$GL(2,\mathbb{R})$ = matrizes invertíveis 2×2 (com o produto)

$$\boxed{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}$$

Não é fechado com a soma

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\2&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\ \#$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

---

25) $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ $\qquad (a,b)\odot(c,d)=(ac,bc+d)$

$(G,\odot)$ é um grupo $\qquad a,c\in\mathbb{R}^*\Rightarrow ac\in\mathbb{R}^*$

$\odot$ é fechada no conjunto (ok)

$$((a,b) \odot (c,d)) \odot (e,f) = (ac, bc+d) \odot (e,f)$$

$$= (ace, (bc+d)e + f)$$

$$= (ace, bce + de + f)$$

$$(a,b) \odot ((c,d) \odot (e,f)) = (a,b) \odot (ce, de+f)$$

asociatividade

$$= (ace, bce + de + f)$$

$$(a,b) \odot (x,y) = (a,b) \qquad x, y = ?$$

$$(ax, bx+y) \qquad ax = a \Rightarrow x = 1$$

$$bx + y = b \qquad y = 0$$

$(1,0)$ elemento neutro (ou identidade

$$(a,b) \odot (z,w) = (1,0) \qquad \boxed{\begin{array}{l} z = a^{-1} \\ w = -ba^{-1} \end{array}}$$

$$(az, bz+w) = (1,0) \qquad \begin{array}{l} az = 1 \\ z = a^{-1} \end{array}$$

$$w = -ba^{-1} \Leftarrow ba^{-1} + w = 0$$

(10) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \text{ tq } a^2+b^2 \neq 0 \right\}$

$(G, \cdot)$ é um grupo abeliano

$G \subseteq GL(2, \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix}$$

$$\cap$$

$$G$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \in G$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & cb+da \\ -da-bc & -bd+ac \end{pmatrix}$$

Abeliano !!

18 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $g(x) = \frac{x-1}{x}$ $h(x) = \frac{1}{x}$

$i(x) = x$ $j(x) = 1-x$ $K(x) = \frac{x}{x-1}$

$K = \{ r \in \mathbb{R} \mid r \neq 0 \quad r \neq 1 \}$

$h \circ h(x) = i(x)$ $j \circ j(x) = i(x)$

$$f \circ f(x) = f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x}$$

$$= \frac{x-1}{x} = g(x)$$

$$f \circ f \circ f(x) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-x+1}$$

$$= x$$

$f \circ f \circ f(x) = i$

$f^2 = g$ $f^3 = i$ $j^2 = i$ $h^2 = i$

$K^2 = f^4 = f f^3 = f$

Afirmação f e j geram todo os elementos

$$f \circ j(x) = f(1-x) = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} = h$$

$$jf(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x-1}{1-x} = -\frac{x}{1-x} = K$$

$$jfj(x) = j(f(1-x)) = j\left(\frac{1}{1-1+x}\right) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = g = f^2 = f^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} j^2 = i & f^3 = i \\ jf = f^{-1}j & \end{matrix}} = D_3$$

$$\langle a_1 \dots a_n \mid \text{Relações} \rangle \subseteq G$$

$$2p = |G| \Rightarrow G \cong C_{2p} \text{ o } G \cong D_p$$

Teorema se G finito abeliano então G é isomorfo a $C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus \cdots \oplus C_{n_k}$ onde $n_1 \mid n_2 \mid n_3 \dots \mid n_k$

divide

Aneis

$A = \{0\}$ não é anel

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ exemplo fundamental de anel

A

Def: $(A, +, \cdot)$ A conjunto tal que $(A, +)$ é um grupo abeliano

$(A, \cdot)$ é fechado com respeito a $\cdot$

que satisfazem a propriedade distributiva

$$a, b, c \in A \Rightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Observação: $(A, \cdot)$ não é grupo!!

Quando $\exists\, 1 \in A$ tal que

$1 \cdot a = a \quad \forall a \in A$ dizemos que

A é um anel com unidade

$(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $(2\mathbb{Z}, +)$ é grupo

$(2\mathbb{Z}, \cdot)$ é fechada

$2\mathbb{Z}$ anel sem unidade $1 \notin 2\mathbb{Z}$

$M(\mathbb{Z}, 2)$ = matrizes 2×2 com coeficientes inteiros

Anel com unidade $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(\mathbb{Z}, 2)$

mas é um anel não abeliano i.e. o produto não é abeliano

Asumindo qe $|A| \geq 2$ e A é um anel com unidade então

$0 \rightarrow$ elemento neutro com respeito ao $+$ $\neq 1$ elemento neutro com respeito ao

Suponhamos "$0 = 1$" existe

$a \neq 0 \qquad a \cdot 1 = a$

$a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a + a$

$a + a = a$

$a = 0$ contradição

<u>Exemplo</u>: $\mathbb{Q}[x]$ polinômio com coeficientes racionais ($\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$)

