# FLEA

## first order proving with equality
## master project

Alexander Maringele
Supervisor: Georg Moser

Sep 2016 – Obergurgl

# Project overview

## Goals and requirements

- Goals
  - ATP for FOL with equality
  - Master thesis
- Requirements
  - Input: problems in clausal normal form
  - Data: clauses, literals, terms, indices, etc.
  - Algorithms: substitution, unification, etc.
  - **Proof search** (strategies)
- Non-Goals and Non-Requirements
  - CASC
  - FOF $\approx$ CNF

# Clausal normal form

## TPTP Syntax

```
...
cnf(same_hates, hypothesis, ( ~hates(agatha,X) | hates(butler,X) )).
...
```

$$\{\ \ldots,\ \neg\mathsf{hates}(\mathsf{agatha}, x) \vee \mathsf{hates}(\mathsf{butler}, x),\ \ldots\}$$

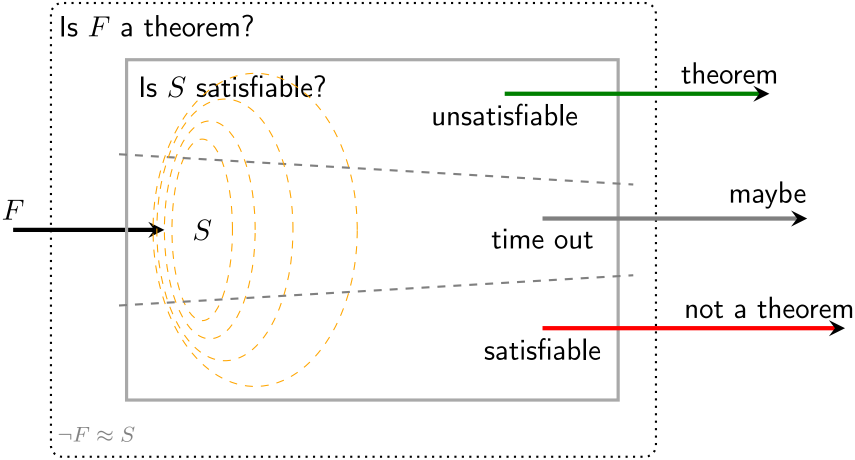
$$\equiv$$

$$\ldots\ \wedge\ \forall x\ (\neg\mathsf{hates}(\mathsf{agatha}, x) \vee \mathsf{hates}(\mathsf{butler}, x))\ \wedge\ \ldots$$

G. Sutcliffe, *The TPTP Problem Library and Associated Infrastructure: The FOF and CNF Parts, v3.5.0*, Journal of Automated Reasoning **43** (2009), no. 4, 337–362.

# Refutation

## Proof search



## Ordered Resolution

$$\frac{L \vee C \quad \neg L' \vee D}{(C \vee D)\sigma}$$

where

$L\sigma$ strictly maximal in $C\sigma$, $\neg L'\sigma$ maximal in $D\sigma$, $\sigma = \mathrm{mgu}(L, L')$.

$$S = \{\mathsf{P}(x) \vee \neg\mathsf{P}(y), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}), \mathsf{P}(\mathsf{b})\}$$

$$\cfrac{\cfrac{\mathsf{P}(x) \vee \neg\mathsf{P}(y) \quad \neg\mathsf{P}(\mathsf{a})}{\neg\mathsf{P}(y)}\ x \mapsto \mathsf{a} \qquad \mathsf{P}(\mathsf{b})}{\square}\ y \mapsto \mathsf{b}$$

## Inst-Gen

$$\frac{L \vee C \quad \neg L' \vee D}{(L \vee C)\sigma \quad (\neg L' \vee D)\sigma}$$

where

$$\mathrm{sel}(L \vee C) = L \qquad \mathrm{sel}(\neg L' \vee D) = \neg L' \qquad \sigma = \mathrm{mgu}(L, L')$$

