Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2021–III

EXAMEN FINAL DE ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I CM4F1 A

---

1. Establezca el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   (a) La siguiente matriz es de rango completo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (b) El método de Gauss-Seidel no converge para el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 - x_3 &= -8 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 23 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 17 \end{aligned}$$

   (c) La matriz de iteración para el método de relajación es:

$$M = (D + wL)^{-1}[(1-w)D - wU].$$

   (d) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ no admite descomposición de Cholesky.

   (e) Una matriz semidefinida positiva admite descomposición de Parlet.

2. Justifique adecuadamente el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   (a) La factorización QR de Gram-Schmid de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 9 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

   viene dada por:

$$Q = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{7} & \dfrac{3}{7} \\ -\dfrac{3}{7} & -\dfrac{6}{7} \\ \dfrac{6}{7} & -\dfrac{2}{7} \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

   Solución:
   La proposición es **FALSA**. Observe que:

$$QR = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} \neq A$$

(b) Para el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2020 \\ 2021 \\ 2022 \end{pmatrix}$$

El método del gradiente conjugado garantiza la convergencia en al menos 3 iteraciones.

Solución:

La convergencia del método para una matriz simétrica definida positiva ocurre en a lo más 3 iteraciones. Por tanto, la proposición es **Falsa**.

(c) La solución del sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es equivalente a la solución de minimizar la siguiente función:

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Solución:

La solución del sistema lineal es equivalente a la solución de minimizar la siguiente función:

$$h(x) = \frac{1}{2}g(x) = x^T Ax - 2x^T b = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$g(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 2x_2$$

o

$$h(x) = x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1 + x_2.$$

por tanto, la proposición es **Falsa**.

(d) Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La transformación de Givens que anula el elemento a_{31} viene dada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz de Givens $G(1,3)$ pedida tiene la forma:

$$G(1,3) = \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}$$

y debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c-s \\ 0 \\ -s-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c = -s$$

luego, como $c^2 + s^2 = 1$ resulta:

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad s = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

por tanto, la matriz pedida es:

$$G(1,3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

y así la proposición es **VERDADERA**.

(e) Sea A una matriz simétrica y definida positiva con autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$ y $P = diag(A)$. Considere el método iterativo:

$$Px^{(k+1)} = (P - wA)x^{(k)} + wb$$

Luego, el método iterativo dado es consistente con el sistema $Ax = b$ para todo $w \in \mathbb{R}$.

Solución:

La matriz de iteración M y el vector d del esquema iterativo dado son:

$$M = P^{-1}(P - wA), \quad d = wP^{-1}b$$

luego:

$$Mx + d = P^{-1}(P - wA)x + wP^{-1}(Ax) \Rightarrow Mx + d = x.$$

Por tanto, la proposición es **VERDADERA**.

3. Un servicio meteorológico indica que las lluvias que se esperan para el martes y el miércoles suman 13 litros por metro cuadrado, otro dice que el martes caerán 9 litros más que el miércoles y la previsión de un tercer servicio es que el martes lloverá el doble que el miércoles. Suponiendo que los tres servicios tienen igual fiabilidad, y denotando por x la estimación del número de litros por metro cuadrado que caerá el martes e y denota la estimación del número de litros por metro cuadrado que caerá el miércoles. ¿Cuál de los siguientes sistemas modela el problema?. Justifique adecuadamente:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Para el sistema correcto, use transformaciones de Householder para determinar la solución de mínimos cuadrados y la suma cuadrática de errores.

Solución:
El sistema que representa al problema viene dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Primera iteración:

$$A_0 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|a_1\| = \sqrt{3}, \quad sgn(a_{11}) = 1$$

luego:

$$v_1 = a_1 + sgn(a_{11})\|a_1\|e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = I - 2\frac{v_1 v_1^T}{v_1^T v_1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} & -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} & -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} & \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3} & -\frac{1}{\sqrt{3}+3} \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} & -\frac{1}{\sqrt{3}+3} & \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3} \end{pmatrix}$$

luego:

$$A_1 = H_1 A_0 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2} & \frac{4\sqrt{3}+6}{3^{\frac{3}{2}}+6} \\ 0 & -\frac{7\sqrt{3}+9}{23^{\frac{3}{2}}+12} \\ 0 & -\frac{10\sqrt{3}+17}{5\sqrt{3}+9} \end{pmatrix}$$

