

# Fiche de révision Commande des Systèmes Dynamiques

Alexis GRACIAS

11 novembre 2024

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Structure d'un système asservi</b>	<b>5</b>
1.1	Notion d'automatique . . . . .	5
1.2	Notion de système . . . . .	6
1.3	Modélisation d'un système : . . . . .	7
1.3.1	En continu : . . . . .	7
1.3.2	En Discret : . . . . .	7
1.4	Type de commande : . . . . .	8
1.5	Structure d'un système asservi monovariable	8
1.6	Critère des systèmes asservis . . . . .	10
1.6.1	Rapidité . . . . .	10
1.6.2	Stabilité . . . . .	11
1.6.3	Précision . . . . .	12
1.7	Formule de Black . . . . .	13
1.8	Correcteurs . . . . .	13
1.8.1	Proportionnel . . . . .	14
1.8.2	Intégral . . . . .	14
1.8.3	Dérivé . . . . .	14
1.9	Diagramme de Bode . . . . .	14
1.10	Diagramme de Nyquist . . . . .	15
1.11	Transformée en $z$ . . . . .	16
1.11.1	Principe de fonctionnement . . . . .	16
1.11.2	Propriétés . . . . .	16

<b>2</b>	<b>Représentation d'état, commandabilité, observabilité</b>	<b>17</b>
2.1	Représentation d'état . . . . .	17
2.2	Point d'équilibre . . . . .	19
2.3	Solution de la représentation d'état . . . . .	20
2.3.1	Cas des SLCI . . . . .	20
2.3.2	Cas discret . . . . .	20
2.4	Représentation de la stabilité . . . . .	21
2.5	Modélisation de la stabilité . . . . .	21
2.5.1	Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	21
2.5.2	Stabilité asymptotique . . . . .	21
2.5.3	Stabilité exponentielle . . . . .	21
2.5.4	Stabilité Entrée Bornée Sortie Bornée (EBSB) . . . . .	23
2.6	Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert . . . . .	24
2.7	Passage de la fonction de transfert à la représentation d'état . . . . .	24
2.8	Changement de base . . . . .	26
2.9	commandabilité - systèmes commandables	27
2.10	commandabilité - systèmes partiellement commandables . . . . .	28
2.11	Interprétation de la commandabilité . . . . .	28
2.12	observabilité . . . . .	29
2.13	Forme canonique de Kalman . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Commande des systèmes par approche d'état</b>	<b>32</b>
3.1	Rôle du correcteur . . . . .	32
3.2	Retour d'état . . . . .	33
3.2.1	Cas continu . . . . .	33
3.2.2	Cas discret . . . . .	33

3.3	Calcul du retour d'état par placement des pôles . . . . .	34
3.3.1	Cas continu . . . . .	34
3.3.2	Cas discret . . . . .	34
3.3.3	Principe . . . . .	34
3.3.4	Calcul de $K$ . . . . .	35
3.3.5	Critères à respecter pour le choix des $\lambda_i$ . . . . .	35
3.3.6	Exemple pour la formule d'Ackerman . . . . .	36
3.4	Calcul du gain statique . . . . .	37
3.4.1	perturbation constante et mesurable	38
3.4.2	Exemple : suspension magnétique .	39
3.5	Commande par retour d'état des systèmes partiellement commandables . . . . .	44
3.6	Commande modale . . . . .	45
3.6.1	Opérateur $q$ . . . . .	45
3.6.2	Variable $q$ . . . . .	45
3.6.3	Principe . . . . .	45
3.7	Modification des pôles de la fonction de transfert . . . . .	46
3.8	Commande LQ . . . . .	47
3.8.1	Principe . . . . .	47
3.8.2	Solution . . . . .	47
3.8.3	Commande LQ à l'horizon infini - cas continu . . . . .	48
3.8.4	Exemple : mouvement latéral d'un avion . . . . .	49
3.9	Commande à action intégrale . . . . .	50
3.9.1	Principe . . . . .	50

<b>4</b>	<b>Commande par retour d'état avec observa-</b>	
	<b>teur</b>	<b>52</b>
4.1	Reconstruction de l'état . . . . .	52
4.2	Calcul du gain $L$ par placement des pôles .	53
4.2.1	Principe . . . . .	53

# Chapitre 1

## Structure d'un système asservi

### 1.1 Notion d'automatique

L'automatisme regroupe plusieurs disciplines telles que la **modélisation**, l'**analyse** et la **commande des systèmes dynamiques**. Un système est dit automatique si il peut réaliser un certain nombre d'opération sans l'aide de l'Homme.

Deux grands types de systèmes automatiques :

- La logique combinatoire et séquentielle
- Les systèmes asservis

## 1.2 Notion de système

Un système est un ensemble de composants fonctionnant entre eux pour réaliser un certain nombre de tâches.

- Systèmes **continus**
- Systèmes **linéaires**
- Système **invariants**
- Systèmes **monovariables**
- Systèmes **multivariables**

Continu : un système est dit continu si, pour une entrée  $e$  et une sortie  $s$ , les fonctions  $e$  et  $s$  sont continues sur tout leurs intervalle de définition.

Linéaire : un système est dit linéaire si il respecte la propriété suivante : soit  $I$  et  $J$  les ensembles de définition de  $e$  et  $s$ , respectivement entrée et sortie du système, on a,  $\forall t, u \in I, \forall \lambda, \mu \in R, e(\lambda t + \mu u) = \lambda e(t) + \mu e(u)$ , de même pour la fonction  $s$ . Exmple de non-linéarités : hystérésis, saturation, balours mécaniques, thermiques et électriques

Invariant : le système ne change pas au cours du temps. Par exemple, pas usure dûs aux frottements, pas de fatigue mécanique

Monovariable : une entrée, une sortie

Multivariable : plusieurs entrées, plusieurs sorties

### 1.3 Modélisation d'un système :

Représentation des **SLCI** (pour une sortie y, entrée u) :

#### 1.3.1 En continu :

Equation différentielle du système :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n_d} \alpha_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{n_n} \beta_j u^{(j)}(t)}$$

Transformée de Laplace de l'équation différentielle du système :

$$\sum_{i=0}^{n_d} \alpha_i Y^i(p) = \sum_{j=0}^{n_n} \beta_j U^j(p)$$

Réponse impulsionnelle :

$$\boxed{y(t) = h(t) * u(t) = \int h(\tau) u(\tau - t) d\tau}$$

Fonction de transfert :

$$\boxed{Y(p) = H(p)U(p) \text{ avec : } H(p) = \int h(t)e^{-pt} dt}$$

Représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

#### 1.3.2 En Discret :

Equation aux différences :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n_d} \alpha_i y[k - i] = \sum_{j=0}^{n_n} \beta_j u[k - j]}$$

Réponse impulsionnelle :

$$\boxed{y[k] = h[k] * u[k] = \sum_{i=0} h[k] u[k - i]}$$

Représentation d'état :

