Segunda Práctica Dirigida Grupo N° 1

Análisis y Modelamiento Numérico I CM4F1 B

Profesor Jonathan Munguia La Cotera

Aldo Luna Bueno Alexandra Gutierrez Mazzetti Carlos Aznarán Laos Edward Canales Yarin

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

12 de octubre del 2022

Pregunta N° 2

Suponga que f y g son funciones de valor real que tienen números de condición κ_f y κ_g, respectivamente. Defina una nueva función $h(x) = (f \circ g)(x)$. Muestre que para x en el dominio de h, el número de condición de h satisface

$$\boxed{\kappa_h(x) = \kappa_f(g(x)) \cdot \kappa_g(x).}$$

Demostración.

Si f y g son funciones diferenciables con $g(x) \neq 0$, entonces por la regla de cadena tenemos $h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$.
Por definición, el número de condición del problema h en x es

$$\kappa_h(x) = \left|\frac{xh'(x)}{h(x)}\right| = \left|\frac{xf'(g(x))\, g'(x)}{f(g(x))}\right| = \left|\frac{xf'(g(x))\, g'(x)\, g(x)}{f(g(x))\, g(x)}\right| = \left|\frac{g(x)\, f'(g(x))}{f(g(x))}\right| \left|\frac{xg'(x)}{g(x)}\right| = \kappa_f(g(x)) \cdot \kappa_g(x).$$

$\square$

4. Suponga que f es una función con número de condición κ_f, y que f^{-1} es su función inversa. Muestre que el número de condición de f^{-1} satisface

$$\boxed{\kappa_{f^{-1}}(x) = \frac{1}{\kappa_f\left(f^{-1}(x)\right)},}$$

siempre que el denominador sea distinto de cero.

Solución

De la pregunta N° 2, sabemos que $\kappa_h(x) = \kappa_f(g(x)) \cdot \kappa_g(x)$. *Aplicando la identidad anterior para las funciones* $f = f$ *y* $g = f^{-1}$ *con* $g(x) \neq 0$, *es decir,* $h = f \circ g = x$, *tenemos*

$$\kappa_x(x) = \left|\frac{x \cdot x'}{x}\right| = 1 = \kappa_f\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \kappa_{f^{-1}}(x) \implies \frac{1}{\kappa_f\left(f^{-1}(x)\right)} = \kappa_{f^{-1}}(x).$$

Definición (Símbolos de Landau)

Sean $x_n, y_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dos sucesiones.

a) Decimos que x_n es "O grande" de y_n sii existen constantes $C > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x_n| \leq C\,|y_n| \quad \forall n \geq n_0.$$

Escribimos $x_n \in O\,(y_n)$ o con abuso de notación como $x_n = O\,(y_n)$.

b) Decimos que x_n es "o pequeña" de y_n sii existe una sucesión $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$ que converge a 0 tal que

$$|x_n| \leq \epsilon_n\,|y_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Escribimos $x_n \in o\,(y_n)$ o con abuso de notación como $x_n = o\,(y_n)$.

Teorema

Sea a_n una sucesión de números reales o complejos. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) *a_n es acotada.*

b) *$a_n = O\,(1)$.*

Demostración.

a_n es acotada $\iff \exists k \in \mathbb{R}, |a_n| \leq k \iff \exists k \in \mathbb{R}, |a_n| \leq k \cdot |1| \iff a_n = O\,(1)\,.$ $\square$

6. Determine el Landau de las siguientes funciones

a) $\dfrac{1}{n^2}$.

b) $\cos(n)$.

c) $\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

d) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

Solución

a) $\dfrac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ *porque existen* $C = 1 > 0$, $n = 1 \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$\left|\frac{1}{n^2}\right| \leq 1 \left|\frac{1}{n}\right| \quad \forall n \geq 1.$$

b) $\cos(n) = O(1)$ *porque existen* $C = 1 > 0$, $n = 1 \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$|\cos(n)| \leq 1\,|1| \quad \forall n \geq 1.$$

c) $\sin\left(\dfrac{x}{n}\right) = O(1)$ *porque existen* $C = 1 > 0$, $n = 1 \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq 1\,|1| \quad \forall n \geq 1.$$

d) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *porque existen* $C = \dfrac{1}{2} > 0$, $n = 1 \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right| = \left|\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| \quad \forall n \geq 1.$$

Definición (Matriz ortogonal)

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ortogonal sii $A^t A = A A^t = I_n$.

