Módulos Quocientes

Sejam M um A-módulo e $N \subseteq M$ um A-submódulo de M. Em M considere a seguinte relação: $u, v \in M$.

$$u \underset{N}{\sim} v \Longleftrightarrow u - v \in N$$

$$u \equiv v \bmod N$$

Vamos mostrar que $\underset{N}{\sim}$ é uma relação de equivalência.

1) Reflexiva: $v \underset{N}{\sim} v$, $\forall v \in M$

De fato, se $v \in M \longrightarrow v - v = 0_M \in N$, então:
$v \underset{N}{\sim} v$

2) Simetria: Se $u, v \in M$ com $u \underset{N}{\sim} v$ então $v \underset{N}{\sim} u$

Com efeito, $u \sim v \longrightarrow u - v \in N \longrightarrow -(u-v) \in N \longrightarrow v - u \in N \xrightarrow{N} v \underset{N}{\sim} u$.

3) Transitividade: Se $u, v, w \in N$ com $u \underset{N}{\sim} v$ e $v \underset{N}{\sim} w \longrightarrow u \underset{N}{\sim} w$.

Como $u - v \in N$ e $v - w \in N$, se: $(u-v) + (v-w) = u - w \in N$, como são submódulos é fechado para a operação de soma.

Por fim: $u \underset{N}{\sim} w$.

Para cada $v \in M$, a classe de equivalência de v módulo N como:

$$v+N = \{u \in M \mid u \underset{N}{\sim} v\}$$

E: $\frac{M}{N} = \frac{M}{\tilde{N}} = \{v+N \mid v \in M\}$, é o conjunto de todas as classes.

Considere as operações:

$$+ : \frac{M}{N} \times \frac{M}{N} \longrightarrow \frac{M}{N}$$

$$(u+N, v+N) \longrightarrow \underbrace{(u+v)}_{M} + N$$

$$\cdot : A \times \frac{M}{N} \longrightarrow \frac{M}{N}$$

$$(a, u+N) \longrightarrow \underbrace{av}_{M} + N$$

Devemos mostrar que:

i) Se $u_2, v_1, u_2, v_2 \in M$, tais que:

$$u_1 + N = u_2 + N$$
$$v_1 + N = v_2 + N$$

Então: $(u_1 + v_1) + N = (u_2 + v_2) + N$

ii) Se $a \in A$ e $v_1, v_2 \in M$ tais que:

$$\underbrace{v_1 + N}_{\text{classe } v_1} = \underbrace{v_2 + N}_{\text{classe } v_2} \longrightarrow \underbrace{(av_1) + N}_{\text{classe } v_1} = \underbrace{(av_2) + N}_{\text{classe } v_2}$$

Demonstração:

i) Por hipótese, $u_1 - u_2 \in N$, $v_1 - v_2 \in N$

Então: $(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) \in N$
$(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \in N$
$(u_1 + v_1) = (u_2 + v_2)$

Assim: $(u_1 + v_1) + N = (u_2 + v_2) + N$

ii) Temos $v_1 - v_2 \in N \rightarrow a(v_1 - v_2) \in N \rightarrow av_1 - av_2 \in N \rightarrow av_1 + N = av_2 + N$.

Portanto, as operações $+$ e $\cdot$ estão bem definidas.

Exemplo:

1) Sejam $u, v \in M$: $(u+N) + (v+N) = \overbrace{(u+v) + N}^{M/N}$ $\overline{M}$ é A-módulo $\rightarrow$ comuta

$= \underbrace{\overbrace{(v+u) + N}^{M/N}}_{\overline{M}} = \overbrace{(v+N)}^{M} \underbrace{\overset{M/N}{+}}_{M/N} \overbrace{(u+N)}^{M}$

2) A classe $0_M + N$ é o elemento neutro da soma em M/N. De fato, para todo $v \in M$.

$$(v+N) + (0_M + N) = (v + 0_M) + N = v + N$$

Então: $\frac{0_M}{N} = 0_M + N$

Obs: $v + N = 0_M + N \longleftrightarrow v \in N$

3) $\underbrace{-(v+N)}_{\text{classe do inverso aditivo}} = -v+N, \ \forall v \in M$

