《数理统计》知识点总结

创作声明：

大家好！我是一名来自西北工业大学电子信息学院的 2022 级硕士研究生，2022-2023 年第一学期选修了《数理统计》课程（M11G11004），感谢西北工业大学数学与统计学院《数理统计》教学团队各位老师的辛勤付出。

在学习过程中，我总结了本门课程第一章至第六章的主要知识点，参考教材为师义民、徐伟等老师编写的《数理统计》一书。本资料由我一人编写，旨在为同学们复习提供一些帮助。

但由于我的编写能力和时间有限，难免存在一些不足和错误。如果读者在阅读中发现了任何错误或疏漏，敬请联系我，联系方式为：869465624（QQ）。

此外，希望读者朋友多多关注我的微信公众号“知识贩卖机”和 B 站账号“多多の知识贩卖机”（UID:405870457），我将不定期分享知识干货，希望能够为大家提供更多有益的帮助。

特此声明。

王华元

2023 年 3 月于西北工业大学长安校区

第 0 章 常见分布及其分布函数

类型 1：均匀分布

$$X \sim U(a,b)$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$EX=\frac{a+b}{2},\qquad DX=\frac{(b-a)^2}{12}$$

类型 2：指数分布

$$X \sim E(\lambda)$$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$EX=\frac{1}{\lambda},\qquad DX=\frac{1}{\lambda^2}$$

类型 3：泊松分布

$$X \sim P(\lambda)$$

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\qquad k=0,1,\cdots$$
$$EX=\lambda,\qquad DX=\lambda$$

类型 4：几何分布

$$X\sim GE(p)$$
$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\qquad k=1,2,\cdots$$
$$EX=\frac{1}{p},\qquad DX=\frac{1-p}{p^2}$$

类型 5：两点分布

$$X\sim B(1,p)$$
$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\qquad k=0,1,\cdots$$
$$EX=p,\qquad DX=p(1-p)$$

类型 6：二项分布

$$X\sim B(N,p)$$
$$P\{X=k\}=C_N^k p^k(1-p)^{N-k},\qquad k=0,1,\cdots$$
$$EX=Np,\qquad DX=Np(1-p)$$

第 1 章 统计量与抽样分布

1. 常用统计量——样本矩

（1）样本均值

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

（2）样本方差

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2$$

（3）修正样本方差

$$S_n^{*^2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

2. 样本矩的期望与方差

$$E\bar{X}=EX,\qquad D\bar{X}=\frac{1}{n}DX,\qquad ES_n^2=\frac{n-1}{n}DX,\qquad ES_n^{*^2}=DX$$

3. 利用因子分解定理判定充分统计量

（1）连续型情况

设总体X具有分布密度$f(x;\theta)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$是一个样本，$T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一个统计量，则T是θ的充分统计量的充要条件是：样本的联合分布密度函数可以分解为

$$L(\theta) \triangleq \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = h(x_1,x_2,\cdots,x_n)g[T(x_1,x_2,\cdots,x_n);\theta]$$

其中h是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的非负函数且与θ无关，g仅通过T依赖于$x_1,x_2,\cdots,x_n$。

（2）离散型情况

设总体X的分布律$P\{X=x^{(i)}\}=p\left(x^{(i)};\theta\right)(i=1,2,\cdots)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$是一个样本，$T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一个统计量，则$T$是$\theta$的充分统计量的充要条件是：样本的联合分布律可以表示为

$$\prod_{i=1}^{n} P\{X=x_i\} = h(x_1,x_2,\cdots,x_n)g[T(x_1,x_2,\cdots,x_n);\theta]$$

其中h是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的非负函数且与θ无关，g仅通过T依赖于$x_1,x_2,\cdots,x_n$。