Ejemplo

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

es ortogonal.

Teorema

Si U es una matriz ortogonal, entonces $\| Ux\|_2 = \|x\|_2$ (esto es, la longitud de cualquier vector es invariante bajo la multiplicación por U).

Demostración.

Si U es ortogonal tenemos

$$\| Ux\|_2^2 = (Ux)^t Ux = x^t U^t Ux = \|x\|_2^2$$

porque $U^t U = I_n$. Por lo tanto, $\| Ux\|_2 = \|x\|_2$. $\square$

Propiedades

Sea U una matriz ortogonal.

a) La inversa de una matriz ortogonal es $U^{-1} = U^t$.

b) $\det(U) = \pm 1$.

c) La norma de Frobenius $\|\cdot\|_F$ es invariante.

$$\|UA\|_F = \sqrt{\operatorname{traza}\left((UA)^t UA\right)} = \sqrt{\operatorname{traza}\left(A^t U^t UA\right)} = \sqrt{\operatorname{traza}\left(A^t A\right)} = \|A\|_F.$$

d) La norma $|||\cdot|||_2$ es invariante.

$$|||UA|||_2 = \max\left\{\|(UA)\,x\|_2 : \|x\|_2 = 1\right\} = \max\left\{\|U(Ax)\|_2 : \|x\|_2 = 1\right\} = \max\left\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 = 1\right\} = \|A\|_2.$$

Algunos resultados

(a) Si A y B son inversibles, entonces

$$\begin{aligned}
(AB)(AB)^{-1} &= I_n \\
\left(A^{-1}AB\right)(AB)^{-1} &= A^{-1}I_n \\
(I_nB)(AB)^{-1} &= A^{-1} \\
B(AB)^{-1} &= A^{-1} \\
B^{-1}B(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\
I_n(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\
(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}.
\end{aligned}$$

(b) Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\rho(H) = \max\{|\lambda| : Hv = \lambda v, v \neq 0\}$ donde H es una matriz simétrica, entonces la

$$\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 && \text{definición de norma matricial} \\
&= \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{x^tA^tAx} && \text{ya que } \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \|\cdot\| \\
&= \sqrt{\rho\left(A^tA\right)}. && \text{ya que } \sqrt{x^tA^tAx} \leq \sqrt{\lambda_n}
\end{aligned}$$

(c) Si A es una matriz ortogonal, entonces $\kappa(A) = 1$ porque $\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^tA\right)} = \sqrt{\rho\left(A^{-1}A\right)} = \sqrt{\rho\left(I_n\right)} = \sqrt{1} = 1.$

13. Suponga que $A = UBV$ con U, V ortogonales y B no singular. Demuestre que $\kappa(A) = \kappa(B)$.

Solución

A es inversible porque el

$$\det(A) = \det(UBV) = \det(UB(V)) = \det(UB)\det(V) = \underbrace{\det(U)}_{\neq 0}\underbrace{\det(B)}_{\neq 0}\underbrace{\det(V)}_{\neq 0} \neq 0,$$

porque U, B y V son matrices inversibles.

Luego,

$$\begin{aligned}
\kappa(A) &= \|UBV\| \left\|(UBV)^{-1}\right\| && \textit{definición del número de condición de } A\\
&\leq \|U\| \|BV\| \left\|V^{-1}(UB)^{-1}\right\| && \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\\
&\leq \|U\| \|B\| \|V\| \left\|V^{-1}B^{-1}U^{-1}\right\| && \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\\
&\leq \|U\| \|B\| \|V\| \left\|V^{-1}\right\| \left\|B^{-1}\right\| \left\|U^{-1}\right\| && \textit{aplicando dos veces } \|AB\| \leq \|A\| \|B\|\\
&= \|U\| \left\|U^{-1}\right\| \|V\| \left\|V^{-1}\right\| \|B\| \left\|B^{-1}\right\| && \\
&= \kappa(U)\kappa(V)\kappa(B) && \textit{definición del número de condición de } U,\ V \textit{ y } B\\
&= 1 \cdot 1 \cdot \kappa(B) && \kappa(A) = 1 \textit{ cuando } A \textit{ es ortogonal}\\
&= \kappa(B).
\end{aligned}$$

Es decir, $\kappa(A) \leq \kappa(B)$.

