Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Sexta Práctica Calificada

1. **Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:**

   (a) **[1 *pto.*] Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \to [a, b]$. Si $f \in C^\infty[a, b]$ y $|f'| < 1$ entonces existe un punto fijo para f.**

   (b) **[1 *pto.*] Dado $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $f' < 0$ y $f(a)f(b) < 0$. La función de homotopía $G(\lambda, x) = f(x) - (1 - \lambda)f(a)$, cumple que para cada $\lambda \in [0, 1]$ existe un único $x(\lambda)$ tal que $G(\lambda, x(\lambda)) = 0$.**

   (c) **[1 *pto.*] Para toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$, es posible implementar el método de Newton, con un punto de partida arbitrario $x_0 \in [a, b]$.**

   (d) **[1 *pto.*] Dado $v \in \mathbb{R}^n$. Se cumple que $||v|| \neq 1$ si y sólo si $(I_{n\times n} - vv^t)$ es invertible**

   Solución:

   (a) **[1 *pto.*] (V) Al ser f' continua y $[a, b]$ un compacto, entonces $f'([a, b])$ es compacto por tanto $\exists k < 1$ tal que $|f'| \leq k$, por tanto contractiva del cual se deduce la existencia de su punto fijo.**

   (b) **[1 *pto.*] (V) Al ser f estrictamente decreciente, con $f(a) > 0 > f(b)$ y $f([a,\, b]) = [f(b),\, f(a)] \ni 0$, luego como $(1 - \lambda)f(a) \in [0,\, f(a)]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ se obtiene la existencia de $x(\lambda)$ tal que $f(x(\lambda)) = (1 - \lambda)f(a)$ y la unicidad se sigue de la inyectividad de f.**

   (c) **[1 *pto.*] (F) Sea $f : [\frac{1}{2}, e^2] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = ln(x)$, luego si $x_0 = e$, se tiene que que $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = e - eln(e) = 0$, imposibilitando la obtención de x_2.**

   (d) **[1 *pto.*] (V) ($\Rightarrow$) la matrix $I + \dfrac{1}{1 - ||v||^2} vv^t$ es la inversa de $I - vv^t$.**
   ($\Leftarrow$) Si $v = 0$ entonces $||v|| = 0$. Caso contrario $v \neq 0$, cumple $0 \neq (I - vv^t)v = (1 - ||v||)v$.

2. **Lucia compra un boogie, por el cual paga $\sqrt[7]{17.0859375}$ ayudale en obtener cual es el monto real a pagar:**

   (a) **[1 *pto.*] Modele el problema.**

   (b) **[1 *pto.*] Demuestre que el método de Newton tiene la siguiente iteración.**

$$x_{n+1} = \frac{1}{7}\left[6x_n + \frac{17.0859375}{x_n^6}\right]$$

(c) [1 *pto.*] Determine la solución aproximada usando el método de Newton.

(d) [1 *pto.*] Determine el vuelto si paga con 5.00 soles.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sea x : el valor del boogie, donde

$$x = \sqrt[7]{17.0859375} \Rightarrow x^7 = 17.0859375.$$

Luego la función es:

$$f(x) = x^7 - 17.0859375 = 0.$$

(b) [1 *pto.*] Por el método de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^7 - 17.0859375}{7x_k^6} = \frac{1}{7}\left[6x_k + \frac{17.0859375}{x_k^6}\right].$$

(c) [1 *pto.*] Por el método de Newton:

k	x_k	Error
0	2	
1	1.7524240	0.2475760
2	1.5863540	0.1660670
3	1.5128902	0.0734638
4	1.5003248	0.0125654
5	1.5000002	0.0003246

Entonces

$$x = 1.50$$

(d) [1 *pto.*] El vuelto que recibe Lucia es:

$$5.00 - 1.50 = 3.50$$

3. Un vendedor compra un determinado número de videojuegos por los que ha pagado un total de S/ 72. Si cada videojuego hubiese costado S/ 3 menos, el vendedor pudo haber comprado 2 videojuegos más. Ayudale al vendedor que determine los videojuegos que ha comprado así como su precio.

(a) [1 *pto.*] Modele el problema.

(b) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Newton con $x_0 = (3\ \ 6)^T$ y $tol = 10^{-5}$.

(c) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Homotopía con $x_0 = (3\ \ 6)^T$.

