Fiche de révision Commande des Systèmes Dynamiques

Alexis GRACIAS

21 novembre 2024

Table des matières

Chapitre 1

Structure d'un système asservi

1.1 Notion d'automatique

L'automatisme regroupe plusieurs disciplines telles que la **modélisation**, **l'analyse** et la **commande des systèmes dynamiques**. Un système est dit automatique si il peut réaliser un certain nombre d'opération sans l'aide de l'Homme.

Deux grands types de systèmes automatiques :
- La logique combinatoire et séquentielle
- Les systèmes asservis

1.2 Notion de système

Un système est un ensemble de composants fonctionnant entre eux pour réaliser un certain nombre de tâches.

- — Systèmes **continus**
- — Systèmes **linéaires**
- — Système **invariants**
- — Systèmes **monovariables**
- — Systèmes **multivariables**

Continu : un système est dit continu si, pour une entrée e et une sortie s, les fonctions e et s sont continues sur tout leurs intervalle de définition.

Linéaire : un système est dit linéaire si il respecte la propriété suivante : soit I et J les ensembles de définition de e et s, respectivement entrée et sortie du système, on a, $\forall t, u \in I, \forall \lambda, \mu \in R, e(\lambda t + \mu u) = \lambda e(t) + \mu e(u)$, de même pour la fonction s. Exmple de non-linéarités : hystérésis, saturation, balours mécaniques, thermiques et électriques

Invariant : le système ne change pas au cours du temps. Par exemple, pas usure dûs aux frottements, pas de fatigue mécanique

Monovariable : une entrée, une sortie

Multivariable : plusieurs entrées, plusieurs sorties

1.3 Modélisation d'un système :

Représentation des **SLCI** (pour une sortie y, entrée u) :

1.3.1 En continu :

Equation différentielle du système :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n_d} \alpha_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{n_n} \beta_j u^{(j)}(t)}$$

Transformée de Laplace de l'équation différentielle du système :

$$\sum_{i=0}^{n_d} \alpha_i Y^i(p) = \sum_{j=0}^{n_n} \beta_j U^j(p)$$

Réponse impulsionnelle :

$$\boxed{y(t) = h(t) * u(t) = \int h(\tau)u(\tau - t)\, d\tau}$$

Fonction de transfert :

$$\boxed{Y(p) = H(p)U(p) \text{ avec : } H(p) = \int h(t)e^{-pt}\, dt}$$

Représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

1.3.2 En Discret :

Equation aux différences :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n_d} \alpha_i y[k-i] = \sum_{j=0}^{n_n} \beta_j u[k-j]}$$

Réponse impulsionnelle :

$$\boxed{y[k] = h[k] * u[k] = \sum_{i=0} h[k]u[k-i]}$$

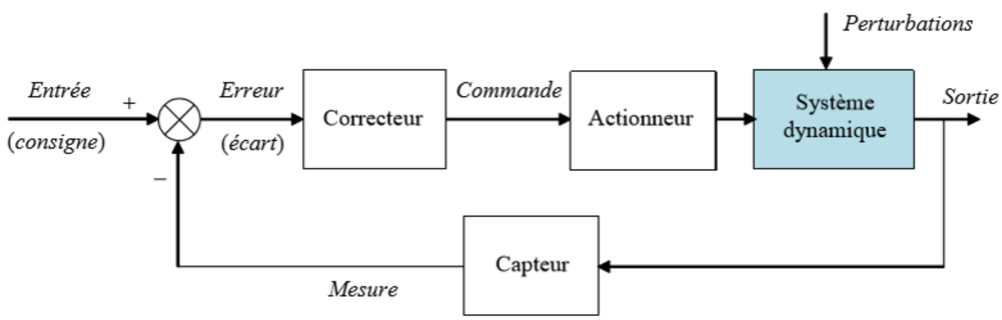
Représentation d'état :

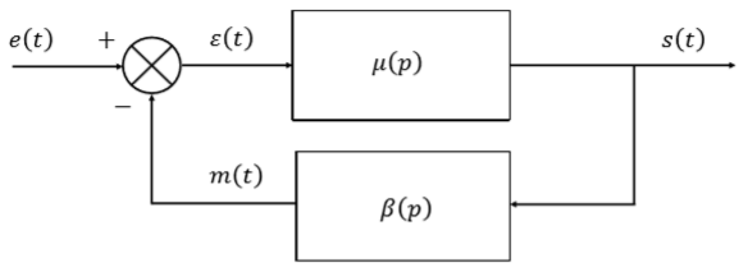
$$\begin{cases} \dot{x}[k] = Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] = Fx[k] + Gu[k] \end{cases}$$

1.4 Type de commande :

- Commande passive : modification du système en lui-même.
- Commande en boucle ouverte (BO) : modification de l'entrée en fonction de la sortie
- Commande en boucle fermée (BF) : recalcul de l'entrée en fonction de la valeur mesurée en sortie

1.5 Structure d'un système asservi monovariable





Pour un système du second ordre, la fonction de transfert en forme canonique s'écris de la manière suivante :

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+2\xi\frac{p}{\omega_0}+\frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

Avec :

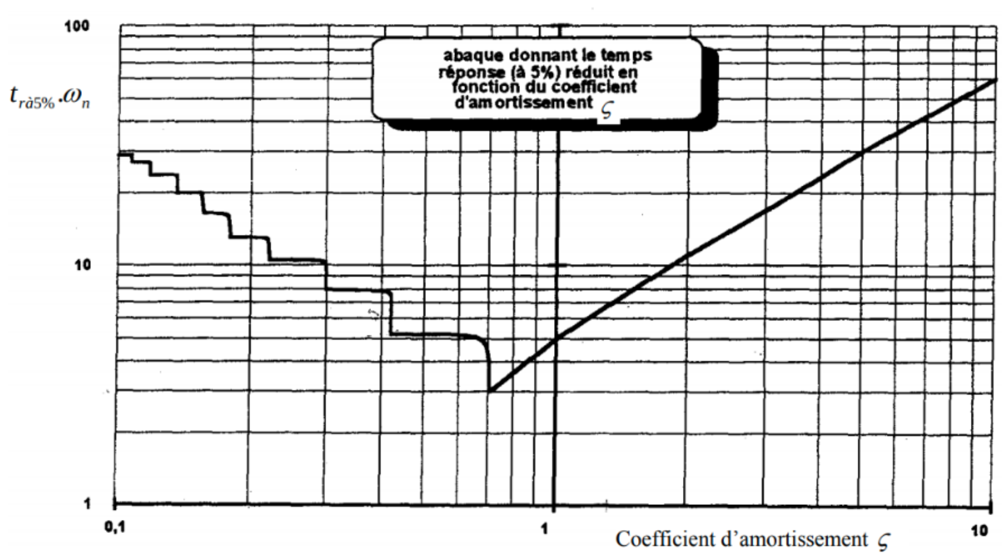
$$\left\{\begin{array}{l}\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\tau}} \\ \xi = \frac{1}{2\sqrt{K\tau}}\end{array}\right.$$

— $\omega_c = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4K^2\tau^2}}{2}}$
— $\Delta\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{360}{2\pi}\arctan(\omega_c\tau) = \frac{\pi}{2} - \frac{360}{2\pi}\arctan\left(\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4K^2\tau^2}}{2}}\tau\right)$
— $t_m = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$
— $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

1.6 Critère des systèmes asservis

1.6.1 Rapidité

Temps de réponse à 5% $t_{r5\%}$: c'est la valeur temporelle à partir de laquelle la valeur de la sortie prise en $t = t_m$ est comprise entre 95% et 105% de la valeur finale v_f.

