

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribuciones Continuas

Edimer David Jaramillo - Bioestadística 1

Marzo de 2019

# Distribución Exponencial (1/4)

- De gran utilidad para modelar fenómenos relacionados con tiempos de espera.
- Múltiples aplicaciones:
  - Calcular la probabilidad de que un instrumento electrónico falle en determinado período de tiempo.
  - El tiempo necesario para que ocurra un accidente de tránsito en una ruta en una vía con probabilidad  $P$ .
  - El tiempo que puede transcurrir en un servicio de urgencias para que llegue el próximo paciente.
  - Teoría de colas
  - Problemas de confiabilidad
- En un proceso Poisson donde se repite sucesivamente un experimento a intervalos de tiempo iguales, el tiempo que transcurre entre dos sucesos sigue un modelo probabilístico exponencial.

# Distribución Exponencial (2/4)

Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución Exponencial si su función de densidad es:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Notación:

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

- **Esperanza Matemática:**

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

- **Varianza:**

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

# Distribución Exponencial (3/4)

- **Ejemplo:** de registros históricos se sabe que en promedio, un rayo causa la muerte a tres personas cada año en determinado país.

Obtener:

- La probabilidad de que el tiempo hasta la próxima muerte sea menor a un año.
- La probabilidad de que el tiempo hasta la próxima muerte sea mayor a 18 meses.

Funciones importantes:

- `rexp()`: generar números bajo la distribución Exponencial
- `dexp()`: función de densidad
- `pexp()`: probabilidad acumulada.
- `qexp()`: obtener cuantiles

# Distribución Exponencial (4/4)

```
#P(X < 1)
```

```
pexp(q = 1, rate = 3, lower.tail = TRUE)
```

```
## [1] 0.9502129
```

```
#P(X > 1.5)
```

```
pexp(q = 1.5, rate = 3, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.011109
```

```
#P(X > 1.5)
```

```
1 - pexp(q = 1.5, rate = 3, lower.tail = TRUE)
```

```
## [1] 0.011109
```

# Distribución Normal (1/7)

- De gran utilidad para múltiples fenómenos de la vida real
  - Agronómicos
  - Biológicos
  - Químicos
  - Físicos
  - Antropológicos
- Centralizada en la media
- La curva tiene su máximo absoluto en  $\mu$
- La curva es simétrica a través de  $\mu$
- Se aproxima al eje horizontal sin tocarlo (curva asintótica)
- El área total bajo la curva es 1

# Distribución Normal (2/7)

Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución Normal si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \text{ con } \sigma > 0$$

Notación:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- **Esperanza Matemática:**

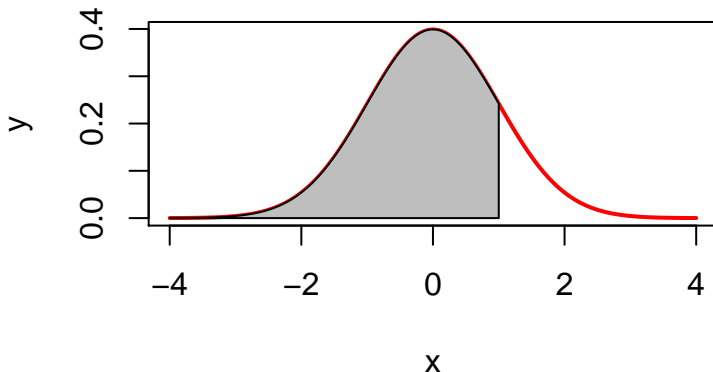
$$E[X] = \mu$$

- **Varianza:**

$$\text{Var}[X] = \sigma^2$$

# Distribución Normal (3/7)

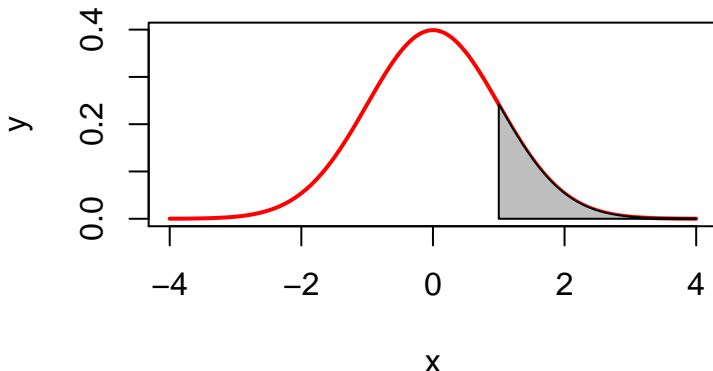
- Obtener la probabilidad de que una variable aleatoria  $X$  tome valores menores a un valor determinado.