(d) [1 *pto.*] Indique que método recomienda.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean:

$$\begin{aligned} x &: \text{ Cantidad de videojuegos.} \\ y &: \text{ El precio por videojuegos.} \end{aligned}$$

Las funciones generadas son:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) = x \cdot y - 72 &= 0 \\ f_2(x,y) = (x+2)\cdot(y-3) - 72 &= 0 \end{aligned}$$

(b) [1 *pto.*] La matriz Jacobiana y su inversa son:

$$JF(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ y-3 & x+2 \end{bmatrix} \wedge JF(x,y)^{-1} = \frac{1}{3x+2y}\begin{bmatrix} x+2 & -x \\ 3-y & y \end{bmatrix}$$

La tabla de método de Newton es:

k	x_k	y_k	Error
0	3	6	
1	7.7142857	14.571429	8.5714286
2	6.1686183	12.252927	2.3185012
3	6.0019831	12.002975	0.2499528
4	6.0000003	12	0.0029742
5	6	12	0.0000004

(c) [1 *pto.*] Se requiere $N = 16$ en el método de Homotopía (con Runge-Kutta de orden 4), para lograr que la solución se aproxime con un error del 10^{-5}, la tabla es:

k	x_k	y_k	$K1x_k$	$K1y_k$	$K2x_k$	$K2y_k$	$K3x_k$	$K3y_k$	I
0	3	6	0.2946429	0.5357143	0.2802788	0.5141682	0.2808908	0.5150862	0.2
1	3.2808661	6.5150492	0.2682166	0.4960749	0.2570219	0.4792828	0.2574297	0.4798946	0.2
2	3.5382817	6.9949225	0.2473745	0.4648117	0.2383352	0.4512527	0.2386228	0.4516842	0.2
⋮									
16	6.0000005	12.000001	0.1378252	0.3004878	0.1358295	0.2974943	0.1358536	0.2975304	0.1

(d) [1 *pto.*] Se recomienda para el problema el método de Newton, porque se logra la solución en la 5 iteraciones.

4. Dado $R > 0$, considerar la siguiente secuencia $x_{n+1} = x_n(2 - x_n R)$

(a) [2 *pts.*] Mostrar que la secuencia es obtenida del método de Newton aplicado a cierta función (que usa el término $\frac{1}{x}$). Use la secuencia para aproximar $(253)^{-1}$ con una tolerancia de 10^{-5}, considerando $x_0 = 0.001$.

(b) [1 *pto.*] Visto la secuencia como la aplicación del método de punto fijo, determine un intervalo no degenerado I (en términos de R) donde para $x_0 \in I$, la secuencia converga.

(c) [1 *pto.*] Muestre que si $x_0 \in [0, 2R^{-1}]$ la secuencia converge e indique como considerar el error en la aproximación de la secuencia si no se desea trabajar con el cálculo de valores inversos, y que punto inicial adecuado consideraría en la secuencia cuando $R \in \mathbb{N}$ tenga 3 dígitos.

Solución:

(a) [2 *pts.*] El método Newton aplicado a $f(x) := R - \dfrac{1}{x}$, genera la secuencia que aproxima R^{-1}, para valores adecuados de x_0.

$$x_{n+1} = x_n - (R - \frac{1}{x_n})(x_n^2) = x_n(2 - x_n R)$$

Implementando la secuencia para $R = 253$ se obtiene el siguiente resultado

k	x_k	$Error\ abs(Rx_n - 1)$
0	0.001	0.558009
1	0.001747	0.311374
2	0.002721	0.096953
$\vdots$		
6	0.003952	$7.80761e^{-09}$

(b) [1 *pto.*] La secuencia es la aplicación del punto fijo a la función cuadrática $g(x) = x(2-xR)$, luego $g'(x) = 2 - 2xR$, entonces $|g'(x)| < 1, \forall x \in I :=]\frac{1}{2}R^{-1}, \frac{3}{2}R^{-1}[$, además $g(I) =]\frac{3}{4}R^{-1}, R^{-1}] \subset I$. Por tanto dado $x_0 \in I$, considerando $J = [\min\{x_o, \frac{3}{4}R^{-1}\}, max\{x_0, R^{-1}\}]$, al ser contractiva $g : J \to J$, se garantiza la convergencia de la secuencia x_n.

(c) [1 *pto.*] Se cumple que $g([R^{-1},\ 2R^{-1}]) = [0, R^{-1}]$, por tanto basta analizar la convergencia en el intervalo $P = [0, R^{-1}]$. Se tiene que g es creciente en P y que $x - g(x) \geq 0,\ \forall x \in P$, por tanto $x_{n+1} = g(x_n)$ es una sucesión creciente y acotado, por tanto convergente.

El error a considerar será $|Rx_n - 1|$ la cual nos da información del acercamiento a R^{-1}, sin considerar calculos de inversos.

Si R tiene 3 digitos entonces $R \leq 1000$, luego considerar $x_0 = 0.001 \leq R^{-1}$. Támbien se puede considerar que en los casos en que $R \leq 500$ ó $R \leq 200$, es mejor considerar $x_0 = 0.002$ y $x_0 = 0.005$, respectivamente.

5. [4 *pts.*] Realizó el trabajo de la sexta práctica dirigida.

20 de Julio del 2022