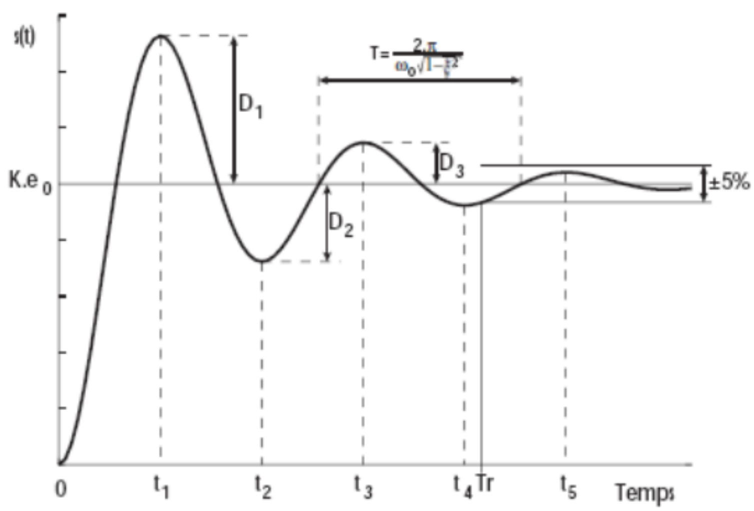


1.6.2 Stabilité

Critère de stabilité : **nombre de dépassements, marge de phase, propriétés sur les pôles.**

- un système est dit **stable** si ses pôles[1] sont à partie réelle strictement négative. C'est-à-dire que :
  Pour une fonction de transfert
  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_d} \alpha_i p^i}{\sum_{j=0}^{n_n} \beta_j p^{(j)}}$ le système est dit stable si

  $$\forall \lambda \in \mathbf{C},\ \lambda \text{ racine de } \sum_{j=0}^{n_n} \beta_j p^j,\ Re(\lambda) < 0$$
- Plus $M\phi \nearrow$, plus la stabilité $\nearrow$ avec $\boxed{tan(\phi) = \frac{Im(H(j\omega))}{Re(H(j\omega))}}$



Temps entre deux pseudo-périodes : $\boxed{t_m = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}}$

Pseudo pulsation : $\boxed{\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$

1. Les pôles sont les racines du polynôme au dénominateur de la fonction de transfert sous forme canonique

Temps de la k-ième pseudo-période : Amplitude du k-ième dépassement (avec E_0 l'amplitude de l'entrée) :

$$\boxed{D_k = kE_0 e^{-k\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

1.6.3 Précision

Critère de précision : la valeur finale doit se rapprocher le plus possible de la valeur de consigne. On considère alors un système précis si l'erreur statique[2] $\epsilon_s = 0$.

Théorème de la valeur finale :

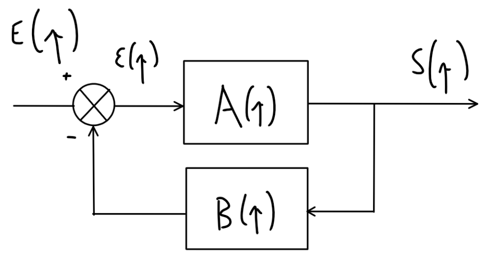
$$\boxed{\lim_{t\to\infty} s(t) = lim_{p\to 0} pS(p) = v_f}$$

Théorème de la valeur initiale :

$$\boxed{\lim_{t\to 0} s(t) = lim_{p\to\infty} pS(p) = v_i}$$

2. L'erreur statique est la valeur de l'erreur quand le régime est permanent. ϵ_s ne dépend pas de t par conséquent

1.7 Formule de Black



On a : $\epsilon(p) = E(p) - BS(p)$
$S(p) = A\epsilon(p)$
Donc : $\frac{S(p)}{A} = E(p) - BS(p) \Longleftrightarrow S(p) = \frac{AE(p)}{1+AB}$

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)}}$$

1.8 Correcteurs

Différents types de correcteur :
- Proportionnel
- Dérivé
- Intégral

On peut proposer un correcteur qui est une composition des correcteurs usuels :
- Proportionnel Intégral (PI)
- Dérivé Intégral (DI)
- Proportionnel Intégral Dérivé (PID)

1.8.1 Proportionnel

1.8.2 Intégral

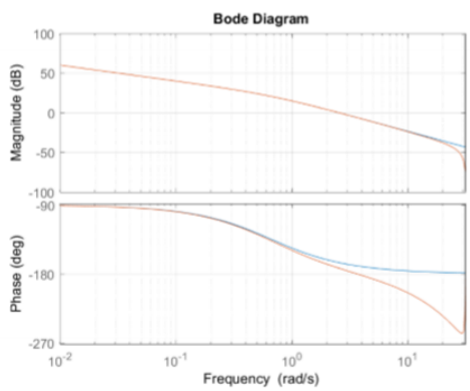
1.8.3 Dérivé

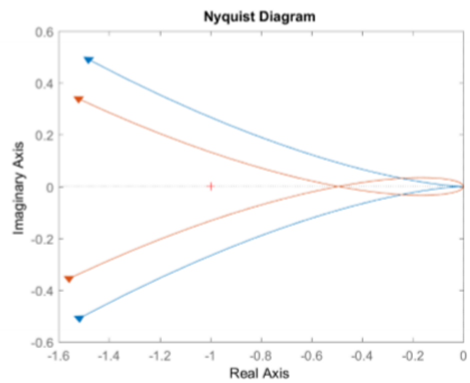
1.9 Diagramme de Bode

1.10 Diagramme de Nyquist

Pour étudier les critères d'un système asservi, on peut aussi utiliser le diagramme de Nyquist

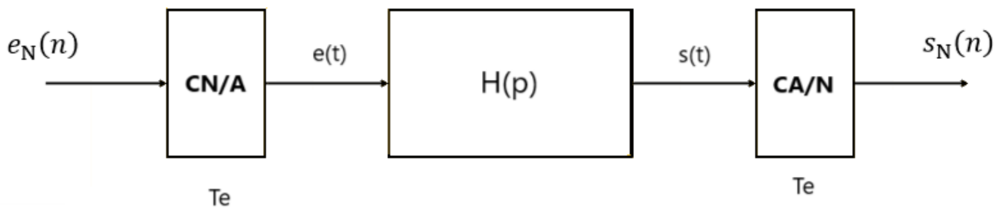
Diagramme $((Im(H(j\omega)), Re(H(j\omega)))$.