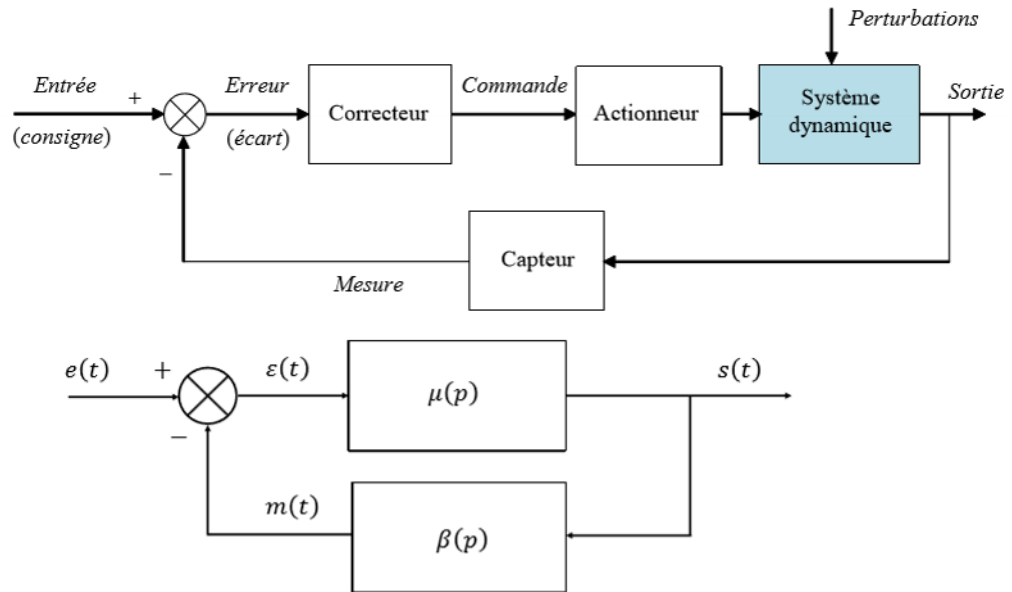
$$\begin{cases} \dot{x}[k] = Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] = Fx[k] + Gu[k] \end{cases}$$



## 1.4 Type de commande :

- Commande passive : modification du système en lui-même.
- Commande en boucle ouverte (BO) : modification de l'entrée en fonction de la sortie
- Commande en boucle fermée (BF) : recalcul de l'entrée en fonction de la valeur mesurée en sortie

## 1.5 Structure d'un système asservi monovariable



Pour un système du second ordre, la fonction de transfert en forme canonique s'écrit de la manière suivante :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\tau}} \\ \xi = \frac{1}{2\sqrt{K\tau}} \end{array} \right.$$

$$— \omega_c = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4K^2\tau^2}}{2}}$$

$$— \Delta\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{360}{2\pi} \arctan(\omega_c\tau) = \frac{\pi}{2} - \frac{360}{2\pi} \arctan\left(\frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4K^2\tau^2}}{2}} \tau\right)$$

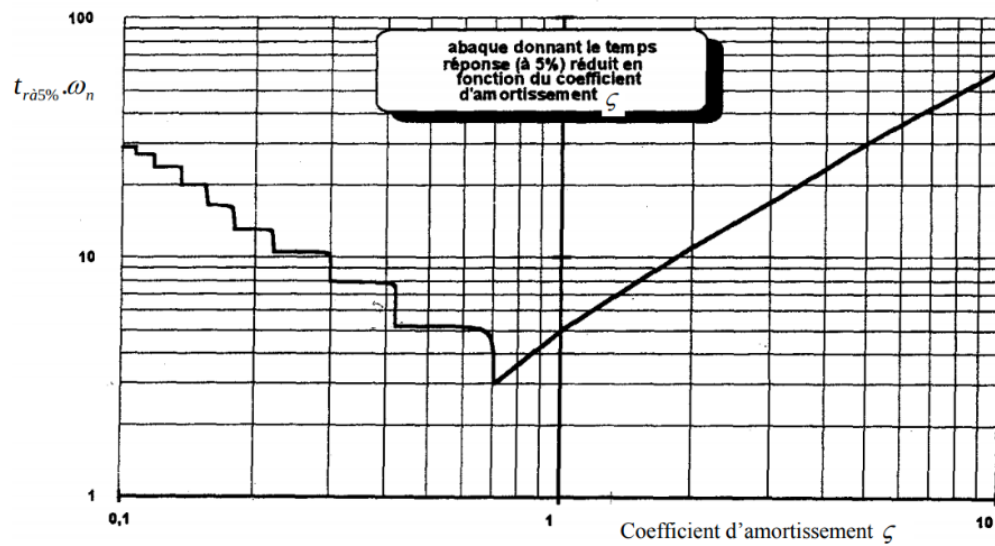
$$— t_m = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$— \omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

## 1.6 Critère des systèmes asservis

### 1.6.1 Rapidité

Temps de réponse à 5%  $t_{r5\%}$  : c'est la valeur temporelle à partir de laquelle la valeur de la sortie prise en  $t = t_m$  est comprise entre 95% et 105% de la valeur finale  $v_f$ .



### 1.6.2 Stabilité

Critère de stabilité : **nombre de dépassements, marge de phase, propriétés sur les pôles.**

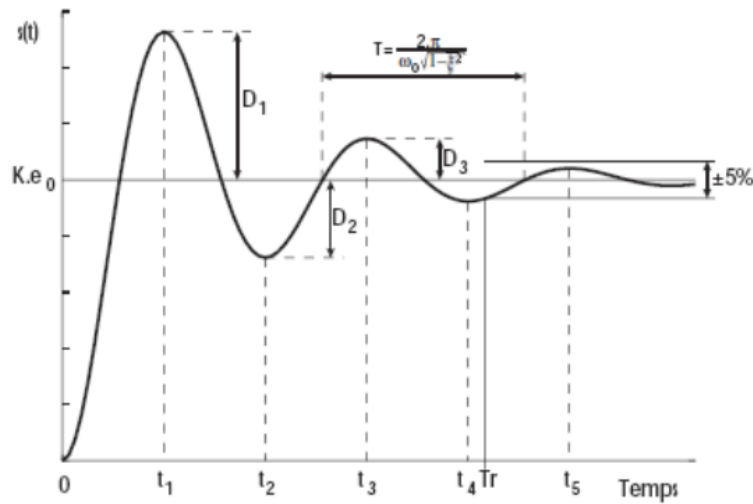
- un système est dit **stable** si ses pôles<sup>1</sup> sont à partie réelle strictement négative. C'est-à-dire que :

Pour une fonction de transfert

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_d} \alpha_i p^i}{\sum_{j=0}^{n_n} \beta_j p^j} \text{ le système est dit stable si}$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \lambda \text{ racine de } \sum_{j=0}^{n_n} \beta_j p^j, \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

- Plus  $M\phi \nearrow$ , plus la stabilité  $\nearrow$  avec  $\tan(\phi) = \frac{\operatorname{Im}(H(j\omega))}{\operatorname{Re}(H(j\omega))}$



Temps entre deux pseudo-périodes :  $t_m = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$

Pseudo pulsation :  $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$

1. Les pôles sont les racines du polynôme au dénominateur de la fonction de transfert sous forme canonique

Temps de la k-ième pseudo-période : Amplitude du k-ième dépassement  
(avec  $E_0$  l'amplitude de l'entrée) :

$$D_k = kE_0 e^{-k \frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

### 1.6.3 Précision

Critère de précision : la valeur finale doit se rapprocher le plus possible de la valeur de consigne. On considère alors un système précis si l'erreur statique<sup>2</sup>  $\epsilon_s = 0$ .

