# Term-Indexing

Alexander Maringele

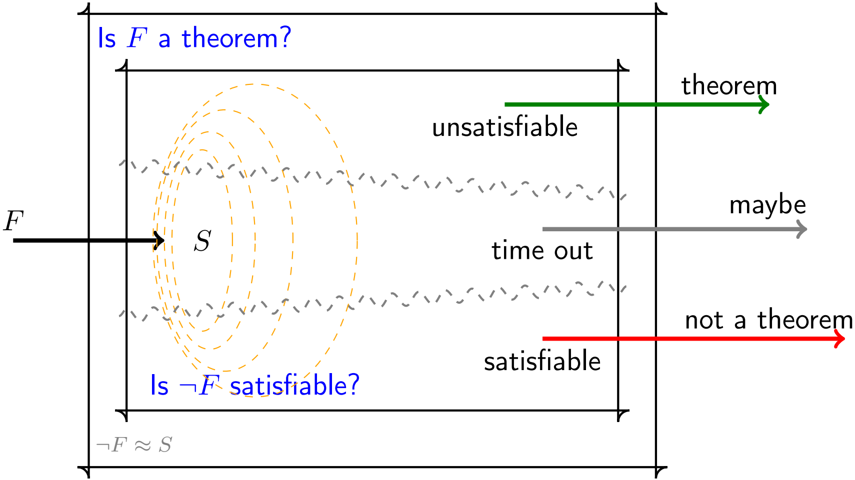
January 27th, 2016

# References

R. Sekar, I. V. Ramakrishnan, and Andrei Voronkov, *Term indexing*, Handbook of Automated Reasoning (Alan Robinson and Andrei Voronkov, eds.), Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, 2001, pp. 1853–1964.

# Outline

# Refutation


Is $F$ a theorem?
theorem
unsatisfiable
maybe
$F$
$S$
time out
not a theorem
satisfiable
Is $\neg F$ satisfiable?
$\neg F \approx S$

## Clausal form

$$\{\ \mathsf{P}(\mathsf{f}(x)) \vee \mathsf{f}(x) \not\approx \mathsf{a},\ \ \mathsf{g}(x,y) \approx \mathsf{a} \vee \neg \mathsf{Q}(x,y),\ \ \mathcal{C}_3\ \}$$

$$\equiv$$

$$\forall x\, (\mathsf{P}(\mathsf{f}(x)) \vee \mathsf{f}(x) \not\approx \mathsf{a})$$

$$\wedge$$

$$\forall xy\, (\mathsf{g}(x,y) \approx \mathsf{a} \vee \neg \mathsf{Q}(x,y))$$

$$\wedge$$

$$\forall\, \mathcal{V}\mathsf{ar}(\mathcal{C}_3)\, (\mathcal{C}_3)$$

## Goal

A sound and refutation complete calculus.

## Resolution (without equality)

Resolve and factor all clauses and literals in an unsatisfiable set

$$\frac{A \vee \mathcal{C} \quad \neg B \vee \mathcal{D}}{(\mathcal{C} \vee \mathcal{D})\sigma}\ (\sigma)\ \text{resolution} \qquad \frac{A \vee B \vee \mathcal{C}}{(A \vee \mathcal{C})\sigma}\ (\sigma)\ \text{factoring}$$

$$\sigma = \mathrm{mgu}(A, B)$$

and the empty clause will be derived eventually.

## Observation

Usually the set grows too fast to obtain a result.

## Goal

A sound, refutation complete, and *effective* calculus.

1. *Reduce* search space
   - Ordered Resolution, Strategies, ...
   - ...with selection functions for clauses and literals
2. *Reduce* redundancy
   - e.g. discard clauses that are subsumed by other clauses
   - ...depending on the calculus

## Example (forward subsumption)

$$S = \{{}^{1:}\mathsf{P}(x,y), {}^{2:}\neg\mathsf{P}(\mathsf{a},z)\} \cup \{{}^{3:}\mathsf{P}(\mathsf{a},z')\}$$

$t_1$ subsumes $t_3$

$$\frac{\mathsf{P}(x,y) \quad \neg\mathsf{P}(\mathsf{a},z)}{\square}\ \{x \mapsto \mathsf{a}, y \mapsto z\}$$

Resolution

$$S\bot = \{\mathsf{P}(\bot,\bot), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a},\bot), \mathsf{P}(\mathsf{a},\bot)\}$$

InstGen / SMT

## Goal

A sound, refutation complete, and effective calculus.

