



Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2022-1

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Práctica Dirigida Nro 04

1. Un carpintero fabrica sillas, mesas para café y mesas para comedor. Se necesitan 15 minutos para lijar una silla, 10 para pintarla, y 20 para barnizarla. Se necesitan 12 minutos para lijar una mesa para café, se necesitan 25 minutos para lijar una mesa de comedor, 20 para pintar y 30 para barnizar. La mesa de lijado esta disponible 40 horas a la semana la mesa de pintura 22 horas a la semana y la mesa de barnizado 50 horas. Ayudale determinar la cantidad de unidades de cada mueble se deben fabricarse por semana de modo que las mesas de trabajo se ocupen todo el tiempo disponible, según el siguiente requerimiento.

- a) Modele el problema.
- b) Determine el número de condicionamiento de A .
- c) Resolver usando el programa implementado del método de SOR.

2. Una empresa tiene tres plantas de ensamblaje de carros en Trujillo, Chimbote, y Lima. Si la planta de Trujillo tiene una capacidad de producción de 300 unidades y las otras tiene una capacidad de producción de 400 unidades cada una.

Los carros son vendidos a cuatro tiendas que se encuentra ubicadas en Arequipa, Cuzco, Piura, y San Martín, los pedidos que éstas tienen son: 300, 200, 250, y 150 carros respectivamente. Sabemos que el costo de transporte de cada unidad producida es:

Planta	Piura	San Martín	Arequipa	Cuszo
Trujillo	50	60	70	80
Chimbote	60	70	70	100
Lima	100	90	80	90

Ayudale al gerente que desea construir un modelo que le permita planificar el transporte a un costo mínimo según el siguiente requerimiento.

- a) Modele el problema.

- b) Determine el número de condicionamiento de A .
- c) Resolver usando el programa implementado del método de SOR.

3. El gerente del Club Libertad de Trujillo, tiene 1000000 soles para invertir en seis tipos de fondos que tienen diferentes estrategias de inversión y con diferentes rendimientos potenciales y riesgos respectivamente como se expresa en el cuadro siguiente:

	1	2	3	4	5	6
Precio por acción	50	70	100	20	40	30
Devolución esperada	40	30	20	25	15	10
Categoría de riesgo	Alto	Alto	Alto	Medio	Medio	Bajo

Pero el gerente sabe que una forma de controlar el riesgo es limitando el dinero invertido en los diferentes fondos, consecuentemente:

- a) La cantidad total invertida en los fondos de alto riesgo debe de estar entre los 60 % y 80 % del capital.
- b) La cantidad invertida en los fondos de mediano riesgo debe ser de 30 % y 40 % del capital.
- c) La cantidad invertida en el fondo de bajo riesgo debe ser al menos 10 % del capital.

Otra forma de controlar el riesgo es diversificando la inversión, esto es:

- a) La cantidad invertida en los fondos de alto riesgo uno, dos y tres deben estar en la razón de 1 : 2 : 3 respectivamente.
- b) La cantidad invertida en los fondos 4 y 5 deben estar en la razón de, 1 : 2.

Se desea estructurar un modelo para maximizar para lo cual seguir los pasos siguientes:

- a) Modele el problema.
- b) Determine el condicionamiento de A .
- c) Resolver usando el programa implementado del método de SOR.

4. En la empresa plástica Universal se fabrican tres tipos de productos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de granza de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos de granza, para cada garrafa 100 gramos y para cada bidón 1 kg. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. Ayudale al gerente determinar la cantidad de botellas, garrafas y bidones se producen cada hora según el siguiente requerimiento

- a) Modele el problema.
- b) Determine el condicionamiento de A .
- c) Resolver usando el programa implementado del método de SOR.

5. En un circo hay 11 animales carnívoros entre tigres, leones y panteras. Se sabe que cada león como tres kilos de carne al día, que cada tigre come dos kilos al día y cada pantera también dos kilos. Si en total se necesitan 25 kilos de carne al día y se sabe que el número de panteras es el triple que el número de tigres. El dueño del circo desea determinar el número de leones, panteras y tigres que tiene según el requerimiento siguiente.
- Modele el problema.
 - Determine el condicionamiento de A .
 - Resolver usando el programa implementado del método de SOR.
6. Una compañía minera trabaja en 3 minas, cada una de las cuales produce minerales de tres clases. La primera mina puede producir 4 toneladas del mineral A , 3 toneladas del mineral B , y 5 toneladas del mineral C ; la segunda mina puede producir 1 tonelada de cada uno de los minerales y la tercera mina, 2 toneladas del A , 4 toneladas del B y 3 toneladas del C , por cada hora de funcionamiento. Se desea satisfacer los tres pedidos siguientes:

Pedidos	Mineral A	Mineral B	Mineral C
P_1	19	25	25
P_2	13	16	16
P_3	8	12	10

Determine

- Modele el sistema ha resolver.
 - Determine el número de condicionamiento de A .
 - Resolver usando el programa implementado del método de Descenso más Rápido.
7. Determine el número de diagonales de un polígono convexo de n lados.
- Modele el sistema.
 - Determine el número de condicionamiento de A .
 - Resolver usando el programa implementado del método de Descenso más Rápido.
8. Una familia consta de una madre, un padre y una hija. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 años, la edad del hijo será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre. Determinar la edad de la familia según lo siguiente requerimiento:
- Modele el sistema.
 - Determine el número de condicionamiento de A .
 - Resolver usando el programa implementado del método de Descenso más Rápido.
9. En una heladería, por un helado, dos zumos y 4 batidos nos cobraron 35 soles. Otro día, por 4 helados, 4 zumos y un batido nos cobraron 34 soles. Un tercer día por 2 helados, 3 zumos y 4 batidos 42 soles. Determine el precio de cada uno según el siguiente requerimiento:

- a) Modele el sistema.
- b) Determine el número de condicionamiento de A .
- c) Resolver usando el programa implementado del método de Descenso más Rápido.

