第三章习题

1. 在一个参数统计模型中，如果要求未知参数θ的单侧区间估计$(-\infty,\bar{\theta}(X_1,\ldots,X_n)]$，写出决策空间，并给出适当的损失函数。

解：决策空间：$A=\left\{\left(-\infty,a_2\right]:-\infty<a_2<+\infty\right\}$；

损失函数$L\left(\theta,a\right)=1-I_{\left(-\infty,a_2\right]}\left(\theta\right)$，$\theta\in\Theta$，$a=\left(-\infty,a_2\right]\in A$，$I_{\left(-\infty,a_2\right]}\left(\theta\right)$为示性函数，当$\theta\in\left(-\infty,a_2\right]$为零时它为 1，否则为零。

2. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$是来自正态总体$N\left(0,\sigma^2\right)$的一个样本，其中$\sigma^2>0$未知，现给出$\sigma^2$的五种估计量：

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \qquad \hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \qquad \hat{\sigma}_3^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$$\hat{\sigma}_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \qquad \hat{\sigma}_5^2=\frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

在平方损失$L(\sigma^2,d)=(\sigma^2-d)^2$下求出它们的风险函数，并比较风险函数值的大小。

解：X服从$N\left(0,\sigma^2\right)$，$Y_1=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$服从$\chi^2\left(n\right)$，$Y_2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$服从$\chi^2\left(n-1\right)$，

$$EY_1=n,\ DY_1=2n,\ EY_2=n-1,\ DY_2=2\left(n-1\right).$$

$$E\sum_{i=1}^{n}X_i^2=n\sigma^2,D\sum_{i=1}^{n}X_i^2=2n\sigma^4,E\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\left(n-1\right)\sigma^2,D\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=2\left(n-1\right)\sigma^4$$

$$R_1\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_1^2\right)=E\left(\hat{\sigma}_1^2-\sigma^2\right)^2=D\hat{\sigma}_1^2=D\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=\frac{1}{\left(n-1\right)^2}D\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{2}{n-1}\sigma^4$$

$$R_2\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_2^2\right)=E\left(\hat{\sigma}_2^2-\sigma^2\right)^2=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2-\sigma^2\right)^2=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4$$

$$R_3\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_3^2\right)=E\left(\hat{\sigma}_3^2-\sigma^2\right)^2=D\left(\hat{\sigma}_3^2-\sigma^2\right)+\left[E\left(\hat{\sigma}_3^2-\sigma^2\right)\right]^2=\frac{2}{n+1}\sigma^4$$

$$R_4\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_4^2\right)=E\left(\hat{\sigma}_4^2-\sigma^2\right)^2=D\left(\hat{\sigma}_4^2-\sigma^2\right)+\left[E\left(\hat{\sigma}_4^2-\sigma^2\right)\right]^2=\frac{2}{n}\sigma^4$$

$$R_5\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_5^2\right)=E\left(\hat{\sigma}_5^2-\sigma^2\right)^2=D\left(\hat{\sigma}_5^2-\sigma^2\right)+\left[E\left(\hat{\sigma}_5^2-\sigma^2\right)\right]^2=\frac{2}{n+2}\sigma^4$$

因为$R_5<R_3<R_2<R_4<R_1$，所以$\hat{\sigma}_1^2$的风险最大，$\hat{\sigma}_5^2$的风险最小。

3. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$是来自该总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的一个样本，其中$\mu,\sigma^2>0$未知，现给出$\sigma^2$的五种估计量：

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \qquad \hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \qquad \hat{\sigma}_3^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$$\hat{\sigma}_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \qquad \hat{\sigma}_5^2=\frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

