一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

答案：1. $\bar{X}$,$\left(\bar{X}-u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$;　2. $\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$,$\dfrac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$; 3. 0.9;

4. $f_{X_{(1)}}(x)=\begin{cases} ne^{-nx}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$; 5. 1;

6. $\left(-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}\right)^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{-n/\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-1}$ 或者 $\left(-\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^{-n}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right\}\exp\{n(\ln n-1)\}$;

7. 6，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

二、（12 分）（1） $\bar{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$， $Y_1 - \mu_2 \sim N(0, \sigma^2)$

因为 $\bar{X}$ 与 $Y_1 - \mu_2$ 独立，所以 $Y_1 - \mu_2 + \bar{X} \sim N(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2)$。

$$U = \frac{\bar{X} + Y_1 - \mu_2}{\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}} \sim N(0,1)$$

又 $\frac{nS_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 且与 U 相互独立，则

$$\frac{\frac{Y_1 - \mu_2 + \bar{X}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}}}{\sqrt{\frac{nS_X^2}{\sigma^2} \Big/ n-1}} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \frac{Y_1 - \mu_2 + \bar{X}}{S_X} \sim t(n-1)$$，所以 $C = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ 。

（2） $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$， $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \mu_2)^2 \sim \chi^2(m)$ 又由于相互独立，则

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \mu_2)^2 \sim \chi^2(m+n)$$

三、（12 分）解：（1）

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\left[C_N^{x_i} p^{x_i}(1-p)^{N-x_i}\right]=\left(\prod_{i=1}^{n} C_N^{x_i}\right) p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(N-x_i)}$$

$$\ln L(p)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n} C_N^{x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n} x_i \ln p+\sum_{i=1}^{n}(N-x_i)\ln(1-p)$$

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(N-x_i)}{1-p}=0$$

解之得 $\hat{p}=\dfrac{\bar{x}}{N}$，所以 p 的极大似然估计量 $\hat{p}=\dfrac{\bar{X}}{N}$

（2）法一 $E(\hat{p})=E\left(\dfrac{\bar{X}}{N}\right)=\dfrac{1}{N}E\left(\bar{X}\right)=\dfrac{1}{N}Np=p$，所以 $\hat{p}$ 是 p 的无偏估计。

$$L(p)=\left(\prod_{i=1}^{n} C_N^{x_i}\right) p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(N-x_i)}=\left(\prod_{i=1}^{n} C_N^{x_i}\right)\exp\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right\}(1-p)^{nN}$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{n} C_N^{x_i}\right)\exp\left\{\bar{x}n\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right\}(1-p)^{nN}$$

所以 $C(p)=(1-p)^{nN}, T=\bar{x}, b(\alpha)=n\ln\left(\dfrac{p}{1-p}\right), h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\prod_{i=1}^{n} C_N^{x_i}\right)$

$T=\bar{X}$ 是 p 的充分完备统计量，所以 $E\left(\dfrac{\bar{X}}{N}\middle|\bar{X}\right)=\dfrac{\bar{X}}{N}$ 是 p 的最小方差无偏估计量。

法二 根据法一知 $\hat{p}$ 是 p 的无偏估计，又易知 $\hat{p}$ 是 p 的充分统计量。

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(N-x_i)}{1-p}=\frac{nN}{p(1-p)}\left(\frac{\bar{X}}{N}-p\right)$$

根据定理 2.11 可知，$\hat{p}$ 是 p 的最小方差无偏估计量。

法三，利用罗克拉美下界。

根据法一知 $\hat{p}$ 是 p 的无偏估计。

$$I(p)=E\left\{\left[\frac{d\ln f(x)}{dp}\right]^2\right\}=E\left\{\left[\frac{X}{p}-\frac{N-X}{1-p}\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{p^2(1-p)^2}E\left[(X-Np)^2\right]=\frac{DX}{p^2(1-p)^2}$$

$$=\frac{Np(1-p)}{p^2(1-p)^2}=\frac{N}{p(1-p)}$$

所以罗克拉美下界为$\frac{1}{nI(p)}=\frac{p(1-p)}{nN}$

$$D(\hat{p})=D\left[\frac{\bar{X}}{N}\right]=\frac{1}{N^2}\frac{DX}{n}=\frac{p(1-p)}{nN}$$

