Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Quinta Práctica Calificada

1. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

(a) [1 *pto.*] Si f es continua tal que $f(a)f(b) < 0$ con $a < b$, entonces es posible aplicar el algoritmo de la regla falsa en $[a, b]$.

(b) [1 *pto.*] Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ no nulos, existe una matriz Q con columnas ortogonales tal que $Qx = y$.

(c) [1 *pto.*] Dado $b \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $A^T Ax = A^T b$ si y solo si $Ax = b - P_{\ker(A^T)}b$, donde $P_{\ker(A^T)}$ es la proyección sobre el nucleo de A^T

(d) [1 *pto.*] Dado una matriz cuadrada M con columnas no nulas, existe P producto de trasformaciones de Givens tal que PM es una matriz diagonal.

Solución:

(a) [1 *pto.*] (F) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$, es continua con $f(-1)f(1) < 0$, el primer iterado es

$$x^1 = \frac{\dfrac{-1}{1} - \dfrac{1}{-1}}{\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{-1}} = 0,$$

pero $x^1 \notin Dom(f)$ por tanto no es posible continuar con el algoritmo.

(b) [1 *pto.*] (V) Sea Q la matriz de housholder ($Q^TQ = QQ^T = I$) tal que $Q\dfrac{x}{||x||} = \dfrac{y}{||y||}$. Luego considerando $S = \dfrac{||y||}{||x||}Q$ se cumple que $Sx = y$ y $S^TS = SS^T = \dfrac{||y||^2}{||x||^2}I_n$ (columnas ortogonales).

(c) [1 *pto.*] (V) Se sabe que $A^TAx = A^Tb$ si y solo si $||Ax - b|| = \min_z ||Az - b||$ si y solo si $Ax = P_{Im(A)}(b) = b - P_{(Im(A))^\perp}(b) = b - P_{\ker(A^T)}(b)$.

(d) [1 *pto.*] (F) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ supongamos que existe P como en (d) tal que $PM = diag(c_1, c_2)$, como P es una proyección $c_1 = \left\| \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$, de igual manera $c_2 = 1$, por tanto al ser P invertible se obtiene que M es invertible lo cual es una contradicción.

2. **Un comerciante vende quesos de 3 tipos curado, semicurado y tierno. Los precios de cada uno de ellos son S/ 12, S/ 10 y S/ 9 el kilogramo, respectivamente. Se sabe que el total de kilos vendidos son 44, siendo el importe total de la venta S/ 436 y que el número de kilos vendidos del queso semicurado es el doble que del curado. Ayudale al comerciante ha determinar los kilos de queso que vendió.**

(a) **[1 *pto.*] Modele el problema.**

(b) **[1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Householder.**

(c) **[1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Givens.**

(d) **[1 *pto.*] Indique que método recomienda.**

Solución:

(a) **[1 *pto.*] Sean:**

$$\begin{aligned} x &: \text{ Queso tipo curado.} \\ y &: \text{ Queso tipo semicurado.} \\ z &: \text{ Queso tipo tierno.} \end{aligned}$$

Donde, el sistema ha resolver es:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 44 \\ 12x & + & 10y & + & 9z & = & 436 \\ 2x & - & y & + & 0z & = & 0 \end{array}$$

(b) **[1 *pto.*] Por el método de Householder se obtienen las matrices siguientes:**

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.999994444491 & 0 & -0.003333314815 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.003333314815 & 0 & 0.999994444491 \end{bmatrix} \wedge H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.999999500006 & 0.000999993944 \\ 0 & 0.000999993944 & 0.999999500006 \end{bmatrix}$$

Luego

$$H_2H_1A = R = \begin{bmatrix} 12.20655561573 & 9.748859854177 & 8.929627933658 \\ 0 & 2.638130312101 & 1.495873311008 \\ 0 & 0 & -0.155267523511 \end{bmatrix}$$

$$H_1H_2 = Q = \begin{bmatrix} 0.081923192052 & 0.076320066888 & -0.993712150471 \\ 0.983078304623 & 0.157728138236 & 0.093160514107 \\ 0.163846384104 & -0.984528862857 & -0.062107009404 \end{bmatrix}$$

$$Q'b = c = \begin{bmatrix} 432.2267612658 \\ 72.12755121377 \\ -3.105350470223 \end{bmatrix}$$