在平方损失$L(\sigma^2,d)=(\sigma^2-d)^2$下求出它们的风险函数，并比较风险函数值的大小。

解：已知$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$

$$\mathrm{R}\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_1^2\right)=\mathrm{E}\left(\hat{\sigma}_1^2-\sigma^2\right)^2=\mathrm{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2-\sigma^2\right)^2=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\mathrm{D}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)$$

$$=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

因为$\hat{\sigma}_2^2=\frac{n-1}{n}\hat{\sigma}_1^2$，所以

$$\mathrm{R}\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_2^2\right)=E\left(\frac{n-1}{n}\hat{\sigma}_1^2-\sigma^2\right)^2=E\left(\frac{n-1}{n}\hat{\sigma}_1^2-\frac{n-1}{n}\sigma^2-\frac{1}{n}\sigma^2\right)^2$$

$$=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\mathrm{R}\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_1^2\right)+\frac{1}{n^2}\sigma^4=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4$$

因为$\hat{\sigma}_3^2=\frac{n-1}{n+1}\hat{\sigma}_1^2$，所以

$$\mathrm{R}\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_3^2\right)=\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{n+1}\hat{\sigma}_1^2-\sigma^2\right)^2=\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{n+1}\hat{\sigma}_1^2-\frac{n-1}{n+1}\sigma^2-\frac{2}{n+1}\sigma^2\right)^2$$

$$=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\mathrm{R}\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_1^2\right)+\frac{4}{(n+1)^2}\sigma^4=\frac{2}{n+1}\sigma^4$$

可见$\hat{\sigma}_3^2$的风险函数值最小,$\hat{\sigma}_1^2$的风险函数值最大。

解法一：

因为$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=EX^2=DX+\left(EX\right)^2=\sigma^2+\mu^2$,故

$$
\begin{aligned}
R\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_4^2\right) &= E\left(\hat{\sigma}_4^2-\sigma^2\right)^2 = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\sigma^2\right)^2 \\
&= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\sigma^2-\mu^2+\mu^2\right)^2 \\
&= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\sigma^2+\mu^2)\right)^2+2\mu^2E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\sigma^2+\mu^2)\right)+\mu^4 \\
&= D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)+2\mu^2\cdot 0+\mu^4=\frac{1}{n}DX^2+\mu^4 \\
&= \frac{1}{n}\left(\left(\mu^4+6\mu^2\sigma^2+3\sigma^4\right)-\left(\mu^4+2\mu^2\sigma^2+\sigma^4\right)\right)+\mu^4 \\
&= \frac{1}{n}\left(4\mu^2\sigma^2+2\sigma^4\right)+\mu^4
\end{aligned}
$$

解法二：

$$
\begin{aligned}
R\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_4^2\right) &= E\left(\hat{\sigma}_4^2-\sigma^2\right)^2 = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\sigma^2\right)^2 \\
&= E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)^2\right)-2\sigma^2E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)+\sigma^4 \\
&= \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_i^2X_j^2\right)-2\sigma^2EX^2+\sigma^4 \\
&= \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^4+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1,i\neq j}^{n}X_i^2X_j^2\right)-2\sigma^2\left(\sigma^2+\mu^2\right)+\sigma^4 \\
&= \frac{1}{n^2}n\left(\mu^4+6\mu^2\sigma^2+3\sigma^4\right)+n\left(n-1\right)\left(\sigma^2+\mu^2\right)\left(\sigma^2+\mu^2\right)-2\sigma^2\left(\sigma^2+\mu^2\right)+\sigma^4 \\
&= \frac{1}{n}\left(4\mu^2\sigma^2+2\sigma^4\right)+\mu^4
\end{aligned}
$$

因为$\hat{\sigma}_5^2=\dfrac{n}{n+2}\hat{\sigma}_4^2$，所以

$$
\begin{aligned}
R\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_5^2\right) &= E\left(\frac{n}{n+2}\hat{\sigma}_4^2-\sigma^2\right)^2 \\
&= E\left(\frac{n}{n+2}\hat{\sigma}_4^2-\frac{n}{n+2}\sigma^2-\frac{2}{n+2}\sigma^2\right)^2 \\
&= \left(\frac{n}{n+2}\right)^2R\left(\sigma^2,\hat{\sigma}_4^2\right)+\left(\frac{2}{n+2}\right)^2\sigma^4 \\
&= \frac{1}{(n+2)^2}\left(n\left(4\mu^2\sigma^2+2\sigma^4\right)+4\sigma^4+n^2\mu^4\right)
\end{aligned}
$$