Iteración 2:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7\sqrt{3}+9}{23^{\frac{3}{2}}+12} \\ -\frac{10\sqrt{3}+17}{5\sqrt{3}+9} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7\sqrt{3}+9}{23^{\frac{3}{2}}+12} \\ -\frac{10\sqrt{3}+17}{5\sqrt{3}+9} \end{pmatrix}, \quad \|a_2\| = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}, \quad sgn(a_{11}) = -1$$

luego:

$$v_2 = a_2 - \|a_2\|e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\left(2\sqrt{3}+4\right)\sqrt{14}+3^{\frac{3}{2}}+7}{4\sqrt{3}+6} \\ -\frac{10\sqrt{3}+17}{5\sqrt{3}+9} \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$H_2 = \begin{pmatrix} -0.4366980798379229 & -0.8996081297241988 \\ -0.8996081297241988 & 0.4366980798379232 \end{pmatrix}$$

y así:

$$A_3 = H_2A_2 = \begin{pmatrix} 2.160246899469286 \\ 0 \end{pmatrix}$$

redefiniendo H_2 resulta:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.4366980798379231 & -0.8996081297241988 \\ 0.0 & -0.8996081297241988 & 0.4366980798379231 \end{pmatrix}$$

por tanto la matriz ortogonal Q y la matriz triangular superior R resultan:

$$Q = H_2H_1 = \begin{pmatrix} -0.5773502691896258 & -0.5773502691896258 & -0.5773502691896258 \\ 0.7715167498104597 & -0.154303349962092 & -0.6172133998483677 \\ 0.2672612419124244 & -0.8017837257372732 & 0.5345224838248488 \end{pmatrix}$$

$$QA = R = \begin{pmatrix} -1.732050807568877 & 1.154700538379251 \\ 0 & 2.160246899469287 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución de mínimos cuadrados se obtiene al resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1.732050807568877 & 1.154700538379251 \\ 0 & 2.160246899469287 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12.70170592217176 \\ 8.640987597877148 \end{pmatrix}$$

Resolviendo por sustitución regresiva se obtiene:

$$y = 4 \Rightarrow x = \frac{c_1 - (R_1)_{12}y}{(R_1)_{11}} = 9.9999 \approx 10.$$

Y la suma cuadrática de errores es:

$$SCE = \|d\|^2 = 3.741657386773941^2 \approx 13.9999 \approx 14.$$

4. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Para resolver el sistema $Ax = b$ se usa el siguiente método iterativo:

$$Mx^{(k+1)} + Nx^{(k)} = b.$$

(a) Determine condiciones sobre α, β y γ que garanticen la convergencia de la sucesión $\{x^{(k)}\}$ para todo $x^{(0)}$ y todo b.

(b) Si $\alpha = \beta = \gamma = -1$, ¿qué sucede?

Solución:

(a) Sea T la matriz asociada al método iterativo, luego:

$$T = -M^{-1}N = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta - \alpha & \gamma & 0 \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico:

$$P(\lambda) = -\lambda(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)$$

así los autovalores son:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \alpha, \quad \lambda_3 = \beta,$$

por tanto, el radio espectral:

$$\rho(T) = \max\{0, |\alpha|, |\gamma|\}$$

El método converge si y sólo si $\rho(T) < 1$, por tanto, el método converge para:

$$\beta \in \mathbb{R}, \quad \max\{\alpha, \gamma\} < 1.$$

(b) Si $\alpha = \beta = \gamma = -1$ entonces:

$$\rho(T) = 1,$$

por tanto, el método iterativo no converge.

5. Determine la descomposición SVD de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:
Observe que:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces sus autovalores son:

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 2$$

por tanto, sus valores singulares son:

$$\sigma_1 = 3, \quad \sigma_2 = \sqrt{2}.$$

A partir de la descomposición en valores singulares:

$$A = U\Sigma V^* \Rightarrow A^T A = V\Sigma\Sigma^* V^* \Rightarrow (A^T A)V = \Sigma\Sigma^* V$$

es decir, las columnas de V son los autovectores de $A^T A$. Luego, para $\lambda_1 = 9$ resulta:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es su respectivo autovalor. Para $\lambda_2 = 2$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es su respectivo autovalor. Por tanto, las matrices V y Σ son dadas por:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la descomposición singular se obtiene:

$$AV = U\Sigma \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_{11} & \sqrt{2}u_{12} \\ 3u_{21} & \sqrt{2}u_{22} \\ 3u_{31} & \sqrt{2}u_{32} \end{pmatrix}$$

Sean U^1, U^2 y U^3 las columnas de la matriz U, luego:

$$3U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{2}U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U^1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad U^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además debe de cumplirse:

$$\langle U^1, U^3 \rangle = 0, \quad \langle U^2, U^3 \rangle = 0, \quad \|U^3\| = 1$$

reemplazando:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}u_{13} + \frac{2}{3}u_{23} + \frac{1}{3}u_{33} &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}u_{13} - \frac{1}{\sqrt{2}}u_{23} &= 0 \\ u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow U^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

por tanto, la matriz U resulta:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Puede verificarse que se cumple:

$$U\Sigma V = A.$$

El profesor[1]
Lima, 25 de Marzo del 2022.

[1] Hecho en LaTeX