1.11 Transformée en z

1.11.1 Principe de fonctionnement



1.11.2 Propriétés

$$\boxed{Z(x(t)) = x_N(z)}$$

$$\boxed{Z(\frac{dx(t)}{dt}) = z^{-1}x_N(z)}$$

$$\boxed{H_N(z) = \frac{S_N(z)}{E_N(z)} = (1 - z^{-1})Z(\frac{H(p)}{p})}$$

Chapitre 2

Représentation d'état, commandabilité, observabilité

2.1 Représentation d'état

Cas des systèmes continus

[1] [2]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

Avec : $x \in R^n, y \in R^p, u \in R^p$

Cas des SLCI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

1. Il n'y a pas unicité de la représentation d'état
2. Les matrices A,B, C, D sont à coefficient constants

— A : matrice d'évolution $dim(A) = n^2$ (matrice carrée)

— B : matrice d'entrée $dim(B) = n$ (vecteur colonne)

— C : matrice de sortie $dim(C) = m$ (vecteur ligne)

— D : matrice ? ? de transmission directe $D \in \mathbb{R}$ (réel)

Cas des systèmes discrets

$$\begin{cases} x[k+1] = f(x[k], u[k], k) \\ y[k] = g(x[k], u[k], k) \end{cases}$$

Avec : $x \in R^n, y \in R^p, u \in R^p$

Cas des SLDI

$$\begin{cases} x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2 Point d'équilibre

On dit que le triplet $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{y})$ est un point d'équilibre SSI, il vérifie la condition suivante :

En continu

$\forall t \in R$

$$\begin{cases} 0 = f(\overline{x}, \overline{u}, t) \\ \overline{y} = g(\overline{x}, \overline{u}, t) \end{cases}$$

Avec : $\frac{dx(t_{eq})}{dt} = \frac{d\overline{x}}{dt} = 0$

En discret

$\forall k \in N,$

$$\begin{cases} \overline{x} = f(\overline{x}, \overline{u}, k) \\ \overline{y} = g(\overline{x}, \overline{u}, k) \end{cases}$$

Avec : $x[k+1] - x[k] = 0$

2.3 Solution de la représentation d'état

2.3.1 Cas des SLCI

La représentation d'état des SLCI (2.1) mène à la solution suivante :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_t^{t_0} e^{A(t-t_0)Bu(\tau)}\, d\tau$$ [3]

2.3.2 Cas discret

La représentation d'état des SLDI (2.2) mène à la solution suivante :

$$x[k] = F^{k-k_0}x[k_0] + \sum_{j=k_0}^{k-1} F^{k-j-1}Gu[j]$$ [4]

Avec :

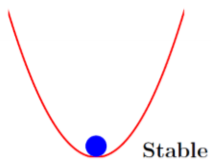
$$F = e^{AT_e}$$

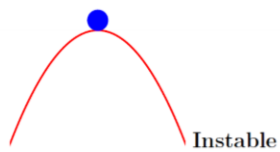
$$G = \int_0^{T_e} e^{A\theta}B\, d\theta$$

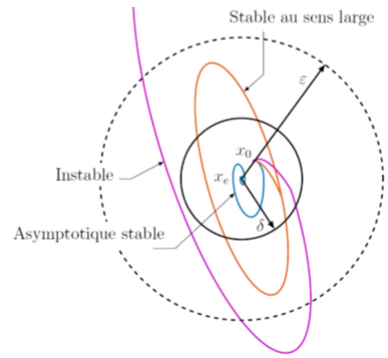
3. En considérant e^{At} comme une combinaison linéaire de I_n et les $(A^i)_{i\in N}$ tel que :
$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = I_n + At + A^2\frac{t^2}{2!} + ...$

4. Raisonnement par récurrence en conjecturant l'expression de $x[k]$ à partir de (2.2) :
$x[k] = Fx[k-1] + Gu[k-1]$
$x[k] = F^2x[k-2] + FGu[k-2] + Gu[k-1]$
$x[k] = F^3x[k-3] + F^2Gu[k-3] + FGu[k-2] + Gu[k-1]$
...
$x[k] = F^{k-k_0}x[k_0] + \sum_{j=k_0}^{k-1} F^{k-j-1}Gu[j]$

2.4 Représentation de la stabilité







2.5 Modélisation de la stabilité

2.5.1 Stabilité au sens de Lyapunov

$\overline{x}$ est stable au sens de Lyapunov SSI :

$$\forall \epsilon > 0, \forall t_0, \exists \delta(\epsilon, t_0),$$
$$||\overline{x} - x(t_0)|| < \delta(\epsilon, t_0) \implies ||x(t) - \overline{x}|| < \epsilon, \forall t t_0$$

2.5.2 Stabilité asymptotique

$\overline{x}$ est stable asymptotiquement SSI :

$$\exists \delta_1(t_0), ||\overline{x} - x(t_0)|| < \delta_1 t_0 \implies \lim_{t \to \infty} ||x(t) - \overline{x}|| = 0$$

2.5.3 Stabilité exponentielle

$\overline{x}$ est exponentiellement stable SSI

— $\overline{x}$ est assymptotiquement stable

— $\exists M 0, \exists \alpha 0, \forall t > t_0$
$||\overline{x} - x(t_0)|| < M \, ||\overline{x} - x(t)|| e^{-\alpha(t-t_0)}$

— Pour un système **continu** tel que :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

le système est dit **stable** SSI $\forall \lambda \in Sp(A)$ [5], on a

$$\boxed{Re(\lambda) < 0}$$ [6]

$\forall \lambda \in Sp(A)$ tel que $Re(\lambda) = 0$, les λ ont une multiplicité algébrique (géométrique)

— Pour un système **discret** tel que :

$$\begin{cases} x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] \end{cases}$$

le système est dit **stable** SSI $\forall \lambda \in Sp(F)$ [7], on a

$$\boxed{|\lambda| < 1}$$ [8]

$\forall \lambda \in Sp(F)$ tel que $Re(\lambda) = 1$, les λ ont une multiplicité algébrique (géométrique)

[9]

5. λ valeur propre de A
6. **Critère de Routh**
7. λ valeur propre de F
8. **Critère de Jury**
9. Dans les deux cas, les sytèmes qui vérifient ces conditions sont dit stables **assymptotiquement exponentiellement**