。

4. 设总体 X 服从 Poisson 分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\ldots$ $(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$ 为来自总体 X 的简单随机样本。设参数 λ 的先验分布为 $\pi(\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda} & \lambda>0\\ 0 & \lambda\le 0\end{cases}$，$\lambda>0$。

求平方损失 $L(\lambda,\hat{\lambda})=(\lambda-\hat{\lambda})^2$ 下 λ 的贝叶斯估计 $\hat{\lambda}$；

解：给定 λ，$(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$ 的条件分布密度为

$$q(x_1,x_2,\cdots x_n\,|\,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i\,!}.e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}e^{-n\lambda}$$

$(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$ 与 λ 的联合密度为

$$f(\boldsymbol{x},\lambda)=q(x_1,x_2,\cdots x_n\,|\,\lambda)\pi(\lambda)=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i+1}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}e^{-(n+1)\lambda},\lambda>0$$

$(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$ 的边缘分布密度为

$$m(\boldsymbol{x})=\int_0^{\infty}f(\boldsymbol{x},\lambda)d\lambda=\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i+1}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}e^{-(n+1)\lambda}d\lambda=\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i+1)!}{(n+1)^{\sum_{i=1}^{n}x_i+2}\,x_1!x_2!\cdots x_n!}$$

于是 λ 的后验密度为

$$\pi(\lambda\,|\,\boldsymbol{x})=\frac{f(\boldsymbol{x},\lambda)}{m(\boldsymbol{x})}=\frac{(n+1)^{\sum_{i=1}^{n}x_i+2}}{(\sum_{i=1}^{n}x_i+1)!}\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i+1}e^{-(n+1)\lambda},\lambda>0$$

故 λ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\lambda}=E(\lambda\,|\,X=\boldsymbol{x})=\int_0^{\infty}\lambda\pi(\lambda\,|\,\boldsymbol{x})d\lambda=\frac{(n+1)^{\sum_{i=1}^{n}x_i+2}}{(\sum_{i=1}^{n}x_i+1)!}\int_0^{\infty}\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i+2}e^{-(n+1)\lambda}d\lambda=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+2}{n+1}=\frac{n\overline{x}+2}{n+1}$$

5. 设总体 X 服从 Poisson 分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\ldots$ $(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$ 为来自总体 X 的简单随机样本。设参数 λ 的先验分布为 $e^{-\lambda}$，$\lambda>0$。

求（1）平方损失 $L(\lambda,\hat{\lambda})=(\lambda-\hat{\lambda})^2$ 下 λ 的贝叶斯估计 $\hat{\lambda}$；

（2）$\hat{\lambda}$ 的贝叶斯风险。

解：（1）因总体 X 服从 Poisson 分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda}\ k=0,1,2,\dots$ 则可得似然函数：

$$q(x\mid\lambda)=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{N}x_i}e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!},\quad \lambda>0$$

由于 $\pi(\lambda)=e^{-\lambda},\lambda>0,$ 故得联合分布密度为

$$\begin{aligned}f(x,\lambda)&=\pi(\lambda)q(x|\lambda)\\&=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{N}x_i}e^{-(n+1)\lambda}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!},\quad \lambda>0\end{aligned}$$

边缘密度为

$$\begin{aligned}m(x)&=\int_{\Theta}f(x,\lambda)d\lambda=\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{N}x_i}e^{-(n+1)\lambda}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}d\lambda\\&=[(n+1)^{1+\sum_{i=1}^{N}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i!]^{-1}\Gamma(1+\sum_{i=1}^{N}x_i)\end{aligned}$$

后验分布为

$$h(\lambda\mid x)=\frac{f(x,\lambda)}{m(x)}=[(n+1)^{1+\sum_{i=1}^{N}x_i}\lambda^{\sum_{i=1}^{N}x_i}e^{-(n+1)\lambda}/\Gamma(1+\sum_{i=1}^{N}x_i),\qquad \lambda>0$$