Solución

De manera análoga, despejando tenemos que $B = U^{-1} A V^{-1}$.

Y así,

$$
\begin{aligned}
\kappa(B) &= \left\| U^{-1} A V^{-1} \right\| \left\| \left(U^{-1} A V^{-1} \right)^{-1} \right\| && \textit{definición del número de condición de } B \\
&\leq \left\| U^{-1} \right\| \left\| A V^{-1} \right\| \left\| V \left(U^{-1} A \right)^{-1} \right\| && \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \\
&\leq \left\| U^{-1} \right\| \|A\| \left\| V^{-1} \right\| \left\| V A^{-1} U \right\| && \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \\
&\leq \left\| U^{-1} \right\| \|A\| \left\| V^{-1} \right\| \|V\| \left\| A^{-1} \right\| \|U\| && \textit{aplicando dos veces } \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \\
&= \|U\| \left\| U^{-1} \right\| \|V\| \left\| V^{-1} \right\| \|A\| \left\| A^{-1} \right\| \\
&= \kappa(U)\, \kappa(V)\, \kappa(A) && \textit{definición del número de condición de } U,\ V \textit{ y } A \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \kappa(A) && \kappa(A) = 1 \textit{ cuando } A \textit{ es ortogonal} \\
&= \kappa(A).
\end{aligned}
$$

Es decir, $\kappa(B) \leq \kappa(A)$. *Finalmente, concluimos que* $\kappa(A) = \kappa(B)$.

15. Utilice la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales. No reordene las ecuaciones. (La solución exacta de cada sistema es $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.)

a) $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ \frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}.$

b) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \\ \frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}.$

Solución

Los sistemas producen la matrices aumentadas

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & 8 \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right], \qquad \widetilde{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & -5 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 9 \end{array}\right].$$

- *Puesto que* $a_{11} = -1$, *realizamos* $\left(F_2 + \frac{5}{3}F_1\right) \to (F_2)$ *y* $(F_3 + 2F_1) \to (F_3)$ *para obtener* $a_{22} = a_{32} = 0$.
- *Puesto que* $b_{11} = 4$, *realizamos* $\left(F_3 - \frac{1}{4}F_1\right) \to (F_3)$ *y* $\left(F_2 - \frac{0.11}{4}F_1\right) \to (F_2)$ *para obtener* $b_{22} = b_{32} = 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & 8 \\ 1.67 & 0.67 & 0.67 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 7.35 & 2.34 & 14.36 \\ 0 & 9 & 6 & 27 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ F_{21}(1.67) \\ F_{31}(2) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 7.35 & 2.34 & 14.36 \\ 0 & 0 & 3.13 & 9.48 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ F_{32}\left(-\frac{9}{7.35}\right) \end{array}$$

Finalmente, la matriz se vuelve a convertir en un sistema lineal que tiene una solución equivalente a la solución del sistema original y se aplica la sustitución hacia atrás

