ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$ - LICENCE 2

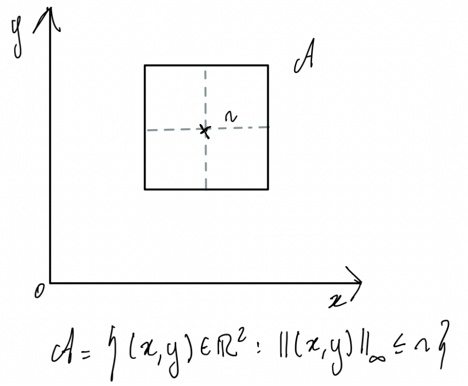
Aldric Labarthe - Université Paris 1

Les exercices proposés ici sont ceux de l'année 2024-2025. Chaque séance est prévue sur deux heures et demie. Les exercices marqués par ★ sont considérés par l'équipe pédagogique comme incontournables. A l'inverse, ceux indiqués comme ℂ sont des exercices présents dans l'ancienne brochure et qui ont été retirés du programme cette année. Ceux-ci sont en général plus théoriques et complexes. Les énoncés sont écrits par Prof. Gisella Groce et les corrections et les rappels de cours sont le travail d'Aldric Labarthe.

TD2 - Topologie (± *2 séances*)

Exercice 2.1 ℂ — Dessiner l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_\infty \leqslant r\}$

Correction 2.1 A main levée :



**** Exercice 2.2** ℂ — Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension 2.

Correction 2.2 *On propose une preuve en dimension N.* On note $\{x_n\} = \{(x_n^1, \ldots, x_n^N)\}$. Tout d'abord, il faut observer que si $\{x_n\}$ est bornée, alors $\{x_n^i\}$ l'est aussi pour tout i. Supposons qu'elle soit majorée par $M \in \mathbb{R}^N$:

$$\|x_n\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N}(x_n)^2} \leqslant M \Rightarrow \forall i, |x_n^i| \leqslant M$$

Pour construire la sous-suite, on utilise une méthode itérative. Commençons avec la première composante x^1. Par Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$, il existe une sous-suite réelle $\{x_{n_k}^1\}$ qui converge vers une limite l_1.

Ensuite, considérons la deuxième composante x^2. La sous-suite $\{x_{n_k}\}$ (déjà extraite) est toujours une suite bornée. Par Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-sous-suite $\{x_{n_{k_2}}^1\}$ qui converge vers une limite l_2.

On répète ce processus pour chaque composante x^i, en extrayant successivement des sous-sous-suites convergentes. À la fin, on obtient une sous-suite $\{x_{n_{\max\{k_1,\ldots,k_N\}}}\}$ telle que toutes les composantes convergent.

**** Exercice 2.3** ℂ — Montrer l'inégalité de Young : pour $p > 1$ on pose $p' = \frac{p}{p-1}$. Pour tout a, b positifs, on a :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

En déduire l'inégalité de Hölder :

$$|x \cdot y| \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p'}$$

et celle de Minkowski :

$$||x+y||_p \leqslant ||x||_p + ||y||_p$$

Correction 2.3

Démonstration de l'inégalité de Young : Si a et b sont nuls, l'inégalité est évidente, on suppose donc ci-après $a > 0, b > 0$. On applique le logarithme à gauche de l'expression et conclut par la concavité de ln :

$$\ln(ab) = \frac{\ln(a^p)}{p} + \frac{\ln\left(b^{p'}\right)}{p'} \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right) \Rightarrow ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

Une autre preuve de l'inégalité de Young moins évidente... Soient $a, b > 0$ et $p > 1$. On pose $p' = \frac{p}{p-1}$ de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Nous souhaitons démontrer que

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $\phi(t) = t^{p-1} - (p-1)t + (p-1)$ pour $t > 0$. On montre que $\phi(t) \geqslant 0$ pour tout $t > 0$:

— $\phi(1) = 1^{p-1} - (p-1)\cdot 1 + (p-1) = 0$.

— $\phi'(t) = (p-1)t^{p-2} - (p-1)$. En posant $\phi'(t) = 0$, on trouve $t = 1$ comme unique solution.

— Pour $t > 0$, on a $\phi'(t) > 0$ pour $t > 1$ et $\phi'(t) < 0$ pour $t < 1$, donc $\phi(t) \geqslant 0$ pour tout $t > 0$.

