3.2统计决策中的常用分布族

一、Γ (Gamma)分布

二、β分布

一、Γ(Gamma) 分布族

1. Γ函数

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \qquad \alpha>0$$

$$\overset{令x=y^2}{=} 2\int_0^{+\infty} y^{2\alpha-1}e^{-y^2}dy$$

Γ函数的性质：

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, （利用分部积分可以证明）

$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1$,

$\Gamma(n+1)=n!$,

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$,

2. Γ分布

定义3.5 设随机变量X的分布密度函数为

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

则称X服从Γ分布，记为$X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$,其中$\alpha>0,\beta>0$为参数，Γ分布族常记为$\{\Gamma(\alpha,\beta):\alpha>0,\beta>0\}$.

注： $Exp(\lambda)=\Gamma(1,\lambda)$

$$\chi^2(n)=\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$$

3. Γ分布的性质

性质1 $E(X^k)=\dfrac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\beta^k}=\dfrac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots\alpha}{\beta^k}$

其中 $E(X)=\dfrac{\alpha}{\beta}$, $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\dfrac{\alpha}{\beta^2}$

证 $E(X^k)=\int_0^{\infty}x^k\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx=\int_0^{\infty}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{k+\alpha-1}e^{-\beta x}dx$

$\underline{\underline{换元\beta x=t}}\dfrac{1}{\beta^k\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{k+\alpha-1}e^{-t}dt=\dfrac{\Gamma(\alpha+k)}{\beta^k\Gamma(\alpha)}$

$=\dfrac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots\alpha}{\beta^k}$

由 $$EX^k = \frac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots\alpha}{\beta^k}$$

$$k=1, \quad EX = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$k=2, \quad EX^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2},$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

性质2（可加性） 若$X_j \sim \Gamma(\alpha_j, \beta), j = 1, 2, \cdots, n,$

而且X_j间相互独立，则

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim \Gamma\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \beta\right),$$

性质3 若$X_j \sim \exp(\beta)$,(即$\Gamma(1, \beta)$), $j = 1, 2, \cdots, n,$

而且X_j间相互独立，则

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim \Gamma(n, \beta),$$

性质4 若$X \sim \Gamma(\alpha, 1)$,则$Y = \dfrac{X}{\beta} \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

二、β（贝塔）分布族

1. ß分布的密度函数

定义 若随机变量X的密度函数为

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则称X服从β分布，记为$X\sim\beta(a,b)$,其中$a>0,b>0$为参数，β分布族常记为$\{\beta(a,b):a>0,b>0\}$.

注意：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;a,b)dx = 1 \quad \Rightarrow$

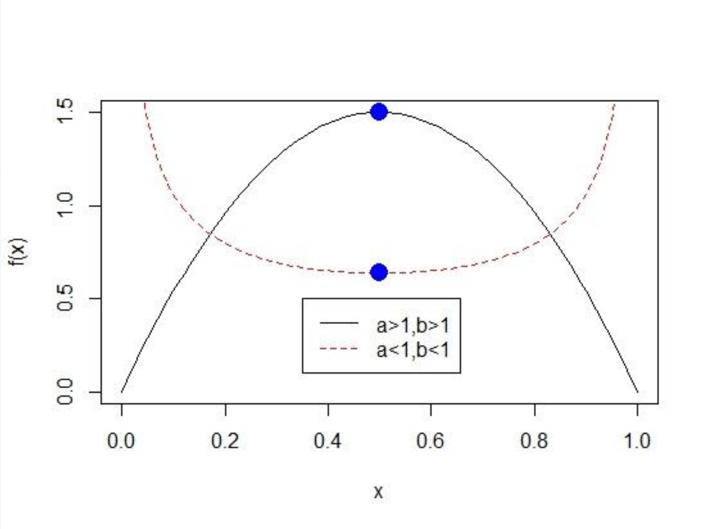
$$\int_0^1 \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad a>0, b>0$$

