a) Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear. Mostre que $\mathbb{R}^3$ tem estrutura de $\mathbb{R}[x]$-módulo, onde é definida a ação $\mathbb{R}[x]$ sobre $\mathbb{R}^3$ da seguinte forma:

Para $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ e $v \in \mathbb{R}^3$, definimos $p(x)v : a_n T^n(v) + \dots + a_1 T(v) + a_0 v$.

Temos que $p(x)$ é um Anel, e com isso carrega as 8 propriedades de anel, dado por $\mathbb{R}[x]$. Falta mostrar que são válidas as propriedades de módulo.

Então: $\mathbb{R}[x] \times M \longrightarrow M$

(Onde M é um módulo sobre um anel $\mathbb{R}[x]$, ou $\mathbb{R}[x]$-módulo.

1) $p(x).(v_1+v_2) = p(x).v_1 + p(x).v_2$, $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

$p(x).(v_1+v_2) = p(x).v_1 + p(x)v_2 = (a_n T^n(v_1) + \dots + a_1 T(v_1) + a_0) + (a_n T^n(v_2) + \dots + a_1 T(v_2) + a_0) = a_n T^n(v_1) + a_n T^n(v_2) + \dots + a_1 T(v_1) + a_1 T(v_2) + 2a_0 = a_n (T^n(v_1+v_2)) + \dots + a_1 T(v_1+v_2) + 2a_0 = p(x)(v_1+v_2)$.

2) $(p(x) + q(x)).v = p(x).v + q(x).v$, onde $p(x)$, $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $v \in \mathbb{R}^3$.

$(p(x)+q(x))v = p(x).v + q(x).v = (a_n T^n(v) + \dots + a_1 T(v) + a_0) + (b_n T^n(v) + \dots + b_1 T(v) + b_0)$

$= a_n T^n(v) + b_n T^n(v) + \dots + b_1 T(v) + a_1 T(v) + a_0 + b_0$
$= T^n(v)(a_n + b_n) + \dots + T(v)(a_1 + b_1) + (a_0 + b_0)$

Se $a + b = c$, então

$T^n(v).c_n + \dots + T(v) c_1 + c_0$

3) $p(x).(q(x).v) = (p(x).q(x)).v$, onde $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $v \in \mathbb{R}^3$

$p(x).(q(x).v) = p(x).(b_n T^n(v) + \dots + b_1 T(v) + b_0)$

$= b_n T^n(v).p(x) + \dots + b_1 T(v) p(x) + b_0 p(x)$
$= (b_n x^n.v).p(x) + \dots + (b_1 x.v) p(x) + (b_0 x^0 v) p(x)$

$= v [(b_n x^n).p(x) + \dots + (b_1 x) p(x) + (b_0 x^0).p(x)$

$= v [p(x)(b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0 x^0)]$

$= v.[p(x).q(x)] = [p(x).q(x)].v$

4) $1v = v$, $v \in \mathbb{R}^3$

Então as propriedades de módulo são satisfeitas.

b) Determine todos os $\mathbb{R}[x]$-submódulos de $\mathbb{R}^3$.

Por definição um anel de polinômio $\mathbb{R}[x]$, M um $\mathbb{R}[x]$-módulo e seja N um subconjunto não vazio de M. Dizemos que N é um submódulo de $\mathbb{R}[x]$-módulo ou um $\mathbb{R}[x]$-submódulo de M se as seguintes condições são satisfeitas:

i) Para todos $n_1, n_2 \in N$ tem-se $n_1 + n_2 \in N$.,
ii) Para todos $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $n \in N$ tem-se que $p(x).n \in N$.

iii) $0_M \in N$, então $0_N = 0 \in N$.

Temos também que um espaço vetorial em $\mathbb{R}^3$, definido também com $\mathbb{R}[x]$-módulo, com isso temos que os submódulos coincidem com os subespaços lineares. Ou subespaços invariantes por T.

Assim (0_M) é um $\mathbb{R}[x]$-submódulo de M, M é um submódulo de si mesmo.

Portanto, ao tomarmos uma coleção $\{M_i\}_{i \in I}$ de $\mathbb{R}[x]$-submódulos de M, definimos:

$$\sum_{i \in I} M_i = \{v \in M \mid \text{existem } (i_1, \ldots, i_n) \in I \text{ e } v_{i_j} \in M_{i_j}, \ \forall_j \in \{1, \ldots, n\} \text{ tais que: } v = v_{i_1} + \ldots + v_{i_n}\}$$

Então: $M_1 + M_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in M_1 \text{ e } v_2 \in M_2\}$

Assim tomando $v \in \mathbb{R}^3$ e $p(x) = a_N x^N + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ temos que:

$i_0 \in I$, como $0_M \in M_{i_0}$ então $0_M \in \sum_{i \in I} M_i$.

E seja $p(x), q(x) \in \sum_{i \in I} M_i$ e $v \in \mathbb{R}^3$, então $(p(x) + q(x)) \in \sum_{i \in I} M_i$

Com isto temos que cada parcela: M_j da soma é um submódulo.

$$M_j \subseteq \sum_{i \in I} M_i, \quad \forall j \in I$$

Então como I é finito e tomando $I = N$, temos N submódulos.