,\bar{a}}_{= \overline{ca}} \in J$

$ca \in L \Leftarrow \overline{ca}$

- $L \supset I$: Pois se $c \in I \Rightarrow \bar{c} = \bar{0} \in J$

$\Rightarrow c \in L$

Mas L e A é finitamente gerado $L = \langle u_1, u_2 \dots u_s \rangle$

$\Rightarrow \overline{L} = \langle \overline{u}_1, \overline{u}_2 \dots \overline{u}_s \rangle = J$

Logo J é finitamente gerado

$$\underset{\downarrow \text{DIP}}{\mathbb{Z}} \Rightarrow \underset{\downarrow \text{Noetheriano}}{\mathbb{Z}[x]} \supseteq \langle 3x^2+2 \rangle$$

$$\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle 3x^2+2 \rangle}$$ é Noetheriano.

$\mathcal{C}$ $\sim$ $\to$ relação de equivalência
- $a \sim a$
- $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
- $a \sim b$ $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

$a \rightsquigarrow \mathcal{C}_a = \{ b \mid b \sim a \} \subset \mathcal{C}$

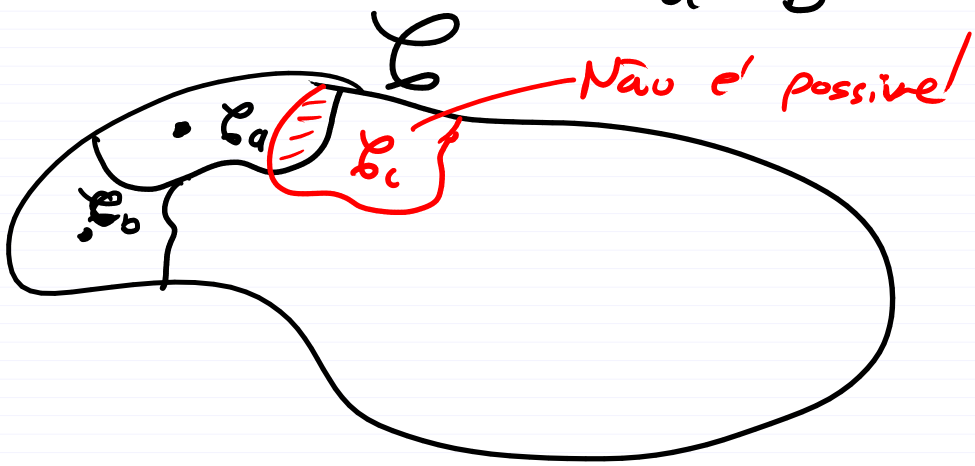
Se $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b \neq \phi \Rightarrow \mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b$

$c \in \mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b \Rightarrow a \sim b$

$a \sim c \qquad b \sim c$

Se $d \in \mathcal{C}_a \Rightarrow d \sim a \sim b \Rightarrow d \in \mathcal{C}_b$

$\Leftarrow \quad a \sim b \sim d \Leftarrow d \in \mathcal{C}_b$



Podemos escolher um conjunto $\{a_j\}_{j\in\Lambda}$

tal que

- $a_j \not\sim a_i \quad \forall i \neq j$
- $\forall a \in \mathcal{C} \ \exists j$ tal que $a \sim a_j$

$$\mathcal{C} = \bigsqcup_{j\in\Lambda} \mathcal{C}_{a_j}$$ → União disjunta.

Exemplo

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\qquad a \sim b \Leftrightarrow$ Se $a-b$ é divisível por n

---

Relação em A, B é um subconjunto de $A \times B \supseteq \mathcal{C}$

- $\forall a \in A \quad (a,a) \in \mathcal{C}$
- Se $(a,b) \in \mathcal{C} \Rightarrow (b,a) \in \mathcal{C}$
- $(a,b) \in \mathcal{C} \ (b,c) \in \mathcal{C} \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{C}$

A é DFU $\Rightarrow$ $A[x]$ é DFU

$$\Downarrow$$

$A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é DFU

10.5

10.5 + $\left\{\begin{array}{l}\text{Aneis Noetherianos} \\ \text{Teorema da Base de Hilbert}\end{array}\right.$

Cap 6 Herivelto e E.T.

$$\begin{array}{c} K \\ | \\ L \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \mathbb{Q}[\sqrt{n}] \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

$$\rightarrow \tau : \mathbb{Q}[\sqrt{n}] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$a \longmapsto a \qquad \forall a \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{n} \longmapsto ??$$