2. ß分布的图象特征

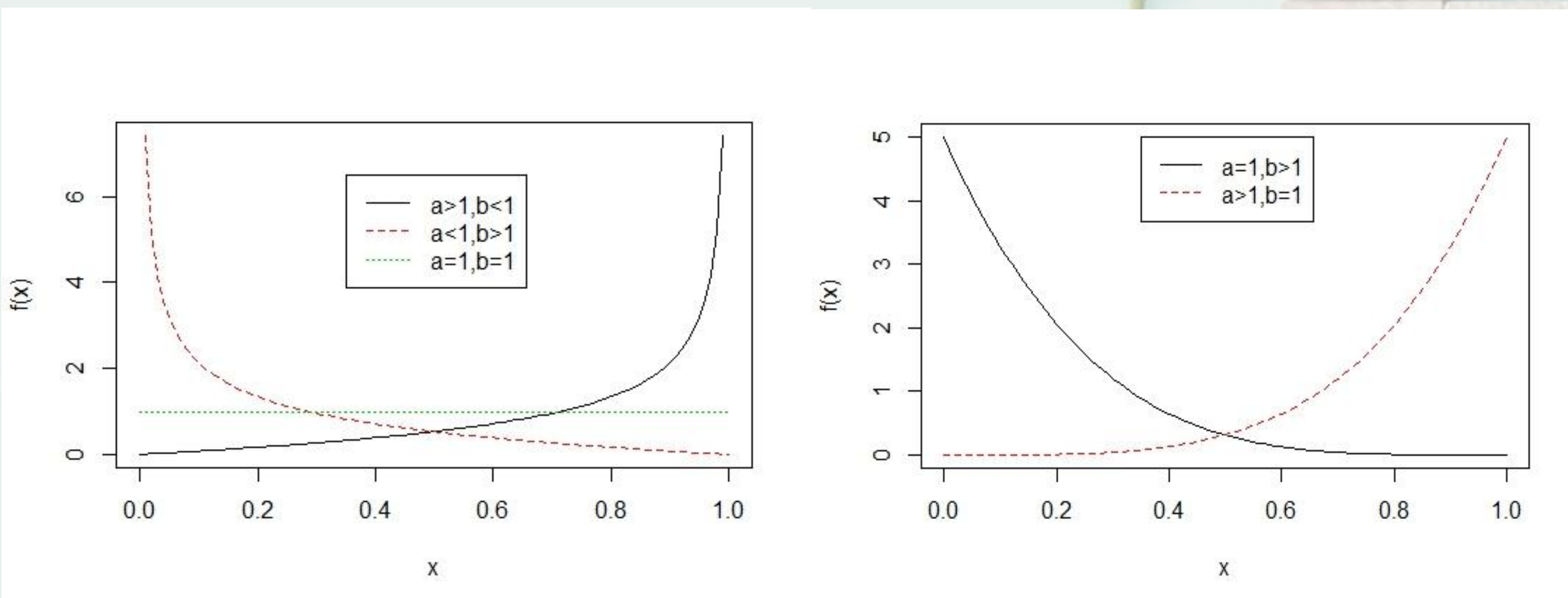
1、$a>1,b>1$图象呈单峰状，在$x_1=\dfrac{a-1}{a+b-2}$处达到最大值.

2、$a<1,b<1$图象呈U型状，在$x_2=\dfrac{1-a}{2-a-b}$处达到最小值. $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{2}$时，$\beta$分布称为反正弦分布。



3、$a=1,b=1$时，β分布就是$(0,1)$上的均匀分布，记为$U(0,1)$,即$\beta(1,1)=U(0,1)$.

4、$a\le 1,b>1$时，$f(x,a,b)$严格单减函数；$a>1$,$b\le 1$时，$f(x,a,b)$严格单增函数。



3. β 分布的性质

性质1 $$E(X^k)=\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)}$$

$$=\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}$$

其中$EX=\dfrac{a}{a+b},DX=\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

性质2 设$X\sim\Gamma(a,1),Y\sim\Gamma(b,1)$且独立，则$\dfrac{X}{X+Y}\sim\beta(a,b)$

性质3 设$X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$且独立，则$\dfrac{X}{X+Y}\sim\beta(\dfrac{n_1}{2},\dfrac{n_2}{2})$

Thank You!