First-Order Term-Indexing

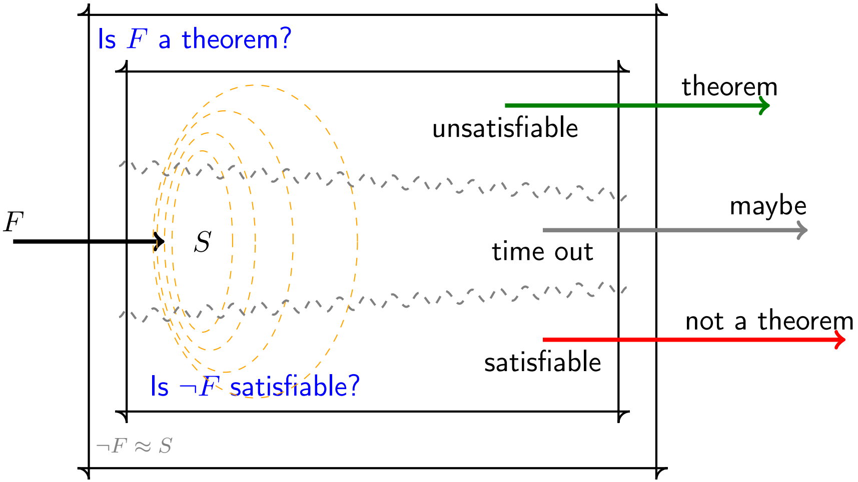
Alexander Maringele

January 27th, 2016

References

R. Sekar, I. V. Ramakrishnan, and Andrei Voronkov, *Term indexing*, Handbook of Automated Reasoning (Alan Robinson and Andrei Voronkov, eds.), Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, 2001, pp. 1853–1964.

Outline


Is F a theorem?
theorem
unsatisfiable
F
S
maybe
time out
not a theorem
satisfiable
Is $\neg F$ satisfiable?
$\neg F \approx S$

Clausal form

$$\{\ \mathsf{P}(\mathsf{f}(x)) \vee \mathsf{f}(x) \not\approx \mathsf{a},\ \ \mathsf{g}(x,y) \approx \mathsf{a} \vee \neg \mathsf{Q}(x,y),\ \ \mathcal{C}_3\ \}$$

$$\equiv$$

$$\forall x\, (\mathsf{P}(\mathsf{f}(x)) \vee \mathsf{f}(x) \not\approx \mathsf{a})$$

$$\wedge$$

$$\forall xy\, (\mathsf{g}(x,y) \approx \mathsf{a} \vee \neg \mathsf{Q}(x,y))$$

$$\wedge$$

$$\forall\, \mathcal{V}\mathsf{ar}(\mathcal{C}_3)\, (\mathcal{C}_3)$$

Goal

A sound and refutation complete calculus.

Resolution (without equality)

Resolve and factor all clauses and literals in an unsatisfiable set

$$\frac{A \vee \mathcal{C} \quad \neg B \vee \mathcal{D}}{(\mathcal{C} \vee \mathcal{D})\sigma}\ (\sigma)\ \text{resolution} \qquad \frac{A \vee B \vee \mathcal{C}}{(A \vee \mathcal{C})\sigma}\ (\sigma)\ \text{factoring}$$

$$\sigma = \mathrm{mgu}(A, B)$$

and the empty clause will be derived eventually.

Observation

Usually the set grows too fast to obtain a result.

Goal

A sound, refutation complete, and *effective* calculus.

1. *Reduce* search space
   - Ordered Resolution, Strategies, ...
   - ... with selection functions for clauses and literals
2. *Reduce* redundancy
   - e.g. discard clauses that are subsumed by other clauses
   - ... depending on the calculus

Example (forward subsumption)

$$S = \{ {}^{1:}\mathsf{P}(x,y), {}^{2:}\neg\mathsf{P}(\mathsf{a},z)\} \cup \{ {}^{3:}\mathsf{P}(\mathsf{a},z')\}$$

t_1 subsumes t_3

$$\frac{\mathsf{P}(x,y) \quad \neg\mathsf{P}(\mathsf{a},z)}{\square} \; \{x \mapsto \mathsf{a}, y \mapsto z\}$$

Resolution

$$S\bot = \{\mathsf{P}(\bot,\bot), \neg\mathsf{P}(\mathsf{a},\bot), \mathsf{P}(\mathsf{a},\bot)\}$$

InstGen / SMT

Goal

A sound, refutation complete, and effective calculus.

