Zadanie 12.

Dana jest funkcja $f(x) = x^5 - 15x^3$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 12.1. (0-4)

Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x)$.

Zadanie 12.2. (0-3)

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

ARKUSZ IV

Zadanie 1. (0-3)

Dana jest parabola o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$ i leżący na niej punkt A o współrzędnej x równej 4.

Wyznacz równanie stycznej do paraboli w punkcie A.

Zadanie 2. (0-3)

Liczby a i b spełniają warunki $2^a = 9$ oraz $3^b = 5$.

Udowodnij, że $ab = \log_2 25$.

Zadanie 3. (0-3)

Dany jest wielomian $W(x) = 2x^3 + mx^2 + 2x - 3$. Wiadomo, że ten wielomian można zapisać w postaci $W(x) = (x+3)Q(x)$, gdzie $Q(x)$ jest pewnym trójmianem kwadratowym.

Wyznacz wielomian $Q(x)$ oraz oblicz pierwiastki rzeczywiste wielomianu $W(x)$.

Zadanie 4. (0-3)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{-2x+19}{x-3} \text{ dla } x \neq 3.$$

Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Wyznacz wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji f.

Zadanie 5. (0-3)

W nieskończonym ciągu geometrycznym suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 240, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 120.

Oblicz sumę trzech początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 6. (0-4)

Pan Kowalski często gra z synem w tenisa stołowego. Obliczył, że 70% rozegranych setów wygrywa jego syn.

Oblicz, ile setów musi rozegrać z synem pan Kowalski, aby prawdopodobieństwo wygrania przez ojca co najmniej jednego w tym meczu było większe od 0,9.

Zadanie 7. (0-4)

Dane jest równanie $\sin 5x + \sin x = 0$.

Wyznacz najmniejsze dodatnie rozwiązanie tego równania.

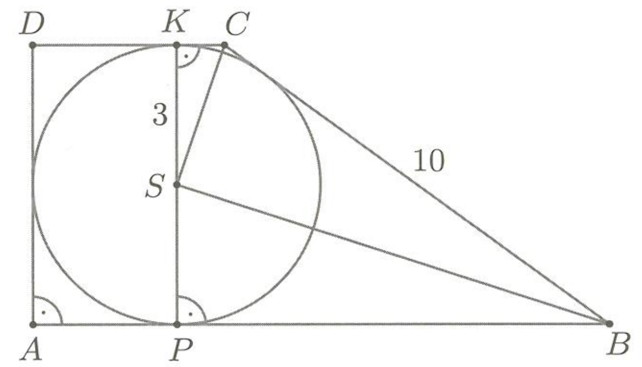
Zadanie 8. (0-5)

Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - mx^2 + mx$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f ma dwa ekstrema w różnych punktach x_1 i x_2 tego samego znaku.

Zadanie 9. (0-5)

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o kątach prostych przy wierzchołkach A i D. Ramię BC trapezu ma długość 10. W ten trapez wpisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu 3. Punkt P jest punktem styczności okręgu i dłuższej podstawy AB tego trapezu, a punkt K jest punktem styczności okręgu i krótszej podstawy CD tego trapezu (zobacz rysunek).



Wykaż, że trójkąty CKS i BPS są trójkątami podobnymi oraz oblicz skalę tego podobieństwa.

Zadanie 10. (0-5)

Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 40 = 0$.

Wyznacz współrzędne punktu leżącego na okręgu, który znajduje się najbliżej początku układu współrzędnych.

Zadanie 11. (0-6)

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} mx + y &= 4 \\ 4x + my &= m \end{cases}$$

z niewiadomymi x i y oraz parametrem m.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których układ jest oznaczony, a para liczb (x, y) będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek $x + y \geq 4$.

Zadanie 12. (0-6)

Skrzynia o objętości 32 dm^3 ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratowej.

Wyznacz wymiary skrzyni tak, aby suma pól ścian bocznych i podstawy była jak najmniejsza. Zapisz obliczenia.

ARKUSZ V

Zadanie 1. (0-3)

Dane są liczby $a = \log_2 12 - \log_2 3 + 5^{3\log_5 2}$ i $b = 3\log 6$.

Oblicz a^b.

Zadanie 2. (0-3)

Funkcja określona jest wzorem $f(x) = x^2 - 5x + 7$ dla każdej liczby rzeczywistej.

