2020 考研数学
概率论与数理统计
基础讲义

主讲：郝崇宇

目　录

第一章 随机事件和概率

一、随机试验和样本空间

1.随机试验

具有以下特点的试验称为随机试验，通常用字母 E 来表示.

(1) 可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2.样本空间和样本点

样本空间 Ω： 随机试验的所有可能结果组成的集合称为样本空间.

样本点 w： 样本空间的元素，即随机试验的每一可能结果称为样本点.

【例 1.1】 下列试验是否均为随机试验？若是，写出样本空间.

E_1：掷一只骰子，观察朝上一面的点数.

E_2：一批产品中一次任取 2 件，记录正品次品的情况.

E_3：一批产品中一次任取 2 件，记录其中的次品数.

二、随机事件

1.定义： 样本空间 Ω 的子集称为随机事件，简称为事件，通常用 A,B,C 表示.

2.事件发生： 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

3.分类

(1) 基本事件： 由一个样本点组成的单点集.

(2) 复合事件： 由至少两个基本事件组成.

(3) 必然事件： 样本空间 Ω 包含所有样本点，它是 Ω 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件.记为 Ω .

(4) 不可能事件： 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，在每次试验中都不发生，称为不可能事件，记为 $\varnothing$.

三、事件间的关系和运算

1.事件间的关系

(1) 包含关系： $A \subset B \Leftrightarrow$ 事件 A 发生一定导致 B 发生.

(2) 事件相等： $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则事件 $A = B$.

(3) **A 和 B 的和事件：**记为 $A\cup B(或A+B)\Leftrightarrow A,B$ 至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件.

(4) **A 和 B 的积事件：**记为 $A\cap B(或AB)\Leftrightarrow A,B$ 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件.

(5) **A 和 B 的差事件：**事件 $A-B\Leftrightarrow A$ 发生且 B 不发生时事件 $A-B$ 发生，也记为 $A\overline{B}$.

(6) **互斥(互不相容)事件：** $AB=\varnothing\Leftrightarrow A,B$ 不能同时发生.

(7) **对立(互逆)事件：** $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A,B$ 在一次试验中必然发生且只能发生一个. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

2.事件的运算律

(1) **交换律：** $A\cup B=B\cup A;A\cap B=B\cap A$.

(2) **结合律：** $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) **分配律：** $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4) **德摩根律(对偶律)：** $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

【例 1.2】设 A,B,C 是三个随机事件，试用 A,B,C 表示下列事件.

1)恰有 A 发生　　2) A,B 都发生，而 C 不发生

3) A,B,C 同时发生　　4) A,B,C 至少有一个发生

5) A,B,C 至少有两个发生　　6) A,B,C 恰有一个发生

四、概率

1.概率的定义

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) **非负性：**对于每一个事件 A，有 $P(A)\geq 0$.

(2) **规范性：**对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$.

(3) **可列可加性：**设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

2.概率的性质

(1) 非负性： $\forall A\subseteq\Omega$，$0\le P(A)\le 1$.

(2) 规范性： $P(\varnothing)=0, P(\Omega)=1$.

(3) 有限可加性： 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，即对于 $A_iA_j=\varnothing, i\ne j, i,j=1,2,\cdots,n$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(4) 逆事件的概率： 对于任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

3.概率的基本公式

(1)加法公式： 对于任意两随机事件 A,B 有：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

对于 3 个事件的概率加法公式：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

(2)减法公式： 设 A,B 是任意两个事件，则有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A\overline{B}).$$

若 $B\subset A$，则有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$， $P(B)\le P(A)$.

【例 1.3】 事件 A,B 满足 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$ 和 $P(A\cup B)=1$ 则(　　)

(A) $A\cup B=\Omega$.　　　　(B) $AB=\varnothing$.

(C) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.　　　　(D) $P(A-B)=0$.

【例 1.4】 已知随机事件 A,B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$.则 $P(B)=$___.

五、条件概率和乘法公式

1.条件概率的定义：

设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

2.条件概率的性质

(1) **非负性：** $0\le P(B|A)\le 1$；

(2)规范性： $P(\Omega|A)=1$；

(3) $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$；

(4) $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$.

3.乘法公式

若 $P(A)>0$, 则有 $P(AB)=P(B|A)P(A)$，我们称此公式为乘法公式.

三个事件的乘法公式：设 A,B,C 为事件，且 $P(AB)>0$，则有

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

【例 1.5】 设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2},P(C)=\dfrac{1}{3}$,则 $P(AB|\bar{C})=$________.

六、事件的独立性

1.两个事件的独立性

(1) **定义**

设 A,B 是两个事件，如果满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A,B 相互独立，简称事件 A,B 独立.

(2) **独立性的等价说法**

若 $0<P(A)<1$，则事件 A,B 独立 $\Leftrightarrow P(B)=P(B|A)\Leftrightarrow P(B)=P(B|\overline{A})$

$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\overline{A})$

(3) 独立性的性质

若事件 A,B 相互独立，则 A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$ 也相互独立.

2.三个事件的独立性

(1) 定义

设 A,B,C 是三个事件，如果满足等式

1) $P(AB)=P(A)P(B)$；

2) $P(AC)=P(A)P(C)$；

3) $P(BC)=P(B)P(C)$；

4) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

则称三个事件 A,B,C 相互独立.

若仅满足等式 1)，2)，3)，则称三个事件 A,B,C 两两独立.

(2) 性质

若三个事件 A,B,C 相互独立，则任意两个事件的和、积、差构成的新事件与另外一个事件或者它的逆事件是相互独立的.例如事件 $A\cup B$ 与事件 $\overline{C}$ 相互独立.

【例 1.6】 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$ 且 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$ 则有(　　)

(A) A与B 互不相容.　　(B) A与B 互逆.

(C) A与B 相互独立.　　(D) A与B 不独立.

【例 1.7】 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：A_1={掷第一次出现正面}，A_2={掷第二次出现正面}，A_3={正、反面各出现一次}，A_4={正面出现两次}，则事件(　　)

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立.　　(B) A_2,A_3,A_4 相互独立.

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立.　　(D) A_2,A_3,A_4 两两独立.

七、三大概率模型

1.古典概型

(1) 定义：具有以下两特点的试验称为古典概型：

1) 样本空间有限 $\Omega=\{e_1,e_2\cdots e_n\}$；

2) 等可能性 $P\{e_1\}=P\{e_2\}=\cdots=P\{e_n\}$.

