A) 1) Mostre que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$ é um isomorfismo de grupos aditivos.

Para ser um isomorfismo devemos mostrar que é um homomorfismo e bijetiva.

i) Homomorfismo: Sejam $m, n \in \mathbb{R}$, então:

$$f(x) = 3x \quad , \; m, n \in \mathbb{R}$$

$$f(m+n) = 3(m+n) = 3m + 3n = f(m) + f(n)$$

Portanto é um homomorfismo de $f(x)$ para uma operação aditiva dada por $f(x_1) + f(x_2)$.

ii) Injetividade: Temos $f: \mathbb{R} \to 3\mathbb{R}$ dada por $f(n) = 3n \; \forall n \in \mathbb{R}$.

$Nuc(f) = \{n \in \mathbb{R} \,/\, f(n) = 0\}$, mas:

$$f(n) = 0 \to 3n = 0 \to n = 0 \to Nuc(f) = \{0\}$$

e para $n \neq 0$ temos que $f(n) = 3n \; \forall n \in \mathbb{R}$,

Logo, f é injetivo.

iii) Sobrejetividade: Seja $y \in 3\mathbb{R}$. Então $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $y = 3x \to x = y/3 \in \mathbb{R}$

Logo: $f(x) = f(y/3) = \cancel{3}(y/\cancel{3}) = y \in \mathbb{R}$

Então, f é sobrejetivo.

Temos que $f(x) = 3x$ em $\mathbb{R}$ é um isomorfismo.

b) Temos R^{**} sendo um grupo multiplicativo de números reais positivos. Mostre que $f: R^{**} \to R^{**}$ dado por $f(x) = 3x$ não é isomorfismo de grupo.

R^{**}: conjunto de números reais positivos:
$\{0, 1, \ldots, \ldots, n, \ldots\}$

$(G, \circ)$ não é um grupo porque não existe inverso p/ zero.

Então tomamos R^{**} o conjunto de reais positivos diferentes de zero.
$\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$

Tomamos $m, n \in R$, então:

$$f(m \circ n) = 3.(m \cdot n) = 3m \cdot n = 3m \cdot n$$
$$= f(m) \cdot n$$

Portanto não é homomorfismo

2) Mostre que a função $g: R^{**} \to R^{**}$ dada por $g(x) = \sqrt{x}$ é um isomorfismo.

Lembramos que $\mathbb{R}^{+*}$ é o grupo multiplicativo dos números reais positivos. Então a operação em questão é a multiplicação.

- g é um homomorfismo: dados $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ temos que: $g(x, y) = \sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = g(x) \cdot g(y)$
- g é injetiva: se $g(x) = g(y)$ então $\sqrt{x} = \sqrt{y}$

$$(\sqrt{x})^2 = (\sqrt{y})^2 \longrightarrow x = y$$

- g é sobrejetiva: se $y \in \mathbb{R}^{+*}$ então $g(y^2) = \sqrt{y^2} = y$

Portanto, g é um isomorfismo

4) Prove que a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = x^3$ é um isomorfismo.

i) homomorfismo:

Dados $a, b \in G$, onde $(G, \cdot)$ é um grupo multiplicativo. Então:

$$f(ab) = (ab)^3 = a^3 b^3 = f(a) \cdot f(b)$$

Temos que é um homomorfismos.

ii) injetivo: temos $f(x) = x^3$ dada por:
$f(n) = n^3$, $\forall n \in \mathbb{R}^*$

$f(1) = 1^3 = 1$, elemento neutro

Para $n \neq 1$ e $n > 1$, temos que:

$f(n) = n^3 \to n_1^3 < n_2^3 < \ldots\ldots$

Portanto f é injetiva

iii) Sobrejetiva: Seja $y \in \mathbb{R}^{*3}$, então $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^3$

$$y = x^3 \to \sqrt[3]{y} = x$$

$x = \sqrt[3]{y} \to f(x) = f(\sqrt[3]{y}) = y$

Então para cada x, existe um y em $\mathbb{R}^*$

Portanto $f(x) = x^3$ é um isomorfismo p/ um grupo aditivo.

5. Prove que a função $g: \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_9$ definida por $g(x) = 2x$ é um isomorfismo.

$\mathbb{Z}_9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

i) Homomorfismo: Tomamos $m, n \in \mathbb{Z}_9$, então:

$$f(m+n) = 2(m+n) = 2m+2n = f(m) + f(n)$$

Portanto é um homomorfismo.

ii) injetivo: Temos $f: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ dada por $f(n) = 2n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

$Nuc(f) = \{n \in \mathbb{Z}_9 / f(n) = 0\}$, mas:

$f(n) = 0 \to 2n = 0 \to n = 0 \to Nuc(f) = \{0\}$

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \xrightarrow{f} \{0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7\}$

Temos que f é injetiva.

iii) Sobrejetiva: Seja $y \in 2\mathbb{Z}_9$, então $\exists x \in \mathbb{Z}_9$ tal que $y = 2x \to x = y/2 \in \mathbb{Z}_9$

Logo: $f(x) = f(y/2) = 2(y/2) = y$

Para cada x temos um y em $\mathbb{Z}_9$.