平方损失 $L(\lambda,\hat{\lambda})=(\lambda-\hat{\lambda})^2$ 下 λ 的贝叶斯估计 $\hat{\lambda}$ 为

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}=E(\lambda\mid x)&=\int_0^1(n+1)^{1+\sum_{i=1}^{N}x_i}\lambda^{\sum_{i=1}^{N}x_i}e^{-(n+1)\lambda}/\Gamma(1+\sum_{i=1}^{N}x_i)d\lambda\\&=[(n+1)\Gamma(1+\sum_{i=1}^{N}x_i)]^{-1}\Gamma(2+\sum_{i=1}^{N}x_i)]\\&=(1+\sum_{i=1}^{N}x_i)/(n+1)\\&=(1+n\bar{X})/(n+1).\end{aligned}$$

（2）$\hat{\lambda}$ 的风险函数为

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\hat{\lambda},\lambda) &= E_{\lambda}(\lambda-\hat{\lambda})^2 \\ &= D_{\lambda}(\lambda-\frac{1+n\overline{X}}{n+1})+[E(\lambda-\frac{1+n\overline{X}}{n+1})]^2 \\ &= \frac{\lambda^2+(n-2)\lambda+1}{(\lambda+1)^2}\end{aligned}$$

$\hat{\lambda}$ 的贝叶斯风险

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\lambda) &= E(\mathbf{R}(\hat{\lambda},\lambda)) \\ &= \int_{\Theta}\mathbf{R}(\hat{\lambda},\lambda)\pi(\lambda)d\lambda \\ &= \int_0^{\infty}\frac{\lambda^2+(n-2)\lambda+1}{(n+1)^2}e^{-\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

6. 设总体 X 服从二项分布 $B(N,p)$, $P\{X=k\}=C_N^k p^k(1-p)^{N-k}$ $k=0,1,2,\ldots,N$ 。$(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$ 为来自总体 X 的简单随机样本。设参数 p 的先验分布为(0,1)上均匀分布。

求平方损失 $L(p,d)=(p-d)^2$ 下 p 的贝叶斯估计。

解：因总体 X 服从二项分布 $B(N,p)$, 且 $P\{X=k\}=C_N^k p^k(1-p)^{N-k}$，$k=0,1,2,\ldots,N$ 。则可得似然函数

$$q(x|p)=\prod_{i=1}^{n}C_N^{x_i}p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{nN-\sum_{i=1}^{n}x_i},0<p<1.$$

由于 $\pi(p)=1,0<p<1,$ 故得 $f(x,p)=\pi(p)q(x|p).$ 后验分布 $h(p|x)\propto\pi(p)q(x|p).$

令

$$h(p|x)=C\pi(p)q(x|p)=Cp^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{nN-\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

C 为常数，由 $\int_0^1 h(p|x)dp=1$ 可知，

$$C=\frac{\Gamma(Nn+2)}{\Gamma(\sum_{1}^{n}x_i+1)\Gamma(Nn-\sum_{1}^{n}x_i+1)}.$$

在平方损失 $L(p,d)=(p-d)^2$ 下 p 得贝叶斯估计为

$$\hat{p}=\int_0^1 ph(p|x)dp=C\int_0^1 ph(p|x)dp=C\int_0^1 p^{\sum_{i=1}^{n}x_i+1}(1-p)^{nN-\sum_{i=1}^{n}x_i}dp=\frac{n\bar{X}+1}{Nn+2}.$$

7. 设总体 X 服两点分布 $B(1,p)$, $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$。$(X_1,X_2,...,X_n)^T$ 为来自总体 X 的简单随机样本。设参数 p 的先验分布为(0,1)上均匀分布。求平方损失 $L(p,d)=(p-d)^2$ 下 p 的贝叶斯估计及贝叶斯估计风险。

解：$q(x\,|\,p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i},x=0,1(i=1,\cdots,n)$

因为 $\pi(p)=1$，$h(p\,|\,x)\propto q(x\,|\,p)\pi(p)=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$