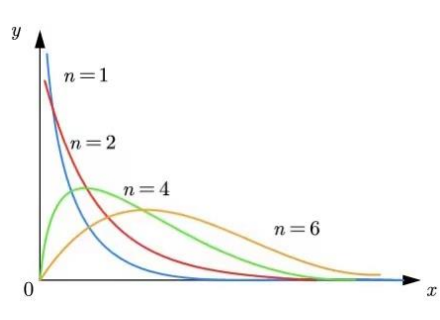
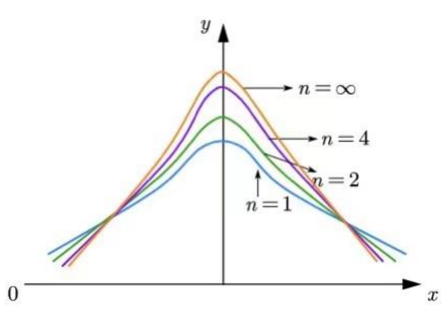
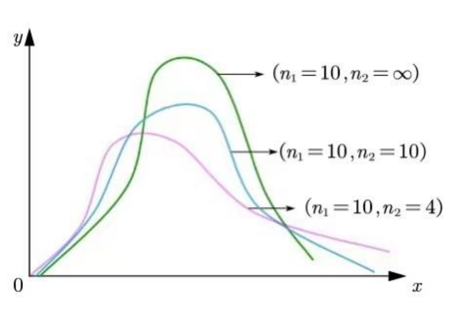
4. 利用指数型分布族判定充分完备统计量

设总体X的分布密度为$f(x;\boldsymbol{\theta})$为指数族分布，即样本的联合分布密度具有如下形式：

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\boldsymbol{\theta}) = C(\boldsymbol{\theta})e^{\sum_{j=1}^{m} b_j(\boldsymbol{\theta})T_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)}h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

其中$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)^T,\boldsymbol{\theta}\in\Theta$。如果$\Theta$中包含一个$m$维矩阵，而且$\boldsymbol{B}=[b_1(\boldsymbol{\theta}),b_2(\boldsymbol{\theta}),\cdots,b_m(\boldsymbol{\theta})]^T$的值域包含有一个$m$维开集，则$\boldsymbol{T}=[T_1(X_1,X_2,\cdots,X_n),T_2(X_1,X_2,\cdots,X_n),\cdots,T_m(X_1,X_2,\cdots,X_n)]^T$是参数$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)^T$的充分完备统计量。

5. 三大抽样分布

χ^2分布	t分布	F分布
设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且同服从于标准正态分布$N(0,1)$，则称随机变量 $\chi_n^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 服从自由度为n的χ^2分布，记为$\chi_n^2\sim\chi^2(n)$。	设$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且X与Y相互独立，则称随机变量 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为n的t分布，记为$T\sim t(n)$。	设$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且X与Y相互独立，则称随机变量 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为(n_1,n_2)的F分布，记为$F\sim F(n_1,n_2)$。
		
（1）$E\chi_n^2=n$，$D\chi_n^2=2n$。 （2）若$\chi_1^2\sim\chi^2(n)$，$\chi_2^2\sim\chi^2(m)$，且χ_1^2与χ_2^2相互独立，则$\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n+m)$。	设$T\sim t(n)$，当$n>2$时，$ET=0$，$DT=\frac{n}{n-2}$。	设$F\sim F(n_1,n_2)$，则$\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$。

6. 概率分布的分位数

设X是随机变量，对于给定的实数$\alpha(0<\alpha<1)$，若存在x_α使

$$P\{X>x_\alpha\}=\alpha$$

则称x_α为X的上侧分位数。

标准正态分布	t分布	F分布
$u_\alpha = -u_{1-\alpha}$	$t_\alpha(n) = -t_{1-\alpha}(n)$	$F_{1-\alpha}(n_2,n_1) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)}$

