Universidade Estadual de Campinas

IMECC

Anéis e Corpos - MM445

Sobre anéis noetherianos

Autor:

Guilherme Toledo

Professor:

Dr. Fernando Torres Orihuela

26 de outubro de 2014

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Ideais

Definição 1. *Dado um anel $(R, +, \times)$ e $I \subset R$, dizemos que I é um ideal à esquerda se*

1. *$(I, +)$ é um subgrupo do grupo aditivo $(R, +)$;*
2. *I absorve a multiplicação à direita, isto é, $\forall r \in R, \forall i \in I$, temos que $ri \in I$.*

Um ideal à esquerda é aquele em que a segunda condição é substituída por: I absorve a multiplicação à esquerda, isto é, $\forall r \in R, \forall i \in I$, temos que $ir \in I$.

Um ideal à esquerda que é, ao mesmo tempo, um ideal à direita, é dito um ideal bilateral ou simplesmente um ideal.

Proposição 1. *Seja $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{I}_R$ uma família de ideais à direita em R com índices em Λ. Então $I = \cap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ é um ideal à direita de R.*

Demonstração. Primeiro tomemos $x, y \in I$: como $x, y \in \cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, então, para cada $\lambda \in \Lambda$, temos que $x, y \in I_\lambda$; sendo I_λ um ideal, para cada $\lambda \in \Lambda$, temos que $x + y \in I_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Com isso $x + y \in \cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = I$.

Resta mostrar que I absorve a multiplicação à esquerda. tome $x \in I$ e $r \in R$. Como $x \in \cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, temos que $x \in I_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$; sendo cada I_λ um ideal à direita, temos que $xr \in I_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda$. Com isso, $xr \in \cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = I$, fazendo de I um ideal à direita. $\square$

É claro que se $\{_\lambda I\}_{\lambda\in\Lambda} \subset {}_R\mathcal{I}$ é uma família de ideais à esquerda de R, então

$$I = \cap_{\lambda\in\Lambda}(_\lambda I)$$

é um ideal à esquerda de R; para ver isso basta modificar apenas ligeiramente a prova acima. E se $\{I_i\}_{i\in I}$ é uma família de ideais bilaterais de R, então sua intersecção $I = \cap_{i\in I} I_i$ é um ideal à direita e à esquerda; ou seja, é um ideal bilateral.

Com isso, dado $X \subset R$, o ideal à direita gerado por X, denotado por $I(X)$, será a intersecção de todos os ideais à direita $I \in \mathcal{I}_R$, onde $\mathcal{I}_R$ é o conjunto de todos ideais de R, que contém X; pelo resultado acima, é claro que este é um ideal à direita. Em outros termos, podemos escever $I(X) = \cap\mathcal{F}$, tal que

$$\mathcal{F} = \{I \in \mathcal{I}_R / X \subset I\}$$

E é também claro que este é o menor ideal à direita que contém X, já que se I é um ideal à direita que contenha X, então $I \in \mathcal{F}$ e portanto $I(X) \subset I$. Claramente podemos definir o ideal à esquerda gerado por X

como a intersecção dos ideais à esquerda que contém X, e o ideal bilateral gerado por X como a intersecção de todos ideais bilaterais contendo X.

Definição 2. *Um ideal de R será dito principal se for gerado por um único elemento $a \in R$. Se I é um ideal gerado por a, usaremos a notação $I = (a)$.*

Os ideais principais são vitais no moderno estudo da teoria de anéis. Sua propriedade mais básica é que: quando (a) é um ideal à direita de um anel R, com unidade, gerado por a, temos que

$$(a) = aR = \{ar \in R / r \in R\};$$

e se (a) é o ideal à esquerda gerado por a, temos que

$$(a) = Ra = \{ra \in R / r \in R\}.$$

Quanto à veracidade destas expressões, provemos a relativa apenas aos ideais à direita, sendo o outro caso análogo. Primeiro, definindo $aR = \{ar \in R/r \in R\}$, temos que $aR \subset (a)$, já que se $ar \in aR$, como $a \in (a)$ e $r \in R$, devemos ter que $ar \in (a) \Rightarrow aR \subset (a)$.

Mais do que isso, aR é um ideal à direita, pois: se $ar_1, ar_2 \in aR$, temos que $ar_1 + ar_2 = a(r_1 + r_2) \in aR$; e se $ar \in aR$ e $t \in R$, temos que $(ar)t = a(rt) \in aR$. Ainda, como R é um anel com unidade, $1 \in R$, e portanto $a1 = a \in aR$. Como (a) é o menor ideal à direita contendo a, devemos ter que $(a) \subset aR$, e portanto $(a) = aR$.

