

# Ejercicios Tema 4 - Complementos de Variables aleatorias

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso de Probabilidad y Variables Aleatorias con R y Python

## Función generatriz de momentos y función característica

Halla la función generatriz de momentos  $m$  y la función característica  $\phi$  para las variables aleatorias de los tres enunciados siguientes. Comprobar que

$$E(X^n) = m_X^{(n)}(0), \quad E(X^n) = \frac{1}{i^n} \phi_X^{(n)}(0),$$

para todo valor de  $n$ .

### Enunciado 1

Halla el momento de orden  $n$  y el momento centrado de orden  $n$  para la variable aleatoria  $W$  con función de distribución:

$$F_W(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 3, \\ \frac{1}{3}, & \text{si } 3 \leq t < 4, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 4 \leq t < 5, \\ \frac{2}{3}, & \text{si } 5 \leq t < 6, \\ 1, & \text{si } t \geq 6, \end{cases}$$

### Solución

Fijaos que se trataría de una variable aleatoria discreta. Por tanto, el cálculo de la función generatriz de momentos y la función característica no es difícil. Para calcular los momentos de orden  $n$  a partir de dichas funciones, basta aplicar la fórmula que relaciona dichos momentos con las derivadas de dichas funciones.

### Enunciado 2

Halla el momento de orden  $n$  y el momento central de orden  $n$  para la variable aleatoria  $Z$  con función de probabilidad:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } x = 0, 1, 2, \\ 0, & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

### Solución

En esta cuestión, la variable aleatoria también sería discreta. Leeros los comentarios de la cuestión anterior de cara a su resolución.

### Enunciado 3

Halla el momento de orden  $n$  y el momento central de orden  $n$  para la variable aleatoria  $X$  con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

**Solución**

En este caso, la variable aleatoria sería continua. Por tanto, para calcular la función generatriz de momentos y la función característica hay que integrar. Id con cuidado con el valor absoluto de  $x$  ya que su valor cambia para  $x$  positivos y negativos.