Wyznacz taki punkt A, że styczna do wykresu funkcji f w tym punkcie tworzy z osią Ox kąt $\frac{\pi}{4}$. Zapisz obliczenia.

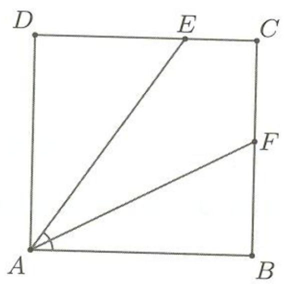
Zadanie 3. (0-4)

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Udowodnij, że każda wartość funkcji $f(x)$ jest większa lub równa 2.

Zadanie 4. (0-4)

Na boku CD kwadratu $ABCD$ leży punkt E. Dwusieczna kąta BAE przecina bok BC w punkcie F (patrz rysunek).



Uzasadnij, że $|AE| = |BF| + |DE|$.

Zadanie 5. (0-4)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametrów a i b, dla których funkcja f ma w punkcie $x_0 = -1$ ekstremum równe 3.

Zadanie 6. (0-4)

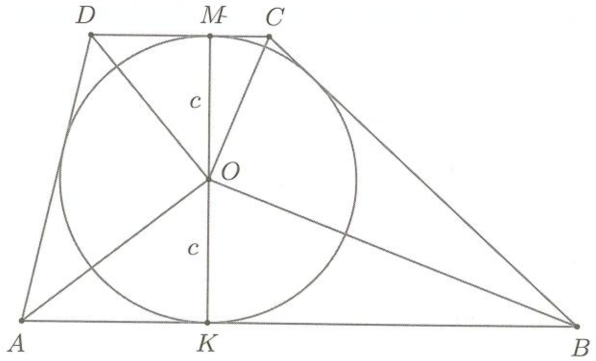
Rozwiąż równanie

$$\sin 4x \cdot \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-4)

Dany jest trapez o podstawach a i b opisany na okręgu o promieniu c (zobacz rysunek).



Wykaż, $4c^2 \leq ab$.

Zadanie 8. (0-5)

W prostej o równaniu $2x + y - 6 = 0$ zawiera się bok kwadratu opisanego na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$.

Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.

Zadanie 9. (0-4)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), o wyrazach dodatnich, w którym $a_2 - a_4 = 60$ i $a_3 - a_1 = -120$.

Wyznacz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Zadanie 10. (0-4)

Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-5)

W ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisano sześcian o krawędzi 6 w taki sposób, że cztery wierzchołki sześcianu należą do krawędzi bocznych ostrosłupa, a pozostałe cztery do jego podstawy. Ściana boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°.

Oblicz pole powierzchni tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.

Wszystkie wierzchołki trapezu $ABCD$, o podstawach AB i CD ($|AB| > |CD|$), należą do paraboli $y = -x^2 + 8x - 7$, która przecina oś Ox w punktach A i B.

Zadanie 12.1. (0-2)

Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B trapezu $ABCD$ oraz długość AB i równanie osi symetrii paraboli.

Zadanie 12.2. (0-5)

Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trapezu, który ma największe pole i oblicz to pole. Zapisz obliczenia.

ARKUSZ VI

Zadanie 1. (0-3)

Dana jest liczba $a = \log_5 2$.

Wyraź $\log(0,4)$ za pomocą liczby a. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-3)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Zadanie 3. (0-4)

Wielomian W jest określony wzorem $W(x) = (x-3)(x^2 - (m+4)x + m + 7)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 4. (0-4)

W nieskończonym malejącym ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek

$$\frac{a_2 + a_4}{a_2} = \frac{13}{9}.$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych jest równa 18.

Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n).

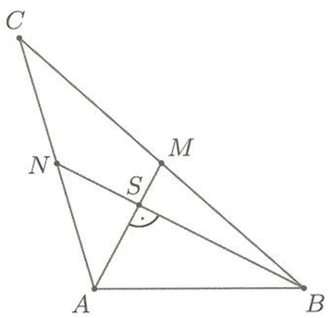
Zadanie 5. (0-4)

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną dodatnią większą od 2. Ze zbioru $M = \{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ losujemy jednocześnie trzy liczby. Zdarzeniu A sprzyja jednoczesne wylosowanie ze zbioru M trzech liczb, takich że suma tych liczb jest podzielna przez 3.

Oblicz prawdopodobieństwa zdarzenia A.

