Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática — Ciclo 2022-1

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Tercera Práctica Calificada

---

1. **Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:**

   (a) [1 *pto.*] Si la eliminación gaussiana aplicado a la matrix A no realiza niguna permutación entonces en cada etapa del algortimo se obtiene la descomposición LU de cada submatriz principal.

   (b) [1 *pto.*] Una matriz invertible posee una única descompsición SVD.

   (c) [1 *pto.*] Dados $A, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, siendo P una matriz de permutación entonces PAP y A tienen los mismos elementos (quiza en distinto orden) en la primera fila y en la primera columna.

   (d) [1 *pto.*] Es posible aplicar el algoritmo Doolitle o Crout a las matrices semidefinidas positivas.

   Solución:

   (a) [1 *pto.*] (V) La multiplicación de las matrices elementales en la etapa k tiene la estructrura $\begin{pmatrix} L_k & 0_{k,n-k} \\ \tilde{L}_k & I_{n-k,n-k} \end{pmatrix}$, considerando A_k la $k\times k$ matriz principal de A, entonces $A = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$ Luego en la etapa k del algoritmo, se cumple que

   $$\begin{pmatrix} L_k & 0_{k,n-k} \\ \tilde{L}_k & I_{n-k,n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_k & E_k \\ 0_{n-k,k} & F_k \end{pmatrix}$$

   siendo T_k triangular superior y L_k triangular inferior con elementos en diagonal igual a 1. Por tanto $A_k = L_k^{-1}T_k$ obteniendo su descomposición LU.

   (b) [1 *pto.*] (F) sea $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, se cumple

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & c \\ c & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & c & 0 \\ c & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c) [1 *pto.*] (F)

   Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene $PAP = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ siendo 4 un elemento distinto

(d) [1 *pto.*] (F) Ambos algoritmos necesitan que ambos L y U tengan elementos no nulos en su diagonal, por tanto la matriz $A = LU$ debe ser invertible. Luego considerando $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ semidefinida positiva y no invertible producirá error al aplicar el algoritmo.

2. Dado

$$1 + 8 + 27 + 64 + \cdots + n^3.$$

Se desea obtener el resultado de dicha suma.

(a) [1 *pto.*] Modele el sistema.

(b) [1 *pto.*] Determine el número de condición.

(c) [1 *pto.*] Determine la solución usando los métodos de Gauss y LU.

(d) [1 *pto.*] Calcule la estabilidad dada en (c).

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sea $P(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$. Evaluando

$$\begin{aligned}
n = 1 &\implies P(1) = 1 = a + b + c + d + e \\
n = 2 &\implies P(2) = 9 = 16a + 8b + 4c + 2d + e \\
n = 3 &\implies P(3) = 36 = 81a + 27b + 9c + 3d + e \\
n = 4 &\implies P(4) = 100 = 256a + 64b + 16c + 4d + e \\
n = 5 &\implies P(5) = 225 = 625a + 125b + 25c + 5d + e
\end{aligned}$$

El sistema es

$$\begin{bmatrix} 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 \\ 100 \\ 36 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] Sea $\|A\|_\infty = 781$.
Luego, determinando su inversa, resulta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0416668 & -0.1666671 & 0.2500009 & -0.1666675 & 0.041667 \\ -0.4166667 & 1.8333335 & -3.0000003 & 2.166667 & -0.5833335 \\ 1.4583332 & -6.8333329 & 12.249999 & -9.8333325 & 2.958333 \\ -2.0833333 & 10.166667 & -19.5 & 17.833333 & -6.4166665 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

con $\|A^{-1}\| = 55.999999$, donde el número de condición es:

$$Cond_\infty(A) = 43735.999$$

(c) [1 *pto.*] Por el método de Gauss, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 0 & 12.8 & 5.76 & 1.952 & 0.5904 \\ 0 & 0 & 1.2 & 1.14 & 0.753 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.585 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 \\ 7.84 \\ 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se tiene la solución:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por el método LU, se tienen:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 625 & 125 & 12 & 5 & 1 \\ 0 & 12.8 & 5.76 & 1.952 & 0.5904 \\ 0 & 0 & 1.2 & 1.14 & 0.753 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.585 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4096 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0256 & 0.375 & 1 & 0 & 0 \\ 0.0016 & 0.0625 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.1296 & 0.84375 & 0.75 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se tiene

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente se tiene:

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

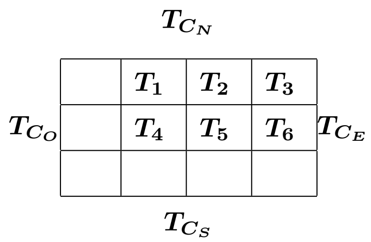
(d) [1 *pto.*] Para ambos métodos se cumple

$$\frac{0}{225} \times \frac{1}{43735.999} \leq \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 43735.999 \times \frac{0}{225}$$

$$\Longrightarrow \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0$$

Para este problema los dos métodos resultan ser buenos, a pesar que la condición es un valor grande.

3. La Transferencia de Calor es determinado por la temperatura en estado estable de una placa delgada cuando se conoce la temperatura alrededor de la placa. Suponga que la placa de la siguiente figura representa una sección trasversal perpendicular a la placa



Sean T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 y T_6 las temperaturas interiores de los nodos de la red. La temperatura en un nodo es aproximadamente igual al promedio de las temperaturas de los cuatro nodos más cercanos arriba, abajo, a la derecha y a la izquierda. Así por ejemplo $T_1 = \dfrac{T_{C_N} + T_2 + T_4 + T_{C_O}}{4}$.

