Problemas con Valores Iniciales (PVI). Problemas con Valores en la Frontera (PVF).

1. Resuelva el siguiente PVI en el intervalo de $t = 0$ a 2, donde $y(0) = 1$. Muestre todos sus resultados en la misma gráfica.

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.1y$$

   a) Analíticamente.
   b) Método de Euler con $h = 0.5$ y $h = 0.25$.
   c) Método de Heun.
   d) Método de punto medio con $h = 0.5$.

2. Resuelva el siguiente PVI en el intervalo de $x = 0$ a 1, usando un tamaño de paso de 0.25, donde $y(0) = 1$. Muestre todos sus resultados en la misma gráfica.

$$\frac{dy}{dx} = (1 + 4x)\sqrt{y}$$

   a) Analíticamente.
   b) Método de Euler.
   c) Método de Heun.
   d) Método de punto medio.

3. Utilice los métodos de a) Euler y b) Heun para resolver:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 0.5t + y = 0\,,$$

donde $y(0) = 2$ y $y'(0) = 0$. Resuelva de $x = 0$ a 4, con $h = 0.5$. Compare los métodos por medio de graficar las soluciones.

4. Resuelva el siguiente PVI con los métodos de Heun y punto medio:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 0.6\frac{dy}{dx} + 8y = 0\,,$$

donde $y(0) = 4$ y $y'(0) = 0$. Resuelva de $x = 0$ a 5 con $h = 0.5$. Grafique sus resultados.

5. Use los métodos de a) Euler y b) punto medio para resolver:

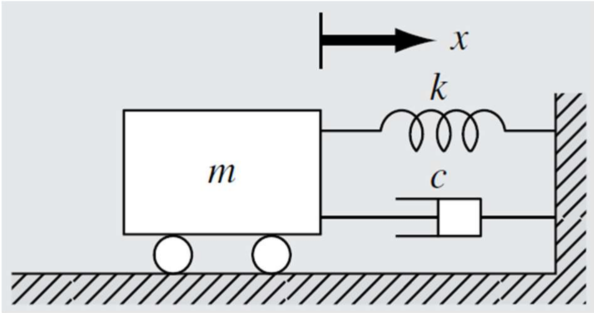
$$\frac{dy}{dx} = -2y + 5e^{-t}\,,$$
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{yz^2}{2}\,,$$

En el rango de $x = 0$ a 0.4, con un tamaño de paso de 0.4, con $y(0) = 2$ y $z(0) = 4$.

6. El movimiento de un sistema acoplado masa-resorte (véase la figura) está descrito por la ecuación diferencial ordinaria que sigue

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0\,,$$

donde x es el desplazamiento desde la posición de equilibrio, medido en metros (m), t es el tiempo, medido en segundos (s), $m = 20\ kg$ es la masa y c es el coeficiente de amortiguamiento, cuyas unidades son $(N \cdot s/m)$. El coeficiente de amortiguamiento c adopta tres valores, 5 (subamortiguado), 40 (amortiguamiento crítico) y 200 (sobreamortiguado). La constante del resorte es $k = 20\ N/m$. La velocidad inicial es de cero y el desplazamiento inicial es $x = 1m$. Resuelva esta ecuación con el uso de un método numérico durante el periodo $0 \leq t \leq 15\ s$. Grafique el desplazamiento $versus$ el tiempo para cada uno de los tres valores del coeficiente de amortiguamiento sobre la misma curva.



7. Para simular una población se utiliza el modelo logístico

$$\frac{dp}{dt} = k_{gm}\left(1 - \frac{p}{p_{max}}\right)p$$

donde p es la población, k_{gm} es la tasa máxima de crecimiento en condiciones ilimitadas y p_{max} es la capacidad de carga. Simule la población mundial entre 1950 y 2000, con el empleo de alguno de los métodos numéricos abordados en el curso. Para la simulación, utilice las siguientes condiciones iniciales y valores de parámetros: $p_0(1950) = 2555$ millones de personas, k_{gm} 0.026/año y $p_{max} = 12\ 000$ millones de personas. Haga que la función genere salidas que correspondan a las fechas de los datos siguientes de población. Desarrolle una gráfica de la simulación junto con los datos

t	1950	1960	1970	1980	1990	2000
P	2555	3040	3708	4454	5276	6079

8. El balance de calor de estado estacionario de una barra se representa como:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - 0.15T = 0\,.$$

Obtenga una solución analítica para una barra de 10 m con $T(0) = 240$ y $T(10) = 150$.

