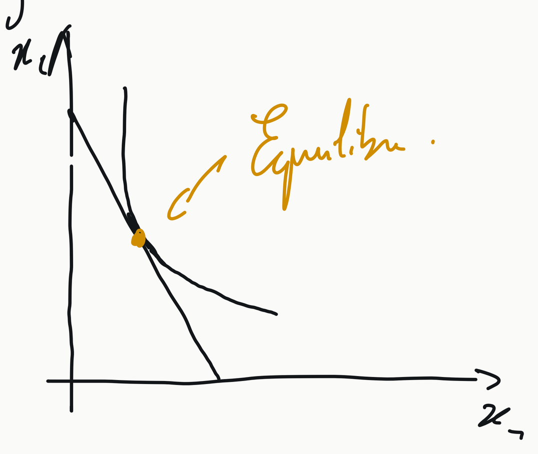
Lundi 17 février 2025:

Rappel: Pour des courbes d'indifférence "normales" (décroissantes et convexes) l'équilibre (panier optimal/solution) se trouve toujours au point de tangence entre la CI et la CB.



Exercice 2:

a) $U(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

Rappel: Taux marginal de substitution

$$TmS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = -\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1}$$ avec $x_2(\cdot)$ la courbe d'indiff. (CI)

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2 \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = 2x_1 + 2x_2$$

$$TmS = \frac{2x_1 + 2x_2}{2x_1 + 2x_2} = 1$$

2) $V(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = 1 \qquad TmS = \frac{1}{1} = 1$$

3) Cours: Deux fonctions d'utilité représentent les mêmes préférences si l'une est une transformation monotone croissante de l'autre.

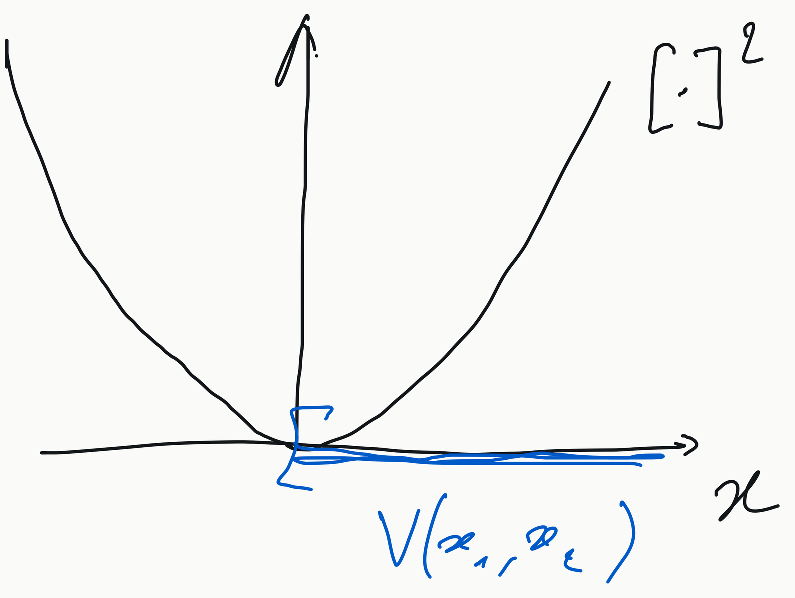
Ici $U(x_1, x_2) = [V(x_1, x_2)]^2$

Sauf que $V(x_1, x_2)$ sur $(\mathbb{R}_+)^2$ est positif

$g(z) = z^2$

Or $[\cdot]^2$ est croissante monotone sur $\mathbb{R}_+$

D'où U est bien une transformation monotone croissante de V, donc U et V représentent les mêmes préférences.

