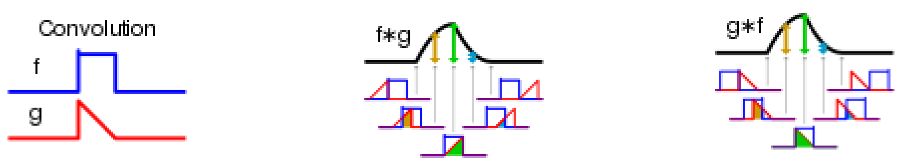
Convolución

En matemáticas una convolución es un operador matemático que transforma dos funciones f y g en una tercera función que en cierto sentido representa la magnitud en la que se superponen f y una versión trasladada e invertida de g.

Intuitivamente podemos mirar a la convolución de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ como la función resultante de la siguiente ecuación:

$$f(x) * g(x) = h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)dz$$

Para dos funciones en una dimensión esto se vería como:



Convolución discreta

Cuando se trata de hacer un procesamiento digital de señal no tiene sentido hablar de convoluciones aplicando estrictamente la definición ya que solo se dispone de valores en instantes discretos de tiempo. Es necesario, pues, una aproximación numérica. Para realizar la convolución entre dos señales.

En el caso de señales discretas de dos dimensiones los datos se organizan en matrices, en este sentido la convolución es el tratamiento de una matriz por otra que se llama “kernel”.

Dadas dos matrices $f(m,n)$ y $g(m,n)$ no periódicas y finitas, cuyas dimensiones son:

$$size(f) = (M_f, N_f)$$

$$size(g) = (M_g, N_g)$$

Donde la matriz $g(m,n)$ es el kernel de convolución.

La convolución lineal 2D se puede describir como sigue:

$$f * g(m.n) = \sum_{r=0}^{M_f-1} \sum_{c=0}^{N_f-1} f(r,c)g(m-r,n-c)$$

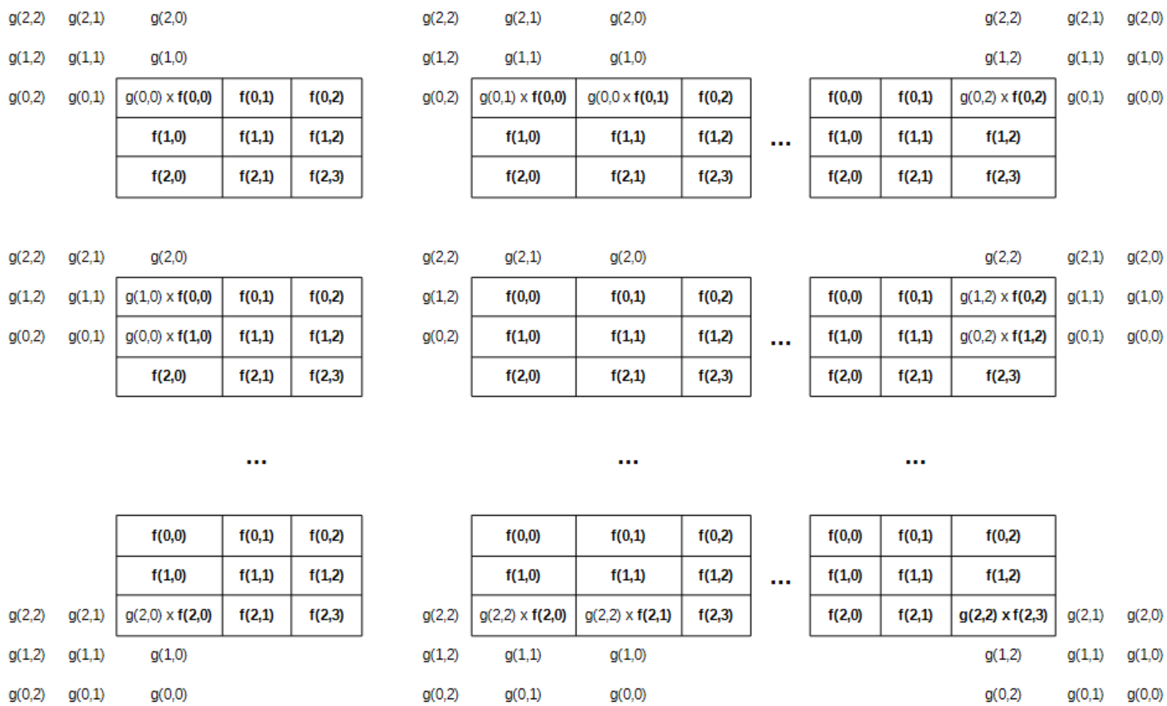
El tamaño de la matriz de convolución es:

$$size(f * g) = (M_f + M_g - 1, N_f + N_g - 1)$$

Algoritmo para la convolución lineal 2D

- La matriz $f(m,n)$ se mantiene sin cambio.
- La matriz $g(m,n)$ se refleja y se desplaza en pasos de adelante hacia a atrás tanto en renglones como en columnas.
- Las matrices se multiplican punto a punto (se omiten aquellos productos donde las matrices no están definidas).
- Este algoritmo se repite para cada paso que se desplaza la matriz $g(m,n)$.

