T检验的不足

只是检验一个总体（方差未知）的均值是否为某一个常值，或检验两个总体（总体的方差未知且相等）的均值是否相等，用T统计量检验。

当需要检验多个总体（3个或3个以上）的均值是否相等（总体的方差是未知且相等的），统计量如何选择？

Fisher在20世纪20年代提出了方差分析，用于检验多个总体的均值有无差异。为了纪念Fisher，故称方差分析为F检验。

第五章　方差分析（Analysis of Variance, 简称ANOVA）与试验设计

5.1　单因素方差分析

5.2　两因素方差分析

*5.3　正交试验设计

5.1　单因素方差分析

一、数学模型

二、离差平方和分解与显著性检验

三、参数估计

一、数学模型

1、问题引入

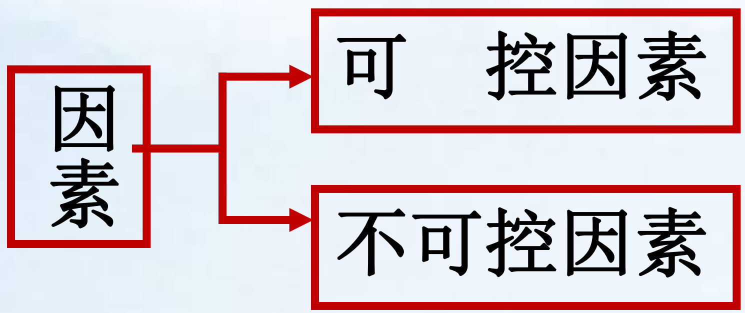
例如

机器设备
反应时间
原料成分
溶液浓度
化工产品的数量和质量
原料剂量
操作水平
反应温度
压力

方差分析——根据试验的结果进行分析,鉴别各个有关因素对试验结果的影响程度.

试验指标——试验中要考察的指标.

因　　素——影响试验指标的条件.



水　　平——因素所处的状态.

单因素试验——在一项试验中只有一个因素改变.

多因素试验——在一项试验中有多个因素在改变.

例1 设有三台机器, 用来生产规格相同的铝合金薄板.取样,测量薄板的厚度精确至千分之一厘米.得结果如下表所示.

表 铝合金板的厚度

机器I	机器II	机器III
0.236	0.257	0.258
0.238	0.253	0.264
0.248	0.255	0.259
0.245	0.254	0.267
0.243	0.261	0.262

试验指标: 薄板的厚度　　　　　　**因素**:机器

水平: 不同的三台机器是因素的三个不同的水平

表　铝合金板的厚度

机器I	机器II	机器III
0.236	0.257	0.258
0.238	0.253	0.264
0.248	0.255	0.259
0.245	0.254	0.267
0.243	0.261	0.262

假定除机器这一因素外,其他条件相同,属于**单因素试验**.

试验目的:考察各台机器所生产的薄板的厚度有无显著的差异.即考察机器这一因素对厚度有无显著的影响.

例2 下表列出了随机选取的、用于计算器的四种类型的电路的响应时间（以毫秒计）.

表 电路的响应时间

类型I	类型II	类型III	类型Ⅳ
19	20	16	18
22	21	15	22
20	33	18	19
18	27	26	

试验指标:电路的响应时间 **因素**:电路类型

水平:四种电路类型为因素的四个不同的水平

单因素试验

试验目的:考察电路类型这一因素对响应时间有无显著的影响.

例3　一火箭用四种燃料,三种推进器作射程试验.每种燃料与每种推进器的组合各发射火箭两次,得射程如下（以海里计）.