Al resolver, se tiene

$$x = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(c) [1 *pto.*] **Por el método de Givens tenemos las matrices siguientes:**

$$G_{21} = \begin{bmatrix} 0.083045479854 & -0.996545758245 & 0 \\ 0.996545758245 & 0.083045479854 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G_{31} = \begin{bmatrix} 0.98648586529 & 0 & -0.163846384104 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.163846384104 & 0 & 0.98648586529 \end{bmatrix}$$

y

$$G_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.062957830000 & 0.998016188066 \\ 0 & -0.998016188066 & -0.062957830000 \end{bmatrix}$$

Luego

$$G_{32}G_{31}G_{21}A = R = \begin{bmatrix} 12.20655561573 & 9.748859854177 & 8.929627933658 \\ 0 & -2.638130312101 & -1.495873311008 \\ 0 & 0 & 0.155267523511 \end{bmatrix}$$

$$G_{21}G_{31}G_{32} = Q = \begin{bmatrix} 0.081923192052 & -0.076320066888 & 0.993712150471 \\ 0.983078304623 & -0.157728138236 & -0.093160514107 \\ 0.163846384104 & 0.984528862857 & 0.062107009404 \end{bmatrix}$$

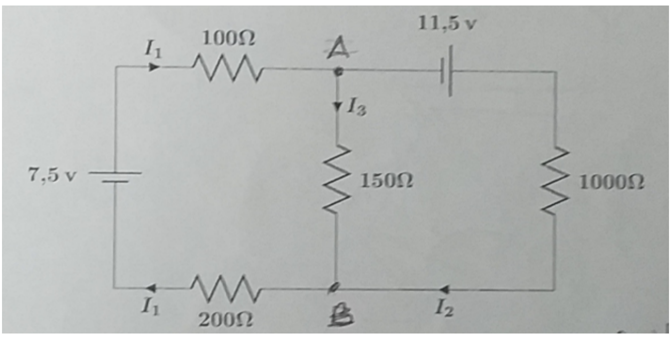
$$Q'b = c = \begin{bmatrix} 432.2267612658 \\ -72.12755121377 \\ 3.105350470223 \end{bmatrix}.$$

Al resolver, se tiene:

$$x = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(d) [1 *pto.*] **Se recomienda el método de Householder para este problema en particular, porque se reduce el número de operaciones.**

3. Dado el circuito de una red



Determine la solución aproximada del circuito, según el siguiente requerimiento.

(a) [1 *pto.*] Modele el problema.

(b) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Gram-Schmidt.

(c) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Gram-Schmidt Modificado.

(d) [1 *pto.*] Indique que método recomienda.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean

$$\begin{aligned} I_1 &: \text{Intensidad 1.} \\ I_2 &: \text{Intensidad 2.} \\ I_3 &: \text{Intensidad 3.} \end{aligned}$$

Por la segunda Ley de Kirchhoff:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 300I_1 & & & + & 150I_3 & = & 7.5 \\ & & 1000I_2 & - & 150I_3 & = & 11.5 \end{array}$$

Por la primera Ley de Kirchhoff:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Donde, el sistema es

$$\begin{array}{rcrcrcl} 300I_1 & & & + & 150I_3 & = & 7.5 \\ & & 1000I_2 & - & 150_3 & = & 11.5 \\ I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \end{array}$$

(b) [1 *pto.*] Por el método de Gram-Schmidt, tenemos:

$$E = \begin{bmatrix} 0.999994444491 & 0.000003333295 & 0.003333313148 \\ 0 & 0.999999500006 & -0.000999993944 \\ 0.003333314815 & -0.000999988389 & -0.999993944499 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 300.001666662 & -0.003333314815 & 149.9958333588 \\ 0 & 1000.000499994 & -149.9984250183 \\ 0 & 0 & 1.649990008424 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 7.499996666569 \\ 11.49999425007 \\ 0.013499994638 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.020909090909 \\ 0.012727272727 \\ 0.008181818182 \end{bmatrix}$$

