SOLUCIONES: Ejercicios Tema 0 - Repaso de combinatoria y conjuntos

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso de Probabilidad y Variables Aleatorias con R y Python

Contents

1 Ejercicios de Combinatoria parte 1 con soluciones **1**
1.1 Problema 1. 1
1.2 Problema 2 2
1.3 Problema 3. 3
1.4 Problema 4. 3
1.5 Problema 5 3
1.6 Problema 6 4
1.7 Problema 7 4
1.8 Problema 8 5
1.9 Problema 9 5
1.10 Problema 10 6
1.11 Problema 11 6
1.12 Problema 12 7

2 Ejercicios de Combinatoria parte 2 **8**
2.1 Problema 1 8
2.2 Problema 2 8
2.3 Problema 3 8
2.4 Problema 4 10
2.5 Problema 5 10
2.6 Problema 6 11
2.7 Problema 7 11
2.8 Problema 8 11

1 Ejercicios de Combinatoria parte 1 con soluciones

Breves soluciones de los problemas

1.1 Problema 1.

En una carrera en la que participan diez caballos ¿de cuántas maneras diferentes se pueden dar los cuatro primeros lugares?

1.1.1 Solución

La forma de acabar la carera son variaciones sin repetición

$$V_{n=10}^{k=4} = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Con `gttols` podemos listar todas las maneras en las que acaban los 4 primeros puestos y contarlas; obviamente obtenemos el mismo resultado.

El código con R es

```
# Es necesario tener instalado "gtools".
# Descomenta y ejecuta la siguiente linea para instalarlo
# install.packages("gtools")
library(gtools)
10*9*8*7
```

```
## [1] 5040
```

```
cuatro_primeros_puestos=permutations(n=10,r=4,set=TRUE,repeats.allowed = FALSE)
dim(cuatro_primeros_puestos)# dimesión filas columnas
```

```
## [1] 5040    4
```

```
dim(cuatro_primeros_puestos)[1]# el primer elemento de la dimensión
```

```
## [1] 5040
```

```
nrow(cuatro_primeros_puestos)# esta función nos cuenta el número de filas
```

```
## [1] 5040
```

1.2 Problema 2

Una empresa de reciente creación encarga a un diseñador gráfico la elaboración del su logotipo, indicando que ha de seleccionar exactamente tres colores de una lista de seis. ¿Cuántos grupos tienen para elegir el diseñador?

1.2.1 Solución

Son combinaciones de 6 colores tomados en grupos de 3

$$C_{n=6}^{k=3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 20.$$

Con R

```
choose(6,3)
```

```
## [1] 20
```

```
lista_colores=gtools::combinations(n=6,r=3)
head(lista_colores)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    3
## [2,]    1    2    4
## [3,]    1    2    5
## [4,]    1    2    6
## [5,]    1    3    4
## [6,]    1    3    5
```

```
nrow(lista_colores)
```

```
## [1] 20
```

1.3 Problema 3.

¿Cuántas palabras diferentes, de cuatro letras, se pueden formar con la palabra byte?

1.3.1 Solución

Como las 4 letras de byte son diferentes son permutaciones de 4 elementos

$$P_{n=4} = 4! = 24$$

Con R

```
factorial(4)
```

```
## [1] 24
```

```
palabras_byte=gtools::permutations(n=4,r=4)
head(palabras_byte)
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    2    3    4
## [2,]    1    2    4    3
## [3,]    1    3    2    4
## [4,]    1    3    4    2
## [5,]    1    4    2    3
## [6,]    1    4    3    2
```

```
nrow(palabras_byte)
```

```
## [1] 24
```

1.4 Problema 4.

¿De cuantas maneras diferentes se pueden elegir el director y el subdirector de un departamento formado por 50 miembros?

1.4.1 Solución

Con variaciones sin repetición de 50 miembros para dos puestos: director y subdirector

$$V_{n=50}^{k=2} = \frac{50!}{(50-2)!} = 50 \cdot 49 = 2450.$$

1.5 Problema 5

Con once empleados ¿cuántos comités de empresa de cinco personas se pueden formar?