2.5.4 Stabilité Entrée Bornée Sortie Bornée (EBSB)

cas continu

Soit h la fonction de transfert du système définit par (2.1). Ce système est dit de stabilité EBSB SSI :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < +\infty}$$

un système causal de fonction de transfert H est dit de stabilité EBSB SSI **tous les pôles de la fonction** $H(p)$ **ont une partie réelle strictement négative (critère de Routh)**

cas discret

Soit h la fonction de transfert du système définit par (2.2). Ce système est dit de stabilité EBSB SSI :

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[k]|\, dk < +\infty}$$

un système causal de fonction de transfert H est dit de stabilité EBSB SSI **tous les pôles de la fonction** $H(z)$ **ont un module strictement inférieur à 1 (critère de Jury)**

2.6 Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert

Cas continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{H(s) = C[sI_n - A]^{-1}B + D}$$

Cas discret

$$\begin{cases} x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \\ \quad y[k] \quad = Cx[k] + Du[k] \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{H(z) = C[sI_n - F]^{-1}G + D}$$

2.7 Passage de la fonction de transfert à la représentation d'état

Soit une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i(p)p^i}{\sum_{j=0}^{n} a_j(p)p^j} = \frac{b_0+b_1p+...+b_mp^m}{a_0+a_1p+...+a_{n-1}p^{n-1}+p^n}$$

— Si $m < n \implies D = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & ... & b_m & 0 & .. & 0 \end{bmatrix}$$

— Si $m = n \implies D = b_n$ et on cherche $H\tilde{(}p)$ tel que :

$$H(p) = H\tilde{(}p) + D$$

Soit une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(p)p^i}{\sum_{j=0}^{n} a_j(p)p^j} = \frac{b_0+b_1p+...+b_{n-1}p^{n-1}}{a_0+a_1p+...+a_{n-1}p^{n-1}+p^n}$$

Alors :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & ... & b_m & 0 & .. & 0 \end{bmatrix}$$

2.8 Changement de base

Cas continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = T^{-1}AT\overline{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y(t) = \quad CT\overline{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

[10]

Cas discret

$$\begin{cases} x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \\ \quad y[k] \quad = Cx[k] + Du[k] \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} x[k+1] = T^{-1}FTx[k] + T^{-1}Gu[k] \\ \quad y[k] \quad = \quad CTx[k] + Du[k] \end{cases}$$

10. $\overline{x} = Tx$

2.9 commandabilité - systèmes commandables

Un système est dit commandable si :

- $\exists u(t)$ ou $\exists u[k]$ qui permet de passer de l'état **quelconque** x_0 **à** x_1 **quelconque** en un temps fini.
- **Critère de Kalman :**

  Cas continu

  Soit la **matrice de commandabilité** Q_c **:**

  $$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & ... & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in M_{n,n}(C)$$

  $$\boxed{rg(Q_c) = n}$$ [11]

  Cas discret

  Soit la **matrice de commandabilité** Q_c **:**

  $$Q_c = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & ... & F^{n-1}G \end{bmatrix} \in M_{n,n}(C)$$

  $$\boxed{rg(Q_c) = n}$$
- **Critère de Popov-Belevich-Hautus**

  Cas continu

  $$\forall p \in \mathbb{C}, rg(\begin{bmatrix} pI_n - A & B \end{bmatrix}) = n$$

  Cas discret

  $$\forall z \in \mathbb{C}, rg(\begin{bmatrix} zI_n - F & G \end{bmatrix}) = n$$

11. n colonnes indépendantes. La matrice Q_c est formée par les vecteurs $(A^iB)_{i\in\mathbb{N}}$ avec A une matrice carrée de taille n et B un vecteur colonne de taille n

2.10 commandabilité - systèmes partiellement commandables

- Un système est dit partiellement commandable SII $rg(Q_c)$ inf $n, \forall x(t_0) = 0$, l'état $x(t)$ ou $x[k]$ reste dans le sous-espace vectoriel E tel que $dim(E) = q$ engendré par Q_c
- Il existe une base de l'espace d'état permettant de séparer l'état en partie commandable et la partie non commandable

2.11 Interprétation de la commandabilité

Théorème de Wonham :
Pour un système commandable, la commande par retour d'état permet de placer les pôles de la fonction de transfert arbitrairement

2.12 observabilité

— Un système est dit totalement observable SII pour un **état quelconque** x_0, l'observation de $y(t)$ ou de $y[k]$ sur une durée finie permet de déterminer x_0 [12]

— **Critère de Kalman**

Cas continu

Soit

$$Q_c = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ ... \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\boxed{rg(Q_0) = n}$$ [13]

Cas discret

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CF \\ ... \\ CF^{n-1} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\boxed{rg(Q_0) = n}$$

12. Sinon, le système est dit **partiellement observable**

13. n lignes indépendantes. La matrice Q_0 est formée par les vecteurs ligne $(CA^i)_{i\in\{1,n-1\}}$ avec A matrice carrée de taille n et C vecteur ligne de taille n

— **Critère de Popov-Belevich-Hautus**

Cas continu

$$rg(\begin{bmatrix} pI_n - A \\ C \end{bmatrix}) = n$$

14

Cas discret

$$rg(\begin{bmatrix} zI_n - A \\ C \end{bmatrix}) = n$$

15

14. $\forall p \in \mathbb{C}$
15. $\forall z \in \mathbb{C}$

2.13 Forme canonique de Kalman

Soit un système représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$\exists$ un transformation

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\tilde{o}} \\ \tilde{x}_{\tilde{c}\tilde{o}} \\ \tilde{x}_{\tilde{c}o} \end{bmatrix} = Tx(t)$$

T inversible tel que :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x(t)} + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Avec :

— $(\begin{bmatrix} \tilde{A}_{co} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{c\tilde{o}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{B}_{co} \\ \tilde{B}_{c\tilde{o}} \end{bmatrix})$ commandable

— $(\begin{bmatrix} \tilde{A}_{co} & \tilde{A}_{13} \\ 0 & \tilde{A}_{\tilde{c}o} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{C}_{co} & \tilde{C}_{\tilde{c}o} \end{bmatrix})$ observable

— $H(p) = C(pT_n - A)^{-1}B + D = \tilde{C_{co}}(pI_n - \tilde{A}_{co})^{-1}\tilde{B}_{co} + D$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{co} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{c\tilde{o}} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\tilde{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{\tilde{c}\tilde{o}} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{co} \\ \tilde{B}_{c\tilde{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{co} & 0 & \tilde{C}_{\tilde{c}o} & 0 \end{bmatrix}$$

