FLEA

first order proving with equality
master project

Alexander Maringele
Supervisor: Georg Moser

Sep 2016 – Obergurgl

Project overview

Goals and requirements

- Goals
  - ATP for FOL with equality
  - Master thesis
- Requirements
  - Input: problems in clausal normal form
  - Data: clauses, literals, terms, indices, etc.
  - Algorithms: substitution, unification, etc.
  - **Proof search** (strategies)
- Non-Goals and Non-Requirements
  - CASC
  - FOF $\approx$ CNF

Clausal normal form

TPTP Syntax

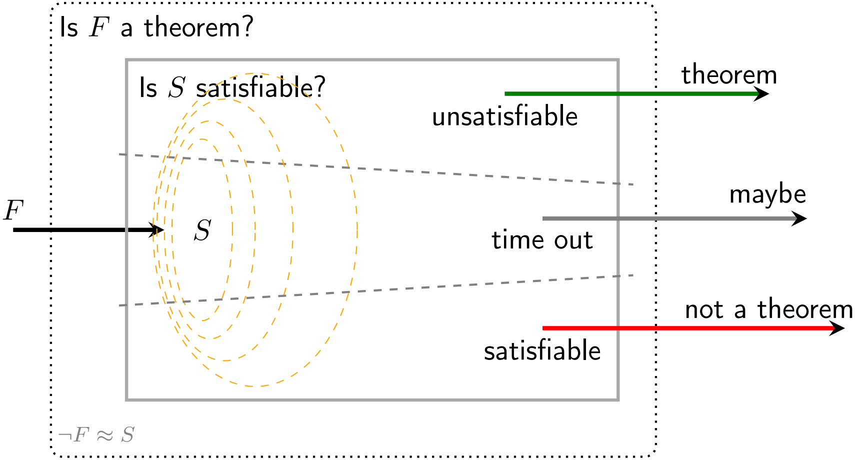
```
...
cnf(same_hates, hypothesis, ( ~hates(agatha,X) | hates(butler,X) )).
...
```

$$\{\ \ldots,\ \neg\text{hates}(\text{agatha}, x) \vee \text{hates}(\text{butler}, x),\ \ldots\}$$
$$\equiv$$
$$\ldots\ \wedge\ \forall x\ (\neg\text{hates}(\text{agatha}, x) \vee \text{hates}(\text{butler}, x))\ \wedge\ \ldots$$

G. Sutcliffe, *The TPTP Problem Library and Associated Infrastructure: The FOF and CNF Parts, v3.5.0*, Journal of Automated Reasoning **43** (2009), no. 4, 337–362.

Refutation

Proof search



Ordered Resolution

$$\frac{L \vee C \quad \neg L' \vee D}{(C \vee D)\sigma}$$

where

$L\sigma$ strictly maximal in $C\sigma$, $\neg L'\sigma$ maximal in $D\sigma$, $\sigma = \mathrm{mgu}(L, L')$.

$$S = \{\mathsf{P}(x) \vee \neg\mathsf{P}(y), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}), \mathsf{P}(\mathsf{b})\}$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{P}(x) \vee \neg\mathsf{P}(y) \quad \neg\mathsf{P}(\mathsf{a})}{\neg\mathsf{P}(y)}\, x \mapsto \mathsf{a} \qquad \mathsf{P}(\mathsf{b})}{\square}\, y \mapsto \mathsf{b}$$

Inst-Gen

$$\frac{L \vee C \quad \neg L' \vee D}{(L \vee C)\sigma \quad (\neg L' \vee D)\sigma}$$

where

$$\mathrm{sel}(L \vee C) = L \qquad \mathrm{sel}(\neg L' \vee D) = \neg L' \qquad \sigma = \mathrm{mgu}(L, L')$$

Selection

$S = \{\mathsf{P}(x) \vee \neg\mathsf{P}(y), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}), \mathsf{P}(\mathsf{b})\}$ unsatisfiable

$P = (p_* \vee \neg p_*) \wedge \neg p_a \wedge p_b$ satisfiable

$$S_0 = \{\mathsf{P}(x) \lor \neg\mathsf{P}(y), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}), \mathsf{P}(\mathsf{b})\}$$ unsatisfiable

$$P_0 = (p_* \lor \neg p_*) \land \neg p_a \land p_b$$ satisfiable

$$\frac{\mathsf{P}(x) \lor \neg\mathsf{P}(y)) \quad \neg\mathsf{P}(\mathsf{a})}{\mathsf{P}(\mathsf{a}) \lor \neg\mathsf{P}(y)}\ x \mapsto \mathsf{a}$$

$$P_1 = (p_* \lor \neg p_*) \land \neg p_a \land p_b \land (p_a \lor \neg p_*)$$ satisfiable

$$\frac{\mathsf{P}(\mathsf{b}) \quad \mathsf{P}(\mathsf{a}) \lor \neg\mathsf{P}(y)}{\mathsf{P}(\mathsf{a}) \lor \neg\mathsf{P}(\mathsf{b})}\ y \mapsto \mathsf{b}$$

$$P_2 = (p_* \lor \neg p_*) \land \neg p_a \land p_b \land (p_a \lor \neg p_*) \land (p_a \lor \neg p_b)$$ unsatisfiable

