$\mathbb{Z}$ é D.I.P. $\Rightarrow$ Todo ideal é gerado por um elemento, $I \subseteq \mathbb{Z}$ ideal então existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $I = (a)$ ✓

$\mathbb{Z}[x] \supseteq \langle x, 2 \rangle$ → Não é D.I.P.

$I \subseteq \mathbb{Z}[x]$, escolhemos um polinomio em $I^* \ni f$ que seja de grau mínimo

$\langle f \rangle \subseteq I$ → Se $I = \langle f \rangle$ o ideal é principal

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad a_n \neq 0$$

$$I \setminus \langle f(x) \rangle \neq \phi \qquad h(x) \in I \setminus \langle f(x) \rangle$$

D.E.

$$h(x) = \underline{\underline{Q(x)}}\, f(x) + \underline{\underline{R(x)}} \qquad Q(x), R(x) \in \mathbb{Q}[x]$$

$\deg(R(x)) < \deg(f(x))$
ou $R(x) \equiv 0$

Se d = mmc dos denominadores dos coeficientes de $Q(x)$ e $R(x)$

$$\underset{\in I}{d}\,h(x) = \underset{\in \mathbb{Z}[x]}{dQ(x)}\ \underset{\in I}{f(x)} + \underset{\in \mathbb{Z}[x]}{dR(x)}$$

$$\underbrace{dh(x) - (dQ(x))f(x)}_{\in I} = \underset{\in I}{dR(x)}$$

Mas f tem grau mínimo em I

$$\Rightarrow \boxed{R(x) \equiv 0}$$

Logo $\forall\, h(x) \in I$ existe $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $dh(x) \in \langle f(x) \rangle$

$\longrightarrow$ d divisor de $a_n^{\deg(h(x))}$

$$h(x) \;\big|\; f(x)$$

$$\begin{array}{l|l}
b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \\
\quad -\frac{a_{n-1}b_n}{a_n} x^{m-1} + \cdots & \hline \frac{b_n}{a_n} x^{m-n} + \frac{\boxed{}}{a_n^2} x^{m-n-1} + \\
\hline \boxed{\frac{a_n b_{m-1} - a_{n-1} b_n}{a_n}} x^{m-1} &
\end{array}$$

Afirmação: Dado $I \subseteq \mathbb{Z}[x]$ existem $f_1, f_2, \ldots, f_K$ tal que

$$I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_K \rangle_{\mathbb{Z}[x]}$$

combinação linear FINITA

(A ser Provado!!!)

<u>Aneis</u> <u>Noetherianos</u>: Um anel A (comutativo) é Noetheriano (Emmy Noether) se todo ideal de A é finitamente gerado.

<u>Def</u>: Dizemos que um anel A cumpre a condição da cadeia ascendente (C.C.A) se para toda cadeia de ideais

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

existe N tal que $I_j = I_N$ $\forall j \geq N$

Teorema: A é Noetheriano

$$\Updownarrow$$

A cumpre a C.C.A.

Prova: $(\Leftarrow)$ Suponhamos A cumpre C.C.A.

Seja $I \subsetneq A$ e suponhamos que I não é finitamente gerado

$x_1 \in I^* \Rightarrow I_1 = \langle x_1 \rangle$

$\rightarrow I_1 \subseteq I_2$

$x_2 \in I \setminus I_1 \neq \emptyset \Rightarrow I_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$

$\vdots$

Indutivamente

$x_{n+1} \in \underbrace{I \setminus I_n}$ $\quad I_{n+1} = \langle x_1, \ldots, x_{n+1} \rangle$

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \cdots\cdots \subseteq \qquad \subseteq I$

Com A satisfaz a CCA

$\Rightarrow \exists N$ tal que $I_n = I_N$ $\forall n > N$

$x_{n+1} \in I_{N+1}$ $\quad x_{n+1} \in I \setminus I_N$

$\Rightarrow x_{n+1} \notin I_N$

Contraditorio

Como a cadeia não cresce sem parar

diferença de conjuntos

$\Rightarrow \exists N$ tal que $I \setminus I_N = \emptyset$

$\Rightarrow I = I_N \Rightarrow I$ é finitamente gerado.

$(\Rightarrow)$ Suponhamos A Noetheriano

Seja $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \cdots \subseteq \cdots$

cadeia ascendente de ideais

$J = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$

- $J \subsetneq A$ é um ideal

$1 \notin I_j \ \forall j \Rightarrow 1 \notin J$

Se $a, b \in J \Rightarrow a \in I_{j_1}$ e $b \in I_{j_2}$

supondo $j_1 \leq j_2 \Rightarrow a \in J_2 \Rightarrow a+b \in J_{j_2}$

Se $c \in A$ $a \in J \Rightarrow a \in I_j$ para algum j

$\Rightarrow ca \in I_j \Rightarrow ca \in J$ ideal

Como a é Noetheriano $\Rightarrow J$ é

finitamente gerado $\exists x_1, x_2 \ldots x_k \in A$

tal que $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle_A = J$

finito

$x_\ell \in J = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \Rightarrow \exists j_\ell$ tal que $x_\ell \in I_{j_\ell}$

$u = \max\{j_1, j_2 \dots j_k\}$ $\quad \underline{x_\ell} \in I_{j_\ell} \subseteq \underline{I_u} \quad \forall \ell = 1, \dots k$

$\Rightarrow \underbrace{\langle x_1, x_2 \dots x_k \rangle_A}_{= J} \subseteq I_u$