(2) 计算方法

$$P(A)=\frac{A\text{中基本事件的个数}n_A}{\Omega\text{中基本事件总数}n}.$$

2.几何概型

如果试验 E 是从某一线段(或平面、空间中有界区域) Ω 上任取一点，并且所取得点位于 Ω 中任意两个长度(或平面、体积)相等的子区间(或子区域)内的可能性相同，则所取得点位于 Ω 中任意子区间(或子区域) A 内这一事件(仍记作 A)的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{的长度（或面积、体积）}}{\Omega\text{的长度（或面积、体积）}}.$$

3. n 重伯努利概型

(1).定义

设试验 E 只有两个可能结果：A和$\overline{A}$，则称 E 为伯努利试验.若将伯努利试验独立重复地进行 n 次，则称为 n 重伯努利概型.

(2).二项概率公式

设在每次试验中，事件 A 发生的概率 $P(A)=p(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中，事件 A 发生 k 次的概率为 $B_k(n,p)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$.

【例 1.8】袋中有 5 只白球，6 只黑球，从中取出 2 球，作不放回抽样.

求取出的 2 球为 1 白球 1 黑球的概率.

【例 1.9】星期天，甲乙约定上午 9 点—10 点之间见面，先到者等 15 分钟便离开，求两人能会面的概率.

【例 1.10】一射手对同一目标独立地进行四次射击,若至少命中一次的概率为$\frac{80}{81}$,则该射手的命中率为________.

八、全概率公式与贝叶斯公式

1. 完备事件组

若事件 $A_1\cup\cdots\cup A_n=\Omega, A_iA_j=\varnothing, 1\le i\ne j\le n$，则称事件 $A_1,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组.

2.全概率公式

$A_1,\cdots,A_n$ 是完备事件组，且 $P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

3.贝叶斯公式

$A_1,\cdots,A_n$ 是完备事件组，$P(B)>0, P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}, j=1,2,\cdots,n.$$

【例 1.11】已知在 10 件产品中有 2 件次品，从中取 2 件，每次任取一件，作不放回抽样. 求

(I)第一次取正品的概率，第二次取出的是正品的概率.

(II)已知第二次取出的是正品，则第一次取出的是次品的概率.

典型例题

【例 1.12】设随机事件 A,B,C 满足 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，$P(AB)=P(BC)=0$，则 A,B,C 三个事件中至少出现一个的概率为___.

【例 1.13】设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件，且 $0<P(C)<1$，则下列给定的四对事件中不一定相互独立的是（　）

(A) $\overline{A\cup B}$ 与 C　　　　(B) $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$

(C) $\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$　　　　(D) $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$

【例 1.14】甲袋中有 5 只红球，4 只白球；乙袋中有 4 只红球，5 只白球.先从甲袋中任取 2 只球放入乙袋中，再从乙袋中任取 1 只球.求

(I)取出球是白球的概率；

(II)若已知从乙袋中取出的球是白球，则从甲袋中取出的球是 1 只白球 1 只红球的概率.

第二章　一维随机变量及其分布

一、随机变量

1.随机变量的定义

定义在样本空间$\Omega=\{e\}$上的实值单值函数$X=X(e)$，$e\in\Omega$，则该变量$X(e)$称为随机变量.随机变量常用大写字母X,Y,Z等表示，即$\forall e\in\Omega \xrightarrow{P} X=X(e)$，其取值用小写字母$x,y,z$等表示.

2.随机变量的分类

(1)离散型随机变量：X的取值为有限个或无限可列个.

(2)连续型随机变量：X的取值为某区间上的所有值.

(3)非离散型也非连续型.

二、随机变量的分布函数

1.定义

设X是一个随机变量，对于任意实数x，令$F(x)=P\{X\le x\}$，$-\infty<x<+\infty$，则称$F(x)$为随机变量X的概率分布函数，简称分布函数.

2. 分布函数的性质

(1) 规范性：$0\le F(x)\le 1$，且$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

(2) 单调不减性：对于任意$x_1<x_2$，有$F(x_1)\le F(x_2)$；

(3) 右连续性：$F(x)=F(x+0)$.

3.利用分布函数求事件的概率

已知随机变量X的分布函数为$F(x)$，则有

(1) $P\{X\le a\}=F(a)$.

(2) $P\{X>a\}=1-P\{X\le a\}=1-F(a)$.

(3) $P\{X<a\}=F(a-0)=\lim\limits_{x\to a^-}F(x)$.

(4) $P\{X=a\}=P\{X\le a\}-P\{X<a\}=F(a)-F(a-0)$.

(5) $P\{a<X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X\le a\}=F(b)-F(a)$.

(6) $P\{a<X<b\}=P\{X<b\}-P\{X\le a\}=F(b-0)-F(a)$.

(7) $P\{a\le X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X<a\}=F(b)-F(a-0)$.

(8) $P\{a\le X<b\}=P\{X<b\}-P\{X<a\}=F(b-0)-F(a-0)$.

【例 2.1】设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases} a+\dfrac{b}{(1+x)^2}, & x>0, \\ c, & x\le 0. \end{cases}$求$a,b,c$的值.

三、离散型随机变量及其分布

1.离散型随机变量的概率分布

定义：设 X 为离散型随机变量，其可能取值为 $x_1, x_2, \cdots x_k, \cdots$ ，X 取各个值 x_k 的概率为 $P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots)$，其中(1) $p_k \ge 0\ (k=1,2,\cdots)$；(2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k =1$，则称 $P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots)$ 为随机变量 X 的概率分布或分布律，也可记为

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_k	$\cdots$

【例 2.2】 10 件产品中有 2 件次品，现任取 3 件，以 X 表示取到的次品数，求 X 的概率分布.

【例 2.3】求例 2.2 中随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，画出 $F(x)$ 的图形，并求概率 $P\left\{X \le 1.5\right\}, P\left\{0 \le X < 2\right\}, P\left\{0 < X \le 2\right\}$.

四、连续型随机变量的概率分布

1.概率密度

设随机变量 X 的分布函数为 $F\left(x\right)$，存在非负可积函数 $f\left(x\right) \ge 0\ (-\infty < x < +\infty)$，使得对于任意实数 x，有

$$F(x)=P\{X \le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

则称 X 为连续型随机变量，函数 $f\left(x\right)$ 称为 X 的概率密度函数(简称概率密度).