7. 正态总体样本均值和方差的分布

对象	对总体的要求	所用函数及其分布
均值μ	一个正态总体，σ^2已知	$U = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$
均值μ	一个正态总体，σ^2未知	$T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S_n^*}\sqrt{n} \sim t(n-1)$
方差σ^2	一个正态总体，μ未知	$K = \dfrac{nS_n^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S_n^{*^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
方差σ^2	一个正态总体，μ已知	$K = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$
均值差$\mu_1-\mu_2$	两个正态总体，σ_1^2,σ_2^2已知	$U = \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$
均值差$\mu_1-\mu_2$	两个正态总体，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$未知	$T = \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$ 其中$S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^{*^2}+(n_2-1)S_2^{*^2}}{n_1+n_2-2}$
方差商$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	两个正态总体，μ_1,μ_2未知	$F = \dfrac{S_1^{*^2}/\sigma_1^2}{S_2^{*^2}/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$
方差商$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	两个正态总体，μ_1,μ_2已知	$F = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1} \sim F(n_2,n_1)$

8. 最小次序统计量和最大次序统计量的分布密度

$$f_{X_{(1)}}(x) = n[1-F(x)]^{n-1}f(x)$$
$$f_{X_{(n)}}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

9. 样本中位数

$$\tilde{X} = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & n\text{为奇数} \\ \dfrac{1}{2}\left[X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right], & n\text{为偶数} \end{cases}$$

10. 样本极差

$$R = X_{(n)} - X_{(1)} = \max_{1\le i\le n} X_i - \min_{1\le i\le n} X_i$$

第 2 章 参数估计

1. 无偏估计

设$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是参数$\theta$的估计量，若

$$E\hat{\theta} = \theta$$

则称$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量。

2. 均方误差准则

设θ为一个未知参数，$\hat{\theta}$为θ的一个估计量，$\hat{\theta}$的均方误差定义为

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}, \theta\right) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

均方误差反映了估计量$\hat{\theta}$与被估参数θ的平均误差。对一个估计量，它的均方误差越小就说明估计的效果越好。对于无偏估计，均方误差越小越好的准则等价于估计量方差越小越好的准则。

3. 矩估计法

设总体X的分布函数$F(x; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$中有$m$个未知参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$，假定总体$X$的$m$阶矩存在，记总体$X$的$k$阶原点矩为$\alpha_k$，则

$$EX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \triangleq \alpha_k(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$$

其中$k = 1,2, \cdots, m$。现用样本的k阶原点矩作为总体k阶原点矩的估计，即令

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k = \alpha_k\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_m\right), \qquad k = 1,2, \cdots, m$$

解上述方程得$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(X_1, X_2, \cdots, X_n), k = 1,2, \cdots, m$，并以$\hat{\theta}_k$作为参数$\theta_k$的估计量，则称$\hat{\theta}_k$为未知参数$\theta_k$的矩估计量，这种求点估计量的方法称为矩估计法。若$\hat{\theta}_k$为$\theta_k$的矩估计量，$g(\theta)$为连续函数，则也称$g\left(\hat{\theta}_k\right)$为$g(\theta_k)$的矩估计。

4. 似然函数

设总体X是连续型随机变量，其分布密度为$f(x, \theta)$，其中$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)^T$是未知参数。若$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$是来自总体$X$的一个样本，则样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$的联合分布密度为$\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$，当给定样本值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$后，它只是参数$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)^T$的函数，记为$L(\boldsymbol{\theta})$，即

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \boldsymbol{\theta})$$

这个函数L称为似然函数，即似然函数就是样本的联合分布密度。

若总体X是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X = x\} = p(x; \boldsymbol{\theta}), \qquad x = x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots$$

其中$= (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)^T$是未知参数。$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$是来自总体$X$的样本，则样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$的联合分布律$\prod_{i=1}^{n} P\{X = x_i\}$称为似然函数，记为$L(\boldsymbol{\theta})$，即

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} P\{X = x_i\} = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \boldsymbol{\theta})$$

5. 求最大似然估计量的一般步骤

（1）写出似然函数$L(\boldsymbol{\theta})$；

（2）求出$\ln L$及似然方程

$$\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0,\ i = 1,2, \cdots, m;$$

（3）解似然方程得到最大似然估计$\hat{\theta}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$($i = 1,2, \cdots, m$)；

