Probabilidad

Introducción

Edimer David Jaramillo - Bioestadística 1

Febrero de 2019

Teoría de conjuntos

Definición de conjunto

Un **conjunto** es una colección de objetos denominados elementos. Los elementos no se repiten dentro de un conjunto.

Ejemplos:

- Conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, reales)
- Conjuntos sencillos $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Conjunto vacío $\emptyset \ = \ \{\}$

El **cardinal** de un conjunto se define como el número de elementos de dicho conjunto (si este es finito). Por ejemplo:

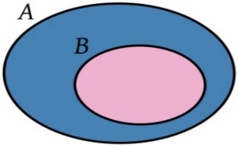
- Conjuntos infinitos: cardinal infinito
- Conjuntos finitos: número de elementos del conjunto

Si a es un elemento de A, entonces diremos que $a \ \in \ A$. En caso contrario, diremos que $a \ \notin \ A$.

Formas de caracterizar un conjunto

- Escribiendo el total de elementos del conjunto.
- Definiendo una o varias propiedades de los elementos del conjunto.

Subconjuntos (1/2)



Si A y B son conjuntos, diremos que B es subconjunto de A si todo lo que está en B también está en A.

$$B \subseteq A$$

De lo contrario:

$$B \nsubseteq A$$

Subconjuntos (2/2)

Ejemplo:

Sea $A = \{1, 2, 3, 4,\ 5,\ 6\}$ y $B = \{2,\ 4,\ 6\}$, diremos que $B \subseteq A$

Nota: Para todo conjunto, por ejemplo, el conjunto E, siempre se cumple:

- E Está incluido en el mismo $E \subseteq E$.
- $\emptyset \subseteq E$ (**razonamiento por contradicción**).

Operaciones con conjuntos

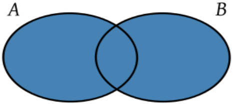
Existen operaciones básicas que permiten manipular los conjuntos y sus elementos, tal cual como las operaciones aritméticas habituales, constituyendo el **álgebra de conjuntos.**

- Unión
- Intersección
- Diferencia
- Complemento

Unión

Sean A y B conjuntos, se define la unión de estos dos conjuntos como aquellos elementos que están en A **o (disyunción)** están en B, se expresa de la siguiente manera:

$$A \cup B$$



Ejemplo: Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, obtener $A \cup B$.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

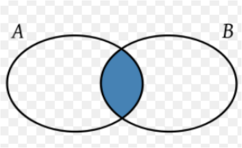
.

Intersección

Sean A y B conjuntos, se define la intersección de estos dos conjuntos como aquellos elementos comunes a A y B, es decir, aquellos elementos que están en A **y (conjunción)** están en B; se expresa de la siguiente manera:

$$A \cap B$$

.



Ejemplo: Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, obtener $A \cap B$.

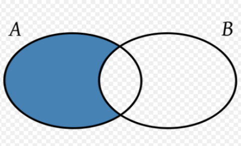
$$A \cap B = \{2, 4, 6\}$$

.

Diferencia (1/2)

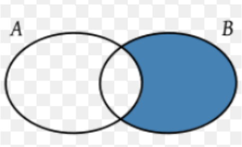
Sean A y B conjuntos, se define la diferencia de A y B como aquellos elementos que están en A y no están en B, se expresa de la siguiente manera:

$$A - B$$



Diferencia (2/2)

$$B - A$$



Ejemplo: Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, obtener $A - B$ y $B - A$.

$$A - B = \{1, 3, 5\}$$

$$B - A = \{8\}$$

Complemento

Sean A un subconjunto de E, $A \subseteq E$, se define el complento de A como aquellos elementos que pertenecen a E, tales que no pertenecen a A, es decir, aquellos elementos que **no** están en A. Se expresa como:

$$A^c$$

Ejemplo: Sean $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $A = números\ pares$, donde $A \subseteq E$. Hallar A^c.

$$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Experimentos

Tipos de experimentos

Existen dos tipos de fenómenos o experimentos en la naturaleza:

- **Experimento determinístico:** aquél que produce los mismos resultados al repetirse bajo las mismas condiciones.
- **Experimento aleatorio:** aquél que cuando se repite bajo las mismas condiciones produce resultados diferentes y no pueden ser predichos.

Espacio muestral

La teoría de la probabilidad es la rama de las matemáticas que estudia los fenómenos o experimentos aleatorios. Inicialmente no es posible conocer los posibles resultados de un experimento aleatorio, por tanto, es conveniente agrupar en un **conjunto** a todos los resultados posibles.

El **espacio muestral** de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento, denotado comunmente por la letra griega omega mayúscula Ω o con la letra S.

Ejemplo: Si el experimento aleatorio consiste en lanzar un dado y observar el resultado, el espacio muestral S es:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Eventos o sucecos

Se denomina **suceso** o **evento** a cualquier subconjunto del conjunto Ω. Se denota conmunmente por la letra omega minúscula Ω.

Ejemplo: continuando con el ejemplo de lanzar un dado y observar el resultado, un evento podría ser:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos de un espacio muestral Ω se consideran **mutuamente excluyentes** si no contienen elementos en común, es decir, $A \cap B = \emptyset$

Dos eventos de un espacio muestral Ω se consideran **independientes** si el resultado de uno no influye en la aparación del otro.

Operaciones entre eventos

- Unión $A \cup B$
- Intersección $A \cap B$
- Diferencia $A - B$ o $B - A$
- Complemento A^c

Ejemplos

Ejemplo 1

Considere un experimento aleatorio que consta de la observación de 3 semillas en determinado orden, cada una de las cuales puede ser **sana** $(+)$ o **enferma** (-). Dado $A = \{+--,\ -+-,\ --+\}$ y $B = \{++-,\ -++,\ +-+\}$, Hallar:

- El espacio muestral S
- $A \cap B$
- $A \cup B$
- $A - B$
- $B - A$
- A^c y B^c
- ¿Son mutuamente excluyentes?

Ejemplo 2

Considere un experimento aleatorio que consta de la observación de 4 partos de una vaca ($n = 4$), cada uno de los cuales puede ser hembra (H) o macho (M). Dado:

$$A = \{HMHM,\ MMHM,\ HHHM, MMHH\}$$

y

$$B = \{MHMH,\ MMHH,\ HHMM, HMHM\}$$

Hallar:

- El espacio muestral S
- $A \cap B$
- $A \cup B$
- $A - B$
- $B - A$
- A^c y B^c
- ¿Son mutuamente excluyentes?