2. 性质

(1) 非负性： $f\left(x\right)\geq 0$.

(2) 规范性： $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$.

(3) 连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是连续函数，因此在任何给定值的概率都是零，即对于任何实数 a，有 $P\left\{X=a\right\}=0$.

(4) 对于任意实数 a 和 $b(a<b)$，有 $P\{a<X\leq b\}=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$.

(5) 在 $f\left(x\right)$ 的连续点处，有 $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

【例 2.4】设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=a+b\arctan x,(x\in(-\infty,+\infty)).$$

(I)求常数 a,b；(II)求 X 的概率密度 $f(x)$；(III)求 $P\left\{X^2\geq 1\right\}$.

五.常考的分布

(1) $0-1$分布

若随机变量 X 只有两个可能的取值 0 和 1，其概率分布为

$$P(X=x_i)=p^{x_i}(1-p)^{1-x_i},x_i=0,1$$

则称 X 服从 $0-1$ 分布.

(2) 二项分布 $B(n,p)$

设事件 A 在任意一次试验中出现的概率都是 $p\ (0<p<1)$. X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，则 X 所有可能的取值为 $0,1,2,\cdots,n$，且相应的概率为

$$P\left\{X=k\right\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n.\text{记为 } X\sim B(n,p).$$

(3) 几何分布 $G(P)$

若 X 的概率分布为

$$P\left\{X=k\right\}=(1-p)^{k-1}p,(0<p<1),k=1,2,\cdots,$$

则称 X 服从几何分布.记为 $X\sim G(P)$.

(4) 泊松分布 $P(\lambda)$

设随机变量 X 的概率分布为

$$P\left\{X=k\right\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}(\lambda>0),k=0,1,2,\cdots,$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X \sim P(\lambda)$.

(5) 超几何分布 $H(N,M,n)$

设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},k=0,1,2,\cdots,n,$$

其中 M,N,n 都是正整数，且 $n \le M \le N$，则称 X 服从参数为 N,M,n 的超几何分布，记为 $X \sim H(N,M,n)$.

【例 2.5】 设随机变量 X 服从参数为 $(2,p)$ 的二项分布，随机变量 Y 服从参数为 $(3,p)$ 的二项分布.若 $P\{X \ge 1\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{Y \ge 1\}=$ ______.

【例 2.6】 设离散型随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布,已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$,则 $\lambda=$ ______.

(6) 均匀分布 $U(a,b)$

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$ 则称 X 服从 (a,b) 上的均匀分布，记为 $X \sim U(a,b)$.

随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x<b,\\ 1, & x \ge b.\end{cases}$

(7) 指数分布 $E(\lambda)$

若连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x \le 0,\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$ 为参数，则称 X 服从参数为 λ 的指数分布，记为 $X \sim E(\lambda)$.

随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(8) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

一般正态分布

若连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$；其中 $\mu,\sigma\left(\sigma>0\right)$ 为常数，则称 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

标准正态分布

1)定义：当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 的正态分布称为标准正态分布，记作 $N(0,1)$，其概率密度用 $\varphi(x)$ 表示，分布函数用 $\Phi(x)$ 表示.其中

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<+\infty).$$

2)性质

对称性：密度函数为偶函数，即 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，密度函数图形关于 y 轴对称.

常用公式：$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$；$\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$；$P\left\{|X|\le a\right\}=2\Phi(a)-1$.

标准正态分布与一般正态分布的关系

一般正态分布 $X\sim N(u,\sigma^2)$，可以通过线性变换 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 转化为标准正态分布.

【例 2.7】随机变量 K 在 $(0,5)$ 上服从均匀分布，则关于 x 的一元二次方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的概率为________.

【例 2.8】随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\left\{-2<X<4\right\}=$ ________.

【例 2.9】 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $\Phi(3)=0.9987$，则 $P\left\{\left|X-\mu\right|<3\sigma\right\}=$ ________.

六、随机变量函数的分布

1.离散型随机变量的函数分布

设 X 是离散型随机变量，概率分布为 $P\left\{X=x_k\right\}=p_k, k=1,2,\cdots$,则随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 取值 $g(x_k)$ 的概率为 $P\left\{Y=g(x_k)\right\}=p_k, k=1,2,\cdots$.

如果 $g(x_k)$ 中出现相同的函数值，则将它们相应的概率之和作为随机变量 $Y=g(X)$ 取该值的概率，就可以得到 $Y=g(X)$ 的概率分布.

2.连续型随机变量函数的概率密度

已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$， $Y=g(X)$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

方法：分布函数法

先求随机变量 Y 的分布函数 $F_Y(y)=P\left\{Y\le y\right\}=P\left\{g(X)\le y\right\}=\int_{g(x)\le y} f_X(x)dx$，然后分布函数求导得概率密度 $f_Y(y)=F_Y'(y)$.

【例 2.10】 随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

求 $Y=X^2$ 的概率分布.

【例 2. 11】设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布, 求随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y)=$______.

典型例题

【例 2.12】已知 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 是分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是连续函数，则下述函数一定是概率密度的是（　　）

（A）$f_1(x)f_2(x)$　　（B）$2f_2(x)F_1(x)$

（C）$f_1(x)F_2(x)$　　（D）$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

【例 2.13】设随机变量 X 在 $(2,5)$ 上服从均匀分布，现在对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

【例 2.14】若随机变量 $X \sim N(2,\sigma^2)$，且 $P\left\{2<X<4\right\}=0.3$，则 $P\left\{X<0\right\}=$ ____ .

【例 2.15】设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, -1<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, \quad 0\le x<2,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

第三章　二维随机变量及其分布

一、二维离散型随机变量

1. 二维离散型随机变量定义

如果二维随机变量(X,Y)可能取值为有限对或无限可列多对实数，则称(X,Y)为二维离散型随机变量.

2. 联合概率分布

设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能取值为(x_i,y_j) $(i,j=1,2,\cdots)$，且相应的概率为

$$P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=p_{ij},(i,j=1,2,\cdots),$$

且(1) $p_{ij}\geq 0$，$i,j=1,2,\cdots$，(2) $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=1$，则称为二维离散型随机变量$(X,Y)$的概率分布或随机变量$X$和$Y$的联合概率分布.

