Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2021-2

EXAMEN SUSTITUTORIO DE ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I

1. Determine si es verdadero o falso cada una de las siguientes proposiciones. Justifique adecuadamente sus respuestas.

   a) La matriz siguiente:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
   admite descomposición de Parlett.

   b) Determine si $s(x)$ es un spline cúbico natural:
$$s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1, & -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

   c) If the polynomial P_4 of degree ≤ 4 satisfying the following interpolation condition:
$$P_4(0) = 1, P_4(1) = -1, P_4'(0) = 2, P_4'(1) = 3, P_4''(1) = 0.$$
   so $P_4(0.5) = 0.035$.

   d) El número 0.6 no se puede representar de forma exacta en simple precisión pero sí en doble precisión.

   e) Con 5 bits en complemento a dos la representación de -16 es 10000.

Solución:

a) **Verdadero.**
Los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = 4.09124, \lambda_2 = -2.92646, \lambda_3 = 0.83522$, por tanto, es una matriz simétrica indefinida y así es posible factorizarla mediante el método de Parlett.

b) **Verdadero**.
Observe lo siguiente:
$$s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1, & -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1 & 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} s(x) = \lim_{x\to 0^+} s(x) = 1$$
$$s'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 - 3x, & -1 \le x \le 0 \\ \frac{3}{2}x^2 - 3x & 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} s'(x) = \lim_{x\to 0^+} s'(x) = 0$$
$$s''(x) = \begin{cases} -3x - 3, & -1 \le x \le 0 \\ 3x - 3 & 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} s''(x) = \lim_{x\to 0^+} s''(x) = -3$$

Se observa que " s " es cúbica en cada intervalo y es de clase C^2. Además:

$$s''(-1) = s''(1) = 0$$

por tanto es un spline cúbico natural.

c) **Falso.** De los datos se tiene que:

$$p_4(x) = -14x^4 + 37x^3 - 27x^2 + 2x + 1$$

y así resulta $p_4(0.5) = -1$.

d) **Falso.**
La representación binaria de 0.6 es no es finita, por tanto, no puede representarse de forma exacta ni en simple o doble precisión.

e) **Verdadero.**
En 5 bits, la representación en complemento a dos la representación de -16 viene dada por:

$$2^5 - 16 = 16 = 10000_2.$$

2. Se necesita cercar un terreno con adobe compuesto de nitrato, fosfato y potasio. Cada 10 m^2 se debe tener una cantidad de 140 gramos de nitrato, 190 gramos de fosfato y 105 gramos de potasio. Para esto se dispone de cuatro tipos de adobe con las siguientes características:

- Cada kilogramo del adobe tipo I cuesta 5 soles y está compuesto de 10 gramos de nitrato, 10 gramos de fosfato y 100 gramos de potasio.
- Cada kilogramo del adobe tipo II cuesta 10 soles y está compuesto de 10 gramos de nitrato, 100 gramos de fosfato y 30 gramos de potasio.
- Cada kilogramo del adobe tipo III cuesta 5 soles y está compuesto de 60 gramos de nitrato, 20 gramos de fosfato y 20 gramos de potasio.
- Cada kilogramo del adobe tipo IV cuesta 30 soles y está compuesto de 20 gramos de nitrato, 40 gramos de fosfato y 30 gramos de potasio.

¿Cuánto de cada adobe se debe mezclar para conseguir una buena cerca si se desea gastar solamente 54 soles por cada 10 m^2?. Escribir el modelo matemático representado por un sistema lineal. ¿ Se puede aplicar el método de Gauss-Seidel? Justifique su respuesta. En caso afirmativo, dé explícitamente el esquema iterativo y determine teóricamente el número de iteraciones a realizarse para obtener una tolerancia inferior a 10^{-3} al iniciar en $(1, 1, 1, 1)$. ¿Se puede aplicar el método de Jacobi? En caso afirmativo, dé el esquema iterativo explícito, realice una iteración y use su programa para estimar la solución exacta iniciando en $(0, 0, 0, 0)$ e indique el número de iteraciones realizado.