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = v_f$$

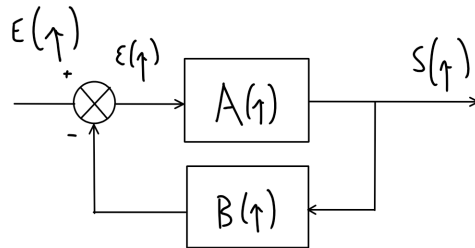
Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pS(p) = v_i$$

---

2. L'erreur statique est la valeur de l'erreur quand le régime est permanent.  $\epsilon_s$  ne dépend pas de  $t$  par conséquent

## 1.7 Formule de Black



On a :  $\epsilon(p) = E(p) - BS(p)$   
 $S(p) = A\epsilon(p)$   
 Donc :  $\frac{S(p)}{A} = E(p) - BS(p) \iff S(p) = \frac{AE(p)}{1+AB}$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)}$$

## 1.8 Correcteurs

Différents types de correcteur :

- Proportionnel
- Dérivé
- Intégral

On peut proposer un correcteur qui est une composition des correcteurs usuels :

- Proportionnel Intégral (PI)
- Dérivé Intégral (DI)
- Proportionnel Intégral Dérivé (PID)

**1.8.1 Proportionnel**

**1.8.2 Intégral**

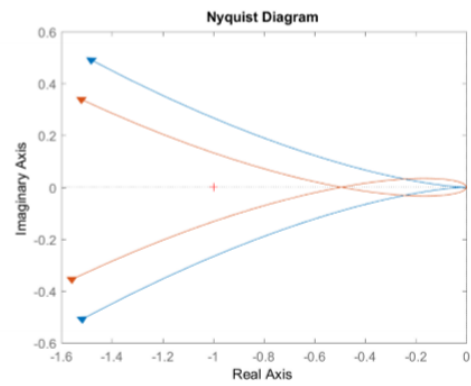
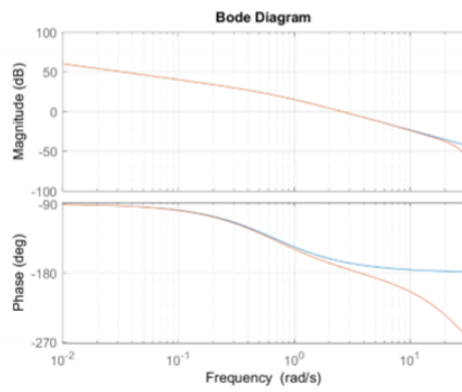
**1.8.3 Dérivé**

**1.9 Diagramme de Bode**

## 1.10 Diagramme de Nyquist

Pour étudier les critères d'un système asservi, on peut aussi utiliser le diagramme de Nyquist

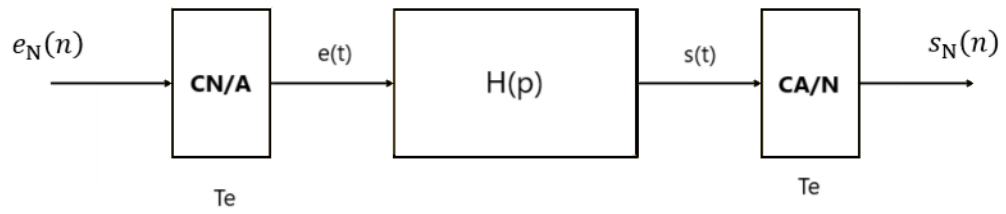
Diagramme  $((Im(H(j\omega)), Re(H(j\omega)))$ .





## 1.11 Transformée en $z$

### 1.11.1 Principe de fonctionnement



### 1.11.2 Propriétés

$$Z(x(t)) = x_N(z)$$

$$Z\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = z^{-1}x_N(z)$$

$$H_N(z) = \frac{S_N(z)}{E_N(z)} = (1 - z^{-1})Z\left(\frac{H(p)}{p}\right)$$

## Chapitre 2

# Représentation d'état, commandabilité, observabilité

### 2.1 Représentation d'état

Cas des systèmes continus

1 2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

Avec :  $x \in R^n, y \in R^p, u \in R^p$

Cas des SLCI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

(2.1)

- 
1. Il n'y a pas unicité de la représentation d'état
  2. Les matrices A, B, C, D sont à coefficient constants

- A : matrice d'évolution  $\dim(A) = n^2$  (matrice carrée)
- B : matrice d'entrée  $\dim(B) = n$  (vecteur colonne)
- C : matrice de sortie  $\dim(C) = m$  (vecteur ligne)
- D : matrice ?? de transmission directe  $D \in \mathbb{R}$  (réel)

**Cas des systèmes discrets**

$$\begin{cases} x[k+1] = f(x[k], u[k], k) \\ y[k] = g(x[k], u[k], k) \end{cases}$$

Avec :  $x \in R^n, y \in R^p, u \in R^p$

**Cas des SLDI**

$$\begin{cases} x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] \end{cases}$$

(2.2)

## 2.2 Point d'équilibre

On dit que le triplet  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$  est un point d'équilibre SSI, il vérifie la condition suivante :

**En continu**

$$\forall t \in R$$

$$\begin{cases} 0 = f(\bar{x}, \bar{u}, t) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}, t) \end{cases}$$

$$\text{Avec : } \frac{dx(t_{eq})}{dt} = \frac{d\bar{x}}{dt} = 0$$

**En discret**

$$\forall k \in N,$$

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}, k) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}, k) \end{cases}$$

$$\text{Avec : } x[k+1] - x[k] = 0$$

## 2.3 Solution de la représentation d'état

### 2.3.1 Cas des SLCI

La représentation d'état des SLCI (2.1) mène à la solution suivante :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_t^{t_0} e^{A(t-t_0)Bu(\tau)} d\tau \quad 3$$

### 2.3.2 Cas discret

La représentation d'état des SLDI (2.2) mène à la solution suivante :

$$x[k] = F^{k-k_0}x[k_0] + \sum_{j=k_0}^{k-1} F^{k-j-1}Gu[j] \quad 4$$

Avec :

$$F = e^{AT_e}$$

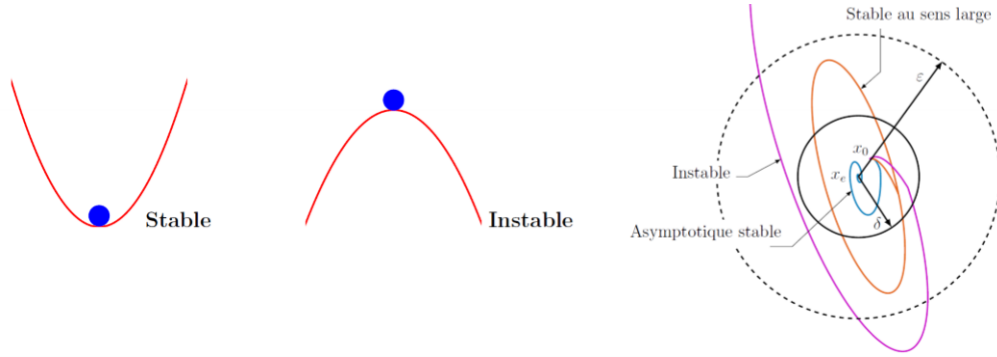
$$G = \int_0^{T_e} e^{A\theta} B d\theta$$

---

3. En considérant  $e^{At}$  comme une combinaison linéaire de  $I_n$  et les  $(A^i)_{i \in \mathbb{N}}$  tel que :  
 $e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = I_n + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots$

