一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

答案：1. $\overline{X}$,$|\overline{x}-\mu_0|\sqrt{n}\ge u_{\alpha/2}$； 2. $\overline{Y}=(\overline{X}-a)/b$, $S_Y^2=S_X^2/b^2$; 3. 0.7; 4. 2;

5. $\dfrac{4p^3(1-p)}{nN}$; 6. $\left(\dfrac{\theta_0}{X_{(n)}}\right)^n$; 7. $D_n=\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|F_n(x)-F(x)|$; 8. $\chi^2(2)$

二、（12 分）解：因为 $\overline{X}_{n+1}-\overline{X}_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}X_i-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$$=\frac{1}{n+1}[\sum_{i=1}^{n+1}X_i-\frac{n+1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i]=\frac{1}{n+1}[\sum_{i=1}^{n+1}X_i-\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i]$$

$$=\frac{1}{n+1}[X_{n+1}-\overline{X}_n]$$

又 X_{n+1} 与 $\overline{X}_n$ 相互独立且分别服从正态分布，故 $Z=\overline{X}_{n+1}-\overline{X}_n$ 服从正态分布。

又 $E[\dfrac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)]=0$ ，

$$D[\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)]=(\frac{1}{n+1})^2[DX_{n+1}+D\overline{X}_n]=(\frac{1}{n+1})^2[\sigma^2+\sigma^2/n]=\frac{\sigma^2}{n(n+1)}$$

从而 Z 服从正态分布 $N(0,\sigma^2/n(n+1))$

又 S_n^2 与 X_{n+1} 独立， S_n^2 与 $\overline{X}_n$ 独立，所以 S_n 与 $X_{n+1}-\overline{X}_n$ 独立。

$$\frac{\dfrac{(\overline{X}_{n+1}-\overline{X}_n)-0}{\sqrt{\sigma^2/[n(n+1)]}}}{\sqrt{\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2(n-1)}}}=\frac{\overline{X}_{n+1}-\overline{X}_n}{S_n}\sqrt{(n-1)(n+1)}\sim t(n-1)$$

三、（12 分）解：（1）$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i}{\alpha}e^{-x_i^2/(2\alpha)}\right]=\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\alpha^n}\exp\{-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/(2\alpha)\}$

$\ln L(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln\alpha-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/(2\alpha)$，$\frac{d\ln L(\alpha)}{d\alpha}=-\frac{n}{\alpha}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\alpha^2}=0$

解之得 $\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}$，所以$\alpha$的极大似然估计量$\hat{\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}$

（2）

法一 $EX^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\frac{x}{\alpha}e^{-x^2/(2\alpha)}dx$

$$=2\alpha\int_0^{\infty}\frac{x^2}{2\alpha}e^{-x^2/(2\alpha)}d\frac{x^2}{2\alpha}=2\alpha$$

$$E(\hat{\alpha})=\mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}\right)=\frac{\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)}{2n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i^2)}{2n}=\frac{E(X^2)}{2}=\alpha$$

所以$\hat{\alpha}$是α的无偏估计。

$$L(\alpha)=\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\alpha^n}\exp\{-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/(2\alpha)\}=\frac{1}{\alpha^n}\exp\{-\frac{n}{\alpha}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}\}\prod_{i=1}^{n}x_i$$

所以$C(\alpha)=\frac{1}{\alpha^n},T=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2n},b(\alpha)=-\frac{n}{\alpha},h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}x_i$

$T=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}$是$\alpha$的充分完备统计量，所以

$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}\middle|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}$是$\alpha$的最小方差无偏估计量。

法二 根据法一知$\hat{\alpha}$是α的无偏估计，又易知$\hat{\alpha}$是α的充分统计量。

$$\frac{d\ln L(\alpha)}{d\alpha}=-\frac{n}{\alpha}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\alpha^2}=\frac{n}{\alpha^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}-\alpha\right)=\frac{n}{\alpha^2}(\hat{\alpha}-\alpha)$$

根据定理 2.11 可知，$\hat{\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}$ 是 α 的最小方差无偏估计量。