$$x_3 = \frac{9.48}{3.13} = 3.02$$

$$x_2 = \frac{[14.36 - (2.34)x_3]}{7.35} = 0.99$$

$$x_1 = \frac{[8 - [(4)\,x_2 + (1)\,x_3]]}{-1} = -1.00$$

x	y	fl (x)	fl (y)	fl (fl $(x) \otimes$ fl (y))	fl (fl $(x) \oplus$ fl (y))
5/3	-	1.67	-	-	-
2/3	-	0.67	-	-	-
-1	1.67	-1.00	1.67	-1.67	-
4	1.67	4.00	1.67	6.68	-
1	1.67	1.00	1.67	1.67	-
8	1.67	8.00	1.67	13.36	-
-1.67	1.67	-1.67	1.67	-	0
6.68	0.67	6.68	0.67	-	7.35
1.67	0.67	1.67	0.67	-	2.34
13.36	1	13.36	1.00	-	14.36
-1	2	-1.00	2.00	-2.00	-
4	2	4.00	2.00	8.00	-
1	2	1.00	2.00	2.00	-
8	2	8.00	2.00	16.00	-
-2.00	2	-2.00	2.00	-	0.00
8.00	1	8.00	1.00	-	9.00
2.00	4	2.00	4.00	-	6.00
16.00	11	16.00	11.00	-	27.00
0	$-\frac{9}{7.35}$	0	1.22	0	-
7.35	$-\frac{9}{7.35}$	7.35	-1.22	-9.00	-
2.34	$-\frac{9}{7.35}$	2.34	-1.22	-2.86	-
14.36	$-\frac{9}{7.35}$	14.36	-1.22	-17.52	-
0	0	0	0	-	0
9.00	-9.00	9.00	-9.00	-	0
6.00	-2.86	6.00	-2.86	-	3.14
27.00	-17.52	27.00	-17.52	-	9.48

La solución del sistema lineal es $(x_1, x_2, x_3) = (-1.00, 0.99, 3.02)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & -5 \\ 0.11 & 0.11 & -0.33 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 9 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0.05 & -0.30 & -0.85 \\ 0 & 3.50 & 2.25 & 10.25 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ F_{31}\left(-\frac{1}{4}\right) \\ F_{21}\left(-\frac{0.11}{4}\right) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0.05 & -0.30 & -0.85 \\ 0 & 0 & 23.25 & 69.75 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ F_{32}\left(-\frac{3.50}{0.05}\right) \end{array} \end{array}$$

Finalmente, la matriz se vuelve a convertir en un sistema lineal que tiene una solución equivalente a la solución del sistema original y se aplica la sustitución hacia atrás

$$x_3 = \frac{69.75}{23.25} = 3.00$$

$$x_2 = \frac{[-0.85 - (-0.30)x_3]}{0.05} = 1.00$$

$$x_1 = \frac{[-5 - [(2)\,x_2 + (-1)\,x_3]]}{4} = -1.00$$

x	y	$\mathrm{fl}\,(x)$	$\mathrm{fl}\,(y)$	$\mathrm{fl}\,(\mathrm{fl}\,(x) \otimes \mathrm{fl}\,(y))$	$\mathrm{fl}\,(\mathrm{fl}\,(x) \oplus \mathrm{fl}\,(y))$
4	$-\frac{1}{4}$	4.00	-0.25	-1	-
2	$-\frac{1}{4}$	2.00	-0.25	-0.50	-
-1	$-\frac{1}{4}$	-1.00	0.25	0.25	-
-5	$-\frac{1}{4}$	-5.00	-0.25	1.25	-
-1	1	-1.00	1.00	-	0
-0.50	4	-0.50	4.00	-	3.50
0.25	2	0.25	2.00	-	2.25
1.25	9	1.25	9.00	-	10.25
4	$-\frac{0.11}{4}$	4.00	-0.03	-0.11	-
2	$-\frac{0.11}{4}$	2.00	-0.03	-0.06	-
-1	$-\frac{0.11}{4}$	-1.00	-0.03	0.03	-
-5	$-\frac{0.11}{4}$	-5.00	-0.03	0.15	-
-0.11	$\frac{1}{9}$	-0.11	0.11	-	0
-0.06	$\frac{1}{9}$	-0.06	0.11	-	0.05
0.03	$-\frac{1}{3}$	0.03	-0.33	-	-0.30
0.15	-1	0.15	-1.00	-	-0.85
0	$-\frac{3.50}{0.05}$	0	-70	0	-
0.05	$-\frac{3.50}{0.05}$	0.05	-70	-3.50	-
-0.30	$-\frac{3.50}{0.05}$	-3.30	-70	21	
-0.85	$-\frac{3.50}{0.05}$	-0.85	-70	59.5	-
0	0	0	0	-	0
-3.50	3.50	-3.50	3.50	-	0
21	2.25	21.00	2.25	-	23.25
59.5	10.25	59.50	10.25	-	69.75

La solución del sistema lineal es $(x_1, x_2, x_3) = (-1.00, 1.00, 3.00)$.

