1| Mostre que o conjunto K de todas as contantes polinômicas em $\mathbb{Z}[x]$ é um subanel mas não é um ideal em $\mathbb{Z}[x]$.

① Definição de Subanel: qualquer $k \in \mathbb{Z}$ e $i \in I$, então $k i \in I$. Para polinomios: qualquer $k(x) \in \mathbb{Q}[x]$ e $i(x) \in I$, então $k(x) \cdot i(x) \in I$.

① Definição de ideal: qualquer $r \in \mathbb{R}$ e $a \in I$, então $ra \in I$ e $ar \in I$.

Teorema: Um subconjunto não-vazio I de um anel R é um ideal, se e somente se, ele tem estas propriedades:

i) Se $a, b \in I \rightarrow (a-b) \in I$
ii) Se $r \in R$ e $a \in I \rightarrow ra \in I$ e $ar \in I$

Resposta: Suponha K é ideal, assim deve existir ar, ra que são geradores de todas as constantes polinômicas.
Mas qualquer constante polinômica primo não pode ser gerada por algum ra, isto porque ela é irredutível, e então K não é ideal.

2| Mostre que o conjunto I de todos os polinômios com com termos constantes em um ideal em $\mathbb{Z}[x]$.

Teorema: Um subconjunto não-vazio I de um anel R é um ideal, se e somente se, ele tem estas propriedades:

i) Se $a, b \in I \to (a-b) \in I$
ii) Se $r \in R$ e $a \in I \to ra \in I$ e $ar \in I$

Temos R sendo um anel comutativo com identidade, $c \in R$, e I o conjunto de todos os múltiplos de c em R, que é: $I = \{rc \mid r \in R\}$. Então I é um ideal.

Resposta: Temos $I[x]$ sendo um subconjunto de $\mathbb{Z}[x]$, onde $I[x]$ é o conjunto dos polinômios com termos constantes par.

① Devemos mostrar que $I[x]$ é um ideal de $\mathbb{Z}[x]$.

Por definição de $I[x]$ ideal de $\mathbb{Z}[x]$, que $I \subset \mathbb{Z}[x]$ onde:

i) $\forall a, b \in I[x] \to a - b \in I[x]$
ii) $\forall r \in \mathbb{Z}[x], \forall i \in I[x]; ri \in I[x] \cap ir \in I[x]$

i) Assumindo que $a \in I[x]$, $b \in I[x]$ sendo que:

$a = a_n x^n + \ldots + a_0$ e $b = b_n x^n + \ldots + b_0$

Agora, temos que $(a-b) = (a_n - b_n) + \ldots + (a_0 - b_0)$ é par desde que $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}: a_0 = k_1 \times 2, b_0 = k_2 \times 2$.

Isto é:

$$a-b = (a_N - b_N) + \ldots + (a_0 - b_0)$$
$$= (2k_{1N} - 2k_{2N}) + \ldots + (2k_1 - 2k_2)$$
$$= 2(k_{1N} - k_{2N}) + \ldots + 2(k_1 - k_2)$$

Como a_0, b_0 é par e $k_1, k \in \mathbb{Z}$, temos que: $k_1 - k_2 = k_3$

Então: $a-b = 2(k_{3N}) + \ldots + 2(k_3)$, temos então que $(a-b)$ é par. Ou seja constantes par.

ii) Assumindo que $a \in \mathbb{Z}[x]$, $b \in \mathbb{Z}[x]$, onde:

$$a * b = a_N \cdot b_N + \ldots + a_0 b_0$$

Como b_0, a_0 são pares, então seu produto é par. Então a cada nova adição sempre teremos pares. Assim $ab \in I$.

---

3) a) Mostre que o conjunto $I = \{(k,0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ é um ideal no anel $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Temos que I é um conjunto formado por 2 elementos, ou seja, um par cartesiano.

$$I = \{(k,0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

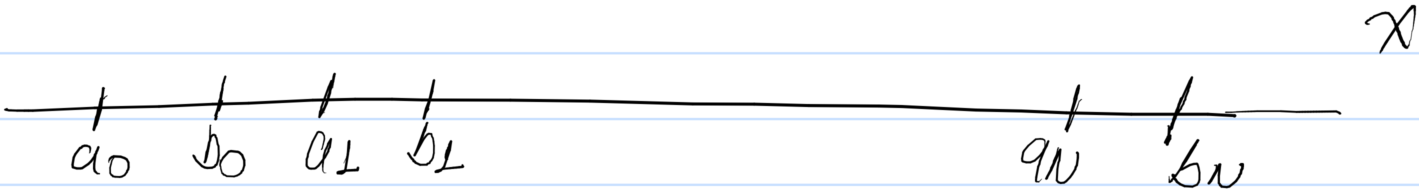
É uma reta crescente em $\mathbb{Z}$ com ordenada igual a zero. Pela definição de ideal temos que: i) $\forall a, b \in I[x] \Rightarrow a - b \in I[x]$

ii) $\forall r \in \mathbb{Z}[x], \forall i \in I[x]$; $ri \in I[x] \wedge ir \in I[x]$

i) Assumimos $a_i, b_i \in I[x]$, dado que: $i = 1, \dots, N$.