4. Raisonnement par récurrence en conjecturant l'expression de  $x[k]$  à partir de (2.2) :  
 $x[k] = Fx[k-1] + Gu[k-1]$   
 $x[k] = F^2x[k-2] + FGx[k-2] + Gu[k-1]$   
 $x[k] = F^3x[k-3] + F^2Gu[k-3] + FGx[k-2] + Gu[k-1]$   
 $\dots$   
 $x[k] = F^{k-k_0}x[k_0] + \sum_{j=k_0}^{k-1} F^{k-j-1}Gu[j]$

## 2.4 Représentation de la stabilité



## 2.5 Modélisation de la stabilité

### 2.5.1 Stabilité au sens de Lyapunov

$\bar{x}$  est stable au sens de Lyapunov SSI :

$$\forall \epsilon > 0, \forall t_0, \exists \delta(\epsilon, t_0), \\ \|\bar{x} - x(t_0)\| < \delta(\epsilon, t_0) \implies \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$$

### 2.5.2 Stabilité asymptotique

$\bar{x}$  est stable asymptotiquement SSI :

$$\exists \delta_1(t_0), \|\bar{x} - x(t_0)\| < \delta_1(t_0) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$

### 2.5.3 Stabilité exponentielle

$\bar{x}$  est exponentiellement stable SSI

—  $\bar{x}$  est asymptotiquement stable

—  $\exists M > 0, \exists \alpha > 0, \forall t > t_0$

$$\|\bar{x} - x(t_0)\| < M \implies \|\bar{x} - x(t)\| < M e^{-\alpha(t-t_0)}$$

— Pour un système **continu** tel que :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

le système est dit **stable** SSI  $\forall \lambda \in Sp(A)$ <sup>5</sup>, on a

$$\boxed{Re(\lambda) < 0}$$
<sup>6</sup>

$\forall \lambda \in Sp(A)$  tel que  $Re(\lambda) = 0$ , les  $\lambda$  ont une multiplicité algébrique (géométrique)

— Pour un système **discret** tel que :

$$\begin{cases} x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] \end{cases}$$

le système est dit **stable** SSI  $\forall \lambda \in Sp(F)$ <sup>7</sup>, on a

$$\boxed{|\lambda| < 1}$$
<sup>8</sup>

$\forall \lambda \in Sp(F)$  tel que  $Re(\lambda) = 1$ , les  $\lambda$  ont une multiplicité algébrique (géométrique)

9

---

5.  $\lambda$  valeur propre de  $A$

6. **Critère de Routh**

7.  $\lambda$  valeur propre de  $F$

8. **Critère de Jury**

9. Dans les deux cas, les systèmes qui vérifient ces conditions sont dit stables **asymptotiquement exponentiellement**

#### 2.5.4 Stabilité Entrée Bornée Sortie Bornée (EBSB)

##### cas continu

Soit  $h$  la fonction de transfert du système défini par (2.1). Ce système est dit de stabilité EBSB SSI :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty}$$

un système causal de fonction de transfert  $H$  est dit de stabilité EBSB SSI **tous les pôles de la fonction  $H(p)$  ont une partie réelle strictement négative (critère de Routh)**

##### cas discret

Soit  $h$  la fonction de transfert du système défini par (2.2). Ce système est dit de stabilité EBSB SSI :

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[k]| dk < +\infty}$$

un système causal de fonction de transfert  $H$  est dit de stabilité EBSB SSI **tous les pôles de la fonction  $H(z)$  ont un module strictement inférieur à 1 (critère de Jury)**



## 2.6 Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert

Cas continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$
$$\implies \boxed{H(s) = C[sI_n - A]^{-1}B + D}$$

Cas discret

$$\begin{cases} x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] \end{cases}$$
$$\implies \boxed{H(z) = C[zI_n - F]^{-1}G + D}$$

## 2.7 Passage de la fonction de transfert à la représentation d'état

Soit une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i(p)p^i}{\sum_{j=0}^n a_j(p)p^j} = \frac{b_0 + b_1p + \dots + b_mp^m}{a_0 + a_1p + \dots + a_{n-1}p^{n-1} + p^n}$$

— Si  $m < n \implies D = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0]$$

— Si  $m = n \implies D = b_n$  et on cherche  $H(p)$  tel que :

$$H(p) = H(p) + D$$

Soit une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(p)p^i}{\sum_{j=0}^n a_j(p)p^j} = \frac{b_0 + b_1p + \dots + b_{n-1}p^{n-1}}{a_0 + a_1p + \dots + a_{n-1}p^{n-1} + p^n}$$

Alors :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0]$$

## 2.8 Changement de base

Cas continu

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = T^{-1}AT\bar{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CT\bar{x}(t) + Du(t) \end{cases} \end{aligned}$$

10

Cas discret

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x[k+1] = T^{-1}FTx[k] + T^{-1}Gu[k] \\ y[k] = CTx[k] + Du[k] \end{cases} \end{aligned}$$

---

10.  $\bar{x} = Tx$

## 2.9 commandabilité - systèmes commandables

Un système est dit commandable si :

- $\exists u(t)$  ou  $\exists u[k]$  qui permet de passer de l'état **quelconque**  $x_0$  à  $x_1$  **quelconque** en un temps fini.
- **Critère de Kalman :**

**Cas continu**

Soit la **matrice de commandabilité**  $Q_c$  :

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in M_{n,n}(C)$$

$$\boxed{rg(Q_c) = n}^{11}$$

**Cas discret**

Soit la **matrice de commandabilité**  $Q_c$  :

$$Q_c = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix} \in M_{n,n}(C)$$

$$\boxed{rg(Q_c) = n}$$

- **Critère de Popov-Belevich-Hautus**

**Cas continu**

$$\forall p \in \mathbb{C}, rg([pI_n - A \quad B]) = n$$

**Cas discret**

$$\forall z \in \mathbb{C}, rg([zI_n - F \quad G]) = n$$

---

11.  $n$  colonnes indépendantes. La matrice  $Q_c$  est formée par les vecteurs  $(A^i B)_{i \in \mathbb{N}}$  avec  $A$  une matrice carrée de taille  $n$  et  $B$  un vecteur colonne de taille  $n$

## 2.10 commandabilité - systèmes partiellement commandables

- Un système est dit partiellement commandable SII  $rg(Q_c) \inf n, \forall x(t_0) = 0$ , l'état  $x(t)$  ou  $x[k]$  reste dans le sous-espace vectoriel  $E$  tel que  $dim(E) = q$  engendré par  $Q_c$
- Il existe une base de l'espace d'état permettant de séparer l'état en partie commandable et la partie non commandable

## 2.11 Interprétation de la commandabilité

### **Théorème de Wonham :**

Pour un système commandable, la commande par retour d'état permet de placer les pôles de la fonction de transfert arbitrairement

## 2.12 observabilité

- Un système est dit totalement observable SII pour un **état quelconque**  $x_0$ , l'observation de  $y(t)$  ou de  $y[k]$  sur une durée finie permet de déterminer  $x_0$  <sup>12</sup>
- **Critère de Kalman**

Cas continu

Soit

$$Q_c = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\boxed{rg(Q_0) = n}^{13}$$

Cas discret

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CF \\ \dots \\ CF^{n-1} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\boxed{rg(Q_0) = n}$$