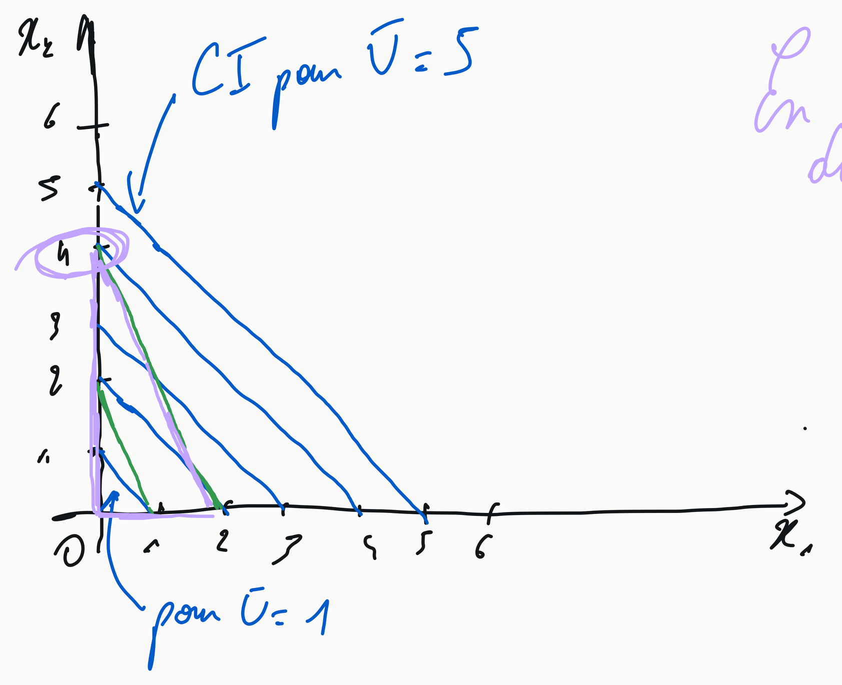


4) Pour représenter des courbes d'indifférence: on calcule leurs équations:

① On fixe un niveau d'utilité/satisfaction $\bar{U} \in \mathbb{R}$

② On "regarde" l'ensemble des paniers qui apportent la même satisfaction : $\{(x_1, x_2) : \underbrace{V(x_1, x_2) = \bar{U}}\}$

$$x_1 + x_2 = \bar{U}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x_2 = \bar{U} - x_1}$$



En cherchant la CI la + élevée dans l'ensemble réalisable on trouve $x_1 = 0$

5) Calculons l'éq de la CB : $R = p_1x_1 + p_2x_2$

Si $p_1 = 2p_2 \Rightarrow R = 2p_2x_1 + p_2x_2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{R}{p_2} - 2x_1 = x_2}$$

Le panier optimal vérifie
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{R}{p_2} - 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = \frac{R}{p_2} \end{cases}$$