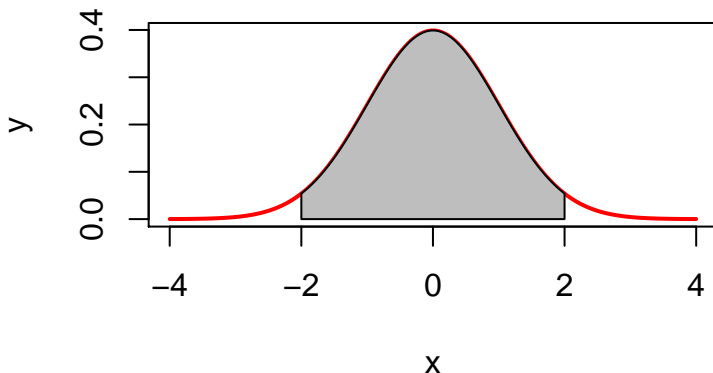
# Distribución Normal (4/7)

- Obtener la probabilidad de que una variable aleatoria  $X$  tome valores mayores a un valor determinado.



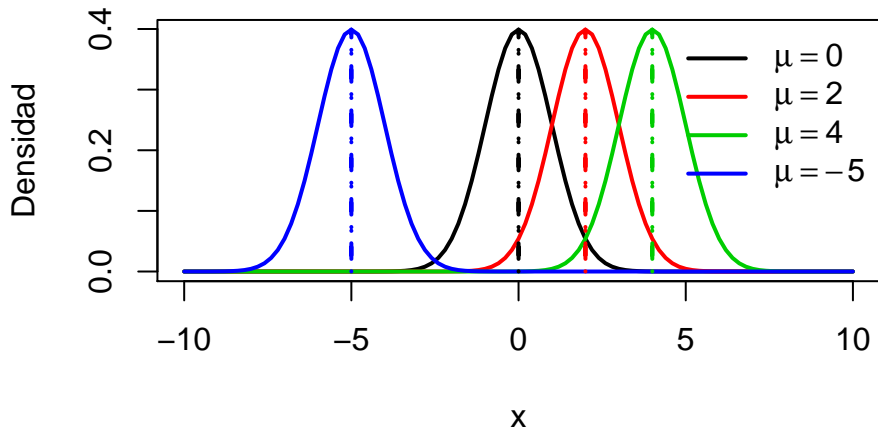
# Distribución Normal (5/7)

- Obtener la probabilidad de que una variable aleatoria  $X$  tome valores entre dos valores determinados.



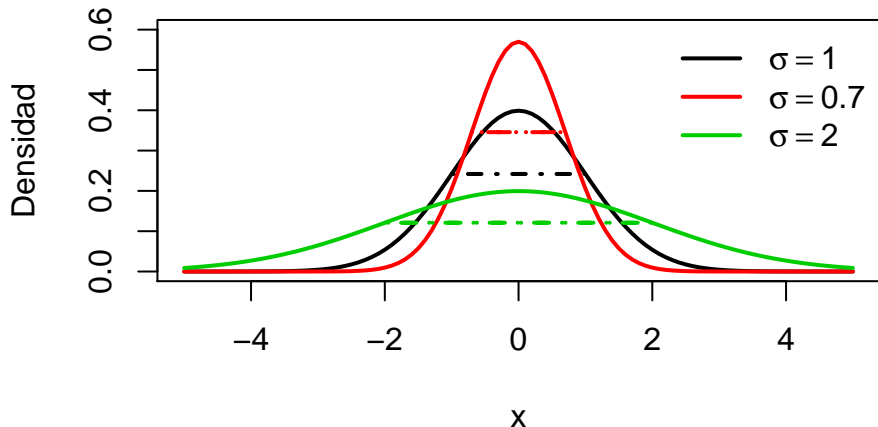
# Distribución Normal (6/7)