Na hora de trabalharmos com ideais principais, usualmente nos restringiremos à anéis comutativos. Nestes, temos que um ideal principal é dado em qualquer uma das formas discutidas: $(a) = aR = Ra$.

Definição 3. *Um anel comutativo R será dito um domínio de ideais principais se todo ideal de R for principal.*

Outro tipo de ideal, semelhante ao principal, de marcante importância é o dito ideal do tipo finito. Nos restringindo, por simplicidade, a anéis comutativos, um ideal $I \subset R$ será dito um ideal do tipo finito se existirem finitos $a_1, ..., a_n \in R$ para os quais $I = I(\{a_1, ..., a_n\})$, o que usualmente denotaremos apenas por $I = (a_1, ..., a_n)$. Note que todo ideal principal é um ideal do tipo finito.

Tendo definido um domínio de ideais principais como um anel em que todo ideal é principal, analogamente definiremos um anel noetheriano, em homenagem à matemática Emmy Noether, como um anel comutativo com unidade em que todo ideal é do tipo finito. Na verdade, existem várias definições equivalentes e igualmente importantes, que mostraremos de fato serem equivalentes. Começaremos com um resultado em teoria dos conjuntos, e terminaremos com um importante teorema de Hilbert sobre o assunto.

1.2 Teoria dos conjuntos

Tome um conjunto X e uma ordem parcial $\leq$ em X. Já sabemos que um elemento maximal M de X é um elemento para o qual, dado $x \in X$ qualquer que verifica $M \leq x$, então $M = x$; analogamente, um elemento minimal m de X é um elemento que verifica, para todo $x \in X$ para o qual $x \leq m$, $m = x$.

Definição 4. *Dada uma família $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, indexada pelos naturais,* *sobre um conjunto X com uma ordem parcial $\leq$, diremos que:*

1. *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cadeia crescente se, para todo $i \in \mathbb{N}$, tivermos que $a_i \leq a_{i+1}$. Com isso, podemos escrever*

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

2. *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cadeia decrescente se, para todo $i \in \mathbb{N}$, tivermos que $a_{i+1} \leq a_i$;*

3. *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $n \geq n_0 \Rightarrow a_n = a_{n_0}$.*

Destas definições, podemos fazer algumas outras. Se X é um conjunto com a ordem parcial $\leq$, diremos que X satisfaz a condição maximal se todo subconjunto $Y \subset X$ de X, não vazio, admite um elemento maximal. Analogamente, X satisfará a condição minimal se todo subconjunto $Y \subset X$ de X, não vazio, admitir um elemento minimal.

Quanto às cadeias, dizemos que X satisfaz a condição das cadeias crescentes se toda cadeia crescente de X é estacionária. Diremos que X satisfaz a condição das cadeias decrescentes se toda cadeia decrescente de X for estacionária.

Teorema 1. *Seja X um conjunto não vazio com a ordem parcial $\leq$; se X satisfaz a condição maximal, então X satisfaz a condição das cadeias crescentes.*

Demonstração. Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ uma cadeia crescente em X. Como

$$\{a_n \in X/n \in \mathbb{N}\} \subset X$$

e X satisfaz a condição maximal, então existe $a_{n_0} \in \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ elemento maximal.

Mas esta cadeia é crescente, e portanto, para todo $n \geq n_0$, teremos que $a_{n_0} \leq a_n$; sendo a_{n_0} elemento maximal, isto implica que $a_{n_0} = a_n$, para todo $n \geq n_0$, fazendo da cadeia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma cadeia estacionária e provando o teorema. $\square$

De maneira semelhante, mostra-se que todo X que satisfaz a condição minimal satisfaz a condição das cadeias decrescentes. A recíproca destes resultados é verdadeira, embora a prova seja mais difícil. Com isto, um conjunto X satisfaz a condição maximal se, e somente se, satisfaz a condição das cadeias crescentes, e satisfaz a condição minimal se, e somente se, satisfaz a condição das cadeias decrescentes.

Mostraremos, como acima, só um caso, sendo o outro análogo.