6) Si $p_2 = p_1$, alors $\frac{R}{p_2} - x_1 = x_2$

Donc infinité de solution car la CI est confondue avec la CB

Bonus: la CI pour $U = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

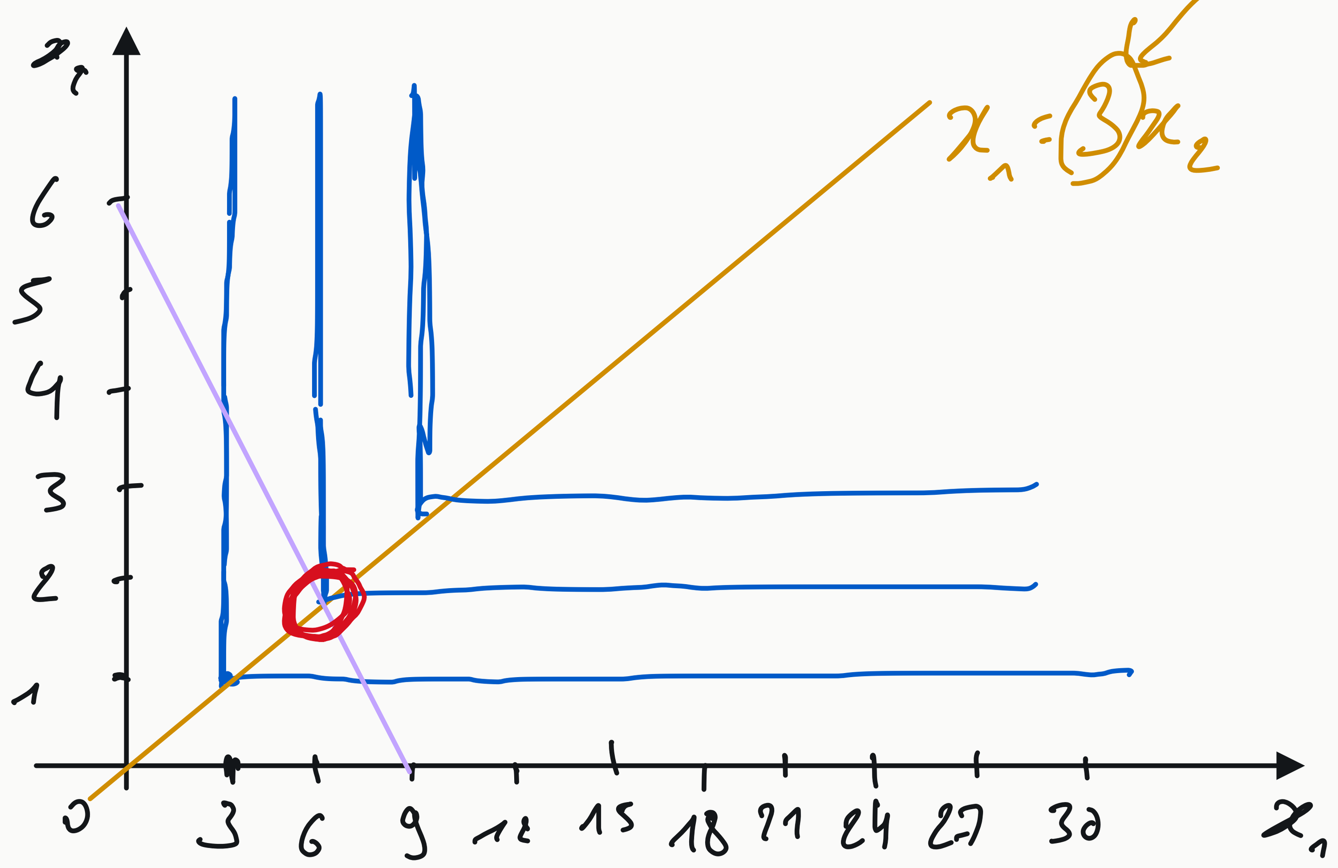
On fixe $\bar{U} \in \mathbb{R}$

$$\bar{U} = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$
$$\Leftrightarrow \bar{U} = (x_1 + x_2)^2$$
$$\Rightarrow (\bar{U})^{1/2} = x_1 + x_2$$
$$\Rightarrow \boxed{x_2 = (\bar{U})^{1/2} - x_1}$$

Rappel: une fonction Cobb-Douglas est de la forme $U(x_1, x_2) = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $A > 0$

Exercice $\boxed{3}$: $R = 17$ $\quad p_1 = 2 \quad p_2 = 1$ $\quad U(x_1, x_2) = \text{Min}\{x_1, 3x_2\}$ ⟶ Biens complémentaires

$17 = 2x_1 + x_2 \iff x_2 = 17 - 2x_1$



On fixe $x_1 = 3$ et on cherche à décrire l'ensemble des paniers qui procurent la même utilité.

① On cherche la valeur de x_2 telle que l'utilité n'augmente plus.

$$\left.\begin{aligned}
U\left(3, \tfrac{1}{2}\right) &= \text{Min}\left\{3, \tfrac{3}{2}\right\} = \tfrac{3}{2} \\
U\left(3, \tfrac{3}{5}\right) &= \text{Min}\left\{3, \tfrac{9}{5}\right\} = \tfrac{9}{5} \\
U(3, 1) &= \text{Min}\{3, 3\} = 3 \\
U(3, 2) &= \text{Min}\{3, 6\} = 3 \\
U(3, 3) &= \text{Min}\{3, 9\} = 3
\end{aligned}\right\}$$

Pour $x_1 = 3$, l'utilité cesse d'augmenter pour $x_2 \geq 1$

⟹ Tous les paniers $(3, x_2)$ avec $x_2 \geq 1$ sont sur une même CI

② On prend $x_2 = 1$ et vous cherchez le x_1 tel que l'utilité n'augmente pas

$$\left.\begin{aligned}
U(1, 1) &= \text{Min}\{1, 3\} = 1 \\
U(2, 1) &= \text{Min}\{2, 3\} = 2 \\
U(3, 1) &= \text{Min}\{3, 3\} = 3 \\
U(4, 1) &= \text{Min}\{4, 3\} = 3
\end{aligned}\right\}$$

Tous les points tq $(x_1, 1)$ pour $x_1 \geq 3$ sont sur la même CI associée à $\bar{U} = 3$

2) L'équilibre / panier optimal est nécessairement sur le coude (c'est-à-dire sur la droite $x_1 = 3x_2$). Pour le trouver on pose :

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ 17 - 2x_1 = x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 3 \cdot 17 - 6x_1 \\ \dots \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{3}{7} \cdot 17 \\ x_2 = 17 - 2\left(\frac{3}{7} \cdot 17\right) \end{cases}$$

Exercice [4] : $U(x_1, x_2) = x_1^h (x_2 - a)$

1) a est la q^té minimale de bien 2, "consommation de survie"

2) Méthode : comment calculer des fonctions de demande ?

