

Seja  $S = \left\{ \frac{a}{7^t} \in \mathbb{Q} \mid a, t \in \mathbb{Z}, t \geq 0 \right\}$

a) Mostre  $S$  é um domínio.

Para  $S$  ser domínio temos que  $st$  seja primo, então  $t$  deve ser igual a 1. Portanto para  $S$  ser um domínio temos que  $t=1$  e a cada elemento  $S$  não tenha divisores de zero.

Tomamos um ideal  $(a)$  da forma  $(7^t)$  e  $\left(\frac{a}{7^t}\right) = (a7^t)$  e temos que se:

$\left(\frac{a}{7^t}\right)$  é domínio, então  $\nexists \bar{a}, \bar{b} \in (a7^t) \setminus \{0\}$  tais que  $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ .

Se  $t$  é composto então  $7^t = c \cdot d$  então  $(a7^t)$  não é domínio e  $\bar{a} \neq \bar{0}$  e  $\bar{b} \neq \bar{0}$ , sendo  $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ .

Se  $7^t = p$  e  $p$  um primo então  $a_p = \left(\frac{a}{p}\right)$

Assim se  $\bar{a}\bar{b} = \bar{0} \rightarrow p \mid ab$  e  $p \mid a$  ou  $p \mid b$

Portanto  $\bar{a} = \bar{0}$  ou  $\bar{b} = \bar{0}$ , e conclui-se que  $S$  é um domínio.

b) Determine as unidades de  $S$ .

A unidade de um elemento é dado pelo seu inverso, portanto:

$$\frac{a}{7^t} \cdot \left(\frac{a}{7^t}\right)^{-1} = 1 \rightarrow \frac{a}{7^t} \frac{7^{-t}}{a^{-1}} = 1.$$

Então a unidade de cada elemento de  $S$  é dado por  $\frac{7^t}{a} \in \mathbb{Q}$ .

c) É  $S$  um domínio de fatoração única? Justifique.

Teorema 10.12: Temos  $R$  sendo um domínio de ideal principal. Todo elemento não unidade e diferente de zero de  $R$  é o produto de elementos irreduzíveis, e esta fatoração é única até seus associados, isto é, se:

$$p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$$

Com cada  $p_i$  e  $q_j$  irreduzível, então  $r=s$  e, depois nos organizamos e reordenamos se necessário:

$p_i$  é associado de  $q_i$   $\forall i=1, \dots, r$

Tomamos  $\left(\frac{a}{7^t}\right)$  como um DIP, e

Tomamos:  $\frac{a_1}{7^{t_1}}, \frac{a_2}{7^{t_2}} \in \left(\frac{a}{7^t}\right)$ , sendo ambos diferentes de zero e não unidades. Então temos:

$$\frac{a_i}{7^{t_j}}, \text{ onde } i, j = 1, \dots, N$$

Logo como um domínio euclidiano é dado por uma função e 2 elementos do domínio:

$$f(a_1) \leq f(a_1 \cdot a_2)$$

$$f\left(\frac{a_1}{7^{t_1}}\right) \leq f\left(\frac{a_1}{7^{t_1}} \cdot \frac{a_2}{7^{t_2}}\right)$$

$$\frac{1}{7^{t_1}} f(a_1) \leq \frac{1}{7^{t_1} \cdot 7^{t_2}} f(a_1 a_2)$$

$$f(a_1) \leq \frac{1}{7^{t_2}} f(a_1 a_2)$$

$$7^{t_2} f(a_1) \leq f(a_1 a_2)$$

Somente é verdadeiro se  $a_1$  ou  $a_2$  for:

$$a_1 \geq 7^{t_2} \text{ ou } a_2 \geq 7^{t_2}$$

Portanto não é válido para todos os casos. Então não D.E.

Mas como  $\frac{a}{7^t} = \frac{1}{7^t} \cdot a$  e  $a, t \in \mathbb{Z}$

Temos como  $a$  é decomposto em primos e  $7^t$  somente em 7, temos que a decomposição não é única, e não é o mínimo de fatoração única.