4.4　似然比检验

一、似然比的概念

二、似然比检验的步骤

三、从似然比检验导出正态总体的几个检验

通过前几节的讨论知道，假设检验的关键问题是如何选择统计量，进而决定拒绝域，但是求统计量的分布是问题关键之所在。

Neyman-Pearson 在 1928 年提出了利用似然比获得检验统计量的一般方法。其基本思想与参数估计理论的极大似然方法类似。

似然比检验法的优点是不需要知道检验统计量的分布就可以检验。

一、似然比的概念

假设总体$X \sim F(x;\theta),\ \theta \in \Theta, (X_1, \cdots, X_n)^T$

是来自总体X的一组样本，

对于一个假设检验问题，

零假设和备选假设

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta \in \Theta_1,$$

其中$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta,\quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing.$

给定后，

假设$F(x;\theta)$的密度函数为$f(x;\theta)$（若X为离散型随机变量，$f(x;\theta)$表示分布列），则样本$(X_1,\cdots,X_n)^T$的似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta),$$

若H_0为真，则应有

$$L_0(x_1,\cdots,x_n)=\sup_{\theta\in\Theta_0} L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$$

令 $$L_1(x_1,\cdots,x_n)=\sup_{\theta\in\Theta} L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$$

似然比定义为

$$\lambda(x_1,\cdots,x_n) = \frac{L_1(x_1,\cdots,x_n)}{L_0(x_1,\cdots,x_n)}$$

直观上讲，若H_0为真，$\lambda(x_1,\cdots,x_n)$应接近于1，
反之$\lambda(x_1,\cdots,x_n) \geq 1$.

例4.16　设$X \sim P(\lambda), (X_1, \cdots, X_n)^T$为$X$的样本，

考虑检验$H_0: \lambda = \lambda_0, H_1: \lambda \neq \lambda_0$,

解 根据题意

设$X \sim P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$L(x_1, \cdots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i; \lambda),$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}, \quad x_i = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad \lambda > 0.$$

$$= \frac{\lambda^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^{\infty} x_i!} e^{-n\lambda}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$L(x_1,\cdots,x_n;\lambda)=\frac{\lambda^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^{\infty}x_i\,!}e^{-n\lambda}.$$

$$L_0(x_1,\cdots,x_n)=\sup_{\lambda=\lambda_0}L(x_1,\cdots,x_n;\lambda)=\frac{\lambda_0^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^{\infty}x_i\,!}e^{-n\lambda_0}$$

$$L_1(x_1,\cdots,x_n)=\sup_{\lambda\in\Theta}L(x_1,\cdots,x_n;\lambda)=\frac{\bar{x}^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^{\infty}x_i\,!}e^{-n\bar{x}}$$

$$\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\frac{L_1(x_1,\cdots,x_n)}{L_0(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{\bar{x}^{n\bar{x}}}{\lambda_0^{n\bar{x}}}e^{-n\bar{x}+n\lambda_0}.$$

二、似然比检验的步骤

假设总体$X \sim F(x;\theta),\ \theta \in \Theta, (X_1, \cdots, X_n)^T$

是来自总体X的一组样本，

下面给出似然比检验的一般步骤

（1）明确零假设和备选假设

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1,$$

其中$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta,\quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing.$

（2）构造似然比

假设$F(x;\theta)$的密度函数为$f(x;\theta)$（若X为离散型随机变量，$f(x;\theta)$表示分布列），则样本$(X_1,\cdots,X_n)^T$的似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta),$$

若H_0为真，则应有

$$L_0(x_1,\cdots,x_n)=\sup_{\theta\in\Theta_0} L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$$

令

$$L_1(x_1,\cdots,x_n)=\sup_{\theta\in\Theta} L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$$

构造似然比

$$\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\frac{L_1(x_1,\cdots,x_n)}{L_0(x_1,\cdots,x_n)}$$

显然$\lambda(x_1,\cdots,x_n)\geq 1$，直观上讲，若$H_0$为真，$\lambda(x_1,\cdots,x_n)$应接近于1，反之，$\lambda(x_1,\cdots,x_n)$的值若足够大就应否定假设$H_0$.