Teorema 2. *Seja X um conjunto não vazio com a ordem parcial $\leq$; se X satisfaz a condição das cadeias crescentes, então satisfaz a condição maximal.*

Demonstração. Suponha que X não satisfaz a condição maximal. Então existe $Y \subset X$ que não admite elemento maximal e portanto, dado $a \in Y$ arbitrário, temos que

$$Y_a = \{y \in Y / a < y\}$$

é não vazio.

Seja ϕ uma aplicação de escolha de $\mathcal{P}(Y) - \{\emptyset\}$; em outros termos,

$$\phi : \mathcal{P}(Y) - \{\emptyset\} \to Y$$

é uma função para a qual, se $W \in \mathcal{P}(Y) - \{\emptyset\}$, e portanto W é subconjunto não vazio de Y, temos que $\phi(W) \in W \subset Y$. Uma tal função existe pelo axioma da escolha.

Definimos então $f : Y \to Y$ por meio de $f(a) = \phi(Y_a)$. Como $\phi(Y_a) \in Y_a$, temos que, por definição de Y_a, $\phi(Y_a) > a$; sendo assim, $a < \phi(Y_a) = f(a)$.

Dado um elemento arbitrário $a_0 \in Y$, que existe já que $Y \neq \emptyset$, podemos então gerar a cadeia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ para a qual $a_n = f^n(a_0)$, onde f^n é a composição de f com si mesma, n vezes. Teremos que

$$a_n = f^n(a_0) < f\Big(f^n(a_0)\Big) = f^{n+1}(a_0) = a_{n+1},$$

e portanto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente que não pode ser estacionária, já que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, dado $n \geq n_0$, temos que $a_n > a_{n_0}$.

Mas isto contradiz a suposição de que X satisfaz a condição das cadeias crescentes. O erro esteve em assumir que X não satisfaz a condição maximal, e verificamos assim o teorema. □

Podemos agora voltar à teoria de anéis.

Capítulo 2

Anéis noetherianos

2.1 Definição

Definição 5. *Seja R um anel comutativo com unidade; diremos que R é um anel noetheriano se o conjunto $\mathcal{I}(R)$ dos ideais de R, parcialmente ordenado pela inclusão $\subset$, satisfaz a condição das cadeias crescentes.*

Em outros termos, R é noetheriano se, dada uma sequência $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de ideais de R tais que

$$I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots ,$$

existir $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $n > n_0 \Rightarrow I_n = I_{n_0}$.

Teorema 3. *Dado um anel comutativo R com unidade, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *R é noetheriano;*

2. *O conjunto $\mathcal{I}_R$, com a ordem parcial $\subset$, satisfaz a condição maximal;*

3. Todo ideal I de R é do tipo finito

Demonstração. Definimos um anel R como noetheriano quando $\mathcal{I}_R$ satisfaz a condição das cadeias crescentes. Obviamente, pelo que vimos acima, isto é equivalente a dizer que $\mathcal{I}_R$ satisfaz a condição maximal; isto faz com que os dois primeiros itens do teorema sejam equivalentes. Resta mostrar que eles implicam no terceiro, e que o terceiro implica nestes.

Agora, seja I um ideal de R, noetheriano; se $I = \{0\}$, então $I = (0)$ e I é do tipo finito. Do contrário, existe $a_0 \in I$, $a_0 \neq 0$; se $I = (a_0)$, novamente I é do tipo finito. Se $I \neq (a_0)$, então existe $a_1 \in I - (a_0)$, e novamente podemos ter que $I = (a_0, a_1)$, que contém o ideal (a_0), e I é do tipo finito; ou então $I \neq (a_0, a_0)$, e nesse caso existe $a_2 \in I - (a_1, a_2)$.

Indutivamente, tomamos elementos $a_0, ..., a_{n-1} \in I$ para os quais: ou $I = (a_0, ..., a_{n-1})$, e I é do tipo finito; ou existe $a_n \in I - (a_0, ..., a_{n-1})$. Se I não for do tipo finito, construiremos uma sequência crescente de ideais

$$(a_0) \subset (a_0, a_1) \subset \cdots \subset (a_0, ..., a_n) \subset \cdots$$

que não pode ser estacionária, já que estamos assumindo $a_n \notin (a_0, ..., a_{n-1})$. Mas isso viola R ser noetheriano, e $\mathcal{I}_R$ satisfazer a condição das cadeias crescentes. Devemos então concluir que I é do tipo finito.