Temos que $g(x) = 2x$ é um isomorfismo.

6. Prove que a função $h: \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$ definida por $h(x) = 2x$ é um homomorfismo que não é injetivo e nem sobrejetivo.

$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Temos que $m, n \in \mathbb{Z}_8$, então:

$$h(m+n) = 2(m+n) = 2m + 2n = h(m) + h(n)$$

é um homomorfismo.

ii) $h(x) = 2x$

$2 \cdot 0 = 0$
$2 \cdot 1 = 2$
$2 \cdot 2 = 4$
$2 \cdot 3 = 6$
$2 \cdot 4 = 8 = 0$

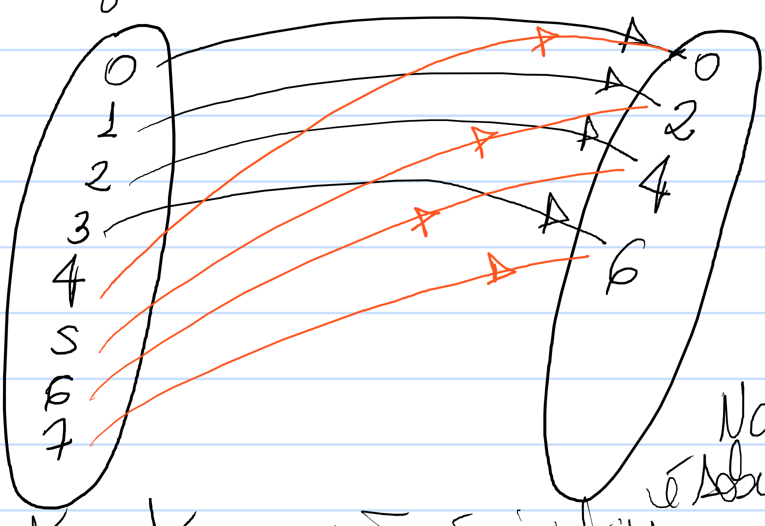
$2 \cdot 5 = 10 = 2 \pmod 8$
$2 \cdot 6 = 12 = 4 \pmod 8$
$2 \cdot 7 = 14 = 6 \pmod 8$

Temos que em $\mathbb{Z}_8$, $h(x)$ é cíclico a partir de 5 em $\mathbb{Z}_8$.

$\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6\}$

Não é injetivo, é sobrejetivo.

$\mathbb{Z}_8 \xrightarrow{h(x)} \langle 2 \rangle \subset \mathbb{Z}_8$



Não é sobrejetivo, pois $h(x) = 2x \neq 1$
$\neq 3$
$\neq 5$
$\neq 7$

Não é sobrejetiva $\mathbb{Z}_8$ p/ $\mathbb{Z}_8$
é sobrejetiva de $\mathbb{Z}_8 \to \langle 2 \rangle$

é também não é injetiva.

7| Prove que a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = |x|$ é um homomorfismo sub-jetivo que não é injetivo.

Em $\mathbb{R}^*$ (diferente de zero) $\to \mathbb{R}^{**}$ (diferente de zero e positivos)

$$f(x) = |x| \longrightarrow f(\mathbb{R}^*) = |\mathbb{R}^*| = \mathbb{R}^{**}$$

É um homomorfismo.

① Dados $M, N \in \mathbb{R}^*$, onde $M, N < 0$:

$$f(M,N) = |M+N| = |M| + |N| = \mathbb{R}^{**}$$

Se $M, N > 0$, então: $f(M,N) = |M| + |N| = \mathbb{R}^{**}$

Temos que: $-(M,N) = (M,N)$ } Temos que
$(M,N) = (M,N)$ } é subjetivo.

Não é injetivo

8| Prove que a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ definida por $g(x) = 2^x$ é um homomorfismo injetivo e não subjetivo.

$\mathbb{R}^*$ conjunto de elementos diferentes de zero.

$$g(x) = 2^x \longrightarrow g(\mathbb{R}) = 2^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^*$$

Se $\mathbb{R} < 0 \to 2^{\mathbb{R}} = \frac{1}{2^{\mathbb{R}}}$, se $\mathbb{R} > 0 \to 2^{\mathbb{R}} =$ potências de 2 em $\mathbb{R}$.