（4）最后得到最大似然估计量$\hat{\theta}_i(X_1, X_2, \cdots, X_n)$($i = 1,2, \cdots, m$)。

6. 最小方差无偏估计（MVUE）的求解方法

（1）寻找θ的一个充分完备统计量T；

（2）寻找θ的一个无偏估计$\hat{\theta}$；

（3）求$\hat{\theta}^* = E(\hat{\theta}|T)$。

7. Fisher 信息量

$$I(\theta) = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right]^2$$

8. 罗-克拉默不等式

$T(\boldsymbol{X}) = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$g(\theta)$的一个无偏估计量，对一切$\theta \in \Theta$，有

$$D[T(\boldsymbol{X})] \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$$

特别当$g(\theta) = \theta$时，上式成为

$$D[T(\boldsymbol{X})] \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

以上两式称为信息不等式，或称为罗-克拉默不等式。不等式的右端项称为估计量$T(\boldsymbol{X})$方差的罗-克拉默下界。

9. 有效估计

若θ（或$g(\theta)$）的一个无偏估计量$\hat{\theta}$（或$T(X)$）的方差达到罗-克拉默下界，即

$$D\hat{\theta} = \frac{1}{nI(\theta)}\text{（或}D[T(\boldsymbol{X})] = \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}\text{）}$$

则称$\hat{\theta}$（或$T(X)$）为θ（或$g(\theta)$）的有效估计量。

10. 估计量的效率

设$\hat{\theta}$是θ的任一无偏估计，称

$$e(\hat{\theta}) = \frac{1}{nI(\theta)}\Big/D\hat{\theta}$$

为$\hat{\theta}$的效率。

由罗-克拉默不等式知，对于任意一个无偏估计$\hat{\theta}$，其效率满足$0 < e(\hat{\theta}) \leq 1$。如果$e(\hat{\theta}) = 1$，则$\hat{\theta}$是$\theta$的有效估计。

11. 正态总体均值和方差的置信区间

估计对象	对总体的要求	所用函数及其分布	置信区间
均值μ	一个正态总体，σ^2已知	$U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
均值μ	一个正态总体，σ^2未知	$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S_n^*}\sqrt{n} \sim t(n-1)$	$\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}\right)$
方差σ^2	一个正态总体，μ未知	$K = \frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

方差 σ^2	一个正态总体，μ已知	$K=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)}\right)$
均值差 $\mu_1-\mu_2$	两个正态总体，σ_1^2,σ_2^2已知	$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\bar{X}-\bar{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
均值差 $\mu_1-\mu_2$	两个正态总体，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$未知	$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ 其中$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^{*2}+(n_2-1)S_2^{*2}}{n_1+n_2-2}$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}-S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2),\bar{X}-\bar{Y}+S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right)$
方差商$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	两个正态总体，μ_1,μ_2未知	$F=\frac{S_1^{*2}/\sigma_1^2}{S_2^{*2}/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}},F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\right)$
方差商$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	两个正态总体，μ_1,μ_2已知	$F=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}\sim F(n_2,n_1)$	$\left(F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2,n_1)\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2},F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2,n_1)\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}\right)$

第 3 章 统计决策与贝叶斯估计

1. 贝叶斯风险（平方损失函数情况）

（1）损失函数

$$L(\hat{\theta},\theta)=(\hat{\theta}-\theta)^2$$

（2）风险函数

$$R(\hat{\theta},\theta)=EL(\hat{\theta},\theta)=E(\hat{\theta}-\theta)^2$$

（3）贝叶斯风险

$$R_B(\hat{\theta})=ER(\hat{\theta},\theta)=\int_{\Theta}\pi(\theta)R(\hat{\theta},\theta)d\theta$$

