

UNIVERSITY OF BUENOS AIRES  
SCHOOL OF ENGINEERING

ELECTRONIC ENGINEERING

THESIS

---

**Navigation, Guidance and Control system for  
injection of small satellites into LEO**

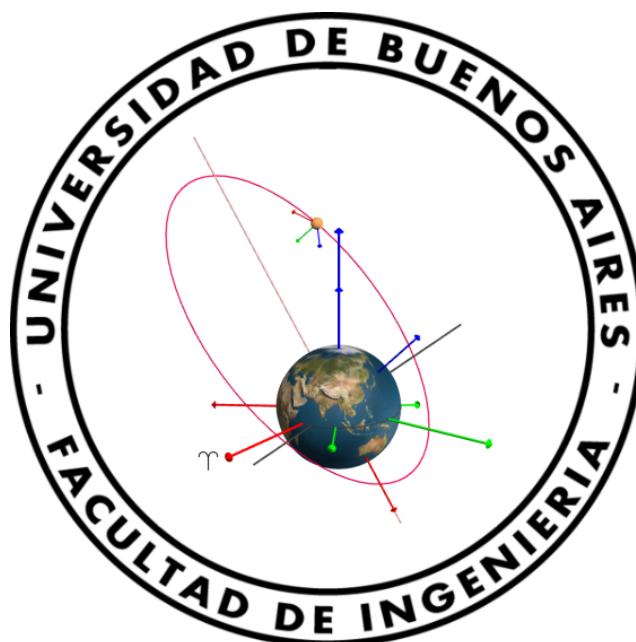
---

*Student:*

Sebastián Lucas SAMPAYO  
Student ID: #93793  
<ssampayo@fi.uba.ar>

*Advisor:*

Dr. Eng. Juan Ignacio GIRIBET  
University ID: #143302  
<jgiribe@fi.uba.ar>



AUTONOMOUS CITY OF BUENOS AIRES, ARGENTINA  
10 November 2016





UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE INGENIERÍA

INGENIERÍA ELECTRÓNICA

TESIS DE GRADO

---

Sistema de Guiado, Navegación y Control para  
la inyección en órbitas LEO de satélites livianos

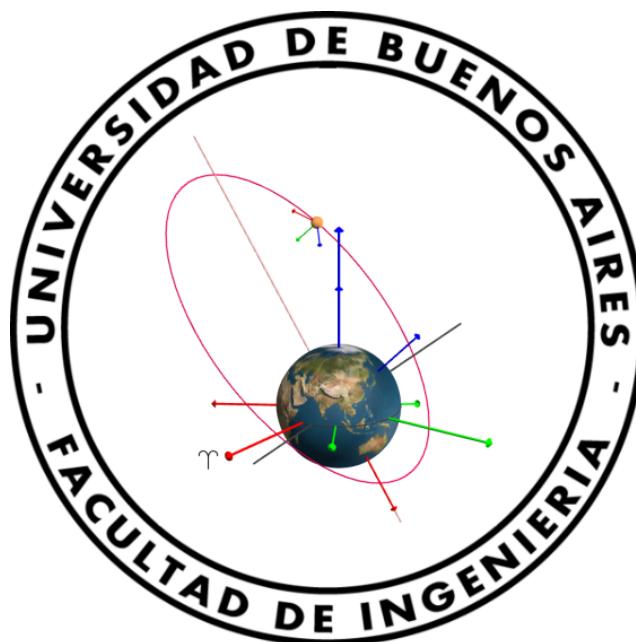
---

*Tesista:*

Sebastián Lucas SAMPAYO  
Padrón: #93793  
<ssampayo@fi.uba.ar>

*Director:*

Dr. Ing. Juan Ignacio GIRIBET  
Legajo: #143302  
<jgiribe@fi.uba.ar>



CIUDAD AUTÓNOMA DE BUENOS AIRES, ARGENTINA  
10 de noviembre de 2016



*To my parents, whose sacrifice and teachings allowed me to undertake this journey,  
to my Love, because without her joy and support I would have failed in the attempt,  
and to the Cosmos, whose amazing fruits have awaken my curiosity for understanding the nature of  
things and solve the most interesting problems of the Engineering.*

S.L. Sampayo

---

*A mis padres, cuyo sacrificio y enseñanzas permitieron que emprendiera este camino,  
a mi amor, sin cuya alegría y contención habría fracasado en el intento,  
y al cosmos, cuyos asombrosos frutos han despertado mi curiosidad por comprender la naturaleza de  
las cosas y resolver los más interesantes problemas de la Ingeniería.*

S.L. Sampayo

---

# Abstract

The purpose of this work is to design and simulate a Navigation, Guidance and Control system for the orbit injection into LEO<sup>1</sup> of a small satellite.

The satellite must reach a specific target orbit, given a limited error margin. Different guidance strategies to accomplish this mission are analysed. For example, the required manoeuvres could be done by the launcher or instead by the satellite after being decoupled. In each case, there are different trajectories for the spacecraft to follow.

A navigation subsystem is designed, which gets information from inertial sensors and external localization sensors and estimates the vehicle state (position, velocity and orientation). Several simulation outputs from different navigation sensors are analysed in order to find the best option that fits the budget and technique requirements of the project.

On the other hand, the control subsystem designed is in charge of making effective the guidance strategy through the actuators given the target state requirements and model constraints. Some of the devices analysed in this section include reaction wheels, control gyros and liquid fuel propulsion thrusters.

In order to analyse each subsystem, a numeric simulator is developed capable of emulating launching conditions and orbital flight.

---

<sup>1</sup>*Low-Earth Orbit*

S.L. Sampayo

---

# Resumen

El propósito de este trabajo es el diseño y simulación de un sistema de guiado, navegación y control para la puesta en órbita LEO<sup>2</sup> de un satélite liviano.

El satélite debe alcanzar una órbita objetivo circular específica, con un margen de error acotado. Se analizan distintas estrategias de guiado para cumplir esta meta. Por ejemplo, las maniobras necesarias podría realizarlas el lanzador o bien el satélite luego de ser desacoplado. En cada caso, existen distintas trayectorias posibles de realizar.

