4.2 正态总体均值与方差的假设检验

一、 U 检验

二、 t 检验

三、χ^2 检验

四、F 检验

五、单边检验

一、U 检验

σ^2为已知，关于μ的检验(U 检验)

在上节中讨论过正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$

当σ^2为已知时，关于$\mu=\mu_0$的检验问题：

假设检验 $H_0: \mu=\mu_0, H_1: \mu\neq\mu_0$

讨论中是利用 H_0 为真时服从 $N(0,1)$ 分布

的统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域的，这种

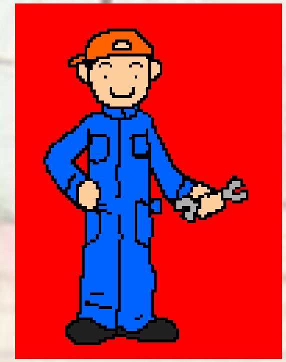
检验法称为 **U 检验法.**

例1 某切割机在正常工作时, 切割每段金属棒的平均长度为10.5cm, 标准差是0.15cm, 今从一批产品中随机的抽取15段进行测量, 其结果如下:

10.4	10.6	10.1	10.4	10.5	10.3	10.3	10.2
10.9	10.6	10.8	10.5	10.7	10.2	10.7	

假定切割的长度服从正态分布, 且标准差没有变化, 试问该机工作是否正常? $(\alpha = 0.05)$

解 因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.15$,



要检验假设

$H_0: \mu = 10.5$, $\quad H_1: \mu \neq 10.5$,

$$n = 15, \quad \bar{x} = 10.48, \quad \alpha = 0.05,$$

查表得 $u_{0.025} = 1.96,$

$$|u| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{10.48 - 10.5}{0.15 / \sqrt{15}} \right| = 0.516$$

$$< u_{0.025} = 1.96,$$

故接受 H_0, 认为该机工作正常.

二、t 检验

1. σ^2为未知，关于μ的检验(t 检验)

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中μ,σ^2未知, 显著性水平为α.

求检验问题$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$的拒绝域.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本,

因为σ^2 未知，不能利用$\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$来确定拒绝域.

因为 S_n^{*2} 是 σ^2 的无偏估计，故用 S_n^* 来取代 σ ,

即采用 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S_n^* / \sqrt{n}}$ 来作为检验统计量.

当观察值 $|t| = \left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s_n^*/\sqrt{n}}\right|$ 过分大时就拒绝 H_0，

拒绝域的形式为 $|t| = \left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s_n^*/\sqrt{n}}\right| \geq k$.

根据第一章§1. 3定理1. 13知, 定理1.13

当H_0为真时, $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

$$P\{\text{当}\, H_0 \,\text{为真拒绝}\, H_0\} = P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}}\right| \geq k\right\} = \alpha ,$$

令 $k=t_{\alpha/2}(n-1)$,

拒绝域为 $W=\left\{x:|t|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s_n^*/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$.

上述利用 t 统计量得出的检验法称为 t 检验法.

例2(p126例4.5) 如果在例1中只假定切割的长度服从正态分布, 问该机切割的金属棒的平均长度有无显著变化? $(\alpha=0.05)$

解 依题意 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2均为未知,

要检验假设 $H_0: \mu=10.5$, $H_1: \mu \neq 10.5$,

$n=15$, $\bar{x}=10.48$, $\alpha=0.05$, $s_n^*=0.237$,

$$|t|=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_n^*/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{10.48-10.5}{0.237/\sqrt{15}}\right|=0.327,$$

t分布表

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(14)=2.1448>|t|=0.327$,

故接受H_0, 认为金属棒的平均长度无显著变化.

2. σ^2为未知, 两个正态总体均值的检验(t检验)

利用t检验法检验具有相同方差的两正态总体均值差的假设.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 为来自正态总体$N(\mu_1, \sigma^2)$的样本, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n2}$ 为来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma^2)$的样本, 且设两样本独立. 注意两总体的方差相等. 又设 $\bar{X}, \bar{Y}$ 分别是总体的样本均值, $S_{1n_1}^{*2}, S_{2n_2}^{*2}$ 是样本方差, μ_1, μ_2, σ^2均为未知,

假设检验的问题 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

取显著性水平为α.

