3.4 minimax估计

一、 minimax决策函数

二、 计算minimax决策函数步骤

三、利用贝叶斯估计计算最小最大决策函数

一、minimax决策函数

在贝叶斯决策中，通常以风险函数最小为衡量标准。但有的时候人们处于保守考虑，决策时考虑最坏情形，即风险最大时寻找最佳策略—最小最大决策.

定义3.12 给定一个统计决策问题，设D^*是由全体决策函数组成的类，如果存在一个决策函数

$d^* = d^*(x_1, x_2, \cdots, x_n), d^* \in D^*$,使得对任意一个决策

$d = d(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，总有

$$\max_{\Theta} R(\theta, d^*) \le \max_{\Theta} R(\theta, d), \quad \forall d \in D^*$$

则称d^*为统计决策问题的最小最大决策函数。

注 函数达不到最大值时，可以理解为上确界.

以最大风险的大小作为衡量决策函数好坏的准则.使最大风险达到最小的决策函数就是考虑到最不利的情况，要求最不利的情况尽可能好。

如果我们讨论的统计决策问题是一个估计问题，

则由定义3.12得到的决策函数为最小最大估计量.

下面介绍寻求最小最大决策函数的一般步骤

二、计算minimax决策函数的步骤

计算minimax决策函数的步骤：

1、对D^*中每个决策函数$d(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，求出其风险函数在Θ上的最大风险值$\max\limits_{\Theta} R(\theta, d)$.

2、在所有最大风险值中选取相对最小值，此值对应的决策函数便是最小最大决策函数。

例1（p107例3.17） 地质学家要根据某地区的底层结构来判断该地是否蕴藏有石油，地层结构x总是0,1两种状态之一，记该地层无油 θ_0 ，记该地层有油为 θ_1, 已知为它们的分布规律如下表所示

石油状态← θ

θ \ x	0	1
θ_0	0.6	0.4
θ_1	0.3	0.7

土地所有者希望根据地质学家对地层的分析来决策：

$a_1=\{$自己投资钻探石油$\}$ $a_2=\{$出卖土地所有权$\}$

$a_3=\{$该地区开辟旅游景点$\}$

θ \ x	0	1
θ_0	0.6	0.4
θ_1	0.3	0.7

3种决策对应的损失函数为

$L(\theta,a)$ θ \ a	a_1	a_2	a_3
θ_0	12	1	6
θ_1	0	10	5

现在选用9个决策函数

x	$d_1(x)$	$d_2(x)$	$d_3(x)$	$d_4(x)$	$d_5(x)$	$d_6(x)$	$d_7(x)$	$d_8(x)$	$d_9(x)$
0	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3
1	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3

$L(\theta,a)$ a / θ	a_1	a_2	a_3
θ_0	12	1	6
θ_1	0	10	5

θ \ x	0	1
θ_0	0.6	0.4
θ_1	0.3	0.7

x	$d_1(x)$	$d_2(x)$	$d_3(x)$	$d_4(x)$	$d_5(x)$	$d_6(x)$	$d_7(x)$	$d_8(x)$	$d_9(x)$
0	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3
1	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3

计算第四个决策函数对应的风险函数

$$R(\theta_0,d_4)=L(\theta_0,a_2)P_{\theta_0}(X=0)+L(\theta_0,a_1)P_{\theta_0}(X=1)$$

$$=1\times0.6+12\times0.4=5.4$$

$$R(\theta_1,d_4)=10\times0.3+0\times0.7=3$$

x	$d_1(x)$	$d_2(x)$	$d_3(x)$	$d_4(x)$	$d_5(x)$	$d_6(x)$	$d_7(x)$	$d_8(x)$	$d_9(x)$
0	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3
1	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3

风险函数及其对应的最大值表

$d_i(x)$	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
$R(\theta_0,d_i)$	12	7.9	9.6	5.4	1	3	8.4	4	6
$R(\theta_1,d_i)$	0	7	3.5	3	10	6.5	1.5	8.5	5
$\max\limits_{\theta\in\Theta} R(\theta,d_i)$	12	7.9	9.6	5.4	10	6.5	8.4	8.5	6

由最小最大决策函数的定义可知，d_4为统计决策问题的minimax决策函数.即样本为0时，选择a_2，样本为1时，选择a_1.