Se diseña un subsistema de navegación, el cual mediante la información brindada por sensores iniciales y sensores externos de localización, estima el estado del vehículo (posición, velocidad y orientación angular). Se hace un estudio por simulación de distintos sensores de navegación para encontrar la mejor opción que se adecúe a los costos y requerimientos técnicos del proyecto.

Por otro lado, el subsistema de control es el encargado de efectivizar a través de los actuadores la estrategia de guiado con requerimientos tanto de posición como de orientación. Entre los actuadores que se analizaran para realizar estas tareas se encuentran ruedas de reacción, control-gyros y propulsores/toberas de combustible líquido.

Para analizar cada subsistema se desarrolla un simulador numérico capaz de emular las condiciones de lanzamiento y de vuelo orbital.

---

<sup>2</sup>*Low-Earth Orbit*, órbitas de baja altura

S.L. Sampayo

---

# Índice general

## Índice general

<b>1. Presentación</b>	<b>1</b>
1.1. Motivation . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	3
<b>2. Introducción</b>	<b>5</b>
2.1. Guiado, navegación y control . . . . .	5
2.2. Preliminares . . . . .	8
2.3. Sistemas de referencia . . . . .	10
2.4. Sistemas de coordenadas . . . . .	14
2.5. Leyes de Kepler . . . . .	17
2.6. Leyes de Newton . . . . .	17
2.7. Parámetros orbitales . . . . .	18
2.8. Ecuación de la órbita de un satélite . . . . .	21
2.9. Órbita en el espacio . . . . .	24
2.10. Vector de elementos orbitales clásicos . . . . .	26
2.11. Transformaciones entre los elementos orbitales y $[r, v]$ . . . . .	27
2.12. Maniobras orbitales . . . . .	29
2.13. Sistemas de propulsión . . . . .	32
2.14. Modelo de la dinámica de un vehículo espacial . . . . .	33
2.15. Órbitas no-keplerianas . . . . .	38
<b>3. Simulador</b>	<b>43</b>
3.1. Implementación del modelo . . . . .	43
3.2. Utilización del modelo . . . . .	51
3.3. Comparación con el STK . . . . .	60
<b>4. Navegador</b>	<b>63</b>
4.1. Navegador inercial (INS) . . . . .	63
4.2. Navegador integrado . . . . .	67
4.3. Simulación . . . . .	75
4.4. Conclusiones . . . . .	81
<b>5. Control de orientación</b>	<b>83</b>
5.1. Control Proporcional Derivativo (PD) . . . . .	83
5.2. Control PD modificado . . . . .	85
5.3. Diseño del PD modificado: $K, K_d$ . . . . .	86

---

5.4. Simulación . . . . .	87
5.5. Conclusiones . . . . .	94
<b>6. Control orbital</b>	<b>95</b>
6.1. Objetivo . . . . .	95
6.2. Estrategias . . . . .	95
6.3. Presentación del problema . . . . .	98
6.4. Algoritmos . . . . .	100
6.5. Errores . . . . .	106
6.6. Simulación . . . . .	110
6.7. Resultados . . . . .	111
6.8. Conclusiones . . . . .	116
<b>7. Conclusiones generales</b>	<b>119</b>
7.1. Conclusiones de la tesis . . . . .	119
7.2. Trabajo futuro . . . . .	120
<b>Bibliografía</b>	<b>123</b>

# Capítulo 1

## Presentación

### 1.1. Motivation

This project is performed within the framework of a collaboration agreement between the Argentine Space Activities National Agency (CoNAE) and the School of Engineering at the University of Buenos Aires (FIUBA), through the Signal Processing, Identification and Control Research Group (GPSIC).

The CoNAE carries on the project “Satellite Injector for Small Useful Payloads (ISCUL)” whose main aim is to build a satellite launcher called Tronador II. Currently, this project is in the initial development phase, building experimental vehicles (Vex). These vectors allow for the validation of each subsystem of the final launcher, as well as the technology developed in our Nation, through small scale launches.

This is the case of the vehicle Vex1B, successfully launched on August 2014 from Punta Indio. This vector allowed for the verification of the Navigation, Guidance and Control system as well as the propulsion systems. The GPSIC has also worked in the development of the NG&C<sup>1</sup> system of this vehicle.

On the other hand, the CoNAE is also currently working on the project “SARE” which consist of a series of small satellites in a distributed architecture for Earth observation. Each one of them will provide a measurement instrument plus its own guidance and propulsion systems. Hopefully, the group of satellites flying in formation will offer similar capacity as that of the traditional monolithic architecture. This novel structure allows for lower launching costs as well as the opportunity to add or change single measurement instruments in a faster way, without changing the overall mission.

Both projects, ISCUL and SARE, are involved in this research work given that the objective of the CoNAE is to use the Tronador to launch this series of small satellites as the first demonstration of its operation.

---

<sup>1</sup>Navigation, Guidance and Control

## 1.2. Motivación

Este proyecto se desarrolla en el marco de un acuerdo de colaboración entre la Comisión Nacional de Actividades Espaciales (CoNAE) y la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires (FIUBA), a través del Grupo de Procesamiento de señales, Identificación y Control (GPSIC).

La CoNAE lleva adelante el proyecto “Inyector Satelital Para Cargas Útiles Livianas (ISCUL)” cuyo objetivo principal es la construcción de un lanzador satelital denominado Tronador II. Actualmente, este proyecto se encuentra en una fase de desarrollo inicial, construyendo vehículos de prueba (Vex). Estos permiten validar cada subsistema del lanzador final, así como también la tecnología desarrollada en el país, mediante lanzamientos de menor escala.

Este es el caso del vehículo Vex1B, lanzado exitosamente en Agosto de 2014 desde Punta Indio. Este vehículo permitió verificar el sistema de Guiado, Navegación y Control así como también los sistemas de propulsión. El GPSIC también participó en el desarrollo del sistema de NG&C<sup>2</sup> de este vehículo.

Por otro lado, la CoNAE también se encuentra trabajando actualmente en el proyecto “SARE” conformado por una serie de satélites livianos de arquitectura segmentada para observación de la Tierra. Cada uno de ellos poseerá un instrumento de medición además de sus correspondientes sistemas de guiado y propulsión. Se espera que el conjunto de satélites volando en formación, ofrezca capacidades similares a la de un satélite de mayor tamaño. Esta es la hipótesis de trabajo en la que se basan las arquitecturas espaciales segmentadas, las cuales esperan reemplazar en ciertas aplicaciones a la arquitectura monolítica tradicional. Esta novedosa estructura permite un menor costo de lanzamiento así como también la posibilidad de agregar o cambiar instrumentos de medición del conjunto de forma más rápida, y sin alterar el funcionamiento del conjunto. [17]

Ambos proyectos, ISCUL y SARE, se conjugan en este trabajo de investigación puesto que el objetivo de la CoNAE es que el Tronador lance esta serie de satélites como primera demostración de operación.

