西北工业大学研究生课程考试试题

考试科目：<u>数理统计（A）</u> 时间：2021 年 12 月 24 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								

一、填空（每空 2 分，共 20 分）

1. 假设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma_0^2)$，其中 σ_0^2 已知。$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 为来自总体 X 的一个容量为 n 样本，则未知参数 μ 的一个充分完备统计量为________________，未知参数 μ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间是 ____________________。

2. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个容量为 n 样本，S_n^2 是该样本的样本方差，则 $E(S_n^2)=$______________，$D(S_n^2)$ =______________。

3. 设随机变量 $T\sim t(n)$，若 $\alpha>0$ 为已知常数，且满足条件 $P(|T|>\alpha)=0.20$，则 $P(T<\alpha)=$___________。

4. 设总体 X 服从参数为 1 的指数分布，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 为来自该总体的一个容量为 n 样本，$X_{(1)}$ 是该样本的最小次序统计量，则 $X_{(1)}$ 的概率密度函数的表达式为______________________。

5. 假设总体 $X\sim B(1,p)$，p 为未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 为来自该总体的一个容量为 n 样本，则 $\hat{p}=\bar{X}$ 的效率为________________。

6. 假设总体 X 的概率密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $\theta>0$

试卷密号	

未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 为来自该总体的一个容量为 n 样本，则检验假设 $H_0: \theta = 1, H_1: \theta \neq 1$ 的似然比为 ______________________。

7. 假设随机向量 $(X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ 服从二维正态分布 $N_2(\mu, \Sigma)$，$\mu = (0, 0)^{\mathrm{T}}$，$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$。令 $Y = X_1 - X_2$，则 $D(Y) =$ ______________，X_1 与 Y 的相关系数为 ______________。

试卷密号___________

考试科目___________

学　　号___________

姓　　名___________

考试日期___________

注意事项

1. 以上各项除试卷密号外，必须一一填写清楚；
2. 答题时注意保持卷面整洁；
3. 虚线左边除用于答题外不得做任何记号；
4. 虚线右边的正反面不得用于答题。

二、（12 分）设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$；$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)^{\mathrm{T}}$分别是来自两个独立总体$X$和$Y$的样本。$X\sim N(0,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$ ，$\bar{X},\bar{Y}$, S_X^2,S_Y^2分别表示总体X和Y的样本均值和样本方差。

（1）求常数C，使随机变量 $Z=\dfrac{C(Y_1-\mu_2+\overline{X})}{S_X}$服从$t$分布（要求写出推导过程）。

（2）求随机变量

$$V=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2+\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\mu_2)^2}{\sigma^2}$$

的概率分布（要求写出分布参数）。

三、（12 分）假设总体X服从二项分布$B(N,p)$, $(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$是来自该总体的一个容量为$n$的样本，$0<p<1$是未知参数，求：

（1）p的极大似然估计量$\hat{p}$；（2）p的最小方差无偏估计量。

四、（14 分）设总体 X 服从 Poisson 分布 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，

$k=0,1,2,\ldots$ $(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$ 为来自总体 X 的一个容量为 n 的简单

随机样本。设参数 λ 的先验分布为 $\pi(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}, & \lambda>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求（1）平方损失 $L(\lambda,\hat{\lambda})=(\lambda-\hat{\lambda})^2$ 下 λ 的贝叶斯估计 $\hat{\lambda}$；

（2）$\hat{\lambda}$ 的贝叶斯风险。

五、（14 分）现有甲乙两班学生参加了一场考试。甲班有学生 21 人，平均成绩 $\bar{X}$=80，样本离差平方和 $\sum_{i=1}^{21}(X_i-\bar{X})^2$=294；乙班有学生 16 人，平均成绩 $\bar{Y}$=82.5，样本离差平方和 $\sum_{i=1}^{16}(Y_i-\bar{Y})^2$=256。假设甲乙两班成绩服从正态分布。问甲乙两班成绩是否有显著差异？（检验水平 $\alpha=0.05$）

$F_{0.025}(20,15)=2.76$ ， $F_{0.025}(15,20)$ =2.57 ， $F_{0.05}(20,15)=$ 2.33 ，

$F_{0.05}(15,20)$ =2.20 ， $t_{0.05}(35)=1.6896$ ， $t_{0.025}(35)=2.0301$ 。

$t_{0.05}(37)=1.6871$， $t_{0.025}(37)=2.0262$ 。

六、（14 分）车间里有 5 名工人，有 3 台不同型号的车床生产同一种品种的产品，现在让每个工人轮流在 3 台车床上工作，记录其日产量见下表：

车床型号	工人					
	1	2	3	4	5	$\bar{X}_{i\cdot}$
1	64	73	63	81	78	71.8
2	75	66	61	73	80	71
3	78	67	80	69	71	73
$\bar{X}_{\cdot j}$	72.33	68.67	68.00	74.33	76.33	71.93

问 5 位工人技术之间和不同车床型号之间对产量有无显著影响（$\alpha = 0.05$）。（$F_{0.05}(2,8) = 4.46, F_{0.05}(4,8) = 3.84$）请写出计算公式并列出方差分析表。部分中间结果如下：$\sum_{i=1}^{3}(\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2 = 2.0267$，

$\sum_{j=1}^{5}(\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 = 51.4222$，$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X})^2 = 464.5333$

七、（14 分）设有线性模型

$$\begin{cases} Y_1 = \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \varepsilon_1 \\ Y_2 = 2\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3 + \varepsilon_2 \\ Y_3 = \beta_1 + \varepsilon_3 \\ Y_4 = 2\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \varepsilon_4 \\ Y_5 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \varepsilon_5 \end{cases}$$

其中$\varepsilon_i (i = 1, 2, ..., 5)$相互独立，且$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

（1） 求β_1、β_2、β_3的最小二乘估计$\hat{\beta}_1$、$\hat{\beta}_2$、$\hat{\beta}_3$。

（2）在显著性水平α下，推导检验假设$H_0 : \beta_1 + \beta_2 = \beta_3 \leftrightarrow$

$H_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq \beta_3$的统计量与拒绝域。