(c) [1 *pto.*] Por el método de Gram-Schmidt Modificado, tenemos:

$$E = \begin{bmatrix} 0.999994444491 & 0.000003333295 & 0.003333313148 \\ 0 & 0.999999500006 & -0.000999993944 \\ 0.003333314815 & -0.000999988389 & -0.999993944499 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 300.001666662 & -0.003333314815 & 149.9958333588 \\ 0 & 1000.000499994 & -149.9984250183 \\ 0 & 0 & 1.649990008424 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 7.499996666569 \\ 11.49999425007 \\ 0.013499994638 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.020909090909 \\ 0.012727272727 \\ 0.008181818182 \end{bmatrix}$$

(d) [1 *pto.*] Ambos métodos son eficientes para el problema presentado.

4. Dado una función $f : [0, +\infty) \to]0, +\infty)$ diferenciable acotado. Se busca determinar $p > 0$ tal que sean iguales las áreas bajos las gráficas de f y la función identidad $y = x$, tomados desde el origen hasta p.

(a) [1 *pto.*] Muestre que bajo las hipótesis sobre f, existe p.

(b) [0.5 *pts.*] Si $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + 1$, verificar que f cumple las hipótesis del problema e indique el intervalo I donde aplicar el método de la bisección para aproximar p, obtener la información de I a partir del gráfico conjunto de f y la función identidad.

(c) [2.5 *pts.*] De (b) aproxime p, utilizando el método de la bisección y regla de falsa modificada ($\alpha = \frac{1}{2}$), con una tolerencia de 10^{-5}.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Considerar la función

$$\psi(x) = \int_0^x f(s)\,ds - \frac{x^2}{2},$$

la cual por TFC es continua en $[0, +\infty)$. La existencia de p es equivalente a mostrar la existencia de un cero de ψ.

Se tiene que $f(x) - x$ es continua, luego al ser $f(0) - 0 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) - x > \frac{f(0)}{2},\ \forall x \in [0, \delta[,$$

luego integrando se tiene $\psi(\delta) > 0$. Por otro lado como $f(s) \leq M, \forall s \in [0, +\infty)$, se obtiene que

$$\int_0^x f(s)\,ds - \frac{x^2}{2} \leq Mx - \frac{x^2}{2} \ \Rightarrow\ \psi(3M) < 0.$$

Finalmente el TFI garantiza la existencia de un cero de ψ en el intervalo $[\delta, 3M]$.

(b) [0.5 *pts.*] Se observa que f es diferenciable con $f(x) \geq 1, \forall x \in [0, +\infty)$. Ademas es acotado, $0 < f(x) < \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$. De la prueba anterior se observa que el intervalo donde aplicar los metodos serian $[c, d]$, siendo $c < x_0$, siendo x_0 el menor escalar tal que $f(x_0) = x_0$; y $d > 2M$. Por tanto consideraremos el intervalo $[1, 3]$, para hallar el zero de $\psi(x) = \frac{1}{2}ln(x^2+1) + x - \dfrac{x^2}{2}$

(c) [2.5 *pts.*] Al aplicar el método de la bisección se obtiene la tabla:

k	a_k	b_k	$Error\ b_k - a_k$
0	**1**	**3**	**2**
1	**2**	**3**	**1**
2	**2.5**	**3**	**0.5**
$\vdots$			
18	**2.77937316**	**2.77938079**	**0.00000762**

Al aplicar el método de la regla de falsa modificada ($\alpha = \frac{1}{2}$) se obtiene la tabla:

k	a_k	b_k	$Error\ \lvert b_k - a_k \rvert$	$Error\ \lvert f(c_k) \rvert$
0	**2**	**3**	**2**	**0.458091**
1	**3**	**2.416526**	**0.583473**	**0.045563**
2	**3**	**2.747816**	**0.252183**	**0.030453**
$\vdots$				
5	**2.800065**	**2.779376**	**0.020689**	**0.000002685899**
6	**2.779376**	**2.779379**	**0.000003**	**0.000000000001**

06 de Julio del 2022