anel com elemento neutro para o produto

2.1 $A \leq B$ $\quad b_1, \ldots, b_n \in B$. Então

$A[b_1 \ldots b_n]$ é o menor subanel que contem A e $b_1 \ldots b_n$

$$A[b_1 \ldots b_n] := \{ P(b_1 \ldots b_n) \mid P(x_1 \ldots x_n) \in A[x_1, \ldots, x_n] \}$$

conjunto

$\cap B$

$\cap\!\!\!\mid\;$ B

$G = A[b_1 \ldots b_n]$ é anel

α, β temos que mostrar que $\alpha + \beta \in G$

$\alpha \cdot \beta \in G$

$\exists\, P(x_1, \ldots x_n)\ Q(x_1 \ldots x_n) \in A[x_1 \ldots x_n]$ tais que

$P(b_1 \ldots b_n) = \alpha$

$Q(b_1 \ldots b_n) = \beta$

Se considerarmos o polinomio

$H = P(x_1 \ldots x_n) + Q(x_1 \ldots x_n) \in A[x_1 \ldots x_n]$

$H(b_1, \ldots, b_n) = P(b_1 \ldots b_n) + Q(b_1 \ldots b_n) = \underbrace{\alpha + \beta}$ ✓

$\alpha = P(b_1 \ldots b_n) \Rightarrow -\alpha = -P(b_1 \ldots b_n)$

Essa nel contem A^* e $b_1 \ldots b_n$ pois basta considerar os polinomios constantes

$P(x_1 \dots x_n) = a \in A \Rightarrow a \in C$

$P_j(x_1, \dots, x_n) = 1 \cdot x_j \Rightarrow b_j \in C$

Caso A tenha elemento 1.

$A = 6\mathbb{Z}$ é um anel sem unidade

$\cap|$

$B = 2\mathbb{Z} \Rightarrow 4 = \beta_1$

$A[4] = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j 4^j \mid a_j \in 6\mathbb{Z} \right\}$

$a_j = 6\tilde{a}_j$

$= \left\{ 6 \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \tilde{a}_j 4^j} \mid \tilde{a}_j \in \mathbb{Z} \right\}$

Contraexemplo quando o anel A não tem unidade

C anel que contem A e $b_1 \dots b_n$

falta mostrar que é mínimo com tal propriedade. se A e $b_1 \dots b_n$ ao anel mínimo M então todo elemento da forma $a_{\vec{\alpha}} b_1^{\alpha_1} \dots b_n^{\alpha_n} \in M$ $\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$, $a_{\vec{\alpha}} \in A$

e somas de coisas deste tipo também estão no anel mínimo, mas fazer isso é exatamente $P(b_1, \dots, b_n)$ onde P é um polinomio com coeficientes em A.

2.2 Encontrar a fatoração propria em $\mathbb{Z}[x][y]$ e $\mathbb{Z}[y][x]$

Uma fatoração propria de um polinomio $f(x,y)$ em $\mathbb{Z}[x][y]$ é escrever $f(x,y)$ como produto de 2 polinomios em y de grau (em y) ≥ 1

ⓐ $x^2 + xy + x + y$

$$= x^2 + (y+1)x + y$$

$$= (x + h(y))(x + g(y))$$

$$\Rightarrow \quad h(y) + g(y) = y + 1 \qquad h_1(x) = y \quad g_1(y) = 1$$

$$h(y)g(y) = y \qquad \cancel{\to} \; h_2(x) = -y \quad g_2(y) = -1$$

$$= (x+y)(x+1)$$

Ele não se fatora se vemos ele como polinomio em y com coeficientes em $\mathbb{Z}[x]$