Zadanie 6. (0-4)

Długości boków trójkąta ABC są równe $|BC| = a$, $|AC| = b$. Środkowe AM i BN są do siebie prostopadłe (zobacz rysunek).



Udowodnij, że $|AB| = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}$.

Zadanie 7. (0-4)

Rozwiąż równanie $1 + \overset{2}{\cancel{3}}\cos^2 x = \overset{3}{\cancel{4}}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8. (0-5)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^4 + (x+2)^4$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Oblicz najmniejszą wartość tej funkcji.

Zadanie 9. (0-5)

Z urny, w której znajduje się 6 kul białych i 3 czarne, losujemy dwie kule. Następnie z pozostałych kul losujemy jedną kulę.

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula będzie biała.

Zadanie 10.

Dany jest okrąg o środku w punkcie S i równaniu $x^2+y^2+4y+3=0$. Z punktu $A=(0,1)$ poprowadzono proste styczne do okręgu w punktach B i C.

Zadanie 10.1. (0-3)

Oblicz pole czworokąta $ABSC$.

Zadanie 10.2. (0-3)

Wyznacz równania tych stycznych.

Zadanie 11.

Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa h. Kąt między jego krawędziami bocznymi ma miarę α.

Zadanie 11.1. (0-5)

Uzasadnij, że objętość ostrosłupa wyraża się wzorem $V=\frac{h^3\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Zadanie 11.2. (0-2)

Wyznacz jaki warunek spełnia miara kąta α.

Zadanie 10.

Dany jest okrąg o środku w punkcie S i równaniu $x^2+y^2+4y+3=0$. Z punktu $A=(0,1)$ poprowadzono proste styczne do okręgu w punktach B i C.

Zadanie 10.1. (0-3)

Oblicz pole czworokąta $ABSC$.

Zadanie 10.2. (0-3)

Wyznacz równania tych stycznych.

Zadanie 11.

Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa h. Kąt między jego krawędziami bocznymi ma miarę α.

Zadanie 11.1. (0-5)

Uzasadnij, że objętość ostrosłupa wyraża się wzorem $V=\frac{h^3\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Zadanie 11.2. (0-2)

Wyznacz jaki warunek spełnia miara kąta α.

ARKUSZ VII

Zadanie 1. (0-3)

Dane są liczby $a = \cos\frac{2\pi}{3} \cdot \sin\frac{11\pi}{6}$ i $b = 2 \cdot (\log_2 25) \cdot (\log_5 16)$.

Oblicz b^{a-1}.

Zadanie 2. (0-3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+4}$ dla każdej liczby rzeczywistej.

**Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = \left(1, \frac{1}{5}\right)$.
Zapisz obliczenia.**

Zadanie 3. (0-3)

Dana jest funkcja $f(x) = -x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 1$ dla $x \in \mathbb{R}$.

**Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f.
Zapisz obliczenia.**

Zadanie 4. (0-3)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$, $|AC| = 2\sqrt{2}$ i $|BC| = 2$.

Wykaż, że środkowe BD i CE tego trójkąta są do siebie prostopadłe.

Zadanie 5. (0-5)

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} mx + 3y = 2 \\ 3x + my = m^2 \end{cases}$$

z niewiadomymi x i y oraz parametrem m.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których układ równań jest oznaczony, a para liczb (x, y) będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek $x - y \leq 2$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-4)

Rozwiąż równanie

$$\mathbf{2 + \sin 2x = 2\cos^2 x + 2\sin x.}$$

Zapisz obliczenia.

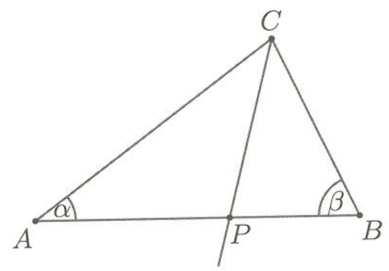
Zadanie 7. (0-5)

W trójkącie równoramiennym ABC o ramionach AC i BC dane są $A = (-3, -4)$ i $B = (5, 2)$. Wysokość trójkąta poprowadzona do podstawy AB ma długość 10.

Wyznacz współrzędne punktu C. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0-3)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sin\alpha = \frac{2}{3}\sin\beta$ oraz $|AB| = 16$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie P (zobacz rysunek).