$$a_i - b_i = a_0 - b_0 + a_1 - b_1 + \dots + a_N - b_N$$

Temos que $a_i - b_i \in I[x]$ então: $(a_0 - b_0), (a_1 - b_1), \dots, (a_N - b_N) \in I[x]$.



Todos os resultados de $a_i - b_i \in$ a reta x.

ii) Assumimos que $a_i, b_i \in I[x]$ e $I[x] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Portanto: $a_j \cdot b_i \in I[x] \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$a_0 b_0, \ a_1 b_1, \ b_0 a_0, \ b_1 a_1, \dots, \in I[x]$$

Portanto temos que o conjunto I é um ideal.

6) a) Mostre que o conjunto de não unidades em $\mathbb{Z}_8$ é um ideal.

Conjunto de Não-unidades: conjuntos que não contenha o elemento 1, mas ainda preserva as características de ser um anel: as duas operações e suas propriedades.

Ex: $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/\{1\}$, $2\mathbb{Z} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2b \ \forall b \in \mathbb{Z}\}$

Temos que $\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

O conjunto de não-unidades em $\mathbb{Z}_8$: $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\langle 2 \rangle = \{2, 4, 6, 0\}$, temos que $\langle 2 \rangle$ é gerador de um subconjunto em $\mathbb{Z}_8$.

$\langle 2 \rangle = \{2, 4, 6, 8\}$

Para ser ideal, temos que:
i) se $a, b \in I \rightarrow (a-b) \in I$
ii) se $r \in R$ e $a \in I \rightarrow r.a \in I$ e $ar \in I$

Assim temos que $\langle 2 \rangle$ é gerador de $\mathbb{Z}$ e é um ideal.

b) $\mathbb{Z}_9$: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\langle 3 \rangle = \{3, 6, 0\}$ é gerador de $\mathbb{Z}_9$.

E temos que $\langle 3 \rangle$ é um anel.

8) Se I é um ideal em R e J é um ideal no anel S, prove que $I \times J$ é um ideal no anel $R \times S$.

Temos R e S sendo 2 aneis, devemos considerar o produto de $R \times S$. Isto é um anel com operações de soma e produto definidos coordenadas por coordenadas, isto é:

$$(r_1, s_1) + (r_2, s) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2), \text{ e}$$
$$(r_1, s_1) \cdot (r_2 \cdot s_2) = (r_1 \cdot r_2, s_1 \cdot s_2)$$

O elemento 1 do anel $R \times S$ é $(1,1)$ e o elemento ϕ é $(0,0)$.

a) Temos I sendo um ideal de dois lados de R e temos J sendo o ideal de dois lados de S. Devemos mostrar que $I \times J$ é dois lados de $R \times S$.

b) Se K é um ideal de $R \times S$, então deve existir I sendo ideal de R, J sendo ideal de S, sendo que $K = I \times J$.

Por (a) temos que:

I é não vazio, J é não vazio então $I \times J$ é não vazio. Agora se $(i,j), (i',j') \in I \times J$ então:
$(i,j) + (i',j') \in I \times J$.
Se $(i,j) \in I \times J$, $(a,b) \in R \times S$ então $(i,j).(a,b) \in I \times J$.

Teorema 6.1: Um subconjunto não vazio I de um anel R é um ideal, se e somente se, ele tem as propriedades:

i) Se $a, b \in I \rightarrow a-b \in I$
ii) Se $r \in R$ e $a \in I \rightarrow ra \in I$ e $ar \in I$.

Pelo teorema 6.1, temos que $I \times J$ é um ideal de $R \times S$.

Pelo item (b), temos que $I = \{i \in R \mid \exists s \in S : (i,s) \in K\}$ e $J = \{j \in S \mid \exists r \in R : (r,j) \in K\}$. Então I é um ideal, I é não vazio.

Se $i, i' \in I$, dizemos que $(i, s), (i', s') \in K$, então $(i+i', s+s') \in K$. Com isso $i+i' \in I$.