所以 p 的后验分布为 $\beta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+1,n-\sum_{i=1}^{n}x_i+1\right)$

p 的贝叶斯估计为 $\hat{p}=E(p\,|\,x)$ ，$X\sim\beta(a,b)$，$EX=\frac{a}{a+b}$

即 $\hat{p}=E(p\,|\,x)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+1}{\sum_{i=1}^{n}x_i+1+n-\sum_{i=1}^{n}x_i+1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+1}{n+2}$

贝叶斯风险为

$$R(p)=\int_{\Theta}E[L(p,d)\,|\,p]\pi(p)dp=\int_0^1E(p-p)^2dp$$

$$=\int_0^1E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+1}{n+2}-p\right)^2dp=\frac{1}{(n+2)^2}\int_0^1E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+1-(n+2)p\right)^2dp$$

又因为

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+1-(n+2)p\right)^2=E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+2(1-(n+2)p)E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)+(1-(n+2)p)^2$$

$$=np(1-p)+(np)^2\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+1-(n+2)p\right)^2$$

$$=np(1-p)+(1-2p)^2 n$$

所以 $R(p)=\frac{1}{(n+2)^2}\int_0^1 np(1-p)+(1-2p)^2\mathrm{d}p=\frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{4-n}{3}+\frac{n-4}{2}+1\right)=\frac{1}{6(n+2)}$

即贝叶斯风险为 $\frac{1}{6(n+2)}$ 。

8. 设总体 X 服两点分布 $B(1,p),\ P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}\ k=0,1$。$(X_1,X_2,...,X_n)^T$ 为来自总体 X 的简单随机样本。设参数 p 的先验分布为(0,1)上均匀分布。求平方损失 $L(p,d)=\frac{1}{p(1-p)}(p-d)^2$ 下 p 的贝叶斯估计及贝叶斯估计风险。

解：条件概率:$q(x\mid p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$

p 的先验概率密度为$\pi(p)=1$， $p\in[0,1]$，所以$(X_1,X_2,...,X_n)^T$ 与 p 的联合密度为

$$f(x,p)=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$(X_1,X_2,...,X_n)^T$ 的边缘分布是

$$m(x)=\int_0^1 p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}dp=(\sum_{i=1}^{n}x_i)!(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)!/(n+1)!$$

p 的后验分布为

$$h(p\mid x)=\frac{f(x,p)}{m(x)}=\frac{(n+1)!}{(\sum_{i=1}^{n}x_i)!(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)!}p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

p 的贝叶斯估计是

$$\hat{p}=\frac{\int_0^1 \frac{1}{p(1-p)}ph(p\,|\,x)dp}{\int_0^1 \frac{1}{p(1-p)}h(p\,|\,x)dp}$$

$$=\frac{\int_0^1 \frac{(n+1)!}{(\sum_{i=1}^n x_i)!(n-\sum_{i=1}^n x_i)!}p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i-1}dp}{\int_0^1 \frac{(n+1)!}{(\sum_{i=1}^n x_i)!(n-\sum_{i=1}^n x_i)!}p^{\sum_{i=1}^n x_i-1}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i-1}dp}$$

$$=\frac{\frac{(n+1)!}{(\sum_{i=1}^n x_i)!(n-\sum_{i=1}^n x_i)!}\frac{(\sum_{i=1}^n x_i)!(n-\sum_{i=1}^n x_i-1)!}{n!}}{\frac{(n+1)!}{(\sum_{i=1}^n x_i)!(n-\sum_{i=1}^n x_i)!}\frac{(\sum_{i=1}^n x_i-1)!(n-\sum_{i=1}^n x_i-1)!}{(n-1)!}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

