Ejercicios Tema 2 - Variables aleatorias

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso de Probabilidad y Variables Aleatorias con R y Python

Contents

1 Variables aleatorias continuas

1.1 Problema 1.

Verificar que:

$$F_X(t)=\begin{cases} 0, & \text{si } t<-1,\\ \frac{t+1}{2}, & \text{si } -1\leq t\leq 1,\\ 1, & \text{si } t>1,\end{cases}$$

es una función de distribución y hallar la función de densidad para X. Calcular también $P\left(-\frac{1}{2}\leq X\leq \frac{1}{2}\right)$.

1.1.1 Solución

La función de densidad de variables aleatoias continuas se puede obtener derivando la función de distribución respecto de la variable t:

$$f_X(t)=(F_X(t))'=\begin{cases} 0, & \text{si } t<-1,\\ \left(\frac{t+1}{2}\right)'=\frac{1}{2}, & \text{si } -1\leq t\leq 1,\\ 0, & \text{si } t>1,\end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } -1\leq t\leq 1,\\ 0, & \text{en otro caso,}\end{cases}$$

1.2 Problema 2.

Sea Y una variable continua con función de densidad:

$$f_Y(y)=\begin{cases} 2(1-y), & \text{si } 0<y<1,\\ 0, & \text{en los otros casos.}\end{cases}$$

Hallar la función de distribución $F_Y(t)$.

1.2.1 Solución

$$
\begin{aligned}
F_Y(t) &= \int_{-\infty}^{t} f_Y(y) \cdot dy \\
&= \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0 \cdot dy = 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_0^t 2 \cdot (1-y) = \left[2 \cdot y - y^2\right]_{y=0}^{y=t} = t - t^2, & \text{si } 0 < y < 1, \\ 1, & \text{en los otros casos.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t - t^2, & \text{si } 0 < y < 1, \\ 1, & \text{en los otros casos.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

1.3 Problema 3.

Verificar que:

$$
F_Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ \sqrt{t}, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t > 1, \end{cases}
$$

es una función de distribución y especificar la función de densidad para Y. Usar este resultado para hallar $P\left(-\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{4}\right)$.

1.3.1 Solución

Evidentemente $F_Y(t) > 0$ para todo t y $\lim_{t\to-\infty} F_Y(t) = 0$ y

$$
\lim_{t\to+\infty} F_Y(t) = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = \left[\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_{t=0}^{t=1} = 1 - 0 = 1.
$$

La probabilidad que nos piden es

$$
P\left(-\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{4}\right) = F_Y\left(\frac{3}{4}\right) - F_Y\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} - 0 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0.75}.
$$

1.4 Problema 4.

Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$
f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}
$$

1. Representar gráficamente dicha función.
2. Hallar y dibujar la función de distribución.
3. Calcular las siguientes probabilidades: $P(X \geq 0)$ y $P\left(|X| < \frac{1}{2}\right)$.