1.5.1 Solución

Son combinaciones de $n = 11$ empleados tomando $k = 5$ puestos: director y subdirector que son

$$C_{n=11}^{k=5} = \binom{11}{5} = 462.$$

Con R

```
choose(11,5)
```

```
## [1] 462
```

```
lista_comites=gtools::combinations(n=11,r=5)
head(lista_comites)
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]    1    2    3    4    5
## [2,]    1    2    3    4    6
## [3,]    1    2    3    4    7
## [4,]    1    2    3    4    8
## [5,]    1    2    3    4    9
## [6,]    1    2    3    4   10
```

```
nrow(lista_comites)
```

```
## [1] 462
```

1.6 Problema 6

¿Cuántas maneras distintas hay de colocar quince libros diferentes en una estantería si queremos que el de Probabilidades esté el primero y el de Estadística en el tercero?

1.6.1 Solución

Fijamos el primer sitio para el libro de Probabilidad y el tercero para el de Estadística y los $15 - 2 = 13$ restantes los permutamos $P_{n=13} = 13! = 6227020800$.

Con R

```
factorial(13)
```

```
## [1] 6227020800
```

```
# Descomentar las tres lineas siguientes para calcularlas todas !!! SON MUCHAS
#permutaciones_13=gtools::permutations(n=13,r=13)
#head(permutaciones_13)
#nrow(permuataciones_13)
```

1.7 Problema 7

¿Cuántos caracteres diferentes podemos formar utilizando a lo sumo a tres símbolos de los utilizados en el alfabeto Morse?

1.7.1 Solución

Palabras con el alfabeto Morse: de longitud 1 hay 2, de longitud 2 hay $2^2 = 4$ y de longitud 3 hay $2^3 = 8$.. En total $2 + 4 + 8 = 14$ palabras con a lo sumo tres caracteres.

Con R podemos hacer

```
morse=c(".","_")
morse_long_1=gtools::permutations(n=2,v=morse,r=1,repeats.allowed = TRUE)
morse_long_1
```

```
##      [,1]
## [1,] "."
## [2,] "_"
```

```
# Dos casos
morse_long_2=gtools::permutations(n=2,v=morse,r=2,repeats.allowed = TRUE)
morse_long_2
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,] "."  "."
## [2,] "."  "_"
## [3,] "_"  "."
## [4,] "_"  "_"
```

```
# Cuatro casos
morse_long_3=gtools::permutations(n=2,v=morse,r=3,repeats.allowed = TRUE)
morse_long_3
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,] "."  "."  "."
## [2,] "."  "."  "_"
## [3,] "."  "_"  "."
## [4,] "."  "_"  "_"
## [5,] "_"  "."  "."
## [6,] "_"  "."  "_"
## [7,] "_"  "_"  "."
## [8,] "_"  "_"  "_"
```

```
# 6 Casos
#total
nrow(morse_long_1)+nrow(morse_long_2)+nrow(morse_long_3)
```

```
## [1] 14
```

1.8 Problema 8

Un supermercado organiza una rifa con un premio de una botella de cava para todas las papeletas que tengan las dos últimas cifras iguales a las correspondientes dos últimas cifras del número premiado en el sorteo de Navidad. Supongamos que todos los décimos tienen cuatro cifras y que existe un único décimo (participación) de cada numeración ¿Cuántas botellas repartirá el supermercado?

1.8.1 Solución

Pues habrá un premio por cada combinación de las primeras dos cifras $10^2 = 100$ botellas.

1.9 Problema 9

¿Cuántas palabras diferentes podemos formar con todas las letras de la palabra estadística?

1.9.1 Solución

```
word="estadistica" # no tenemos en cuenta el acento
word
```

```
## [1] "estadistica"
```

```
letras=unlist(strsplit(word,split=""))# separamos por letras
letras
```

```
##  [1] "e" "s" "t" "a" "d" "i" "s" "t" "i" "c" "a"
```

```r
length(letras)
```

```
## [1] 11
```

```r
table(letras)
```

```
## letras
## a c d e i s t
## 2 1 1 1 2 2 2
```

```r
unique(letras)
```

```
## [1] "e" "s" "t" "a" "d" "i" "c"
```

El conjunto de letras de la palabra considerada es el siguiente: $\{e, s, t, a, d, i, c\}$ con las repeticiones siguientes: las letras `a,i,s,t` aparecen 2 veces cada una; y las letras `c,d,e` una vez cada una de ellas.