---

<sup>2</sup>Navegación, Guiado y Control

### 1.3. Objetivos

El sistema de NG&C desarrollado en el marco de esta tesis se pensará de forma genérica, de modo que pueda ser utilizado en cualquier tipo de órbita LEO, incluyendo la del SARE. Esta órbita resulta muy exigente para el Tronador II, puesto que el vehículo lanzador fue pensado para cargas más livianas que este satélite. El Tronador podrá lanzar el SARE al espacio, mas no alcanzar de forma directa la altura en la que debe operar la misión. Para lograr ubicar el satélite en su altura de operación es necesario realizar una serie de maniobras de guiado. En este trabajo de Tesis se analizarán en detalle estos temas, desarrollando un sistema de NG&C (poniendo el foco en los algoritmos del sistema) que permita cumplir la misión requerida y lograr inyectar al SARE en la órbita adecuada.

Habitualmente, luego de inyectar el satélite en la órbita inicial, se recolectan los datos de navegación en la estación terrena durante aproximadamente un día para ser analizados por los ingenieros y definir la secuencia de control a realizar. A continuación se envían los comandos necesarios al satélite para efectuar la transferencia orbital. En este proyecto se busca analizar una idea más innovadora que dote de cierta inteligencia al vehículo espacial de modo que pueda realizar autónomamente esta tarea, mediante el análisis de los datos generados por sus propios sensores y sin la intervención de la estación terrena. Este sistema permitiría reducir los tiempos de operación para la inyección orbital así como también reducir/eliminar los riesgos de la comunicación tierra-satélite durante la etapa inicial. Este sistema autónomo se ha estudiado en la literatura [21] e incluso implementado para ciertos casos en la industria [Microcosm Inc.], principalmente para mantenimiento orbital (es decir, para realizar pequeñas correcciones a lo largo de la vida de la misión satelital). En el caso de esta Tesis se busca desarrollar esta idea para la etapa de puesta en órbita, también analizada en algunas fuentes como [22].



# Capítulo 2

## Introducción

### 2.1. Guiado, navegación y control

#### 2.1.1. Navegación

La navegación es el proceso por el cual un sujeto o vehículo en movimiento, calcula las variables físicas que describen instantáneamente su *estado*. El estado comprende por lo general, la posición, velocidad y orientación respecto a cierto sistema de referencia, en algún sistema de coordenadas establecido.

La navegación toma los datos de los sensores del vehículo y los procesa de forma tal de calcular las mejores estimaciones posibles del estado del mismo. Esta etapa es esencial en el control automático del objeto, ya que es la base sobre la cual se toman las decisiones necesarias de guiado y control. Estimar incorrectamente la posición de un vehículo, por ejemplo, podría significar un inadecuado uso de combustible, implicando pérdidas de dinero en el proyecto.

#### 2.1.2. Guiado

Una vez que conocemos con cierta precisión las variables de estado de nuestro vehículo, queremos que este realice una determinada trayectoria según nuestra conveniencia, esto es, queremos guiar al objeto. Un avión, por ejemplo, al descender requiere alinear su dirección con la pista de aterrizaje y orientarse suave y coordinadamente para culminar el vuelo exitosamente. En otros casos se busca también que el vehículo realice una trayectoria de forma tal de minimizar el uso de combustible u optimizar algún otro parámetro. El telescopio espacial Hubble, en diversas misiones de observación estelar, necesita orientar su foco hacia precisas direcciones en el universo, maximizando la visibilidad, y por lo tanto optimizando el uso de instrumentos de medición que tienen costos millonarios. En el caso de la puesta en órbita de un satélite, es necesario guiarlo desde el punto de inyección hasta la órbita de operación de la misión.

#### 2.1.3. Control

Con las variables de estado y la trayectoria de referencia a disposición, el control es el encargado de tomar decisiones inteligentes y dirigir los músculos del vehículo, dando vida al objeto. Al mismo tiempo, no debe perder de vista los requerimientos y cuidar del uso de los actuadores, que posiblemente también tengan un costo sustancial en el proyecto.

Durante la vida de un satélite existen distintas tareas para las cuales es necesario algún tipo de control automático.

## Temperatura

Mientras una cara del satélite que mira directo al sol puede encontrarse a temperaturas de 100°C, la cara opuesta, a la sombra, alcanza valores de 100°C bajo cero. En el medio, dentro del habitáculo, hay electrónica funcionando. Para asegurar condiciones más propicias para este funcionamiento, un control de temperatura es utilizado.

## Paneles solares

Todos los circuitos de los que se compone el vehículo utilizan una fuente de alimentación eléctrica. El Sol en la práctica, es una fuente inagotable de energía solar que podemos manipular y convertir (parte de ella) en energía eléctrica. Para esto se utilizan paneles solares y su eficiencia depende directamente del ángulo de inclinación con el cual se orienten de cara al Sol. En este sentido, es fundamental un control automático que oriente constantemente los paneles aprovechando al máximo la energía solar. Además, en la etapa de lanzamiento, el satélite no puede viajar con los paneles desplegados, no solo por el lugar que ocuparía, sino también porque las condiciones ambientales durante el vuelo las destruirían. Por esta razón, al inyectarse en el espacio exterior, debe desplegar los paneles, y debe hacerlo bien, ya que de eso dependerá la energía para toda la misión.

