Rappel: Théorème de Lagrange $\exists c \in [a,b]$ si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Cas multivarié : $f(x_0) - f(x_1) = \nabla f(x^*)(x_0 - x_1)$
avec $x^* \in [x_0, x_1]$ pour f continue

6.2 50 m, 5,8 secondes, erreur distance 0.1 m, erreur tps 0.01 s.
Estimer l'erreur sur la vitesse moyenne.

$v(l,t) = \frac{l}{t}$ $\quad$ l : distance, t : temps
$(\mathbb{R}_*^+)^2 \to \mathbb{R}$ continue et différentiable

$h = (0{,}1 ; 0{,}01)$

$$|v(x+h) - v(x)| = |\nabla v(x) \cdot h| \text{ par Lagrange}$$

$\nabla v(x) = \left(\frac{1}{t}, -\frac{l}{t^2}\right)$ on estime en $x = (50, 5.8)$

$$|v((50, 5.8) + (0.1, 0.01)) - v((50, 5.8))| = \left|\left(\frac{1}{5.8}, \frac{-50}{(5.8)^2}\right) \cdot (0.1, 0.01)\right|$$

Rappel : Pour chercher les extrema sur un compact d'une fct différentiable
1. Théorème de FERMAT $\to$ sur l'intérieur de l'ensemble
2. Étude des bords.

6.10 $f(x,y) = |x|^{1/4} + |y|^{1/4}$ $\quad$ $D = \{x^2 + y^2 \leq 2\}$

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq f(x,y)$ et $\exists (x';y') \in D$ $f(x';y') = 0$
  Donc 0 est un minorant de f.

- $f(x,y) = (x^2)^{1/8} + (y^2)^{1/8}$ $\quad$ $x = \sqrt{2}\cos\theta$ $\quad$ $y = \sqrt{2}\sin\theta$

  $f(\theta) = 2^{1/8}\left((\cos^2\theta)^{1/8} + (\sin^2\theta)^{1/8}\right)$
  f sur la bordure s'écrit comme $\{\theta \in \mathbb{R},\ 2^{1/8}((\cos^2\theta)^{1/8}, (\sin^2\theta)^{1/8})\}$

- Comment on savait que le maximum serait sur le bord ?
  1) Théorème de Fermat :

  $$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{8} 2x\,(x^2)^{\frac{1}{8}-1} = 0 \\ \frac{1}{8} 2y\,(y^2)^{\frac{1}{8}-1} = 0 \end{cases}$$ Pas un maximum sur $\mathrm{int}(D)$

  2) Poser $x = R\cos\theta$ $\quad$ $y = R\sin\theta$ $\quad$ $0 \leq R \leq \sqrt{2}$

  $$f(\theta, R) = R^{1/4}\left((\cos^2\theta)^{1/8} + (\sin^2\theta)^{1/8}\right)$$

  $\to$ est maximum pour $R = \sqrt{2}$

- Trouvons le maximum sur le bord $\{\theta \in \mathbb{R}, (2)^{1/8}((\cos^2\theta)^{1/8} + (\sin^2\theta)^{1/8})\}$
  Le maximum est atteint pour $\theta \in \{n \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\}$

6.11 $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x+y}$ sur $\underbrace{(-1,1) \text{ rayon } \sqrt{2}}_{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = \sqrt{2}\cos\theta - 1,\ y = \sqrt{2}\sin\theta - 1\}}$

f est continue + différentiable sauf en $x = -y$ où elle n'existe pas.

1) $\nabla f(x,y) = 0$ (là où il existe) $\iff \begin{cases} \frac{2x(x+y) - (x^2+y^2)}{(x+y)^2} = 0 \\ \frac{2y(x+y) - (x^2+y^2)}{(x+y)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 = 0 \\ 2xy + y^2 - x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Mais f n'existe pas en $(0,0)$ donc par Fermat, f n'a pas d'extremum sur l'intérieur.

2) $g(\theta) = f(\sqrt{2}\cos\theta - 1, \sqrt{2}\sin\theta - 1)$

$$= \frac{(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 + (\sqrt{2}\sin\theta - 1)^2}{\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) - 2} = \frac{2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 + 2\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 1}{\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) - 2}$$

$2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2$

$$= \frac{2(2 - \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta)}{\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) - 2} = -2$$

f est donc constante sur le bord, d'où l'extremum est tout le bord.