3. 边缘概率分布

二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

$$P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots.$$

则X的边缘概率分布为

$$P\left\{X=x_i\right\}=P\left\{X=x_i,Y<+\infty\right\}=\sum_{j=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}(i=1,2,\cdots)$$

Y的边缘概率分布为

$$P\left\{Y=y_j\right\}=P\left\{X<+\infty,Y=y_j\right\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}(j=1,2,\cdots)$$

4. 条件概率分布

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

$$P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots.$$

(1) 对于给定的j，如果$P\left\{Y=y_j\right\}>0(j=1,2,\cdots)$，则称

$$P\left\{X=x_i\middle|Y=y_j\right\}=\frac{P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}}{P\left\{Y=y_j\right\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},i=1,2,\cdots,$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量X的条件概率分布.

(2) 对于给定的i，如果$P\left\{X=x_i\right\}>0(i=1,2,\cdots)$，则称

$$P\left\{Y=y_j\middle|X=x_i\right\}=\frac{P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}}{P\left\{X=x_i\right\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},i=1,2,\cdots,$$

为在$X=x_i$条件下随机变量Y的条件概率分布.

5. 离散型随机变量 X 与 Y 的独立性

如果 (X,Y) 是二维离散型随机变量，则随机变量 X 和 Y 相互独立的充分必要条件是

$$P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=P\left\{X=x_i\right\}P\left\{Y=y_j\right\},i,j=1,2,\cdots .$$

即 $p_{ij}=p_{i\cdot}\times p_{\cdot j}$， $i,j=1,2,\cdots$.

【例 3.1】设随机变量 X 和 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量 (X,Y) 的概率分布及关于 X 和 Y 的边缘概率分布的部分数值，将剩余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			

【例 3.2】设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	$\frac{1}{3}$	0	a
1	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{12}$

且 $P\{X+Y=1|X=0\}=\dfrac{1}{3}$. 求常数 a,b .

二、二维连续型随机变量

1. 定义

设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，如果存在非负可积的二元函数 $f(x,y)$，使得对任意实数 x,y，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv\ ,$$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量，称函数$f(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的概率密度函数或随机变量X和Y的联合概率密度.

2. 性质

(1) **非负性：** $f(x,y)\geq 0$；

(2) **规范性：** $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$；

(3) 若$f(x,y)$在点(x,y)处连续，则有$f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$；

(4) 设D是xoy平面上任一区域，则随机点(X,Y)落在D内的概率为：

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy\ .$$

3. 边缘概率密度

设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，则

X的边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$；

Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$.

4. 条件概率密度

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，则

（1）对于给定的实数y，边缘概率密度$f_Y(y)>0$，

则称$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在条件$Y=y$下$X$的条件概率密度.

（2）对于给定的实数x，边缘概率密度$f_X(x)>0$，

则称$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$为在条件$X=x$下$Y$的条件概率密度.

5. 二维连续型随机变量的独立性

如果二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，边缘概率密度分别为$f_X(x)$和$f_Y(y)$，则随机变量X和Y相互独立的充要条件是$f(x,y)=f_X(x)\times f_Y(y)$，$\forall x,y\in R$.

【例 3.3】 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}kx, 0<x\leq y<1,\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$求

(I)常数k；（II)计算$P\{X+Y\leq 1\}$.

【例 3.4】设二维随机变量(X,Y)服从区域G上的均匀分布，其中G是由

$x-y=0,x+y=2$与$y=0$所围成的区域.

(1)求边缘概率密度 $f_X(x)$；

(2)求条件密度函数 $f_{X|Y}(x\mid y)$.

三、两个常见的二维连续型随机变量的分布

1. 二维均匀分布

定义：设G是平面上有界可求面积的区域，其面积为S_G，若二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_G},(x,y)\in G,\\ 0,\quad (x,y)\notin G,\end{cases}$$

则称(X,Y)服从区域G上的二维均匀分布.

性质：若在各边平行于坐标轴的矩形区域$D=\{(x,y)|a<x<b,c<y<d\}$上服从均匀分布的二维连续型随机变量(X,Y)，则它的两个分量X和Y是相互独立的，并且分别服从区间$(a,b),(c,d)$上的一维均匀分布.

【例 3.5】设(X,Y)在区域$D=\{(x,y)|0<x<2,1<y<2\}$上服从均匀分布.

(I)求边缘概率密度 $f_X(x)$，　$f_Y(y)$；

(II)判断X和Y是否相互独立.

2. 二维正态分布

如果二维连续型随机变量$\left(X,Y\right)$的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$x,y\in R$，其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$均为常数，则称$\left(X,Y\right)$服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$和$\rho$的二维正态分布，记作$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，也称$\left(X,Y\right)$为二维正态随机变量.

若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则有以下重要性质：

(1) 边缘分布都是服从一维正态分布，即

$$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right).$$

(2) X 和Y任意的非零线性组合$aX+bY$服从一维正态分布.

(3) X 和Y相互独立的充要条件是相关系数$\rho=0$.

【例 3.6】设(X,Y)服从二维正态分布$N(2,0,4,9;0)$，求概率$P\{XY-2Y<0\}$.

四、二维随机变量函数的分布

1. 两个离散型随机变量函数的概率分布

已知(X,Y)的概率分布为$P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=P_{ij},i,j=1,2,\cdots$，则$Z=g(X,Y)$的概率分布为

$Z=g(X,Y)$	$g(x_1,y_1)$	$\cdots$	$g(x_i,y_j)$	$\cdots$
P	p_{11}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$

【例 3.7】设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$

求 $X+Y, XY$ 的概率分布.

2. 两个连续型随机变量连续函数的分布

已知二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$，求随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

采用分布函数法：先求出 Z 的分布函数 $F_Z(z)$，然后求导得到概率密度 $f_Z(z)=F_Z'(z)$.

【例 3.8】设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.

答案：$F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z\geq 0.\end{cases}$

3. 一个离散型一个连续型随机变量的连续函数的分布

设 X 是离散型随机变量，它的概率分布为 $P\left\{X=x_i\right\}=p_i$，$i=1,2,\cdots,m$；$Y$ 是连续型随机变量，它的概率密度是 $f_Y\left(y\right)$，求连续函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布.