三、利用贝叶斯估计计算最小最大决策函数

定理3.9 给定一个统计决策问题，如果存在某个先验分布，使得在这个先验分布下的贝叶斯决策函数 $d_B(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的风险函数为一个常数，那么$d_B(x_1, x_2, \cdots, x_n)$必定是这个统计决策问题的一个最小最大决策函数.

证 反证法 设$d_B(x_1, x_2, \cdots, x_n)$=$d_B$的风险函数

$$R(\theta, d_B) = C, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

因而它的贝叶斯风险为

$$R_B(d_B)=C.$$（常数的期望是常数本身）

假设$d_B(x_1,x_2,\cdots,x_n)$不是最小最大决策函数，那么必定有一个决策函数$d^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得

$$\max_{\theta\in\Theta} R(\theta,d^*)=R_M(d^*)<R_M(d_B)=C$$

于是，$d^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的风险函数满足

$$R(\theta,d^*)\le R_M(d^*)<C,\quad \forall\theta\in\Theta,$$

对上式在给定的先验分布下求期望,

$$R_B(d^*)=E_\theta(R(\theta,d^*))<C=R_B(d_B),$$

这表明d_B不可能是这个先验分布下的贝叶斯决策函数，从而产生矛盾，因此d_B必定是一个minimax决策函数.

某先验分布下，风险函数是常数的
贝叶斯决策函数也是mimmax决策函数。

例2（p109例3.18）设总体X服从两点分布$B(1,p)$，其中参数p未知，而p在$[0,1]$上服从β分布 $\beta(\frac{\sqrt{n}}{2},\frac{\sqrt{n}}{2})$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$来自总体$X$，损失函数为平方损失，则参数$p$的贝叶斯估计为p的minimax估计。

解 平方损失下的贝叶斯估计为：

$$d^*(x)=E(p\mid X=x)=\int_{\Theta} ph(p\mid x)\mathrm{d}p$$

而
$$h(p\mid x)=\frac{q(x\mid p)\pi(p)}{m(x)}=\frac{q(x\mid p)\pi(p)}{\int_0^1 q(x\mid p)\pi(p)\mathrm{d}p}$$

$$= \frac{p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \pi(p)}{\int_0^1 p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \pi(p)\mathrm{d}p}$$

$$= \frac{p^{\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{\sqrt{n}}{2} - 1}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{\sqrt{n}}{2} - 1}}{\beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{\sqrt{n}}{2}, n + \frac{\sqrt{n}}{2} - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}$$

显然 $p \mid x \sim \beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{\sqrt{n}}{2}, n + \frac{\sqrt{n}}{2} - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$$\hat{p} = d^*(x) = \int_\Theta p h(p \mid x)\mathrm{d}p = \frac{2\sqrt{n}\bar{X} + 1}{2(\sqrt{n} + 1)}$$

$\hat{p}$的风险函数为

$$R(p,\hat{p}) = E\left(\frac{2\sqrt{n}\bar{X}+1}{2(\sqrt{n}+1)} - p\right)^2$$

$$= D\left(\frac{2\sqrt{n}\bar{X}+1}{2(\sqrt{n}+1)}\right) + \left(E\left(\frac{2\sqrt{n}\bar{X}+1}{2(\sqrt{n}+1)} - p\right)\right)^2$$

$$= \frac{4n}{4(\sqrt{n}+1)^2} \bullet \frac{p(1-p)}{n} + \left(\frac{2\sqrt{n}p+1}{2(\sqrt{n}+1)} - p\right)^2$$

$$= \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}$$ （常数）

因而其为**minimax**估计.

