a) Seja G um grupo abeliano com 800 elementos.

. Mostre que $H = \{a \in G / a^{70} = 0\}$ é um subgrupo de G.

Teorema 7.9: Temos G sendo um grupo, e $a \in G$ um elemento de ordem finita. Então:

1) $a^k = e$ se e somente se $n | k$
2) $a^i = a^j$ se e somente se $i \equiv j \pmod{n}$
3) Se $n = td$, com $d \geq 1$, então a^t tem ordem d.

Corolário: Temos G sendo um grupo abeliano em que cada elemento tem ordem finita. Se $c \in G$ é um elemento de maior ordem em G (isto é $|a| \leq |c|$ $\forall a \in G$) então a ordem de cada elemento de G divide $|c|$.

Teorema 7.15: Tem G sendo um grupo e $a \in G$.

2) Se a tem ordem finita, então $\langle a \rangle$ é um subgrupo de ordem n e $\langle a \rangle = \{e = a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}\}$.

Temos que G é um grupo abeliano com 1000 elementos, tomando H um subgrupo de G:

$$H \leq G \quad \text{ou} \quad H < G.$$

Assim tomamos $H \subseteq G$ ou $H < G$.
Com G tem 800 elementos, então H possui no máximo 499 elementos.

Tomamos um elemento $b \in G$, com G possui ordem 800, então pelo teorema 7.9 temos que:

$b^k = e \rightarrow 800 | k \rightarrow k$ é divisível por 800.

Logo a ordem de b é um $k = 800x$ sendo $x \in \mathbb{Z}$.

Como em $H = \{a \in G / a^{70} = e\}$, então se tomarmos como m a ordem de H, logo pelo teorema 7.9, temos:

$a^{70} = e \rightarrow m | 70$ então m é divisor de 70.

Assim se k for a maior ordem de um elemento de G, temos pelo corolário do teorema 7.9, que a ordem de cada elemento de G, é divisor de k. Logo com $a \in G$ e $a \in H$. Temos que: $7\cancel{0} | 80\cancel{0}x$

$7 | 80x$

Então: $80.6 \equiv 0 \pmod 7$

Temos que $k = 4200 > 70$, temos que $a \in G$ e por enunciado $a \in H$. Portanto H é subgrupo de G.

• No caso que G seja cíclico, determine quantos elementos tem H.

Pelo teorema 7.15, como $a \in H$ possui ordem 70 então H possui ordem 70, ou seja possui 70 elementos.

b) Mostre um exemplo de um grupo K tal que $L = \{a \in K / a^2 = 0\}$ é não seja um subgrupo de K.

$K = \{a, \dots\}$ $L = \{a, \dots\}$