En utilisant cette propriété, on applique l'inégalité de convexité pour $t = \frac{b}{a^{p-1}}$, ce qui donne :

$$\frac{b}{a^{p-1}} \leqslant \frac{\left(\frac{b}{a^{p-1}}\right)^p}{p} + \frac{a^{p-1}}{p'}.$$

En multipliant par a^{p-1}, cela donne :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Inégalité de Hölder : Considérons deux vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Nous montrons que :

$$|x \cdot y| \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p'},$$

où $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ et $\|y\|_{p'} = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^{p'}\right)^{1/p'}$. Par l'inégalité de Young appliquée à chaque terme $|x_i y_i|$:

$$|x_i y_i| \leqslant \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^{p'}}{p'}.$$

En sommant sur i de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{p'}\sum_{i=1}^n |y_i|^{p'}.$$

Puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, cette inégalité se réécrit comme :

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p'}.$$

Inégalité de Minkowski : Pour deux vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, nous montrons que :

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

En développant $\|x + y\|_p^p$, nous avons :

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire au sens large pour $|x_i + y_i|^p$, nous avons :

$$|x_i + y_i|^p \leqslant (|x_i| + |y_i|)^p.$$

En utilisant l'inégalité de convexité $(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p)$, nous avons :

$$|x_i+y_i|^p \leqslant |x_i|^p + |y_i|^p.$$

En sommant sur i, cela donne :

$$\|x+y\|_p^p \leqslant \|x\|_p^p + \|y\|_p^p.$$

En prenant la racine p-ième, on obtient :

$$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

* Exercice 2.4 ℂ —

1. Montrer que $\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right]^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, pour $p > 1$.
2. Montrer que $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1...n\}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Correction 2.4

1. Pour vérifier que $\|\cdot\|_p$ est une norme, il faut montrer qu'elle satisfait :
   — *Positivité* : $\|x\|_p \geqslant 0$ et $\|x\|_p = 0$ si et seulement si $x = 0$. Par définition, $|x_i|^p \geqslant 0$ pour tout i, donc $\sum_{i=1}^n |x_i|^p \geqslant 0$ et $\|x\|_p \geqslant 0$. Si $\|x\|_p = 0$, alors $\sum_{i=1}^n |x_i|^p = 0$, ce qui implique $|x_i| = 0$ pour tout i, donc $x = 0$. Réciproquement, si $x = 0$, alors $\|x\|_p = 0$.
   — *Homogénéité* : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\alpha x\|_p = |\alpha| \, \|x\|_p$.

$$\|\alpha x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |\alpha x_i|^p\right]^{1/p} = \left[|\alpha|^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p\right]^{1/p} = |\alpha| \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right]^{1/p} = |\alpha| \, \|x\|_p$$

   — *Inégalité triangulaire* : Par l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\left[\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right]^{1/p} \leqslant \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right]^{1/p} \Rightarrow \|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

2. Montrer que $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1, \ldots, n\}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$:
   — *Positivité* : $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\} \geqslant 0$, et $\|x\|_\infty = 0$ si et seulement si $|x_i| = 0$ pour tout i, c'est-à-dire $x = 0$.
   — *Homogénéité* : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\|\alpha x\|_\infty = \max\{|\alpha x_i|\} = |\alpha| \max\{|x_i|\} = |\alpha| \, \|x\|_\infty$.
   — *Inégalité triangulaire* : Pour tout i, on a $|x_i+y_i| \leqslant |x_i| + |y_i|$. Ainsi, $\max\{|x_i+y_i|\} \leqslant \max\{|x_i|\} + \max\{|y_i|\}$. Donc $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

TD3 - Domaine de définition, graphe, limites (± *2 séances*)

Exercice 3.1 ℂ —

Soit $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Montrer que $\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)] \neq \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)]$.

Correction 3.1

D'une part, on calcule $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ pour $x \neq 0$ fixé :

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

En utilisant le résultat précédent, on a $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = 1$.

D'autre part on calcule $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ pour $y \neq 0$ fixé :

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} \frac{0}{0+y^2} = 0$$

En utilisant le résultat précédent, on a $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = 0$.

Ainsi, les deux limites sont différentes.

Exercice 3.2 — Soit $f(x,y) = \begin{cases} y\sin\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{y} & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$. Montrer que la limite de f pour $(x,y) \to (0{,}0)$ existe, mais que les deux limites $\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)], \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)]$ n'existent pas.

Correction 3.2 On commence par calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ avec $x \neq 0, y \neq 0$. Puisque $\sin\frac{1}{x}$ et $\sin\frac{1}{y}$ sont bornées entre -1 et 1, on a :

$$|f(x,y)| \leqslant |y| \cdot 1 + |x| \cdot 1 = |x| + |y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x| + |y|) = 0$$

En vérifiant également que $f(0,y) = 0$ et $f(x,0) = 0$, il s'ensuit que : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ [1].

Etudions $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right]$ en fixant $x \neq 0$: $f(x,y) = y\sin\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{y}$ Lorsque $y \to 0$, le terme $x\sin\frac{1}{y}$ oscille indéfiniment car $\sin\frac{1}{y}$ ne converge pas. Par conséquent, $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ n'existe pas. On obtient la même chose pour le cas $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]$ ce qui permet de conclure.

Exercice 3.3 — Soit $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ .Montrer que $\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)] = \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)]$.

Correction 3.3

D'une part, on calcule $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ pour $x \neq 0$ fixé :

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

En utilisant le résultat précédent, on a $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{x\to 0} 0 = 0$.

D'autre part on calcule $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ pour $y \neq 0$ fixé :

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

En utilisant le résultat précédent, on a $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{x\to 0} 0 = 0$.

Par conséquent : $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]$.

1. On utilise ici : si $f(x)$ est une fonction telle que $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.