引入 t 统计量作为检验统计量:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},\text{其中 } S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_{1n_1}^{*2} + (n_2 - 1)S_{2n_2}^{*2}}{n_1 + n_2 - 2}.$$

当H_0为真时,根据第一章 §1.3定理1. 14知,

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2).$$

其拒绝域的形式为

$$W=\{x:\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\},$$

例3 有甲、乙两台机床加工相同的产品, 从这两台机床加工的产品中随机地抽取若干件, 测得产品直径(单位:*mm*)为

机床甲: 20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9

机床乙: 19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2,

试比较甲、乙两台机床加工的产品直径有无显著差异? 假定两台机床加工的产品直径都服从正态分布, 且总体方差相等. $(\alpha = 0.05)$

解 依题意, 两总体 X 和 Y 分别服从正态分布

$N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$, μ_1,μ_2,σ^2均为未知,

需要检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

$$n_1 = 8, \quad \bar{x} = 19.925, \quad s_{1n_1}^{*2} = 0.216,$$

$$n_2 = 7, \quad \bar{y} = 20.000, \quad s_{2n_2}^{*2} = 0.397,$$

且 $s_w^{\ 2} = \dfrac{(8-1)s_{1n_1}^{*\ 2} + (7-1)s_{1n_2}^{*\ 2}}{8+7-2} = 0.547,$

查表可知 $t_{0.025}(13) = 2.160,$

$$|t| = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \frac{|19.925 - 20.000|}{\sqrt{0.547}\sqrt{\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{7}}} = 0.265 < 2.160,$$

所以接受 H_0,

即甲、乙两台机床加工的产品直径无显著差异.

3. 基于成对数据的检验(t检验)

有时为了比较两种产品, 或两种仪器, 两种方法等的差异, 我们常在相同的条件下作对比试验, 得到一批成对的观察值. 然后分析观察数据作出推断. 这种方法常称为**逐对比较法**.

例4 有两台光谱仪I_x , I_y ,用来测量材料中某种金属的含量, 为鉴定它们的测量结果有无显著差异, 制备了9件试块(它们的成分、金属含量、均匀性等各不相同), 现在分别用这两台机器对每一试块测量一次, 得到9对观察值如下:

$x(\%)$	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
$y(\%)$	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
$d=x-y(\%)$	0.10	0.09	-0.12	0.18	-0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

问能否认为这两台仪器的测量结果有显著的差异? $(\alpha = 0.01)$

解 本题中的数据是成对的, 即对同一试块测出一对数据, 我们看到一对与另一对之间的差异是由各种因素, 如材料成分、金属含量、均匀性等因素引起的. [这也表明不能将光谱仪I_x对9个试块的测量结果(即表中第一行)看成是一个样本, 同样也不能将表中第二行看成一个样本, 因此不能用表4.2中第4栏的检验法作检验].

而同一对中两个数据的差异则可看成是仅由这两台仪器性能的差异所引起的. 这样, 局限于各对中两个数据来比较就能排除种种其他因素, 而只考虑单独由仪器的性能所产生的影响.

表中第三行表示各对数据的差 $d_i = x_i - y_i$

设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 来自正态总体 $N(\mu_d, \sigma^2)$,

这里 μ_d, σ^2 均为未知. 若两台机器的性能一样,

则各对数据的差异 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 属随机误差,

随机误差可以认为服从正态分布, 其均值为零.

要检验假设$H_0: \mu_d = 0,\ H_1: \mu_d \neq 0.$

设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 的样本均值 $\bar{d}$, 修正样本方差 s_n^{*2},

按关于单个正态分布均值的t检验, 知拒绝域为

$$|t| = \left| \frac{\bar{d} - 0}{s_n^* / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1),$$

由 $n = 9,\ t_{\alpha/2}(8) = t_{0.005}(8) = 3.3554,\ \ \bar{d} = 0.06,$

$s_n^* = 0.1227,$ 可知 $|t| = 1.467 < 3.3554,$ 所以接受H_0,

认为这两台仪器的测量结果无显著的差异.

三、χ^2 检验

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2均为未知,

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本,

(1) 要求检验假设: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

其中σ_0为已知常数. 设显著水平为α,

由于 S_n^{*2} 是 σ^2 的无偏估计, 当 H_0 为真时,

比值 $\dfrac{S_n^{*2}}{\sigma_0^2}$ 在1附近摆动, 不应过分大于1或过分小于1,

根据第一章§1.3，当H_0为真时，$\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$，

取 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}$ 作为统计量，

拒绝域的形式 $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^2} \le k_1$ 或 $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^2} \ge k_2$，

