Prova: 31 março 2021

$\boxed{9:00 \leftrightarrow 23:30}$ 5 horas

Def: Um anel A possui a propriedade de invariancia dimensional se para todo A-modulo livre M qualquer base tem a mesma cardinalidade. Este número (invariante) é chamado de dimensão de $M = \dim_A M$

Prop: Se A é commutativo então A a propriedade de invariancia dimensional.

Prova: Seja M A-modulo livre e $\{e_1 \dots e_n\}$ $\{f_1 \dots f_m\}$ bases como A-módulo (Por enquanto pensamos o caso bases finitas)

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} e_i \qquad b_{ji} \in A \qquad \forall j = 1, \dots m$$

são base

$$e_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} f_j \qquad c_{ij} \in A \qquad \forall i = 1 \dots n$$

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} \sum_{k=1}^{m} c_{ik} f_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\underline{\sum_{i=1}^{n} b_{ji} c_{ik}} \right) f_k$$

$$e_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} e_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\underline{\sum_{j=1}^{m} c_{ij} b_{jk}} \right) e_k$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji} c_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases} \qquad \sum_{j=1}^{m} c_{ij} b_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases}$$

$$B = (b_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}} \qquad C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

$$BC = I_{m \times m} \qquad CB = I_{n \times n}$$

$$\boxed{\text{Queremos mostrar que } \quad m = n}$$

Afirmação: $E\ F \in M_{n\times n}(A)$ $\quad$ A comutativo

Se $\underline{EF = I_{n\times n}} \Rightarrow FE = I_{n\times n}$

Seja $\mathcal{L}$ anel arbitrario com identidade

e sejam $a, b \in \mathcal{L}$ $\quad \underline{ab = 1} \overset{???}{\Rightarrow} \underline{ba = 1}$

$EF = I_{n\times n} \Rightarrow \det(EF) = \det(I_{n\times n}) = 1$

$\parallel$ Como A é comutativo

$\det(E)\det(F)$

Logo $\det(E), \det(F) \in \mathcal{U}(A)$

$G = (\det(E))^{-1} Adj(E) \Leftarrow$

$GE = I_{n\times n}$ $\qquad EG = I_{n\times n}$ $\qquad EF = I_{n\times n}$

$EF = I_{n\times n} \Rightarrow \underbrace{GE}_{I_{n\times n}}F = G \Rightarrow \underline{\underline{F = G}}$

Suponhamos $m \geq n$, e por adsurdo $m > n$

$$I_{m\times m} = BC = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} \\ B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{C_1} & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1C_1 & B_1C_2 \\ B_2C_1 & B_2C_2 \end{pmatrix}$$

$M_{n\times n}$ $\qquad M_{(m-n)\times(m-n)}$

$B_1, C_1 \in M_{n\times n} \quad B_2 \in M_{(m-n)\times n} \quad C_2 \in M_{n\times(m-n)}$

$\Rightarrow I_{n\times n} = B_1C_1 \quad B_1C_2 = 0 \quad B_2C_1 = 0$

$\circledast \ B_2C_2 = I_{(m-n)\times(m-n)} \Leftarrow$

$$B_1C_1 = I_{n\times n} \overset{\text{Afirmação}}{\Longrightarrow} C_1B_1 = I_{n\times n}$$

$$I_{n\times n} = CB = (C_1\ C_2)\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = C_1B_1 + C_2B_2$$

Logo $\boxed{C_2B_2 = 0}$

$$B_2 = \boxed{B_2C_2}B_2 = B_2(C_2B_2) = 0$$

$$C_2 = C_2\boxed{B_2C_2} = \boxed{C_2B_2}C_2 = 0$$

Logo $B_2C_2 = 0$ contraditório ⊗

Portanto $m = n$

Prop: Se M é um A-módulo livre que possui uma base infinito, então todas as base de M tem a mesma cordinalidade