(b) $xy^2 + x^2y + x^2 + y^2 + 2xy + x + y \leftarrow$

$$= (x+1)y^2 + (x^2+2x+1)y + x^2 + x$$

$$= (x+1)y^2 + (x+1)^2 y + x(x+1)$$

$$= (x+1)\left(y^2 + (x+1)y + x\right)$$

$$= (x+1)(y+x)(y+1) \leftarrow$$

2.3. Sabemos que $\mathbb{Z}[x,y]$ é D.F.U.

Determinar f

$$\mathrm{mdc}\Big(\underbrace{x^2y^2 - xy^2 + 2x^2y - 2y^2 + x^2 - 4y - x - 2 - 2xy}_{f},\ \underbrace{xy^2 + x^2y + y^2 + 2xy + x^2 + y + x}_{g}\Big)$$

$$\boxed{\mathrm{mdc}(f, g) = \mathrm{mdc}(f - hg, g)} \leftarrow$$

$$g = (x+1)y^2 + (x^2+2x+1)y + x^2 + x$$

$$= (x+1)(y+x)(y+1)$$

$P_y(x)$ se $\boxed{x+1}$ divide $P_y(x) \iff P_y(-1) = 0$

$$x^2y^2 - xy^2 + 2x^2y - 2y^2 + x^2 - 4y - x - 2 - 2xy = f(x,y)$$

$x = -1 \Rightarrow$

$$\cancel{y^2} + \cancel{y^2} + 2y - \cancel{2y^2} + 1 - 4y + 1 - 2 + 2y = 0$$

$\Rightarrow x+1$ divide $f(xy)$ ✓

substituindo $y = -x$

$$x^4 - x^3 - 2x^3 - 2x^2 + x^2 + 4x - x - 2 + 2x^2$$

$\Rightarrow x+y$ não divide $f(xy)$

$$x^2y^2 - xy^2 + 2x^2y - 2y^2 - 2xy + x^2 - 4y - x - 2,$$

substituindo $y = -1$

$$\cancel{x^2} - \cancel{x} - \cancel{2x^2} - \cancel{2} + \cancel{x^2} + \cancel{4} - \cancel{x} - \cancel{2} + \cancel{2x} = 0$$

$y+1$ divide $f(x)$

$\Rightarrow \operatorname{mdc}(f,g) = (x+1)(y+1)$

2.4. $P = \underbrace{x^3 - yx^2 - y^2x + y^3}_{} \in A[y][x]$ $\quad a = y$

$\boxed{x-y}$

$$y^3 - y(y^2) - y^2y + y^3 = 0 \quad \text{é raiz}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - yx^2 - y^2x + y^3 & \cancel{x} - y \\ \hline -x^3 + yx^2 & x^2 - y^2 \\ \hline 0 \quad y^2x - y^3 & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

$$(\cancel{x-y})(x^2-y^2) = (x-y)^2(x+y)$$

$a = y$ é raiz de mult 2

2.5 D dominio

$$U(D[x_1, \dots, x_n]) = U(D)$$

$$\supseteq$$

$$U(D) = U(D[x_1]) = U(D[x_1, x_2]) = \dots$$

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \quad a_n \neq 0 \quad n \geq 1$

$g(x) = b_m x^m + \dots + b_0 \quad b_m \neq 0 \quad m \geq 0$

$f(x)g(x) = \underline{a_n b_m} x^{m+n} + \dots + \underline{a_0 b_0} = \underline{1}$

$a_n b_m = 0$ contraditório com D ser dominio

2.6 D DFU $p \in D$ primo

então p é primo em $D[x_1 \dots x_n]$

p primo em $D \Rightarrow p$ primo em $D[x_1]$

p é primo se sempre que $p | ab$

então $p | a$ ou $p | b$

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

$$p \mid f(x) g(x) \qquad g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$$

$$\| $$

$$\underline{a_n} b_m x^{m+n} + \dots \qquad (\underline{a_0 b_1} + b_0 a_1) x + \underline{a_0 b_0}$$

mas p não divide $\underline{f(x)}$ e $\underline{g(x)}$

seja a_j o coeficiente com j mínimo

tal que $p \nmid a_j$

e seja b_ℓ o coeficiente com ℓ mínimo

tal que $p \nmid b_\ell$

no produto $f(x) g(x)$ o coeficiente

de $x^{j+\ell}$ é

$$\underbrace{a_0 b_{j+\ell} + a_1 b_{j+\ell-1} + \dots a_{j-1} b_{\ell+1}}_{p} + a_j b_\ell + \underbrace{a_{j+1} b_{\ell-1} + \dots + a_{j+\ell} b_0}_{p}$$

logo p divide $a_j b_\ell$ mas p não divide a_j nem b_ℓ o que é contraditorio

Se D e DFU $\Rightarrow$ $D[x]$ e DFU $\to$ . . . .