Distribución Normal  $\sigma = 1$



# Distribución Normal (7/7)

Distribución Normal  $\mu = 0$



# Distribución Normal Estándar (1/7)

Notación:

$$Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$$

- **Estandarización:**

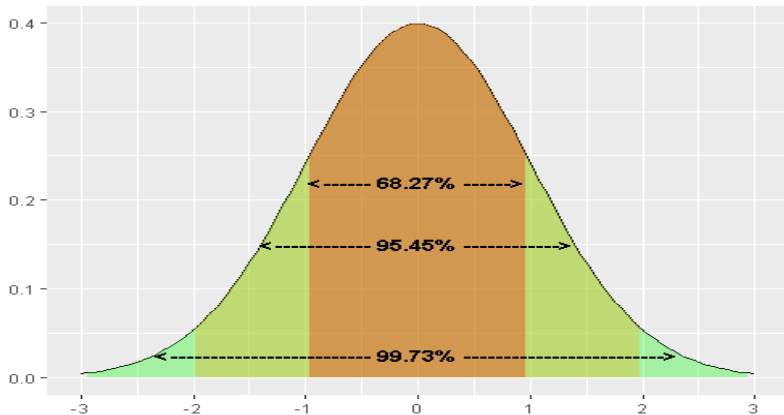
$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- **Tabla Z:**

Tabla Z - Distribución normal estándar.

# Distribución Normal Estándar (2/7)

Standard Normal Distribution



## Distribución Normal Estándar (3/7)

- **Ejemplo:** Si  $X$  sigue una distribución normal con media igual a 10 y sigma igual a 2. ¿Cuál es la probabilidad de que la medida de la variable aleatoria  $X$  esté entre 9 y 11?

## 1 Estandarizar

$$P(9 < X < 11) = P\left(\frac{9 - 10}{2} < \frac{x - 10}{2} < \frac{11 - 10}{2}\right)$$

$$P(-0.5 < z < 0.5) = P(z < 0.5) - P(z < -0.5) = 0.38292$$



## Distribución Normal Estándar (5/7)

0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8186
1.0	0.8413	0.8438

## Distribución Normal Estándar (6/7)

- 1.0	0.1587	0.1562
- 0.9	0.1841	0.1814
- 0.8	0.2119	0.2090
- 0.7	0.2420	0.2389
- 0.6	0.2743	0.2709
- 0.5	0.3085	0.3050
- 0.4	0.3446	0.3409
- 0.3	0.3821	0.3783

$$0.6915 - 0.3085 = 0.383$$

# Distribución Normal Estándar (7/7)

## 2 Con R

Funciones importantes:

- `rnorm()`: generar números bajo la distribución Exponencial
- `pnorm()`: función de densidad (probabilidades)
- `qnorm()`: obtener cuantiles

```
pz_menor0.5 <- pnorm(q = 0.5)
pz_menor_menos0.5 <- pnorm(q = -0.5)
pz_menor0.5 - pz_menor_menos0.5
## [1] 0.3829249
```

# Distribución Chi Cuadrado ( $\chi^2$ )

- Llamada también *ji cuadrada* (*o*) o distribución de Pearson
- Aplicación considerable en la teoría y metodología estadística
- Componente importante de las pruebas de hipótesis e inferencia estadística
- Relacionada con las distribuciones T de Student y F de Snedecor

Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución chi cuadrado si su función de densidad es:

$$\frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2}$$

Notación:

$$X \sim \chi^2(k)$$

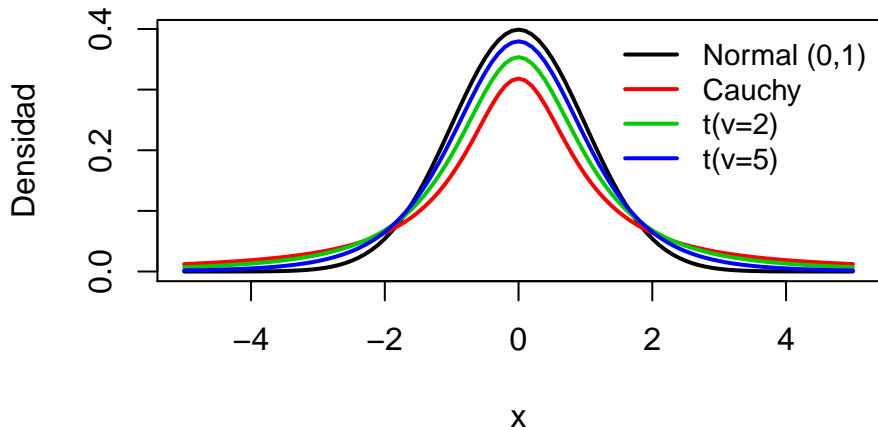
- **Esperanza Matemática y Varianza:**
- $E[X] = k$
- $Var[X] = 2k$