Solución:
De los datos se tiene la siguiente tabla:

Adobe	Nitrato (g)	Fosfato (g)	Potasio (g)	Costo	Cantidad (g)
Tipo I	10	10	100	5	x_1
Tipo II	10	100	30	10	x_2
Tipo III	60	20	20	5	x_3
Tipo IV	20	40	30	30	x_4
Total	140	190	105	54	

Por tanto, de la tabla se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 10x_2 + 60x_3 + 20x_4 &= 140 \\ 10x_1 + 100x_2 + 20x_3 + 40x_4 &= 190 \\ 100x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 30x_4 &= 105 \\ 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 30x_4 &= 54 \end{aligned}$$

al reordenar el sistema:

$$\begin{array}{rcl} 100x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 30x_4 & = & 105 \\ 10x_1 + 100x_2 + 20x_3 + 40x_4 & = & 190 \\ 10x_1 + 10x_2 + 60x_3 + 20x_4 & = & 140 \\ 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 30x_4 & = & 54 \end{array}$$

en forma matricial se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 30 & 20 & 30 \\ 10 & 100 & 20 & 40 \\ 10 & 10 & 60 & 20 \\ 5 & 10 & 5 & 30 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 105 \\ 190 \\ 140 \\ 54 \end{pmatrix}$$

Observe que la matriz A asociada al sistema es **diagonal dominante**, entonces los métodos de Gauss-Seidel y de Jacobi convergen.
El esquema iterativo de Gauss-Seidel viene dado por:

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{105 - 30x_2^{(k)} - 20x_3^{(k)} - 30x_4^{(k)}}{100} \\[2ex] x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{190 - 10x_1^{(k+1)} - 20x_3^{(k)} - 40x_4^{(k)}}{100} \\[2ex] x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{140 - 10x_1^{(k+1)} - 10x_2^{(k+1)} - 20x_4^{(k)}}{60} \\[2ex] x_4^{(k+1)} & = & \dfrac{54 - 5x_1^{(k+1)} - 10x_2^{(k+1)} - 5x_3^{(k+1)}}{30} \end{array}$$

El esquema iterativo de Jacobi viene dado por:

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{105 - 30x_2^{(k)} - 20x_3^{(k)} - 30x_4^{(k)}}{100} \\[2ex] x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{190 - 10x_1^{(k)} - 20x_3^{(k)} - 40x_4^{(k)}}{100} \\[2ex] x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{140 - 10x_1^{(k)} - 10x_2^{(k)} - 20x_4^{(k)}}{60} \\[2ex] x_4^{(k+1)} & = & \dfrac{54 - 5x_1^{(k)} - 10x_2^{(k)} - 5x_3^{(k)}}{30} \end{array}$$

La matriz asociada al método de Gauss-Seidel es:

$$M_{GS} = -(D{+}L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 100 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 60 & 0 \\ 5 & 10 & 5 & 30 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 30 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{100} & -\frac{9}{50} & -\frac{37}{100} \\ 0 & \frac{9}{200} & \frac{19}{300} & -\frac{133}{600} \\ 0 & \frac{13}{400} & \frac{149}{1800} & \frac{757}{3600} \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$\|M_{GS}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max\left\{\frac{4}{5}, \frac{29}{50}, \frac{33}{100}, \frac{293}{900}\right\} = \frac{4}{5} < 1$$

luego, tomando $\lambda = \dfrac{4}{5}$ y a partir de:

$$\|\hat{x} - x^{(n)}\|_\infty = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty < 10^{-3}$$

es decir:

$$n > \frac{\log\left(\dfrac{10^{-3}(1-\lambda)}{\|x_1 - x_0\|_\infty}\right)}{\log(\lambda)}$$

Por tanto, si:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(1)} = M_{GS}x^{(0)} + (D+L)^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \\ \frac{51}{40} \\ \\ \frac{419}{240} \\ \\ \frac{1501}{1440} \end{pmatrix}$$

luego:

$$x^{(1)} - x^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \\ \frac{11}{40} \\ \\ \frac{179}{240} \\ \\ \frac{61}{1440} \end{pmatrix} \Rightarrow \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \frac{3}{4}.$$

reemplazando se obtiene:

$$n > 36.8 \Rightarrow n = 37.$$

Por otro lado, en el método de Jacobi, iniciando en:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{105}{100} \\ x_2^{(1)} &= \frac{190}{100} \\ x_3^{(1)} &= \frac{140}{60} \\ x_4^{(1)} &= \frac{54}{30} \end{aligned}$$

El método de Jacobi converge en 23 iteraciones y la solución aproximada es:

$$x^{(23)} = \begin{pmatrix} 0.028865 \\ 1.088733 \\ 1.768180 \\ 1.138045 \end{pmatrix}$$

3. Demuestre que $g(x) = \pi + 0.5\sin(x/2)$ tiene un único punto fijo en $[0, 2\pi]$ y estime de forma teórica el número de iteraciones N necesarias para calcular el punto fijo con una precisión de 10^{-2}.
Solución:
$g([0, 2\pi]) \subset [0, 2\pi]$ y $g'(x) = 0.25\cos(x/2) \leq 0.25 < 1$, por lo tanto existe un único punto fijo c y la iteración

$$x_{k+1} = g(x_k), \forall k \geq 0, x_0 \in [0, 2\pi]$$

converge a c.