- **Critère de Popov-Belevich-Hautus**

Cas continu

$$rg\left(\begin{bmatrix} pI_n - A \\ C \end{bmatrix}\right) = n$$

14

---

12. Sinon, le système est dit **partiellement observable**

13.  $n$  lignes indépendantes. La matrice  $Q_0$  est formée par les vecteurs ligne  $(CA^i)_{i \in \{1, n-1\}}$  avec  $A$  matrice carrée de taille  $n$  et  $C$  vecteur ligne de taille  $n$

14.  $\forall p \in \mathbb{C}$

**Cas discret**

$$rg\left(\begin{bmatrix} zI_n - A \\ C \end{bmatrix}\right) = n$$

15

---

15.  $\forall z \in \mathbb{C}$

## 2.13 Forme canonique de Kalman

Soit un système représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$\exists$  une transformation

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\tilde{o}} \\ \tilde{x}_{\tilde{c}o} \\ \tilde{x}_{\tilde{c}\tilde{o}} \end{bmatrix} = Tx(t)$$

$T$  inversible tel que :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Avec :

—  $(\begin{bmatrix} \tilde{A}_{co} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{c\tilde{o}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{B}_{co} \\ \tilde{B}_{c\tilde{o}} \end{bmatrix})$  commandable

—  $(\begin{bmatrix} \tilde{A}_{co} & \tilde{A}_{13} \\ 0 & \tilde{A}_{\tilde{c}o} \end{bmatrix}, [\tilde{C}_{co} \quad \tilde{C}_{\tilde{c}o}])$  observable

—  $H(p) = C(pT_n - A)^{-1}B + D = \tilde{C}_{co}(pI_n - \tilde{A}_{co})^{-1}\tilde{B}_{co} + D$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{co} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{c\tilde{o}} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\tilde{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{\tilde{c}\tilde{o}} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{co} \\ \tilde{B}_{c\tilde{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [\tilde{C}_{co} \quad 0 \quad \tilde{C}_{\tilde{c}o} \quad 0]$$



## Chapitre 3

# Commande des systèmes par approche d'état

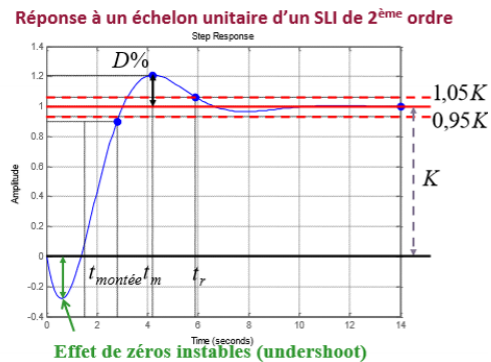
### 3.1 Rôle du correcteur

- Stabilité :  $S_p(A)$ <sup>1</sup>
- Rapidité :

$$D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

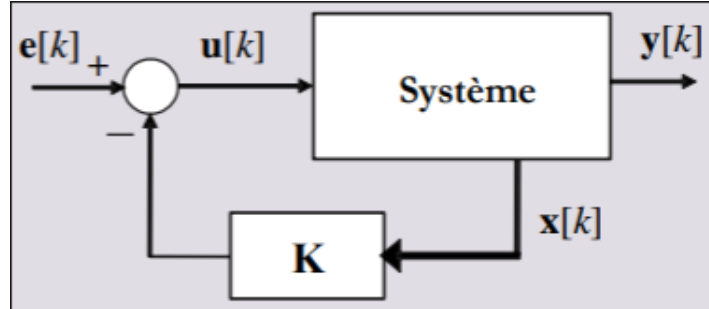
$$t_m = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

- Précision : erreur statique  $\epsilon_0$



- 
1. Spectre de la matrice d'évolution du système
  2. Avec :  $\omega_0 t_m = 3$

## 3.2 Retour d'état



### 3.2.1 Cas continu

Soit le système représenté en boucle ouverte :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Avec :  $x \in R^n, u(t) \in R^m$

En boucle fermée, la commande par retour d'état impose  $u(t) = -Kx(t) + e(t)$ . Il vient :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Be(t)$$

### 3.2.2 Cas discret

Soit le système représenté en boucle ouverte :

$$x[k+1] = Fx[k] + Gu[k]$$

Avec :  $x \in R^n, u[k] \in R^m$

En boucle fermée, la commande par retour d'état impose  $u[k] = -Kx[k] + e[k]$ . Il vient :

$$x[k+1] = (F - GK)x[k] + Be[k]$$

### 3.3 Calcul du retour d'état par placement des pôles

C'est le calcul de  $K$  en choisissant les valeurs propres de  $F - GK$ . D'après le **théorème de Wonham** : il existe une matrice  $K$  tq pour tout choix de valeurs propres SSI le système est totalement commandable.

(i.e.  $\exists K \in M_n(R)$ , on peut choisir les  $\lambda_i \in S_p(A - BK)$  SII  $\forall \lambda \in S_p(A), \text{Re}(\lambda) < 0$ )

#### 3.3.1 Cas continu

$$x(t) = e^{(A-BK)(t-t_0)} x(t_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i(t-t_0)} \quad 3$$

#### 3.3.2 Cas discret

$$x[k] = (F - GK)^{k-k_0} x[k_0] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^{(k-k_0)} \quad 4$$

#### 3.3.3 Principe

On cherche à avoir

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

tel que  $\forall i \in \{1, n\}$ , les  $k_i$  sont les pôles de la fonction de transfert du système et les critères de commandabilité sont respectés soit :

$$\forall \lambda_i \in S_p(A - BK), \text{Re}(\lambda_i) < 0$$

---

3.  $\lambda_i$  vp de  $A - BK$  ( $\lambda_i \in S_p(A - BK)$ )

4.  $\lambda_i$  vp de  $F - GK$  ( $\lambda_i \in S_p(F - GK)$ )

### 3.3.4 Calcul de $K$

On veut choisir les  $\lambda_i$  tel que  $|\lambda I - (A - BK)| = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$

— **Formule d'Ackerman** (si  $\dim(u) = 1$ ) :

$$— (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$$

$$— P(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I_n$$

— Soit :

$$K = [00 \dots 01] [B | AB | A^2 B | \dots | A^{n-1} B] P(A)$$

— **Calcul à partir des valeurs propres** ( $\dim(u)$  quelconque)

— Trouver les  $(v_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  et  $(w_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (A - \lambda_i I_n) v_i - B w_i = 0_n$$

— Soit :

$$K = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix}^{-1}$$

### 3.3.5 Critères à respecter pour le choix des $\lambda_i$

—  $\forall \lambda_i \in S_p(A - BK), \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$

— Les pôles dominants sont tels que  $\forall \lambda_i \in S_p(A - BK), \lambda_{\text{dominant}} = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (\operatorname{Re}(\lambda_i))$ <sup>5</sup>

— Plus les  $\lambda_i$  sont éloignés des vp de A, plus les amplitudes des gains de  $K$  et donc des commandes  $u(t)$  sont forte

---

5. Pour un système stable

### 3.3.6 Exemple pour la formule d'Ackerman

On considère une fonction de transfert d'ordre 2 tel que :

$$H(p) = \frac{K}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

Avec  $p_1$  et  $p_2$  les pôles de la fonction de transfert. On veut :

$$K = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$$

tel que :

$$\boxed{|\lambda I_2 - (A - BK)| = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = \lambda^2 + 2\xi\omega_0\lambda + \omega_0^2}$$

