Teoremas de Isomorfismos

1. $\phi : M_1 \to M_2$ A-módulos

$$\begin{cases} \cdot\ \phi(m_1 + m_2) = \phi(m_1) + \phi(m_2) \\ \cdot\ \phi(am) = a\,\phi(m) \end{cases}$$

então $\text{Im}\,\phi \cong \dfrac{M_1}{\text{Ker}(\phi)}$ (Igual que homo de aneis)

2º N_1 N_2 A-submodulos de M

então $N_1 + N_2$ é um A-submodulo de M, então

$$\frac{N_1 + N_2}{N_2} \cong \frac{N_1}{N_1 \cap N_2}$$

Ideia $N_1 \xrightarrow{\phi} \dfrac{N_1 + N_2}{N_2}$

$n \longmapsto \bar{n}$

- é sobre
- $\text{Ker}(\phi) = N_1 \cap N_2$
- usar 1º

3 $P \subseteq N \subseteq M$ A-módulos

$$M/P \supseteq N/P \quad \text{(claro)}$$

$$\frac{M/P}{N/P} \cong \frac{M}{N}$$

Ideia:
$$\frac{M}{P} \xrightarrow{\phi} \frac{M}{N}$$
$$m+P \longmapsto m+N$$

ϕ cumpre
- Está bem definido
- Sobre. ✓
- $\operatorname{Ker} \phi = N/P$

• Usar 1º

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Como construir módulos} \\ \cdot\ N \subset M \Rightarrow M/N \text{ modulo quocente} \\ \cdot\ N_1, N_2 \subset M \Rightarrow N_1 + N_2 \text{ é modulo} \\ N_1, N_2 \subset M \Rightarrow N_1 \cap N_2 \text{ é módulo}\end{array}}$$

Somas Diretas

$\{M_i\}_{i \in I}$ familia de A-módulos

$\bigoplus_{i \in I} M_i$ é o menor módulo tal que para $k \in I$ existe

$$\to \begin{cases} i_k : M_k \longrightarrow \bigoplus_{j\in I} M_j \\ a \longmapsto (v_j)_{j\in I} \quad \text{com } v_j = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ a & j = k \end{cases} \end{cases}$$

$$\bigoplus_{j\in I} M_j = \left\{ (v_j)_{j\in I} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{tal que } v_j = 0 \text{ para} \\ \text{quase todo } j \\ v_j \in M_j \end{array} \right\}$$

(i.e salvo um # finito de indices)

O produto direto

$$\prod_{j\in I} M_j = \left\{ (v_j)_{j\in I} \;\middle|\; v_j \in M_j \right\}$$

Claramente $\bigoplus_{j\in I} M_j \subseteq \prod_{j\in I} M_j$

e são iguais quando $|I| < \infty$

Exemplos: $M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ é um $\mathbb{Z}$ módulo

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_{n\times n}(\mathbb{Z})$$

$$\left(a, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} \cdots \right)$$

Propriedade universal: Seja A um anel e M um A módulo tal que existe homomorfismo $\phi_i : M_i \to M$ $\forall i \in I$ então existe um único homomorfismo

$$\phi : \bigoplus_{j\in I} M_j \to M$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{j\in I} M_j \arrow[d, dashed, "\exists!\ \phi"] & & M_k \arrow[ll, "i_k"'] \arrow[dll, "\phi_i"] \\
M & &
\end{tikzcd}$$

Faz o diagrama comutar

Queremos definir $\Phi : \bigoplus_{i\in J} M_i \to M$

se $(v_j)_{j\in I} \in \bigoplus_{i\in J} M_j$ logo existem

$j_1, j_2, \ldots, j_s \in I$ tal que $v_j = 0$ $\forall j \neq j_t$ $t = 1 \ldots s$

definimos $\Phi((v_j)_{j\in I}) := \phi_{j_1}(v_{j_1}) + \phi_{j_2}(v_{j_2}) \ldots + \phi_{j_s}(v_{j_s})$

