西北工业大学研究生课程考试试题

考试科目：<u>数理统计（A）</u> 时间：2020年12月29日

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								

一、填空（每空2分，共20分）

1. 假设总体X服从正态分布$N(\mu,1)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$为取自总体$X$的样本，则未知参数$\mu$的充分统计量为________________，对给定的显著性水平α，检验假设$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$的拒绝域为________________________________。

2. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)^{\mathrm{T}}$是两组样本，且有如下关系：$Y_i=(X_i-a)/b,\ a,b\neq 0$均为常数，则样本均值$\bar{Y}$与$\bar{X}$的关系式是__________________________，样本方差S_Y^2与S_X^2的关系式是______________________。

3.设随机变量$X\sim F(10,10)$,若$\alpha>0$为已知常数，且满足条件$P(X>\alpha)=0.30$,则$P(X>1/\alpha)=$____________。

4. 设总体X服从参数为1的指数分布，$(X_1,X_2)^{\mathrm{T}}$是来自该总体的一个容量为2的样本，$U=\max(X_1,X_2)$，$V=\min(X_1,X_2)$，则$E(U+V)=$__________________。

5. 假设总体$X\sim B(N,p)$，p为未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$为取自总体$X$的样本，则$p^2$的无偏估计的方差的罗-克拉美下界

试卷密号	

为________________。

6. 假设总体 X 服从均匀分布 $U(0,\theta)$, $\theta>0$ 未知， $(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 为取自总体 X 的样本，则检验假设 $H_0:\theta=\theta_0, H_1:\theta\neq\theta_0$ （ $\theta_0>0$ 为已知常数）的似然比为 ____________________。

7. 柯尔莫洛夫检验的检验统计量是____________________________。

8. 假设随机向量 $(X_1,X_2)^{\mathrm{T}}$ 服从二维正态分布 $N_2(\mu,\Sigma)$， $\mu=(0,0)^{\mathrm{T}}$， $\Sigma=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 34\end{bmatrix}$ 。令 $Y=\frac{1}{25}\left(3X_1+X_2\right)^2+X_1^2$，则 Y 的概率分布为 _____________。

试卷密号___________

考试科目___________

学　　号___________

姓　　名___________

考试日期___________

注意事项

1. 以上各项除试卷密号外，必须一一填写清楚；
2. 答题时注意保持卷面整洁；
3. 虚线左边除用于答题外不得做任何记号；
4. 虚线右边的正反面不得用于答题。

二、（12 分）设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_{n+1})^{\mathrm{T}}$ 是来自总体 X 的一个容量为 $n+1$ 的样本，记 $\bar{X}_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i\quad(1\le k\le n)$，$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$，$S_n=\sqrt{S_n^2}$，求统计量 $\frac{\bar{X}_{n+1}-\bar{X}_n}{S_n}\sqrt{(n-1)(n+1)}$ 的概率分布。

三、（12 分）假设总体 X 的分布密度如下：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\alpha}e^{-x^2/(2\alpha)}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 是来自该总体的一个容量为 n 的样本，$\alpha>0$ 是未知参数，求：（1）α 的极大似然估计量 $\hat{\alpha}$；（2）α 的最小方差无偏估计量。

四、（14 分）设总体 X 服从负二项分布 $NB(k,p)$，分布律为

$$f(x\mid p)=\binom{x-1}{k-1}p^{k}(1-p)^{x-k},\ x=k,k+1,\cdots$$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 为从总体中抽取的一个容量为 n 的样本。设 p 的先验分布 $\pi(p)$ 为贝塔分布 $Be(a,b)$，即

$$\pi(p)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}, & 0<p<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中假设 a,b 是已知的参数。

求：（1）平方损失 $L(p,d)=(p-d)^2$ 下 p 的贝叶斯估计；

（2）加权平方损失 $L(p,d)=p(p-d)^2$ 下 p 的贝叶斯估计。

五、（14 分）在两种工艺条件下纺得细纱，各抽 100 个试样，试验得强力数据，经计算得（单位：g）：

甲工艺： $n_1 = 100, \overline{x}_1 = 280, s_{1n_1}^* = 28$

乙工艺： $n_2 = 100, \overline{x}_2 = 286, s_{2n_2}^* = 28.5$

其中 $s_{1n_1}^*$ 和 $s_{2n_2}^*$ 分别为相应的修正样本标准差。假设细纱强力均服从正态分布，试问两种工艺下细纱强力有无显著差异（α=0.05，计算结果请保留三位有效数字）？已知 $F_{0.025}(99,99) = 1.486$，

$F_{0.05}(99,99) = 1.394, t_{0.025}(198) = 1.972$.

六、（14 分）为了对几个行业的服务质量进行评价，消费者协会在零售业、旅游业、航空公司、家电制造业分别抽取了不同的企业作为样本，其中零售业抽取 7 家，旅游业抽取 6 家，航空公司抽取 5 家，家电制造业抽取 5 家，每个行业中所抽取的这些企业，假定他们在负责服务对象，服务内容，企业规模等方面基本上是相同的，然后统计出最近一年中的消费者，对这 23 家企业投诉的次数结果如下表所示：

行业	各家投诉次数						
零售业	57	66	49	40	34	53	44
旅游业	68	39	29	45	56	51	
航空公司	31	49	21	34	40		
家电制造业	44	51	65	77	58		

问这几个行业之间的服务质量是否有显著差异？($\alpha = 0.05$，假设满足方差分析的基本假设并已知 $F_{0.05}(3,19) = 3.127$，请写出计算公式并列出方差分析表，计算结果保留三位有效数字).

七、（14 分）设有线性模型

$$\begin{cases} Y_1 = a + \varepsilon_1, \\ Y_2 = a+b+\varepsilon_2, \\ Y_3 = a-b+\varepsilon_3. \\ Y_4 = a+2b+\varepsilon_4, \\ Y_5 = a-2b+\varepsilon_5, \\ Y_6 = a+3b+\varepsilon_6, \\ Y_7 = a-3b+\varepsilon_7. \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_i (i=1,2,3,4,5,6,7)$ 相互独立，且 $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$。

（1）求 a 和 b 的最小二乘估计 $\hat{a},\hat{b}$；

（2）求 $Y=\hat{a}-4\hat{b}$ 的概率分布。