Alessandro Michele Berardi 308444

Classificazione Sistemi

Dinamico	eq. diff o eq. alle differenze	**Statico**	altrimenti
Tempo continuo	variabile t (s trasf.)	**Tempo discreto**	variabile k (z trasf.)
SISO	1 ingresso 1 uscita	**MIMO**	più ingressi e/o più uscite
Dimensione finita	numero var. di stato *finito*	**Dimensione infinita**	altrimenti
Lineare	altrimenti	**Non lineare**	potenze nelle equazioni
Invariante	var. di tempo esplicita	**Variante**	altrimenti
Proprio	u compare nell'eq. di uscita	**Improprio**	altrimenti

Sistemi elettrici

$i_c = C\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{s}$, $\quad V_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = sL$
Var. stato: V_C, i_L
Var. ingresso: i, e

DC motor

In generale
$v_a = R_a i_a(t) + L_a\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + (e = K\phi\dot{\theta}(t))$
$v_e = R_e i_e(t) + L_e\frac{\mathrm{d}i_e}{\mathrm{d}t}$
$J\ddot{\theta}(t) = T_m - T_r(t) - \beta\dot{\theta}(t)$

- **Armatura ($\overline{\phi}, \overline{i_e}$ cost)**
  $T_m = K\overline{\phi}i_a(t)$
- **Eccitazione (i_a cost)**
  $T_m = K\phi\overline{i_a}$

Var. stato: $\{i_a(t) \vee i_e(t), \theta(t), \dot{\theta}(t)\}$
Var. ingresso: $\{v_a(t) \vee v_e(t), T_r(t)\}$
Eq. dinam. : eq. motore (solo per la tensione non cost.) + equazioni alberi

Sistemi termici

$C_i\dot{\theta}_i(t) = \sum_k p_k^{\text{est}} - \sum_{j\neq i} p_{ij}^{\text{int}}$
Var. stato: $\{\theta_i\}$
Var. ingresso: $\{p_0, \theta_{\text{int}}, \theta_{\text{est}}\}$
$p_{ij}^{\text{int}} = K_{ij}[\theta_i(t) - \theta_j(t)]$

Movimento LTI TC

n eq. diff., p ingressi, q uscite
$A = n\times n, B = n\times p, C = q\times n, D = q\times p$
$X(s) = \overbrace{(sI-A)^{-1}}^{H_0^x(s)}x(0) + \overbrace{(sI-A)^{-1}B}^{H_f(s)}u(s)$
$Y(s) = \overbrace{C(sI-A)^{-1}}^{H_0(s)}x(0) + \overbrace{[C(sI-A)^{-1}B + D]}^{H(s)}u(s)$
$H(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_1 s + a_0} = K_\infty\frac{s^m + \ldots + b_1' s + b_0'}{s^n + \ldots + a_1' s + a_0'} = K_{\text{staz}}\frac{\beta_m s^m + \ldots + \beta_1 s + 1}{\alpha_n s^n + \ldots + \alpha_1 s + 1}$: fdt (SISO)

- $m < n$: $(b_m = D = 0)$
- $m = n$: $(b_m = D \neq 0)$

$K_\infty = \lim_{s\to\infty}\{s^{n-m}H(s)\}$
$K_{\text{staz}} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{H(s)}{s^n}\right\}$
NB: n diverso da quello riferito alle dim. delle matrici

Movimento LTI TD

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$X(z) = Cz(zI-A)^{-1}x(0) + (zI-A)^{-1}Bu(z)$
$Y(z) = zC(zI-A)^{-1}x(0) + [C(zI-A)^{-1}B + D]u(z)$

Analisi modale LTI TC

- autovalori semplici $\mu = 1$
  - $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$: esp. convergente
  - $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$: limitato cost.
  - $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$: esp. divergente
- autovalori multipli $\mu > 1$
  - $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$: esp. convergente
  - $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$: polinom. divergente
  - $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$: esp. divergente

Costante di tempo $\tau = \left|\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}\right|$

- modi reali: $e^{-\lambda t}, \lambda$ reale
- modi complessi: $e^{\sigma t}\cos(\omega t), e^{\sigma t}\sin(\omega t), \lambda_i = \sigma \pm j\omega$