Oblicz długości odcinków AP i PB. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-5)

Dane jest równanie

$$x^2 + (m-1)x + 7 - 2m = 0.$$

Wyznacz wszystkie wartości m, dla których to równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > x_1 + x_2$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-3)

Strzelec trafia do tarczy w pojedynczym strzale z prawdopodobieństwem 0,7.

Oblicz, ile musi on oddać strzałów, aby z prawdopodobieństwem większym od 0,96 trafić do tarczy co najmniej raz. Zapisz obliczenia.

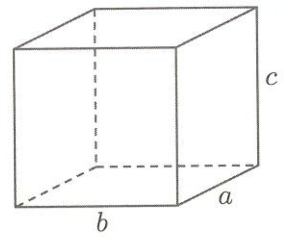
Zadanie 11. (0-3)

Przekrój graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, zawierający krawędź dolnej podstawy i punkt przeciwległej krawędzi bocznej, jest nachylony do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 30°$. Przekrój ten odcina od danego graniastosłupa ostrosłup o objętości $V = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Oblicz pole przekroju. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.

Z kawałka kątownika mającego 24 m długości zrobiono szkielet prostopadłościennego akwarium, w którym stosunek długości krawędzi podstawy jest równy 1:4. (zobacz rysunek)



Zadanie 12.1. (0-2)

Wykaż, że objętość akwarium wyraża się wzorem

$$V(c) = 0,16c^3 - 1,92c^2 + 5,76c.$$

Zadanie 12.2. (0-1)

Wyznacz dziedzinę funkcji V.

Zadanie 12.3. (0-3)

Oblicz objętość tego z akwariów, którego objętość jest największa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0-4)

Iloczyn drugiego i czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) wynosi 77, a suma trzeciego i piątego wyrazu tego ciągu wynosi 22.

Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów ciągu o numerach parzystych. Zapisz obliczenia.

ARKUSZ VIII

Zadanie 1. (0-3)

Dana jest liczba $a = \log_{12} 27$.

Wyraź $\log_6 16$ za pomocą liczby a. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-3)

Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry.

Oblicz, ile co najmniej razy należy rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej jeden raz sześciu oczek było większe od 0,75.

Zadanie 3. (0-4)

Liczby x, y spełniają warunki $x + y = 3$ i $x^2 + y^2 = 7$.

Udowodnij, że wartość wyrażenia $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ wynosi 18.

Zadanie 4. (0-4)

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego malejącego ciągu geometrycznego wynosi 9, a suma kwadratów tych wyrazów jest równa 40,5.

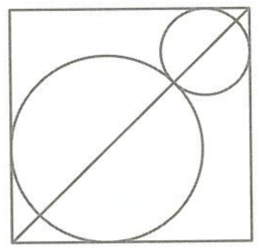
Oblicz sumę sześcianów wyrazów tego ciągu.

Zadanie 5. (0-4)

Rozwiąż równanie $\cos x + \cos 7x - 2\sin^2 2x + 1 = 0$, gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

Zadanie 6. (0-4)

W kwadracie o boku długości 1 znajdują się dwa okręgi styczne zewnętrznie i styczne do sąsiednich boków kwadratu (patrz rysunek).



Udowodnij, że suma długości promieni tych okręgów jest równa $2 - \sqrt{2}$.

Zadanie 7. (0-4)

W trapezie prostokątnym dłuższa przekątna o długości 24 i zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego trapezu. Odległość wierzchołka kąta rozwartego trapezu od dłuższej przekątnej wynosi 9.

Oblicz pole trapezu.

Zadanie 8. (0-4)

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$.

Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x)$ równoległych do prostej $y = 6x$.

Zadanie 9. (0-4)

Podstawą ostrosłupa trójkątnego jest trójkąt prostokątny, którego jeden z kątów ostrych ma miarę α. Każda z krawędzi bocznych ma długość b i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze β.

Oblicz objętość ostrosłupa.

Zadanie 10. (0-5)

Dane jest równanie z parametrem m

$$x^2 + 3 = m + (2m + 1)x.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których powyższe równanie ma dwa pierwiastki dodatnie.

Zadanie 11.

Okręgi $x^2 + (y-1)^2 = 5$ i $x^2 + y^2 + 6x + 10y + m = 0$ są styczne wewnętrznie.

Zadanie 11.1. (0-3)

Wyznacz wartość parametru m.

Zadanie 11.2. (0-3)

Wyznacz punkt styczności tych okręgów.