4) Considere a função $\pi: M \to M/N$

$v \longmapsto v+N$

Então π é um morfismo de A-módulos e sejam $u, v \in M$ e $a \in A$:

$$\pi(a\underset{M}{u} \underset{M}{+} v) = (a\underset{M}{u} + v) + N$$
$$= (\underset{M}{au}+N) \underset{M/N}{+} (v+N)$$
$$= \underset{M/N}{a}(u+N) \underset{M/N}{+} (v+N)$$
$$= \underset{M/N}{a}\,\pi u \underset{M/N}{+} \pi v$$

Então: π é chamado de morfismo quociente ou projeção de M para M/N.

<u>Obs</u>:

1) $\ker \pi = N$, $v \in \ker \pi \leftrightarrow \pi(v) = 0_{M/N} \leftrightarrow v+N = 0_M + N \leftrightarrow v \in N$.

2) π é sobrejetiva, seja $z \in M/N$, existe $v \in M$ tal que $z = v+N = \pi(v)$.

3) π é isomorfismo de A-módulos $\leftrightarrow N = \{0_M\}$.

Dizer que π é isomorfismo de A-módulos $\leftrightarrow \pi$ é injetiva. $\leftrightarrow \ker \pi = \{0_M\} \leftrightarrow N = \{0_M\}$

4) $\frac{M}{N} = \{0_{M/N}\} \leftrightarrow N = M$

$\frac{M}{N} = \{0_{M/N}\} \leftrightarrow \text{Nuc}\,\pi = M \leftrightarrow N = M$

$\frac{M}{\{0_M\}} \cong M$

<u>Proposição</u>: Seja N um A-submódulo de M. Então:

$$\pi : M \to M/N$$
$$v \mapsto v + N$$

$\{$ A-submódulos de $\frac{M}{N}$ $\}$

$H \mapsto \pi^{-1}(H)$, ϕ ; γ, $P \mapsto \pi(P)$

São bijeções $\longrightarrow$

e $\phi^{-1} = \gamma$.

$\{$ A-submódulos de M que contém N $\}$

Demo:

i) Já sabemos que γ está bem definida pelo morfismo.

ii) Vamos mostrar que ϕ está bem definida. Seja H um A-submódulo de M/N, já temos que $\pi^{-1}(H)$ é um A-submódulo de M.
Devemos mostrar que $N \subseteq \pi^{-1}(H)$, e seja $v \in N$. Então $\pi(v) = v + N = 0_M + N = 0_{M/N} \in H$.
Isto implica que $v \in \pi^{-1}(H)$.

Tomamos $\gamma \circ \phi = id_B$, seja H um A-submódulo de $\frac{M}{N}$, e como π é sobrejetiva então:

$$\gamma \circ \phi(H) = \pi(\pi^{-1}(H)) = H$$

$. \partial \circ \gamma = id$

Seja P um A-submódulo de M que contém N. Queremos mostrar que $P = \phi \circ \gamma(P) = \pi^{-1}(\pi(P))$.

Temos que $P \subseteq \pi^{-1}(\pi(P))$ é válido, agora falta mostrar que: $\pi^{-1}(\pi(P)) \subseteq P$.

Seja $v \in \pi^{-1}(\pi(P))$, então $\pi(v) \in \pi(P) \rightarrow$
$\exists\, w \in P$ tal que $\pi(v) = \pi(w) \rightarrow$
$v + N = w + N \rightarrow (v - w) \in N \subseteq P$

Logo, $v - w \in P$ e $v = \underbrace{(v-w)}_{P} + \underbrace{w}_{P} \in P$

Assim $P = \pi^{-1}(\pi(P)) = \phi \circ \gamma(P)$.

<u>Propriedade Universal do Módulo Quociente</u>

Sejam M um A-módulo, N um A-submódulo de M e $\pi: M \rightarrow \frac{M}{N}$.