$\tilde{\tau} : \mathbb{Q}[\sqrt{n}][x] \to \mathbb{C}[x]$

$f(x) \to \tilde{\tau}(f(x))$

é aplicar τ sobre os coeficientes

$$\tilde{\tau}(x^2 - n) = x^2 - n$$

$$\tilde{\tau}((x - \sqrt{n})(x + \sqrt{n}))$$

$$(x - \tau(\sqrt{n}))(x + \tau(\sqrt{n}))$$

$$\tau(\sqrt{n}) = \sqrt{n} \quad \text{ou} \quad \tau(\sqrt{n}) = -\sqrt{n}$$

$$\begin{aligned} \tau_1 : \mathbb{Q}[\sqrt{n}] &\to \mathbb{Q}[\sqrt{n}] \\ a &\longmapsto a \\ \sqrt{n} &\longmapsto \sqrt{n} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tau_2 : \mathbb{Q}[\sqrt{n}] &\to \mathbb{Q}[\sqrt{n}] \\ a &\longmapsto a \\ \sqrt{n} &\longmapsto -\sqrt{n} \end{aligned}$$

$$\tau_1(a+b\sqrt{n}) = a+b\sqrt{n}$$

$$\tau_2(a+b\sqrt{n}) = a+b(-\sqrt{n}) = a-b\sqrt{n}$$

$$\begin{aligned} N(a+b\sqrt{n}) &= \tau_1(a+b\sqrt{n})\,\tau_2(a+b\sqrt{n}) \\ &(a+b\sqrt{n})(a-b\sqrt{n}) \\ &= a^2-b^2n \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto a \\ \sqrt[3]{2} &\longmapsto \,? \end{aligned}$$

$$\tilde{\tau}\big((x-\sqrt[3]{2})(x-\sqrt[3]{2}\,\xi_3)(x-\sqrt[3]{2}\,\xi_3^2)\big)$$

$$\tilde{\tau}(x^3-2) = \underline{x^3-2} = (x-\underline{\tau(\sqrt[3]{2})})(x-\tau(\sqrt[3]{2}\,\xi_3))(x-\tau(\sqrt[3]{2}\,\xi_3^2))$$

$\tau_1(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}, \quad \tau_2(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\,\zeta_3, \quad \tau_2(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\,\zeta_3^2$

$$N(\underline{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}}) =$$

$$(\underline{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}})(\underline{a + b\sqrt[3]{2}\zeta_3 + c\sqrt[3]{4}\zeta_3^2})$$

$$\cdot(\underline{a + b\sqrt[3]{2}\zeta_3^2 + c\sqrt[3]{4}\zeta_3})$$

$$= a^3 + 2b^3 + 4c^3 + \dots \quad \in \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{n}] \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} \subset L & \rightsquigarrow & N_{L|K} : L \to K \\ | & & \Big\downarrow \\ K & & N_{L|K}|_A : A \to \underline{K} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} L & \rightsquigarrow & \mathcal{O}_L = \{ a \in L \mid \text{a é raiz de um polinomio } \underline{\text{Mônico}} \text{ com coeficientes em } \mathbb{Z} \} \\ | & & \downarrow \\ \mathbb{Q} & \rightsquigarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

Este "conjunto" é chamado anel de inteiros de L

$$N : \mathcal{O}_K \to \mathbb{Z}$$

$A \to$ dominio

$$K = \{ (a,b) \in A \times A^* \} / \sim$$

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \qquad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 b_2 = b_1 a_2$$

$$(K +, \cdot)$$

$$\left.\begin{array}{c} L \\ | \\ A \subset \underline{K} \end{array}\right\} N : L \to K$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_K & L \\ D \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\subset"] & K \arrow[u, dash] \end{tikzcd}$$

$L \to$ extensão finita de K

$K \to$ corpos

$\tau : L \to \overline{L}$ homomorfismo que fixam K

$\{\tau_1 \ldots \tau_n\}$ $\qquad n = [L : K]$

$$N : L \to K$$
$$a \mapsto \prod_{j=1}^{n} \tau_j(a)$$

$$\mathcal{O}_L = \{ a \in L \mid a \text{ é raiz de um polinomio mônico com coeficientes em } D \}$$

$$U(\mathcal{O}_L) = \{ a \in \mathcal{O}_L \mid N(a) \in U(D) \}$$

$$\left.\begin{array}{c} L \\ | \\ K \end{array}\right\} \qquad N : L \to K \qquad n = [L : K]$$
$$a \mapsto \prod_{j=1}^{n} \tau_j(a)$$

$N: \mathbb{Q}(\sqrt{2}i) \to \mathbb{Q}$

$a+\sqrt{2}ib \mapsto a^2+2b^2$

$|a+\sqrt{2}b|^2 = a^2+2b^2$

$N: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}$

$a+\sqrt{2}b \mapsto \underbrace{a^2-2b^2}_{\text{Pode ser negativo}}$

$|a+\sqrt{2}b|^2 = a^2+2b^2+2\sqrt{2}ab$

$\mathbb{Q}(\sqrt{n}) \supset \mathcal{O}_{\sqrt{n}} \to$ que podemos dizer deste anel

- Somente é euclideano para um # finito de n
- Não é para todo n que é DIP
- Não é para todo n que é DFU

$\mathcal{O}_{\sqrt{n}}$ é Noetheriano ✓

→ São Domínios de Dedekind

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa

$D = K[[x]] \ni x^k$ não é invertível

→ Dominio

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^k + \dots}{bx^n + \dots}$$

$ab \neq 0$

$$= x^{k-n} \frac{a + \dots}{b + \dots}$$

$$= x^{k-n}\left(\underline{ab^{-1} + \dots}\right)$$

Logo o corpo quociente de $\underline{K[[x]]}$

é $= \left\{ x^n s(x) \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{Z} \\ s(x) \in K[[x]] \end{array} \right\}$

A noetheriano $\quad A = (1)$
