Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática   Ciclo 2021–III

EXAMEN PARCIAL DE
ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I
CM4F1 A

---

1. Justifique adecuadamente las siguientes proposiciones:

   (a) Dada la matriz:
   $$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
   Demuestre que $1 \leq \rho(A) \leq 9$.

   (b) Considere el método de Steffensen:
   $$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \quad n \geq 0$$
   y la siguiente función $f(x) = e^x - x - 1$ y $x_0 = 1$. Verifique numéricamente que el orden de convergencia es 2.

   (c) Determine el spline cúbico $S(x)$ que interpola los puntos $(-1,1),(0,0),(2,1)$ que satisface la siguiente condición:
   $$S''(-1) = S'(2) = 0$$

   (d) Sean los puntos $P_0 = (1,1), P_1 = (-1,2)$ y $P_2 = (0,1)$. Determine su respectiva curva de Bezier.

   (e) Determine el grado del polinomio de Taylor para aproximar $e^{1/2}$ con una tolerancia menor a 10^{-5}.

Solución:

(a) Por el Teorema de los círculos de Gershgorin:
$$\begin{aligned} D_1 &= \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-6| < 3\} \\ D_2 &= \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z+5| < 1\} \\ D_3 &= \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-4| < 3\} \end{aligned}$$
Si $z = x + yi$ resultan los discos:
$$\begin{aligned} D_1 &= \{z \in \mathbb{C} \,/\, (x-6)^2 + y^2 < 3\} \\ D_2 &= \{z \in \mathbb{C} \,/\, (x+5)^2 + y^2 < 1\} \\ D_3 &= \{z \in \mathbb{C} \,/\, (x-4)^2 + y^2 < 3\} \end{aligned}$$
Graficamos las regiones:

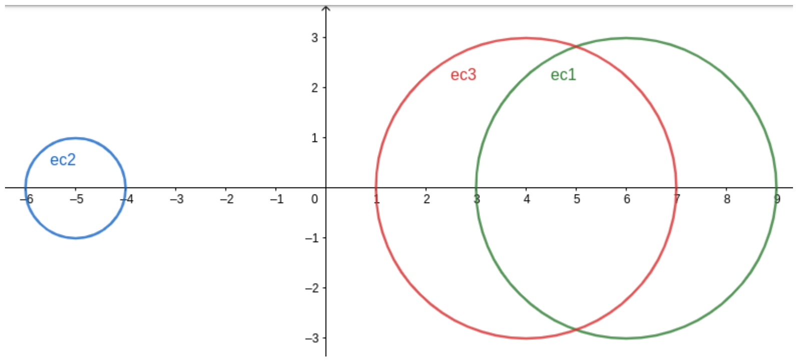

Figure 1: Ubicación de los autovalores

De la figura se observa que:

$$1 \leq \rho(A) \leq 9.$$

(b) Observe que $\hat{x} = 0$ es raíz de la función dada. Del programa implementado en Python resulta la siguiente tabla de resultados:

k	x_k	$f(x_k)$	$\frac{e_k}{e_{k-1}^2}$
1	0.758729	0.376831	0.758729
2	0.522266	0.163578	0.522266
3	0.325555	0.059244	0.325555
4	0.186694	0.018564	0.186694
5	0.100952	0.005272	0.100952
6	0.052653	0.001411	0.052653
7	0.026912	0.000365	0.026912
8	0.013608	0.000093	0.013608
9	0.006843	0.000023	0.006843
10	0.003431	0.000006	0.003431
11	0.001718	0.000001	0.001718
12	0.000860	0.000000	0.000860
13	0.000430	0.000000	0.000430
14	0.000215	0.000000	0.000215
15	0.000108	0.000000	0.000108

donde $e_k = |\hat{x} - x_k|$ es el error en la iteración k. Observe que el cociente

$$\frac{e_k}{e_{k-1}^2}$$

disminuye a la mitad en cada iteración, lo que justifica el orden de convergencia 2.

(c) Se tienen los puntos:

$$(x_0, y_0) = (-1, 1), (x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (2, 1).$$

Luego resulta $n = 2$ y se definen los splines cúbicos:

$$\begin{aligned} S_0(x) &= a_0 + b_0(x+1) + c_0(x+1)^2 + d_0(x+1)^3 \\ S_1(x) &= a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 \end{aligned}$$

De la condición de interpolación resulta:

$$\begin{array}{ll} S_0(-1) = f(-1) & \Rightarrow a_0 = 1 \\ S_0(0) = f(0) & \Rightarrow a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 0 \\ S_1(0) = f(0) & \Rightarrow a_1 = 0 \\ S_1(2) = f(2) & \Rightarrow a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 1 \end{array}$$