Se P é um A-módulo qualquer e $f: M \rightarrow P$ é um morfismo de A-módulos tal que $N \subseteq \ker f$, então existe um único morfismo de A-módulos que $\bar{f} \circ \pi = f$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & M/N \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & P \end{tikzcd}$$

$\bar{f} = \frac{M}{N} \rightarrow P$ tal que: $\bar{f} \circ \pi = f$

Demo: $\bar{f}: \frac{M}{N} \to P$

$v+N \to f(v)$

i) $\bar{f}$ está bem definida. Sejam $u, v \in M$ com $u+N = v+N$, assim $u-v \in N \subseteq \operatorname{Nuc} f \to$ $f(u-v) = 0_P \to f(u) - f(v) = 0_P \to f(u) = f(v)$.

Agora mostrar que $\bar{f}$ é um morfismo de módulos, $\bar{f}$ é um morfismos de A-módulo.

Sejam $u+N, v+N$ e $a \in A$, então:

$$\bar{f}(\underbrace{a(u+N)}_{M/N} \underbrace{+}_{M/N} (v+N)) = \bar{f}(\underbrace{au}_{M} \underbrace{+}_{M} v) + N) =$$

$$f(\underbrace{au}_{M} \underbrace{+}_{M} v) = \underbrace{a f(u)}_{P} \underbrace{+}_{P} f(v) = \underbrace{a \bar{f}(u+N)}_{P} \underbrace{+}_{P} \bar{f}(v+N)$$

• $\bar{f}$ aplica f no representante, $\frac{M}{N}$ e gera elemento de P

Agora a comutação do diagrama, $\bar{f} \circ \pi = f$. Seja $v \in M$, então $\bar{f} \circ \pi(v) = \bar{f}(\pi(v)) = \bar{f}(v+N) = f(v)$.

Falta mostrar a unicidade, suponha que exista $g: \frac{M}{N} \to P$ tal que $g \circ \pi = f$. Então para todo $v+N \in \frac{M}{N}$: $g(v+N) = g(\pi(v)) = f(v) = \bar{f}(v+N)$

1º) Teorema de Isomorfismos de A-módulo

Seja $f: M \to N$ um morfismo de A-módulo, então

$$\bar{f}: \frac{M}{Nuc\, f} \to Im\, f$$
$$v + Nuc\, f \mapsto f(v)$$

É um isomorfismo de A-módulo.

Demo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \frac{M}{Nuc\, f} \arrow[d, dashed] \\
 & Im\, f = N
\end{tikzcd}$$

Pela proposição anterior, existe um único morfismo de A-módulo

$$\bar{f}: \frac{M}{Nuc\, f} \to N$$

Tal que $\bar{f} \circ \pi = f$, onde $\pi: M \to \frac{M}{Nuc\, f}$
$$v \mapsto v + Nuc\, f$$

Portanto: $\bar{f}(v+N) = f(v)$ $\forall v \in N$.

Tomamos a restrição: $\bar{f}: \frac{M}{Nuc\, f} \to Im\, f$
$$v + Nuc\, f \mapsto \bar{f}(v+N) = f(v)$$

Que é um morfismo de A-módulos.

i) $\bar{f}$ é sobrejetora, de fato, $Im\, \bar{f} = Im\, f$.

ii) $\bar{f}$ é injetiva, seja $z \in Nuc\, \bar{f}$. Podemos escrever $z = v + Nuc\, f$, para algum $v \in M$. Logo:

$0_M = \bar{f}(z) = \bar{f}(v + Nuc\, f) = f(v) \to v \in Nuc\, f \to$
$z = v + Nuc\, f = 0_M + Nuc\, f = 0_{M/Nuc\, f}$

$\operatorname{Nuc} f = \{ 0_{M/\operatorname{Nuc} f} \}$

Portanto, f é um isomorfismo de A-módulo.