## Distribuciones derivadas del muestreo

# Distribución $t$ de Student (1/2)

- Deriva de la distribución normal
- Surge con la dificultad de estimar la media de una población con distribución normal cuando el tamaño de muestra es pequeño.
- Notación:  $X \sim t(\nu)$
- Es de media cero y varianza  $\frac{\nu}{\nu-2}$ ; con  $\nu > 2$
- Simétrica respecto a la media
- La varianza decrece hasta uno cuando el número de grados de libertad aumenta
- Tabla  $t$

## Distribución $t$ -Student



# Distribución F

- Llamada la distribución F de Fisher o F de Snedecor.
- Generalmente es la distribución nula de una prueba estadística (análisis de varianza)
- Notación:  $X \sim \chi^2(d_1, d_2)$
- Útil en comparación de varianzas
- Tabla F

La distribución F surge como resultado de la siguiente operación entre variables aleatorias:

$$F = \frac{Y_1/d_1}{Y_2/d_2}$$

Donde:

- $Y_1$  y  $Y_2$  siguen una distribución  $\chi^2$  con  $k_1$  y  $k_2$  grados de libertad, respectivamente.
- $Y_1$  y  $Y_2$  son independientes



## Ejercicios (1/5)

En un experimento de laboratorio se utilizan 10 gramos de  $X$  compuesto químico, se conoce que la duración media de un átomo de esta materia es de 140 días; obtener:

- 1 La probabilidad de que el compuesto desaparezca máximo a los 100 días.
- 2 La probabilidad de que el compuesto desaparezca en mínimo 50 días
- 3 Los días que transcurren hasta que haya desaparecido el 90% de este material.

## [1] 0.5104583

## [1] 0.6996725

## [1] 322.3619

## Ejercicios (2/5)

- Se ha comprobado que el tiempo de vida útil de cierto tipo de marcapasos sigue una distribución exponencial con media de 16 años. Obtener:
  - La probabilidad de que a un paciente al que se le ha implantado el marcapasos, deba reemplazarlo por otro antes de 20 años.
  - La probabilidad de que haya que cambiar el marcapasos máximo a los 25 años en un paciente que tiene el implante hace 5 años.
  - El tiempo transcurrido hasta que exista una probabilidad máximo del 80% de reemplazarlo.

Respuesta\_A

```
## [1] 0.7134952
```

Respuesta\_B

```
## [1] 0.5220042
```

Respuesta\_C

```
## [1] 25.75101
```

## Ejercicios (3/5)

- Asuma que la variable aleatoria  $Z$  sigue una distribución normal estándar, obtener:
  - 1  $P(Z \leq 1.37)$  (0.9146565)
  - 2  $P(Z \leq -0.86)$  (0.1948945)
  - 3  $P(-1.25 \leq Z \leq 0.37)$  (0.538659)
  - 4  $P(Z > -1.23)$  (0.8906514)

## Ejercicios (4/5)

- El caudal de un canal de riego medido en  $m^3/seg$  es una variable aleatoria con distribución aproximadamente normal con media  $3m^3/seg$  y desviación estándar de  $0.8m^3/seg$ . Con esta información, obtener la probabilidad de los siguientes eventos:
  - **Evento A:** que el caudal en un momento dado sea máximo de  $2.4m^3/seg$ . (0.2266274)
  - **Evento B:** que el caudal en un momento dado esté entre  $2.8$  y  $3.4m^3/seg$ . (0.2901688)
  - **Evento C:** que el caudal en un momento dado sea al menos de  $2m^3/seg$ . (0.8943502)

## Ejercicios (5/5)

- El día de floración de una hortaliza (en escala de 1 -365 días) se puede modelar con una distribución normal centrada en el 18 de agosto (día 230) y con desviación estándar de 10 días. Si desde la fecha de la floración hasta la cosecha hay un lapso de 25 días, obtener:
  - 1 La proporción de la cosecha que se habrá generado para el 16 de septiembre (día 259).
  - 2 Si se considera **primicia** a los frutos obtenidos antes del 1 de septiembre (día 244), ¿qué proporción de la cosecha se espera sea primicia?
  - 3 Si se considera **tardío** a los frutos obtenidos después del 20 de septiembre (día 263), ¿cuál es la proporción esperada de frutos tardíos?

Respuesta\_A

```
## [1] 0.6554217
```

Respuesta\_B

```
## [1] 0.1356661
```

Respuesta\_C

```
## [1] 0.2118554
```