Mostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ é domínio euclidiano com a função $\gamma(a+b\sqrt{3}) = |a^2-3b^2|$.

Dica: Usar o mesmo processo usada em aula para provar que $\mathbb{Z}[i]$ é domínio euclidiano.

Defini-se a norma sobre $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ sendo $N(a+b\sqrt{3}) = |a^2-3b^2|$.

Tomamos $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ com $\beta \neq 0$. Assim $\alpha = a+b\sqrt{3}$ e $\beta = c+d\sqrt{3}$. Então:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+b\sqrt{3}}{c+d\sqrt{3}} \cdot \frac{c-d\sqrt{3}}{c-d\sqrt{3}}$$

$$= \frac{ac-3bd}{c^2-3d^2} + \frac{(-ad+bc)}{c^2-3d^2}\sqrt{3}$$

$$= r + s\sqrt{3}$$

Onde $r = \dfrac{ac-3bd}{c^2-3d^2}$ e $s = \dfrac{-ad+bc}{c^2-3d^2}$

Temos "p" sendo o inteiro mais próximo de r, e "q" sendo o inteiro mais próximo de s. Temos então que:

$$|r-p| \leq 1/2 \quad \text{e} \quad |s-q| \leq 1/2$$

Então vamos mostrar que $\alpha = (p+q\sqrt{3})\beta + \gamma$ para $\gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ tanto que $\gamma = 0$ ou $N(\gamma) < N(\beta)$.

Vamos definir uma função:

$\theta = (r-p) + (s-q)\sqrt{3}$, e $\gamma = \beta \cdot \theta \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, portanto:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \beta \cdot \theta \\
&= \beta((r-p)+(s-q)\sqrt{3}) \\
&= \beta(r+s\sqrt{3}) - \beta(p+q\sqrt{3}) \\
&= \beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} - \beta(p+q\sqrt{3}) \\
&= \alpha - \beta(p+q\sqrt{3}), \text{ então } \alpha = \beta(p+q\sqrt{3}) + \gamma
\end{aligned}
$$

Agora, temos que:

$$
\begin{aligned}
N(\gamma) &= N(\beta \cdot \theta) \\
&= N(\beta) \cdot N(\theta) \\
&= N(\beta) \cdot |(r-p)^2 - 3(s-q)^2| \\
&\leq N(\beta) \cdot \max\{(r-p)^2, 3(s-q)^2\} \\
&\leq \frac{3}{4} N(\beta) \\
&< N(\beta)
\end{aligned}
$$

Portanto: $|(r-p)^2 - 3(s-q)^2| \leq \max\{(r-p)^2, 3(s-q)^2\}$ desde que $(r-p)^2, 3(s-q)^2 \geq 0$ e com isso temos que: $(r-p)^2 \leq 1/4$ e $3(s-q)^2 \leq 3/4$.