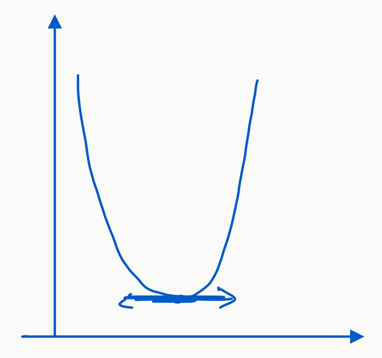
① Poser le programme du consommateur

$$\begin{cases} \underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\ U(x_1, x_2) = x_1^h (x_2 - a) \\ \text{S.C}\quad R \geq p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \underset{x_1, x_2}{\text{Max}}\ U(x_1, x_2) = x_1^h (x_2 - a) \\ \text{S.C}\quad R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}}$$

→ programme du consommateur

par l'hypothèse d'insatiabilité des préférences, i.e. la monotonie

Rappel (séance 1) : Si une fonction est deux fois différentiable et qu'elle admet un maximum ou un minimum, alors celui-ci est un point critique



② Réinjecter la contrainte : A l'équilibre on a $R = p_1 x_1 + p_2 x_2$

$$\Leftrightarrow \frac{R - p_1 x_1}{p_2} = x_2$$

Le programme devient :

$$\boxed{\underset{x_1}{\text{Max}}\ U\left(x_1, \frac{R - p_1 x_1}{p_2}\right) = x_1^h \left(\frac{R - p_1 x_1}{p_2} - a\right)}$$

③ Chercher les points critiques :

$$\frac{\partial U\left(x_1, \frac{R - p_1 x_1}{p_2}\right)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow h x_1^{h-1} \left(\frac{R - p_1 x_1 - p_2 a}{\cancel{p_2}}\right) + x_1^h \left(\frac{-p_1}{\cancel{p_2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow h x_1^{h-1} (R - p_2 a) - p_1 h x_1^h - p_1 x_1^h = 0$$

$$\underset{x_1 \neq 0}{\Leftrightarrow} h x_1^{-1} (R - p_2 a) - p_1 h - p_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow h x_1^{-1} (R - p_2 a) = p_1 (h + 1)$$

$$\Leftrightarrow x_1^{-1} = \frac{p_1 (h+1)}{h (R - p_2 a)} \Leftrightarrow \boxed{x_1^* = \frac{h (R - p_2 a)}{p_1 (h+1)}}$$

Or $x_2 = \frac{R - p_1 x_1}{p_2} \Rightarrow p_2 x_2 = R - \frac{h (R - a p_2)}{(h+1)}$

$$\Rightarrow \boxed{x_2^* = \frac{\cancel{hR} + R - \cancel{hR} + a h p_2}{p_2 (h+1)} = \frac{R + a h p_2}{p_2 (h+1)}}$$

④ (Optionnel) : Vérifier son calcul

Si tout est bon on a $R = p_1 x_1^* + p_2 x_2^*$

$$R = \cancel{p_1} \frac{h (R - p_2 a)}{\cancel{p_1} (h+1)} + \cancel{p_2} \left(\frac{R + a h p_2}{\cancel{p_2} (h+1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow (h+1) R = hR - \cancel{p_2 h a} + R + \cancel{a h p_2}$$

$$\Leftrightarrow (h+1) R = (h+1) R \longrightarrow \text{Vrai !}$$

3) • Est-ce que la demande décroit avec les prix ?

$$\frac{\partial x_1 (p_1, p_2, R)}{\partial p_1} = \underbrace{\underbrace{h \left(\frac{R - p_2 a}{h+1}\right)}_{\geq 0} \underbrace{(-1)}_{\leq 0} \underbrace{p_1^{-2}}_{\geq 0}}_{\leq 0}$$

D'où la demande décroit bien avec le prix

• Est-ce que la demande augmente avec le revenu ?

$$\frac{\partial x_1 (p_1, p_2, R)}{\partial R} = \frac{h}{p_1 (h+1)} \geq 0 \longrightarrow \text{Oui !}$$

4) Application numérique : $h = 1, a = 1$

$x_1^* (R, p_1, p_2) = \frac{R - p_2}{2 p_1}$ $\qquad x_2^* (R, p_1, p_2) = \frac{R + p_2}{2 p_2}$

