bits and pieces

Alexander Maringele

June 15th, 2016

References

Christoph Sticksel, *Efficient equational reasoning for the Inst-Gen framework*, Ph.D. thesis, School of Computer Science, University of Manchester, 2011.

Hofstadter's Law: It always takes longer than you expect,
even when you take into account Hofstadter's Law.

— Douglas Hofstadter, Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid

Definition (Ordered Resolution)

$$\frac{L \vee C \quad \neg L' \vee D}{(C \vee D)\sigma}$$

where

$L\sigma$ strictly maximal in $C\sigma$, $\neg L'\sigma$ maximal in $D\sigma$, $\sigma = \mathrm{mgu}(L, L')$.

Definition (Inst-Gen)

$$\frac{L \vee C \quad \neg L' \vee D}{(L \vee C)\sigma \quad (\neg L' \vee D)\sigma}$$

where

$$\mathrm{sel}(L \vee C) = L \qquad \mathrm{sel}(\neg L' \vee D) = \neg L' \qquad \sigma = \mathrm{mgu}(L, L')$$

Example (Unsatisfiable set of clauses)

$S = \{\mathsf{P}(x) \vee \neg\mathsf{P}(y), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}), \mathsf{P}(\mathsf{b})\}$

Example (Resolution)

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{P}(x) \lor \neg\mathsf{P}(y) \quad \neg\mathsf{P}(\mathsf{a})}{\neg\mathsf{P}(y) \quad \mathsf{P}(\mathsf{b})}\ x \mapsto \mathsf{a}}{\square}\ y \mapsto \mathsf{b}$$

Example (Inst-Gen)

$$S_0\bot = \{\mathsf{P}(\bot) \lor \neg\mathsf{P}(\bot), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}), \mathsf{P}(\mathsf{b})\} \qquad \text{satisfiable}$$

$$\dfrac{\mathsf{P}(x) \lor \neg\mathsf{P}(y)) \quad \neg\mathsf{P}(\mathsf{a})}{\mathsf{P}(\mathsf{a}) \lor \neg\mathsf{P}(y)}\ x \mapsto \mathsf{a}$$

$$S_1\bot \supsetneq \{\neg\mathsf{P}(\mathsf{a}), \mathsf{P}(\mathsf{b}), \mathsf{P}(\mathsf{a}) \lor \neg\mathsf{P}(\bot)\} \qquad \text{satisfiable}$$

$$\dfrac{\mathsf{P}(\mathsf{b}) \quad \mathsf{P}(\mathsf{a}) \lor \neg\mathsf{P}(y)}{\mathsf{P}(\mathsf{a}) \lor \mathsf{P}(\mathsf{b})}\ y \mapsto \mathsf{b}$$

$$S_2\bot \supsetneq \{\neg\mathsf{P}(\mathsf{a}), \mathsf{P}(\mathsf{b}), \mathsf{P}(\mathsf{a}) \lor \neg\mathsf{P}(\mathsf{b})\} \qquad \text{unsatisfiable}$$

Subsumption

$$S = \{C, D, \ldots\}, \exists\theta\ C\theta \subseteq D$$

C subsumes D

$$S \text{ satisfiable} \overset{\checkmark}{\iff} (S \setminus D) \text{ satisfiable}$$

$$S\bot \text{ satisfiable} \overset{\times}{\iff} (S \setminus D)\bot \text{ satisfiable}$$

Example

$$S_0 = \{\mathsf{P}(x, y), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}, z)\}$$

$$S_0\bot = \{\mathsf{P}(\bot, \bot), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}, \bot)\}$$

satisfiable

$$\frac{\mathsf{P}(x, y) \quad \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}, z)}{\mathsf{P}(\mathsf{a}, y) \quad \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}, y)}\ x \mapsto \mathsf{a}, z \mapsto y$$

$$S_1 = \{\mathsf{P}(x, y), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}, z), \mathsf{P}(\mathsf{a}, y)\}$$

$$S_1\bot = \{\mathsf{P}(\bot, \bot), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}, \bot), \mathsf{P}(\mathsf{a}, \bot)\}$$

unsatisfiable

Schemata

$$
\begin{aligned}
x &= x & s &\neq s \\
x \neq y \vee y &= x & s &\neq t \\
x \neq y \vee y \neq z \vee x &= z & s &\neq t \\
x_1 \neq y_1 \vee x_2 \neq y_2 \vee \mathsf{f}(x_1, x_2) &= \mathsf{f}(y_1, y_2) & \mathsf{f}(s) &\neq \mathsf{f}(t) \\
x \neq y \vee \neg\mathsf{P}(x) &\vee \mathsf{P}(y) & \mathsf{P}(s)&, \neg\mathsf{P}(t)
\end{aligned}
$$

Example

$$S = \{\mathsf{P}(\mathsf{a}), \neg\mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b})), \mathsf{f}(x, \mathsf{b}) = x\}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{a} \neq y \vee \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}) \vee \mathsf{P}(y) \\
&x \neq \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) \vee \neg\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}))
\end{aligned}
$$

$x = \mathsf{a} \vee x \neq \mathsf{a}$ $\qquad$ $\perp = \perp \vee \perp \neq \perp$

$\mathsf{f}(\mathsf{a}) \neq \mathsf{f}(\mathsf{b})$ $\qquad$ $\mathsf{f}(\perp) \neq \mathsf{f}(\mathsf{a})$

$R = \{x = \mathsf{a}\}$ is ground complete

$\sigma = \{x \mapsto \mathsf{b}\}$ $(x = \mathsf{a})\sigma = \mathsf{a} \to \mathsf{b}$ with $\mathsf{a} > \mathsf{b}$ $\mathsf{f}(a) \neq \mathsf{b}$

$\mathsf{P}(\mathsf{a}), \neg\mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b})), \mathsf{f}(x,\mathsf{b}) = x$
$\mathsf{P}(\mathsf{a}), \neg\mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b})), \mathsf{f}(\bot,\mathsf{b}) = \bot$
$\{\mathsf{f}(x,\mathsf{b}) = x\}$ is ground complete and with $\{x \mapsto \mathsf{a}\}$ we get $\neg\mathsf{P}(\mathsf{a})$