表　火箭的射程

推进器(B)		B_1	B_2	B_3
燃料(A)	A_1	58.2 52.6	56.2 41.2	65.3 60.8
	A_2	49.1 42.8	54.1 50.5	51.6 48.4
	A_3	60.1 58.3	70.9 73.2	39.2 40.7
	A_4	75.8 71.5	58.2 51.0	48.7 41.4

表 火箭的射程

推进器(B)		B_1	B_2	B_3
燃料(A)	A_1	58.2 52.6	56.2 41.2	65.3 60.8
	A_2	49.1 42.8	54.1 50.5	51.6 48.4
	A_3	60.1 58.3	70.9 73.2	39.2 40.7
	A_4	75.8 71.5	58.2 51.0	48.7 41.4

试验指标:射程

因素:推进器和燃料

双因素试验

水平:推进器有3个,燃料有4个

试验目的因素对火箭射程的有无显著影响

回顾例1

铝合金板的厚度

机器I	机器II	机器III
0.236	0.257	0.258
0.238	0.253	0.264
0.248	0.255	0.259
0.245	0.254	0.267
0.243	0.261	0.262

问题分析 在每一个水平下进行独立试验,结果是一个随机变量.将数据看成是来自三个总体的样本值.

设总体均值分别为 μ_1, μ_2, μ_3.

检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$,

$H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3$不全相等.

背景：进一步假设各总体均为正态变量,

且各总体的方差相等,

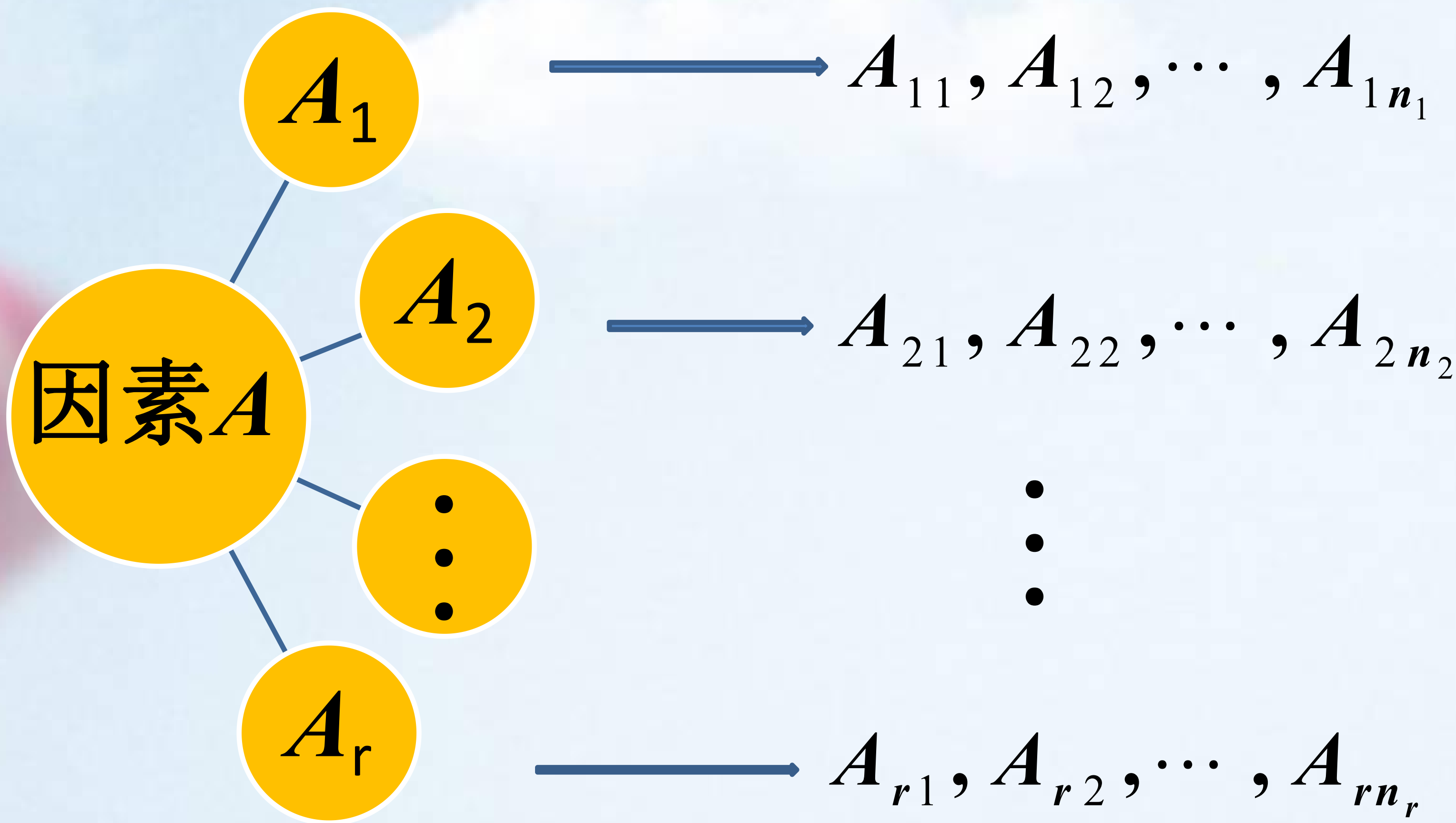
但参数均未知.