Analisi modale LTI TD

- autovalori semplici $\mu = 1$
  - $|\lambda| < 0$: geom. convergente
  - $|\lambda| = 0$: limitato
  - $|\lambda| > 0$: geom. divergente

  se $\lambda < 0$ e reale modi alternati
  se λ complesso limitato diventa limitato oscill.
- autovalori multipli $\mu > 1$
  - $|\lambda| < 0$: geom. convergente
  - $|\lambda| = 0$: polinom. divergente
  - $|\lambda| > 0$: geom. divergente

  se $\lambda < 0$ e reale modi alternati
- modi reali: λ^k, λ reale
- modi complessi:

$k^{\mu'}v^k\cos(\theta k), \ldots, kv^k\cos(\theta k), v^k\cos(\theta k)$
$k^{\mu'}v^k\sin(\theta k), \ldots, kv^k\sin(\theta k), v^k\sin(\theta k)$
$\lambda = \sigma \pm j\omega = ve^{\pm j\theta}, \mu' \leq \mu$

Condizione equilibrio

sistemi TC
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 = f(\overline{x}, \overline{u}) \\ y(t) = \overline{y} = g(\overline{x}, \overline{u}) \end{cases}$$
sistemi TD
$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) = \overline{x} = f(\overline{x}, \overline{u}) \\ y(t) = \overline{y} = g(\overline{x}, \overline{u}) \end{cases}$$
NB: nel caso TD portare tutto a sx per ogni eq. lasciando a 0 il membro destro

Linearizzazione sistemi NL

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t) \\ \delta y(t) = C(t)\delta x(t) + D(t)\delta u(t) \end{cases}$$

$A(t) = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}|_{x=\tilde{x}, u=\tilde{u}}$
$B(t) = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}|_{x=\tilde{x}, u=\tilde{u}}$
$C(t) = \frac{\partial g(x,u)}{\partial x}|_{x=\tilde{x}, u=\tilde{u}}$
$D(t) = \frac{\partial g(x,u)}{\partial u}|_{x=\tilde{x}, u=\tilde{u}}$

Stabilità interna sistemi LTI TC

- asintotica stabilità: $\forall i : \mathrm{Re}(\lambda_i(A)) < 0$
- instabilità: $\exists i : \mathrm{Re}(\lambda_i(A)) > 0$
- semplice stabilità:
  - $\mathrm{Re}(\lambda_i(A)) \leq 0$
  - $\exists k : \mathrm{Re}(\lambda_k(A)) = 0$
  - $\forall k : \mathrm{Re}(\lambda_k(A)) = 0 \wedge \mu_k = 1$
- instabilità o semplice stabilità
  - $\mathrm{Re}(\lambda_i(A)) \leq 0$
  - $\exists k : \mathrm{Re}(\lambda_k(A)) = 0 \wedge \mu_k > 1$

Stabilità interna sistemi LTI TD

- asintotica stabilità: $\forall i : |\lambda_i(A)| < 1$
- instabilità: $\exists i : |\lambda_i(A)| > 1$
- semplice stabilità:
  - $|\lambda_i(A)| \leq 1$
  - $\exists k : |\lambda_k(A)| = 1$
  - $\forall k : |\lambda_k(A)| = 1 \wedge \mu_k = 1$
- instabilità o semplice stabilità
  - $|\lambda_i(A)| \leq 1$
  - $\exists k : |\lambda_k(A)| = 1 \wedge \mu_k > 1$

Criteri di stabilità

Dato un generico polinomio $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$
Per sistemi TC

- se $n = 2$ **regola dei segni**: condizione *necessaria e sufficiente* per tutte radici con $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ è che a_n coefficenti del polin. siano di segno concorde
- se $n > 2$ **tabella di Routh**: condizione *necessaria e sufficiente* per tutte radici con $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ sono
  - se gli elementi della 1° colonna hanno segno concorde
  - se gli elementi della 1° colonna non hanno segno concorde, ci sono tante radici di $p(\lambda)$ con $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ quante sono le variazioni di segno

Per sistemi TD **tabella di Jury**

- se $n = 2$: $p(\lambda = 1) > 0 \wedge (-1)^n p(\lambda = -1) > 0 \wedge |a_n| > |a_0|$
- se $n > 2$: $p(\lambda = 1) > 0 \wedge (-1)^n p(\lambda = -1) > 0 \wedge |a_n| > |a_0| \wedge |b_n| > |b_0| \wedge |c_n| > |c_0| \wedge \ldots \wedge |z_n| > |z_0|$