(a) [1 *pto.*] Modele el sistema de las temperaturas sabiendo que $T_{C_N} = 25^o$, $T_{C_E} = 37^o$, $T_{C_S} = 10^o$ y $T_{C_O} = 31^o$.

(b) [1 *pto.*] Determine el número de condición del problema.

(c) [1 *pto.*] Determine la solución usando los métodos de Cholesky.

(d) [1 *pto.*] ¿Qué puede decir de la calidad de la solución aproximada obtenida?

Solución:

(a) [1 *pto.*] El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 25 \\ 62 \\ 41 \\ 10 \\ 47 \end{bmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] Sea $\|A\|_\infty = 7$.

Luego, determinando su inversa, resulta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2948240 & 0.0931677 & 0.0281573 & 0.0861284 & 0.0496894 & 0.0194617 \\ 0.0931677 & 0.3229814 & 0.0931677 & 0.0496894 & 0.1055901 & 0.0496894 \\ 0.0281573 & 0.0931677 & 0.2948240 & 0.0194617 & 0.0496894 & 0.0861284 \\ 0.0861284 & 0.0496894 & 0.0194617 & 0.2948240 & 0.0931677 & 0.0281573 \\ 0.0496894 & 0.1055901 & 0.0496894 & 0.0931677 & 0.3229814 & 0.0931677 \\ 0.0194617 & 0.0496894 & 0.0861284 & 0.0281573 & 0.0931677 & 0.2948240 \end{bmatrix}$$

con $\|A^{-1}\| = 0.7142857$, donde el número de condición es:

$$Cond_\infty(A) = 4.9999999$$

(c) [1 *pto.*] Por el método de Cholesky, se tiene

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9364917 & -0.5163978 & -0.1290994 & -0.5163978 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9321836 & -0.0345033 & -0.1380131 & -0.5175492 \\ 0 & 0 & 0 & 1.9318755 & -0.5546054 & -0.0092434 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8457244 & -0.5832696 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8416987 \end{bmatrix}$$

La solución es:

$$x = \begin{bmatrix} 25.52795 \\ 24.496894 \\ 27.52795 \\ 21.614907 \\ 19.931677 \\ 23.614907 \end{bmatrix}$$

(d) [1 *pto.*] Para ambos métodos, se cumple:

$$\frac{3\times 10^{-6}}{62} \times \frac{1}{4.9999999} \le \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le 4.9999999 \times \frac{3\times 10^{-6}}{62}$$

$$\Longrightarrow \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0.$$

Para este problema los dos métodos resultan ser buenos, dado que la condición es un valor pequeño.

4. (a) [1 *pto.*] Mostrar que en la etapa $k+1$ del método Parlett y Reid, la matrix $A^{(k)}$ y la permutación P_{k+1}, satisfacen que la matriz $P_{k+1}A^{(k)}P_{k+1}$ y $A^{(k)}$ tienen los mismos elementos (quiza en distinto orden) en la fila y columna $k-$ésima. Realizar un esbozo de ambas matrices.

(b) [3 *pts.*] Dado el sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Resolverlo mediante el método Parlett y Reid.

Solución:

(a) [1 *pto.*]

$$A^{(k)} = \left(\begin{array}{c|c} T_k & \begin{matrix} 0_{k-1,n-k} \\ b \end{matrix} \\ \hline 0_{n-k,k-1} \quad a & B \end{array}\right), \quad P_{k+1} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \hat{P} \end{pmatrix}$$

donde T_k es tridiagonal de orden k, $a \in \mathbb{R}^{(n-k)\times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{1\times(n-k)}$, $\hat{P}$ es una matriz de intercambio de filas. Luego

$$P_{k+1}A^{(k)}P_{k+1} = \left(\begin{array}{cc|c} & T_k & \begin{array}{c} 0_{k-1,n-k} \\ b\hat{P} \end{array} \\ \hline 0_{n-k,k} & \hat{P}a & \hat{P}B\hat{P} \end{array}\right)$$

Al ser $\hat{P}$ una matriz de intercambio de filas, $\hat{P}a$ y $b\hat{P}$ tienen los mismos elemtos que a y b. Por tanto $P_{k+1}A^{(k)}P_{k+1}$ y $A^{(k)}$ tienen los mismos elementos en la fila y columna $k-$ésima.

(b) [$3\,pts.$] Etapa 1: $P_1 = [e_1, e_3, e_2, e_4]$ y $M_1 = I_4 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} e_2$, luego

$$A^{(2)} := M_1 P_1 A P_1 M_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 2/3 & 13/9 & -1/9 \\ 0 & 4/3 & -1/9 & 7/9 \end{pmatrix}$$

Etapa 2: $P_2 = [e_1, e_2, e_4, e_3]$ y $M_2 = I_4 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} e_3$, luego

$$A^{(3)} := M_2 P_2 A^{(2)} P_2 M_2^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & 4/3 & 7/9 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 7/4 \end{pmatrix}$$

Por tanto con $P = P_2 P_1 = [e_1, e_4, e_2, e_3]$ y $L = (M_2 P_2 M_1 P_1 P^t)^{-1}$ se cumple $PAP^t = LTL^t$

$$L = P_2 M_1^{-1} P_2 M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos los sistemas $Lz = Pb$, $Tw = z$, $L^t y = w$ y finalmente la solución es $x = P^t y$.
$z = [11, 9, 5, 5/2]^t, \quad w = [1, 10/3, 2, 2]^t, \quad y = [1, 2, 1, 2]^t \quad x = [1, 2, 2, 1]^t.$

01 de Junio del 2022