En la figura siguiente podemos ver el proceso de convolución de 2 matrices f y g:



Ejemplo

Sean las dos matrices siguientes, las cuales deben convolucionarse

$$f(m,n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad g(m,n) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Las dimensiones de las matrices son

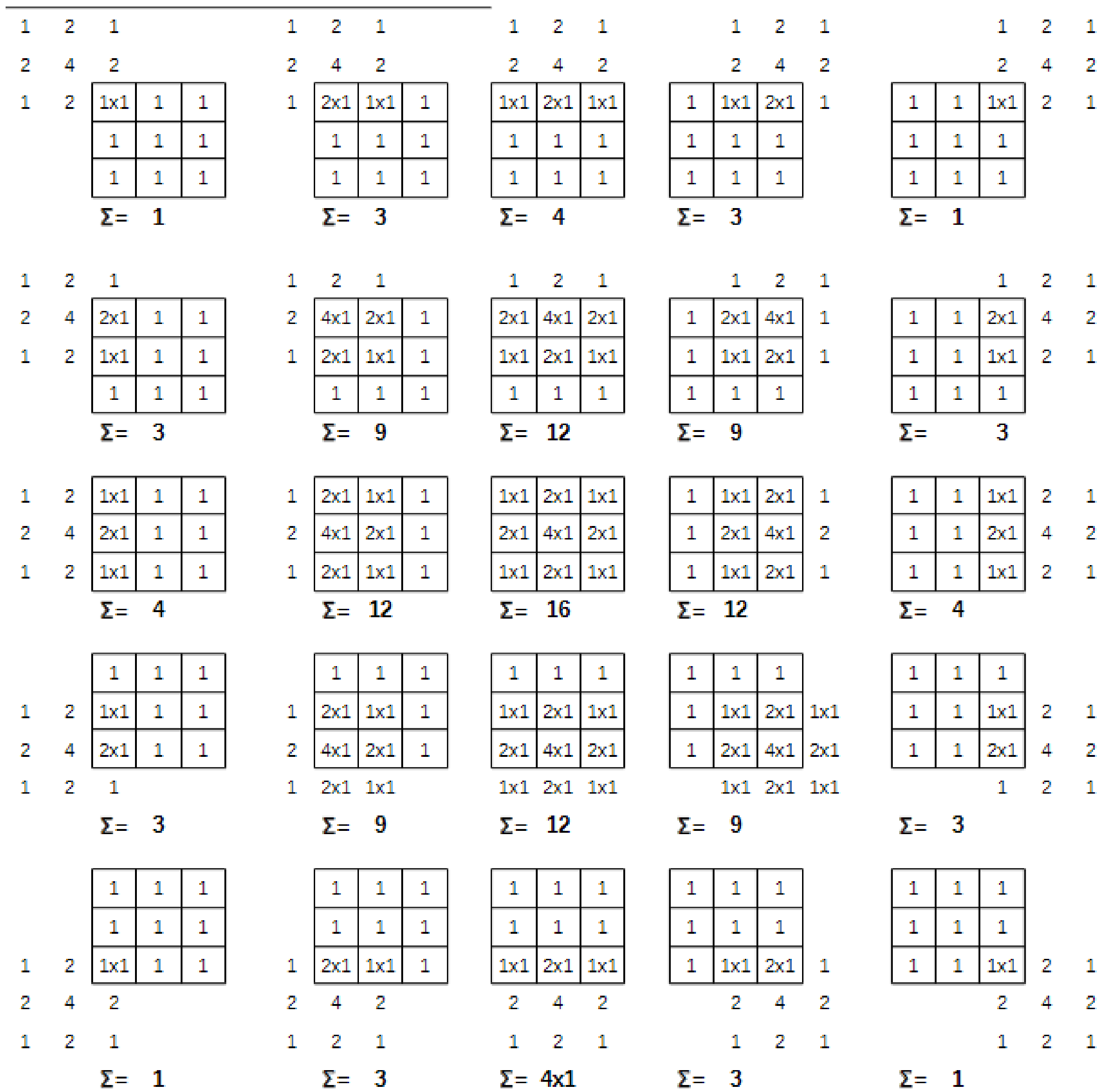
$size(f) = (M_f, N_f)$ = (3,3)

$size(g) = (M_g, N_g)$ = (3,3)

La matriz de convolución tiene dimensiones de

$size(f * g) = (M_f + M_g - 1, N_f + N_g - 1)$ = (5,5)

El proceso de convolución sería:



Con lo cual queda la matriz:

$$f * g(m,m) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 12 & 9 & 3 \\ 4 & 12 & 16 & 12 & 4 \\ 3 & 9 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Sugerencia

Para facilitar el proceso de convolución en el programa se recomienda crear la matriz f extendida y hacerla de tamaño:

$$size(f) = \left(M_f + ((M_g - 1) * 2), N_f + ((N_g - 1) * 2)\right)$$

Los espacios vacíos en la matriz resultante se rellenan con ceros.

En el ejemplo el tamaño de f sería

$$size(f) = \left(M_f + ((M_g - 1) * 2), N_f + ((N_g - 1) * 2)\right) = (3 + (3 - 1) * 2), 3 + ((3 - 1) * 2))$$

$$size(f) = (7, 7)$$

La matriz resultante quedaría

$$f(m,n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Después con esta **matriz extendida** se facilita realizar las multiplicaciones correspondientes y obtener la matriz resultante.