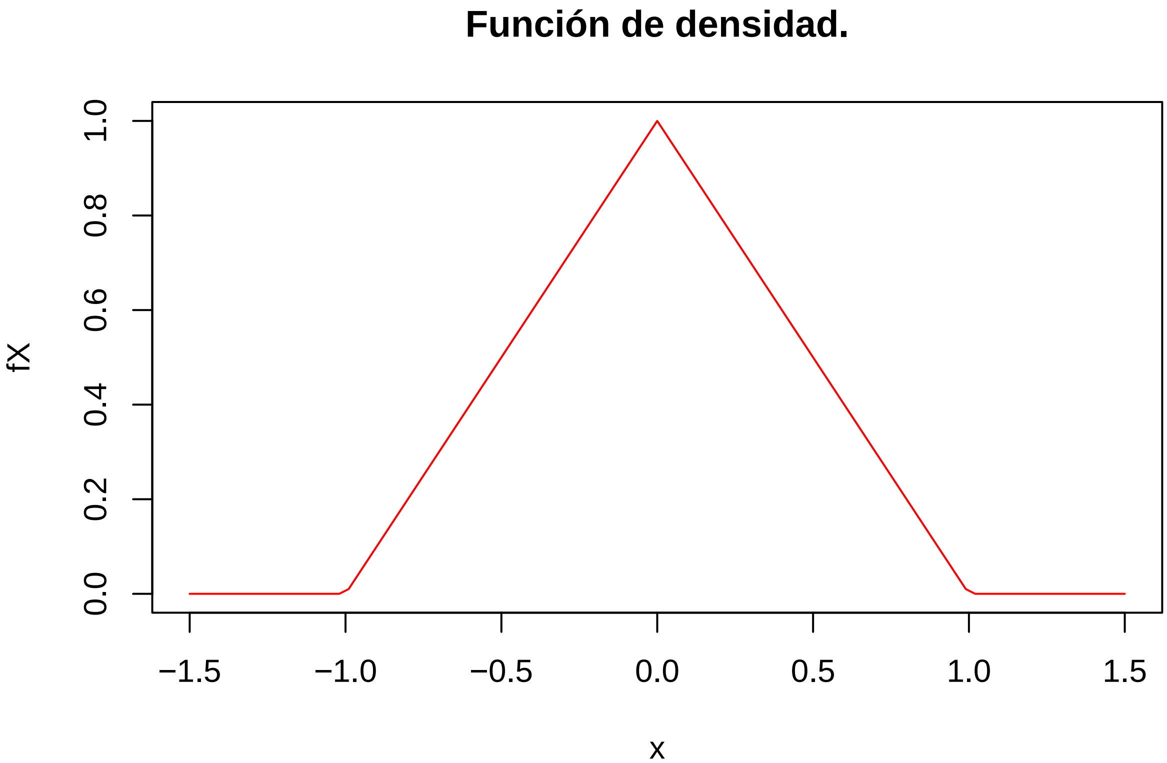
1.4.1 Solución

La representaremos con R

```
fX=function(x){sapply(x,
                      FUN=function(x){if(abs(x)<=1){1-abs(x)}
                        else {0}})
  }
fX(c(-1,-1/2,0,1/2,1))
```

```
## [1] 0.0 0.5 1.0 0.5 0.0
```

```r
curve(fX,from=-1.5,to=1.5,col="red",ylab="fX",xlab="x",main="Función de densidad.")
```



para calcular la función de distribución hacemos

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{t} f_X(t)\cdot dy\\
&= \begin{cases}
\int_{-\infty}^{t} 0\cdot dy = 0 & \text{si } x < -1\\
\int_{-1}^{t} 1-|t|\cdot dt = \int_{-1}^{t} 1+t\cdot dt = \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{t=-1}^{t=x} = & \text{si } -1\leq x\leq 0\\
\int_{-1}^{t} (1-|t|)\cdot dt = \int_{-1}^{0}(1+t)\cdot dt + \int_{0}^{x}(1-t)\cdot dt = \frac{1}{2} + \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=x}, & \text{si } -\leq x\leq 0,\\
1, & \text{si } x\geq 1.
\end{cases}\\
&= \begin{cases}
0 & \text{si } x\leq -1\\
\left(x+\frac{x^2}{2}\right) - \left(-1+\frac{(-1)^2}{2}\right) = \left(x+\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2} = \frac{x^2+2\cdot x+1}{2} = \frac{(x+1)^2}{2} & \text{si } -1\leq x\leq 0\\
\frac{1}{2} + \left[\left(x-\frac{x^2}{2}\right)-0\right] = \frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}, & \text{si } 0\leq x\leq 1,\\
1, & \text{si } x\geq 1.
\end{cases}\\
&= \begin{cases}
0 & \text{si } x\leq -1\\
\frac{(x+1)^2}{2}, & \text{si } -1\leq x\leq 0,\\
\frac{(1-x)^2}{2}, & \text{si } 0\leq x\leq 1,\\
1, & \text{si } x\geq 1.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Su gráfica es

```r
FX=function(x){sapply(x,
                        FUN=function(x){
ifelse(x<=-1,0,ifelse(x>=1,1,ifelse(x<0 & x>-1, (x+1)^2/2, 1/2+x-x^2/2)))
```