6.12 $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$ $\quad$ $a > 0$

$$f(x,y) = \|(x,y) - (0,a)\|_2 + \|(x,y) - (a,0)\|_2$$

$$\|2(x,y) - (a,a)\|_2 \leq \|(x,y) - (0,a)\|_2 + \|(x,y) - (a,0)\|_2 = f(x,y)$$

$\|2(x,y) - (a,a)\|_2 = \sqrt{(2x-a)^2 + (2y-a)^2}$ ce qui est minimal pour $x = y = \frac{a}{2}$
(car $\|\cdot\|_2 \geq 0$)

$f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ est le minimum de f, et il vaut $f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a}{2} - a\right)^2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a}{2} - a\right)^2}$
$= a\sqrt{2}$

6.13 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$ $\quad$ $(1,1)$ seul min ?

f continue + différentiable sur $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 4y - 2x - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = 1 \end{cases} \iff (x,y) = (1,1)$$

On peut écrire $f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^2$
$\Rightarrow f(x,y) \geq 0$ pour tout x et y
$\Rightarrow f(1,1) = 0$ est donc un min. global.

6.14 $f(x,y) = \sin x\, e^y$ $\quad$ Mq pas d'extremum

Par Fermat, comme f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \cos x\, e^y = 0 \\ \sin x\, e^y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \text{ impossible}$$

7.1 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$ f est différentiable comme composée de polynomes.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(3x^2y)(x^2+y^2) - 2x(x^3y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^3(x^2+y^2) - (x^3y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \text{pour } (x,y) \neq (0,0)$$

En $(0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$

Calculons les dérivées secondes mixtes :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{h^5}{h^4}\right) = 1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = 0$

D'où $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $(0,0)$

7.2 $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad f_{xy}(0,0) \quad f_{yx}(0,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x \sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x\cos\frac{y}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \dfrac{h\cos 0 - 0}{h} = 1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \dfrac{0-0}{h} = 0$

7.3 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ pour
1) $f_1(x,y) = e^x \sin y$
2) $f_2(x,y) = x^3 - 3xy^2$
3) $f_3(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

1) $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \sin y\, e^x \qquad \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = e^x \cos y$

$\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \sin y\, e^x \qquad \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = -e^x \sin y \qquad$ CQFD

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -6xy$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6x \qquad$ CQFD

3) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -12x^2y + 4y^3$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2 \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12x^2 + 12y^2 \qquad$ CQFD

7.4 Différentielle en $(0,0)$ $f(x,y) = e^x \sin y$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \sin y \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} e^x \cos y \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y$

$$d^2_{(h_1,h_2)} f(x,y) = \overbrace{(x \quad y)}^{\text{vecteur}}\ \overbrace{H_f(h_1,h_2)}^{\text{Matrice } 2\times 2}\ (x \quad y)^T$$

$$= (x \quad y) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\Bigg|_{(h_1,h_2)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (x \quad y) \begin{pmatrix} e^{h_1}\sin h_2 & e^{h_1}\cos h_2 \\ e^{h_1}\cos h_2 & -e^{h_1}\sin h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= e^{h_1}\left[(x\sin h_2 + x\cos h_2 \quad x\cos h_2 - y\sin h_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

$$= e^{h_1}\left[x^2 \sin h_2 + 2xy\cos h_2 - y^2 \sin h_2 \right)$$

si $(h_1,h_2) = (0,0)$ alors $d^2_{(0,0)} f(x,y) = e^0 (x^2 \sin 0 + 2xy \cos 0 - y^2 \sin 0)$

$= 2xy$

7.5 Rappel : Une matrice M est :

* définie positive :
  - $\to$ si $\forall X \neq 0 \quad X^T M X > 0$
  - $\to$ si toutes les val. propres sont st. positives
  - $\to$ si tous les mineurs diagonaux principaux sont st. pos

  ex $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$
  1^{er} mineur $\det(m_{11}) = m_{11}$
  2^{e} mineur $\det\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$
  3^{e} mineur $\det(M)$

* définie négative :
  - $\to$ si $\forall X \neq 0 \quad X^T M X < 0$
  - $\to$ si les val. propres sont st. negatives
  - $\to$ si les mineurs diagonaux sont du signe $(-1)^n$
  - $\to$ si $-M$ est définie positive

* indéfinie : si M a des val. propres qui alternent de signe

1) $q_1(x,y) = 2x^2 + 3xy - 5y^2$

$Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\det m_1 = 2 > 0 \\ &\det m_2 = \det Q_1 = -10 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 < 0 \end{aligned}$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(5+\lambda) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$= -10 - 2\lambda + 5\lambda + \lambda^2 - \frac{9}{4}$

$= -\frac{49}{4} + 3\lambda + \lambda^2 \qquad \Delta = 9 + 4 \cdot \frac{49}{4}$

$= 58$

$\to$ indéfini ...