法三，利用罗克拉美下界。

根据法一知 $\hat{\alpha}$ 是 α 的无偏估计。

$$EX^4=\int_{-\infty}^{\infty}x^4 f(x)dx=\int_0^{\infty}x^4\frac{x}{\alpha}e^{-x^2/(2\alpha)}dx=4\alpha^2\int_0^{\infty}\left(\frac{x^2}{2\alpha}\right)^2 e^{-x^2/(2\alpha)}d\frac{x^2}{2\alpha}=8\alpha^2$$

$$I(\alpha)=E\left\{\left[\frac{d\ln f(x)}{d\alpha}\right]^2\right\}=E\left\{\left[-\frac{1}{\alpha}+\frac{X^2}{2\alpha^2}\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{E(X^2)}{\alpha^3}+\frac{E(X^4)}{4\alpha^4}=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2\alpha}{\alpha^3}+\frac{8\alpha^2}{4\alpha^4}=\frac{1}{\alpha^2}$$

所以罗克拉美下界为 $\frac{1}{nI(\alpha)}=\frac{\alpha^2}{n}$

$$D(\hat{\alpha})=D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}\right]=\frac{nD(X_i^2)}{4n^2}=\frac{D(X^2)}{4n}=\frac{E(X^4)-[E(X^2)]^2}{4n}$$

$$=\frac{8\alpha^2-[2\alpha]^2}{4n}=\frac{\alpha^2}{n}=\frac{1}{nI(\alpha)}$$

所以 $\hat{\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}$ 是 α 的最小方差无偏估计量。

四、（14 分）解：样本的联合分布密度为

$$q(x_1,x_2,\cdots,x_n\mid p)=\prod_{i=1}^{n}\left[\binom{x_i-1}{k-1}p^k(1-p)^{x_i-k}\right]=\left[\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i-1}{k-1}\right]p^{nk}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk}$$

而 p 的先验分布为 $\pi(p)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}, & 0<p<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 。

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,p)=\left[\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\prod_{i=1}^{p}\binom{x_i-1}{k-1}\right]p^{nk+a-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}$$

$$m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left[\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\prod_{i=1}^{p}\binom{x_i-1}{k-1}\right]\frac{\Gamma(nk+a)\Gamma(\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b)}{\Gamma(a+b+\sum_{i=1}^{n}x_i)}$$

所以 p 的后验分布为

$$h(p\mid x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\Gamma(a+b+\sum_{i=1}^{n}x_i)}{\Gamma(nk+a)\Gamma(\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b)}p^{nk+a-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}$$

此后验分布为贝塔分布 $Be(nk+a,\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b)$.

（1）在平方损失下， p 的贝叶斯估计为后验均值：

$$\hat{p}_B=E[p\mid \mathbf{x}]=\int_0^1 p\pi(\theta\mid x_1,x_2,\cdots,x_n)dp$$

$$=\frac{\Gamma(a+b+\sum_{i=1}^{n}x_i)}{\Gamma(nk+a)\Gamma(\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b)}\int_0^1 p^{nk+a+1-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}dp=\frac{nk+a}{a+b+\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

（2）在加权平方损失下， p 的贝叶斯估计为

$\hat{p}_{BJ}=\dfrac{E[w(p)p\mid \mathbf{x}]}{E[w(p)\mid \mathbf{x}]}$ ，其中 $w(p)=p$ ，而

$$E[w(p)p\mid \mathbf{x}]=E[p^2\mid \mathbf{x}]=\int_0^1 p^2\pi(p\mid \mathbf{x})dp=\frac{(nk+a+1)(nk+a)}{(a+b+1+\sum_{i=1}^{n}x_i)(a+b+\sum_{i=1}^{n}x_i)}$$

$$E[w(p) \mid \boldsymbol{x}] = E[p \mid \boldsymbol{x}] = \int_0^1 p\pi(p \mid \boldsymbol{x})dp = \frac{nk+a}{a+b+\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

故 $\hat{p}_{BJ} = \dfrac{E[w(p)p \mid \boldsymbol{x}]}{E[w(p) \mid \boldsymbol{x}]} = \dfrac{(nk+a+1)(nk+a)}{(a+b+1+\sum_{i=1}^{n} x_i)(a+b+\sum_{i=1}^{n} x_i)} \dfrac{a+b+\sum_{i=1}^{n} x_i}{nk+a}$

$$= \frac{nk+a+1}{a+b+1+\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

五、（14 分）解：(1)利用统计量 $F = S_{1n_1}^{*^2} / \sigma_1^2 [S_{2n_2}^{*^2} / \sigma_2^2]^{-1}$ 服从 $F\left(n_1 - 1, n_2 - 1\right)$