Por $i \in I$, $r \in R$, dizemos que $(i, s) \in K$, e temos que $(ir, s), (ri, s) \in K$, temos também que $ir, ri \in I$, então I esta nos dois lados ideal, igual a J.

Temos que mostrar também que $I \times J = K$, por outro lado, se $(i, j) \in K$, então $i \in I$, $j \in J$ e pela definição de I e J, dado que $K \subseteq I \times J$.
Agora supomos $i \in I$, $j \in J$, então para algum $r \in R$, $s \in S$ teremos $(i, s), (r, j) \in K$.
Isto é:

$$(i,j) = (i,0) + (0,j) = [(i,s).(1,0) + (r,j).(0,1)] \in K$$

Portanto $I \times J \subseteq K$.

— // —

Mostre que $\langle 2, x \rangle$ não é um ideal principal em $\mathbb{Z}[x]$

Temos que $\langle 2, x \rangle = \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_0 \in 2\mathbb{Z}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$.

Suponha que $\langle 2, x \rangle$ é principal. Então existe algum polinômio $f(x)$ em $\langle 2, x \rangle$ sendo que $\langle f(x) \rangle = \langle 2, x \rangle$. Assim $x \in \langle 2, x \rangle = \langle f(x) \rangle$ e $2 \in \langle 2, x \rangle = \langle f(x) \rangle$.

Segue-se que $2 = f(x)g(x)$, $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
Assim $f(x) = c \in \mathbb{Z}$.

Desde que $x \in \langle f(x) \rangle$, c deve ser 1 ou -1 (por exemplo, se $c = 2$ então $\langle f(x) \rangle = \langle c \rangle = \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_0, \dots, a_n$ são os mesmos$\} \neq \langle 2, x \rangle$. Temos uma contradição da suposição).

Mas o ideal de $\mathbb{Z}[x]$ gerado por 1 ou -1 é $\mathbb{Z}[x]$. Desde que $\langle f(x) \rangle \neq \mathbb{Z}[x]$, temos uma contradição.

Teorema 6.2: Temos R sendo um anel comutativo com identidade, $c \in R$, e I é o conjunto de todos os multiplos de c em R, isto é, $I = \{rc \mid r \in R\}$. Então I é um ideal.

7) Temos $c \in R$ e temos $I = \{rc \mid r \in R\}$

a) Se R é comutativo, prove que I é um ideal. (Teorema 6.2 é verdadeiro sempre quando R não tem uma identidade).

Teorema 6.2: Temos R sendo um anel comutativo com identidade, $c \in R$, e I o conjunto de todos os multiplos de c em R, isto é, $I = \{rc \mid r \in R\}$. Então I é um ideal.

Se R é comutativo, devemos provar que I é um ideal.

Pelo teorema 6.1: Um conjunto não vazio I de um anel R é um ideal se e somente se, ele tem estas propriedades:

i) Se $a, b \in I$, então $(a-b) \in I$
ii) Se $r \in R$ e $a \in I$, então $ra \in I$ e $ar \in I$.

Assim tomamos $r_1, r_2, r \in R$ e r_1c e $r_2c \in I$, com isso:

$r_1c - r_2c = (r_1 - r_2)c \in I$, e como $(r_1 - r_2) \in R$

$r(r_1c) = (rr_1)c \in I$ e $rr_1 \in R$

Assim como R é comutativo, vale as mesmas propriedades para R do teorema 6.1.

b) Se R é comutativo mas não tem identidade, é c um elemento do ideal I?
[Considere o ideal $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ no anel $\mathbb{Z}$ de todos inteiros.]

Não, pelo teorema 6.2 c não precisa estar em I. Somente os elementos devem ser múltiplos de c.

Consideremos $I = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ onde $\mathbb{Z}$ é o anel dos inteiros pares, então, cada elemento $x \in I$ é um múltiplo de 2 em $\mathbb{Z}$, porque $x = 2k$ e $k \in \mathbb{Z}$. Em particular, $1 \notin \mathbb{Z}$, e R não tem identidade.

c) Dê um exemplo para mostrar que se R não é comutativo, então I não precisa ser ideal.

Seja $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Então, $I = \{rc \mid r \in M_{2\times2}(\mathbb{R})\}$ consiste em todas as matrizes da forma.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Este é um exemplo

2) b) Mostrar que o conjunto $T = \{(k,k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ não é um ideal em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Definição: Um subanel I de um anel R é um ideal sempre que $r \in R$ e $a \in I$, então $ra \in I$ e $ar \in I$.

Tomamos, por exemplo, o elemento $(1,1) \in T$ e $(1,0) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Então o produto:

$$(1,1)(1,0) = (1,0) \notin T \text{ e } (1,0) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

Logo, T não é um ideal em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.