3. Quickly find
   - *variants* — variant removal
   - *instances* — backward subsumption
   - *generalizations* — forward subsumption
   - *unifiable terms* — resolution, demodulation

   of a query term in a given set of terms.

## Observation

Deduction rate drops quickly with sequential search.

## Term Indexing

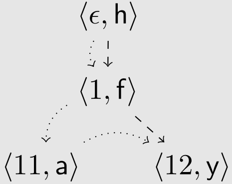
Data structures and algorithms for fast retrieval of matching terms.

## Definition (Position Strings)

$$\mathcal{P}\mathsf{os}^{\Sigma}(t) = \begin{cases} \{\langle \epsilon, x\rangle\} & \text{if } t = x \in \mathcal{V} \\ \{\langle \epsilon, f\rangle\} \cup \{\langle ip, s\rangle \mid (p,s) \in \mathcal{P}\mathsf{os}^{\Sigma}(t_i)\} & \text{if } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

## Term traversals

$$\mathcal{P}\mathsf{os}^{\Sigma}(\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{y}))) = \{\langle \epsilon, \mathsf{h}\rangle, \langle 1, \mathsf{f}\rangle, \langle 11, \mathsf{a}\rangle, \langle 12, y\rangle\}$$




$\langle \epsilon, \mathsf{h}\rangle\langle 1, \mathsf{f}\rangle\langle 12, y\rangle$ path from root to leaf

$\langle \epsilon, \mathsf{h}\rangle\langle 1, \mathsf{f}\rangle\langle 11, \mathsf{a}\rangle\langle 12, y\rangle$ pre-order traversal

## Variables

Variants of terms generate the same position strings

- if variable names are ignored $\mathsf{f}(y,z) \Rightarrow \langle\epsilon,\mathsf{f}\rangle\langle 1,*\rangle\langle 2,*\rangle$
- or normalized $\mathsf{f}(y,z) \Rightarrow \langle\epsilon,\mathsf{f}\rangle\langle 1,x_1\rangle\langle 2,x_2\rangle$
  $\mathsf{f}(y,y) \Rightarrow \langle\epsilon,\mathsf{f}\rangle\langle 1,x_1\rangle\langle 2,x_1\rangle$

In the first case even non-variants of terms generate the same strings.

## Notation

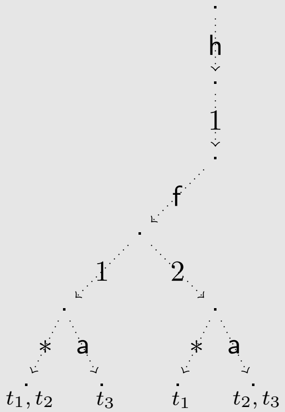
We abbreviate

- path strings $\langle\epsilon,\mathsf{h}\rangle\langle 1,\mathsf{f}\rangle\langle 12,*\rangle$ $\mathsf{h}.1.\mathsf{f}.2.*$
- and traversal strings $\langle\epsilon,\mathsf{h}\rangle\langle 1,\mathsf{f}\rangle\langle 11,*\rangle\langle 12,*\rangle$ $\mathsf{h.f.a}.*$
  when traversal order and arities of symbols are fixed.

## Build

$^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,y)),\ ^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{a})),\ ^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}))$

$$t_1 \Rightarrow \{\mathsf{h}.1.\mathsf{f}.1.*, \mathsf{h}.1.\mathsf{f}.2.*\}$$
$$t_2 \Rightarrow \{\mathsf{h}.1.\mathsf{f}.1.*, \mathsf{h}.1.\mathsf{f}.2.\mathsf{a}\}$$
$$t_3 \Rightarrow \{\mathsf{h}.1.\mathsf{f}.1.\mathsf{a}, \mathsf{h}.1.\mathsf{f}.2\mathsf{a}\}$$