## Selection

$$S = \{\mathsf{P}(x) \vee \neg\mathsf{P}(y), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}), \mathsf{P}(\mathsf{b})\}$$ unsatisfiable

$$P = (p_* \vee \neg p_*) \wedge \neg p_a \wedge p_b$$ satisfiable

$S_0 = \{\mathsf{P}(x) \vee \neg\mathsf{P}(y), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}), \mathsf{P}(\mathsf{b})\}$ unsatisfiable

$P_0 = (p_* \vee \neg p_*) \wedge \neg p_a \wedge p_b$ satisfiable

$$\frac{\mathsf{P}(x) \vee \neg\mathsf{P}(y)) \quad \neg\mathsf{P}(\mathsf{a})}{\mathsf{P}(\mathsf{a}) \vee \neg\mathsf{P}(y)} \; x \mapsto \mathsf{a}$$

$P_1 = (p_* \vee \neg p_*) \wedge \neg p_a \wedge p_b \wedge (p_a \vee \neg p_*)$ satisfiable

$$\frac{\mathsf{P}(\mathsf{b}) \quad \mathsf{P}(\mathsf{a}) \vee \neg\mathsf{P}(y)}{\mathsf{P}(\mathsf{a}) \vee \neg\mathsf{P}(\mathsf{b})} \; y \mapsto \mathsf{b}$$

$P_2 = (p_* \vee \neg p_*) \wedge \neg p_a \wedge p_b \wedge (p_a \vee \neg p_*) \wedge (p_a \vee \neg p_b)$ unsatisfiable

## Equality as predicate

$S = \{^{1:}\mathsf{P}(\mathsf{a}), ^{2:}\neg\mathsf{P}(\mathsf{f}(x, \mathsf{b})), ^{3:}\mathsf{f}(x, \mathsf{b}) = x\}$ saturated

$P = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge e_3$ satisfiable

## Equality

$$\frac{x = x \quad s \neq s \vee \mathcal{C}}{s = s}\; x \mapsto s \qquad \text{reflexivity}$$

$$\frac{x \neq y \vee y = x \quad s \neq t \vee \mathcal{C}}{t \neq s \vee s = t}\; x \mapsto t, y \mapsto s \qquad \text{symmetry}$$

$$\frac{x \neq y \vee y \neq z \vee x = z \quad s \neq t \vee \mathcal{C}}{s \neq y \vee y \neq t \vee s = t}\; x \mapsto s, y \mapsto t \qquad \text{transitivity}$$

$$\frac{x \neq y \vee \mathsf{f}(x) = \mathsf{f}(y) \quad \mathsf{f}(s) \neq \mathsf{f}(t)}{s \neq t \vee \mathsf{f}(s) = \mathsf{f}(t)}\; x \mapsto s, y \mapsto t \qquad \text{f-congruence}$$

$$\frac{x \neq y \vee \neg\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{P}(y) \quad \mathsf{P}(s) \vee \mathcal{C}}{s \neq y \vee \neg\mathsf{P}(s) \vee \mathsf{P}(y)}\; x \mapsto s \qquad \mathsf{P}_{+}\text{-congruence}$$

$$\frac{x \neq y \vee \neg\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{P}(y) \quad \neg\mathsf{P}(s) \vee C}{x \neq s \vee \neg\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{P}(s)}\; y \mapsto s \qquad \mathsf{P}_{\neg}\text{-congruence}$$

$$S_0 = \{^{1:}\mathsf{P}(\mathsf{a}), ^{2:}\neg\mathsf{P}(\mathsf{f}(x,\mathsf{b})), ^{3:}\mathsf{f}(x,\mathsf{b}) = x\}$$ unsatisfiable

$$P_0 = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge e_3$$ satisfiable

$$^{4:}x \neq \mathsf{f}(x,\mathsf{b}) \vee \neg\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{P}(\mathsf{f}(x,\mathsf{b}))$$ $^{2:1}\mathsf{P}_\neg$-congruence

$$P_1 = P_0 \wedge (\neg e_4 \vee \neg p_* \vee p_2)$$

$$^{5:}\mathsf{f}(x,\mathsf{b}) \neq x \vee x = \mathsf{f}(x,\mathsf{b})$$ $^{4:1}$symmetry