定理3.10 给定一个贝叶斯决策问题，设$\{\pi_k(\theta):k\geq 1\}$为参数空间$\Theta$上的一个先验分布列，$\{d_k:k\geq 1\}$，$\{R_B(d_k):k\geq 1\}$分别为相应的贝叶斯估计列和贝叶斯风险列，若$d_0$是$\theta$的一个估计，且它的风险函数$R(\theta,d_0)$满足

$$\max_{\theta\in\Theta} R(\theta,d_0)\leq \lim_{n\to\infty} R_B(d_k)$$

则d_0为θ的minimax估计.

证 反证法　设d_0不是θ的最小最大估计，则存在一个估计d，使得 $\max\limits_{\theta\in\Theta} R(\theta,d)<\max\limits_{\theta\in\Theta} R(\theta,d_0)$

由于d_k是在先验分布$\pi_k(\theta)$下的贝叶斯估计，故其贝叶斯风险最小，因而

$$R_B(d_k) \le R_B(d) = \int_\Theta R(\theta,d)\pi_k(\theta)\,\mathrm{d}\theta \le \max_{\theta\in\Theta} R(\theta,d)$$

由此可以得到 $$< \max_{\theta\in\Theta} R(\theta,d_0)$$

$$R_B(d_k) < \max_{\theta\in\Theta} R(\theta,d_0), \quad k \ge 1$$

则 $$\lim_{k\to\infty} R_B(d_k) < \max_{\theta\in\Theta} R(\theta,d_0)$$

显然这与定理条件矛盾，因此

d_0是θ的最小最大估计.

定理3.11 给定一个贝叶斯决策问题，若θ的一个估计d_0的风险函数$R(\theta,d_0)$在Θ上为常数ρ，且存在一个先验分布列$\{\pi_k(\theta): k \geq 1\}$，使得相应的贝叶斯估计$d_k$的贝叶斯风险满足

$$\lim_{k\to\infty} R_B(d_k) = \rho$$

则d_0为θ的minimax估计.

证 对任意的$\theta \in \Theta$，有

$$\max_{\theta\in\Theta} R(\theta,d_0) = R(\theta,d_0) = \rho = \lim_{k\to\infty} R_B(d_k)$$

显然满足了定理3.10，因而d_0是θ的最小最大估计.

例3（p111例3.19） 设$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$为来自正态总体$N(\theta,1)$的一个样本，取参数θ的先验分布为正态分布$N(0,\tau^2)$,其中τ已知，损失函数取为

$$L(\theta,d)=\begin{cases}1, & |d-\theta|>\varepsilon,\ \ \varepsilon>0\\ 0, & |d-\theta|\le\varepsilon,\ \ \varepsilon>0\end{cases}$$

其对应的参数θ的贝叶斯估计为

$$d_\tau(X)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\left(1+\frac{1}{n\tau^2}\right)^{-1}$$

试用定理3.11证明$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$是$\theta$的最小最大估计.

证明 (1) 先计算$\bar{X}$的风险函数为常数值。

$$\text{因为}\quad \bar{X} \sim N(\theta, \frac{1}{n})$$

$$R(\theta,\bar{X}) = EL(\theta,\bar{X})$$

$$= P(|\bar{X}-\theta| \geq \varepsilon) = 1 - P(\theta-\varepsilon < \bar{X} < \theta+\varepsilon)$$

$$= 1 - P(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{n}}} < \frac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\frac{1}{n}}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{n}}})$$

$$= 1 - P_\theta(-\sqrt{n}\varepsilon < \sqrt{n}(\bar{X}-\theta) < \sqrt{n}\varepsilon)$$

$$= 1 - \Phi(\sqrt{n}\varepsilon) + \Phi(-\sqrt{n}\varepsilon) = 2 - 2\Phi(\sqrt{n}\varepsilon) = \rho$$