3. Quickly find
   - *variants* — variant removal
   - *instances* — backward subsumption
   - *generalizations* — forward subsumption
   - *unifiable terms* — resolution, demodulation

   of a query term in a given set of terms.

Observation

Deduction rate drops quickly with sequential search.

Term Indexing

Data structures and algorithms for fast retrieval of matching terms.

Positions of a term

$$\mathcal{P}\mathsf{os}(t) = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{if } t = x \in \mathcal{V} \\ \{\epsilon\} \cup \{ip \mid 1 \le i \le n \wedge p \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t_i)\} & \text{if } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Traversals of $\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a}, y))$

$$\begin{array}{ccc} & \langle \epsilon, \mathsf{h} \rangle & \\ & | & \\ & \langle 1, \mathsf{f} \rangle & \\ / & & \backslash \\ \langle 11, \mathsf{a} \rangle & & \langle 12, \mathsf{y} \rangle \end{array}$$

$$\mathcal{P}\mathsf{os}(\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{y}))) = \{\epsilon, 1, 11, 12\}$$

$$\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{y}))|_{12} = y \qquad \langle 12, y \rangle$$

$\langle \epsilon, \mathsf{h} \rangle \langle 1, \mathsf{f} \rangle \langle 12, y \rangle$ root to leaf y

$\langle \epsilon, \mathsf{h} \rangle \langle 1, \mathsf{f} \rangle \langle 11, \mathsf{a} \rangle \langle 12, y \rangle$ pre-order

Variables

Different terms generate the same position strings when

- variable names are ignored $\mathsf{f}(z,y),\mathsf{f}(y,x),\mathsf{f}(x,x) \Rightarrow \mathsf{f}(*,*)$
- or normalized $\mathsf{f}(z,y),\mathsf{f}(z,x) \Rightarrow \mathsf{f}(*_1,*_2)$
  $\mathsf{f}(x,x) \Rightarrow \mathsf{f}(*_1,*_1)$

In the second case only variants of terms generate the same strings.

Notation

We abbreviate

- path strings $\langle\epsilon,\mathsf{h}\rangle\langle 1,\mathsf{f}\rangle\langle 12,*\rangle$ $\mathsf{h}.1.\mathsf{f}.2.*$
- and traversal strings $\langle\epsilon,\mathsf{h}\rangle\langle 1,\mathsf{f}\rangle\langle 11,*\rangle\langle 12,*\rangle$ $\mathsf{h.f.a.}*$
  when traversal order and arity of symbols are fixed.

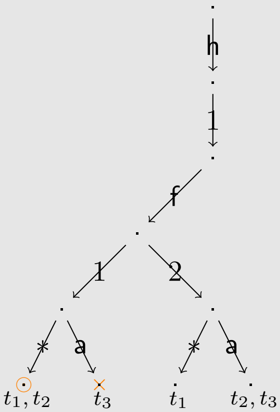
Build

$$^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,y)),\ ^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{a})),\ ^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}))$$

$$t_1 \Rightarrow \{\mathsf{h}.1.\mathsf{f}.1.*, \mathsf{h}.1.\mathsf{f}.2.*\}$$

$$t_2 \Rightarrow \{\mathsf{h}.1.\mathsf{f}.1.*, \mathsf{h}.1.\mathsf{f}.2.\mathsf{a}\}$$

$$t_3 \Rightarrow \{\mathsf{h}.1.\mathsf{f}.1.\mathsf{a}, \mathsf{h}.1.\mathsf{f}.2\mathsf{a}\}$$