贝叶斯风险为

$$R_B(\hat{p})=\int_\theta E(L(p,d)\,|\,p)\pi(p)=\int_0^1 E(\frac{1}{p(1-p)}(\hat{p}-p)^2)dp$$

$$=\int_0^1 E(\frac{1}{p(1-p)}(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}-p)^2)dp=\frac{1}{n^2}\int_0^1 E(\frac{1}{p(1-p)}(\sum_{i=1}^n x_i-np)^2)dp$$

$$=\frac{1}{n^2}\int_0^1 E(\frac{1}{p(1-p)}[(\sum_{i=1}^n x_i)^2-2np\sum_{i=1}^n x_i+n^2p^2])dp=\frac{1}{n}$$

9. 设某产品寿命 X 的密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\theta^2 xe^{-\theta x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad \theta>0\text{未知，}$$

θ 的先验分布密度为 ， $\pi(\theta)=\begin{cases}2e^{-2\theta}, & \theta>0,\\ 0, & \theta\le 0.\end{cases}$

$(X_1,X_2,...,X_n)^T$ 为来自总体 X 的简单随机样本。在平方损失函数下，求：

（1）参数 θ 的贝叶斯估计。

（2）平均寿命 EX 的贝叶斯估计。

解：（1）给定θ，$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)^T$ 的条件分布密度为

$$q\left(x_1, x_2, \cdots, x_n \middle| \theta\right) = \prod_{i=1}^{n} p\left(x_i \middle| \theta\right) = \theta^{2n} \prod_{i=1}^{n} x_i \exp\left\{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right\}$$

$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)^T$ 与θ的联合密度是

$$f\left(x, \theta\right) = q\left(x \middle| \theta\right) \cdot \pi\left(\theta\right) = 2\theta^{2n} \prod_{i=1}^{n} x_i \exp\left\{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + 2\right)\right\}$$

$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)^T$ 的边缘分布是

$$\begin{aligned} m\left(x\right) &= \int_0^{+\infty} f\left(x, \theta\right) d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} 2\theta^{2n} \prod_{i=1}^{n} x_i \exp\left\{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + 2\right)\right\} d\theta \\ &= \frac{2x^n}{\left(n\overline{x}+2\right)^{2n+1}} \int_0^{+\infty} \left[\theta\left(n\overline{x}+2\right)\right]^{2n+1-1} e^{-\theta\left(n\overline{x}+2\right)} d\left[\theta\left(n\overline{x}+2\right)\right] \\ &= \frac{2x^n}{\left(n\overline{x}+2\right)^{2n+1}} \Gamma\left(2n+1\right) \end{aligned}$$

于是θ的后验分布密度是

$$h\left(\theta \middle| x\right) = \frac{f\left(x, \theta\right)}{m\left(x\right)} = \frac{\theta^{2n} e^{-\theta\left(n\overline{x}+2\right)} \left(n\overline{x}+2\right)^{2n+1}}{\Gamma\left(2n+1\right)}$$

所以θ的贝叶斯估计为

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \int_0^{+\infty} \theta h\left(\theta \middle| x\right) d\theta = \int_0^{+\infty} \theta \cdot \frac{\theta^{2n} e^{-\theta\left(n\overline{x}+2\right)} \left(n\overline{x}+2\right)^{2n+1}}{\Gamma\left(2n+1\right)} d\theta \\ &= \frac{\left(n\overline{x}+2\right)^{2n+1}}{\Gamma\left(2n+1\right)} \int_0^{+\infty} \theta^{2n+1} e^{-\theta\left(n\overline{x}+2\right)} d\theta \\ &= \frac{\left(n\overline{x}+2\right)^{2n+1}}{\Gamma\left(2n+1\right)} \cdot \frac{1}{\left(n\overline{x}+2\right)^{2n+2}} \int_0^{+\infty} \left[\theta\left(n\overline{x}+2\right)\right]^{2n+2-1} e^{-\theta\left(n\overline{x}+2\right)} d\left[\theta\left(n\overline{x}+2\right)\right] \\ &= \frac{\left(n\overline{x}+2\right)^{2n+1}}{\Gamma\left(2n+1\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(2n+2\right)}{\left(n\overline{x}+2\right)^{2n+2}} \\ &= \frac{2n+1}{n\overline{x}+2} \end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}EX &= \int_0^{+\infty} x\cdot\theta^2 x e^{-\theta x}dx \\ &= \frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}(\theta x)^{3-1}e^{-\theta x}d(\theta x) \\ &= \frac{1}{\theta}\Gamma(3) \\ &= \frac{2}{\theta}\end{aligned}$$