Por tanto el número de palabras (permutaciones con elementos repetidos) que podemos formar es

$$PR_{11}^{2,2,2,2,1,1,1} = \frac{11!}{(2!)^4 \cdot (1!)^3} = 2494800.$$

1.10 Problema 10

En una tienda de regalos hay relojes de arena con cubetas de colores, y no hay diferencia alguna entre las dos cubetas que forman cada reloj. Si hay cuatro colores posibles y el color de los dos recipientes puede coincidir ¿cuántos modelos de reloj de arena puede ofrecer el establecimiento?

1.10.1 Solución

Son $CR_{n=4}^{k=2} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10.$

Con R hacemos

```r
choose(4+2-1,2)
```

```
## [1] 10
```

```r
colores=c("azul","rojo","verde","rosa")
gtools::combinations(n=4,r=2,v=colores,repeats.allowed = TRUE)
```

```
##       [,1]    [,2]
##  [1,] "azul"  "azul"
##  [2,] "azul"  "rojo"
##  [3,] "azul"  "rosa"
##  [4,] "azul"  "verde"
##  [5,] "rojo"  "rojo"
##  [6,] "rojo"  "rosa"
##  [7,] "rojo"  "verde"
##  [8,] "rosa"  "rosa"
##  [9,] "rosa"  "verde"
## [10,] "verde" "verde"
```

1.11 Problema 11

En una partida de parchís gana aquel jugador que consigue alcanzar antes con sus cuatro fichas la llegada. Si hay cuatro jugadores y la partida continua hasta que todos han completado el recorrido ¿cuántos órdenes de llegadas hay para la dieciséis fichas?

1.11.1 Solución

```
factorial(16)/(factorial(4)^4)
```

```
## [1] 63063000
```

```
colores=c("azul","rojo","amarillo","verde")
colores16=rep(colores,each=4)
colores16
```

```
##  [1] "azul"     "azul"     "azul"     "azul"     "rojo"     "rojo"
##  [7] "rojo"     "rojo"     "amarillo" "amarillo" "amarillo" "amarillo"
## [13] "verde"    "verde"    "verde"    "verde"
```

```
#partidas=gtools::permutations(n=16,r=16,v=colores16,set = FALSE)# 3 GIGAS!!!!
```

Si guardamos 1000 partidas

```
partidas_1000=matrix(replicate(1000,sample(colores16,size=16)),ncol=16)
object.size(partidas_1000)# Es lo que ocupan 1000 partidas en memoria
```

```
## 128448 bytes
```

```
# Así que 63063000 partidas ocupan
63063000/1000*object.size(partidas_1000)
```

```
## 8100316224 bytes
```

```
8099811720/(1024^3)# MAS de 7 Giga bytes
```

```
## [1] 7.543538
```

1.12 Problema 12

Se han de repartir cinco becas entre diez españoles y seis extranjeros, de manera que se den tres a españoles y dos a extranjeros ¿De cuántas maneras se puede hacer el reparto?

1.12.1 Solución

Escojo de entre 10 españoles a 3 $C_{n=10}^{k=3}=\binom{10}{3}$ y por cada una de estas elecciones escojo 2 extranjeros entre los 6 $C_{n=6}^{k=2}=\binom{6}{2}$ en total $\binom{10}{3}\cdot\binom{6}{2}=\frac{10!}{3!\cdot(10-3)!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot(6-2)!}=1800$.

Con R

```
choose(10,3)*choose(6,2)
```

```
## [1] 1800
```

Se deja como ejercicio cómo generar todas las asignaciones de becas utilizando la librería `gtools`.

2 Ejercicios de Combinatoria parte 2

En todas las resoluciones se deja como ejercicio cómo generar todos los objetos combinatorios con la librería `gtools` o de otra manera.