Zadanie 12. (0-4)
Niech $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$, gdzie $x \in \langle -6, -1 \rangle$.

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)$.

ARKUSZ IX

Zadanie 1. (0-3)
Dana jest suma $(2+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2}) + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ldots$

Oblicz podaną sumę. Wynik przedstaw w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}_{+}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-3)
Dane są parzyste liczby czterocyfrowe, w zapisie których występują trzy różne cyfry. Powtarzającą się cyfrą w liczbie jest cyfra jedności.

Oblicz, ile jest takich liczb. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-3)

Wykaż, że dla dowolnej liczby $n > 0$ i $n \neq 1$

$$\log_n(n+1) \cdot \log_{n+1}(n+2) \cdot \log_{n+2}(n+3) \cdot \log_{n+3} n = 1.$$

Zadanie 4. (0-3)

Ze zbioru liczb $\{2, 3, 4, 5, 11, 12\}$ wybieramy po kolei bez zwracania dwie liczby i tworzymy z nich ułamek zwykły w ten sposób, że pierwsza wylosowana liczba jest licznikiem, a druga mianownikiem ułamka.

Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia ułamka nieskracalnego, pod warunkiem, że ułamek jest mniejszy od 1. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-4)

Dany jest trójkąt, którego boki zawarte są w osi Ox i wykresie funkcji $f(x) = -\frac{4}{3}|x| + 4$.

Wyznacz równanie okręgu wpisanego w ten trójkąt. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-4)

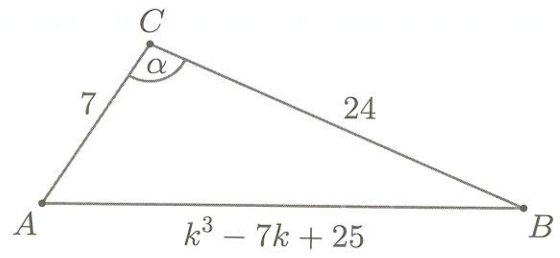
Rozwiąż równanie

$$(\sin x - \cos x)^2 = \sin(4x) + 1$$

w zbiorze $\langle -\pi, \pi \rangle$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-6)

Dany jest trójkąt (zobacz rysunek).



Wyznacz zbiór wszystkich wartości liczby k, dla których kąt α w trójkącie nie jest ostry. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0-4)

Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $|AB| = 6$, $|AD| = 4$ i $|BD| = 2\sqrt{10}$.

Oblicz cosinus kąta CAD. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-5)

Piąty wyraz malejącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy (-10), a jego wyrazy a_2, a_3, a_7 są w podanej kolejności wyrazami ciągu geometrycznego.

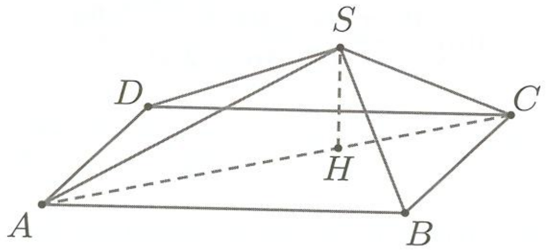
Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{1 - 3n + 2n^2}.$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-5)

Kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Odcinek HS jest wysokością ostrosłupa, przy czym punkt H dzieli przekątną AC podstawy w stosunku 2:1 (patrz rysunek). Krawędzie boczne BS i DS mają długość 1.



Oblicz objętość tego ostrosłupa oraz długości krawędzi AS i CS. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11.

Dane są dwie liczby rzeczywiste x, y spełniające warunek $x - y = 2$.

Zadanie 11.1. (0-3)

Wyznacz liczbę x, dla której wartość wyrażenia $\frac{y^2-4x+3}{x^2+1}$ jest największa.

Zadanie 11.2. (0-1)

Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $\frac{y^2-4x+3}{x^2+1}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-6)

Dane jest równanie

$$(x-3)\cdot[(3-m)x^2+mx+1]=0$$

z niewiadomą x i parametrem $m \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste, których suma kwadratów jest niemniejsza niż 11. Zapisz obliczenia.

ARKUSZ X

Zadanie 1. (0-3)

Uzasadnij, że $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2 = 1$.

Zadanie 2. (0-3)

Niech x_1, x_2 będą pierwiastkami równania $x^2+bx+c=0$.