所以平均寿命 EX 的贝叶斯估计为

$$\begin{aligned}\widehat{\left(\frac{2}{\theta}\right)} &= \int_0^{+\infty}\frac{2}{\theta}h(\theta|x)d\theta = \int_0^{+\infty}\frac{2}{\theta}\cdot\frac{\theta^{2n}e^{-\theta(n\overline{x}+2)}(n\overline{x}+2)^{2n+1}}{\Gamma(2n+1)}d\theta \\ &= \frac{2(n\overline{x}+2)^{2n+1}}{\Gamma(2n+1)}\int_0^{+\infty}\theta^{2n-1}e^{-\theta(n\overline{x}+2)}d\theta \\ &= \frac{2(n\overline{x}+2)^{2n+1}}{\Gamma(2n+1)}\cdot\frac{1}{(n\overline{x}+2)^{2n}}\int_0^{+\infty}\left[\theta(n\overline{x}+2)\right]^{2n-1}e^{-\theta(n\overline{x}+2)}d\left[\theta(n\overline{x}+2)\right] \\ &= \frac{2(n\overline{x}+2)^{2n+1}}{\Gamma(2n+1)}\cdot\frac{\Gamma(2n)}{(n\overline{x}+2)^{2n}} \\ &= \frac{n\overline{x}+2}{n} = \overline{x}+\frac{2}{n}\end{aligned}$$

10. 假设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，其中参数 μ 是未知的，假定 μ 服从正态分布 $N(0,1)$，并假设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 是来自该总体的样本。对于给定的损失函数 $L(\mu,d)=(\mu-d)^2$，试求 μ 的贝叶斯估计量及贝叶斯风险。

解：给定 μ，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的条件分布密度为：

$$q(x_1,x_2,\cdots,x_n\mid\mu)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\right\}$$

样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 μ 的联合概率分布密度为：

$$f(x;\mu)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n+1}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^n {x_i}^2+(n+1)\mu^2-2\mu n\overline{x}\right]\right\}$$

样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的边缘分布密度为：

$$\begin{aligned}
m(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\mu)\,d\mu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + (n+1)\mu^2 - 2\mu n\overline{x}\right]\right\} d\mu \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(n+1)\mu^2 - 2\mu n\overline{x}\right]\right\} d\mu \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{n^2}{n+1}\overline{x}^2\right]\right\} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

μ 的后验分布密度为：

$$h(\mu \mid x) = \frac{f(x;\mu)}{m(x)} = \left(\frac{n+1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{n+1}{2}\left(\mu - \frac{n\overline{x}}{n+1}\right)^2\right\}$$

μ 的贝叶斯估计为：

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu h(\mu \mid x)\,d\mu \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \exp\left\{-\frac{n+1}{2}\left(\mu - \frac{n\overline{x}}{n+1}\right)^2\right\} d\mu \\
&= \frac{n\overline{x}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i
\end{aligned}$$

贝叶斯风险为：

$$\begin{aligned}
R_B(\hat{\mu}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E\left[L(\mu,d) \mid \mu\right] \pi(\mu)\,d\mu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} E(\hat{\mu}-\mu)^2\, \pi(\mu)\,d\mu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\right) d\mu
\end{aligned}$$

其中 $Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ 服从 $N(n\mu, n)$，将上式平方展开可得：

$$E\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu\right)^2 = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{\mu^2}{n+1}$$

从而可知贝叶斯风险为：

$$
\begin{aligned}
R_B(\hat{\mu}) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{\mu^2}{n+1}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\right)d\mu \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n+1}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\right)d\mu+\int_{-\infty}^{+\infty}\mu^2\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\right)d\mu\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n+1}\left[\frac{n}{n+1}\sqrt{2\pi}+\frac{1}{n+1}\sqrt{2\pi}\right] \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