## Posición

La misión particular que realizará el satélite, se diseña para una órbita específica, que impone límites al movimiento traslacional de este. En principio, mientras no actúen fuerzas externas sobre un objeto orbitando la Tierra, este describirá eternamente la misma trayectoria, definida por la fuerza de atracción entre los 2 cuerpos (la Tierra y el satélite). Sin embargo, esta situación ideal solo se encuentra en los primeros capítulos de los libros de Mecánica Clásica y Astrodinámica. En la realidad, muchas otras fuerzas perturban al objeto, además de la gravedad, lo que resulta en trayectorias diferentes de las ideales.<sup>1</sup> Por esto, es necesario un sistema que asegure que el vehículo permanezca en la órbita deseada. Esto se conoce también como control orbital, *OCS*, por sus siglas en inglés, *Orbit Control System*. En otros casos también es necesario pasar de una órbita a otra. Por ejemplo, al comienzo de la misión espacial, el lanzador satelital suele ubicar a la nave en una órbita cercana, pero no exactamente la que necesita para operar. En general, la distancia entre los apogeos de ambas órbitas suele ser de entre 30km y 70km [referencia a manuales de vehículos]. Por otro lado, al final de una misión, cuando el satélite cumple su vida útil y deja de operar, muchas veces se reserva un poco de combustible para maniobras de expulsión de la órbita. En el mejor de los casos, se intenta alcanzar la velocidad de escape necesaria para dejar de orbitar la Tierra y perderse en el sistema solar. En otros casos, se lleva el objeto a una órbita “cementerio”, bien definida y alejada de satélites operativos, en la cual descansan otros objetos inoperantes. Para todos estos casos, es fundamental un control orbital que cuide la utilización de los actuadores y utilice la menor cantidad de combustible, uno de los componentes más caros del proyecto.

## Orientación

La orientación de un satélite refiere a su posición angular en el espacio. En palabras simples, a donde mira el satélite, o más correctamente, hacia qué punto del universo se orienta su eje principal. Los objetivos de esta tarea son diversos, dependen directamente de la misión específica que se esté llevando a cabo. Un satélite de observación de la Tierra, seguramente posea una cámara fija y por lo tanto necesita orientar la nave de modo que apunte a la zona geográfica que se desea capturar. Un satélite de comunicaciones geoestacionario, como el ArSat, precisa iluminar con su antena los países

<sup>1</sup>Estas fuerzas serán presentadas en la sección 2.14, al describir el modelo de la dinámica del satélite.

sobre los que brinda sus servicios. Otros ejemplos aún más interesantes se encuentran en las maniobras de reencuentro (*rendez-vous*) entre naves espaciales. Este es el caso de un módulo de abastecimiento que provea oxígeno y otros víveres a los astronautas de la Estación Internacional Espacial. Este módulo, luego de ser lanzado al espacio, debe aproximarse a la estación suavemente y con una orientación muy precisa para acoplarse correctamente. La maniobra de descenso y aterrizaje del *Curiosity*, comandada por el argentino Miguel San Martín, es otro ejemplo de control de orientación y de traslación, en este caso para un vehículo a por lo menos 60 millones de kilómetros de la Tierra sobre la superficie del planeta Marte.

#### 2.1.4. Sistema de control

Un sistema de control para estabilizar y poner en órbita un satélite se compone esencialmente de estos tres bloques recién descriptos (Fig. 2.1). En este caso, la planta se corresponde con el modelo de la dinámica del vehículo espacial. Los actuadores son los motores de propulsión y ruedas de reacción del satélite. Los sensores son un receptor de señal GPS, giróscopos y acelerómetros.

En este trabajo de tesis se desarrolla una propuesta del navegador, el guiado y el control necesarios para inyectar un satélite liviano en una órbita de baja altura, *LEO*, en inglés, *Low Earth Orbit*.

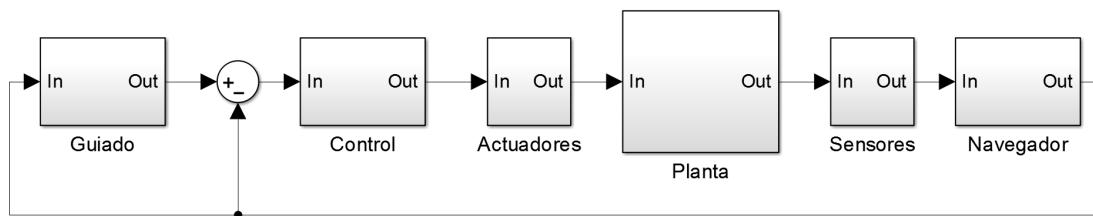


Figura 2.1: Sistema de control típico de NG&C

## 2.2. Preliminares

En el campo de la Mecánica Clásica, la física analiza las interacciones entre los distintos entes de un sistema por medio de la cinemática y la dinámica. Complementariamente, la matemática provee herramientas y principalmente un lenguaje para describir los fenómenos físicos. Una secuencia de pasos muy útil para encarar muchos problemas tecnológicos consiste en:

1. Definir un sistema de referencia.
2. Describir el sistema, las variables, los entes que participan y las interacciones que los relacionan en función de la referencia definida anteriormente. En otras palabras, describir la física del problema.
3. Adoptar un lenguaje para darle valor numérico a estas variables según sus magnitudes físicas, y utilizar los datos conocidos para descubrir, en función de estos, las incógnitas a resolver. En otras palabras, la matemática del problema.
4. Eventualmente, si se desea que una computadora resuelva automáticamente el problema, se debe escribir el algoritmo conceptual (o matemático) y finalmente el código del programa a ejecutar, paso que llamaremos: describir el algoritmo.

Este método resulta muy natural y sistemático, y en consecuencia se utilizará a lo largo del presente trabajo para describir cada problema.

### 2.2.1. Tensores

En la literatura de todo problema asociado al guiado, navegación y control, el lector se encuentra con las ecuaciones diferenciales o a veces directamente con los modelos en variable de estado en tiempo discreto que gobiernan la naturaleza del movimiento de un objeto móvil macroscópico. Muchas veces la notación utilizada deja lugar a dudas, para quien se está introduciendo en el tema, sobre el sistema de coordenadas en el cual se encuentra escrita una variable, o el sistema de referencia respecto al cual se está derivando.

Utilizaremos en este caso la notación tensorial, porque nos provee un lenguaje independiente de las transformaciones entre sistemas de coordenadas (dependientes del tiempo), y por lo tanto una comprensión más simple, que principalmente deja claras las entidades físicas que se están tratando.

Una excelente descripción de esta herramienta y de su aplicación al modelado y simulación de vehículos aeroespaciales se encuentra en el libro de Zipfel, [25]. El lector es invitado a referirse a dicha lectura para conocer en detalle estos temas.