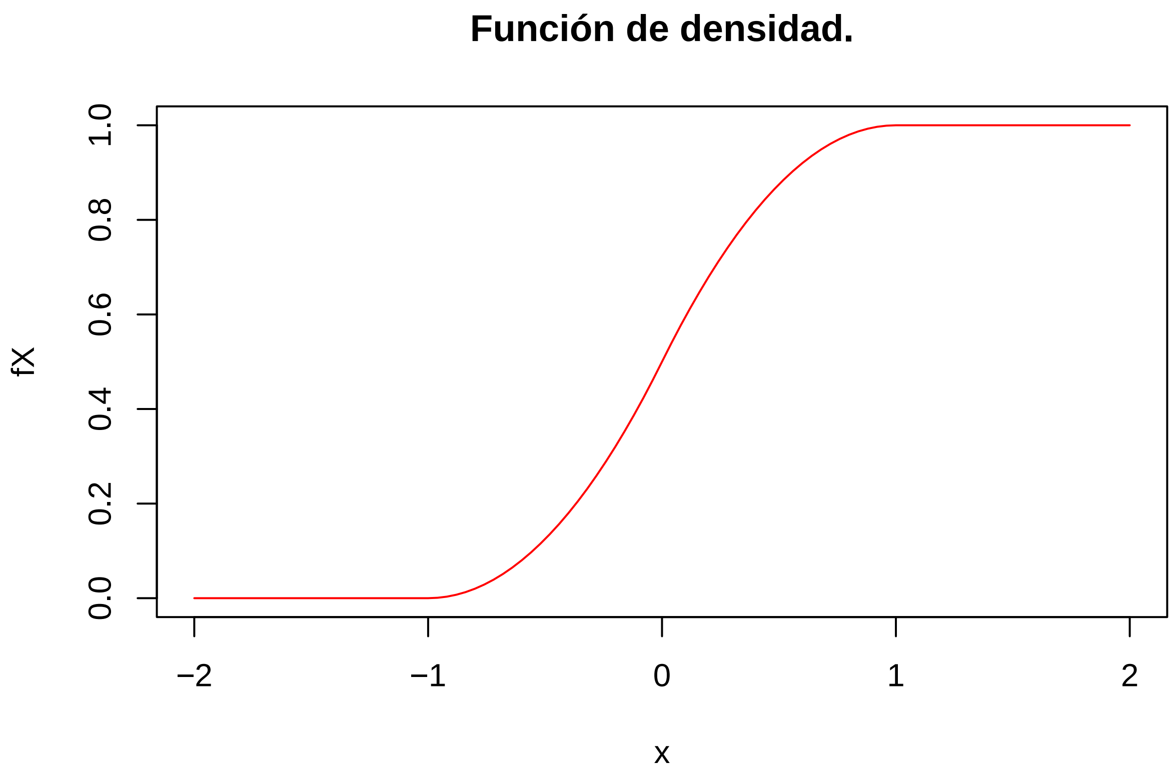
```
})
}



FX(c(-20,-1,-1/2,0,1/2,1,20))
```

```
## [1] 0.000 0.000 0.125 0.500 0.875 1.000 1.000
```

```
curve(FX,from=-2,to=2,col="red",ylab="fX",xlab="x",main="Función de densidad.")
```



1.5 Problema 5.

Hallar la esperanza y la varianza de las variables de los ejercicios anteriores.

1.5.1 Solución

Estas integrales se dejan como ejercicio.