检验 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ，

H_0 成立的条件下检验统计量的观测值为 $F_0 = S_{1n_1}^{*^2} / S_{2n_2}^{*^2} = \dfrac{28^2}{28.5^2} = 0.965$

$\dfrac{1}{F_{0.025}(99,99)} < F_0 < F_{0.025}(99,99)$，所以接受原假设，认为两总体方差无显著差异。

(2)在上述条件下，再利用统计量

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\left(n_1 - 1\right) S_{1n_1}^{*^2} + \left(n_2 - 1\right) S_{2n_2}^{*^2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 \left(n_1 + n_2 - 2\right)}{n_1 + n_2}}$$ 服从 $t\left(n_1 + n_2 - 2\right)$

检验 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

H_0 成立的条件下检验统计量的观测值为

$$|T_0| = \left| \frac{280 - 286}{\sqrt{99 \times 28^2 + 99 \times 28.5^2}} \sqrt{\frac{100 \times 100 \times 198}{200}} \right| = 1.502 < t_{0.025}(198) = 1.972$$

所以接受原假设，认为两总体均值无显著差异。
综上可知两种工艺下细纱强力无显著差异。

六、（14 分）**解:** 要求检验假设 H_0：$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$，H_1：μ_1,μ_2,μ_3,μ_4不全相等。本题中$n=23, r=4, n_1=7, n_2=6, n_3=5, n_4=5, \overline{X}=47.8696$,

$$Q_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2=2708,\quad \overline{Q}_E=\frac{Q_E}{23-4}=142.5263$$

$$Q_A=\sum_{i=1}^{r}n_i(\overline{X}_i-\overline{X})^2=1456.6087,\quad \overline{Q}_A=\frac{Q_A}{4-1}=485.5362$$

$$Q_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X})^2=4164.6087,\quad F=\frac{\overline{Q}_A}{\overline{Q}_E}=3.4066$$

方差来源	平方和	自由度	均方	F值$(\alpha=0.05)$
因素 A	1456.6087	3	$\overline{Q_A}=485.5362$	$F=\frac{\overline{Q_A}}{\overline{Q_E}}=3.4066$
误差 E	2708	19	$\overline{Q_E}=142.5263$	
总和	4164.6087	22		

统计量 F 的自由度是 $(3,19)$，对 $\alpha=0.05$，$F_{0.05}(3,19)=3.127$，由于 $F=3.4066>3.127=F_{0.05}(3,19)$ 故拒绝假设 H_0，即认为行业对被投诉次数有显著差异 。

七、（14 分）解：记 $Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_7)^{\mathrm{T}}$, $X^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&-2&3&-3\end{bmatrix}$，$\beta=(a,b)^{\mathrm{T}}$，

$\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_7)^{\mathrm{T}}$，则线性模型可以写为 $Y=X\beta+\varepsilon,\varepsilon\sim N(0,\sigma^2 I_7)$.

（1）β 的最小二乘估计为 $\hat{\beta}=(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}Y=\begin{pmatrix}7&0\\0&28\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{7}Y_i\\A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}Y_i\\\frac{1}{28}A\end{pmatrix}$

即 $\hat{a}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}Y_i,\hat{b}=\frac{1}{28}A.$ 其中 $A=Y_2-Y_3+2Y_4-2Y_5+3Y_6-3Y_7$

(2) $\hat{\beta}\sim N_2(\beta,\sigma^2(X^{\mathrm{T}}X)^{-1})=N_2\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\quad\sigma^2\begin{pmatrix}\frac{1}{7}&0\\0&\frac{1}{28}\end{pmatrix}\right)$，即 $\hat{\beta}$ 服从正态分布。

因为 $\hat{\beta}$ 的协方差阵中 $\mathrm{Cov}(\hat{a},\hat{b})=0$,所以 $\hat{a}$ 与 $\hat{b}$ 独立，故 $\hat{a}\sim N(a,\frac{1}{7}\sigma^2)$，$\hat{b}\sim N(b,\frac{1}{28}\sigma^2)$.

$\hat{Y}=\hat{a}-4\hat{b}$ 仍服从正态分布且 $E\hat{Y}=E(\hat{a}-4\hat{b})=a-4b$,

$D\hat{Y}=D(\hat{a}-4\hat{b})=D\hat{a}+16D\hat{b}=\frac{5\sigma^2}{7}$.