2.7 $\quad x^2 + y^2 \quad \mathbb{Z}[x,y]$

ⓐ $x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy) \to$ so se fatora em $\mathbb{C}[x,y]$

ⓑ $x^3 - 2y^3 = (x - \sqrt[3]{2}\, y)$ (Quadratico) $\in \mathbb{R}[x,y]$

$= (x - \sqrt[3]{2}\, y)(x - \sqrt[3]{2}\, \xi_3 y)(x - \sqrt[3]{2}\, \xi_3^2 y) \in \mathbb{C}[x,y]$

Critério de Einsenstain: $f \in A[x]$ (A DFU)

tal que $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

e um primo p de A tal que

$p \nmid a_n \quad p \mid a_j \quad j = 0 \cdots n-1 \quad p^2 \nmid a_0$

então $f(x)$ é irredutível

ⓐ $\to \quad xy^2 - \underline{4}\, y + \underline{2}(x+1)$

$\to \quad (y^2-2)x + 2(-2y+1)$

$\mathbb{Z}[x,y] \quad x, y$ são primo!!

ⓑ $x^5y^2 + (x^2+2x+1)y + \cancel{x}$

$$x^5\left(y^2 + \underbrace{\frac{x^2+2x+1}{x^5}}\, y + \frac{1}{x^4}\right) \in$$

$$\left(y + \quad\right)\left(y + \quad\right)$$

$$\frac{-\frac{x^2+2x+1}{x^5} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2+2x+1}{x^5}\right)^2 - \frac{4}{x^4}}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^4}\left(\frac{(x+1)^4}{x^6} - 4\right)} = \frac{1}{x^5}\sqrt{(x+1)^4 - 4x^6}$$

$$= \frac{1}{x^5}\sqrt{\underbrace{\left((x+1)^2 - 2x^3\right)}_{f(x)}\underbrace{\left((x+1)^2 + 2x^3\right)}_{g(x)}}$$

Se $f(x)g(x) = (P(x))^2$

com $mdc(g(x), f(x)) = 1$ $\Rightarrow$ cada um tem que ser um quadrado

$f(x) = (u(x))^2 \qquad g(x) = (v(x))^2$

2.9 $\quad x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{C}[x, y, z]$

$(x + f(y))(x + g(y))$

$x^2 + \underset{\substack{\| \\ 0}}{(f(y) + g(y))}\,x + \underset{\substack{\| \\ y^2 - 1}}{f(y)g(y)}$

$f(y) = -g(y) \qquad -(f(y))^2 = y^2 - 1$

"$f(y)$" $= \sqrt{1 - y^2}$

Que não é polinomio

2.10 $\quad C$ corpo $\qquad P(x, y) \in C[x\ y]$

P tem um fator linear $\Leftrightarrow$

- $\exists\, q \in C[x]$ com grau$(q) \leq 1$ e

$P(x, q(x)) = 0$

ou

- $\exists\, r \in C[y]$ com grau$(r) \leq 1$ e

$P(r(y), y) = 0$

Suponhamos que $ax+by+c$ é um fator de $P(x,y)$

$$P(x,y) = (ax+by+c)\cdot h(x,y)$$

se $a \neq 0$ se substituimos x por $x = -\frac{by+c}{a}$

$$P\left(-\frac{by+c}{a}, y\right) = \underbrace{\left(a\left(-\frac{by+c}{a}\right)+by+c\right)}h(\ ,\ )$$
$$= (-by-c+by+c)\, h(\ )$$
$$= 0$$

Suponhamos que $q(x) = ax+b \in \mathbb{C}[x]$

tal que $P(x, ax+b) = 0 \Leftarrow$

$P(x,y) \in \mathbb{C}[x][y]$

$P(x,y)$ dividimos por $y-(ax+b)$

$$\boxed{P(x,y) = Q(x,y)\,(\underbrace{y-ax-b}_{\uparrow}) +} \; \underline{U(x)}$$

$$\underbrace{P(x, ax+b)}_{\substack{\| \\ 0}} = Q(x, ax+b)\,(\underbrace{\cancel{ax+b-ax-b}}_{0}) + U(x)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U(x) = 0}$$