11、设总体 X 服从负二项分布 $NB(b,k)$，分布律为

$$f(x\mid p)=\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}\qquad x=k,k+1,k+2,\ldots$$

$(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$ 为来自总体 X 的简单随机样本。设参数 p 的先验分布为 $\pi(p)$ 为：

$$\pi(p)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}, & 0<p<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 a,b 为已知参数。

求（1）平方损失 $L(p,d)=(p-d)^2$ 下 p 的贝叶斯估计；

(2)加权平方损失 $L(p,d)=p(p-d)^2$ 下 p 的贝叶斯估计；

解：（1）由定理 3.2 知，当损失函数为二次损失函数时，欲求 p 的贝叶斯估计需要先求出 p 的后验分布 $h(p\mid x)=q(x\mid p)\pi(p)/m(x)$.

由于给定 p， X 的条件概率是

$q(x\mid p)=\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}$，其中 $x=k,k+1,k+2,\ldots$，所以 $(X_1,X_2,\ldots X_n)^T$ 的条件概率是

$$q(x\mid p)=\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i-1}{k-1}p^k(1-p)^{x_i-k}=p^{nk}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk}\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i-1}{k-1}$$

而 p 的先验概率密度为

$$\pi(p)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}, & 0<p<1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

所以$(X_1,X_2,...,X_n)^T$与p的联合密度为

$$f(x,p)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{nk+a-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}\prod_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}x_i-1\\k-1\end{pmatrix}, & 0<p<1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

$(X_1,X_2,...,X_n)^T$的边缘分布是

$$\begin{aligned}m(x)&=\int_0^1\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{nk+a-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}\prod_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}x_i-1\\k-1\end{pmatrix}dp\\&=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\prod_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}x_i-1\\k-1\end{pmatrix}\int_0^1 p^{nk+a-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}dp\end{aligned}$$

所以p的后验分布为

$$\begin{aligned}h(p\mid x)&=q(x\mid p)\pi(p)/m(x)\\&=\frac{p^{nk}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk}\prod_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}x_i-1\\k-1\end{pmatrix}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\prod_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}x_i-1\\k-1\end{pmatrix}\int_0^1 p^{nk+a-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}dp}\\&=\frac{p^{nk+a-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}}{\int_0^1 p^{nk+a-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}dp}\\&=\frac{p^{nk+a-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}}{\beta(nk+a,\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b)}\end{aligned}$$

最后分母上的化简是根据$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$而得到。

因此p的贝叶斯估计是

$$\hat{p}_1=\int_0^1 ph(p\mid x)dp=\int_0^1\left(\frac{p^{nk+a}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b-1}}{\beta(nk+a,\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b)}\right)dp=\frac{\beta(nk+a+1,\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b)}{\beta(nk+a,\sum_{i=1}^{n}x_i-nk+b)}$$

由于$\beta(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$，$\Gamma(n+1)=n!$，故有

$$\hat{p}_1=\frac{(nk+a)}{\sum_{i=1}^{n}x_i+a+b}$$

（2）由定理 3.3 可知，当取损失函数为加权平方损失函数$L(p,d)=p(p-d)^2$时，p的贝叶斯估计为

$$\hat{p}_2 = \frac{E\left[p^2 \mid x\right]}{E\left[p \mid x\right]} = \frac{\int_0^1 p^2 h(p \mid x) dp}{\int_0^1 p h(p \mid x) dp} = \frac{\int_0^1 p^2 h(p \mid x) dp}{\hat{p}_1}.$$

在（1）中已经求出 p 的后验分布 $h(p \mid x)$，故

$$\hat{p}_2 = \int_0^1 \left(\frac{p^{nk+a+1}(1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i - nk + b - 1}}{\beta(nk+a, \sum_{i=1}^n x_i - nk + b)} \right) dp \Bigg/ \left[(nk+a) \Big/ \left(\sum_{i=1}^n x_i + a + b \right) \right]$$

$$= \frac{nk+a+1}{\sum_{i=1}^n x_i + a + b + 1}$$