Si $R = 10$ $p_1 = p_2 = 2$

$x_1^* (10, 2, 2) = \frac{10 - 2}{4} = 2$ $\qquad x_2^* (10, 2, 2) = \frac{10 + 2}{2 \cdot 2} = \frac{12}{4} = 3$

Le panier optimal est donc $(2, 3)$

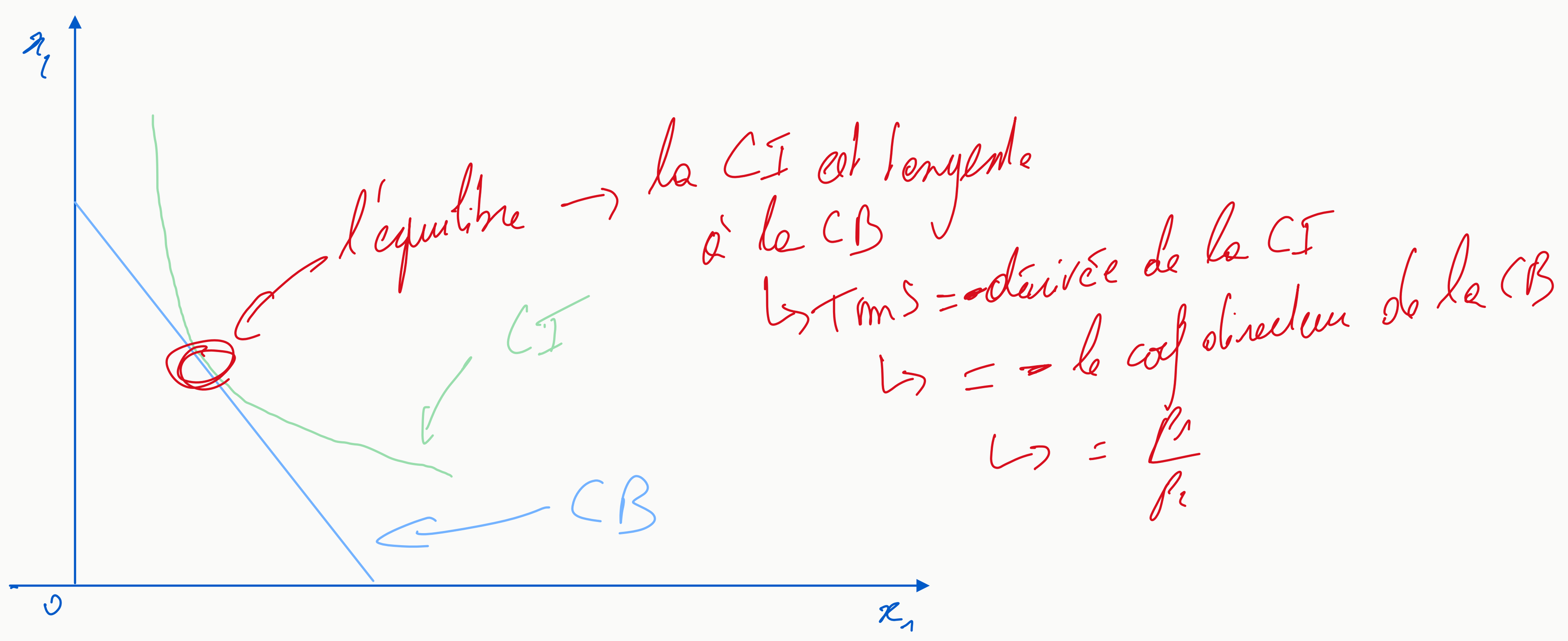
5) Ici on vous demande le Taux marginal de substitution (TmS)

→ Soit vous calculez le TmS en posant $\text{TmS} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$

→ Soit, vous utilisez que le panier optimal, s'il correspond au point de tangence entre la CI et la CB admet comme propriété $\text{TmS} = \frac{p_1}{p_2}$

Or ici $\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \text{TmS}(x_1^*, x_2^*) = 1$

Rappel



6) • $R = 10 \longrightarrow R' = 20$

$x_1^* (20, 2, 2) = \frac{20 - 2}{4} = \frac{18}{4}$ $\qquad x_2^* (20, 2, 2) = \frac{20 + 2}{4} = \frac{11}{2}$

etc ...

7) On veut représenter $x_1 (R, p_1, p_2) = \frac{R - p_1}{2 p_2}$ pour $R = 10$ et $p_2 = 2$ dans le plan (p_1, x_1)

$$x_1 (p_1) = x_1 (10, p_1, 2) = \frac{10 - p_1}{4} = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} p_1$$