2. 贝叶斯估计

（1）样本关于θ的条件分布

$$q(x|\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i|\theta)$$

（2）样本和θ的联合分布

$$f(x,\theta)=\pi(\theta)q(x|\theta)$$

（3）样本的边缘分布

$$m(x)=\int_{\Theta}f(x,\theta)d\theta$$

（4）θ关于样本的后验分布

$$h(\theta|x)=\frac{f(x,\theta)}{m(x)}$$

（5）贝叶斯估计

①$L(\theta,d)=[\theta-d(x)]^2$（平方损失函数）

$$\hat{\theta}^*=E(\theta|x)=\int_\Theta \theta\cdot h(\theta|x)d\theta$$

②$L(\theta,d)=\lambda(\theta)[\theta-d(x)]^2$（加权平方损失函数）

$$\hat{\theta}^*=\frac{E(\theta\lambda(\theta)|x)}{E(\lambda(\theta)|x)}=\frac{\int_\Theta \theta\lambda(\theta)\cdot h(\theta|x)d\theta}{\int_\Theta \lambda(\theta)\cdot h(\theta|x)d\theta}$$

3. 三种重要积分

（1）

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx\ \ (\alpha>0)$$

性质：$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$；$\Gamma(1)=1$；$\Gamma(n+1)=n!$；$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$。

（2）

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\ \ (a>0,b>0)$$

性质：$B(a,b)=B(b,a)$；$B(a+1,b)=\frac{a}{a+b}B(a,b)$；$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$。

（3）

$$\int_a^b \frac{1}{x^{\alpha+1}}dx=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{x^\alpha}\Big|_b^a$$

第 4 章 假设检验

1. 势函数

对于检验$\delta(\boldsymbol{x})$，可以定义一个函数

$$\beta(\theta)=E_\theta[\delta(\boldsymbol{X})]=P_\theta\{\boldsymbol{X}\in W\}$$

称$\beta(\theta)$为这个检验的势函数，又称为功率函数。

2. 正态总体均值和方差的假设检验

H_0	适用范围	统计量	拒绝域
$\mu=\mu_0$	一个正态总体，σ_0^2已知	$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$	$\lvert U\rvert\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu=\mu_0$	一个正态总体，σ^2未知	$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_n^*}\sqrt{n}$	$\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$	一个正态总体，μ未知	$K=\frac{nS_n^2}{\sigma_0^2}=\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}$	$K\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$或$K\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$	一个正态总体，μ_0已知	$K=\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}$	$K\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$或$K\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$
$\mu_1=\mu_2$	两个正态总体，σ_1^2,σ_2^2已知	$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\lvert U\rvert\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1=\mu_2$	两个正态总体，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$未知	$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$

		其中$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^{*^2}+(n_2-1)S_2^{*^2}}{n_1+n_2-2}$	
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	两个正态总体，μ_1,μ_2未知	$F=\frac{S_1^{*^2}}{S_2^{*^2}}$	$F\geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$或$F\leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	两个正态总体，μ_1,μ_2已知	$F=\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}$	$F\geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2,n_1)$ 或$F\leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2,n_1)$

3. 多项分布的χ^2检验法

检验假设$H_0{:}\,p_i=p_{i0}\leftrightarrow H_1{:}\,p_i\neq p_{i0}$ $(i=1,2,\cdots,m)$，其中p_{i0}是已知数。可使用皮尔逊统计量

$$\chi_n^2=\sum_{i=1}^{m}\frac{(N_i-np_{i0})^2}{np_{i0}}$$

来衡量$\frac{N_i}{n}$与p_{i0}之间的差异程度。如果$\hat{\chi}_n^2\geq\chi_\alpha^2(m-1)$，则拒绝假设$H_0$，即认为总体的分布与假设$H_0$中的分布有显著差异；若$\hat{\chi}_n^2<\chi_\alpha^2(m-1)$，则接受假设$H_0$，即认为总体的分布与假设$H_0$中的分布无显著差异。

4. 科尔莫戈罗夫检验

设总体X的分布函数为$F(x)$，而且假定$F(x)$是x的连续函数。设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$是来自X的一个容量为n的样本，根据此样本作经验分布函数$F_n(x)$。由格列文科定理断定

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\sup_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F(x)|=0\right\}=1$$

这个定理表示随机变量$D_n=\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F(x)|$以概率 1 是无穷小的。如果$\widehat{D}_n\geq D_{n,\alpha}$，则拒绝假设$H_0$（$F(x)=F_0(x)$），否则接受$H_0$。