2) $q_2(x,y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2$

$Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} &\det(m_1) = 2 > 0 \\ &\det(m_2) = \det Q_2 = 6 - 4 = 2 > 0 \end{aligned}\right\}$ Def. pos.

3) $q_3(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2$

$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\det m_1 = 1 \\ &\det m_2 = 0 \end{aligned}$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \cancel{4} - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - \cancel{4}$
$= -5\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 5)$

$Sp(Q_3) = \{0, 5\} \to$ Semi-def positive

4) $q_4(x,y) = 3xy \qquad \left.\begin{aligned} &q(-1,1) = -3 \\ &q(1,1) = 3 \end{aligned}\right\}$ indéfinie

5) $q_5(x,y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2$

$Q_5 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} &\det m_1 = -2 \\ &\det m_2 = 10 - 1 = 9 \end{aligned}\right\}$ Définie négative

7.6 Classifier $A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ 1 & 2\alpha \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1+\alpha-\lambda & \alpha \\ 1 & 2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = (1+\alpha-\lambda)(2\alpha - \lambda) - \alpha$

$= 2\alpha - \lambda + 2\alpha^2 - \alpha\lambda - 2\lambda\alpha + \lambda^2 - \alpha$

$= \alpha + (-1 - \alpha - 2\alpha)\lambda + \lambda^2 + 2\alpha^2$

$= (\alpha + 2\alpha^2) - (1 + 3\alpha)\lambda + \lambda^2$

$\Delta = (1+3\alpha)^2 - 4(\alpha + 2\alpha^2)$

$= 1 + 6\alpha + 9\alpha^2 - 4\alpha - 8\alpha^2$
$= 1 + 2\alpha + \alpha^2$

$\dfrac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = 2 + 2\alpha \qquad \dfrac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = -1$

$\dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha^2} = 2 > 0$

$\Delta(\alpha)$ est convexe, $\Delta(-1)$ est donc un minimum de $\Delta(\alpha)$.
or $\Delta(-1) = 0 \quad \Rightarrow$ la matrice A a toujours au moins une valeur propre

$\lambda_1 = \dfrac{(1+3\alpha) \pm \sqrt{1 + 2\alpha + \alpha^2}}{2} = \dfrac{(1+3\alpha) \pm \sqrt{(\alpha+1)^2}}{2} = \dfrac{1 + 3\alpha - \alpha - 1}{2} = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$

$\lambda_2 = \qquad = \dfrac{1 + 3\alpha + \alpha + 1}{2} = \dfrac{2 + 4\alpha}{2} = 1 + 2\alpha$

Donc $Sp(A) = \{\alpha, 1 + 2\alpha\}$

A est def pos ssi $\alpha > 0$ et $1 + 2\alpha > 0$

pos ssi $\alpha \geq 0$ et $1 + 2\alpha \geq 0$

def neg ssi $\alpha < 0 \quad 1 + 2\alpha < 0$

neg ssi $\alpha \leq 0 \quad 1 + 2\alpha \leq 0$

indéfinie sinon.

7.7 1) $f_1(x,y) = xy \exp(-(x^2+y^2))$

f_1 est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ comme produit
- d'un polynome (forme quad)
- exp composée avec un polynome

$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y\exp(-(x^2+y^2))(1-2x^2) = 0 \\ x\exp(-(x^2+y^2))(1-2y^2) = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4xy\exp(-(x^2+y^2)) + y(1-2x^2)(-2x)\exp(-(x^2+y^2))$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4xy\exp(-(x^2+y^2)) + x(1-2y^2)(-2y)\exp(-(x^2+y^2))$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -(1-2x^2)\exp(-(x^2+y^2)) + y(1-2x^2)(-2y)\exp(-(x^2+y^2))$

On évalue la hessienne pour chacun des points :

- Pour $(0,0)$: $H_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \to$ indéfinie $\quad q(x,y) = xy \quad \begin{aligned} &q(1,1) > 0 \\ &q(-1,1) < 0 \end{aligned}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$

$\to (0,0)$ est un point selle.