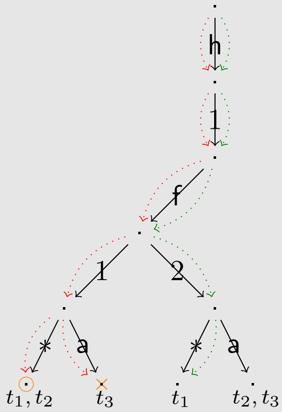
Retrieve

$^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,y)), {}^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{a})), {}^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}))$

$$\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{b}))) \Rightarrow \{\mathsf{h.f.}*, \mathsf{h.f.b}\}$$

$$u : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{b})) \mapsto \{t_1,t_2,t_3\} \cap \{t_1,t_3\}$$
$$i : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{b})) \mapsto \{t_1,t_2,t_3\} \cap \{\}$$
$$g : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{b})) \mapsto \{t_1,t_2\} \cap \{t_1\}$$
$$v : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{b})) \mapsto \{t_1,t_2\} \cap \{\}$$

$$v : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',x')) \mapsto \{t_1,t_2\} \cap \{t_1\}$$



Unit Superposition Inference Rules

$$\frac{s \approx t \quad L[s']}{(L[t]) \cdot \sigma} \text{ unit paramodulation}$$

where $\sigma = \mathrm{mgu}(s, s')$, $s' \notin \mathcal{V}$, $t\sigma \not\succeq s\sigma$

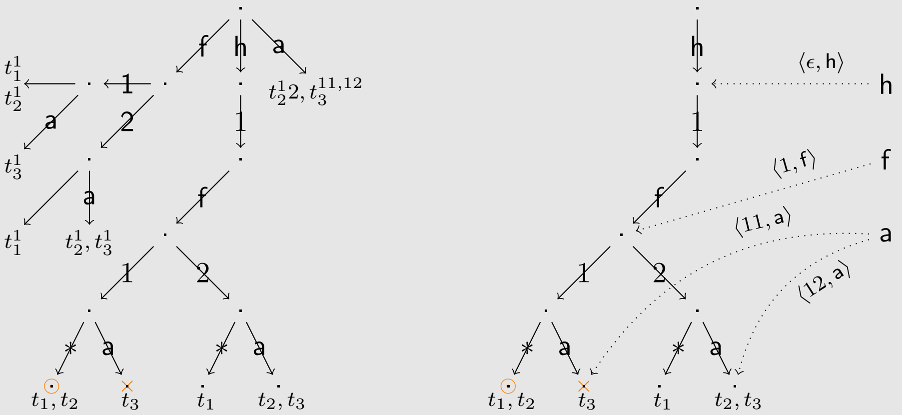
$$\frac{s \approx t \quad u[s'] \not\approx v}{(u[t] \not\approx v) \cdot \sigma} \text{ unit superposition } \frac{s \approx t \quad u[s'] \approx v}{(u[t] \approx v) \cdot \sigma}$$

where $\sigma = \mathrm{mgu}(s, s')$, $s' \notin \mathcal{V}$, $t\sigma \not\succeq s\sigma$, $v\sigma \not\succeq u[s']\sigma$

$$\frac{s \not\approx t}{\square} \text{ unit equality resolution} \qquad \frac{A \quad \neg B}{\square} \text{ unit resolution}$$

where s and t (A and B respectively) are unifiable

${}^{t_4:}\mathsf{f}(x, \mathsf{a}) \approx x$



${}^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x, y)), {}^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x, \mathsf{a})), {}^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{a}))$

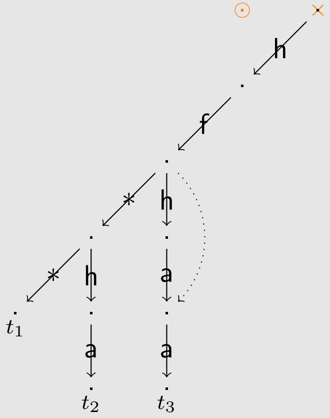
Insert

$^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,y)), {}^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{h}(\mathsf{a}))), {}^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{a}),\mathsf{a}))$