$\phi((w_j)_{j\in I}) = \phi_{j_1}(w_{j_1}) + \cdots + \phi_{j_s}(w_{j_s})$

Temos que mostrar que

$$\phi\left((v_j)_{j\in I} + (w_j)_{j\in I}\right) = \phi\left((v_j)_{j\in I}\right) + \phi\left((w_j)_{j\in I}\right)$$

$$\phi_{j_1}(v_{j_1} + w_{j_1}) + \cdots + \phi_{j_s}(v_{j_s} + w_{j_s})$$

$$= \phi_{j_1}(v_{j_1}) + \phi_{j_1}(w_{j_1}) + \cdots + \phi_{j_s}(v_{j_s}) + \phi_{j_s}(w_{j_s})$$

Os diagramas comutam

$$M_k \xrightarrow{i} \bigoplus_{j\in I} M_j$$

$$m_k \longmapsto (v_j)_{j\in J} \quad \text{com } v_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ m_k & \text{se } j = k \end{cases}$$

$$\downarrow \phi$$

Pegar as coordenadas diferentes de zero

$$\phi_k(v_k) = \phi_k(m_k)$$

<u>Proposição</u> Seja M um A-módulo e $\{M_i\}_{j\in I}$ é uma família de submódulos de M

Então $M \cong \bigoplus_{j\in I} M_j$ se e somente

se ① $M = \sum_{i\in I} M_j$ $\Leftarrow$

② $\forall k \in I \quad M_k \cap (M_{i_1} + \cdots + M_{i_s}) = \{0\}$

onde $i_1 \cdots i_s \neq k$

$(\Leftarrow)$ Estamos supondo ① e ②

Prova: Seja

$$\boxed{\begin{aligned} \phi : \bigoplus_{i\in I} M_j &\to M \\ (v_j)_{j\in I} &\mapsto \sum_{j\in I} v_j \end{aligned}}$$

é um homomorfismo bem definido.

Ideia: Usar o 1º teorema de isomorfismo

- ϕ é sobre pela condição ①

Pois se $m \in M = \sum_{j\in I} M_j \Rightarrow$ existem

$m_{i_1} \in M_{i_1}$, $m_{i_2} \in M_{i_2} \cdots$ $m_{i_s} \in M_{i_s}$ tal que

$m = m_{i_1} + \cdots + m_{i_s}$

Considerando o elemento $(v_j)_{j\in I} \in \bigoplus_{j\in I} M_j$

definido por $v_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i_1, i_2 \cdots i_s \\ m_{i_k} & \text{se } j = m_{i_k} \end{cases}$

Logo $\Phi((v_j)_{j\in J}) = m_{i_1} + \dots + m_{i_t} = m$ é sobre

- Φ é injetiva (equivalente $Ker(\Phi) = \{0\}$)

Seja $(v_j)_{j\in J} \in Ker(\Phi)$ logo

$$\Phi((v_j)_{j\in J}) = \sum_{j\in J} v_j = 0 \qquad i_1 \dots i_s$$

$$= v_{i_1} + v_{i_2} \dots + v_{i_s} = 0$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\cap \\ M_{i_1}}}{v_{i_1}} = \underbrace{(-v_{i_2}) + (-v_{i_3}) \dots + (-v_{i_s})}_{\substack{\cap \\ M_{i_2} + \dots + M_{i_s}}}$$

Logo $v_{i_1} \in M_{i_1} \cap (M_{i_2} + \dots + M_{i_s}) = \{0\}$

$\Rightarrow v_{i_1} = 0$

$\Rightarrow$ todas as coordenadas de $(v_i)_{i\in J}$ são zero assim Φ é injetiva

Φ é um isomorfismo de módulos

$(\Rightarrow)$ Vamos supor que

$$\bigoplus_{j\in J} M_j \xrightarrow{\phi} M$$

$$(v_j)_{j\in J} \mapsto \sum_{j\in J} v_j \quad \text{é } \underline{\underline{\text{isomorfismo}}}$$

① Trivial pois ϕ é sobre

② Se $a \in M_k \cap (M_{i_1} + \dots + M_{i_s})$

$$\overset{\in M_k}{a} = \underline{m_{i_1} + \dots + m_{i_s}}$$

Consideremos o elemento $(v_j)_{j\in J} \in \bigoplus M_j$

definido por $v_j = \begin{cases} a & \text{se } j=k \\ -m_{i_t} & \text{se } j=i_t \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}$

$$\phi((v_j)_{j\in J}) = \underline{a - m_{i_1} - \dots - m_{i_s}} = \underline{0}$$