wxMaxima 22.09.0 (Linux 5.19.13-arch1-1 x86_64) [gaussian_elimination.wxmx]

File Edit View Cell Maxima Equations Matrix Calculus Simplify List Plot Numeric Help

Maths

1 *Eliminación gaussiana*

Grupo N°1: Aldo Luna Bueno, Alexandra Gutierrez Mazzeti, Carlos Aznarán Laos, Edward Canales Yarin.

```
A:matrix(
  [−1, 4, 1, 8],
  [5/3, 2/3, 2/3, 1],
  [2, 1, 4, 11]
);
A:rowop(A, 2, 1, −1.67);
A:rowop(A, 3, 1, −2);
A:rowop(A, 3, 2, 9/7.35);
```

(%o39) $$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 8 \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

(%o40) $$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 8 \\ -0.003333333333333188 & 7.346666666666667 & 2.336666666666666 & 14.36 \\ 2 & 1 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

(%o41) $$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 8 \\ -0.003333333333333188 & 7.346666666666667 & 2.336666666666666 & 14.36 \\ 0 & 9 & 6 & 27 \end{pmatrix}$$

(%o42) $$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 8 \\ -0.003333333333333188 & 7.346666666666667 & 2.336666666666666 & 14.36 \\ 0.004081632653061047 & 0.004081632653061718 & 3.138775510204082 & 9.416326530612245 \end{pmatrix}$$

```
A:matrix( ... + 4 hidden lines
```

```
triangularize(A);
```

(%o49) $$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & -22 & -7 & -43 \\ 0 & 0 & -69 & -207 \end{pmatrix}$$

wxMaxima 22.09.0 (Linux 5.19.13-arch1-1 x86_64) [gaussian_elimination.wxmx]

File Edit View Cell Maxima Equations Matrix Calculus Simplify List Plot Numeric Help

Maths

(%i12)
```
B:matrix(
    [4, 2, -1, -5],
    [1/9, 1/9, -1/3, -1],
    [1, 4, 2, 9]
);
B:rowop(B, 3, 1, 1/4);
B:rowop(B, 2, 1, 0.11/4);
B:rowop(B, 3, 2, 3.50/0.06);
```

(%o9) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -5 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

(%o10) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -5 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{4} & \frac{41}{4} \end{pmatrix}$

(%o11) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -5 \\ 0.001111111111111104 & 0.05611111111111111 & -0.3058333333333333 & -0.8625 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{4} & \frac{41}{4} \end{pmatrix}$

(%o12) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -5 \\ 0.001111111111111104 & 0.05611111111111111 & -0.3058333333333333 & -0.8625 \\ -0.06481481481481442 & 0.2268518518518521 & 20.09027777777778 & 60.56250000000001 \end{pmatrix}$

(%i7) B:matrix(... + 4 hidden lines

(%i8) triangularize(B);

(%o8) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -11 & -31 \\ 0 & 0 & 43 & 129 \end{pmatrix}$

Maxima is ready for input. Ready for user input

Referencias

- Libros

Hämmerlin, G., & Hoffman, K.-H. (1991). *Numerical Mathematics*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4442-4

Kincaid, D. R., Ward Cheney, E., Martínez Enríquez, R., Torres Alcaraz, C., & Fetter, H. L. (1994). *Análisis Numérico: las matemáticas del cálculo científico* (1ª ed.). Addison - Wesley Iberoamericana.

Kress, R. (1998). *Numerical Analysis*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0599-9_1

Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2007). *Numerical Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/b98885

Kincaid, D. R., & Ward Cheney, E. (2012). *Numerical Mathematics and Computing* (7ª ed.). Cengage Learning.

Burden, R. L., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2017). *Análisis Numérico* (10ª ed.). Cengage Learning. https://latam.cengage.com/libros/analisis-numerico-2

- Artículos científicos

Goldberg, D. (1991). What Every Computer Scientist Should Know about Floating-Point Arithmetic. *ACM Comput. Surv.*, *23*(1), 5-48. https://doi.org/10.1145/103162.103163

- Sitios web

Foundation, P. S. (s.f.). *Python 3.10.7 documentation*. Consultado el 28 de septiembre de 2022, desde https://docs.python.org/3/library/functions.html#int