问　　题——检验同方差的多个正态总体均值是否相等.

解决方法——方差分析法,一种统计方法.

2、数学模型

设因素A有r个水平$A_1, A_2, \cdots, A_r$，在水平$A_i(i = 1, 2, \cdots, r)$下，进行$n_i(n_i \geq 2)$次独立试验，



(1)各个水平$A_i(i=1,2,\cdots,r)$下的样本$X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{in_i}$来自正态总体$N(\mu_i,\sigma^2)$, μ_i与σ^2均未知;

$X_{11},X_{12},\cdots,X_{1n_1}$

i.i.d$\sim N(\mu_1,\sigma^2)$

$X_{21},X_{22},\cdots,X_{2n_2}$

i.i.d$\sim N(\mu_2,\sigma^2)$

$\vdots$

$X_{r1},X_{r2},\cdots,X_{rn_r}$

i.i.d$\sim N(\mu_n,\sigma^2)$

（2）不同水平A_i下的样本之间相互独立.

$$\left.\begin{array}{l} X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{1n_1} \\ X_{21}, X_{22}, \cdots, X_{2n_2} \\ \vdots \\ X_{r1}, X_{r2}, \cdots, X_{rn_r} \end{array}\right\}$$

不但内部相互独立，而且不同水平下也相互独立。

由$X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ $\Rightarrow X_{ij} - \mu_i \sim N(0, \sigma^2)$.

记$X_{ij} - \mu_i = \varepsilon_{ij}$表示随机误差, 那么$X_{ij}$可写成

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2), \varepsilon_{ij}\text{相互独立}, \\ i = 1, 2, \cdots, r, j = 1, 2, \cdots, n_i, \\ \mu_i\text{与}\sigma^2\text{均未知} \end{array}\right\}$$

此即单因素试验方差分析的数学模型

需要解决的问题

1.检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r,$

$H_1: \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r$ 不全相等.

2.估计未知参数 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r, \sigma^2.$

3、数学模型的等价形式

设$n=\sum_{i=1}^{r} n_i$, 记 $\boxed{\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i\mu_i}$

总平均

称为水平A_i的效应,表示水平A_i下的总体均值与总平均的差异.

$$\boxed{\alpha_i=\mu_i-\mu,} \qquad i=1,2,\cdots,r$$

且 $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\cdots+n_r\alpha_r=0.$

$$\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{r} n_i(\mu_i-\mu)$$

$$=n\mu-\left(\sum_{i=1}^{r} n_i\right)\mu=0$$

原数学模型

$$\left.\begin{aligned} & X_{ij}=\mu_i+\varepsilon_{ij}, \\ & \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2), \varepsilon_{ij}\text{相互独立}, \\ & i=1,2,\cdots,r, j=1,2,\cdots,n_i, \\ & \mu_i\text{与}\sigma^2\text{均未知} \end{aligned}\right\}$$

改写为

$\mu_i=\alpha_i+\mu,$

$i=1,2,\cdots,r$

$$\left.\begin{aligned} & X_{ij}=\mu+\alpha_i+\varepsilon_{ij}, \\ & \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2), \varepsilon_{ij}\text{相互独立}, \\ & i=1,2,\cdots,r, j=1,2,\cdots,n_i, \\ & \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i=0 \end{aligned}\right\}$$

检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r,$$

$H_1: \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r$至少有两个不相等.

$\Updownarrow$

检验假设

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0,$$

$H_1: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$至少有1个不为0.