9. Use los métodos de Diferencias Finitas y Funciones de Base Radial para resolver el problema 8.

10. Emplee los métodos de diferencias finitas y funciones de base radial para resolver

$$7\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - y + x = 0\,,$$

con las condiciones de frontera $y(0) = 5$ y $y(20) = 8$.

11. Utilice diferencias finitas para resolver la ecuación diferencial ordinaria con valores en la frontera

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 6\frac{du}{dx} - u = 2\,,$$

con condiciones de frontera $u(0) = 10$ y $u(2) = 1$. Grafique los resultados de u versus x. Utilice $\Delta x = 0.1$.

12. Una barra caliente con una fuente de calor uniforme se puede modelar con la *ecuación de Poisson*
$$\frac{d^2T}{dx^2} = -f(x)\,.$$
Dada una fuente de calor $f(x) = 25$ y las condiciones en la frontera $T(0) = 40$ y $T(10) = 200$, resuelva para la distribución de temperatura con a) el método de diferencias finitas ($h = 2$) y b) el método de funciones de base radial.

13. Repita el problema 12, pero para la siguiente fuente de calor $f(x) = 0.12x^3 - 2.4x^2 + 12x$.

14. Suponga que la posición de un objeto que cae está gobernada por la siguiente ecuación diferencial:
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} - g = 0\,,$$
donde c es un coeficiente de arrastre de primer orden con valor igual a 12.5 kg/s, m es la masa con valor de 70 kg y g es la aceleración de la gravedad que se toma igual a 9.81 m/s^2. Use los métodos de diferencias finitas y funciones de base radial para hallar la posición y velocidad de un objeto cuya caída satisface las condiciones de frontera $x(0) = 0$ y $x(12) = 500$.

15. Use el método de diferencias finitas para aproximar la solución de los siguientes PVF:
    a) $y'' = -4x^{-1}y' + 2x^{-2}y + 2x^{-2}\ln x,\ 1 \le x \le 2,\ y(1) = -\frac{1}{2},\ y(2) = \ln 2,\ h = 0.05.$
    b) $y'' = -(x+1)y' + 2y + (1 - x^2)e^{-x},\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = -1,\ y(1) = 0,\ h = 0.1.$
    c) $y'' = x^{-1}y' + 3x^{-2}y + x^{-1}\ln x - 1, 1 \le x \le 2,\ y(1) = y(2) = 0,\ h = 0.1.$
    d) $y'' = 2y' - 2y, 0 \le x \le \pi,\ y(0) = 1,\ y'(\pi) = 0\ \ h = 0.1.$
    e) $y'' = -y, 0 \le x \le \pi/2,\ y'(0) = 0,\ y'(\pi/2) = 2\ \ h = 0.1.$

16. Solucionar el ejercicio 15 utilizando el método de funciones de base radial tipo a) $\phi(x) = e^{-r^2/c}$ y b) $\phi(x) = [r^2 + c^2]^{1/2}$. En ambos casos use $c = 0.05$ y 5 puntos sobre cada intervalo.

17. El PVF que rige la deflexión de una viga con los extremos soportados sujetos a una carga uniforme es
$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}w + \frac{qx}{2EI}(x - l), \quad 0 < x < l\,,$$
con las condiciones de frontera $w(0) = w(l) = 0$. Suponga que la viga es de acero tipo W10, con las siguientes características: longitud $l = 120\ pulg$, intensidad de carga uniforme $q = 100\ lb/pie$, módulo de elasticidad $E = 3.0 \times 10^7\ lb/pulg^2$, esfuerzo en los extremos $S = 1000\ lb$ y momento central de inercia $I = 625\ pulg^4$. Aproxime la deflexión $w(x)$ de la viga cada 6 pulgadas.

18. Solucionar el ejercicio 17 utilizando el método de funciones de base radial tipo a) $\phi(x) = e^{-r^2/c}$ y b) $\phi(x) = [r^2 + c^2]^{1/2}$. En ambos casos use $c = 0.05$ y 21 puntos sobre el intervalo [0,120].