En esta tesis solo se presentarán los resultados prácticos de dicho desarrollo, necesarios para introducir el trabajo de modelado y simulación realizado en este caso de estudio.

En particular, los tensores que se utilizarán a lo largo de este trabajo son los tensores *Cartesianos* y se empleará la letra en negrita para escribirlos. Por ejemplo, el tensor de 1er orden (que es un vector) asociado a la posición de un satélite respecto al centro de la Tierra lo escribiremos como:  $\mathbf{r}$ . En otro caso, la velocidad de un vehículo medida según un observador fijo a la Tierra será llamada  $\mathbf{v}^E$ , con la *E* de Tierra (en inglés *Earth*). Se mantendrán las referencias al idioma inglés, para mantener la sintonía con las ecuaciones encontradas comúnmente en la literatura. Lo importante para destacar es que el significado de  $\mathbf{r}$  es puramente físico. Representa la posición del satélite respecto a la Tierra, y esto no depende de ninguna manera del sistema de coordenadas que se emplee para escribir las ecuaciones posteriormente. La posición del satélite seguirá siendo la posición del satélite en coordenadas terrestre, inerciales o geográficas, a pesar de que los números que se utilicen para representarla varíen de sistema a sistema (más adelante se explicarán en mayor detalle los sistemas de coordenadas).

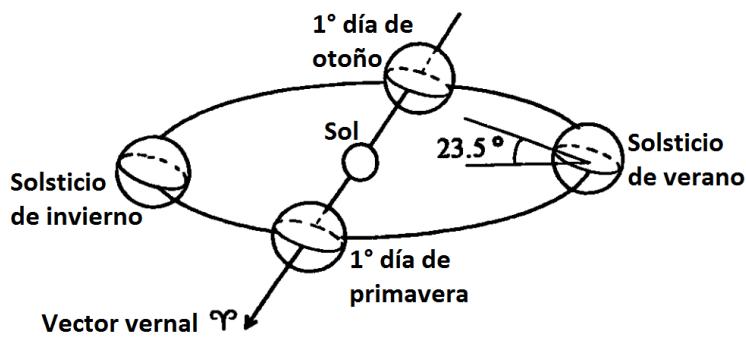


Figura 2.2: Primer punto de Aries y de Libra. Estaciones en referencia al hemisferio Sur.

### 2.2.2. Terminología

El plano de la órbita que describe la tierra alrededor del Sol se denomina comúnmente *plano de la eclíptica*. La *eclíptica* es la trayectoria “aparente” que describe el Sol alrededor de la Tierra, desde el punto de vista de un observador parado en el planeta. La Tierra a su vez rota sobre si misma alrededor de un eje perpendicular al plano que contiene al *ecuador terrestre* y se encuentra inclinado  $23.5^\circ$  respecto al plano de la eclíptica. Este último plano intersecta al ecuador en 2 puntos: el *primer punto de Aries*, simbolizado con  $\text{♈}$ , y el *primer punto de Libra*, simbolizado con  $\text{♎}$ . Cada uno apunta a la constelación que su nombre indica respectivamente. Otra forma de ver estas direcciones es imaginando un vector trazado entre el centro de la Tierra y el Sol, en el primer día del otoño del hemisferio Sur. La dirección hacia el Sol de este vector apunta al primer punto de Aries, también llamado “punto vernal”, y la dirección opuesta al primer punto de Libra, como en la figura 2.2.

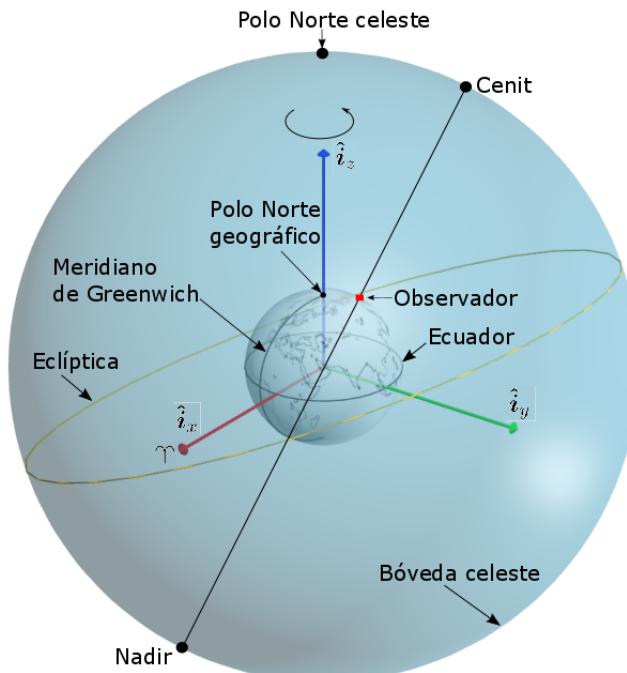


Figura 2.3: Terminología astronómica.

La *bóveda celeste* o *esfera celeste* es una esfera imaginaria que rodea a la Tierra y donde se proyectan los astros.

El *polo Norte celeste* es el punto imaginario sobre la bóveda celeste a donde se orienta el eje de rotación terrestre. Se encuentra directamente encima del polo Norte geográfico a una latitud de  $+90^\circ$ . Si se mira al cielo en el hemisferio norte, este punto se encuentra a menos de  $1^\circ$  de la estrella *Polaris*.

El *cenit* es el punto donde se intersecta la bóveda celeste con la vertical de un observador parado en la Tierra. El *nadir* es el punto diametralmente opuesto, sobre la esfera celeste. Otra forma de comprender estos puntos es trazando una recta entre un observador y el centro de la Tierra. Las dos intersecciones de esta línea con la esfera celeste son el nadir (si el observador mira hacia el centro de la Tierra), y el cenit (si mira hacia el cielo).

## 2.3. Sistemas de referencia

Habitualmente los conceptos de *sistemas de referencia* y *sistemas de coordenadas* suelen confundirse en los primeros cursos de física, aunque su diferencia es fundamental.

El sistema de referencia (en inglés llamado *frame*) es la estructura o el marco que se elige para definir el espacio físico sobre el cual se trabajará y a partir del cual se definirán las distintas variables físicas. Por ejemplo, si se quiere trabajar la orientación de un vector en el espacio es necesario definir direcciones principales sobre las cuales medir, de alguna manera, ángulos y rotaciones.