此处k_1和k_2的值由下式确定：

$P\{H_0$ 为真拒绝 $H_0\}$

$$= P_{\sigma_0^2}\left\{\left(\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2} \le k_1\right) \cup \left(\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2} \ge k_2\right)\right\} = \alpha.$$

为了计算方便, 习惯上取

$$P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}\le k_1\right\}=\frac{\alpha}{2},\quad P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}\ge k_2\right\}=\frac{\alpha}{2},$$

故得 $k_1=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),\ \ k_2=\chi^2_{\alpha/2}(n-1).$

拒绝域为:

$$\boxed{\frac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\quad\text{或}\quad\frac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1).}$$

指它们的和集

例5 某厂生产的某种型号的电池，其寿命长期以来服从方差σ^2=5000 (小时^2) 的正态分布，现有一批这种电池，从它生产情况来看，寿命的波动性有所变化. 现随机的取26只电池，测出其寿命的修正样本方差 $s_n^{*2}=9200$(小时^2). 问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化? $(\alpha=0.02)$

解 要检验假设 $H_0:\sigma^2=5000,\quad H_1:\sigma^2\neq 5000,$

$n=26,\quad \alpha=0.02,\quad \sigma_0{}^2=5000,$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.01}(25)=44.3,$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.99}(25) = 11.5,$$

拒绝域为: $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0{}^2} \le 11.524$, 或 $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0{}^2} \ge 44.3$.

因为 $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0{}^2} = \dfrac{25\times 9200}{5000} = 46 > 44.3$,

所以拒绝 H_0,

认为这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化.

例6(p129例4.7)美国民政部门对某住宅区住户的消费情况进行的调查报告中，抽出9户为样本，每年开支除去税款和住宅等费用外，依次为: 4.9, 5.3, 6.5, 5.2, 7.4, 5.4, 6.8, 5.4, 6.3（单位k元）. 假定住户消费数据服从正态分布，当给定α=0.05, 问所有住户消费数据的总体方差为0.3是否可信?

解　按题意要检验 $H_0:\sigma^2=0.3,\ H_1:\sigma^2\neq 0.3,$

$n=9,\quad \bar{x}=5.91,\quad s_n^{*2}=6.05/8,$

查表得　$\chi^2_{0.975}(8)=2.18,\ \chi^2_{0.025}(8)=17.5,$

于是 $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^{\ 2}}=\dfrac{6.05}{0.3}=20.17>17.5,$

故拒绝 H_0,所有住户消费数据的总体方差为0.3不可信

四、F 检验

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 为来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本,

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 为来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本,

且设两样本独立, 其修正样本方差为 $S_{n_1}^{*2}, S_{n_2}^{*2}$.

又设 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均为未知,

需要检验假设: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$,

当 H_0 为真时, $E(S_{1n_1}^{*2}) = \sigma_1^{\ 2} = \sigma_2^{\ 2} = E(S_{2n_2}^{*2})$,

当 H_1 为真时, $E(S_{1n_1}^{*2}) = \sigma_1^{\ 2} \neq \sigma_2^{\ 2} = E(S_{2n_2}^{*2})$,

当 H_1 为真时, 观察值 $\dfrac{S_{1n_1}^{*2}}{S_{2n_2}^{*2}}$ 有偏大或偏小的趋势,

故拒绝域的形式为 $\dfrac{s_{1n_1}^{*2}}{s_{2n_1}^{*2}} \geq k_1$或$\dfrac{s_{1n_1}^{*2}}{s_{2n_1}^{*2}} \leq k_2$,

此处 k 的值由下式确定:

$$P_{\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}}\left\{\frac{S_{1n_1}^{*2}}{S_{2n_2}^{*2}} \geq k_1\right\} + P_{\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}}\left\{\frac{S_{1n_1}^{*2}}{S_{2n_2}^{*2}} \leq k_2\right\} = \alpha$$

要使 $P\{H_0$ 为真拒绝 $H_0\}=\alpha$，为了计算简单，令

$$P_{\sigma_1^2=\sigma_2^2}\left\{\frac{S_{1n_1}^{*2}}{S_{2n_2}^{*2}}\geq k_1\right\}=\frac{\alpha}{2},\quad P_{\sigma_1^2=\sigma_2^2}\left\{\frac{S_{1n_1}^{*2}}{S_{2n_2}^{*2}}\leq k_2\right\}=\frac{\alpha}{2}.$$