$(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$ anel comutativo pois

$f(x)g(x) = g(x)f(x) \quad \forall f, g \in \mathbb{Q}[x]$

anel de polinomios

$(G, *)$ grupo finito $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$

$$\mathbb{Z}G = \{ \underbrace{a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n}\ |\ a_j \in \mathbb{Z} \}$$

$(\mathbb{Z}G, +)$ é um grupo abeliano

$$(a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n) + (b_1 g_1 + b_2 g_2 + \cdots + b_n g_n)$$

$$(a_1 + b_1) g_1 + (a_2 + b_2) g_2 + \cdots + (a_n + b_n) g_n$$

(elemento neutro $0 g_1 + 0 g_2 + \cdots 0 g_n$

Queremos um produto em $\mathbb{Z}G \bullet$

$$(\underbrace{a_1 g_1}_{1} + a_2 g_2 + \cdots a_n g_n) \bullet \underbrace{(b_1 g_1 + b_2 g_2 \cdots + b_n g_n)}$$

n^2 termos

$$a_1 b_1 \underbrace{g_1 * g_1}_{\in G} + a_1 b_2 \underbrace{g_1 * g_2}_{\in G} + a_1 b_1 \underbrace{g_1 * g_3}_{\in G} \quad + a_n b_n \underbrace{g_n * g_n}_{\in G}$$

$$\sum_{g \in G} \overset{\mathbb{Z}}{a_g}\, g \bullet \sum_{h \in G} b_h h = \sum_{l \in G} \Big(\underbrace{\sum_{g * h = l} a_g b_h}_{\in \mathbb{Z}} \Big) l$$

$\mathbb{Z}G$ anel de Grupo

$\mathbb{R}G$ $\quad$ $\mathbb{Q}G$ $\quad$ $A \cdot G$ $\quad$ que é um anel

$$G = \{1, g, g^2\} \qquad g^3 = 1$$

$$\mathbb{Z}G = \{a_0 + a_1 g + a_2 g^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$$

$$(a_0 + a_1 g + a_2 g^2) \cdot (b_0 + b_1 g + b_2 g^2)$$

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 g + a_0 b_2 g^2 + a_1 b_0 g + a_1 b_1 g^2 + a_1 b_2 \cdot 1$$

$$a_2 b_0 g^2 + a_2 b_1 \cdot 1 + a_2 b_2 g$$

$$\underbrace{\underset{\overset{\cap}{\mathbb{Z}}}{(a_0 b_0 + a_1 b_2 + a_2 b_1)} + \underset{\overset{\cap}{\mathbb{Z}}}{(a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_2)} g + \underset{\overset{\cap}{\mathbb{Z}}}{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)} g^2}_{\mathbb{Z}G}$$

$A[x]$ é "anel de polinomios"

Se A não é abeliano $\Rightarrow$ $A[x]$ também não é abeliano

$\langle x \rangle = C_\infty$ grupo infinito cíclico

$\mathbb{Z}\langle x \rangle \supseteq \mathbb{Z}[x]$

Anel de series <u>formais</u> $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$

$a_j \in A$ onde $+$ é termo a termo

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=l} a_j b_i\right) x^l$$

$A \rightsquigarrow \underline{A[x_1]}, \to A[x_1, x_2]\ \ A[x_1, x_2, x_3]$

....

$A[x_1, \dots, x_k]$ anel de polinomios em

K variaves com coeficientes em A.

$$G = \{a_1 a_2 \dots \overset{i}{\downarrow} \dots a_n \dots\}$$

Se G é finito ou <u>enumeravel</u> então

podemos colocar sobre G uma estrutura de de grupo cíclico

$G = \{\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{e\}$ → Lema de Zorn

<u>Lema</u>: $(\mathcal{C}, \preceq)$ tal que $\mathcal{L} = \{A_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{C}$

tal que A_j é uma cadeia ordenada

i.e. se $A_i, A_j \in \mathcal{L} \Rightarrow$ $A_i \preceq A_j$
$A_j \preceq A_i$

existe um $A_{\mathcal{L}} \in \mathcal{C}$ tal que $A_j \preceq A_{\mathcal{L}}$ $\forall j \in J$

Então $A \in \mathcal{C}$ que é <u>maximal</u>

i.e. $\nexists B \in \mathcal{C}$ tal que $A \preceq B$

$G \rightsquigarrow \mathcal{C} = \{ H \subseteq G \mid (H, \cdot_H) \text{ é um grupo} \}$

$(\mathcal{C}, \preceq) \to (H, \cdot_H) \preceq (K, \cdot_K)$ se

H é um subgrupo de K

conjunto parcialmente ordenado.

"Usar lema de Zorn"