Ademas como $c = g(c)$

$$|x_{k+1} - c| = |g(x_k) - g(c)| \leq M|x_k - c| \leq M^{k+1}|x_0 - c| \leq M^k(b-a)$$

donde g es contractiva en $[a, b]$ y $M = 0.25$

$$|x_{k+1} - c| \leq \frac{2\pi}{4^{k+1}} < \frac{8}{4^{k+1}} < 10^{-2} \implies k+1 > \frac{2 + 3\log(2)}{2\log 2} \implies k > 3.8$$

Basta $N = 4$ iteraciones para aproximar c con un error de 10^{-2}.

4. Se modela la influencia de la temperatura (T), la concentración de clorido (c) y la concentración de oxígeno (o) por medio de la ecuación

$$o = f_3(T) + f_1(c)$$

donde f_3 es un polinomio de grado 3 y f_1 es un polinomio de grado 1. Utilice una aproximación por mínimos cuadrados con los datos mostrados a continuación para encontrar f_3 y f_1 y estime la concentración de oxígeno para una concentración de clorido de 15 g/L en $T = 12°C$

$T \circ C$	$c = 0$ g/L	$c = 10$ g/L	$c = 20$ g/L
0	14.6	12.9	11.4
5	12.8	11.3	10.3
10	11.3	10.1	8.96
15	10.1	9.03	8.08
20	9.09	8.17	7.35
25	8.26	7.46	6.73
30	7.56	6.85	6.20

Solución:
Si el modelo para la concentración de oxígeno es

$$o = a_1 + a_2 T + a_3 T^2 + a_4 T^3 + a_5 c$$

entonces para el conjunto de valores $\{T_i\}_{1 \leq i \leq 7}$, $\{c_j\}_{1 \leq j \leq 3}$ y la matriz o_{ij} formamos el sistema de ecuaciones

$$o_{ij} = a_1 + a_2 T_i + a_3 T_i^2 + a_4 T_i^3 + a_5 c_j$$

de 21 ecuaciones y 5 incógnitas.

$$M = \begin{pmatrix} I_7 & T & T^2 & T^3 & c_1 I_7 \\ I_7 & T & T^2 & T^3 & c_2 I_7 \\ I_7 & T & T^2 & T^3 & c_3 I_7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} o_{*,1} \\ o_{*,2} \\ o_{*,3} \end{pmatrix}$$

donde I_7 es una columna de valores 1 de longitud 7, y $o_{*,j}$ es la columna j de la matriz o. Asi planteamos el problema de mínimos cuadrados

$$Mx = b \implies M^T M x = M^T b$$

```
c = [0,10,20]';

T = [ 0 5 10 15 20 25 30]';

o = [ 14.6, 12.9 , 11.4 ;
12.8 , 11.3 , 10.3 ;
11.3 , 10.1 , 8.96 ;
10.1 , 9.03 , 8.08 ;
9.09 , 8.17 , 7.35 ;
8.26 , 7.46 , 6.73 ;
7.56 , 6.85 , 6.20 ];
```

```
I = ones([7,1]);

M = [I  T   T.^2  T.^3   c(1)*I ;
I  T   T.^2  T.^3   c(2)*I ;
I  T  T.^2  T.^3   c(3)*I ];

b = [ o(:,1); o(:,2); o(:,3) ] ;

x = (M'*M)\(M'*b);

funo = @(T,c,x) x(1)+ x(2)*T+ x(3)*T^2+ x(4)*T^3 + x(5)*c;

disp(x)

disp(funo(12,15,x))
```

tenemos $f_3(T) = 14.027 - 0.33642T + 0.0057444T^2 - 0.0004.3704T^3$, $f_1(c) = -0.10493c$, y para $T = 12$, $c = 15$, o$\approx$ 9.1678

UNI, 05 de Enero del 2022[1]

[1]Hecho en LaTeX