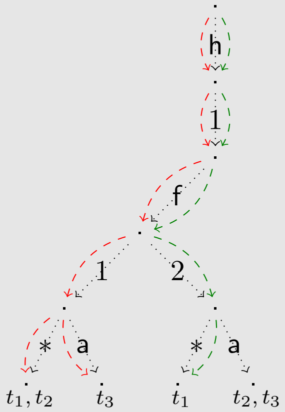
## Retrieve

$^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,y)),^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{a})),^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}))$

$$\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{b}))) \Rightarrow \{\mathsf{h.f.}*, \mathsf{h.f.b}\}$$

$$u : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{b})) \mapsto \{t_1,t_2,t_3\} \cap \{t_1\}$$
$$i : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{b})) \mapsto \{t_1,t_2,t_3\} \cap \{\}$$
$$g : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{b})) \mapsto \{t_1,t_2\} \cap \{t_1\}$$
$$v : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{b})) \mapsto \{t_1,t_2\} \cap \{\}$$

$$v : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',x')) \mapsto \{t_1,t_2\} \cap \{t_1\}$$



## Unit Superposition Inference Rules

$$\frac{s \approx t \quad L[s']}{(L[t]) \cdot \sigma} \text{ unit paramodulation}$$

where $\sigma = \mathrm{mgu}(s, s')$, $s' \notin \mathcal{V}$, $t\sigma \not\succeq s\sigma$

$$\frac{s \approx t \quad u[s'] \not\approx v}{(u[t] \not\approx v) \cdot \sigma} \text{ unit superposition } \frac{s \approx t \quad u[s'] \approx v}{(u[t] \approx v) \cdot \sigma}$$

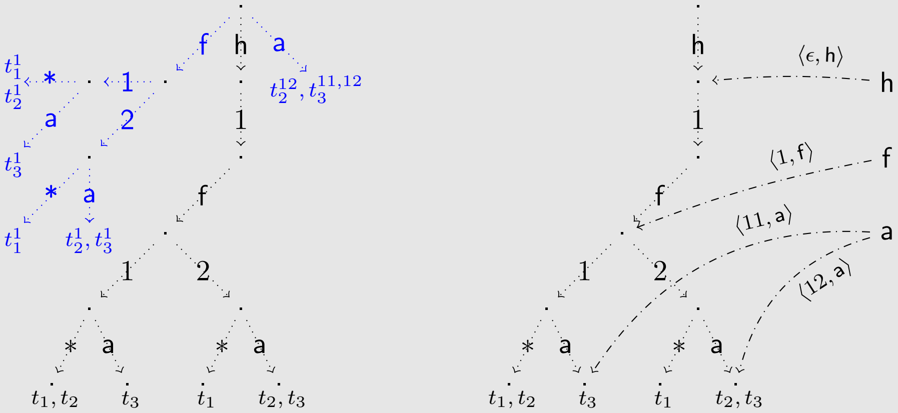
where $\sigma = \mathrm{mgu}(s, s')$, $s' \notin \mathcal{V}$, $t\sigma \not\succeq s\sigma$, $v\sigma \not\succeq u[s']\sigma$

$$\frac{s \not\approx t}{\square} \text{ unit equality resolution} \qquad \frac{A \quad \neg B}{\square} \text{ unit resolution}$$

where $s$ and $t$ ($A$ and $B$ respectively) are unifiable

## ${}^{t_4:}\mathsf{f}(x,\mathsf{a}) \approx x$

${}^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,y)),{}^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{a})),{}^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}))$



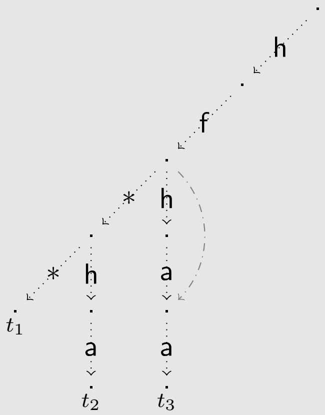
## Insert

$^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x, y)), ^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x, \mathsf{h}(\mathsf{a}))), ^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{a}), \mathsf{a}))$

$$t_1 \Rightarrow \mathsf{h.f.}{*}.{*}$$

$$t_2 \Rightarrow \mathsf{h.f.}{*}.\mathsf{h.a}$$

$$t_3 \Rightarrow \mathsf{h.f.h.a.a}$$

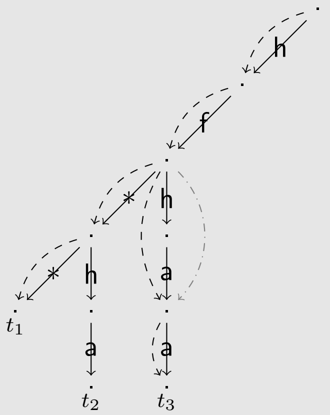


## Retrieve

$^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x, y)), ^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x, \mathsf{h}(\mathsf{a}))), ^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{a}), \mathsf{a}))$