Una definición formal para este concepto, tomada del libro de Zipfel [25], es la siguiente:

**Sistema de referencia** Conjunto de puntos ilimitado sobre el espacio tridimensional Euclíadiano con distancias invariantes que posee al menos 3 puntos no colineales.

Lo mismo sucede al tomar derivadas, por ejemplo la velocidad, derivada de la posición. Es fundamental definir respecto a qué referencia se deriva la posición, puesto que un observador inercial mediría cierta magnitud, mientras que por ejemplo otro moviéndose sobre un vehículo mediría otra.

### ECI-J2000

Un ejemplo clásico de sistema de referencias, que se usa muy seguido en este trabajo, es el denominado “Geocéntrico - Inercial”, conocido por sus siglas en inglés *ECI*, *Earth Centered Inertial*. El sistema ECI se encuentra fijo a las estrellas. Su dirección en  $\hat{\mathbf{i}}_x$  apunta al primer punto de Aries, desde el centro de la Tierra. La dirección en  $\hat{\mathbf{i}}_z$  coincide con el eje de rotación terrestre con sentido al polo Norte celeste. Finalmente, la dirección en  $\hat{\mathbf{i}}_y$  completa la terna derecha de modo que  $\hat{\mathbf{i}}_z \times \hat{\mathbf{i}}_x = \hat{\mathbf{i}}_y$ . La representación de esta terna se simboliza mediante la letra caligráfica  $\mathcal{I}$ , el origen  $I'$ , y los 3 vectores ortogonales:

$$\mathcal{I} = \{I', \hat{\mathbf{i}}_x, \hat{\mathbf{i}}_y, \hat{\mathbf{i}}_z\}$$

Cabe destacar que, debido al sutil fenómeno de precesión planetaria, el eje de rotación terrestre (eje  $\hat{\mathbf{i}}_z$  en ECI) describe el famoso “cabecero cónico” y por lo tanto no se mantiene precisamente fijo a las estrellas. Es por eso que se hace necesario definir el sistema para una cierta fecha. Por ejemplo, hoy en día es común utilizar como referencia el sistema ECI definido para el  $1^\circ$  de Enero del año 2000, razón por la cual se denomina ECI-J2000.

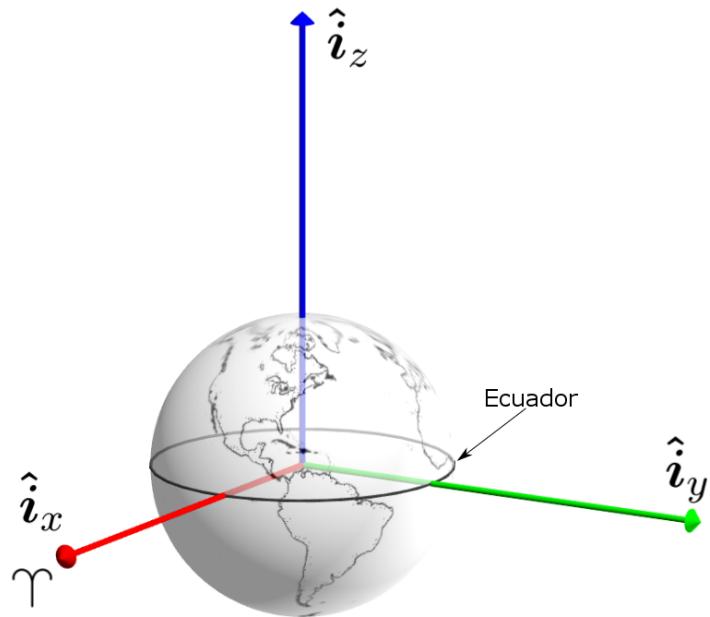


Figura 2.4: Sistema de referencia inercial, ECI.

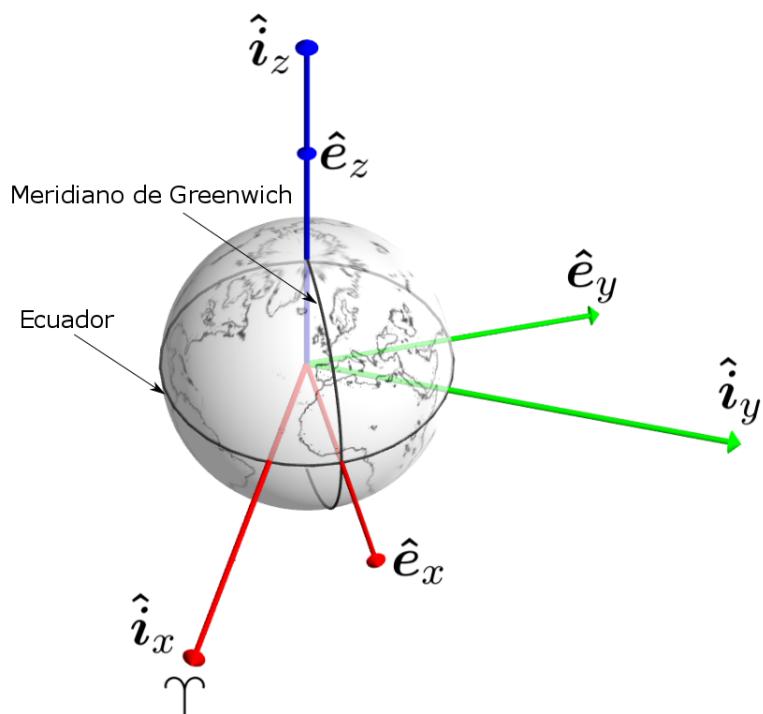


Figura 2.5: Sistema de referencia ECEF.

## ECEF

Este sistema será llamado indistintamente *terrestre* y, por sus siglas en inglés, *ECEF*, *Earth Centered Earth Fixed*. Se encuentra fijo al planeta Tierra. Su dirección en  $\hat{e}_x$  se orienta al punto de intersección entre el ecuador terrestre y el meridiano de *Greenwich*, desde el centro de la Tierra. La dirección en  $\hat{e}_z$  coincide nuevamente con el eje de rotación terrestre con sentido al polo Norte celeste. Finalmente, la dirección en  $\hat{e}_y$  completa la terna derecha de modo que  $\hat{e}_z \times \hat{e}_x = \hat{e}_y$ .