二、离差平方和的分解与显著性检验

为了进行上述假设检验，需要进行一系列变形。

1、总离差平方和分解公式

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, i = 1,\cdots,r$$ —水平A_i下的样本平均值，称为组内平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$ **—总平均**

$$Q_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X})^2$$ **—总离差平方和（总变差）**

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, i = 1, \cdots, r$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

$$Q_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}[(X_{ij} - \bar{X}_i) + (\bar{X}_i - \bar{X})]^2$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}_{= Q_E} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{X}_i - \bar{X})^2}_{= Q_A}$$

$$\boxed{+2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)(\bar{X}_i - \bar{X})} = 0$$

$$Q_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{X}_i-\bar{X})^2$$

$$=Q_E+Q_A$$

$$Q_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2$$

—组内离差平方和，反映试验误差引起的数据波动

$$Q_A=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{X}_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{r}n_i(\bar{X}_i-\bar{X})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}n_i\bar{X}_i^{\,2}-n\bar{X}^2$$

—组间离差平方和，反映了因素水平变化和试验误差引起的数据波动

2、分解式的统计特性

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$
$$\bar{X}_i = \mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_i$$

令 $\bar{\varepsilon}_i = \dfrac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}$， $\bar{\varepsilon} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}$ 得

$$Q_E = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\cancel{\mu} + \cancel{\alpha_i} + \varepsilon_{ij} - \cancel{\mu} - \cancel{\alpha_i} - \bar{\varepsilon}_i\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_i\right)^2$$

$$\bar{X} = \mu + \bar{\varepsilon}$$

$$\bar{X}_i = \mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_i$$

$$Q_A = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{X}_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{r} n_i(\bar{X}_i - \bar{X})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r} n_i\left(\cancel{\mu} + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_i - \cancel{\mu} - \bar{\varepsilon}\right)^2 = \sum_{i=1}^{r} n_i\left(\underline{\alpha_i} + \underline{\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i^2 + \underline{\sum_{i=1}^{r} n_i\left(\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}\right)^2} + 2\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i\left(\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i^2 + \underline{\sum_{i=1}^{r} n_i\bar{\varepsilon}_i^{\,2} - n\bar{\varepsilon}^{\,2}} + 2\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i\left(\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}\right)$$

推导 $$\sum_{i=1}^{r} n_i\left(\overline{\varepsilon}_i-\overline{\varepsilon}\right)^2=\sum_{i=1}^{r} n_i\overline{\varepsilon}_i^{\,2}-n\overline{\varepsilon}^{\,2}$$

左边 $$=\sum_{i=1}^{r} n_i\left(\overline{\varepsilon}_i^{\,2}+\overline{\varepsilon}^{\,2}-2\overline{\varepsilon}_i\overline{\varepsilon}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{r} n_i\overline{\varepsilon}_i^{\,2}+\sum_{i=1}^{r} n_i\overline{\varepsilon}^{\,2}-\sum_{i=1}^{r} 2n_i\overline{\varepsilon}_i\overline{\varepsilon}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} n_i=n}$$

$$=\sum_{i=1}^{r} n_i\overline{\varepsilon}_i^{\,2}+n\overline{\varepsilon}^{\,2}-2\overline{\varepsilon}\sum_{i=1}^{r} n_i\overline{\varepsilon}_i$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{\varepsilon}_i&=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij},\\ \overline{\varepsilon}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}\end{aligned}}$$

$$=\sum_{i=1}^{r} n_i\overline{\varepsilon}_i^{\,2}+n\overline{\varepsilon}^{\,2}-2\overline{\varepsilon}\sum_{i=1}^{r} n_i\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{r} n_i\overline{\varepsilon}_i^{\,2}-n\overline{\varepsilon}^{\,2}$$