【例 3.9】设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\dfrac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

4. 最大值最小值的函数分布

一般地，对任意常数 C，有

$$\left\{\max\left(X,Y\right)\ge C\right\}=\left\{X\ge C\right\}\cup\left\{Y\ge C\right\},$$

$$\left\{\max\left(X,Y\right)\le C\right\}=\left\{X\le C\right\}\cap\left\{Y\le C\right\}$$

$$\left\{\min\left(X,Y\right)\ge C\right\}=\left\{X\ge C\right\}\cap\left\{Y\ge C\right\},$$

$$\left\{\min\left(X,Y\right)\le C\right\}=\left\{X\le C\right\}\cup\left\{Y\le C\right\}.$$

【例 3.10】 设随机变量 X 与 Y 独立，且均服从 $\left(0,3\right)$ 上的均匀分布，则 $P\left\{\max(X,Y)\le 1\right\}=$________，$P\left\{\min(X,Y)\le 1\right\}=$___________.

【例 3.11】 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从参数为 1 的指数分布，$V=\min\left(X,Y\right),U=\max\left(X,Y\right)$.分别求随机变量 U 和 V 的概率密度.

典型例题

【例 3.12】 设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

$Y \backslash X$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立. 求a,b.

【例 3.13】 设随机变量$X \sim U(0,1)$，当$X=x$时，随机变量Y在区间$\left(0,\dfrac{1}{x}\right)$上服从均匀分布.

(I) 求(X,Y)的概率密度$f(x,y)$；

(II) 求Y的边缘概率密度$f_Y(y)$；

(III) 求$P\{X>Y\}$.

【例 3.14】设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，Y 服从参数为 $\mu(\mu>0)$ 的指数分布. 引入随机变量 $Z=\begin{cases}1, X\le Y,\\ 0, X>Y.\end{cases}$，求随机变量 Z 的概率分布.

【例3.15】设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$，求

(I) $P\left\{Z\le\dfrac{1}{2}\middle|X=0\right\}$；

(II) Z 的概率密度.

第四章　随机变量的数字特征

一、随机变量的数学期望

1.离散型随机变量的数学期望

(1) 一维离散型随机变量的数学期望

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots)$，若级数 $\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ 绝对收敛，则称 $\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ 为随机变量 X 的数学期望，记作 $E(X)$，即 $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$；如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\cdot p_i$ 发散，则称 X 的数学期望不存在.

(2) 一维离散型随机变量函数的数学期望

若 X 是离散型随机变量，其概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i,i=1,2,\cdots$，$g(x)$ 为连续函数，$Y=g(X)$，若级数 $\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则 $E[g(X)]$ 存在，且 $E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$.

(3) 二维离散型随机变量函数的数学期望

若 (X,Y) 是二维离散型随机变量，其概率分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

$g(x,y)$ 为二元连续函数，$Z=g(X,Y)$，当 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛时 $E[g(X,Y)]$ 存在，且 $E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$.

2.连续型随机变量的数学期望

(1) 一维连续型随机变量的数学期望

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 为 X 的数学期望，记 $E(X)$，即 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$；若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx$ 发散，则称 X 的数学期望不存在.

(2) 一维连续型随机变量函数的数学期望

若 X 是连续型随机变量，其密度函数为 $f_X(x)$，$g(x)$ 为连续函数，$Y=g(X)$，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx$ 绝对收敛，则 $E[g(X)]$ 存在，且

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx.$$

(3) 二维连续型随机变量函数的数学期望

若(X,Y)是二维连续型随机变量，其密度函数为$f(x,y)$，$Z=g(X,Y)$则当广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$绝对收敛时，$E\left[g(X,Y)\right]$存在，且

$$E(Z)=E\left[g(X,Y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy.$$

3.随机变量数学期望的性质

(1) 设C为常数，则有$E(C)=C$；

(2) 设X为一随机变量，且$E(X)$存在，C为常数，则

$$E(CX)=CE(X);$$

(3) 设X与Y是两个随机变量，则有$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

(4) 设X与Y相互独立，则有$E(XY)=\left[E(X)\right]\left[E(Y)\right]$；

【例 4.1】已知随机变量的概率分布：

X	-1	0	1	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

求$Y=X^2$的数学期望.

【例 4.2】设随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0	0.3	0.1

(I) 求$E(X),E(Y)$；

(II) 求$E\left(\frac{Y}{X}\right)$.

【例 4.3】设 $X \sim U(0,\pi)$，求 $E(X)$ 与 $E(\sin X)$.

【例 4.4】设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, 0\le y\le x\le 1,\\ 0, \quad \text{其它}.\end{cases}$$

求 $E(X), E(XY), E(X^2+Y^2)$.

二、随机变量的方差

1.随机变量方差的定义

设 X 是一个随机变量，如果 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差，记作 $D(X)$，即 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$，称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差或均方差.

2.方差的计算

(1) 定义法

离散情形：若 X 是离散型随机变量，其概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\cdots$

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=\sum_i [x_i-E(X)]^2 p_i.$$

连续情形：设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx.$$

(2) 公式法

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

3.方差的性质

(1) 设 C 为常数，则 $D(C)=0$.

(2) 如果 X 为随机变量，C 为常数，则 $D(CX)=C^2D(X)$.

(3) 如果 X 为随机变量，C 为常数，则有 $D(X+C)=D(X)$.

由性质**(2) (3)**可得 $D(aX+b)=a^2D(X)$ （a,b 为任意常数).

(4) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$.

【例 4.5】设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)|0<x<1,|y|<x\}$ 上服从均匀分布，求随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.

三、常见随机变量的期望与方差

1. $0-1$ **分布**

如果随机变量 X 服从 $0-1$ 分布，即 $P\{X=i\}=p^i(1-p)^{1-i}(i=0,1)$ 则

$$E(X)=p,D(X)=p(1-p).$$

2.二项分布 $B(n,p)$

若 $X\sim B(n,p)$，它的概率分布为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n$$

则其数学期望 $E(X)=np$，方差 $D(X)=np(1-p)$.

3.泊松分布 $P(\lambda)$

若 $X\sim P(\lambda)$，它的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$， $k=0,1,2,\cdots$ 其中 $\lambda>0$ 为参数，则数学期望 $E(X)=\lambda$，方差 $D(X)=\lambda$.

4.均匀分布 $U(a,b)$

若 $X\sim U(a,b)$，它的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0\ , & \text{其它}.\end{cases}$ 则数学期望

$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$，方差 $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

5.指数分布 $X\sim E(\lambda)$

若 $X\sim E(\lambda)$，它的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$ 为参数，则数学期望 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$，方差 $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

6.正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，它的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

其中 μ,σ 为常数，$-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$，则数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，特别地，$X\sim N(0,1)$，则 $E(X)=0,D(X)=1$.

【例 4.6】设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $E(X+e^{-2X})=$______.