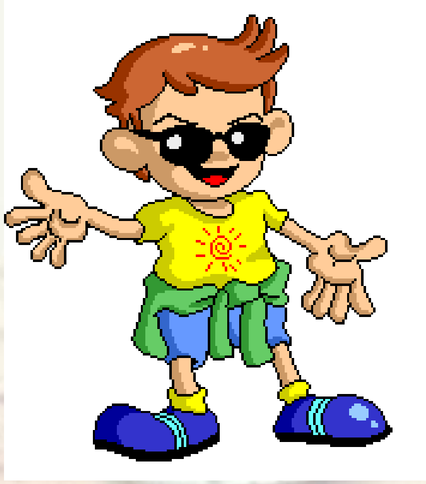
根据第一章§1.3定理1. 15知

$$\frac{S_{1n_1}^{*2}}{S_{2n}^{*2}}\sim F(n_1-1,\ n_2-1).$$

即 $k_1 = F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1), k_2 = F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1).$

检验问题的拒绝域为

$$W = \left\{x: \frac{s_{1n_1}^{*2}}{s_{2n_2}^{*2}} \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1) \text{或} \quad \frac{s_{1n_1}^{*\ 2}}{s_{2n_2}^{*\ 2}} \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)\right\}$$



上述检验法称为**F检验法**.

例7(p130例4.8) 为了考察温度对某物体断裂强力的影响，在70度和80度分别重复做了8次试验，测得的断裂强力的数据如下(单位Pa):

70度：20.5, 18.8, 19.8, 21.5, 19.5, 21.0, 21.2

80度： 17.7, 20.3, 20.0, 18.8, 19.0, 20.1, 20.2, 19.1

假定$70^0 C$下的断裂强力用X表示，且服从$N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$80^0 C$下的断裂强力用Y表示，且服从$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，试问$\alpha = 0.05$时，X与Y的方差有无显著差异？

解 假设检验问题$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$n_1 = 8, \bar{x} = 20.4,\ s_{1n_1}^{*2} = 0.8857,$$

$$n_2 = 8, \bar{y} = 19.4,\ s_{2n_2}^{*2} = 0.8286,$$

计算得$F = \dfrac{s_{1n_1}^{*2}}{s_{2n_2}^{*2}} = 1.07$

查表得

$$F_{0.025}(7,7) = 4.99, F_{0.975}(7,7) = \frac{1}{F_{0.025}(7,7)} = \frac{1}{4.99}$$

因而$F_{0.025}(7,7) > F > F_{0.975}(7,7)$

所以两总体方差无显著差异.

例8 分别用两个不同的计算机系统检索10个资料, 测得平均检索时间及修正样本方差(单位:秒)如下:

$$\bar{x} = 3.097,\ \bar{y} = 3.179,\ s_{1n_1}^{*2} = 2.67,\ s_{2n_2}^{*2} = 1.21$$

假定检索时间服从正态分布, 问这两系统检索资料有无明显差别? $(\alpha = 0.05)$

解 根据题中条件, 首先应检验方差的齐性.

假设 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2,\quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$

$$F_{0.025}(9,\ 9) = 4.03,\quad F_{0.975}(9,\ 9) = 0.248,$$

取统计量 $F = \dfrac{s_{1n_1}^{*2}}{s_{2n_2}^{*2}} = \dfrac{2.67}{1.21} = 2.12,$

$0.248 < F = 2.12 < 4.03,$

故接受 H_0， 认为 $\sigma_x^{\ 2} = \sigma_y^{\ 2}$.

再验证 $\mu_x = \mu_y$，

假设 $H_0 : \mu_x = \mu_y$， $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$.

取统计量 $t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$,

其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_{1n_1}^{*2} + (n_2 - 1)S_{2n_2}^{*2}}{n_1 + n_2 - 2}$.

当H_0为真时，$t \sim t(n_1+n_2-2)$.

$n_1=10,\quad n_2=10,\quad t_{0.025}(18)=2.101,$

$$|t|=\frac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{|3.097-2.179|}{\sqrt{\frac{10(2.67+1.21)}{18}}\cdot\sqrt{\frac{2}{10}}}$$

$$=1.436<2.101,\quad \text{故接受} H_0,$$

认为两系统检索资料时间无明显差别.

五、单边检验

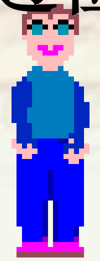
1. 右边检验与左边检验

形如 $H_0: \mu \le \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$ 的假设检验称为右边检验.

形如 $H_0: \mu \ge \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$ 的假设检验称为左边检验.

右边检验与左边检验统称为单边检验.

首先通过一个实例来说明双边检验与单边检验的区别与联系.