$$t_1 \Rightarrow \mathsf{h.f.}{*}.{*}$$

$$t_2 \Rightarrow \mathsf{h.f.}{*}\mathsf{.h.a}$$

$$t_3 \Rightarrow \mathsf{h.f.h.a.a}$$

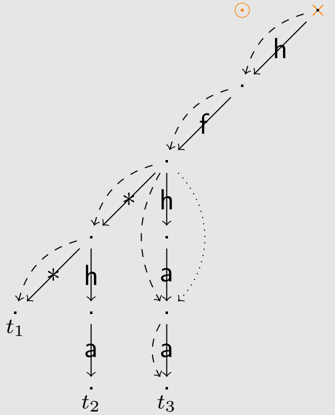


Retrieve

$^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,y)), {}^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{h}(\mathsf{a}))), {}^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{a}),\mathsf{a}))$

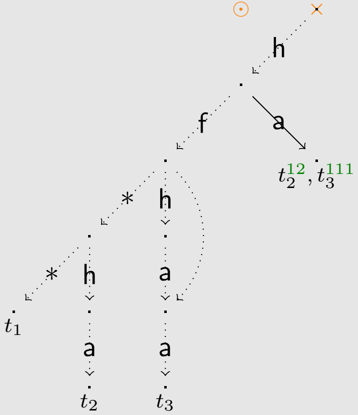
$$\mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{a})) \Rightarrow \mathsf{h.f.}{*}\mathsf{.a}$$

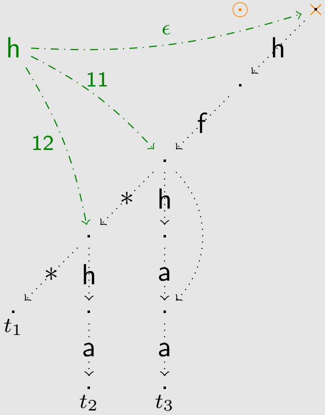
$$u : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{a})) \mapsto \{t_1, t_3\}$$
$$i : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{a})) \mapsto \{t_3\}$$
$$g : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{a})) \mapsto \{t_1\}$$
$$v : \mathsf{h}(\mathsf{f}(x',\mathsf{a})) \mapsto \{\ \}$$



Subterms

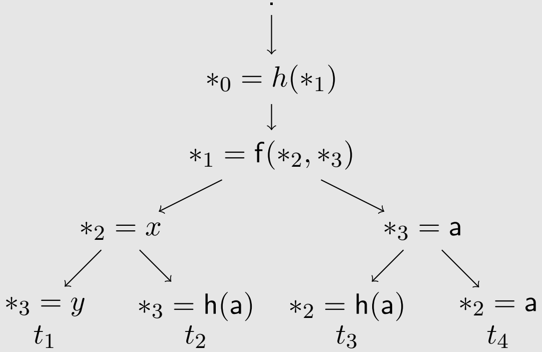
$^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,y)),\ ^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{h}(\mathsf{a}))),\ ^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{a}),\mathsf{a}))$





Build

$^{t_1:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,y)), ^{t_2:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(x,\mathsf{h}(\mathsf{a}))), ^{t_3:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{a}),\mathsf{a})), ^{t_4:}\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a})))$



TPTP/Problems/HWV/HWV134-1.p
2 332 428 formulae, 6 570 884 literals

literals new	total	(ℓ_1, ℓ_2)	$A, \neg B$	sequential search	index search	speed up
1 000	1 000	500 000	761	726ms	70ms	10
1 000	2 000	1 500 000	812	2s	69ms	29
1 000	4 000	3 500 000	723	4s	75ms	53
1 000	8 000	7 500 000	433	9s	125ms	72
1 000	16 000	15 500 000	742	21s	221ms	95
1 000	32 000	31 500 000	592	40s	489ms	82
1 000	64 000	63 500 000	1167	*80s*	697ms	115
1 000	128 000	127 500 000	1479	*160s*	13s	12
1 000	256 000	255 500 000	1097	*320s*	440s	1
1 000	512 000	511 500 000	1440	*640s*	348s	2
1 000	1 024 000	1023 500 000	1534	*1280s*	348s	4