$$P_2 = P_0 \wedge (\neg e_4 \vee \neg p_* \vee p_2) \wedge (\neg e_3 \vee e_4)$$

$$^{6:}\mathsf{a} \neq \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \vee \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}) \vee \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}))$$ $^{4:1,1:1}\ x \mapsto \mathsf{a}$

$$^{7:}\neg\mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}))$$ $^{2:1,6:1}\ x \mapsto \mathsf{a}$

$$P_3 = P_2 \wedge (\neg e_6 \vee \neg p_1 \vee p_6) \wedge \neg p_6$$

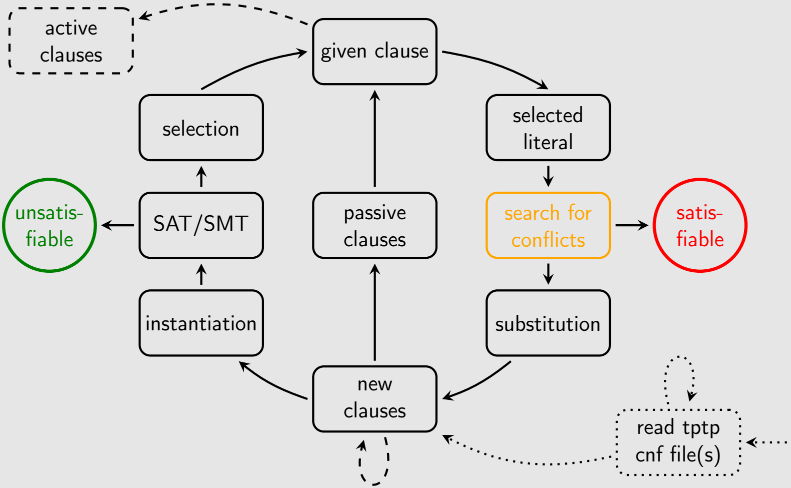
$$^{8:}\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \neq \mathsf{a} \vee \mathsf{a} = \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b})$$ $^{1:1}$-symmetry

$$^{9:}\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}) = \mathsf{a})$$ $^{3:1,8:1}\ x \mapsto a$

$$P_4 = P_3 \wedge (\neg e_8 \vee e_6) \wedge e_8$$ unsatisfiable

- requirements
  - Linux, macOS
  - Flex, Bison, Clang, Swift 3
  - Yices
- structure
  - wrapper for yices, parsing, syslog, and some POSIX APIs
  - data and algorithms
  - strategy: sequential processing of growing list of clauses
- optimizations
  - indexing of selected literals
  - indexing of clauses
  - sharing of terms
- in progress = missing
  - alternative procedure for equality
  - experiments
  - written thesis

## Run-loop


active
clauses
given clause
selection
selected
literal
unsatis-
fiable
SAT/SMT
passive
clauses
search for
conflicts
satis-
fiable
instantiation
substitution
new
clauses
read tptp
cnf file(s)

### Lemma

*Symmetry and transitivity are consequences of reflexivity and congruence.*

### Symmetry.

$$\dfrac{\dfrac{}{x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2}\ \text{=-congruence}}{\dfrac{x = y \wedge x = x \wedge x = x \rightarrow y = x}{x = y \rightarrow y = x}\ \text{reflexivity}}\ x_1 \mapsto x, x_2 \mapsto x, y_1 \mapsto y, y_2 \mapsto x$$

□

### Transitivity.

$$\dfrac{\dfrac{}{x_1 \neq y_1 \vee x_2 \neq y_2 \vee x_1 \neq x_2 \vee y_1 = y_2}\ \text{=-congruence}}{\dfrac{x \neq x \vee y \neq z \vee x \neq y \vee x = z}{x \neq y \vee y \neq z \vee x = z}\ \text{reflexivity}}\ x_1 \mapsto x, x_2 \mapsto y, y_1 \mapsto x, y_2 \mapsto z$$

□