这就是似然比检验的基本思想。

(3)对于给定的检验的显著性水平α，选择一常数λ_α，使对于一切$\theta \in \Theta_0$，满足条件

$$P\{(x_1,\cdots,x_n) : \lambda(x_1,\cdots,x_n) \geq \lambda_\alpha\} \leq \alpha,$$

则拒绝域为

$$\bar{W}_\alpha = \{(x_1,\cdots,x_n) : \lambda(x_1,\cdots,x_n) \geq \lambda_\alpha\}$$

(4)对于$(X_1,\cdots,X_n)^T$的一组观测值，若$(x_1,\cdots,x_n)^T \in \bar{W}_\alpha$，则拒绝$H_0$，否则只能接受$H_0$。

三、从似然比检验导出正态总体的几个检验

例4.17 设$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$,$(X_1,\cdots,\ X_n)^T$为X的样本，考虑检验$H_0:\mu=\mu_0(H_1:\mu\neq\mu_0)$，这里$\sigma^2$已知。

解 根据题意

(1) $H_0:\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$

$\Theta_0=\{\mu_0\}$,

$\Theta_1=\ \Theta-\Theta_0=\{\mu:\mu\in(-\infty,+\infty),\ \mu\neq\mu_0\}$,

$$(2)\quad L(x_1,\cdots,x_n;\mu)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu)^2\right]\right\}$$

显然 $$L_0(x_1,\cdots,x_n)=\sup_{\theta\in\Theta_0} L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$$

$$\overset{\mu=\mu_0}{=}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2\right]\right\}$$

$$L_1(x_1,\cdots,x_n)=\sup_{\mu\in\Theta} L(x_1,\cdots,x_n;\mu)$$

$$\overset{\mu=\bar{x}}{=}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\bar{x})^2\right]\right\}$$

$$\overset{\mu=\bar{x}}{=}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}$$

$$\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\frac{L_1(x_1,\cdots,x_n)}{L_0(x_1,\cdots,x_n)}$$

$$=\frac{(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}})^n exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\cancel{(x_i-\bar{x})^2}\}}{(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}})^n exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\cancel{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}+n(\bar{x}-\mu_0)^2]\}}$$

$$=exp\{\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2\}$$

针对 $\lambda(x_1,\cdots,x_n)=exp\{\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2\}$

(3) 对于给定的显著性水平 α，拒绝域为

$$\bar{W}_\alpha=\{(x_1,\cdots,x_n)\ :\lambda(x_1,\cdots,x_n)\geq\lambda_\alpha\}$$

$$=\{(x_1,\cdots,x_n)\ :|\bar{x}-\mu_0|>\ C_\alpha\}$$

其中 C_α满足 $P\{|\bar{X}-\mu_0|>\ C_\alpha\,|\,\mu_0\}=\alpha,$

当H_0成立时，由于$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu_0)\sim N(0,1).$

$$|\bar{X}-\mu_0|>C_\alpha \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X}-\mu_0|>\ \frac{\sqrt{n}}{\sigma}C_\alpha=u_{\alpha/2}$$

$$\Longleftrightarrow C_\alpha=\frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sigma,$$ 与4.2节结论一致。

例4.18 设$X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$,$(X_1,\cdots,\ X_n)T$是X的一组样本。方差σ^2未知，检验：

$$H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$$

解 根据题意

(1) $H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$

$$\Theta_0=\{(\mu,\sigma^2):\mu=\mu_0,0<\sigma^2<\infty\},$$

$$\Theta_1=\Theta-\Theta_0=\{(\mu,\sigma^2):\mu\in(-\infty,+\infty),$$

$$\mu\neq\mu_0,0<\sigma^2<\infty\},$$

$$(2)\quad L(x_1,\cdots,x_n;\mu)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu)^2]\}$$

则令$\theta=(\mu,\sigma^2)$，有

$$L_1(x_1,\cdots,x_n)=\sup_{\mu\in\Theta}L(x_1,\cdots,x_n;\mu)$$

$$\underset{\mu=\bar{x},\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{=}\left(\frac{n}{2\pi\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^{\frac{n}{2}} exp\{-\frac{n}{2}\}$$

$$L_0(x_1,\cdots,x_n) = \sup_{\theta\in\Theta_0} L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$$

$$\overset{\mu=\mu_0,\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{=} \left(\frac{n}{2\pi\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}} exp\{-\frac{n}{2}\}$$

$$\lambda(x_1,\cdots,x_n) = \frac{L_1(x_1,\cdots,x_n)}{L_0(x_1,\cdots,x_n)} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right]^{\frac{n}{2}}=(1+\frac{T^2}{n-1})^{\frac{n}{2}},$$

这里 $T=\dfrac{\sqrt{n(n-1)}(\bar{x}-\mu_0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s_n^*}$

3）对于给定的显著性水平α

由于$\lambda(x_1,\cdots,x_n)$是T^2的严格增函数，因而似然比检验的拒绝域为

$$\bar{W}_\alpha=\{(x_1,\cdots,x_n)^T,|T|>C_\alpha\}$$

其中 C_α满足

$$P\{|T| > C_\alpha \mid (\mu_0, \sigma^2)\} = \alpha,$$

当H_0成立时，$T \sim t(n-1)$. 则$C_\alpha = t_{\alpha/2}(n-1)$,
这与4.2节得到的结果是一致的.

Thank You!