Chapitre 3

Commande des systèmes par approche d'état

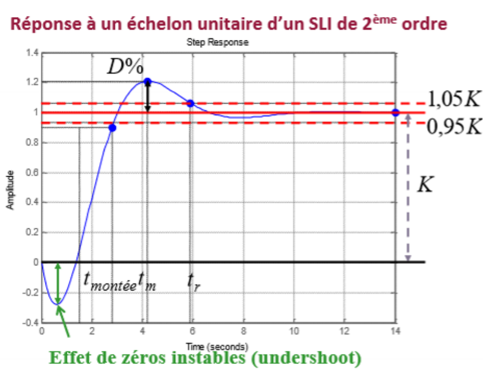
3.1 Rôle du correcteur

- **Stabilité** : $S_p(A)$ [1]
- **Rapidité** :

$$\boxed{D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

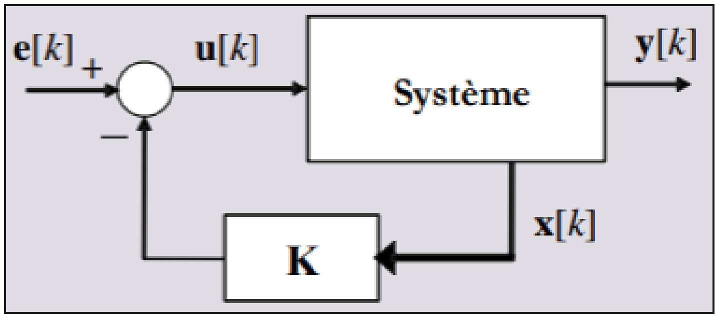
$$\boxed{t_m = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}}$$ [2]

- **Précision** : erreur statique ϵ_0



1. Spectre de la matrice d'évolution du système
2. Avec : $\omega_0 t_m = 3$

3.2 Retour d'état



3.2.1 Cas continu

Soit le système représenté en boucle ouverte :

$$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)}$$

Avec : $x \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}$

En boucle fermée, la commande par retour d'état impose $u(t) = -Kx(t) + e(t)$, $e \in \mathbb{R}$. Il vient :

$$\boxed{\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Be(t)}$$

3.2.2 Cas discret

Soit le système représenté en boucle ouverte :

$$\boxed{x[k+1] = Fx[k] + Gu[k]}$$

Avec : $x \in \mathbb{R}^n, u[k] \in \mathbb{R}$

En boucle fermée, la commande par retour d'état impose $u[k] = -Kx[k] + e[k]$, $e \in \mathbb{R}$. Il vient :

$$\boxed{x[k+1] = (F - GK)x[k] + Be[k]}$$

3.3 Calcul du retour d'état par placement des pôles

C'est le cacul de K en choisissant les valeurs propres de $F - GK$. D'après le théorème de Wonham : il existe une matrice K tq pour tout choix de valeurs propres SSI le système est totalement commandable.
(i.e. $\exists K \in M_n(\mathbb{R})$, on peut choisir les $\lambda_i \in S_p(A - BK)$ SII $\forall \lambda \in S_p(A), Re(\lambda)0)$

3.3.1 Cas continu

$$\boxed{x(t) = e^{(A-BK)(t-t_0)}x(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i(t-t_0)}}$$ [3]

3.3.2 Cas discret

$$\boxed{x[k] = (F - GK)^{k-k_0}x[k_0] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^{(k-k_0)}}$$ [4]

3.3.3 Principe

On cherche à avoir

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & ... & k_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

tel que $\forall i \in \{1, n\}$, les k_i sont les pôles de la fonction de transfert du système et les critères de commandabilité sont respectés soit :

$$\forall \lambda_i \in S_p(A - BK), Re(\lambda_i) < 0$$

3. λ_i vp de $A - BK$ ($\lambda_i \in S_p(A - BK)$)
4. λ_i vp de $F - GK$ ($\lambda_i \in S_p(F - GK)$)

3.3.4 Calcul de K

On veut choisir les λ_i tel que $|\lambda I - (A - BK)| = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$

— Formule d'Ackerman (si $dim(u) = 1$) :

— $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)...(\lambda-\lambda_n) = \lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+ ... + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$

— $P(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + ... + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I_n$

— Soit :
$K = [00...01][B|AB|A^2B|...|A^{n-1}B]P(A)$

— Calcul à partir des valeurs propres ($dim(u) quelconque$)

— Trouver les $(v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(w_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ tel que :
$\forall i \in [\![1, n]\!], (A - \lambda_i I_n)v_i - Bw_i = 0_n$

— Soit :

$$K = \begin{bmatrix} v_1 & ... & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & ... & w_n \end{bmatrix}^{-1}$$

3.3.5 Critères à respecter pour le choix des λ_i

— $\forall \lambda_i \in S_p(A - BK), Re(\lambda_i 0)$

— Les pôles dominants sont tels que $\forall \lambda_i \in S_p(A - BK)$,
$\lambda_{dominant} = max_{i\in[\![1,n]\!]}(Re(\lambda_i))$ [5]

— Plus les λ_i sont éloignés des vp de A, plus les amplitudes des gains de K et donc des commandes $u(t)$ sont forte

5. Pour un système stable

3.3.6 Exemple pour la formule d'Ackerman

On considère une fonction de transfert d'ordre 2 tel que :

$$H(p) = \frac{K}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

Avec p_1 et p_2 les pôles de la fonctionde transfert. On veut :

$$K = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$$

tel que :

$$\boxed{|\lambda I_2 - (A - BK)| = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = \lambda^2 + 2\xi\omega_0\lambda + \omega_0^2}$$

1. On procède par identification :

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 2\xi\omega_0 = -p_1 - p_2 \\ \omega_0^2 = p_1 p_2 \end{cases}$$

2. Les ξ et ω_0 sont trouvés grâce aux équations suivantes :

$$\boxed{D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

$$\boxed{t_m = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}}$$ [6]

3. En résolvant le système d'équations, on trouve la valeur des pôles de K

Pour une FT d'ordre 3, on considère :

$$K = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

On a alors l'équation suivante :

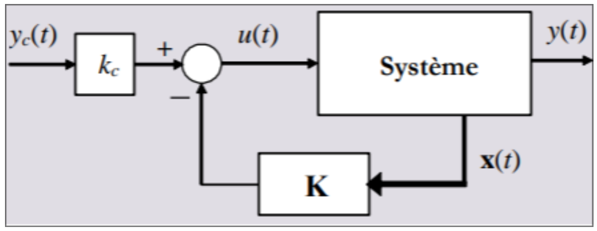
$$|\lambda I_3 - (A - BK)| = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2)(\lambda - p_3) = \\ \lambda^3 + 2\xi\omega_0\lambda^2 + 2\alpha\omega_0^2\lambda + \omega_0^3$$

Comme la valeur α n'est pas atteignable, ce système est résolu à l'aide de fonctions Matlab telles que `place`. **Pour une résolution complète, voir suspension EM, cours CSD03**.