Exemplo: $T: V \to W$, $\dim_K V < \infty$
transformação K-linear.
$\dim_K W < \infty$

$$\dim_K V = \dim_K \operatorname{Nuc} T + \dim_K \operatorname{Im} T$$

Temos que: $\dfrac{V}{\operatorname{Nuc} f} \cong \operatorname{Im} T \Rightarrow$

$$\dim_K \left(\frac{V}{\operatorname{Nuc} T} \right) = \dim_K \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim_K V -$$

$$\dim_K \operatorname{Nuc} f = \dim_K \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim_K V = \dim_K \operatorname{Nuc} T + \dim_K \operatorname{Im} T$$

<u>Proposição</u>: Sejam M um A-módulo e N e P A-submódulo de M com $P \subseteq N \subseteq M$. Então:

$$\frac{M/P}{N/P} \cong \frac{M}{N}$$

<u>Demo</u>:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi_P"] \arrow[dr, "\pi_N"'] & P \arrow[d, "f"] \\ & M/N \end{tikzcd}$$

Considere os morfismos quocientes:

$$\pi_P: M \longrightarrow M/P \qquad , \qquad \pi_N: M \longrightarrow M/N$$
$$v \longmapsto v+P \qquad\qquad v \longmapsto v+N$$

Como $P \subseteq N = \operatorname{Nuc} \pi_N$, então pela propriedade universal existe um único morfismo de A-módulos $f: \frac{M}{P} \longrightarrow \frac{M}{N}$, tal que

$f \circ \pi_P = \pi_N$, logo: $f(v+P) = v+N$, $\forall v \in M$.

Pelo teorema dos Isomorfismos temos que:

$$\frac{M/P}{\operatorname{Nuc} f} \cong \operatorname{Im} f \qquad f: \frac{M}{P} \longrightarrow \frac{M}{N}$$
$$v+P \longrightarrow v+N$$

Temos que f é sobrejetiva, e dado $z \in M/N$, existe $v \in M$ tal que $z = v+N$.
E $z = f(v+P)$.

Vamos mostrar que $\operatorname{Nuc} f = \frac{N}{P}$, tomamos uma classe $(v+p) \in \operatorname{Nuc} f \Longleftrightarrow f(v+p) = 0_{M/N} \Longleftrightarrow$
$v+N = 0_M + N \Longleftrightarrow v \in N$ e $N+P \in N/P$

$v+p \in \frac{N}{p} \longrightarrow v+p = v_0+p$ e $v_0 \in N$.

$v - v_0 \in P \subseteq N$ e $v = \underbrace{v - v_0}_{\in N} + \underbrace{v_0}_{\in N} \longrightarrow v \in N$.

Portanto: $\dfrac{M/P}{N/P} = \dfrac{M}{N}$

<u>Proposição</u>: Sejam N, P A-submódulos de M. Então: $\dfrac{N+P}{P} \cong \dfrac{N}{N \cap P}$

<u>Demo</u>: Considere o morfismo de aneis:

$$f : N \longrightarrow \frac{N+P}{P}$$
$$v \longrightarrow v+P$$

$N \subseteq N+P$

$\sum_{i \in I} M_i$

É um morfismo de aneis:
$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "f"] & N+P \arrow[r, hook, "\pi"] & \frac{N+P}{P} \end{tikzcd}$$

Uma composição de morfismos de aneis é um anel.

i) Seja f sobrejetiva, de fato seja $z \in \frac{N+P}{P}$.
Logo, $z = u+P$, com $u \in N+P$. Escreve-se:

$u = v+w$ com $v \in N$ e $w \in P$. Assim: $z = u+P =$ $(v+w)+P = (v+P)+(w+P)$, mas $w \in P$ então $(w+P)$ é nula. Assim $(v+P) + 0_{M/P} = (v+P) = f(v)$.

ii) $\ker f = N \cap P$

Observa-se que $v \in N \cap P$, então $f(v) = v+P = 0_M + P$, com isso $v \in \ker f$. Logo, $N \cap P \subseteq \ker f$.
Reciprocamente, seja $v \in \ker f$. Como $\ker f \subseteq N$ então $v \in N$.

Também temos que $f(v) = 0_M + P \longrightarrow$ $v + P = 0_M + P \longrightarrow v \in P$ e portanto $v \in N \cap P$.

Pelo teorema dos Isomorfismos:

$$\underbrace{\frac{N}{N \cap P}}_{Nuc\, f} \cong \overbrace{\frac{N+P}{P}}^{Im\, f}$$