【例 4.7】设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 X^2 的数学期望 $E(X^2)=$______.

【例 4.8】设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 在 $(0,6)$ 上服从均匀分布，X_2 服从正态分布 $N(0,2^2)$，X_3 服从参数为 $\lambda=3$ 的泊松分布，记 $Y=X_1-2X_2+3X_3$，则 $D(Y)=$______.

【例4.9】设两个随机变量 X,Y 相互独立，且都服从均值为0，方差为 $\dfrac{1}{2}$ 的正态分布，求随

机变量$|X-Y|$的方差.

四、协方差和相关系数

1.协方差

(1) 定义

(X,Y)是二维随机变量，设$E(X)$和$E(Y)$都存在，若$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$存在，则称其为随机变量X和Y的协方差，记$Cov(X,Y)$，即

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

(2) 计算公式

对于任意两个随机变量X和Y，有：

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

(3) 性质

1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$；

2) $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$，其中a,b为任意常数；

3) $Cov(C,X)=0$其中C为任意常数；

4) $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$；

5) 如果X和Y相互独立，则$Cov(X,Y)=0$.

2.相关系数

(1)定义

(X,Y)是二维随机变量，设X和Y的方差均存在，且都不为零，则称

$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$为$X$和$Y$的(线性)相关系数.

(2) 相关系数的性质

1) $|\rho_{XY}|\le 1$；

2) $|\rho_{XY}|=1$的充分必要条件是X和Y以概率 1 线性相关，即存在常数a和b，使得$P\{Y=a+bX\}=1$，当$b>0$时，$\rho_{XY}=1$；$b<0$时，$\rho_{XY}=-1$.

【例4.10】设随机变量(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 X,Y 的相关系数 $\rho=$ ________，$Cov(X^2,Y^2)=$ ____________.

【例 4.11】设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1,|y|<x,0<x<1,\\ 0,\text{其它}.\end{cases}$$

求 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

五、随机变量的矩

1. k 阶原点矩

设 X 和 Y 为随机变量，如果 $E\left(X^k\right)$ $(k=1,2,\cdots)$ 存在，则称 $E\left(X^k\right)$ 为 X 的 k 阶原点矩，记为 μ_k.

2. k 阶中心矩

如果 $E\left\{\left[X-E\left(X\right)\right]^k\right\}$ $(k=1,2,\cdots)$ 存在，则称 $E\left\{\left[X-E\left(X\right)\right]^k\right\}$ 为 X 的 k 阶中心矩，记为 v_k.

典型例题

【例4.12】设 $X\sim N(0,1)$，$Y=X^2$，求 ρ_{XY}.

【例 4.13】将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于（　　）

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) 1.

【例 4.14】设 X 是一随机变量，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2(\sigma>0)$ 则对任意常数 c，必有（　）

(A) $E(X-c)^2=E(X^2)-c^2$　　(B) $E(X-c)^2=E(X-\mu)^2$

(C) $E(X-c)^2<E(X-\mu)^2$　　(D) $E(X-c)^2\ge E(X-\mu)^2$

第五章　大数定律和中心极限定理

一、切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$ 都存在，则对任意 $\varepsilon>0$ 均有

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \text{ 或 } P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

【例 5.1】设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式，有 $P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq$ ________ .

二、大数定律

1. 依概率收敛

设 $X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$ 是一个随机变量序列，a 是一个常数，如果对于任意给定的正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1$，则称随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$ 依概率收敛于 a，记作 $X_n\xrightarrow{P}a$.

2. 切比雪夫大数定律(一般情形)

设 $X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$ 是由两两不相关(或两两独立)的随机变量所构成的序列，分别具有数学期望 $E(X_1),E(X_2)\cdots,E(X_n),\cdots$ 和方差 $D(X_1),D(X_2)\cdots,D(X_n),\cdots$，并且方差有公共上界，即存在正数 M，使得 $D(X_n)\leq M, n=1,2,\cdots$，则对于任意给定的正数 ε，总有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}EX_k\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

3. 独立同分布的切比雪夫大数定律(特殊情形)

设随机变量 $X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$ 相互独立，服从相同的分布，具有数学期望 $E(X_n)=\mu$ 和方差 $D(X_n)=\sigma^2$（$n=1,2,\cdots$，）则对于任意给定的正数 ε，总有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

即随机变量序列 $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{P}\mu$.

4. 伯努利大数定律

设在每次实验中事件 A 发生的概率 $P(A)=p$，在 n 次独立重复实验中，事件 A 发生的频率为 $f_n(A)$，则对于任意正数 ε，总有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|f_n(A)-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

5. 辛钦大数定律

设随机变量 $X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$ 相互独立，服从相同的分布，具有数学期望 $E\left(X_n\right)=\mu$（$n=1,2,\cdots$），则对于任意给定的正数 ε，总有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

【例 5.2】设总体 X 服从参数为 2 的指数分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于__________.

三、中心极限定理

1. 棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理

设随机变量 X_n 服从参数为 n,p 的二项分布，即 $X_n\sim B(n,p)(0<p<1,n=1,2,\cdots)$，则对于任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\Phi(x).$$

2. 列维——林德伯格中心极限定理

设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，服从相同的分布，具有数学期望 $E\left(X_n\right)=\mu$ 方差 $D\left(X_n\right)=\sigma^2$（$n=1,2,\cdots$）则对于任意实数 x，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right\}=\Phi(x)$.

【例5.3】设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$，则根据列维—林德柏格中心极限定理，当 n 充分大时，S_n 近似服从正态分布，只要 $X_1,X_2,\cdots,X_n$（　　）

(A) 有相同的数学期望.　　(B) 有相同的方差.

(C) 服从同一指数分布.　　(D) 服从同一离散型分布.

【例 5.4】 设 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n, \cdots$ 为独立同分布的随机变量列，且均服从参数为 $\lambda(\lambda>1)$ 的指数分布，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则（　）

$$(A)\quad \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \le x\} = \Phi(x).$$

$$(B)\quad \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x\} = \Phi(x).$$

$$(C)\quad \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\} = \Phi(x).$$

$$(D)\quad \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x\} = \Phi(x).$$

第六章 数理统计的基本概念

一、总体和样本

1. 总体：在数理统计中所研究对象的某项数量指标 X 取值的全体称为总体. X 是一个随机变量， X 的分布函数和数字特征分别称为总体的分布函数和数字特征.