Se $\mathbb{R} = 0 \to 2^0 = 1$

Temos que: $\{\frac{1}{2^R}, 2^R_1\} \in R^*$

Temos que é um homomorfismo injetivo.

g é homomorfismo, pois: $g(x+y) = 2^{(x+y)} = 2^x \cdot 2^y = g(x) \cdot g(y)$.

g é injetivo; pois se $2^x = 2^y \Rightarrow 2^{x-y} = 2^y \cdot 2^{-y} = 1$
então: $x - y = 0 \rightarrow x = y$

9) Se G e H são grupos, prove que a função $f: G \times H \rightarrow G$ dado por $f((a,b)) = a$ é um homomorfismo subjetivo.

① Dados que G e H são grupos, temos que:
$f: G \times H \rightarrow G$

Temos que $(G \times H)$ é um produto cartesiano, e $(a,b) \in (G \times H)$. Temos que $a \in G$ e $b \in H$, então:

$$f: (G \times H) \rightarrow G$$
$$(a,b) \rightarrow a$$

Então para cada elemento de $(G \times H)$ temos um elemento de G, temos um homomorfismo. Assim dada uma operação em $G \times H$, temos uma operação em G na imagem de f.

Como a $Im f = G$ temos que se $G < H$, não será injetivo. Mas é sobrejetivo, isto por que $a \in G$ pode se repetir.

10) Mostre que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ não é um homomorfismo.

$\mathbb{R}$ é o conjunto de números reais incluindo o zero, então p/ ser um grupo deve ser aditivo.

Dados $m, n \in \mathbb{R}$ então:

$$f(m+n) = (m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$$
$$= f(m) + f(n) + 2.m.n$$

Temos que na forma aditiva não é homomorfismo.

Se for multiplicativo:

$$f(m.n) = (m.n)^2 = m^2 . n^2 = f(m) . f(n)$$

Se for homomorfismo multiplicativo atende as condições.

$$f(a * b) = f(a) * f(b), \forall a, b \in G,$$ mas não possui inversa em $x=0$ então $\mathbb{R}$ é apenas um grupo aditivo e não é homomorfismo.//

13) Mostre que U_5 é isomorfo para U_{10}.

Temos que $U_5 = \{1, 2, 3\}$ e $U_{10} = \{1, 3, 7, 9\}$

$\langle 2 \rangle = \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots \rangle$
$\langle 3 \rangle = \{3, 9, 27, 81, \ldots \ldots \rangle$

Temos que $U_5 = (5,2) = 1$ dado que o $mdc(5,2) = 1$

$<2> = \{2, 4, 6, 8, 16, 32, \ldots>$ $\{ U_5 = \{2,$
$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$6 \equiv 1 \pmod 5$
$8 \equiv 3 \pmod 5$
$16 \equiv 1 \pmod 5$
$32 \equiv 2 \pmod 5$

$<2>$ torna-se cíclico em $\mathbb{Z}_5$ apartir de 8 em $<2>$.

$U_5 = \{1, 2, 3\}$

Temos que $U_{10} = (10, 3) = 1$ ou $mdc(10,3) = 1$

$<3> = \{3, 9, 27, 81, \ldots>$
$\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$27 \equiv 7 \pmod{10}$
$81 \equiv 1 \pmod{10}$

$U_{10} = \{1, 3, 7, 9\}$
$<3>$ torna-se cíclico apartir de 81 em $\pmod{10}$

Então $U_5 = <2>$ e $U_{10} = <3>$, devemos mostrar que $\phi: U_5 \rightarrow U_{10}$ definida por:

$$\phi(2^n) = 3^n,$$ é um isomorfismo.

Temos que $3^j \in U_{10}$, $j \in \mathbb{Z}$. A pre-imagem de 3^j sob ϕ é 2^j.
Suponhamos que $\phi(2^j) = \phi(2^k)$, para qualquer $j, k \in \mathbb{Z}$. Então $3^j = 3^k$ e $j = k \mod 4$. E também $2^j = 2^k$.
Temos que $2^j, 2^k \in U_5$. $\phi(2^j 2^k) = \phi(2^{j+k}) = 3^{j+k} = 3^j \cdot 3^k = \phi(2^j)\phi(2^k)$
Com isso para cada 2^{j+k} temos um 3^{j+k}, isto preserva a operação e é um isomorfismo.

16) Se $f: G \to H$ é um homomorfismo sobrejetivo de grupo e G é abeliano, prove que H é abeliano.

Se G é abeliano e H não é abeliano, então G e H não são isomorfismo.

Temos que a condição $f: G \to H$ é um grupo homomorfismo sobrejetivo e G é abeliano, devemos mostrar que H é abeliano.

Se $x, y \in H$ então existe $a, b \in G$ com $x = f(a)$ e $y = f(b)$. Então $x \cdot y = f(a) \cdot f(b) = f(ab) = f(ba) = f(b) \cdot f(a) = yx$, então H é abeliano.