El sistema se representa mediante:

$$\mathcal{E} = \{E', \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$$

## Cuerpo

Otro sistema muy utilizado en las aplicaciones de vehículos aeroespaciales es el sistema de *cuerpo*. Las direcciones de la terna que lo representa suelen coincidir con las direcciones de los ejes principales de inercia del vehículo. Otras veces se apunta la dirección en  $\hat{b}_x$  hacia la nariz del vehículo,  $\hat{b}_y$  hacia el ala derecha y  $\hat{b}_z$  hacia abajo.

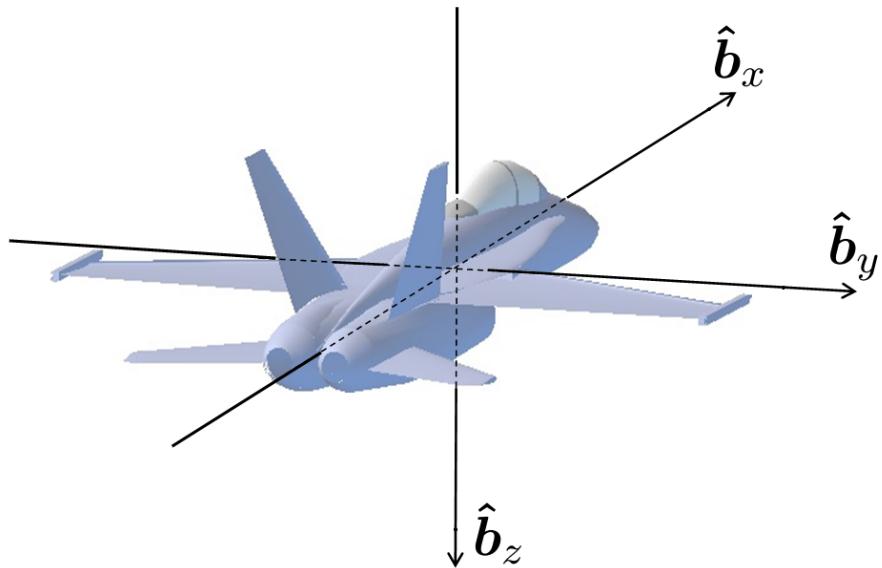


Figura 2.6: Sistema de referencia de cuerpo.

El sistema se representa mediante:

$$\mathcal{B} = \{B', \hat{b}_x, \hat{b}_y, \hat{b}_z\}$$

donde  $B'$  coincide con el centro de masa del vehículo.

## Orbital RPY

El origen de la terna orbital RPY se encuentra en el centro de masa del satélite. La dirección en  $\mathbf{z}$  se orienta hacia el nadir, y se llama eje de *yaw*,  $\hat{\mathbf{r}}_{yaw}$ . Por otro lado, la dirección en  $\mathbf{x}$  se encuentra en el plano de la órbita, es perpendicular a  $\mathbf{z}$  y su sentido es a favor del movimiento del satélite. Este

eje se denomina de *roll*,  $\hat{\mathbf{r}}_{roll}$ .<sup>2</sup> Como es costumbre,  $\mathbf{y}$  completa lógicamente la terna derecha, y el eje correspondiente se conoce como eje de *pitch*,  $\hat{\mathbf{r}}_{pitch}$ . Los apodos de los ejes cobrarán sentido en la sección siguiente, al relacionar este sistema con la terna de cuerpo. Sucede que se define la orientación del cuerpo rígido en relación a esta terna orbital RPY.

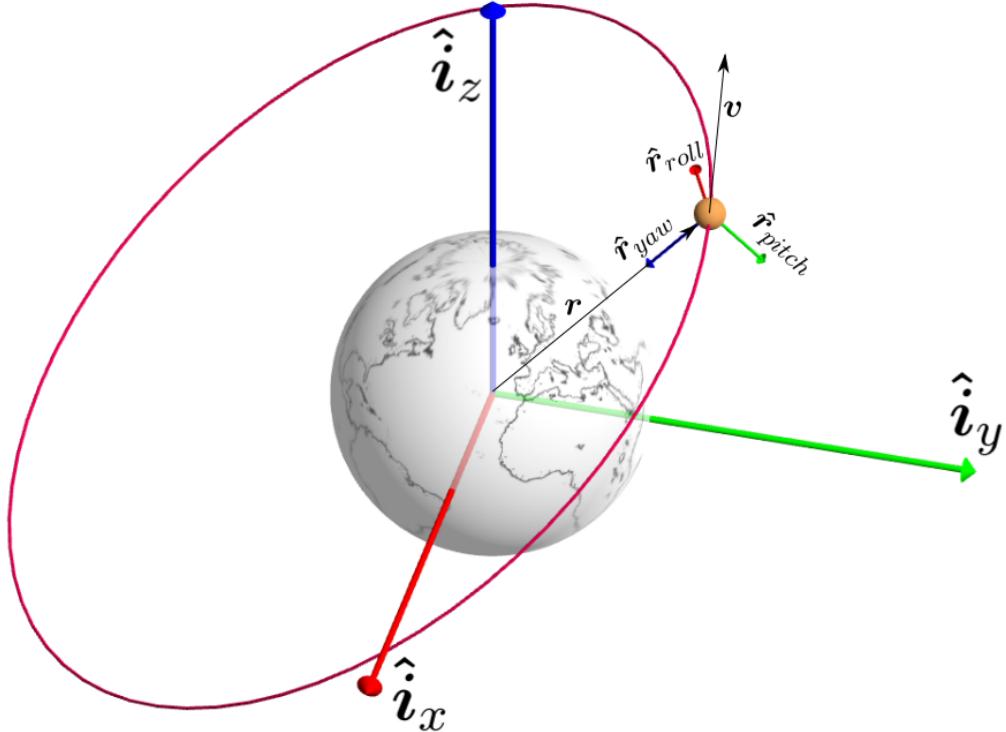


Figura 2.7: Sistema de referencia orbital RPY.