6. Avec : $\omega_0 t_m = 3$

3.4 Calcul du gain statique

On ajoute un gain k_c en entrée de boucle :



De manière à satisfaire le critère de précision ($\epsilon_s = 0$) du système bouclé :

Cas continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bk_c y_c(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Avec : $dim(y) = dim(u) = 1$
En régime permettant, on veut $y(t) = y_c(t) = y_c$
Soit :

$$\boxed{k_c = \frac{-1}{C(A-BK)^{-1}B}}$$

Cas discret

$$\begin{cases} x[k+1] = (F - GK)x[k] + Gk_c y_c[k] \\ y[k] = Cx[k] \end{cases}$$

Avec : $dim(y) = dim(u) = 1$
En régime permettant, on veut $y(t) = y_c(t) = y_c$
Soit :

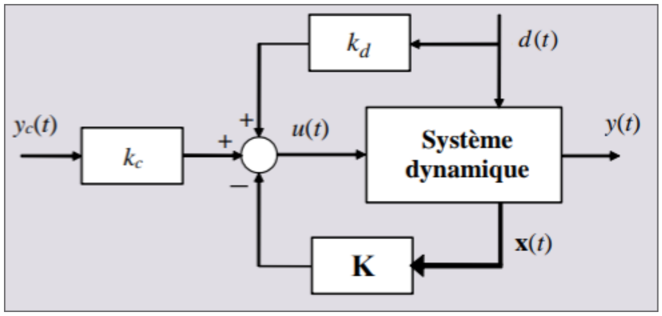
$$\boxed{k_c = \frac{-1}{C(I_n-F+GK)^{-1}G}}$$

[7]

7. Attention : l'erreur statique est non nulle si la perturbation est constante

3.4.1 perturbation constante et mesurable

Ici, on cherche à modéliser l'influence d'une perturbation sur un système bouclé avec un gain statique determiné, de façon à mettre en évidence la remarque émise sur la page précédente.



Système en boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B'd(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Commande :

$u(t) = -Kx(t) + k_c y_c(t) + k_d d(t)$ système en boucle ouverte :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bk_c y_c(t) + (Bk_d + B')d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

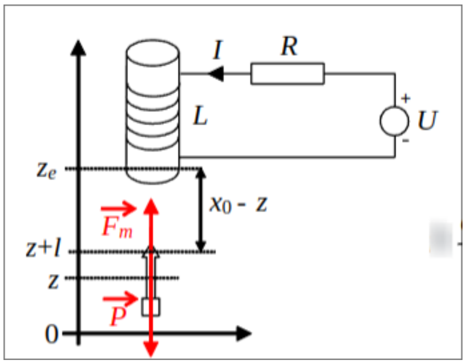
En régime permettant, on veut toujours $y(t) = y_c(t) = y_c$

Soit :

$$\begin{cases} k_c = -[C(A - BK)^{-1}B]^{-1} \\ k_d = -[C(A - BK)^{-1}B]^{-1}[C(A - BK)^{-1}B'] \end{cases}$$

3.4.2 Exemple : suspension magnétique

On considère le système suivant :



(a) Schéma associé au système

$R = 10\ \Omega$

$L = 0{,}01\,H$

$g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$

$i_0 = 0{,}5\ \mathrm{A}$

$x_0 = 0{,}0125\ \mathrm{m}$

$\beta = 4000\ \mathrm{V.m^{-1}}$

(b) Application numérique

FIGURE 3.1 – Sytème

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = U(t)$$ [8]

$$m\frac{d^2z}{dt} = c\frac{I(t)}{(x_0 - z(t)^2} - mg = F_m - mg$$ [9]

Point d'équilibre $\overline{z} = 0$

$$\begin{cases} \overline{U} &= R\overline{I} \\ c\frac{\overline{I}}{x_0^2} - mg &= 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \overline{I} = \frac{mgx_0^2}{c} = i_0 \\ \overline{U} = R\overline{I} = Ri_0 \end{cases}$$

En linéarisant sur le point d'équilibre, on a :

$$\begin{cases} I(t) = \overline{I} + i_1(t) \\ U(t) = \overline{U} + u_0(t) \end{cases}$$

8. Loi des mailles
9. PFD

Equations du système :

$$L\frac{di_1(t)}{dt} + Ri_1(t) = u_1(t)$$

$$m\frac{d^2z}{dt} = g\frac{i_1(t)}{(i_0} + \frac{2g}{x_0}z(t)$$

$$V_z(t) = \beta z(t)$$ [10]

Le vecteur d'état s'écrit :

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

Représentation d'état

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & 1600 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

10. Mesures : $V_z(t)$ et $i_1(t)$

Analyse en boucle ouverte

— **Stabilité :** Calcul des valeurs propres de A

$$S_p(A) = \{-1000; -40; 40\} \implies \text{le système est instable}$$

— **commandabilité :** Calcul de la matrice de commandabilité

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -10^5 & 10^8 \\ 0 & 0 & 2.10^3 \\ 0 & 2.10^3 & -2.10^6 \end{bmatrix}$$

$$rg(Q_c) = 3 \implies \text{le système est commandable}$$

— **Observabilité :** calcul de la matrice d'observabilité Q_0

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4.10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4.10^3 \\ 8.10^4 & 6,4.10^6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$rg(Q_0) = 3 \implies \text{le système est observable}$$

Système en boucle ouverte

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & 1600 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

$$u_1(t) = -Kx(t) + k_c y_c(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + k_c y_c(t)$$

11

11. Commande par retour d'état (bouclage)

Système bouclé[12]

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000-100k_1 & -100k_2 & -100k_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & 1600 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100k_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_c(t)$$

$$V_z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

Cahier des charges
On cherche maintenant à remplir le cahier des charges suivant :

$$\begin{cases} D = 10\% \\ t_m = 0.03s \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \xi = 0.6 \\ \omega_0 = 130 \end{cases}$$

Comme les valeurs propres de A ne vérifient pas le critère de stabilité (40 a une partie réelle positive), on choisit alors comme valeurs propres -1000 et deux valeurs : ω et ξ déterminés grâce au cahier des charges[13] en résolvant le système d'équations . On résoud alors l'équation :

$$|\lambda I_3 - (A - BK)| = (\lambda + 1000)(\lambda^2 + 2 * 0.6 * 130 * \lambda + 130^2)$$

Placement des pôles
Grâce à la fonction `place` de Matlab (par **identification**) :

$$k_1 = 1,560; k_2 = 9,375.10^3; k_3 = 87,25$$

12. On injecte l'expression de u_1
13. Les ξ et ω_0 sont trouvés grâce aux équations suivantes :

$$\boxed{D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

$$\boxed{t_m = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}} \text{ Avec : } \omega_0 t_m = 3$$

Calcul de k_c

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000-100k_1 & -100k_2 & -100k_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & 1600 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100k_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_c(t)$$

$$V_z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4000 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{i_1} \\ \overline{z} \\ \overline{\dot{z}} \end{bmatrix}$$