Suponha agora que todo ideal de R seja do tipo finito, e mostremos que, neste caso, R é noetheriano. Seja $I_0 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$ uma cadeia crescente de ideais de R, e consideremos $I = \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Temos que I é, de fato, um ideal: se $x, y \in I$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $x, y \in I_{n_0}$, e portanto $x + y \in I_{n_0} \subset I$; e se $x \in I$ e $r \in R$, como existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $x \in I_{n_0}$, temos que $rx, xr \in I_{n_0} \subset I$.

Então, como todo ideal de R é do tipo finito, existem elementos $a_1, ..., a_n \in R$ para os quais $I = (a_1, ..., a_m)$. Como $a_j \in I = \cup_{n\in\mathbb{N}}$, sabemos que, para cada a_j, existirá $n_j \in \mathbb{N}$ para o qual $a_j \in I_{n_j}$. Tome $n_0 = max\{n_1, ..., n_m\}$; então, para todo $n > n_0$, teremos que $a_1, ..., a_m \in I_n$, e portanto

$$I = (a_1, ..., a_m) \subset I_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I,$$

e portanto $I_n = I$, fazendo da referida cadeia uma cadeia estacionária, o que por sua vez torna R um anel noetheriano. □

Com estas noções básicas sobre anéis noetherianos, podemos provar o teorema de Hilbert, que nos dá condições suficientes para que um anel polinomial em finitas variáveis seja noetheriano.

2.2 Teorema de Hilbert

Queremos provar agora o importante teorema de Hilbert: se R é noetheriano, então $R[x_1, ..., x_k]$ também o é. Começaremos por um estudo, aparentemente não relacionado, de certos ideais em anéis de coeficientes.

Seja R um anel com unidade comutativo, consideremos o anel $R[x]$ de polinômios em uma variável de coeficientes em R e tomemos um ideal $M \subset R[x]$: definiremos então uma sequência de ideais de R, a partir de M, e que denotaremos por $I_j(M)$.

O ideal $I_j(M)$ é formado por 0 e todos os coeficientes líderes, isto é, coeficientes não nulos da maior potência x^n, de polinômios de M com grau

j; em outros termos, se $a \in I_j(M) - \{0\}$, então existe

$$p_x = ax^j + a_{j-1}x^{j-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in M,$$

onde vemos que $|p(x)| = j$ e o coeficiente líder de $p(x)$ é a.

Ainda em outros termos,

$$I_j(M) = \{a \in R / \exists p(x) = ax^j + a_{j-1}x^{j-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in M\}$$

Proposição 2. *Seja R um anel comutativo com unidade; então, nas condições da definição acima, $I_j(M)$ é um ideal.*

Demonstração. Se $a, b \in I_j(M) - \{0\}$, então existem

$$p_1(x) = ax^j + a_{j-1}x^{j-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

$$p_2(x) = bx^j + b_{j-1}x^{j-1} + \cdots + b_1x + b_0 \in M;$$

se $a = -b$, temos que $a + b = 0 \in I_j(M)$; se $a \neq -b$, então $a + b \neq 0$ e

$$p_1(x) + p_2(x) = (a + b)x^j + (a_{j-1} + b_{j-1})x^{j-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

é um polinômio de grau j e coeficiente líder $a + b$, fazendo com que $a + b \in I_j(M)$. Se $a \in I_j(M) - \{0\}$ e $b = 0$, é claro que $a + b \in I_j(M)$, e se $a = b = 0$, temos $a + b = 0 \in I_j(M)$; de qualquer forma, concluímos que $I_j(M)$ é fechado pela soma.

Agora, se $r \in R$, precisamos mostrar que $I_j(M)$ absorve a muitiplicação:

se $a = 0$, é claro que $ra = ar = 0 \in I_j(M)$. Se $a \in I_j(M) - \{0\}$, temos que há

$$p(x) = ax^j + a_{j-1}x^{j-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in M,$$

e portanto

$$rp(x) = rax^j + ra_{j-1}x^{j-1} + \cdots + ra_1x + a_0 \in M$$

Temos então duas possibilidades: ou $ar = ra = 0$, e temos $ra = ar \in I_j(M)$; ou $ar = ra \neq 0$, e portanto $rp(x)$ é um polinômio de grau j com coeficiente líder ar, fazendo com que $ar = ra \in I_j(M)$. De qualquer forma, concluímos que $I_j(M)$ absorve a multiplicação, e é portanto um ideal. □