（2）再计算θ的贝叶斯估计。由例3.15知θ的后验分布$h(\theta \mid x)$为正态分布

$$N\left(\sum_{i=1}^{n} X_i (n+\tau^{-2})^{-1}, (n+\tau^{-2})^{-1}\right)$$

$$=N\left(\bar{X}\left(1+\frac{1}{n\tau^2}\right)^{-1}, (n+\tau^{-2})^{-1}\right).$$

对任一决策函数d其后验风险为

$$R(d \mid x)=\int_{-\infty}^{+\infty} L(\theta,d) h(\theta \mid x) d\theta = P_\theta\{|d-\theta|>\varepsilon\}$$

$$=1-P_\theta\{|d-\theta|\le \varepsilon\}.$$

要使上述后验风险最小，就要使上式中概率

$P_\theta\{|d-\theta|\le \varepsilon\}$最大，因此$d(X)$只能取后验分布的均值，即

在对应损失函数下，参数θ的贝叶斯估计为

$$d_{\tau}(X)=\bar{X}(1+\frac{1}{n\tau^{2}})^{-1}$$

与τ有关

(3)构造一个先验分布列和一个贝叶斯估计列

先验分布列$\{\pi_k(\theta):k\geq 1\}$选取为$\{N(0,\tau_i^2):\tau_1<\cdots<\tau_i<\cdots\}$,

相应的贝叶斯估计列为$\{d_{\tau_i}(X),i=1,2,\cdots\}$.

因为 $\bar{X}\sim N(\theta,\frac{1}{n})$

所以$d_{\tau_i}(X)=\bar{X}(1+\frac{1}{n\tau^{2}})^{-1}\sim N(\theta(1+\frac{1}{n\tau_i^{2}})^{-1},\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n\tau_i^{2}})^{-2})$

则d_τ的风险函数为

$$R(\theta,d_\tau)=P(|d_\tau-\theta|\geq\varepsilon)=1-P(\theta-\varepsilon<d_\tau<\theta+\varepsilon)$$

$$=1-P\left(\frac{\theta-\varepsilon-\theta(1+\frac{1}{n\tau_i^2})^{-1}}{\sqrt{\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n\tau_i^2})^{-2}}}<\frac{d_\tau-\theta(1+\frac{1}{n\tau_i^2})^{-1}}{\sqrt{\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n\tau_i^2})^{-2}}}\right.$$

$$\left.<\frac{\theta+\varepsilon-\theta(1+\frac{1}{n\tau_i^2})^{-1}}{\sqrt{\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n\tau_i^2})^{-2}}}\right)$$

$$=2-\Phi(\sqrt{n}[\varepsilon(1+\frac{1}{n\tau^2})+\frac{\theta}{n\tau^2}])-\Phi(\sqrt{n}[\varepsilon(1+\frac{1}{n\tau^2})-\frac{\theta}{n\tau^2}])$$

显然

$$\lim_{\tau\to\infty} R(\theta,d_\tau)=2-2\Phi(\sqrt{n}\varepsilon)\text{（常数）}$$

对序列$\tau_1<\cdots<\tau_i<\cdots\to\infty$，有$\underbrace{R(\theta,d_{\tau_i})<2}_{\text{有界}}$,于是利用勒贝格控制收敛定理知

$$\lim_{i\to\infty} R_B(d_{\tau_i})=\lim_{i\to\infty} E_\theta(R(\theta,d_{\tau_i})=E_\theta\lim_{i\to\infty} R(\theta,d_{\tau_i})$$

$$=E_\theta[2-2\Phi(\sqrt{n}\varepsilon)]=2[1-\Phi(\sqrt{n}\varepsilon)]=R(\bar{X}_n)=\rho$$

因而由定理3.11可知，$\bar{X}_n$是θ的最小最大估计.

Thank You!