5. 斯米尔诺夫检验

设$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})^T$是来自具有连续分布函数$F(x)$的总体$X$的样本，$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})^T$是来自具有连续分布函数$G(x)$的总体$Y$的样本，且假定两个样本相互独立。欲检验假设：

$$H_0{:}\,F(x)=G(x)\leftrightarrow H_1{:}\,F(x)\neq G(x),\qquad -\infty<x<+\infty$$

设$F_{n_1}(x)$和$G_{n_2}(x)$分别是这两个样本所对应的经验分布函数，作统计量

$$D_{n_1,n_2}=\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|F_{n_1}(x)-G_{n_2}(x)\right|$$

如果$\widehat{D}_{n_1,n_2}\geq D_{n,\alpha}$，则拒绝假设$H_0$，否则接受$H_0$。

第 5 章 方差分析与试验设计

类型 1：单因素方差分析

（1）总离差平方和分解

$$Q_T=Q_E+Q_A$$

其中

$$Q_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2$$

$$Q_A=\sum_{i=1}^{r}n_i(\bar{X}_i-\bar{X})^2$$

分别称Q_E与Q_A为组内离差平方和与组间离差平方和。Q_E表示X_{ij}与其组内平均$\bar{X}_i$的离差平方和，Q_A是组内平均与总平均的离差平方和。

（2）显著性检验

构造检验统计量

$$F=\frac{\frac{Q_A}{r-1}}{\frac{Q_E}{n-r}}=\frac{\bar{Q}_A}{\bar{Q}_E}$$

服从自由度为$(r-1,n-r)$的 F 分布。

一次抽样后由样本值计算得F的数值，若

$$F\ge F_\alpha(r-1,n-r)$$

则拒绝假设H_0，即认为在显著性水平α下，因素的不同水平对试验结果有显著影响；若

$$F<F_\alpha(r-1,n-r)$$

则接受假设H_0，即认为在显著性水平α下，因素的不同水平对试验结果无显著影响。

（3）方差分析表

<table>
<tr><th>方差来源</th><th>离差平方和</th><th>自由度</th><th>平均离差平方和</th><th>F值</th><th>显著性</th></tr>
<tr><td>组间</td><td>$Q_A=\sum_{i=1}^{r}n_i(\bar{X}_i-\bar{X})^2$</td><td>$r-1$</td><td>$\bar{Q}_A=\frac{Q_A}{r-1}$</td><td rowspan="3">$F=\frac{\bar{Q}_A}{\bar{Q}_E}$</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>组内</td><td>$Q_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2$</td><td>$n-r$</td><td>$\bar{Q}_E=\frac{Q_E}{n-r}$</td></tr>
<tr><td>总和</td><td>$Q_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X})^2$</td><td>$n-1$</td><td></td></tr>
</table>

类型 2：两因素非重复试验的方差分析

（1）总离差平方和分解公式

记

$$\bar{X}_{i\cdot}=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}X_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,r)$$

$$\bar{X}_{\cdot j}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}X_{ij}\quad(j=1,2,\cdots,s)$$

$$\bar{X}=\frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}X_{ij}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\bar{X}_{i\cdot}=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\bar{X}_{\cdot j}$$

总离差平方和

$$Q_T=Q_A+Q_B+Q_E$$

其中

$$Q_A = s\sum_{i=1}^{r}(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X})^2$$

$$Q_B = r\sum_{j=1}^{s}(\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X})^2$$

$$Q_E = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot j} + \bar{X})^2$$

其中Q_A为因素A引起的离差平方和，Q_B为因素B引起的离差平方和，Q_E称为随机误差平方和。

（2）显著性检验

构造检验统计量

$$F_A = \frac{\frac{Q_A}{r-1}}{\frac{Q_E}{(r-1)(s-1)}} = \frac{\bar{Q}_A}{\bar{Q}_E}$$

$$F_B = \frac{\frac{Q_B}{s-1}}{\frac{Q_E}{(r-1)(s-1)}} = \frac{\bar{Q}_B}{\bar{Q}_E}$$