1. On procède par identification :

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 2\xi\omega_0 = -p_1 - p_2 \\ \omega_0^2 = p_1 p_2 \end{cases}$$

2. Les  $\xi$  et  $\omega_0$  sont trouvés grâce aux équations suivantes :

$$\boxed{D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

$$\boxed{t_m = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}}$$
<sup>6</sup>

3. En résolvant le système d'équations, on trouve la valeur des pôles de  $K$

Pour une FT d'ordre 3, on considère :

$$K = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

On a alors l'équation suivante :

$$\begin{aligned} |\lambda I_3 - (A - BK)| &= (\lambda - p_1)(\lambda - p_2)(\lambda - p_3) = \\ &\lambda^3 + 2\xi\omega_0\lambda^2 + 2\alpha\omega_0^2\lambda + \omega_0^3 \end{aligned}$$

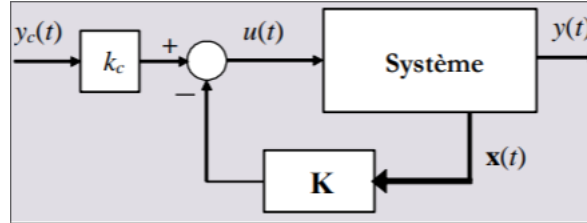
Comme la valeur  $\alpha$  n'est pas atteignable, ce système est résolu à l'aide de fonctions Matlab telles que `place`. **Pour une résolution complète, voir suspension EM, cours CSD03.**

---

6. Avec :  $\omega_0 t_m = 3$

### 3.4 Calcul du gain statique

On ajoute un gain  $k_c$  en entrée de boucle :



De manière à satisfaire le critère de précision ( $\epsilon_s = 0$ ) du système bouclé :

**Cas continu**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bk_c y_c(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Avec :  $\dim(y) = \dim(u) = 1$

En régime permanent, on veut  $y(t) = y_c(t) = y_c$

Soit :

$$k_c = \frac{-1}{C(A - BK)^{-1}B}$$

**Cas discret**

$$\begin{cases} x[k+1] = (F - GK)x[k] + Gk_c y_c[k] \\ y[k] = Cx[k] \end{cases}$$

Avec :  $\dim(y) = \dim(u) = 1$

En régime permanent, on veut  $y(t) = y_c(t) = y_c$

Soit :

$$k_c = \frac{-1}{C(I_n - F + GK)^{-1}G}$$

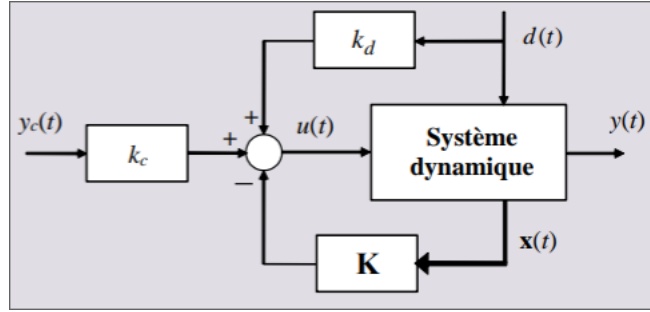
7

---

7. Attention : l'erreur statique est non nulle si la perturbation est constante

### 3.4.1 perturbation constante et mesurable

Ici, on cherche à modéliser l'influence d'une perturbation sur un système bouclé avec un gain statique déterminé, de façon à mettre en évidence la remarque émise sur la page précédente.



Système en boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B'd(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Commande :

$u(t) = -Kx(t) + k_c y_c(t) + k_d d(t)$  système en boucle ouverte :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bk_c y_c(t) + (Bk_d + B')d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

En régime permanent, on veut toujours  $y(t) = y_c(t) = y_c$

Soit :

$$\begin{cases} k_c = -[C(A - BK)^{-1}B]^{-1} \\ k_d = -[C(A - BK)^{-1}B]^{-1}[C(A - BK)^{-1}B'] \end{cases}$$

### 3.4.2 Exemple : suspension magnétique

On considère le système suivant :

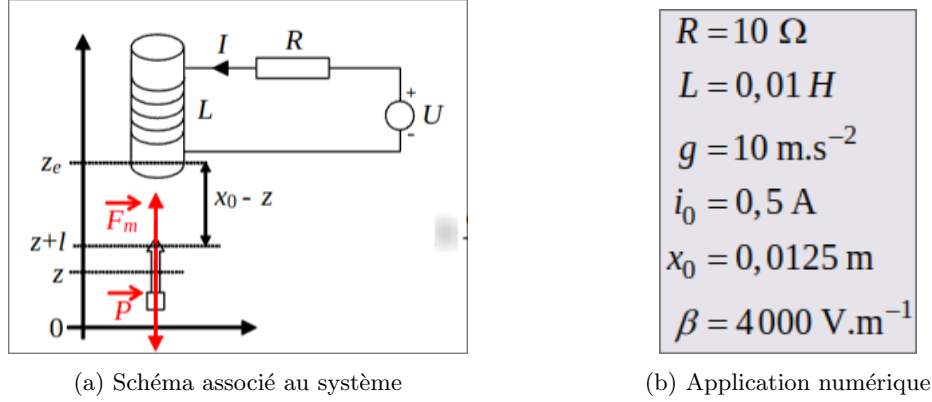


FIGURE 3.1 – Sytème

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = U(t) \quad ^8$$

$$m \frac{d^2 z}{dt} = c \frac{I(t)}{(x_0 - z(t))^2} - mg = F_m - mg \quad ^9$$

Point d'équilibre  $\bar{z} = 0$

$$\begin{cases} \bar{U} = R\bar{I} \\ c \frac{\bar{I}}{x_0^2} - mg = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \bar{I} = \frac{mgx_0^2}{c} = i_0 \\ \bar{U} = R\bar{I} = Ri_0 \end{cases}$$

En linéarisant sur le point d'équilibre, on a :

$$\begin{cases} I(t) = \bar{I} + i_1(t) \\ U(t) = \bar{U} + u_0(t) \end{cases}$$

---

8. Loi des mailles

9. PFD



Equations du système :

$$L \frac{di_1(t)}{dt} + Ri_1(t) = u_1(t)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = g \frac{i_1(t)}{i_0} + \frac{2g}{x_0} z(t)$$

$$V_z(t) = \beta z(t) \text{ }^{10}$$

Le vecteur d'état s'écrit :

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

**Représentation d'état**

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & 1600 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

---

10. Mesures :  $V_z(t)$  et  $i_1(t)$

## Analyse en boucle ouverte

— **Stabilité** : Calcul des valeurs propres de A

$$S_p(A) = \{-1000; -40; 40\} \implies \text{le système est instable}$$

— **commandabilité** : Calcul de la matrice de commandabilité

$$Q_c = [A \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 100 & -10^5 & 10^8 \\ 0 & 0 & 2.10^3 \\ 0 & 2.10^3 & -2.10^6 \end{bmatrix}$$

$$rg(Q_c) = 3 \implies \text{le système est commandable}$$

— **Observabilité** : calcul de la matrice d'observabilité  $Q_0$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4.10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4.10^3 \\ 8.10^4 & 6,4.10^6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$rg(Q_0) = 3 \implies \text{le système est observable}$$