由于$\varepsilon_{ij} \sim N\left(0,\sigma^2\right)$, $\bar{\varepsilon}_i \sim N\left(0,\dfrac{\sigma^2}{n_i}\right)$, $\bar{\varepsilon} \sim N\left(0,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

$$i=1,2,\cdots,r,\ j=1,2,\cdots,n_i$$

回忆$\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, $EnS_n^2 = E\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = (n-1)\sigma^2$,

$$EQ_E = E\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{r}E\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_i\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\left(n_i-1\right)\sigma^2 = (n-r)\sigma^2$$

$$\Longrightarrow \quad E\left(\frac{Q_E}{n-r}\right)=\sigma^2$$

由于$\varepsilon_{ij} \sim N\left(0,\sigma^2\right)$, $\bar{\varepsilon}_i \sim N\left(0,\dfrac{\sigma^2}{n_i}\right)$, $\bar{\varepsilon} \sim N\left(0,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

$$i=1,2,\cdots,r, j=1,2,\cdots,n_i$$

回忆$\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, $EnS_n^2 = E\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = (n-1)\sigma^2$,

$$EQ_A == E\left[\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i\bar{\varepsilon}_i^2 - n\bar{\varepsilon}^2 + 2\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i\left(\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i^2 + E\left[\sum_{i=1}^{r} n_i\bar{\varepsilon}_i^2 - n\bar{\varepsilon}^2\right] + 2\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i\left[\underbrace{E\left(\bar{\varepsilon}_i\right)}_{0} - \underbrace{E\left(\bar{\varepsilon}\right)}_{0}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i^2 + (r-1)\sigma^2$$

$$\Longrightarrow E\left(\frac{Q_A}{r-1}\right) = \sigma^2 + \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i^2$$

综上

$$E\left(\frac{Q_E}{n-r}\right)=\sigma^2 \qquad E\left(\frac{Q_A}{r-1}\right)=\sigma^2+\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}n_i\alpha_i^2$$

3、构造统计量及统计量的分布

当H_0成立时，即$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$时，

$E\dfrac{Q_A}{r-1}=E\dfrac{Q_E}{n-r}=\sigma^2$，反之，$E\dfrac{Q_A}{r-1}\geq E\dfrac{Q_E}{n-r}$

从而当H_0即当$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$不成立时,
比值

$$\frac{Q_A/(r-1)}{Q_E/(n-r)} \overset{\text{def}}{=} \frac{\bar{Q}_A}{\bar{Q}_E} = F$$

有偏大的趋势,所以F可作为检验H_0的统计量。

下面我们先求出在H_0成立条件下,统计量F的概率分布.

当H_0成立时,所有的α_i都等于零, 所以

$$X_{ij}=\mu+\varepsilon_{ij}$$

代入Q_T的表达式,可得:

$$X_{ij}=\mu+\alpha_i+\varepsilon_{ij}$$

$$\bar{X}=\mu+\bar{\varepsilon}$$

$$Q_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}\right)^2=\underbrace{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_i\right)^2}_{Q_E}+\underbrace{\sum_{i=1}^{r}\left[\sqrt{n_i}\left(\bar{\varepsilon}_i-\bar{\varepsilon}\right)\right]^2}_{Q_A}$$

$$对Q_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}\right)^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_i\right)^2+\sum_{i=1}^{r}\left[\sqrt{n_i}\left(\bar{\varepsilon}_i-\bar{\varepsilon}\right)\right]^2$$

$$=Q_E+Q_A,$$

$$又因为\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}\right)^2+n\bar{\varepsilon}^2=Q_T+n\bar{\varepsilon}^2$$

$$故\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}^2=Q_E+Q_A+\left(\sqrt{n}\bar{\varepsilon}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_i\right)^2+\sum_{i=1}^{r}\left[\sqrt{n_i}\left(\bar{\varepsilon}_i-\bar{\varepsilon}\right)\right]^2+\left(\sqrt{n}\bar{\varepsilon}\right)^2$$

给$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_i\right)^2+\sum_{i=1}^{r}\left[\sqrt{n_i}\left(\bar{\varepsilon}_i-\bar{\varepsilon}\right)\right]^2+\left(\sqrt{n}\bar{\varepsilon}\right)^2$

两边同除以σ^2, 左边$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}^2$是自由度为$n$的$\chi^2$变量,

$\frac{1}{\sigma^2}Q_E=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_i\right)^2$有$r$个约束条件

$\sum_{j=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_i\right)=0\left(i=1,2,\cdots,r\right)$, $\frac{1}{\sigma^2}Q_E$的自由度为$n-r$.