A l'équilibre

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000-100k_1 & -100k_2 & -100k_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & 1600 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{i_1} \\ \overline{z} \\ \overline{\dot{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100k_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overline{y_c}$$

$$V_z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4000 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{i_1} \\ \overline{z} \\ \overline{\dot{z}} \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{cases} \overline{k_c} = \frac{1000+100k_1\overline{i_1}+100k_2\overline{z}+100k_3\overline{\dot{z}}}{100y_c} & = \\ \overline{\dot{z}} & = & 0 \\ \overline{y_c} & = & -\overline{z} \\ \overline{V_z} & = 4000\overline{z} = -\frac{4000k_c}{800+80k_1-k_2}\overline{y_c} \end{cases}$$

Or on veut que l'érreur statique soit nulle ($\epsilon_s = 0$). On a alors :

$$-\frac{4000k_c}{800+80k_1-k_2} = 1 \iff k_c = -\frac{800+80k_1-k_2}{4000} = 2.125$$

14

14. justifiable par le théorème de la valeur finale, on veut finalement que $\frac{S(p)}{E(p)} = 1$

3.5 Commande par retour d'état des systèmes partiellment commandables

système en boucle ouverte :

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x_1(t)} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Commande par retour d'état :

$$u(t) = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} x(t) + e(t)$$

Boucle fermée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1 K_1 & A_{12} - B_1 K_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + Be(t)$$

3.6 Commande modale

3.6.1 Opérateur q

L'opérateur q désigne l'opérateur dérivée, de telle sorte que l'on ai :

Cas continu

$$\boxed{\forall \vec{x} \in R^n, q\vec{x}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}}$$

Cas discret

$$\boxed{\forall \vec{x} \in R^n, q\vec{x}[n] = \vec{x}[n+1]}$$

3.6.2 Variable q

q en tant que variable **complexe** désigne p ou z selon le domaine

3.6.3 Principe

La commande modale consiste à considérer une nouvelle entrée e telle que :

$$\vec{u} = \vec{e} - K\vec{x}$$

Ce qui donne comme nouvelle représentation d'état :

$$\begin{cases} q\vec{x} = (A - BK)\vec{x} + B\vec{e} \\ \vec{y} = (C - DK)\vec{x} + D\vec{e} \end{cases}$$

Fonction de transfert :

$$H(q) = [(C - DK)(qI_n - (A - BK))^{-1}B + D]E(q)$$ [15]

15. Attention : ici q désigne la variable complexe dans le domaine de Laplace ou de la transformée en Z ($q = p$ dans le domaine de Lapalce et $q = z$ pour la transformée en Z)

3.7 Modification des pôles de la fonction de transfert

Critère de la matrice de commandabilité $N = rg(Q_c)$ [16] avec :

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & ... & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

— Exprimer $\chi_{A-BK}(q) = |qI_n - (A - BK)| = q^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k q^k$ en fonction des valeurs inconnues de K

— Par identification, trouver les éléments de K (système d'équations) à partir des $(a_k)_{k\in N}$ et des pôles choisis arbitrairements

A COMPLETER

16. N : nombre de pôles modifiables

3.8 Commande LQ

3.8.1 Principe

Pour un système tel que :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = \quad -Kx(t) \end{cases}$$

de condition initiale $x(0) = x_0$, on cherche K qui minimise un des critères de performance J :[17]

- Temps de réponse
- Temps de dépassement
- Amplitude du premier dépassement
- Erreur statique
- ...

Représenté par :

$$\boxed{K = min(J) = min(\int_0^{+\infty} x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t))}$$

OU

$$\boxed{K = min(J) = min(\sum_{k=0}^{+\infty} x[k]^T Qx[k] + u[k]^T Ru[k])}$$

Avec : $Q^T = Q$ et $R^T = R$

3.8.2 Solution

$\exists$ une solution (A, B) **stabilisable**, (H, A) **détectable** avec H tel que $Q = H^T H$, la matrice $P^T = P$ unique solution positive de **l'équation algébrique de Riccati** :

$$\boxed{PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0_n}$$

tel qu'on ai :

$$\boxed{K = -R^{-1}B^T P}$$

Avec :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \text{ en boucle ouverte}$$
$$u(t) = -Kux(t) \text{ en boucle fermée}$$

17. Soit u tel que $\forall x_0$ qui minimise le critère

- Démarche de réglage des pondérations
  - Normalisation des variables
  - Limitation du nombre de coefficients et prévisions de leurs influence $\longrightarrow$ Matrices de pondération diagonale
  - Itérations à partir du choix initial
    - Si éléments de $Q \nearrow$, Rapidité $\nearrow$
    - Si éléments de $R \nearrow$, Rapidité $\searrow$
    - Si éléments de $Q \nearrow$, Stabilité $\nearrow$
    - Si éléments de $R \nearrow$, Stabilité $\nearrow$
    - Attention : si le rapport $\frac{Q}{R}$ est trop élevé, stabilité $\searrow$

3.8.3 Commande LQ à l'horizon infini - cas continu

Pour un système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = \qquad Cx(t) \end{cases}$$

Choix du critère :

$$J = \int_0^{+\infty} y(t)^T \tilde{Q} y(t) + u(t)^T R u(t) \text{ Avec : } Q = C^T \tilde{Q} C$$

$$\boxed{u(t) = -Kx(t)} \text{ Avec :}$$

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A,$$
$$P = Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$ [18]

Pour un exemple de commande LQ, voir Commande LQ, cours CSD04

18. Equation de Riccati

3.8.4 Exemple : mouvement latéral d'un avion

Représentation d'état

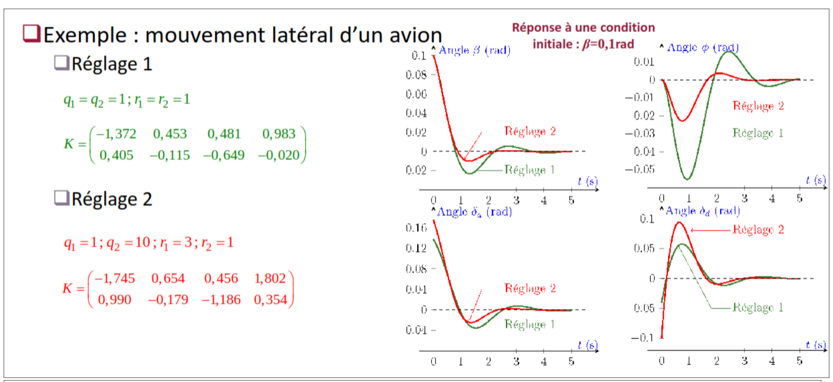
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\beta(t)\\ p(t)\\ r(t)\\ \phi(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0,75 & 0,006 & -1 & 0,0037\\ -12,9 & -0,75 & 0,387 & 0\\ 4,31 & 0,0024 & -0,17 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta(t)\\ p(t)\\ r(t)\\ \phi(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0,0012 & 0,0092\\ 6,05 & 0,952\\ -0,416 & -1,76\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_a(t)\\ \delta_d(t)\end{bmatrix}$$