2.1 Problema 1

¿De cuantos modos diferentes se pueden colocar tres libros diferentes en una estantería?

2.1.1 Solución

$3! = 6$.

2.2 Problema 2

Seis personas entran en el cine. ¿De cuantos modos diferentes se pueden sentar en una fila?

2.2.1 Solución

Supondremos que se sientan de forma consecutiva $6! = 720$.

2.3 Problema 3

Tenemos tres premios diferentes para repartir entre una serie de ciudadanos destacados. Si hay 4 candidatos a dichos premios, de cuantos modos se pueden distribuir los premios en dos casos:

1. Si un ciudadano puede recibir como máximo un premio
2. Si un ciudadano puede recibir más de un premio.

2.3.1 Solución

En el primer caso $\binom{4}{3} \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$ maneras. En el segundo caso Que los tres premios se los lleve 1 delos 4 ciudadanos $\binom{4}{1} = 4$ casos. Que los tres premios se los lleven 2 de los 4 ciudadanos, entonces uno se lleva dos premisos y el otro uno escojo un personaje $\binom{4}{1} = 4$ y le asigno dos premios $\binom{3}{2}$ y de los tres personajes que queda escojo uno para el premio restante $\binom{4}{1}$, en total $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$. Por último que cada uno se lleve un solo premio es $\binom{4}{3} * 3!$. Así que en total tenemos

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} + \binom{4}{3} \cdot 3! = 4 + 36 + 24 = 64$$

maneras de repartir los premios.

Con R obtenemos

```r
gtools::permutations(n=4,r=3,repeats.allowed = TRUE)
```

```
##       [,1] [,2] [,3]
##  [1,]    1    1    1
##  [2,]    1    1    2
##  [3,]    1    1    3
##  [4,]    1    1    4
##  [5,]    1    2    1
##  [6,]    1    2    2
##  [7,]    1    2    3
##  [8,]    1    2    4
##  [9,]    1    3    1
## [10,]    1    3    2
```

```
## [11,]    1    3    3
## [12,]    1    3    4
## [13,]    1    4    1
## [14,]    1    4    2
## [15,]    1    4    3
## [16,]    1    4    4
## [17,]    2    1    1
## [18,]    2    1    2
## [19,]    2    1    3
## [20,]    2    1    4
## [21,]    2    2    1
## [22,]    2    2    2
## [23,]    2    2    3
## [24,]    2    2    4
## [25,]    2    3    1
## [26,]    2    3    2
## [27,]    2    3    3
## [28,]    2    3    4
## [29,]    2    4    1
## [30,]    2    4    2
## [31,]    2    4    3
## [32,]    2    4    4
## [33,]    3    1    1
## [34,]    3    1    2
## [35,]    3    1    3
## [36,]    3    1    4
## [37,]    3    2    1
## [38,]    3    2    2
## [39,]    3    2    3
## [40,]    3    2    4
## [41,]    3    3    1
## [42,]    3    3    2
## [43,]    3    3    3
## [44,]    3    3    4
## [45,]    3    4    1
## [46,]    3    4    2
## [47,]    3    4    3
## [48,]    3    4    4
## [49,]    4    1    1
## [50,]    4    1    2
## [51,]    4    1    3
## [52,]    4    1    4
## [53,]    4    2    1
## [54,]    4    2    2
## [55,]    4    2    3
## [56,]    4    2    4
## [57,]    4    3    1
## [58,]    4    3    2
## [59,]    4    3    3
## [60,]    4    3    4
## [61,]    4    4    1
## [62,]    4    4    2
## [63,]    4    4    3
## [64,]    4    4    4
```

```
# la columna el número de ciudadan indica el premio i para i=1,2,3
# y el número el cidadano 1, 2 3 o 4.
```

2.4 Problema 4

Dado un conjunto de 15 puntos del plano, ¿cuantas líneas se necesitan para juntar todos los posibles pares de puntos?

2.4.1 Solución

Pues son $\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!\cdot(15-2)!} = 105$. Notemos que coincide con el número de aristas de un grafo no dirigido completo de $n = 15$ vértices.