$\frac{1}{\sigma^2}Q_A=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}\left[\sqrt{n_i}\left(\bar{\varepsilon}_i-\bar{\varepsilon}\right)\right]^2$只有一个约束条件

$\sum_{i=1}^{r}n_i\left(\bar{\varepsilon}_i-\bar{\varepsilon}\right)=0$, 所以$\frac{Q_E}{\sigma^2}$的自由度为$r-1$.

$\frac{1}{\sigma^2}\left(\sqrt{n}\bar{\varepsilon}\right)^2$的自由度是1.它们的自由度之和为

$$(n-r)+(r-1)+1=n,$$

由定理1.7（柯赫伦分解定理）的充分条件知,

$$\frac{Q_E}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-r),\quad \frac{Q_A}{\sigma^2}\sim\chi^2(r-1)$$且相互独立。

所以在H_0成立的条件下,

$$F=\frac{Q_A/\sigma^2(r-1)}{Q_E/\sigma^2(n-r)}=\frac{Q_A/(r-1)}{Q_E/(n-r)}=\frac{\bar{Q}_A}{\bar{Q}_E}\sim F(r-1,n-r)$$

4、假设检验问题的拒绝域

检验假设 $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0,$

$H_1: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$不全为零.

H_0为真时, $Q_A/\sigma^2 \sim \chi^2(r-1)$

$E(\frac{Q_A}{r-1}) = \sigma^2$,即$\frac{Q_A}{r-1}$是$\sigma^2$的无偏估计.

H_1为真时, $\sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i^2 > 0,$

$$E(\frac{Q_A}{r-1}) = \sigma^2 + \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i^2 > \sigma^2.$$

因为$E(\dfrac{Q_E}{n-r})=\sigma^2$,

即不管H_0是否为真,$Q_E/(n-r)$都是σ^2的无偏估计.

对于 $F=\dfrac{Q_A/(r-1)}{Q_E/(n-r)}$, 有

1.分子和分母相互独立;

2.分母Q_E的数学期望始终是σ^2;

3.H_0为真时,分子的期望为σ^2,H_0不真时,分子取值有偏大的趋势.

于是拒绝域为 $F=\dfrac{Q_A/(r-1)}{Q_E/(n-r)}\geq F_\alpha(r-1,n-r).$

单因素试验方差分析表

方差来源	平方和	自由度	平均离差	F 比
组　间	Q_A	$r-1$	$\bar{Q}_A = \dfrac{Q_A}{r-1}$	$F = \bar{Q}_A / \bar{Q}_E$
组　内	Q_E	$n-r$	$\bar{Q}_E = \dfrac{Q_E}{n-r}$	
总　和	Q_T	$n-1$		

为了计算方便，记 $Q = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} (\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij})^2,$

$P = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij})^2, \quad R = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2,$ 则

$Q_A = Q - P, \quad Q_E = R - Q, \quad Q_T = R - P$

总结：方差分析的基本思想，

首先将总变离差为组间和组内离差，然后计算两者的F值。

F值越大，说明组间差异大，因素不同水平起作用，反之，则不起作用，是由随机误差导致的。

方差分析应用条件：

1）样本独立；

2）来自正态总体；

3）方差齐性

例4(p156例5.3) 某种型号化油器的原喉管结构油耗较大，为节省能源，设想了两种改进方案以降低油耗指标—比油耗，现对用各种结构的喉管制造的化油器分别测得如下表数据

水平 \ 指标	比 油 耗							
A_1 : 原结构	231.0	232.8	227.6	228.3	224.7	225.5	229.3	230.3
A_2 : 改进方案I	222.8	224.5	218.5	220.2				
A_3 : 改进方案II	224.3	226.1	221.4	223.6				

在显著性水平$\alpha = 0.01$条件下进行方差分析,判断喉管的结构对比油耗的影响是否显著.

解 为了计算方便，首先每个原始数据减220，通过计算P,R,Q,计算其离差平方和.

其中 $r=3, n_1=8, n_2=n_3=4, n=16$, $Q_A'=155.64$

$Q_T'=240.98$, $Q_E'=85.34$

方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均　方	F 比
组　间	155.64	2	77.82	11.86
组　内	85.34	13	6.56	
总　和	240.98	15		

$F=11.86>F_{0.01}(2,13)=6.70.$ 在水平0.01下拒绝H_0.