2. 个体：总体中的每个元素称为个体，每个个体是一个实数.

3. 总体容量：总体中个体的数量称为总体的容量. 容量为有限的总体称为有限总体，容量为无限的总体称为无限总体.

4. 简单随机样本：与总体 X 具有相同的分布，并且每个个体 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 之间是相互独立的，则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，简称样本，n 称为样本容量. 它们的观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为样本观测值，简称为样本值.

5. 样本的联合分布

(1) 联合分布函数

如果总体 X 的分布函数为 $F(x)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布函数为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i).$$

(2) 联合概率密度

如果总体 X 的概率密度为 $f(x)$，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合概率密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i).$$

6. 统计量及抽样分布

(1) 统计量

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$g(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是一个不含未知数的 n 元函数，则称随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数 $T=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为一个统计量. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本值，则称 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为统计量 $T=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的观测值.

(2) 抽样分布

统计量是样本的函数，是一个随机变量，统计量的分布称为抽样分布.

二、常用统计量

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本值．若总体 X 的期望、方差都存在，即 $E\left(X\right)=\mu$，$D\left(X\right)=\sigma^2$.

1. **样本均值** $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$

2. **样本方差** $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，

样本标准差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$，

3. **样本 k 阶原点矩** $A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$

4. **样本 k 阶中心矩** $B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$

【例 6. 1】设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$，总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则

$$E\left\{\frac{1}{n_1+n_2-2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2\right]\right\}=\_\_\_\_\_\_.$$

三、常用统计量的抽样分布

1. χ^2 **分布**

(1) **典型模式**

设随机变量 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 相互独立，都服从标准正态分布 $N(0,1)$，则随机变量 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2\sim\chi^2(n)$.

(2) χ^2 **分布的性质**

1) 设 $\chi_1^2\sim\chi_1^2(n_1),\chi_2^2\sim\chi_2^2(n_2)$，并且 χ_1^2 和 χ_2^2 相互独立，则 $\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$.

2) 如果 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，则有 $E\left(\chi^2\right)=n,D\left(\chi^2\right)=2n$.

(3) **上 α 分位点 $\chi_\alpha^2(n)$**

设 $\chi^2\sim\chi_\alpha^2(n)$，对于任给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件 $P\left\{\chi^2(n)>\chi_\alpha^2(n)\right\}=\alpha$ 的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 的上 α 分位点.

2. t 分布

(1) **典型模式**

设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1),\ Y\sim\chi^2(n)$，则随机变量 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记作 $t\sim t(n)$.

(2) **t 分布的性质**

$t(n)$ 分布的概率密度 $f(x)$ 是偶函数，即当 n 充分大时，$t(n)$ 分布近似 $N(0,1)$ 分布.

(3) **上 α 分位点 $t_\alpha(n)$**

设 $t\sim t(n)$，对于任给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件 $P\left\{t(n)>t_\alpha(n)\right\}=\alpha$ 的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 的上 α 分位点.

由于 $t(n)$ 分布的概率密度是偶函数，因此 $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$

3. F 分布

(1) **典型模式**

设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim\chi^2(m),Y\sim\chi^2(n)$ ，则随机变量 $F=\dfrac{X/m}{Y/n}$ 服从自由度为 (m,n) 的 F 分布，记作 $F\sim F(m,n)$.

(2) F 分布的性质

设 $F\sim F(m,n)$，则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n,m)$.

(3) **上 α 分位点 $F_\alpha(m,n)$**

设 $F\sim F(m,n)$，对于任给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件 $P\left\{F>F_\alpha(m,n)\right\}=\alpha$ 的点 $F_\alpha(m,n)$ 为 $F(m,n)$ 的上 α 分位点，且有 $F_{1-\alpha}(m,n)=\dfrac{1}{F_\alpha(n,m)}$.

【例 6.2】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是来自正态总体 $X\sim N(0,2^2)$ 的简单随机样本，求不为零的常数 a,b,c 使

$$Q=aX_1^2+b\left(X_2+X_3\right)^2+c\left(X_4+X_5+X_6\right)^2$$

服从 χ^2 分布，并求自由度 n.

【例 6.3】已知随机变量 $X \sim t(n)$，则 $X^2 \sim$ ________.

四、正态总体的抽样分布

1. 一个正态总体

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，则有

(1) $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$，$U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

(2) $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，且 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] \sim \chi^2(n-1)$.

(3) $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

(4) $\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$.

【例 6.4】设 $X_1, X_2, \Lambda, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则（　）

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$.　　(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$.

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$.　　(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$.

典型例题

【例 6.5】设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,3^2)$，而 $X_1,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则统计量 $U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从________分布，参数为__________.

【例 6.6】设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S_n^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，求 $E\left(\bar{X}S_n^2\right)$.

【例 6.7】设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则 $D\left(S^2\right)=$ __________.

第七章　参数估计与假设检验

一、点估计

1. 点估计的概念

设总体 X 的分布形式已知，但含有未知参数 θ；或者总体的某数字特征存在但未知.

设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本值. 所谓的点估计就是构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，用它估计未知参数 θ，用它的观测值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 作为未知参数 θ 的近似值，称统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为未知参数 θ 的估计量，$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 θ 的一个估计值.

2. 点估计的方法

(1) 矩估计法

1) 矩估计法思想

矩法的基本思想是用样本的 k 阶原点矩 $A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$ 作为总体的 k 阶原点矩 $\mu_k=E\left(X^k\right)$ 的估计.

2) 矩估计法的解题思路

当只有一个未知参数时，我们就用样本的一阶原点矩即样本均值来估计随机变量的一阶原点矩即期望. 令 $\overline{X}=E\left(X\right)$. 解出未知参数，就是其矩估计量.

如果有两个未知参数，那么除了要用一阶矩来估计外，还要用二阶矩来估计. 因为两个未知数，需要两个方程才能解出. 解出未知参数，就是参数的矩估计.

(2) 最大似然估计法

1) 离散型随机变量

设总体 X 是离散型随机变量，概率分布为

$$P\left\{X=t_i\right\}=p(t_i;\theta),i=1,2,\cdots,$$

其中 $\theta\in\mathbf{\Theta}$ 为待估参数.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本值，称函数 $L(\theta)=L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}p\left(x_i;\theta\right)$ 为样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的似然函数. 如果 $\hat{\theta}\in\mathbf{\Theta}$，使得 $L(\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta)$，这样的 $\hat{\theta}$ 与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有关，记作 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称为未知参数 θ 的最大似然估计值，相应的统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为 θ 的最大似然估计量.