Mais do que isso, temos que $I_j(M) \subset I_{j+1}(M)$: já que se $a \in I_j(M)$, existe

$$p(x) = ax^j + a_{j-1}x^{j-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in M,$$

e como M é fechado pela multiplicação por elementos de $R[x]$, temos que

$$xp(x) = ax^{j+1} + a_{j-1}x^j + \cdots + a_1x + a_0 \in M,$$

e como $xp(x)$ é um polinômio de grau $j + 1$ e coeficiente líder a, temos que $a \in I_{j+1}(M)$. Concluímos que $I_j(M) \subset I_{j+1}(M)$, e a cadeia $(I_j(M))_{j\in\mathbb{N}}$ é uma cadeia crescente.

Proposição 3. *Seja R um anel com unidade comutativo, e sejam $M^*, M \subset R[x]$ ideais de $R[x]$ com $M^* \subset M$. Então, se $I_j(M^*) = I_j(M)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos que $M = M^*$.*

Demonstração. Suponha que $M \neq M^*$, e então $M - M^* \neq \emptyset$, e portanto existe um polinômio de grau mínimo $p(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in M - M^*$. É claro que $a \in I_n(M) = I_n(M^*)$, e portanto existe $q(x) = ax^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 \in M^*$, de modo que possamos ter $a \in I_n(M^*)$.

Mas então

$$p(x) - q(x) = (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 - b_0)$$

é um polinômio de grau menor que $p(x)$ ou o polinômio nulo, e portanto está em M^*, já que é um elemento de M de grau menor que de qualquer elemento em $M - M^*$; com isso, temos que $q(x), p(x) - q(x) \in M^*$, e como M^* é um ideal, concluímos que $p(x) = (p(x) - q(x)) + q(x) \in M^*$.

Isso contraria a definição de $p(x)$: o erro esteve em assumir que $M - M^* \neq \emptyset$, e portanto $M = M^*$, como queríamos provar. □

Assumamos que R seja um anel noetheriano: provaremos agora que $R[x]$ é um anel noetheriano; para fazer isso, mostraremos que toda cadeia crescente em $\mathcal{I}_{R[x]}$ é estacionária. Seja $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma cadeia crescente em $\mathcal{I}_{R[x]}$, isto é, uma cadeia de ideais de $R[x]$ para a qual

$$M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_i \subset \cdots$$

Para cada M_i, podemos construir a cadeia crescente $(I_j(M_i))_{j\in\mathbb{N}}$ de ideais de R. O que queremos provar é que existe $i^* \in \mathbb{N}$ para o qual $i > i^*$ implica que $I_j(M_i) = I_j(M_{i^*})$, para qualquer $j \in \mathbb{N}$.

Notamos que $I_j(M_i) \subset I_{j+1}(M_i)$, mas note também que se $a \in I_j(M_i)$, existe

$$p(x) = ax^j + a_{j-1}x^{j-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in M_i;$$

mas como $M_i \subset M_{i+1}$, temos que $p(x) \in M_{i+1}$, fazendo com que $a \in I_j(M_{i+1})$ e, portanto, $I_j(M_i) \subset I_j(M_{i+1})$. Logo a cadeia $(I_j(M_i))_{i\in\mathbb{N}}$ também é crescente.

Assim a cadeia $(I_j(M_j))_{j\in\mathbb{N}}$ é uma cadeia crescente; note que podemos vê-la como uma diagonal:

$$\begin{array}{ccccccccc}
I_0(M_0) & \subset & I_0(M_1) & \subset & \cdots & \subset & I_0(M_j) & \subset & \cdots \\
\cap & & \cap & & \cdots & & \cap & & \cdots \\
I_1(M_0) & \subset & I_1(M_1) & \subset & \cdots & \subset & I_1(M_j) & \subset & \cdots \\
\cap & & \cap & & & & \cap & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \cdots \\
\cap & & \cap & & & & \cap & & \cdots \\
I_j(M_0) & \subset & I_j(M_1) & \subset & \cdots & \subset & I_j(M_j) & \subset & \cdots \\
\cap & & \cap & & & & \cap & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