喉管结构对比油耗有显著影响，其中改进方案一好.

三、参数估计

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, i = 1, \cdots, r \quad Q_E = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

由于 $E(Q_E/(n-r)) = \sigma^2$　　$\hat{\sigma}^2 = Q_E/(n-r)$

$E(\bar{X}) = \mu$　　$\hat{\mu} = \bar{X}$

无偏估计

$E(\bar{X}_i) = \mu_i, i = 1, 2, \cdots, r$　　$\hat{\mu}_i = \bar{X}_i$

$E(\bar{X}_i - \bar{X}) = \mu_i - \mu, i = 1, 2, \cdots, r$　　$\hat{\alpha}_i = \bar{X}_i - \bar{X}$

若拒绝H_0,需对两总体$N(\mu_i,\sigma^2)$,$N(\mu_k,\sigma^2)$的均值差$\mu_i-\mu_k=\alpha_i-\alpha_k$作出区间估计.

因为$E(\bar{X}_i-\bar{X}_k)=\mu_i-\mu_k$, $D(\bar{X}_i-\bar{X}_k)=\sigma^2(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_k})$,

所以

$$\bar{X}_i-\bar{X}_k \sim N\left(\mu_i-\mu_k,\sigma^2(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_k}),\right)$$

又已经知道 $\frac{Q_E}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-r)$,

且 $\bar{X}_i-\bar{X}_k$与$\frac{Q_E}{\sigma^2}$独立,

所以 $\dfrac{(\bar{X}_i-\bar{X}_k)-(\mu_i-\mu_k)}{\sigma\sqrt{1/n_i+1/n_k}}\Bigg/\sqrt{\dfrac{Q_E}{\sigma^2}\Big/(n-r)}$

$$=\frac{(\bar{X}_i-\bar{X}_k)-(\mu_i-\mu_k)}{\sqrt{\bar{Q}_E(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_k})}}\sim t(n-r).$$

均值差$\mu_i-\mu_k=\alpha_i-\alpha_k$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}_i-\bar{X}_k\pm t_{\alpha/2}(n-r)\sqrt{\bar{Q}_E(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_k})}\right).$$

例5(p163例5.4) 有5种油菜品种，分别在4块试验田上种植，所得亩产量如下表：

品种 \ 田块	1	2	3	4
A_1	256	222	280	298
A_2	244	300	290	275
A_3	250	277	230	322
A_4	288	280	315	259
A_5	206	212	220	212

1、不同品种对亩产量有无显著影响

2、求$\mu_1-\mu_5$的置信度为0.95的置信区间.

解 令X_{ij}表示第i个品种在第j块试验田的亩产量，

$i=1,2,\cdots,5,\ \ n_1=n_2=\cdots=n_5=4, n=20$,计算

$$R=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4}x_{ij}^2=1395472, Q=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{4}(\sum_{j=1}^{4}x_{ij})^2=1383980.5$$

$$P=\frac{1}{20}(\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}x_{ij})^2=1370784.8,\quad Q_T=R-P=24687.2$$

$$Q_A=Q-P=13195.7,\quad Q_E=Q_T-Q_A=11491.5$$

$$F=\frac{Q_A/4}{Q_E/15}=4.31>F_{0.05}(4,15)=3.06$$

即品种对产量有显著影响.

又因为 $\bar{x}_1 = 264, \quad \bar{x}_5 = 212.5$

$$t_{0.025}(n-r) = t_{0.025}(15) = 2.1315,$$

$$\bar{Q}_E = Q_E / n - r = 11491.5/15 = 766.1$$

$$t_{0.025}(15)\sqrt{\bar{Q}_E\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_5}\right)} = 2.1315 \times 19.6$$

$\mu_1 - \mu_5$的置信水平为0.95的置信区间为

$$(264 - 212.5 \pm 2.1315 \times 19.6) = (9.7,\ 93.3).$$

四、小结

1.随机试验:单因素试验、多因素试验

2.单因素试验方差分析步骤

(1)建立数学模型;

(2)分解平方和;

(3)研究统计特性;

(4)进行假设检验;

(5)估计未知参数.

Thank You!