Exercícios - Pag 180

2) Encontre o inverso multiplicativo de cada elemento em:

a) $\mathbb{Z}_3$: é dado por valores menores do que 3 como resto: $\{0, 1, 2\}$.

- 0, não possui inverso
- 1, por si-somente já é elemento neutro multiplicativo
- 2, temos:

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = \emptyset.$$

3) Qual é a ordem dos grupos:

a) $\mathbb{Z}_{18}$: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$

$$|\mathbb{Z}_{18}| = 18.$$

b) D_4: Para $n>2$, o conjunto das simetrias de um polígono regular de n lados é um grupo para a composição de simetrias. Este tipo de grupo chama-se <u>grupo diedral de ordem n</u> e denota-se por <u>D_n</u>.

Ele é constituído por n rotações de $\frac{2k\pi}{n}$ em torno do centro do polígono, para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Num dos sentidos (horário, ou anti-horário) e por n reflexões em torno dos eixos de simetria do polígono.

Denotando por r a rotação de $2\pi/N$, o conjunto das rotações é:

$$e, r, r^2, \ldots, r^{N-1}$$

Seja s a reflexão em torno de um eixo de simetria, então todas as outras reflexões são da forma $r^i s$ para $i: 1, \ldots, N-1$.
Portanto, temos que:

$$D_N = \{e, r, r^2, \ldots, r^{N-1}, s, rs, r^2 s, \ldots, r^{N-1} s\},$$

Assim para $N=4$, temos:

$$D_4 = \{\underbrace{e, r, r^2, r^3}, \underbrace{s, rs, r^2 s, r^3 s}\}$$

Conjunto de rotação em um sentido, Horário,
Conjunto de rotação em sentido antihorário,

D_4 possui ordem 8.

4) Determine se o conjunto G é um grupo sob a operação $*$.

a) $G = \{2, 4, 6, 8\}$ em $\mathbb{Z}$, $a * b = ab$

Para ser grupo deve satisfazer:

i) associatividade
ii) elemento neutro
iii) inverso

(Cada par de elementos do conjunto faz corresponder uma e um só elemento deste conjunto.)

iv) fechado: $a \cdot b \in G$ e $a, b \in G$.

$G = \{2, 4, 6, 8\}$

$2 \times 4 = 8 \in G$, $2 \times 6 = 12 \notin G$, $2 \times 8 = 16 \notin G$.

Não é grupo.

b) $G = \mathbb{Z}$, $a * b = a - b$.

Dado $\mathbb{Z}: \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$

i) Seja $a < b \rightarrow -1 - 0 = -1 \in G$

$0 - 1 = -1 \in G$

$1 - 2 = -1 \in G$

Se $a > b \rightarrow 0 - (-1) = 1 \in G$

$0 + 1 = -1 \in G$

$1 + 2 = 3 \in G$

ii) Dados a, b, c, $(a-b) - c = (b-c) - a$

$(-1 + 0) - 1 = \underline{-2} = (0 - (-1)) - (-1) \in G$

iii) Elemento neutro: para cada elemento deve possuir um inverso e ser único:

$0 \in G$, é o elemento neutro da operação.

iv) Inverso: para todo elemento x de G existe um x' em G tal que: $x * x' = x' * x = e$, este elemento é único para cada elemento de G.

$-1 + 1 = 0$, $1 - 1 = 0$, $\in G$.

Portanto G é um grupo.

5) Encontre o inverso de cada grupo de elementos. (Exemplo 16 - 7.1 A).

Exemplo 16 - 7.1: Grupos de unidades em $M(\mathbb{Z}_2)$ é:

$GL(2, \mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \text{onde } a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \text{ e } ad - bc \neq 0 \right\}$

Um grupo linear geral de grau 2 sobre $\mathbb{Z}_2$. Isto é um grupo não abeliano finito de ordem 6.

$\mathbb{Z}_2 : \{0, 1\},$

Exemplo 8 - seção 3.2:

Temos F sendo um campo e M(F) matrizes de anéis 2x2 com entradas em F. Se:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(F)$ e $(ad - bc) \neq 0_F$, então:

$ad - bc$ é uma unidade de F.

Temos que: $\frac{1}{ad - bc}$ pode ser trocado por $(ad - bc)^{-1}$, apresenta que A é uma matriz invertível com inversa:

$$\begin{pmatrix} d(ad-bc)^{-1} & -b(ad-bc)^{-1} \\ -c(ad-bc)^{-1} & a(ad-bc)^{-1} \end{pmatrix}$$

Assim dado uma matriz diferente de zero: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ em M(F) sendo que $ad - bc = 0_F$

é um divisor zero porque:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_F & 0_F \\ 0_F & 0_F \end{pmatrix} \quad e,$$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_F & 0_F \\ 0_F & 0_F \end{pmatrix}$$

Temos: $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ em $M(\mathbb{Z}_6)$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} \text{ : traço } = 0$$

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ em $\mathbb{Z}_3$. Tomamos que $\det \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1(2-0)^{-1} & -0.(2.-0)^{-1} \\ -2(2-0)^{-1} & 1.(2-0)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -0/2 \\ -2/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

inversa: $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

6) ① Dê um exemplo de um grupo abeliano de ordem 4 em que cada elemento de não identidade $\underline{a}$ satisfaz $a * a = e$.

Teorema 7.4: Temos G (com operação $*$) e H (com operação $\bullet$) seja grupos. Define uma operação $\boxtimes$ sobre $G \times H$ por:

$$(g, h) \boxtimes (g', h') = (g * g', h \circ h')$$

Então $G \times H$ é um grupo. Se G e H são abelianos, então $G \times H$ também é.
Se G e H são finitos, então:

$$|G \times H| = |G| \cdot |H|$$

Para formar um grupo abeliano deve-se satisfazer:

i) fechado no grupo
ii) associativo
iii) elemento neutro
iv) inverso
v) comutativo.

Tomamos o grupo $G: \{1, i, -1, -i\}$ para a multiplicação dos complexos:

$(G, \cdot) = \{1, i, -1, -i\}$

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

7) Apresente um grupo $GL(2, \mathbb{Z}_2)$ tem ordem 6 para listar todos os elementos.

$\mathbb{Z}_2: \{0, 1\}$. $GL(2, \mathbb{Z}_2)$ deve possuir $\det \neq 0$.
$ad - bc \neq 0$.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 3 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Mostre por exemplo que os grupos: $GL(2, \mathbb{R})$ e $GL(2, \mathbb{Z}_2)$ são não abelianos.

$GL(2, \mathbb{Z}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathbb{Z}_2 : \{0, 1\}$ •

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Abeliano

• $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Abeliano.

• $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\neq$ Não abeliano.

$GL(2, \mathbb{R})$, $\mathbb{R} : \{ \ldots\ldots, -1, 0, 1, \ldots \}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$\neq$ Não Abeliano.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

13) De exemplo de grupos não-abelianos de ordens 12, 16, 30 e 48. Use o Teorema 7.4.

<u>Teorema 7.4:</u> Se $|G \times H|$ é abeliano então:

$|G \times H| = |G| \times |H|$. Sendo G e H finitos.

$|G \times H| = 12$, $|G| = 3$ e $|H| = 4$.

O mesmo vale p/:

$|G \times H| = 16$, $|G| = 4$ e $|H| = 4$.