10. Un ingeniero desea obtener un polinomio de tercer grado, para lo cual cuenta con la siguiente información:

- a) Cuando el polinomio es evaluado en uno tiene un resultado de dos.
- b) Cuando el polinomio es evaluado en dos su valor resulta ser seis.
- c) Cuando su derivada es evaluado en uno resulta ser cinco.
- d) Evaluando su segunda derivada en dos se obtiene como resultado menos seis.

Ayudale encontrar el polinomio siguiendo los pasos siguientes:

- a) Modele el sistema.
- b) Determine el número de condicionamiento de A .
- c) Resolver usando el programa implementado del método de Descenso más Rápido.

11. Dado $a \in \mathbb{R}$, considerar la matriz

$$A = I_{n \times n} - a1_{n \times n}$$

donde $1_{n \times n}$ es la matriz cuyos elementos son iguales 1.

- a) Determinar $\|A\|_2$ y los valores de a para que A sea definida positiva
- b) Determine los valores de a para que converga el método de Jacobi
- c) Determine los valores de a para que converga el método de Gauss-Seidel.
- d) Mostrar los resultados al aplicar los algoritmos Jacobi y Gauss-Seidel, para $n=3$, $a=-4, -3, 1, 2, 3, 4$.

12. Dado la matriz $A = I_{3 \times 3} - E - F$, donde

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

considere la matriz $G(w)$ asociado al método SOR aplicado a la descomposición de A

$$G(w) = (I - wE)^{-1}[wF + (1 - w)I]$$

- a) Determinar el valor de w donde el radio espectral de $G(w)$ alcanza su mínimo. Mostrar resultados numéricos asociados.
- b) Comparar lo obtenido en a) con la aplicación estándar del método SOR a la matriz A .

13. Dada la matriz $A = (a_{ij})$ invertible tal que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} |a_{ij}| \leq |a_{jj}|, \quad \forall j = 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

- a) Mostrar la convergencia del método Gauss-Seidel y Jacobi aplicado al sistema lineal $Ax = b$.
- b) ¿Es necesario que A sea invertible? ¿La propiedad (1) es una condición necesaria para la convergencia del método Gauss-Seidel?.

14. Dado el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 99,2 \end{pmatrix}$$

- a) Determinar 3 iteraciones del algoritmo de Gauss-Seidel usando 3 dígitos en su mantiza.
- b) Aplicar el método de la gradiente conjugada usando 3 dígitos en su mantiza.

15. Considerar el siguiente sistema

$$2p_1 = -p_2 + 3; \quad p_i = -\frac{1}{3}p_{i-1} - \frac{1}{3}p_{i+1} + \frac{5}{3}, \quad \forall i = 2, \dots, n-1; \quad p_{n-1} = -2p_n + 3$$

- a) Mostrar que la matriz asociada al sistema es definida positiva.
- b) Aplicar el método de la gradiente conjugada, para los casos $n = 3, 4, 5, 6$.

16. Mostrar que en la k -ésima iteración del método de la gradiente conjugada, se cumple que:

$$r_k^t r_i = 0, \quad \forall i = 0, \dots, k-1; \quad \text{gen}\{r_0, r_1, \dots, r_k\} = \text{gen}\{r_0, Ar_0, \dots, A^k r_0\} = \text{gen}\{p_0, p_1, \dots, p_k\}.$$

17. Dado el sistema $Ax = b$, donde los elementos de b y A son

$$b_i = 1,5i - 6, \quad \forall i = 1, \dots, 40; \quad a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{cuando } i = j \text{ y } i = 1, \dots, 40, \\ -1, & \text{cuando } \begin{cases} j = i + 1 \text{ y } i = 1, \dots, 39, \\ j = i - 1 \text{ y } i = 2, \dots, 40, \end{cases} \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

- a) Aplicar el método de la gradiente conjugada
- b) Aplicar el método de la gradiente conjugada al sistema equivalente $D^{-1/2}AD^{-1/2}x = D^{-1/2}b$, siendo D la matriz diagonal, con elementos en su diagonal iguales a A .

18. Una empresa produce gasolina de dos tipos (A y B), utilizando como materia prima petróleo nacional, ruso y EEUU. Se desea satisfacer la demanda de gasolina con la producción de 180 y 162 unidades de gasolina tipo A y B respectivamente. La empresa produce por cada unidad de petróleo nacional 2 unidades de gasolina tipo A y 3 unidades de gasolina tipo B . Por cada unidad de petróleo ruso produce simultáneamente 4 unidades de gasolina tipo A y 3 unidades de gasolina tipo B . Por cada unidad de petróleo EEUU produce simultáneamente 3 unidades de gasolina tipo A y 5 unidades de gasolina tipo B . Determine la cantidad de petróleo a utilizar de cada tipo, si la cantidad total de unidades de petróleo que se puede procesar es 50.

- a) Modele el sistema como un sistema lineal $Ax = b$.
- b) Aplique el método de la gradiente conjugada al sistema $A^t Ax = A^t b$ y al sistema $AA^t x = b$.

15 de Junio del 2022