Stabilità interna sistemi NL

Sistemi TC: non si può concludere nulla se $\forall i : \mathrm{Re}(\lambda_i(A)) \leq 0 \wedge \exists k : \mathrm{Re}(\lambda_i(A)) = 0$
Sistemi TD: non si può concludere nulla se $\forall i : |\lambda_i(A)| \leq 0 \wedge \exists k : |\lambda_i(A)| = 0$
In entrambi i casi il resto è identico ai sistemi LTI

Raggiungibilità sistemi LTI

$M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$

- se $\mathrm{rank}(M_R) = n \implies$ sistema complet. raggiungibile
- se $\mathrm{rank}(M_R) < n \implies$ sistema non complet. raggiungibile

NB: se $\det(M_R) = 0 \implies \mathrm{rank}(M_R) < n$ se e solo se $p = 1$ con $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

Osservabilità sistemi LTI

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- se $\mathrm{rank}(M_O) = n \implies$ sistema complet. osservabile
- se $\mathrm{rank}(M_O) < n \implies$ sistema non complet. osservabile

NB: se $\det(M_R) = 0 \implies \mathrm{rank}(M_R) < n$ se e solo se $p = 1$ con $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

Retroazione statica dello stato

$u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)$ retroazione
$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + B\alpha r(t) \\ y(t) = (C - DK)x(t) + D\alpha r(t) \end{cases}$
$H(s) = \{(C - DK)[sI - (A - BK)]^{-1}B + D\}\alpha$
matrice di trasferimento tra $r(t)$ e $y(t)$
L'obiettivo è trovare la matrice dei guadagni K in modo da assegnare tutti gli n autovalori alla matrice $A - BK$. Per fare ciò si pone $p_{\mathrm{des}}(\lambda) = p_{A-BK}(\lambda)$ se e solo se il sistema è complet. raggiungibile.

- $p_{\mathrm{des}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{\mathrm{des}_i})$
- $p_{A-BK}(\lambda) = \det(\lambda I - (A - BK))$

Stima dello stato

Quando non è possibile accedere agli stati interni di un sistema in retroazione statica sarà necessario usare un *osservatore*.
L'obiettivo è trovare la matrice dei guadagni $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ n \end{bmatrix}$ in modo da assegnare tutti gli n autovalori alla matrice $A - LC$. Per fare ciò si pone $p_{\mathrm{des}}(\lambda) = p_{A-LC}(\lambda)$ se e solo se il sistema è complet. osservabile.

- $p_{\mathrm{des}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{\mathrm{des}_i})$
- $p_{A-LC}(\lambda) = \det(\lambda I - (A - LC))$

Regolatore dinamico sistema LTI

Dopo aver controllato che il sistema sia complet. raggiungibile e complet. osservabile (*forma minima*) si progetta il controllore attraverso il calcolo di K ed L.
La matrice di trasferimento di un sistema controllato con il regolatore vale $H(s) = \{(C - DK)[sI - (A - BK)]^{-1}B + D\}\alpha$

Stabilità esterna

Data $H(s)$ la matrice di trasferimento, per ogni funzione $H_{ij}(s)$ con poli w_p:

- sistema TC BIBO stabile se tutti i poli $w_p : \mathrm{Re}(w_p) < 0$
- sistema TD BIBO stabile se tutti i poli $w_p : |w_p| < 1$

Sistema LTI ha forma minima ed è esternamente stabile $\Leftrightarrow$ asintoticamente stabile

Risposta a regime

Prima di procedere con i calcoli **controllare se $H(s)$ è BIBO**
In generale la risposta a regime si ottiene $\boxed{y_\infty} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{Y(s)}{U(s)} U(s) = \boxed{\lim_{s\to 0} H(s)U(s)}$