所以 $\hat{p}$ 是 p 的最小方差无偏估计量。

四、（14 分）解：（1）（10）样本条件分布 $q(X \mid \lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i\,!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i\,!}e^{-n\lambda}$

样本联合分布

$$f(X,\lambda)=\pi(\lambda)q(X \mid \lambda)=\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i\,!}e^{-n\lambda}=\frac{1}{2}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i\,!}\lambda^{(\sum_{i=1}^{n}x_i+2)}e^{-(n+1)\lambda}$$

边缘分布 $m(\lambda)=\int_0^{\infty}f(x,\lambda)d\lambda=\frac{1}{2}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i\,!}\int_0^{\infty}\lambda^{(\sum_{i=1}^{n}x_i+2)}e^{-(n+1)\lambda}d\lambda$

令 $(n+1)\lambda=t,\lambda=\frac{t}{n+1},d\lambda=\frac{dt}{n+1}$ ， 则 $m(\lambda)=\frac{1}{2}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i\,!}\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i+2)!}{(n+1)^{\sum_{i=1}^{n}x_i+3}}$

后验分布 $h(x,\lambda)=\frac{f(x,\lambda)}{m(\lambda)}=\frac{(n+1)^{\sum_{i=1}^{n}x_i+3}}{(\sum_{i=1}^{n}x_i+2)!}\lambda^{(\sum_{i=1}^{n}x_i+2)}e^{-(n+1)\lambda}$

贝叶斯估计 $\hat{\lambda}=E(\lambda \mid x)=\int_0^{\infty}\lambda.h(x,\lambda)d\lambda=\frac{(n+1)^{\sum_{i=1}^{n}x_i+3}}{(\sum_{i=1}^{n}x_i+2)!}\int_0^{\infty}\lambda^{(\sum_{i=1}^{n}x_i+3)}e^{-(n+1)\lambda}d\lambda$

故 $\hat{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+3}{n+1}$

（2）贝叶斯风险计算(4)

风险函数 $R(\lambda,\hat{\lambda})=E(\lambda-\hat{\lambda})^2=E(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i+3}{n+1}-\lambda)^2=\frac{\lambda^2+(n-6)\lambda+9}{(n+1)^2}$

贝叶斯风险 $R_B(\hat{\lambda})=ER(\lambda,\hat{\lambda})=\int_0^{\infty}\pi(\lambda).R(\lambda-\hat{\lambda})d\lambda$

故 $R_B(\hat{\lambda})=\frac{1}{(n+1)^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{2}\lambda^2.e^{-\lambda}[\lambda^2+(n-6)\lambda+9]d\lambda=\frac{3}{n+1}$

五、（14 分）解答：（1）方差检验（双侧假设检验）（7）

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

$$F=\frac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}}\sim F(21-1,16-1)=F(20,15)$$

计算 $F=\dfrac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{21}(X_i-\bar{X})^2/(21-1)}{\sum_{i=1}^{16}(Y_i-\bar{Y})^2/(16-1)}=\dfrac{294/20}{256/15}=0.8613$

$F_{0.025}(20,15)=2.76$， $F_{0.975}(20,15)=\dfrac{1}{F_{0.025}(15,20)}=\dfrac{1}{2.57}=0.3891$

由于 $0.3891=F_{0.975}(20,15)<F=0.8613<F_{0.025}(20,15)=2.76$

故原假设成立。 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

（2）均值检验（双侧假设检验）（7）

$$H_0:\mu_2=\mu_1 \leftrightarrow H_1:\mu_2=\mu_1$$

$$T=\frac{\bar{Y}-\bar{X}}{S_W\sqrt{\frac{1}{21}+\frac{1}{16}}}\sim t(21+16-2)=t(35)$$

其中 $S_W^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{21}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{16}(Y_i-\bar{Y})^2}{21+16-2}=\dfrac{294+256}{35}=15.7143$