2. 单边检验拒绝域的计算

因为单边与双边检验有密切关系，因而仅举一例说明。

利用t检验法检验具有相同方差的两正态总体均值差的单边假设.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 为来自正态总体$N(\mu_1, \sigma^2)$的样本,$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 为来自正态总体$N(\mu_2, \sigma^2)$的样本,且设两样本独立.注意两总体的方差相等.又设 $\bar{X}, \bar{Y}$ 分别是总体的样本均值, $S_{n_1}^{*2}, S_{n_2}^{*2}$是修正样本方差, μ_1, μ_2, σ^2均为未知,

检验问题 $H_0: \mu_1 \le \mu_2,\ H_1: \mu_1 > \mu_2$

取显著性水平为α.

引入 t 统计量作为检验统计量:

$$T_1 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}},$$

其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_{n_1}^{*\,2} + (n_2 - 1)S_{n_2}^{*\,2}}{n_1 + n_2 - 2}$.

根据第一章 § 1.3定理1. 14知, $T_1 \sim t(n_1 + n_2 - 2)$.

又由于原假设成立时 $H_0: \mu_1 \le \mu_2$, $H_1: \mu_1 > \mu_2$

$\mu_2 - \mu_1 \ge 0$,

$$T_1 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \ge T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

$$P\{T \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\} \le P\{T_1 \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\} = \alpha$$

由此可以看到$\{T \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\}$比$\{T_1 \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\}$发生的概率还小，因而只要$\{T \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\}$发生，就拒绝原假设.

其拒绝域的形式为 $W = \{x : \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\}$,

表4. 2

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2已知)	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\ne\mu_0$	$z\ge z_\alpha$ $z\le -z_\alpha$ $\lvert z\rvert\ge z_{\alpha/2}$
2	$\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\ne\mu_0$	$t\ge t_\alpha(n-1)$ $t\le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1-\mu_2\le\delta$ $\mu_1-\mu_2\ge\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2,σ_2^2已知)	$Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu-\mu_0>\delta$ $\mu-\mu_0<\delta$ $\mu-\mu_0\ne\delta$	$z\ge z_\alpha$ $z\le -z_\alpha$ $\lvert z\rvert\ge z_{\alpha/2}$
4	$\mu_1-\mu_2\le\delta$ $\mu_1-\mu_2\ge\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-2)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\mu-\mu_0>\delta$ $\mu-\mu_0<\delta$ $\mu-\mu_0\ne\delta$	$t\ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\le -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\lvert t\rvert\ge t_{\alpha/2}(n_1+n_2-1)$

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
5	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1, μ_2未知)	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F \ge F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F \ge F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$
7	$\mu_D \le 0$ $\mu_D \ge 0$ $\mu_D = 0$ (成对数据)	$t = \dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D > 0$ $\mu_D < 0$ $\mu_D \ne 0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$

例10 在平炉上进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率, 试验是在同一只平炉上进行的. 每炼一炉钢时除操作方法外, 其它条件都尽可能做到相同.先采用标准方法炼一炉, 然后用建议的新方法炼一炉, 以后交替进行, 各炼了10炉, 其得率分别为

(1)标准方法: **78.1, 72.4, 76.2, 74.3, 77.4, 78.4, 76.0, 75.5, 76.7, 77.3;**

(2)新方法: **79.1, 81.0, 77.3, 79.1, 80.0, 78.1, 79.1, 77.3, 80.2, 82.1;**

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$和 $N(\mu_2,\sigma^2)$, μ_1,μ_2,σ^2均为未知, 问建议的新操作方法能否提高得率?(取$\alpha=0.05$)

解 需要检验假设 $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0,\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0.$
分别求出标准方法和新方法下的样本均值和修正样本方差:

$$n_1 = 10, \quad \bar{x} = 76.23, \quad s_{1n_1}^{*2} = 3.325,$$

$$n_2 = 10, \quad \bar{y} = 79.43, \quad s_{2n_2}^{*2} = 2.225,$$

且 $$s_w^2 = \frac{(10-1)s_{1n_1}^{*2} + (10-1)s_{2n_2}^{*2}}{10+10-2} = 2.775,$$

查表可知 $t_{0.05}(18) = 1.7341,$

查表4.2知其拒绝域为 $t \le -t_{\alpha}(n_1+n_2-2).$

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}= \quad =-4.295,$$

$$\le -t_{0.05}(18)=-1.7341,$$

所以拒绝 H_0,

即认为建议的新操作方法较原来的方法为优.

Thank You!