Ela é crescente já que

$$I_j(M_j) \subset I_j(M_{j+1}) \subset I_{j+1}(M_{j+1})$$

Como ela é uma cadeia crescente de ideais de R, que é noetheriano, existe j_0 para o qual, se $j > j_0$, então $I_j(M_j) = I_{j_0}(M_{j_0})$. Em especial, se $i > j > j_0$, temos que

$$I_{j_0}(M_{j_0}) \subset I_{j_0}(M_i) \subset I_j(M_i) \subset I_i(M_i) = I_{j_0}(M_{j_0}),$$

e portanto $I_j(M_i) = I_{j_0}(M_{j_0})$. Se $j > i > j_0$, temos

$$I_{j_0}(M_{j_0}) \subset I_j(M_{j_0}) \subset I_j(M_i) \subset I_j(M_j) = I_{j_0}(M_{j_0}),$$

e portanto $I_j(M_i) = I_{j_0}(M_{j_0})$. Em resumo, se $i, j > j_0$, temos $I_j(M_i) = I_{j_0}(M_{j_0})$.

Lembre-se que queremos $i^* \in \mathbb{N}$ para o qual $i > i^*$ implica que $I_j(M_i) = I_j(M_{i^*})$, para qualquer $j \in \mathbb{N}$; encontramos j_0 para o qual $i > j_0$ implica que $I_j(M_i) = I_{j_0}(M_{j_0}) = I_j(M_{j_0})$, quando $j > j_0$: precisamos controlar os pares (j, i) para os quais $i > j_0$ e $j < j_0$.

As sequências $(I_0(M_i))_{i\in\mathbb{N}}, ..., (I_{j_0}(M_i))_{i\in\mathbb{N}}$ são, como já dissemos, crescentes; como R é noetheriano, existem $i_0, ..., i_{j_0} \in \mathbb{N}$ para os quais

$$i > i_0 \Rightarrow I_0(M_i) = I_0(M_{i_0}),$$

$$i > i_1 \Rightarrow I_1(M_i) = I_1(M_{i_1}),$$

$$\vdots$$

$$i > i_{j_0} \Rightarrow I_{j_0}(M_i) = I_{j_0}(M_{i_{j_0}})$$

Tomemos então $i^* = max\{j_0, i_0, i_1, ..., i_{j_0}\}$. Dado $i > i^*$: se $j > i^*$, temos que $i, j > i^* \geq j_0$, e portanto

$$I_j(M_i) = I_{j_0}(M_{j_0}) = I_j(M_{i^*});$$

se $j \leq j_0$, então $i > i^* \geq i_j$ e temos

$$I_j(M_i) = I_j(M_{i_j}) = I_j(M_{i^*})$$

Logo i^* é tal que $i > i^* \Rightarrow I_j(M_i) = I_j(M_{i^*}), \forall j \in \mathbb{N}$, como queríamos encontrar.

Teorema 4. *Se R é um anel noetheriano, então $R[x]$ é noetheriano.*

Demonstração. Tome $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma cadeia crescente de ideais de $R[x]$; pelo que vimos acima, existe i^* para o qual $i > i^*$ implica em $I_j(M_i) = I_j(M_{i^*})$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Mas então, como $M_{i^*} \subset M_i$ e $I_j(M_i) = I_j(M_{i^*})$, para todo $j \in \mathbb{N}$, pela proposição 3 temos que $M_i = M_{i^*}$. Como $i > i^*$ implica que $M_i = M_{i^*}$, temos que $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é estacionária, e portanto $R[x]$ é noetheriano. □

Hilbert originalmente provou uma versão mais geral deste teorema, que colocamos abaixo com uma prova bastante elementar, ao usarmos o teorema acima como referência.

Teorema 5. *Se R é um anel noetheriano, então $R[x_1, ..., x_k]$ é noetheriano, para qualquer $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.*

Demonstração. Provemos por indução sobre k: se $k = 1$, segue do teorema acima que $R[x_1]$ é noetheriano.

Assumindo como hipótese de indução que $R[x_1, ..., x_{k-1}]$ é noetheriano; pelo teorema acima temos que $R[x_1, ..., x_{k-1}][x_k]$ é noetheriano, já que tem coeficientes em $R[x_1, ..., x_{k-1}]$, que assumimos ser noetheriano.

Mas $R[x_1, ..., x_k]$ e $R[x_1, ..., x_{k-1}][x_k]$ são isomorfos, e o fato do último ser noetheriano implica que o primeiro também o seja. Fica provado, por indução, que $R[x_1, ..., x_k]$ é noetheriano. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Milne, J. S., Algebraic Number Theory, notes. University of Michigan, 1996.

[2] Monteiro, L. H. Jacy, Elementos de Álgebra. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1971.