Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2021-2

EXAMEN FINAL DE ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I

1. *a*) Si en un sistema lineal de ecuaciones hay mas ecuaciones que incógnitas entonces no hay solución única.
   b) Un sistema lineal de ecuaciones donde hay mas incógnitas que ecuaciones siempre tiene solución.
   c) El método de Newton asegura una convergencia cuadrática a la solución de la ecuación $f(x) = 0$
   d) El método de bisección asegura solución única si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$.
   e) Una matriz real 5×5 tiene por lo menos un valor propio real.
   f) Si f es un polinomio de grado n y g es su polinomio de Taylor de orden n entonces $f = g$
   g) El polinomio de interpolación de Hermite es único.
   h) El polinomio de Newton y el polinomio de Lagrange son equivalentes.
   i) Utilizar puntos equidistantes en $[a, b]$ para formar el polinomio de Newton genera oscilaciones alrededor de los puntos $x = a$ y $x = b$.
   j) Una matriz real y simétrica es diagonalizable.

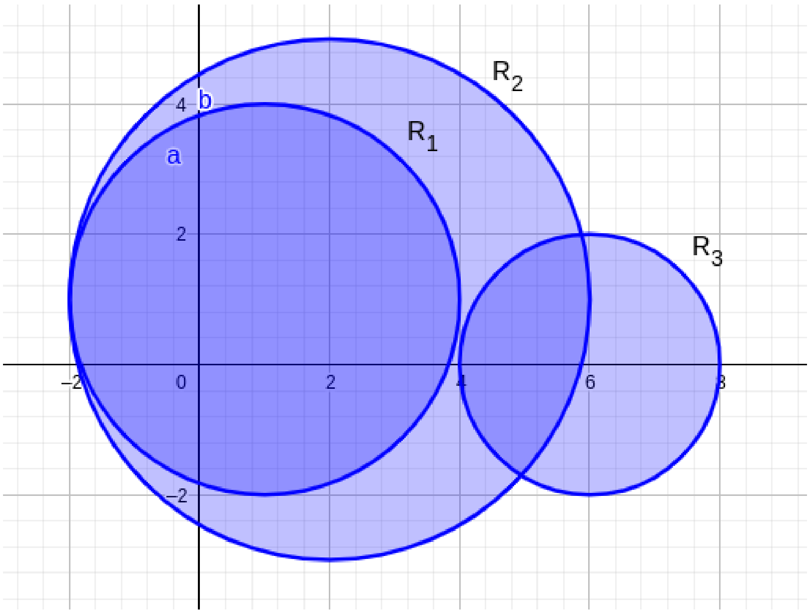
   Solución:
   Las claves son:

   F V F F V V V V V V.

2. *a*) Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix}$$
   muestre, sin calcular los valores propios de A, que $\rho(A) \leq 8$.
   b) Muestre que una iteración de punto fijo converge a la solución de $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ en $[1, 2]$.
   c) Muestre que si $p(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$ que interpola $f(x)$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ entonces
$$f(x) - p(x) = \sum_{i=0}^{n} (f(x) - f(x_i))L_i(x)$$
   d) Muestre que al interpolar $f(x) = \cosh(x)$ con un polinomio $p(x)$ de grado 22 con 23 puntos distintos en $[-1, 1]$ nos de un error relativo no mayor a 5×10^{-16}.

   Solución:

   a) Discos de Gershgorin
$$R_1 = \{|z - (1 + i)| \leq |i| + |2| = 3\}$$
$$R_2 = \{|z - (2 + i)| \leq |-3| + |1| = 4\}$$
$$R_3 = \{|z - 6| \leq |1| + |i| = 2\}$$



Por el teorema de Gershgorin existe $\lambda \in R_3$, luego $|z| \leq |z-6|+6 \leq 8$.

b) Si $G(x) = (3+3x^2)^{1/4}$ y $x_0 = 1$ definimos la iteración

$$x_{i+1} = G(x_i) \quad , i \geq 0$$

como $G'(x) = \frac{3}{2}\dfrac{x}{(3+3x^2)^{3/4}}$ y $1 \leq x \leq 2$ entonces

$$6^3 \leq (3+3x^2)^3 \leq 15^3 \implies \frac{3}{2}\frac{x}{(3+3x^2)^{3/4}} \leq \frac{3}{(6)^{3/4}} < 1$$

por lo tanto G es contractiva en $[1,2]$.

c) Sabemos que $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$, luego

$$f(x) = f(x)\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)f(x)$$

Como el interpolante de un polinomio es el mismo polinomio entonces

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p(x_i)L_i(x)$$

como p interpola f entonces $p(x_i) = f(x_i)$ y

$$f(x) - p(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(L_i(x)f(x) - p(x_i)L_i(x)\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x) - f(x_i)\right) L_i(x)$$

d)