- **ingresso costante**
  $u(t) = \overline{u}\varepsilon(t)$
  $y_{\mathrm{part}}(t) = \overline{y}\varepsilon(t) = -CA^{-1}B\overline{u}\varepsilon(t)$ con $\overline{y} = |H(0)|\overline{u}$
- **ingresso rampa**
  $u(t) = \overline{u}t$
  $y_{\mathrm{part}} = \lim_{s\to 0} \{H(s) \cdot \frac{\overline{u}}{s}\}$
- **ingresso sinusoidale**
  $u(t) = \overline{u}\sin(w_0 t + \theta_0)\varepsilon(t)$
  $y_{\mathrm{part}}(t) = \overline{y}\sin(w_0 t + \varphi)\varepsilon(t)$
  con $\overline{y} = |H(jw_0)|\overline{u}$
  $\varphi = \arg(H(jw_0)) + \theta_0$

Risposte di sistemi 1° e 2° ordine

Risposta 1° ordine
$H(s) = \frac{K}{1+\tau s}$ con τ il tempo per cui la risposta raggiunge il 63% di y_∞
Risposta 2° ordine
$H(s) = K\frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$
con

- $K = \frac{y_\infty}{\overline{u}}$ guadagno su polo
- $\hat{s} = \frac{y_{\max} - y_\infty}{y_\infty}$ sovraelongazione massima
- $\zeta = \frac{|\ln(\hat{s})|}{\sqrt{\pi^2 + \ln(\hat{s})^2}}$ smorzamento (damping)
- $\hat{t} = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ tempo di picco
- $t_s \simeq \frac{2.16\zeta + 0.6}{w_n}$ tempo di salita

poli concordi $\Rightarrow$ funzione monotona
se cambia concavità $\Rightarrow$ 2° ordine

Sistemi meccanici

$M_i\ddot{p}_i(t) = \sum_k F_k^{\mathrm{est}} - \sum_{j\neq i} F_{ij}^{\mathrm{int}}$
$J_i\ddot{\theta}_i(t) = \sum_k T_k^{\mathrm{est}} - \sum_{j\neq i} T_{ij}^{\mathrm{int}}$
$F_{ij}^{\mathrm{int}} = K_{ij}[p_i - p_j] + \beta_{ij}[\dot{p}_i - \dot{p}_j]$
$T_{ij}^{\mathrm{int}} = K_{ij}[\theta_i - \theta_j] + \beta_{ij}[\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_j]$
Var. stato: $\{p_i, \dot{p}_i\} \vee \{\theta_i, \dot{\theta}_i\}$
Var. ingresso: $\{F_k^{\mathrm{est}}\} \vee \{T_k^{\mathrm{est}}\}$
NB: $J = Ml^2$ inerzia del pendolo
NB: corpo i senza massa **no stato**

Tabella di Routh

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$	0
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$	0
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	$\dots$	0
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
0	a_0	0	0	$\dots$	$\dots$

$$b_{n-2} = -\frac{1}{\boxed{a_{n-1}}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ \boxed{a_{n-1}} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-4} = -\frac{1}{\boxed{a_{n-1}}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ \boxed{a_{n-1}} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

e di conseguenza seguendo il pattern evidenziato dai colori

$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}$

$c_{n-5} = -\frac{1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix}$

e così via ...
NB: si ricordi che se $A = [\dots]$ allora $\det(A) = |\dots|$

Tabella di Jury

n	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
$n-1$	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_2	b_1	
$n-2$	c_0	c_1	c_2	$\dots$	c_n		
$n-2$	c_0	c_1	c_2	$\dots$	c_{n-2}		
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$				
2	z_0	z_1	z_2				
2	z_2	z_1	z_0				

$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}$

$b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}$

$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}$

$c_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_1 \end{vmatrix}$

e così via ...
NB: si ricordi che se $A = [\dots]$ allora $\det(A) = |\dots|$

Goniometria

Addizione e sottrazione
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
Duplicazione
$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

Numeri complessi

$z = a + jb$
$j^2 = -1$
$z = |z|e^{j\varphi}$ con $\varphi = \arg(z)$
$\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$
Prodotto
$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{j(\varphi_1 \varphi_2)}$
Rapporto
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + j\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$
Potenze
$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi))$

Calcolo matriciale

$\mathrm{cof}_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \cdot A_{(ij)}$ con $A_{(ij)}$ il det di A togliendo riga i e colonna j
$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\mathrm{cof}(A))^T$

Regole derivazione

$D[\frac{f(t)}{g(t)}] = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)}$ rapporto