2)连续型随机变量

设总体 X 的概率密度函数 $f\left(x;\theta\right)$，其中 $\theta\in\Theta$ 为待估参数，设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本值，称函数

$L(\theta)=L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta\right)=\prod\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i;\theta\right)$ 为样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的似然函数. 如果 $\hat{\theta}\in\Theta$，使得 $L(\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta} L(\theta)$，这样的 $\hat{\theta}$ 与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有关，记作 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称为未知参数 θ 的最大似然估计值，相应的统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为 θ 的最大似然估计量.

3)最大似然估计法的步骤

第一步：写出似然函数

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i,\theta_1,\cdots,\theta_m)\qquad\text{（离散型）}$$

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta_1,\cdots,\theta_m);\qquad\text{（连续型）}$$

第二步：对似然函数取对数 $\ln L$；

第三步：分别对 $\theta_1,\cdots,\theta_m$ 求偏导数 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta_i},i=1,\cdots,m$

第四步：判断方程组 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta_i}=0$ 是否有解. 若有解，则其解即为所求最大似然估计；若无解，则最大似然估计常在 θ_i 的边界点上达到.

(3)估计量的评选标准（数一)

1)无偏性

如果 θ 的估计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的数学期望 $E\left(\hat{\theta}\right)$ 存在，且对于任意 $\hat{\theta}\in\Theta$， 有 $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$， 则称是未知参数 θ 的无偏估计量.

2)有效性

设 $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是未知参数 θ 的无偏估计量，如果对于任意 $\hat{\theta}\in\Theta$， 有 $D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$， 且至少有一个 $\theta\in\Theta$， 使上式中的不等式成立， 则称 $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 比 $\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 更有效.

3)一致性(相合性)

设 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量， 如果对于任意 $\theta\in\Theta$， 当 $n\to\infty$ 时， $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 依概率收敛于 θ，则称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为未知参数 θ 的一致估计量或相合估计量.

【例 7.1】设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$(1-2\theta)$

其中 $\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值

$$3,1,3,0,3,1,2,3,$$

求 θ 的矩阵估计值和最大似然函数估计值.

【例 7.2】设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 其中 $\theta>-1$ 是未知参数. X_1,X_2,Λ,X_n 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，求 θ 的矩估计量.

【例 7.3】设总体 X 服从参数为 (n,p) 的二项分布，其中 n 已知， p 未知 $(0<p<1)$. 设 X_1,X_2,Λ,X_n 为来自总体 X 的简单随机样本，求参数 p 的最大似然估计量.

【例 7.4】设总体 X 的概率密度为 $f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$ 是未知参数，$\alpha>0$ 是已知常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$.

二、区间估计（数一）

1. 置信区间

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，其中 θ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 对于给定的 α $(0<\alpha<1)$，如果两个统计量 $\theta_1=\theta_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\theta_2=\theta_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，满足 $P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha$，则称随机区间 (θ_1,θ_2) 为参数 θ 的置信水平（或置信度）是 $1-\alpha$ 的置信区间（或区间估计），简称为 θ 的 $1-\alpha$ 的置信区间，θ_1 和 θ_2 分别称为置信下限和置信上限.

2. 一个正态总体的区间估计

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2.

未知参数		$1-\alpha$ 置信区间
μ	σ^2 已知	$\left(\overline{X}-u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
	σ^2 未知	$\left(\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$
σ^2	μ 已知	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$
	μ 未知	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

【例 7.5】设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知. 现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\bar{x}=20(cm)$，样本标准差 $s=1(cm)$，则 μ 的置信水平为 0.90 的置信区间是（ ）

(A) $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16))$.　　(B) $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16))$.

(C) $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$.　　(D) $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15))$.

三、假设检验（数一）

1. 假设检验

假设：关于总体分布的未知参数的假设，所提出的假设称为零假设或原假设，记为 H_0，对立于零假设的假设称为独立假设或备择假设，记为 H_1

假设检验：根据样本，按照一定规则判断所做假设 H_0 的真伪，并作出接受还是拒绝接受 H_0 的决定.

2. 两类错误

拒绝实际真的假设 H_0（弃真）称为第一类错误；

接受实际不真的假设 H_0（纳伪）称为第二类错误.

3. 显著性检验

在确定检验法则时，应尽可能地使犯两类错误的概率都小些，但是一般来说，当样本容量取定后，如果要减少犯某一类错误的概率，则犯另一类错误的概率往往要增大. 要使犯两类错误的概率都减少，只好加大样本容量. 在给定样本容量的情况下，我们总是控制犯第一类错误的概率，使它不大于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，这种检验问题称为显著性检验问题，给定的 α 称为显著性水平，通常取 $\alpha=0.1,0.05,0.01,0.001$.

在对假设 H_0 进行检验时，常使用某个统计量 T，称为检验统计量. 当检验统计量在某个区域 W 取值时，我们就拒绝假设 H_0，称区域 W 为拒绝域.

4. 显著性检验的一般步骤

(1) 根据问题要求提出原假设 H_0 和对立假设 H_1；

(2) 给出显著性水平 $\alpha(0<\alpha<1)$ 及样本容量 n；

(3) 确定检验统计量及拒绝域形式；

(4) 按犯第一类错误的概率等于 α，求出拒绝域 W；

(5) 根据样本值计算检验统计量T的观测值t，当$t\in W$时，拒绝原假设H_0，否则接受原假设H_0.

【例 7.6】$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X\sim N(\mu,8)$的简单随机样本，如果在$\alpha=0.05$水平上检验$H_0:\mu=\mu_0$；$H_1:\mu\neq\mu_0$，其拒绝域为$\left|\overline{X}-\mu_0\right|\geq 1.96$，其中$u_{0.025}=1.96$，则样本容量$n=$________________.

典型例题

【例 7.7】设总体X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \theta, & 1\leq x<2,\\ 2\theta, & 2\leq x<3,\\ 1, & 3\leq x,\end{cases}$其中$\theta$未知$(0<\theta<\frac{1}{2})$. 利用总体$X$的如下样本值$1,1,3,2,1,2,3,3$. 试求$\theta$的矩估计值和最大似然估计值.

【例7.8】设某种元件的使用寿命X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\geq\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数，又设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是X的一组样本观测值，求参数θ的最大似然估计值.