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Para $n = 22$. $f^{(n+1)}(x) = \sinh(x)$, y $f^{(n+1)}(c) \leq 2$,

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \leq 2^{n+1}$$

y

$$\frac{1}{23!} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}\cdots\frac{1}{22}\frac{1}{23} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{2veces}\underbrace{\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}}_{4veces}\underbrace{\frac{1}{8}\cdots\frac{1}{8}}_{8veces}\underbrace{\frac{1}{16}\cdots\frac{1}{16}\frac{1}{16}}_{8veces} = 2^{-64}$$

luego

$$f(x) - p(x) \leq 2^{24}2^{-64} = 2^{-42}$$

y como $1 \leq f(x) \leq 2$ con $x \in [-1.1]$ entonces

$$\frac{f(x) - p(x)}{f(x)} \leq 2^{24}2^{-64} = 2^{-42}$$

3. La población de cierta especie de microorganismos decae según el modelo

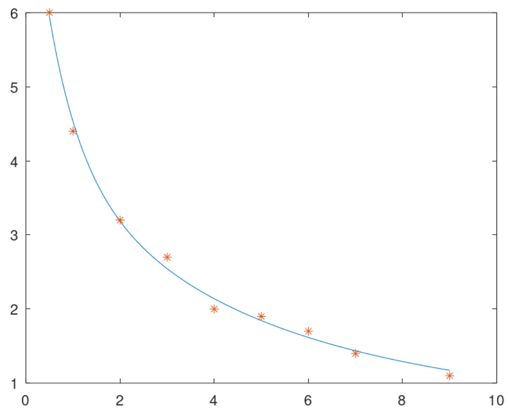
$$p(t) = Ae^{-1.5t} + Be^{-0.3t} + Ce^{-0.05t}$$

Estime A, B, C si

t	0.5	1	2	3	4	5	6	7	9
$p(t)$	6	4.4	3.2	2.7	2	1.9	1.7	1.4	1.1

Solución

```
t=[0.5,1,2,3,4,5,6,7,9]';
A = [ exp(-1.5*t), exp(-0.3*t), exp(-0.05*t)];
b = [6 4.4 3.2 2.7 2 1.9 1.7 1.4 1.1]';
x = A'*A\A'*b;
xx = 0.5:0.05:9;
yy  = x(1) * exp(-1.5*xx) + x(2) * exp(-0.3*xx) +  x(3) * exp(-0.05*xx);
plot(xx,yy,t,b,'*')
```



$$A = 4.1375 \quad B = 2.8959 \quad C = 1.5349$$

4. Use Householder methods to find the least-square solution to the following system of equations

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Whats is the least-square error?
Solución:
Iniciamos con:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|a_1\| = \sqrt{14}$$

como $a_{11} > 0$ entonces:

$$v_1 = a_1 + \|a_1\| e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{14}+3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$H_1 = I - 2\frac{v_1 v_1^T}{v_1^T v_1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\left(\sqrt{14}+3\right)^2}{\left(\sqrt{14}+3\right)^2+5} & -\frac{2\left(\sqrt{14}+3\right)}{\left(\sqrt{14}+3\right)^2+5} & 0 & -\frac{4\left(\sqrt{14}+3\right)}{\left(\sqrt{14}+3\right)^2+5} \\ -\frac{2\left(\sqrt{14}+3\right)}{\left(\sqrt{14}+3\right)^2+5} & 1 - \frac{2}{\left(\sqrt{14}+3\right)^2+5} & 0 & -\frac{4}{\left(\sqrt{14}+3\right)^2+5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4\left(\sqrt{14}+3\right)}{\left(\sqrt{14}+3\right)^2+5} & -\frac{4}{\left(\sqrt{14}+3\right)^2+5} & 0 & 1 - \frac{8}{\left(\sqrt{14}+3\right)^2+5} \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} -0.80 & -0.27 & 0.0 & -0.53 \\ -0.27 & 0.96 & 0.0 & -0.08 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -0.53 & -0.08 & 0.0 & 0.84 \end{pmatrix}$$

luego:

$$A_1 = H_1 A = \begin{pmatrix} -3.74 & 0.53 \\ 0 & -0.77 \\ 0 & 3.0 \\ 0 & 1.46 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.772382012940121 \\ 3 \\ 1.455235974119758 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} -0.772382012940121 \\ 3 \\ 1.455235974119758 \end{pmatrix} \Rightarrow \|a_2\| = 3.422613871631696$$

como $a_{22} < 0$ entonces:

$$v2 = a2 - \|a_{22}\| e_1 = \begin{pmatrix} -4.194995884571818 \\ 3 \\ 1.455235974119758 \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$H_2 = I - 2\frac{v_2 v_2^T}{v_2^T v_2} = \begin{pmatrix} -0.2256702163635817 & 0.8765230646861664 & 0.4251826319590029 \\ 0.8765230646861664 & 0.3731652505954965 & -0.3040641590539256 \\ 0.4251826319590029 & -0.3040641590539256 & 0.8525049657680851 \end{pmatrix}$$

luego:

$$A_3 = H_2 A_2 = \begin{pmatrix} 3.422613871631697 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

considerando:

$$H_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2256702163635817 & 0.8765230646861664 & 0.4251826319590029 \\ 0 & 0.8765230646861664 & 0.3731652505954965 & -0.3040641590539256 \\ 0 & 0.4251826319590029 & -0.3040641590539256 & 0.8525049657680851 \end{pmatrix},$$

$$H_1^* = \begin{pmatrix} -0.8017837257372731 & -0.2672612419124244 & 0.0 & -0.5345224838248488 \\ -0.2672612419124244 & 0.9603567451474546 & 0.0 & -0.07928650970509076 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -0.5345224838248488 & -0.07928650970509076 & 0.0 & 0.8414269805898185 \end{pmatrix}$$

se calcula $Q = H_2^* H_1^*$, es decir:

$$Q = \begin{pmatrix} -0.8018837257372731 & -0.2672612419124244 & 0.0 & -0.5345224838248488 \\ -0.1669567742259364 & -0.2504351613389047 & 0.8765230646861664 & 0.3756527420083569 \\ -0.07173151329329089 & 0.8658830233464778 & 0.3731652505954965 & -0.3253442417333025 \\ -0.5693179100323309 & 0.3407348652793668 & -0.3040641590539256 & 0.6836094324088129 \end{pmatrix}$$

además $QA = R$, de donde se obtiene:

$$R = \begin{pmatrix} -3.741657386773941 & 0.5345224838248488 \\ 0.0 & 3.422613871631697 \\ 0.0 & 2 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

luego, desde que:

$$Qb = \begin{pmatrix} -2.939873661036668 \\ 0.4591311291213249 \\ 0.684001808199757 \\ 2.162980117752841 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{c} \\ \hline \text{d} \end{pmatrix}$$

es decir:

$$c = \begin{pmatrix} -2.939873661036668 \\ 0.4591311291213249 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0.684001808199757 \\ 2.162980117752841 \end{pmatrix},$$

y así, la solución del problema de mínimos cuadrados viene dado por solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} -3.741657386773941 & 0.5345224838248488 \\ 0.0 & 3.422613871631697 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c = \begin{pmatrix} -2.939873661036668 \\ 0.4591311291213249 \end{pmatrix}$$

por sustitución regresiva:

$$x_2 = \frac{c_2}{R_{22}} = 0.1341463414634145,$$

$$x_1 = \frac{c_1 - R_{12}x_2}{R_{11}} = 0.804878048780488.$$

La suma de residuos al cuadrado se calcula a partir de:

$$SCE^2 = \|d\|^2 = 5.146341463414632 \Rightarrow SCE = 2.268554928454374.$$

5. Consider the fixed point iteration:

$$p_{k+1} = (3p_k + 1)^{1/3}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

   a) Show that there is a fixed point in $p_0 \in [1, 2]$.

   b) Show that above iteration converges for any $p_0 \in [1, 2]$.

Solución:
Del esquema iterativo se deduce que la función de iteración es:

$$g(x) = (3x + 1)^{1/3}.$$

la cual es una función continua y diferenciable en $[1, 2]$.

Desde que $1 \leq x \leq 2$ entonces:

$$4 \leq 3x + 1 \leq 7 \Rightarrow 1 < \sqrt[3]{4} \leq (3x + 1)^{1/3} \leq \sqrt[3]{7} < 2 \Rightarrow g(x) \in [1, 2] \Rightarrow g([1, 2]) \subset [1, 2].$$

además:

$$g'(x) = (3x+1)^{-2/3} \Rightarrow \frac{1}{49} \leq \frac{1}{(3x+1)^2} \leq \frac{1}{16} \Rightarrow \left| \frac{1}{(3x+1)^{(2/3)}} \right| \leq \sqrt[3]{\frac{1}{16}} < 1$$

Por tanto, por el Teorema del Punto Fijo se tiene que existe un único punto fijo $\hat{x}$ para la función g y además el esquema iterativo:

$$p_{k+1} = (3p_k + 1)^{1/3}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

converge al único punto fijo $\hat{x}$ para todo punto inicial $p_0 \in [1, 2]$.

UNI, 22 de diciembre del 2021[1]

[1] Hecho en LaTeX