Prova $B_1 = \{e_i\}_{i\in I}$ $B_2 = \{f_j\}_{j\in J}$ bases de M

e I infinito

- J também é infinito: Por contradição suponhamos que $|J| < \infty$ $\quad J = \{1, \dots m\}$

$$f_j = a_{j1} e_{j,1} + a_{j2} e_{j2} + \dots + a_{js_j} e_{j s_j}$$

$$\underline{E} = \{e_{1,1}\ e_{12} \dots e_{1s_1},\ e_{21}\ e_{22} \dots e_{2s_2} \dots e_{m1} \dots e_{ms_m}\} \subseteq \underline{B_1}$$

$$\langle E \rangle \ni f_j \quad \forall j$$

$$\langle \underline{E} \rangle = \langle f_1 \dots f_m \rangle = M$$

O subconjunto E de B_1 já gera M

Contraditando

- Queremos mostrar agora que $B_1 = \{e_i\}_{i\in I}$ $B_2 = \{f_j\}_{j\in J}$ bases infinitas então uma bijeção

$$\theta : B_1 \to B_2 \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 : B_1 \hookrightarrow B_2 \\ \theta_2 : B_2 \hookrightarrow B_1 \end{array} \right.$$

Teorema de Berenstain

$$\varphi : I \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(J) \times \mathbb{N}$$

a ordenação de e_i

$$i \longmapsto (\{i_1, i_2, \dots, i_s\}, \ \_\_\ )$$

$$e_i = a_{i_1} f_{i_1} \dots + a_{i s_i} f_{i_s} \qquad a_{i,k} \neq 0$$

Posso ordenar pois é finito

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{C}_i = \{ k \in I \mid e_k \in \langle f_{i_1} \dots f_{i_{s_i}} \rangle \} \quad |\mathcal{C}_i| < \infty$$

(estamos usando o lema da escolha)

φ é injetiva

$$|I| \leq |\mathcal{P}_{fin}(J) \times \mathbb{N}|$$

Teorema

Se $|J|$ é infinito $|\mathcal{P}_{fin}(J)| = |J|$

$\Leftarrow$

Se B infinito $\Rightarrow$ $|B \times \mathbb{N}| = |B|$

$$|I| \leq |\mathcal{P}_{fin}(J) \times \mathbb{N}| = |J \times \mathbb{N}| = |J|$$

$$|J| \leq |\mathcal{P}_{fin}(I) \times \mathbb{N}| = |I \times \mathbb{N}| = |I|$$

Ideia B infinito $|B \times B| = |B|$

$f : \underline{B \times B} \hookrightarrow B$ $\qquad$ $g : B \to B \times B$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b \mapsto (b, b)$

Teorema: Seja B conjunto $B < \mathcal{P}(B)$

i.e. não existe nenhuma função sobre de $B \to \mathcal{P}(B)$

Prova: Suponhamos por contradição que

$$\varphi : B \to \mathcal{P}(B) \text{ sobre}$$

Definimos

$$C = \{ b \in B \mid b \notin \varphi(b) \} \subseteq B$$

Mas φ é sobre logo C tem preimagem. Se $c \in B$ tal que

$\varphi(c) = C$

- Se $c \in C \Rightarrow c \notin \varphi(c) = C$ $\quad \times$
- Se $c \notin C = \varphi(c) \Rightarrow c \in C$ $\quad \times$

Logo φ não existe

$$\mathbb{N} < \underset{\mathbb{R}}{\mathcal{P}(\mathbb{N})} < \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$$

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$

$$[0\ 1) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$a = (0, a_0 a_1 a_2 \dots) \longmapsto \{ i \in \mathbb{N} \mid a_i = 1 \}$$

$a_i \in \{0, 1\}$

$$b = (0, b_0 b_1 \dots) \longleftarrow\!\shortmid A \in \mathbb{N}$$

onde $b_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in A \\ 0 & \text{se } i \notin A \end{cases}$

→ Resolvente teorema de Bezout ← ??

→ Módulos sobre domínios ?? Pulei

25 Quinta aula de exercícios.

30 aula de exercícios

31 prova.