Como debe ser de clase C^2 resulta:

$$\begin{array}{ll} S_1'(0) = S_0'(0) & \Rightarrow b_1 = b_0 + 2c_0 + 3d_0 \\ S_1''(0) = S_0''(0) & \Rightarrow 2c_1 = 2c_0 + 6d_0 \end{array}$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$\begin{array}{ll} S''(-1) = 0 & \Rightarrow S_0''(-1) = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \\ S'(2) = 0 & \Rightarrow S_1'(2) = 0 \Rightarrow b_1 + 4c_1 + 12d_1 = 0 \end{array}$$

Por tanto, las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{array}{rcl} b_0 + d_0 & = & -1 \\ 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 & = & 1 \\ b_0 + 3d_0 - b_1 & = & 0 \\ 6d_0 - 2c_1 & = & 0 \\ b_1 + 4c_1 + 12d_1 & = & 0 \end{array}$$

expresado en forma matricial resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ d_0 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es:

$$b_0 = -\frac{27}{20}, d_0 = \frac{7}{20}, b_1 = -\frac{3}{10}, c_1 = \frac{21}{20}, d_1 = -\frac{13}{40}.$$

Por tanto, el spline cúbico pedido es:

$$S(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{27}{20}(x+1) + \dfrac{7}{20}(x+1)^3, & -1 \le x \le 0 \\ -\dfrac{3}{10}x + \dfrac{21}{20}x^2 - \dfrac{13}{40}x^3, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

(d) Como $P_0 = (1,1)$, $P_1 = (-1,2)$, $P_2 = (0,1)$ son los puntos de control, del Algoritmo de Casteljou resulta:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1-2t \\ 1+t \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t-1 \\ 1-t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1-4t+3t^2 \\ 1+t-2t^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

por tanto, la curva de Bezier es:

$$c(t) = (1 - 4t + 3t^2, 1 + t - 2t^2).$$

(e) Definiendo $f(x) = e^x$ se observa que $f^{(n)}(x) = e^x$. Para $x = 0.5$ se aproxima $f(0.5)$ mediante el polinomio de Taylor de grado n alrededor del punto $x_0 = 0$, donde el error viene dado por:

$$E(0.5) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)}, \quad 0 \leq c \leq \frac{1}{2}.$$

Se tiene:

$$0 \leq c \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |E(0.5)| \leq \frac{e^{0.5}(0.5)^{n+1}}{(n+1)!} < 0.0001 \Rightarrow n = 5.$$

2. Un computador que usa redondeo y punto flotante con 10 bits posee la siguiente estructura: el primer bit guarda información sobre el signo, los 3 bits siguientes guardan información sobre el exponente (desplazado 3 unidades) y los 6 bits restantes guardan los dígitos de la mantisa (a partir del segundo porque el primero siempre es uno y con redondeo en el séptimo dígito si es necesario). Por ejemplo, el registro 111 000 1000 representa al número $(-1)^1 \times 0.1001000 \times 2^{6-3}$. ¿Cómo almacena este computador al número 9.123? Calcule el error relativo que se comete al realizar tal representación.
Solución:
Primero transformamos el número 9.123 a base 2:

$$\begin{array}{rcccl} 2 \times 0.123 & = & 0.246 & \Rightarrow & d_1 = 0 \\ 2 \times 0.246 & = & 0.492 & \Rightarrow & d_2 = 0 \\ 2 \times 0.492 & = & 0.984 & \Rightarrow & d_3 = 0 \\ 2 \times 0.984 & = & 1.968 & \Rightarrow & d_4 = 1 \\ 2 \times 0.968 & = & 1.936 & \Rightarrow & d_5 = 1 \end{array}$$

Así tenemos que:

$$0.123 \approx 0.00011$$

y el número dado cumple:

$$9.123 = 9 + 0.123 = 1001_2 + 0.00011_2 = 1001.00011_2$$

y normalizando para representarlo en el computador hipotético se obtiene:

$$9.123 = 1001.00011..._2 = 0.100100011..._2 \times 2^4$$

Como el número es positivo entonces el primer bit es 0.
El exponente 4 debe ser desplazado 3 unidades, luego: $e = 4 - 3 = 1$.
Los dígitos a ser representados son los 6 dígitos (a partir del segundo), y para redondear se usa el séptimo dígito, es decir, se obtiene:

$$0.100100011.._2 \approx 0.1001001_2.$$

En la representación el primer dígito se representa tácitamente, luego, el computador almacena el siguiente número:

0001001001

Convirtiendo este número almacenado a base 10 es:

$$0001001001 = (-1)^0 \times 0.1001001_2 \times 2^4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7}\right) \times 2^4 = 9.125$$

Por tanto, el error relativo es:

$$ER = \left|\frac{9.125 - 9.123}{9.123}\right| = 0.000219 \approx 0.022\%.$$

3. La longitud de un arco circular entre los puntos P y Q mide 210 metros. Si la linea recta que une P y Q mide 200 metros, determine el radio " r " del arco circular asumiendo que es finito. Use el cambio de variable $x = 105/r$ y determine la función a resolver en función de x. Iniciando en el intervalo $[0.4, 0.8]$ para x, estime el número de iteraciones si se usa el método de la bisección y una tolerancia menor a 10^{-5}. Determine el valor aproximado del radio realizando el número de iteraciones encontrado. Muestre explícitamente al menos 3 iteraciones.