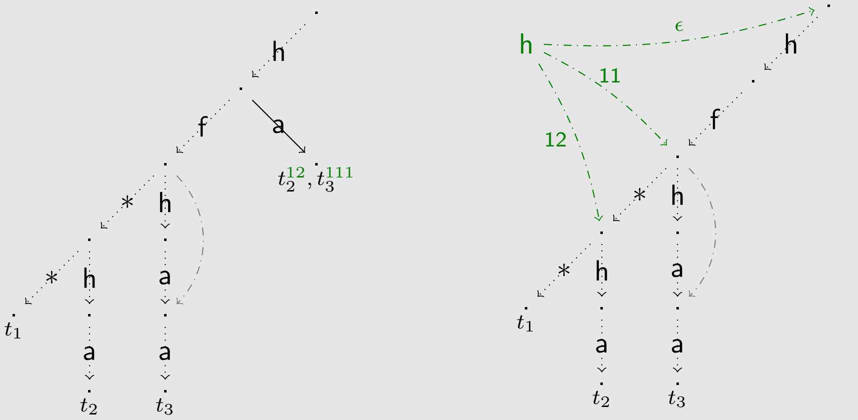
$$\mathsf{h}(\mathsf{f}(x', \mathsf{a})) \Rightarrow \mathsf{h.f.}{*}\mathsf{.a}$$

$$u : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x', \mathsf{a})) \mapsto \{t_1, t_3\}$$
$$i : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x', \mathsf{a})) \mapsto \{t_3\}$$
$$g : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x', \mathsf{a})) \mapsto \{t_1\}$$
$$v : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x', \mathsf{a})) \mapsto \{\ \}$$



## Subterms

$^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,y)),\ ^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{h}(\mathsf{a}))),\ ^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{a}),\mathsf{a}))$



## Build

$^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,y)), {}^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{h}(\mathsf{a}))), {}^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{a}),\mathsf{a})), {}^{t_4:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a})))$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & *_0 \mapsto \mathsf{h}(*_1) \arrow[d] & & & \\
 & & & *_1 \mapsto \mathsf{f}(*_2, *_3) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & *_2 \mapsto x \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & *_3 \mapsto \mathsf{a} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
*_3 \mapsto y & & *_3 \mapsto \mathsf{h}(\mathsf{a}) & & *_2 \mapsto \mathsf{h}(\mathsf{a}) & & *_2 \mapsto \mathsf{a} \\
t_1 & & t_2 & & t_3 & & t_4
\end{tikzcd}
$$

`TPTP/Problems/HWV/HWV134-1.p`
`2 332 428 formulae, 6 570 884 literals`

| checking 1000 new literals | | | sequential | path | speed |
|---|---|---|---|---|---|
| afterwards | $(\ell_1, \ell_2)$ | $A, \neg B$ | search | index | up |
| 1 000 | 500 000 | 761 | 726ms | 70ms | 10 |
| 2 000 | 1 500 000 | 812 | 2s | 69ms | 29 |
| 4 000 | 3 500 000 | 723 | 4s | 75ms | 53 |
| 8 000 | 7 500 000 | 433 | 9s | 125ms | 72 |
| 16 000 | 15 500 000 | 742 | 21s | 221ms | 95 |
| 32 000 | 31 500 000 | 592 | 40s | 489ms | 82 |
| 64 000 | 63 500 000 | 1 167 | *80s* | 697ms | 115 |
| 128 000 | 127 500 000 | 1 479 | *160s* | 13s | 12 |
| 256 000 | 255 500 000 | 1 097 | *320s* | 440s | 1 |
| 512 000 | 511 500 000 | 1 440 | *640s* | 348s | 2 |
| 1 024 000 | 1023 500 000 | 1 534 | *1280s* | 330s | 4 |