$F_A \sim F\big(r-1,(r-1)(s-1)\big)$；$F_B \sim F\big(s-1,(r-1)(s-1)\big)$。

一次抽样后由样本值计算得F_A的数值，若

$$F_A \ge F_\alpha\big(r-1,(r-1)(s-1)\big)$$

则拒绝H_{01}，即认为因素A对试验结果有显著影响；若

$$F_A < F_\alpha\big(r-1,(r-1)(s-1)\big)$$

则接受H_{01}，即认为因素A对试验结果无显著影响。

同样，根据一次抽样后由样本值计算得F_B的数值，若

$$F_B \ge F_\alpha\big(s-1,(r-1)(s-1)\big)$$

则拒绝H_{02}，即认为因素B对试验结果有显著影响；若

$$F_B < F_\alpha\big(s-1,(r-1)(s-1)\big)$$

则接受H_{02}，即认为因素B对试验结果无显著影响。

（3）方差分析表

方差来源	离差平方和	自由度	均方误差	F值	显著性
因素A	$Q_A = s\sum_{i=1}^{r}(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X})^2$	$r-1$	$\bar{Q}_A = \frac{Q_A}{r-1}$	$F_A = \frac{\bar{Q}_A}{\bar{Q}_E}$	
因素B	$Q_B = r\sum_{j=1}^{s}(\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X})^2$	$s-1$	$\bar{Q}_B = \frac{Q_B}{s-1}$	$F_B = \frac{\bar{Q}_B}{\bar{Q}_E}$	
误差	$Q_E = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot j} + \bar{X})^2$	$(r-1)(s-1)$	$\bar{Q}_E = \frac{Q_E}{(r-1)(s-1)}$		
总和	$Q_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X})^2$	$rs-1$			

第 6 章 回归分析

类型 1：一元线性回归分析

（1）一元线性回归模型

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \cdots, n$$

假设ε_i相互独立且$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$（$i = 1, \cdots, n$）。

（2）参数的最小二乘估计量

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{x} \\ \hat{\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \end{cases}$$

（3）方差的无偏估计量

$$\hat{\sigma}^{*^2} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i\right)^2$$

（4）显著性检验

构造统计量

$$T = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}^*}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \sim t(n-2)$$

当$|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$时，拒绝$H_0$。

类型 2：多元线性回归分析

（1）多元线性回归模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_m x_{im} + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \cdots, n$$

假设ε_i相互独立且$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$（$i = 1, \cdots, n$）。

令

$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)^T, \qquad \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_m)^T, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)^T$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

可得矩阵表达式为

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

（2）参数的最小二乘估计量

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$$

（3）方差的无偏估计量

$$\hat{\sigma}^{*^2} = \frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

（4）显著性检验

检验$H_0: \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta} = 0 \leftrightarrow H_1: \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta} \neq 0$。令$L = \boldsymbol{\alpha}^T\widehat{\boldsymbol{\beta}}$，由于$\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1})$，则

$$EL = \boldsymbol{\alpha}^T E\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\alpha}^T\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$DL = \boldsymbol{\alpha}^T \mathrm{Cov}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)\boldsymbol{\alpha} = \sigma^2 \boldsymbol{\alpha}^T (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{\alpha}$$

所以，$L \sim N\left(\boldsymbol{\alpha}^T \widehat{\boldsymbol{\beta}}, \sigma^2 \boldsymbol{\alpha}^T (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{\alpha}\right)$。

令

$$U = \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^T (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{\alpha}}} \sim N(0,1)$$

当H_0成立时，

$$U = \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \widehat{\boldsymbol{\beta}}}{\sigma \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^T (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{\alpha}}} \sim N(0,1)$$

而

$$K = \frac{(n-m-1)\hat{\sigma}^{*^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m-1)$$

K与U相互独立，则

$$T = \frac{U}{\sqrt{K/_{n-m-1}}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \widehat{\boldsymbol{\beta}}}{\hat{\sigma}^* \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^T (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{\alpha}}} \sim t(n-m-1)$$

当$|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-m-1)$时，拒绝$H_0$。