## Système en boucle ouverte

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & 1600 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

$$u_1(t) = -Kx(t) + k_c y_c(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + k_c y_c(t)$$

## Système bouclé<sup>12</sup>

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 - 100k_1 & -100k_2 & -100k_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & 1600 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100k_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_c(t)$$

$$V_z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

## Cahier des charges

On cherche maintenant à remplir le cahier des charges suivant :

$$\begin{cases} D = 10\% \\ t_m = 0.03s \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \xi = 0.6 \\ \omega_0 = 130 \end{cases}$$

Comme les valeurs propres de  $A$  ne vérifient pas le critère de stabilité (40 a une partie réelle positive), on choisit alors comme valeurs propres -1000 et deux valeurs :  $\omega$  et  $\xi$  déterminés grâce au cahier des charges<sup>13</sup> en résolvant le système d'équations . On résoud alors l'équation :

$$|\lambda I_3 - (A - BK)| = (\lambda + 1000)(\lambda^2 + 2 * 0.6 * 130 * \lambda + 130^2)$$

## Placement des pôles

Grâce à la fonction `place` de Matlab (par **identification**) :

$$k_1 = 1,560; k_2 = 9,375.10^3; k_3 = 87,25$$

---

12. On injecte l'expression de  $u_1$

13. Les  $\xi$  et  $\omega_0$  sont trouvés grâce aux équations suivantes :

$$D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \text{ Avec : } \omega_0 t_m = 3$$

Calcul de  $k_c$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 - 100k_1 & -100k_2 & -100k_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & 1600 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100k_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_c(t)$$

$$V_z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \bar{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{bmatrix}$$

En régime permanent :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 - 100k_1 & -100k_2 & -100k_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & 1600 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100k_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{y}_c$$

$$V_z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \bar{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{cases} \bar{\dot{z}} = 0 \\ \dot{i}_1 = -80\bar{z} \\ \bar{V}_z = 4000\bar{z} = -\frac{4000k_c}{800+80k_1-k_2}\bar{y}_c \end{cases}$$

Or on veut que l'erreur statique soit nulle ( $\epsilon_s = 0$ ). On a alors :

$$-\frac{4000k_c}{800+80k_1-k_2} = 1 \iff k_c = -\frac{800+80k_1-k_2}{4000} = 2.125$$

### 3.5 Commande par retour d'état des systèmes partiellement commandables

système en boucle ouverte :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Commande par retour d'état :

$$u(t) = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} x(t) + e(t)$$

Boucle fermée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1 K_1 & A_{12} - B_1 K_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + B e(t)$$

## 3.6 Commande modale

### 3.6.1 Opérateur $q$

L'opérateur  $q$  désigne l'opérateur dérivée, de telle sorte que l'on ait :

Cas continu

$$\forall \vec{x} \in R^n, q\vec{x}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

Cas discret

$$\forall \vec{x} \in R^n, q\vec{x}[n] = \vec{x}[n+1]$$

### 3.6.2 Variable $q$

$q$  en tant que variable **complexe** désigne  $p$  ou  $z$  selon le domaine

### 3.6.3 Principe

La commande modale consiste à considérer une nouvelle entrée  $\vec{e}$  telle que :

$$\vec{u} = \vec{e} - K\vec{x}$$

Ce qui donne comme nouvelle représentation d'état :

$$\begin{cases} q\vec{x} = (A - BK)\vec{x} + B\vec{e} \\ \vec{y} = (C - DK)\vec{x} + D\vec{e} \end{cases}$$

Fonction de transfert :

$$H(q) = [(C - DK)(qI_n - (A - BK))^{-1}B + D]E(q)^{14}$$

---

14. Attention : ici  $q$  désigne la variable complexe dans le domaine de Laplace ou de la transformée en  $Z$  ( $q = p$  dans le domaine de Laplace et  $q = z$  pour la transformée en  $Z$ )

### 3.7 Modification des pôles de la fonction de transfert

Critère de la matrice de commandabilité  $N = rg(Q_c)$ <sup>15</sup> avec :

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- Exprimer  $\chi_{A-BK}(q) = |qI_n - (A - BK)| = q^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k q^k$  en fonction des valeurs inconnues de  $K$
- Par identification, trouver les éléments de  $K$  (système d'équations) à partir des  $(a_k)_{k \in N}$  et des pôles choisis arbitrairement

A COMPLETER

---

15.  $N$  : nombre de pôles modifiables

## 3.8 Commande LQ

### 3.8.1 Principe

Pour un système tel que :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = -Kx(t) \end{cases}$$

de condition initiale  $x(0) = x_0$ , on cherche  $K$  qui minimise un des critères de performance  $J$  :<sup>16</sup>

- Temps de réponse
- Temps de dépassement
- Amplitude du premier dépassement
- Erreur statique
- ...

Représenté par :

$$K = \min(J) = \min(\int_0^{+\infty} x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t))$$

OU

$$K = \min(J) = \min(\sum_{k=0}^{+\infty} x[k]^T Q x[k] + u[k]^T R u[k])$$

Avec :  $Q^T = Q$  et  $R^T = R$

### 3.8.2 Solution

$\exists$  une solution  $(A, B)$  **stabilisable**,  $(H, A)$  **déTECTABLE** avec  $H$  tel que  $Q = H^T H$ ,  $P^T = P$  unique solution positive de l'équation algébrique de Riccati :

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0_n$$

tel qu'on a la solution :

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T P$$

Avec :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \text{ en boucle ouverte}$$

---

16. Soit  $u$  tel que  $\forall x_0$  qui minimise le critère



- Démarche de réglage des pondérations
  - Normalisation des variables
  - Limitation du nombre de coefficients et prévisions de leurs influence  $\rightarrow$  Matrices de pondération diagonale
  - Itérations à partir du choix initial
    - Si éléments de  $Q \nearrow$ , Rapidité  $\nearrow$
    - Si éléments de  $R \nearrow$ , Rapidité  $\searrow$

### 3.8.3 Commande LQ à l'horizon infini - cas continu

Pour un système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Choix du critère :

$$J = \int_0^{+\infty} y(t)^T \tilde{Q} y(t) + u(t)^T R u(t) \text{ Avec : } Q = C^T \tilde{Q} C$$

$$\boxed{u(t) = -Kx(t)} \text{ Avec :}$$

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A, \\ P = Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A^{17}$$