Solución:

De la figura adjunta se cumple:

$$sen(\theta) = \frac{100}{r}, \quad \theta = \frac{105}{r} \Rightarrow sen\left(\frac{105}{r}\right) = \frac{100}{r}$$

del cambio de variable sugerido $x = \dfrac{105}{r}$ resulta:

$$r = \frac{105}{x} \Rightarrow \frac{100}{r} = \frac{100}{105}x = \frac{20}{21}x,$$

por tanto se obtiene:

$$sen(x) = \frac{20}{21}x \Rightarrow f(x) = 21sen(x) - 20x,$$

así la ecuación a resolver es $f(x) = 0$.

Para estimar el número de iteraciones a realizar se tiene la siguiente cota de error:

$$|\hat{x} - c_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0|$$

para una tolerancia $Tol = 10^{-5}$, es decir:

$$\frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0| < tol \Rightarrow n > \frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{b-a}{Tol}\right) - 1$$

reemplazando:

$$n > \frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{0.8 - 0.4}{10^{-5}}\right) - 1 \Rightarrow n > 6.345 \Rightarrow n = 7.$$

Los resultados que se obtienen usando el método de la bisección se muestran en la siguiente tabla:

k	a_k	b_k	c_k
0	0.400000	0.800000	0.600000
1	0.400000	0.600000	0.500000
2	0.500000	0.600000	0.550000
3	0.500000	0.550000	0.525000
4	0.525000	0.550000	0.537500
5	0.537500	0.550000	0.543750
6	0.537500	0.543750	0.540625
7	0.537500	0.540625	0.539063

De donde el valor estimado para x es:

$$x = 0.5391 \Rightarrow r = \frac{105}{x} \Rightarrow r = 194.783.$$

4. Determine el número de puntos del polinomio de interpolación que permita obtener el valor de $f(x) = sen(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ con un error absoluto inferior a 5×10^{-8} considerando interpolación lineal en cada subintervalo los cuales están igualmente espaciados.

Solución:

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ una partición de puntos igualmente espaciados en el intervalo $[0, \pi/2]$, es decir:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \frac{\pi}{2},$$

donde:

$$x = x_{i+1} - x_i = \frac{x_n - x_0}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Consideremos para cada $i = 0, 1, \ldots, n-1$ el intervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$. Luego, para cada intervalo I_i considere el polinomio de interpolación lineal $P_{1,i}$ y el error asociado correspondiente es dado por:

$$E_{1,i}(x) = \frac{f^{(2)}(\xi_i)(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2}, \quad \xi_i \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$$

Para garantizar en la interpolación lineal en cada intervalo I_i resulte un error menor que 5×10^{-8} debe cumplirse:

$$\max_{i=0,\ldots,n} \{E_{1,i}(x)\} < 5 \times 10^{-8}$$

Podemos observar que para todo $i = 0, \ldots, n-1$ se cumple $|f^{(2)(\xi_i)}| < 1$. Por tanto:

$$\left| \frac{f^{(2)}(\xi_i)(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} \right| < \left| \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} \right|$$

Así, para estimar el valor de n basta exigir que se cumpla la siguiente condición:

$$\left| \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} \right| < 5 \times 10^{-8}$$

Observando que la función:

$$e(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad \text{para todo} \quad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$$

Desde que $e(x_i) = e_{i+1} = 0$ resulta que el valor mínimo ocurre en:

$$\hat{x} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

por tanto:

$$|e(x)| < |(\hat{x} - x_i)(\hat{x} - x_{i+1})| = \frac{h^2}{4} \quad \text{para todo} \quad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$$

Así, de la cota obtenida para $e(x)$ para que se cumpla la condición:

$$\left| \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} \right| < 5 \times 10^{-8}$$

se de cumplir:

$$\frac{h^2}{8} < 5 \times 10^{-8}$$

Es decir:

$$n > \sqrt{\frac{\pi^2 \times 10^8}{160}} = 2483.6 \Rightarrow n = 2484$$

por tanto, se elige $n = 2484$ puntos.

Los profesores[1]
Lima, 18 de Febrero del 2022.

[1] Hecho en LaTeX