Wyznacz całkowite współczynniki b i c tak, aby powyższe równanie miało dwa różne rozwiązania spełniające warunki, że suma ich odwrotności była równa $\frac{2}{3}$, a suma ich kwadratów była równa 40.

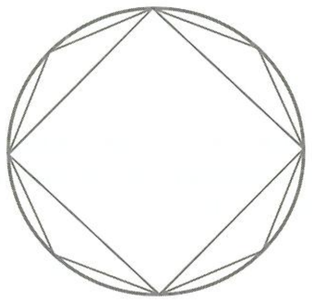
Zadanie 3. (0-3)

Dane jest równanie $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 2$, którego lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

Rozwiąż to równanie.

Zadanie 4. (0-3)

Wyznacz stosunek pól ośmiokąta foremnego i kwadratu, wpisanych w okrąg o promieniu R (patrz rysunek).

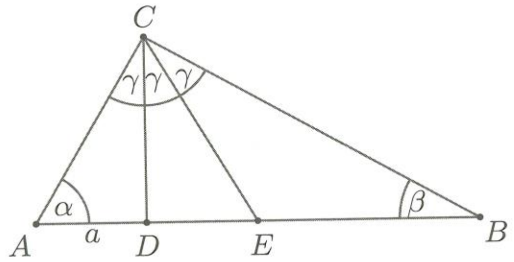


Zadanie 5. (0-3)

Udowodnij, że jeżeli $x + y = 4$ i $x^3 + y^3 = 16$, to wartość wyrażenia $4x^2y^2$ jest równa 64.

Zadanie 6. (0-6)

Wyznacz kąty wewnętrzne trójkąta wiedząc, że wysokość i środkowa poprowadzona z tego samego wierzchołka dzielą kąt wewnętrzny przy tym wierzchołku na trzy równe kąty (patrz rysunek).



Zadanie 7. (0-5)

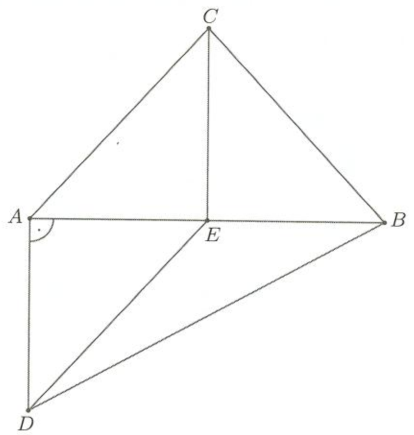
Wyznacz wspólne rozwiązania równań

$$\cos 3x = \cos x \text{ oraz } \sin 4x = 0$$

w przedziale $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Zadanie 8. (0-5)

Trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC| = 9$ i $|AB| = 12$ ma z trójkątem prostokątnym ABD wspólny bok AB (zobacz rysunek). Punkt E jest środkiem boku AB i $|CE| = |AD|$.



Oblicz pole i obwód trójkąta DBC oraz $\cos|\sphericalangle DBC|$.

Zadanie 9. (0-4)

Dwie osoby wypełniają niezależnie i całkowicie przypadkowo test złożony z 10 pytań wymagający odpowiedzi TAK – NIE.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że przynajmniej w 8 przypadkach obie odpowiedzą tak samo.

Zadanie 10. (0-4)

Uzasadnij, że równanie $3x^5 - 10x^3 + 20x - 5 = 0$ spełnia dokładnie jedna liczba rzeczywista, z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

Zadanie 11. (0-6)

Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A = (3, 0)$ i $B = (-1, 2)$ należy do prostej o równaniu $x - y + 2 = 0$.

Napisz równanie tego okręgu.

Zadanie 12.

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym suma długości wszystkich krawędzi jest równa 48.

Zadanie 12.1. (0-2)

Wyznacz objętość tego graniastosłupa jako funkcję $f(x)$ w zależności od długości krawędzi podstawy. Określ dziedzinę tej funkcji.

Zadanie 12.2. (0-4)

Wyznacz wymiary graniastosłupa, którego objętość jest największa.

ARKUSZ XI

Zadanie 1. (0-3)

Dane są liczby $a = \log_4 6$ i $b = \log_2 3$.

Zapisz $\log_{108} 2$ w postaci wyrażenia zawierającego a i b.

Zadanie 2. (0-3)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich taki, że $a_2 - a_4 = 30$ i $a_3 - a_1 = -60$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.