Pour un exemple de commande LQ, voir Commande LQ, cours CSD04

---

17. Equation de Riccati

### 3.8.4 Exemple : mouvement latéral d'un avion

#### Représentation d'état

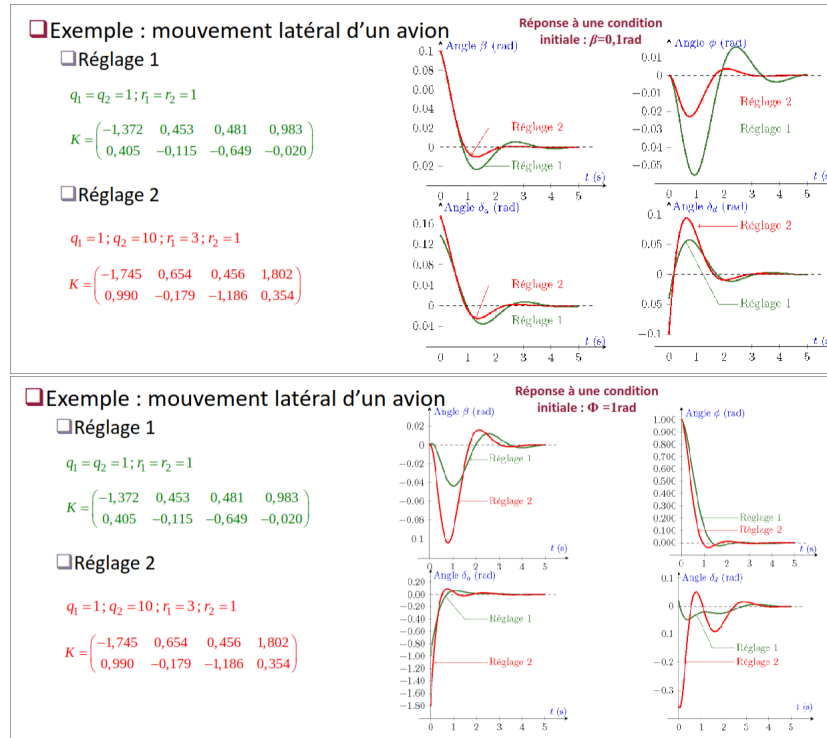
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ p(t) \\ r(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,75 & 0,006 & -1 & 0,0037 \\ -12,9 & -0,75 & 0,387 & 0 \\ 4,31 & 0,0024 & -0,17 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ p(t) \\ r(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0012 & 0,0092 \\ 6,05 & 0,952 \\ -0,416 & -1,76 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a(t) \\ \delta_d(t) \end{bmatrix}$$

#### Cahier des charges ‘

- Temps de réponse à 5% inférieur à 3s
- Amplitude de dépassement raisonnable
- Amortissement raisonnable

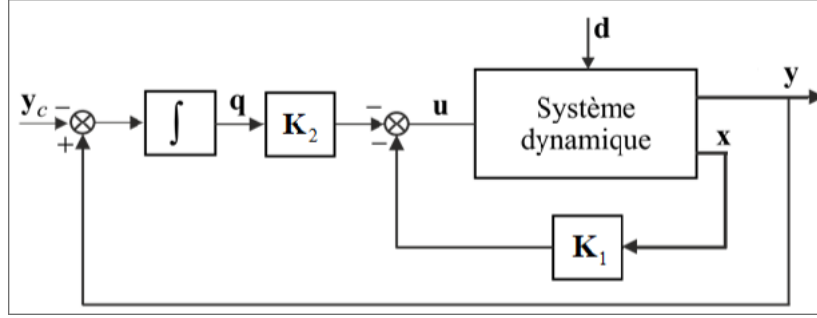
#### Critère

$$J = \int_0^\infty (q_1 \beta^2(t) + q_2 \phi^2(t) + r_1 \delta_a^2(t) + r_2 \delta_d^2(t)) dt$$



## 3.9 Commande à action intégrale

### 3.9.1 Principe



Représentation d'état en boucle ouverte :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B'd(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

**L'objectif est d'asservir  $y(t)$  sur  $y_c(t) = y_c$  malgré la perturbation  $d(t) = d$  constante** Action intégrale :

$$q(t) = \int_0^t (y(\tau) - y_c) d\tau$$

On inclut alors dans la représentation d'état l'action intégrale  $q$ , appelé **système augmenté** :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_n \\ C & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_n \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} B' & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [C \quad 0_n] \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a u(t) + B'_a d_a(t) \\ y_a(t) = C_a x_a(t) \end{cases}$$

### Commande par retour d'état

$$u(t) = -Kx_a(t) = -K_1x(t) - K_2q(t)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{1,n} & k_{2,1} & \dots & k_{2,n} \end{bmatrix}, x_a(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \\ q_1(t) \\ \dots \\ q_n(t) \end{bmatrix}$$

On réalise une approche :

- **modale** si  $(A_a, B_a)$  commandable
- **LQ** si  $(A_a, B_a)$  stabilisable et  $(H, A_a)$  détectable avec
- $J = \int_0^{+\infty} y(t)^T \tilde{Q} y(t) + u(t)^T R u(t)$
- $Q = H^T H$

### Action d'anticipation de la consigne

$$u(t) = -Kx_a(t) = -K_1x(t) - K_2q(t) + K_c y_c(t)$$

### En régime permanent

$$\begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ u_c \end{bmatrix}$$

Soit :

$$u_c = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_n \\ I_n \end{bmatrix} y_c = K_c y_c$$

## Chapitre 4

# Commande par retour d'état avec observateur

### 4.1 Reconstruction de l'état

En général, le vecteur d'état est inaccessible. Il faut alors observer le système et reconstruire la représentation d'état par le biais de l'observateur comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(z(t) - \hat{z}(t)) \\ \hat{z}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

Erreur de Reconstruction :

$$\boxed{\epsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)} \quad \boxed{\dot{\epsilon}(t) = (A - LC)\epsilon(t)}$$

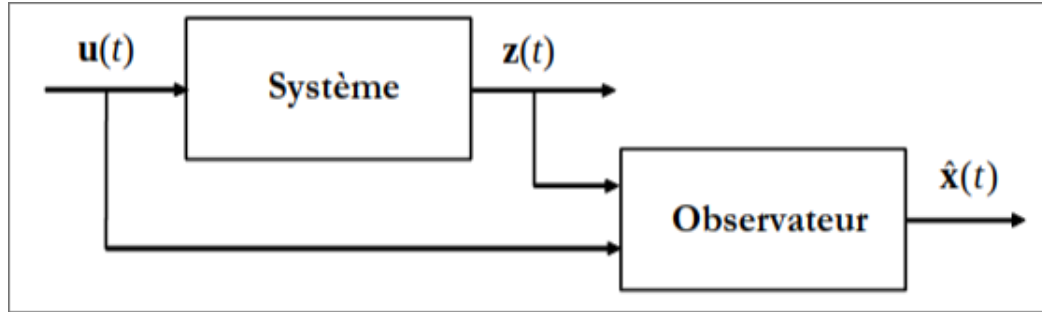
1

---

1. De même en discret :

$$\begin{cases} \hat{x}[k+1] = F\hat{x}[k] + Gu[k] + L(z[k] - \hat{z}[k]) \\ \hat{z}[k] = C\hat{x}[k] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \epsilon[k] &= x[k] - \hat{x}[k] \\ \epsilon[k+1] &= (F - LC)\epsilon[k] \end{aligned}$$



## 4.2 Calcul du gain L par placement des pôles

### 4.2.1 Principe

Choix des valeurs propres de  $A - LC$  (ou  $F - LC$ )

**Cas continu**

$$\epsilon(t) = e^{(A-LC)(t-t_0)} \epsilon(t_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i(t-t_0)} \quad 2$$

**Cas Discret**

$$\epsilon k = (F - LC)^{k-k_0} \epsilon[k_0] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^{k-k_0} \quad 3$$

Calcul de  $L$  tel que :

$$|\lambda I_n - (A - LC)| = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$$

OU

$$|\lambda I_n - (F - LC)| = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$$

---

2. Les  $(\lambda_i)_{i \in \{1;n\}}$  valeurs propres de  $A - LC$

3. Les  $(\lambda_i)_{i \in \{1;n\}}$  valeurs propres de  $F - LC$