计算 $T=\dfrac{\bar{Y}-\bar{X}}{S_W\sqrt{\frac{1}{21}+\frac{1}{16}}}=1.9005$

$$|T|=\left|\frac{\bar{Y}-\bar{X}}{S_W\sqrt{\frac{1}{21}+\frac{1}{16}}}\right|=1.9005<t_{0.025}(35)=2.0301$$

故接受原假设，拒绝备选假设。认为两班成绩没有显著差异。

六、（14 分）解：双因素方差分析

$$Q_A=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(\bar{X}_{i.}-\bar{X})^2=5\sum_{i=1}^{3}(\bar{X}_{i.}-\bar{X})^2=5\times 2.0267=10.1335$$

$$Q_B=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(\bar{X}_{.j}-\bar{X})^2=3\sum_{j=1}^{5}(\bar{X}_{.j}-\bar{X})^2=3\times 51.4222=154.2666$$

$$Q_E=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(X_{ij}-\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{.j}+\bar{X})^2=464.5333 \qquad (7)$$

因素 A 自由度 2，因素 B 自由度 4，误差项自由度 8。

$$F_A=\frac{Q_A/2}{Q_E/8}=0.0873<F_{0.05}(2,8)=4.46 \qquad (3)$$

$$F_B=\frac{Q_B/4}{Q_E/8}=0.6642<F_{0.05}(4,8)=3.84 \qquad (3)$$

5 位工人技术之间和不同车床型号之间对产量都无显著影响.(1)

七、（14 分）解答：参数估计(7)

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$$

即 $\quad Y = X\beta + \varepsilon$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & \frac{3}{19} & \frac{7}{19} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & \frac{3}{19} & \frac{7}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{11}(Y_1 + 2Y_2 + Y_3 + 2Y_4 + Y_5) \\ \frac{1}{19}(Y_1 - 5Y_2 + Y_4 + 7Y_5) \\ \frac{1}{19}(-4Y_1 + Y_2 - 4Y_4 + 10Y_5) \end{pmatrix}$$

则
$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \frac{1}{11}(Y_1 + 2Y_2 + Y_3 + 2Y_4 + Y_5) \\ \hat{\beta}_2 = \frac{1}{19}(Y_1 - 5Y_2 + Y_4 + 7Y_5) \\ \hat{\beta}_3 = \frac{1}{19}(-4Y_1 + Y_2 - 4Y_4 + 10Y_5) \end{cases}$$

（1） $\quad H_0 : \beta_1 + \beta_2 = \beta_3 \leftrightarrow H_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq \beta_3 \qquad$ （7）

令 $U=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3=(1,1,-1)\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\\hat{\beta}_2\\\hat{\beta}_3\end{pmatrix}=\alpha^T\hat{\beta}$，其中 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

则 $EU=\alpha^T E\hat{\beta}=\beta_1+\beta_2-\beta_3$

$$DU=D(\alpha^T\hat{\beta})=\sigma^2\alpha^T D(\hat{\beta})\alpha=\sigma^2\alpha^T(X^TX)^{-1}\alpha=\sigma^2\left(\frac{1}{11}+\frac{5}{19}\right)=\frac{74}{209}\sigma^2$$

则 $U\sim N(\beta_1+\beta_2-\beta_3,\frac{74}{209}\sigma^2)$

令 $L=\dfrac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3-(\beta_1+\beta_2-\beta_3)}{\sqrt{\frac{74}{209}}\sigma}\sim N(0,1)$

令 $V=\dfrac{(5-3)\hat{\sigma}^{*2}}{\sigma^2}=\dfrac{2\hat{\sigma}^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$，其中 $\hat{\sigma}^{*2}=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}(Y_i-\hat{Y}_i)^2$

L 与 V 相互独立。

在 H_0 成立时，$T=\dfrac{L}{\sqrt{V/2}}=\dfrac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3}{\sqrt{\frac{74}{209}}\sigma}/\dfrac{\hat{\sigma}^*}{\sigma}=\dfrac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3}{\sqrt{\frac{74}{209}}\hat{\sigma}^*}\sim t(2)$

拒绝域：$W=\{|T|\geq t_{\alpha/2}(2)\}$