$\Rightarrow (v_j) = (0) \quad \Rightarrow \quad a = 0$

$m_{i_t} = 0 \quad \forall t = 1 \dots s$

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

$$(x,y)^t \longmapsto (ax+by, cx+dy)^t$$

$$(\quad , \quad) \longleftarrow (\tilde{x}, \tilde{y})^t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \longleftarrow\!\shortmid \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

com a condição de $|ad-bc| = 1$

$$I = \mathbb{N} \qquad M = \{ (v_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid v_j \in \mathbb{Z} \}$$

com um # finito de coordenadas $\neq 0$

$$M_k = \{ (v_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset M \,/\, v_j = 0 \ \forall j \neq k \}$$

$$\bigoplus_{j=3}^{\infty} M_j \subseteq \bigoplus_{j=0}^{\infty} M_j = \underline{M}$$

$$(v_j)_{j \geq 3} \longmapsto (w_j)_{j \in \mathbb{N}}$$

$$w_j = v_{j+3}$$

$$(0, 0, 0, v_3, v_4, \ldots) \longmapsto (v_3, v_4, \ldots)$$

$$\longleftarrow\!\shortmid$$

$$\sum_{j\geq 3} M_j \subsetneq M$$

Exercicios para pensar:

Sejamo $M, \ldots, M_{n+1}$ A-modulos

e $\boxed{M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \xrightarrow{\phi_2} M_3 \rightarrow \cdots \xrightarrow{\phi_n} M_{n+1}}$

Dizemos que é uma segencia exata de A-modulos se $Im(\phi_i) = Ker(\phi_{i+1})$

$\forall i = 1, 2, \ldots, n$

(em particular $\phi_{i+1} \circ \phi_i \equiv 0$)

ⓐ Provar que $N \subset M$ então

$$0 \rightarrow N \xhookrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{W} \rightarrow 0$$

é uma segencia exata

ⓑ Se M_1, M_2 são A-módulos

então

$$0 \longrightarrow M_1 \xhookrightarrow{i} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi_2} M_2 \rightarrow 0$$

é uma sequencia exata

Lema pequeno do cinco. Considere o seguinte diagrama de A-módulos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_4"'] & 0 & \leftarrow \text{Exata} \\ 0 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & 0 & \leftarrow \text{Exata} \end{tikzcd}$$

Então (a) Se ϕ_2 e ϕ_4 são 1-1 então ϕ_3 é injetivo

(b) Se ϕ_2 e ϕ_4 são sobrejetivos então ϕ_3 é sobre.

3.1.5 Seja ${}_R M$ um R-modulo e

A conjunto arbitrario

$$M^A := \{ f : A \to M \}$$

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$
- $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, $\alpha \in R$, $f(x) \in M$

$\cdot\ (\alpha\beta) f = \alpha(\beta f)$

$\vdots$

dão a M^A uma estrutura de R-modulo

(b) $A = M$ $\quad M^M = \{ f : M \to M \}$ (Trivial pois (a))

(c) $\mathrm{End}(M) = \{ \phi : M \to M \mid \phi$ homo de A-módulos $\}$

$$\mathrm{End}(M) \subseteq M^M$$

é R-módulo com as mesmas operações

(d) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ é um $\mathbb{R}$-modulo

$f+g$, cf $\qquad \mathbb{R}^{[a,b]} = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$g: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f: [a,b] \to \mathbb{R}$

- $f+g: [a,b] \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto f(x)+g(x)$
- $(c\,f)(x) = c \cdot f(x)$

3.1.9. $(\mathbb{R}^n, \tilde{+})$ $\quad a \tilde{+} b := a - b$

$(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$

$\underset{\in \mathbb{R}}{\alpha} \tilde{\cdot} \underset{\in \mathbb{R}^n}{a} = (-\alpha a_1, -\alpha a_2, \dots, -\alpha a_n)$

- $a \tilde{+} b \overset{?}{=} b \tilde{+} a$ $\quad$ falso
- $0 \tilde{+} a \neq a$ $\quad$ Não tem elemento neutro a esquerdo
- $a \tilde{+} 0 = a$

3.1.10