Equality as predicate

$$S = \{^{1:}\mathsf{P}(\mathsf{a}), ^{2:}\neg\mathsf{P}(\mathsf{f}(x,\mathsf{b})), ^{3:}\mathsf{f}(x,\mathsf{b}) = x\}$$ saturated

$$P = p_1 \land \neg p_2 \land e_3$$ satisfiable

Equality

$$\frac{x = x \quad s \neq s \vee \mathcal{C}}{s = s}\; x \mapsto s \qquad \text{reflexivity}$$

$$\frac{x \neq y \vee y = x \quad s \neq t \vee \mathcal{C}}{t \neq s \vee s = t}\; x \mapsto t, y \mapsto s \qquad \text{symmetry}$$

$$\frac{x \neq y \vee y \neq z \vee x = z \quad s \neq t \vee \mathcal{C}}{s \neq y \vee y \neq t \vee s = t}\; x \mapsto s, y \mapsto t \qquad \text{transitivity}$$

$$\frac{x \neq y \vee \mathsf{f}(x) = \mathsf{f}(y) \quad \mathsf{f}(s) \neq \mathsf{f}(t)}{s \neq t \vee \mathsf{f}(s) = \mathsf{f}(t)}\; x \mapsto s, y \mapsto t \qquad \text{f-congruence}$$

$$\frac{x \neq y \vee \neg\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{P}(y) \quad \mathsf{P}(s) \vee \mathcal{C}}{s \neq y \vee \neg\mathsf{P}(s) \vee \mathsf{P}(y)}\; x \mapsto s \qquad \mathsf{P}_{+}\text{-congruence}$$

$$\frac{x \neq y \vee \neg\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{P}(y) \quad \neg\mathsf{P}(s) \vee C}{x \neq s \vee \neg\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{P}(s)}\; y \mapsto s \qquad \mathsf{P}_{\neg}\text{-congruence}$$

$S_0 = \{^{1:}\mathsf{P}(\mathsf{a}), ^{2:}\neg\mathsf{P}(\mathsf{f}(x,\mathsf{b})), ^{3:}\mathsf{f}(x,\mathsf{b}) = x\}$ unsatisfiable

$P_0 = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge e_3$ satisfiable

$^{4:}x \neq \mathsf{f}(x,\mathsf{b}) \vee \neg\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{P}(\mathsf{f}(x,\mathsf{b}))$ $^{2:1}\mathsf{P}_{\neg}$-congruence

$P_1 = P_0 \wedge (\neg e_4 \vee \neg p_* \vee p_2)$

$^{5:}\mathsf{f}(x,\mathsf{b}) \neq x \vee x = \mathsf{f}(x,\mathsf{b})$ $^{4:1}$symmetry

$P_2 = P_0 \wedge (\neg e_4 \vee \neg p_* \vee p_2) \wedge (\neg e_3 \vee e_4)$

$^{6:}\mathsf{a} \neq \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \vee \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}) \vee \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}))$ $^{4:1,1:1}$ $x \mapsto \mathsf{a}$

$^{7:}\neg\mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}))$ $^{2:1,6:1}$ $x \mapsto \mathsf{a}$

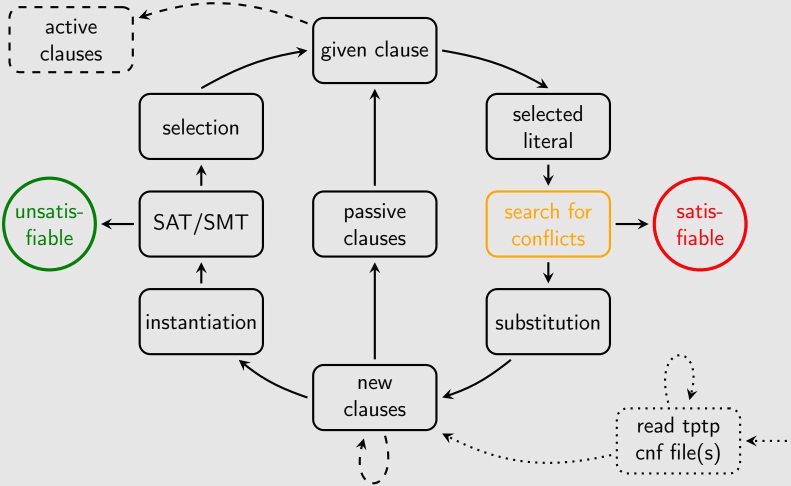
$P_3 = P_2 \wedge (\neg e_6 \vee \neg p_1 \vee p_6) \wedge \neg p_6$

$^{8:}\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \neq \mathsf{a} \vee \mathsf{a} = \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b})$ $^{1:1}$-symmetry

$^{9:}\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}) = \mathsf{a})$ $^{3:1,8:1}$ $x \mapsto a$

$P_4 = P_3 \wedge (\neg e_8 \vee e_6) \wedge e_8$ unsatisfiable

Run-loop


active clauses
given clause
selection
selected literal
unsatis-fiable
SAT/SMT
passive clauses
search for conflicts
satis-fiable
instantiation
substitution
new clauses
read tptp cnf file(s)