Mas $\quad I_u \subset J \Rightarrow \boxed{I_u = J}$

Se $\quad v > u \Rightarrow I_u \subseteq I_v \subseteq J$

$\Rightarrow I_u = I_v \quad \forall \underline{\underline{v > u}}$

Logo a cadeia ascendente de ideais é estacionária $\square$

$\mathbb{Z} \quad (2000) \subseteq (500) \subseteq (125) \subseteq (25) \subseteq (5)$

$G = \left\{ \frac{a}{5^k} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \quad k \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{Q}$ $\quad$ <u>Nada!</u>

anel $(+, \cdot)$ $\quad U(G) = \{ 5^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$

$A[x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_k \ldots]$ Não é Noetheriano

$(x_1) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq (x_1, x_2, x_3) \subseteq \ldots$

$$A = \left\langle \sqrt[2^k]{3} \mid k \in \mathbb{N} \right\rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$$

$$\langle \sqrt{3} \rangle \subseteq \langle \sqrt[4]{3} \rangle \subseteq \langle \sqrt[8]{3} \rangle \subseteq \ldots$$

<u>Teorema</u>: (Teorema da Base de Hilbert)

Se A é Noetheriano então $A[x]$ é Noetheriano

Corolario: Se A é Noetheriano enta $A[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$ é Noetheriano

<u>Prova do teorema</u>: Seja $I \subseteq A[x]$

Queremos mostrar que I é finitamente gerado.

$$I \xrightarrow{\varphi} A$$

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \longmapsto a_n$$

$J := \psi(I) \subseteq A$

Afirmação: J é um ideal de A

• $a, b \in J \Rightarrow \exists\, f(x), g(x) \in I$ tal que $\psi(f(x)) = a \quad \psi(g(x)) = b$

$$f(x) = a x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$
$$g(x) = b x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$$

Podemos supor $n \leq m$

$$\underset{\underset{I}{\cap}}{x^{m-n} f(x)} + \underset{\underset{I}{\cap}}{g(x)} = (a+b) x^m + \cdots$$

$$\Rightarrow \psi(x^{m-n} f(x) + g(x)) = a+b \in J$$

Agora se $c \in A \Rightarrow c f(x) \in I$

$c f(x) = c a x^n + \cdots \Rightarrow \psi(c f(x)) = ca \in J$

Portanto J é um ideal de A

Como A é Noetheriano segue que J é finitamente gerado

$$J = \langle \underbrace{a_1, a_2, \dots, a_k}\rangle_A$$

$\psi(x^l f_j)$

$\shortparallel$

$a_j \in J \Rightarrow \exists \, \underline{f_j} \in I$ tal que $\psi(f_j) = \underline{a_j}$

denotemos por $d_j = \deg(f_j)$

Consideremos o ideal gerado pelos $\underline{f_j}$

$$\tilde{I} = \langle f_1, f_2, \dots f_k \rangle_{A[x]} \subseteq I$$

Se $f \in I$ com $\underset{\overset{\shortparallel}{d}}{\deg}(f) \geq \max\{d_j\}$

$$\psi(f) = a \in J \Rightarrow a = c_1 a_1 + c_2 a_2 \dots + c_k a_k$$

$\shortparallel$ com $c_j \in A$

$$f(x) = a x^d + \dots$$

$$= \underbrace{(c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k)}x^d + \dots$$

$$\underline{f(x)} - \underbrace{c_1 x^{d-d_1} f_1(x)}_{c_1 a_1 x^d} - \underbrace{c_2 x^{d-d_2} f_2(x)}_{c_2 a_2 x^d} \dots - \underbrace{c_k x^{d-d_k} f_k(x)}_{c_k a_k x^d}$$

$$\deg\Big(\underset{\substack{\Uparrow\\ I}}{f(x)} - \underbrace{\sum c_j x^{d-d_j} f_j(x)}_{\substack{\Uparrow\\ I}}\Big) < \deg(f(x))$$

Logo existem polinomios $h_j(x)$ tal

que $\deg\Big(\underbrace{f(x) - \sum_{j=1}^{k} h_j(x)\, f_j(x)}_{g(x)}\Big) < \underset{\substack{\shortparallel\\ M}}{\max\{d_j\}}$

Logo para todo $f(x) \in I$

existe $g(x) \in I$ com $\deg(g(x)) < M$

tal que $f(x) - g(x) \in \tilde{I}$

$$\mathcal{C} = \{ g(x) \in I \mid \deg(g(x)) < M \}$$

Ideia: $\overset{*}{\mathcal{C}} \overset{\subseteq A^M}{\subseteq} \langle g_1, g_2, \dots g_s \rangle_{A[x]} \subseteq I$ pois

Se isto é verdade

$\Rightarrow I \subseteq \langle f_1, \dots f_k, g_1, \dots g_s \rangle$

$\mathcal{C}$ é fechado por somas e produto por elementos de A

$\psi(g_1) \in J$

Seja g_1 elemento de $\mathcal{C}$ com grau mínimo $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \setminus \langle g_1 \rangle$

g_2 elemento de $\mathcal{C}_1$ com grau mínimo.

e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C} \setminus \langle g_1, g_2 \rangle$

$\vdots$

g_ℓ elemento de $\mathcal{C}_{\ell-1}$ com grau mínimo

$$\mathcal{C}_{\ell+1} = \mathcal{C} \setminus \langle g_1, g_2, \dots, g_\ell \rangle$$

Porque o processo acaba ?????