2.5 Problema 5

Dada una caja con los siguientes focos; 2 de 25 vatios, 4 de 40 vatios y 4 de 100 vatios, ¿de cuántos modos se pueden elegir 3 de ellos?

2.5.1 Solución

Lo haremos de tres maneras.

PRIMERA: Solo consideramos la tripleta de "vatios" que podemos conseguir (sin repetir los focos). Así los casos son:

- caso 1: "2 de 25 vatios y 1 de 40",
- caso 2: "2 de 25 vatios y 1 de 100",
- caso 3: "1 25 vatios y 2 de 40 vatios",
- caso 4: "1 25 vatios y 2 de 100 vatios",
- caso 5: "1 de 25 vatios 1 de 40 y 1 de 100",
- caso 6: "1 de 40 vatios y dos de 100",
- caso 7: "2 de 40 vatios y 1 de 100",
- caso 8: "3 de 40 vatios",
- caso 9: "3 de 100 vatios".

En total 9 casos.

SEGUNDA: Si contamos sólo las cómo sacamos las 10 bombillas son $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = 120$.

TERCERA: Contamos las distintas maneras de obtener las distintas configuraciones de 25, 40 y 100 vatios.

- 1 de 25, 1 de 40 y 1 de 100 vatios: $\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1} = 32$.
- 1 de 25, 2 de 40 vatios: $\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2} = 12$.
- 1 de 25, 2 de 100 vatios: $\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2} = 12$.
- 2 de 25, 1 de 40 vatios: $\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{1} = 4$.
- 2 de 25, 1 de 100 vatios: $\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{1} = 4$.
- 2 de 40 vatios y 1 de 100: $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1} = 24$.
- 1 de 40 vatios y 2 de 100: $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1} = 24$.
- 3 de 40 vatios: $\binom{4}{3} = 4$.
- 4 de 100 vatios: $\binom{4}{3} = 4$.

En total $32 + 12 + 12 + 4 + 4 + 24 + 24 + 4 + 4 = 120$.

```
multiset=rep(paste0(c(25,40,100),"_vatios"),c(2,4,4))
multiset
```

```
## [1] "25_vatios"  "25_vatios"  "40_vatios"  "40_vatios"  "40_vatios"
## [6] "40_vatios"  "100_vatios" "100_vatios" "100_vatios" "100_vatios"
```

```r
lista_vatios=gtools::combinations(n=10,r=3,v=multiset,set=FALSE)
nrow(lista_vatios)
```

```
## [1] 120
```

```r
head(lista_vatios)
```

```
##      [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] "25_vatios" "25_vatios" "40_vatios"
## [2,] "25_vatios" "25_vatios" "40_vatios"
## [3,] "25_vatios" "25_vatios" "40_vatios"
## [4,] "25_vatios" "25_vatios" "40_vatios"
## [5,] "25_vatios" "25_vatios" "100_vatios"
## [6,] "25_vatios" "25_vatios" "100_vatios"
```

2.6 Problema 6

Supongamos que las placas de matrícula de coches se componen de tres letras seguidas de tres dígitos. Si se pueden usar todas las combinaciones posibles, ¿cuantas placas diferentes se podrían formar?

2.6.1 Solución

Consideraremos 10 dígitos y 26 letras. Así son

$$VR_{n=10}^{k=3} \cdot VR_{n=26}^{k=3} = 10^3 \cdot 26^3 = 17576000.$$

2.7 Problema 7

¿De cuantos modos diferentes se pueden enfrentar en un partido 2 equipos de una liga que tenga 8?

2.7.1 Solución

Si lo que queremos es todos los posibles encuentros $\binom{8}{2} = 28$.

2.8 Problema 8

En un almacén hay cajas rojas y verdes.

- a) ¿De cuántas formas se pueden colocar en fila 20 cajas si 15 son rojas y 5 son verdes?
- b) ¿Y si hay 10 de cada color?

2.8.1 Solución

En el primer caso son $PR_{20}^{15,5} = \binom{20}{155} = \frac{20!}{15!\cdot 5!} = 15504$.

En el segundo caso son $PR_{20}^{10,10} = \binom{20}{15,5} = \frac{20!}{10!\cdot 10!} = 184756$.