Fiche de révision Convergence, Intégrales, Probabilités

Alexis GRACIAS

13 décembre 2024

Table des matières

Introduction

Chapitre 1

Topologie

1.1 Espaces vectoriels normés

Dans toute la suite du chapitre, on notera $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definition 1: Espace vectoriel normé

Un K-espace vectoriel E est dit normé si il est muni d'une norme, c'est-à-dire d'une application $\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}^+$ qui satisfait les conditions suivantes :

— **Séparation**

$$\forall x \in E, \mathcal{N}(x) = 0 \implies x = 0_E$$

— **Homogénéité**

$$\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}, \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$$

— **Sous-additivité (inégalité triangulaire)**

$$\forall (x, y) \in E^2, \mathcal{N}(x + y) < \mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y)$$

La **norme euclidienne d'ordre p** dans $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{||x||_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_p|^p} = (\sum_{k=1}^{n} |x_p|^p)^{\frac{1}{p}}} \tag{1.1}$$

avec

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix}^T$$

ou T désigne l'opérateur transpose dans $\mathbb{R}^n$. De plus, on définit la **norme infinie** :

$$\boxed{||x||_\infty = max\{x_1, x_2, ..., x_n\}} \tag{1.2}$$

1.2 Espaces métrique

Definition 2: Espace métrique

On note (E, d) un espace métrique (E ensemble et d la distance définie pour tout éléments de E). C'est un espace vectoriel au sein duquel la notion de distance est bien définie pour tout éléments de E. L'application d satisfait les conditions suivantes :

— **Symétrie**
$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$$

— **Séparation**
$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y$$

— **Inégalité triangulaire**
$$\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) < d(x, z) + d(z, y)$$

1.3 Ouverts, fermés, boules

Definition 3: Boules

Pour un espace métrique (X, d), on définit :

— **Boule ouverte, centre x, rayon $r > 0$**
$$B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\} \tag{1.3}$$

— **Boule fermée, centre x, rayon $r \geq 0$**
$$B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) \leq r\} \tag{1.4}$$

— **Sphère de centre x, rayon r**
$$S(x, r) = \{y \in X, d(x, y) = r\} \tag{1.5}$$

Propriétés sur les ouverts et fermés. Pour (X, d) un espace métrique :

— **Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert**

— **Une intersection finie d'ouverts est un ouvert**

— **Une intersection suelconque de fermés est un fermé**

— **Une intersection finie de fermés est un fermé**

— **Une partie F de X est un fermés si son complémentaire F^c est ouvert**

1.4 Intérieur - Adhérence

Definition 4: Intérieur

Pour un espace métrique (X, d), soit A une partie de X.

$x \in X$ est un point **intérieur** de $A \iff \exists r > 0, B(x, r) \subset A$

On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A : c'est le plus grand ouvert contenu dans A

Definition 5: Adhérence

Pour un espace métrique (X, d), soit A une partie de X.

$x \in X$ est un point **adhérent** de $A \iff \exists r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A : c'est le plus petit fermé contenant A.

Definition 6: Frontière

Pour un espace métrique (X, d), soit A une partie de X.

On appelle **frontière de** A l'ensemble $\overline{A} \backslash \mathring{A}$

Propriétés sur les intérieurs et adhérences :

— A est ouvert $\iff A = \mathring{A}$

— A est fermé $\iff A = \overline{A}$

1.5 Suites

Pour toute la suite, on considère (X, d) un espace métrique.

Definition 7: Convergence de suites

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ converge vers $l \in X$

$\iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, d(x_n, l) \leq \epsilon$

On note alors $\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = l$

Definition 8: Suites extraites

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X. On appelle **sous-suite** ou **suite extraite** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tel que l'application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est **strictement croissante**

Propriétés pour les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$

—