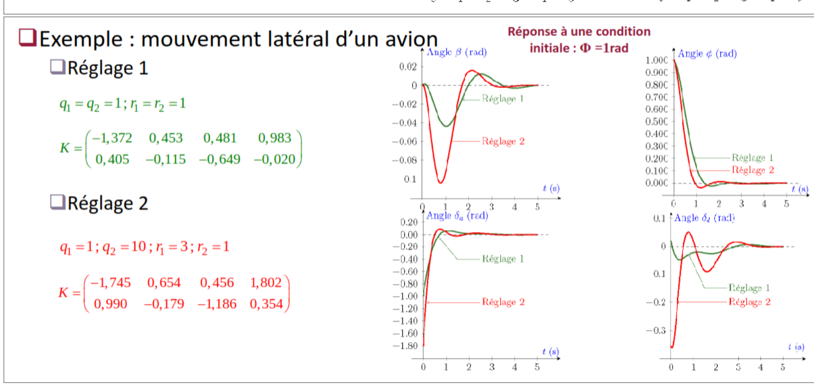
Cahier des charges '

— Temps de réponse à 5% inférieur à $3s$
— Amplitude de dépassement raisonable
— Amortissement raisonable

Critère

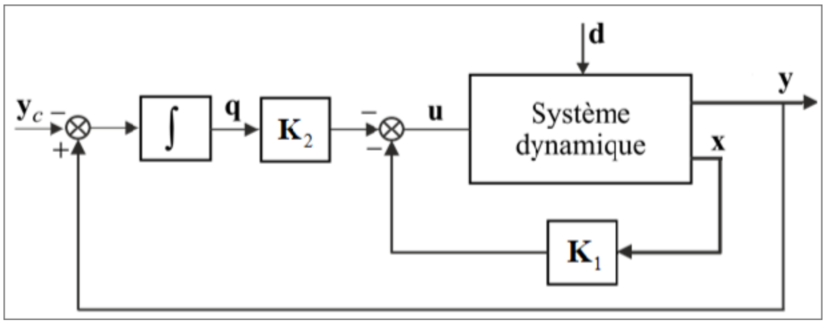
$$J=\int_0^\infty (q_1\beta^2(t)+q_2\phi^2(t)+r_1\delta_a^2(t)+r_2\delta_d^2(t))dt$$





3.9 Commande à action intégrale

3.9.1 Principe



Représentation d'état en boucle ouverte :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B'd(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

L'objectif est d'asservir $y(t)$ **sur** $y_c(t) = y_c$ **malgrès la perturbation** $d(t) = d$ **constante** Action integrale :

$$\boxed{q(t) = \int_0^t (y(\tau) - y_c)d\tau}$$

On inclus alors dans la représentation d'état l'action intégrale q, appelé **système augmenté** :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_n \\ C & 0_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_n \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} B' & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a u(t) + B'_a d_a(t) \\ y_a(t) = C_a x_a(t) \end{cases}$$

Commande par retour d'état

$$u(t) = -Kx_a(t) = -K_1x(t) - K_2q(t)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{1,1} & ... & k_{1,n} & k_{2,1} & ... & k_{2,n} \end{bmatrix}, x_a(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ ... \\ x_n(t) \\ q_1(t) \\ ... \\ q_n(t) \end{bmatrix}$$

On réalise une approche :

— **modale** si (A_a, B_a) commandable

— **LQ** si (A_a, B_a) stabilisable et (H, A_a) détectable avec

  — $J = \int_0^{+\infty} y(t)^T \tilde{Q} y(t) + u(t)^T R u(t)$

  — $Q = H^T H$

Action d'anticipation de la consigne

$$u(t) = -Kx_a(t) = -K_1x(t) - K_2q(t) + K_c y_c(t)$$

En régime permanent

$$\begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ u_c \end{bmatrix}$$

Soit :

$$u_c = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_n \\ I_n \end{bmatrix} y_c = K_c y_c$$

Chapitre 4

Commande par retour d'état avec observateur

4.1 Reconstruction de l'état

En général, le vecteur d'état est inaccessible. Il faut alors observer le système et reconstruire la représentation d'état par le biais de l'observateur comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(z(t) - \hat{z}(t)) \\ \hat{z}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

Erreur de Reconstruction :

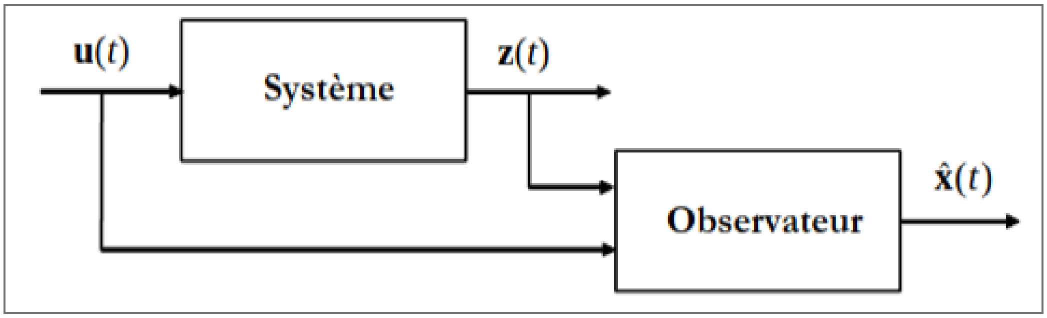
$$\boxed{\epsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)} \; \boxed{\dot{\epsilon}(t) = (A - LC)\epsilon(t)}$$

[1]

1. De même en discret :

$$\begin{cases} \hat{x}[k+1] = F\hat{x}[k] + Gu[k] + L(z[k] - \hat{z}[k]) \\ \hat{z}[k] = C\hat{x}[k] \end{cases}$$

$\epsilon[k] = x[k] - \hat{x}[k]$
$\epsilon[k+1] = (F - LC)\epsilon[k]$



4.2 Calcul du gain L par placement des pôles

4.2.1 Principe

Choix des valeurs propres de $A - LC$ (ou $F - LC$)

Cas continu

$$\boxed{\epsilon(t) = e^{(A-LC)(t-t_0)}\epsilon(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i(t-t_0)}}$$ [2]

Cas Discret

$$\boxed{\epsilon k = (F - LC)^{k-k_0}\epsilon[k_0] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^{k-k_0}}$$ [3]

Calcul de L tel que :

$$\boxed{|\lambda I_n - (A - LC)| = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)}$$

OU

$$\boxed{|\lambda I_n - (F - LC)| = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)}$$

2. Les $(\lambda_i)_{i\in\{1;n\}}$ valeurs propres de $A - LC$
3. Les $(\lambda_i)_{i\in\{1;n\}}$ valeurs propres de $F - LC$