Cada eje del sistema también puede definirse a partir de la posición ( $\mathbf{r}$ ) y velocidad ( $\mathbf{v}$ ) del vehículo, coherentemente con lo recién expuesto:

- $\hat{\mathbf{r}}_{yaw} = -\mathbf{r} \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}$
- $\hat{\mathbf{r}}_{pitch} = (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \frac{1}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{r}\|}$
- $\hat{\mathbf{r}}_{roll} = \hat{\mathbf{r}}_{pitch} \times \hat{\mathbf{r}}_{yaw}$

El sistema se representa mediante:

$$\mathcal{R} = \{R', \hat{\mathbf{r}}_{roll}, \hat{\mathbf{r}}_{pitch}, \hat{\mathbf{r}}_{yaw}\}$$

donde  $R'$  coincide con el centro de masa del vehículo.

---

<sup>2</sup>La dirección en  $\mathbf{x}$  puede coincidir con la dirección de la velocidad del satélite (en el caso de una órbita circular), o bien con la proyección de la velocidad sobre la recta perpendicular a  $\mathbf{z}$  sobre el plano orbital (en el caso de una órbita elíptica).

## 2.4. Sistemas de coordenadas

Por otro lado, el sistema de coordenadas es la herramienta matemática que se utiliza para asignar números algebraicos a cierta magnitud física. Estos valores numéricos se denominan *coordenadas*, y se arreglan en forma de matrices, ya que estas son muy convenientes para resolver las ecuaciones, y especialmente al momento de escribir el código computacional.

Algunas definiciones formales para el caso general de tres dimensiones, tomadas del libro de Zipfel [25] son:

**Coordenadas** Números algebraicos ordenados, llamados *n-tuplas*.

**Sistemas de coordenadas** O Sistemas coordinados, son entidades abstractas que establecen una correspondencia uno a uno entre elementos del espacio tridimensional Euclíadiano y las coordenadas.

**Sistemas de coordenadas Cartesianos** Son sistemas coordinados en el espacio Euclíadiano para los cuales vale la métrica Cartesiana:  $x = \sum_i x_i^2$

**Ejes de coordenadas** O Ejes coordinados, son la imagen geométrica de las escalas matemáticas de los números algebraicos.

**Transformación de coordenadas** Es un renombramiento de cada elemento del espacio Euclíadiano con nuevas coordenadas, de acuerdo a cierto algoritmo. Un sistema coordinado se dice que se encuentra *asociado* a un sistema de referencia si las coordenadas de este último sobre el primero se mantienen invariantes a lo largo del tiempo.

Cada sistema de referencia tiene asociado un sistema de coordenadas *preferido*, cuyos ejes coordinados coinciden con las direcciones principales del sistema de referencia y el origen es el mismo. Esta es la razón por la cual en los libros suele utilizarse el mismo término indistintamente para sistemas de referencia y de coordenadas, como si fueran sinónimos. Si bien esto facilita la redacción, es importante tener claro que conceptualmente tienen significados distintos. Marcar esta diferencia además distingue mejor la física de la matemática del problema en cuestión.

### 2.4.1. Transformación de coordenadas

Sea un tensor de primer orden  $\mathbf{x}$  que se escriba en cierto sistema de coordenadas  $A$  como  $[\mathbf{x}]^A$ , y sea otro sistema de coordenadas  $B$ , escribiéndose el mismo tensor en este sistema  $[\mathbf{x}]^B$ , entonces, la transformación de coordenadas que relaciona ambos arreglos es:

$$[\mathbf{x}]^B = C_A^B [\mathbf{x}]^A$$

Ahora supóngase que la terna de vectores que caracteriza al sistema  $A$  sea  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  y de igual manera con el sistema  $B$  sea  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ , entonces la matriz de cambio de base  $C_A^B$  se escribe:

$$C_A^B = \begin{bmatrix} [\mathbf{a}_1]^B & [\mathbf{a}_2]^B & [\mathbf{a}_3]^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1]^A & [\mathbf{b}_2]^A & [\mathbf{b}_3]^A \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} ([\mathbf{b}_1]^A)^T \\ ([\mathbf{b}_2]^A)^T \\ ([\mathbf{b}_3]^A)^T \end{bmatrix}$$

Si las componentes de cada vector columna son  $[\mathbf{a}_i]^B = \begin{bmatrix} a_{i1}^B \\ a_{i2}^B \\ a_{i3}^B \end{bmatrix}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , entonces esta matriz puede escribirse entonces como:

$$C_A^B = \begin{bmatrix} a_{11}^B & a_{21}^B & a_{31}^B \\ a_{12}^B & a_{22}^B & a_{32}^B \\ a_{13}^B & a_{23}^B & a_{33}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Esta matriz también se denomina *matriz de cosenos directores*, DCM, ya que

$$\cos \angle(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1) = ([\mathbf{b}_1]^B)^T \cdot [\mathbf{a}_1]^B = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} a_{11}^B \\ a_{12}^B \\ a_{13}^B \end{bmatrix} = a_{11}^B$$

Y en general para cada elemento:

$$\cos \angle(\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_k) = a_{ki}^B = c_{ik}; \quad i = 1, 2, 3; \ k = 1, 2, 3$$

A lo largo de este trabajo se utilizarán los sistemas de coordenadas *preferidos* asociados a los sistemas de referencia descriptos anteriormente.

## ECI a ECEF

Una de las transformaciones más utilizadas durante este trabajo es aquella que relaciona la terna inercial con la terrestre. La Tierra rota sobre el eje  $\hat{\mathbf{i}}_z$ . El tiempo que tarda en dar una vuelta completa de  $360^\circ$ , y por lo tanto, el tiempo que tarda en orientarse a la misma constelación de estrellas luego de una rotación, se denomina *día sideral*. Este lapso de tiempo difiere del tiempo que tarda en mirar con la misma cara al sol, el *día solar*, en unos 4 minutos. Esto es debido a la traslación del planeta alrededor del Sol, simultánea a la rotación sobre su propio eje. El ángulo que caracteriza la orientación de la terna ECEF respecto a la ECI, y por lo tanto la fracción del día sideral en que se encuentra la Tierra, se denomina *ángulo horario*,  $\Xi$ , y se puede ver en la figura 2.8.

La transformación que relaciona estos sistemas es entonces una rotación en Z positivo de la terna ECI:

$$C_I^E = C_z(\Xi) = \begin{bmatrix} \cos \Xi & \sin \Xi & 0 \\ -\sin \Xi & \cos \Xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

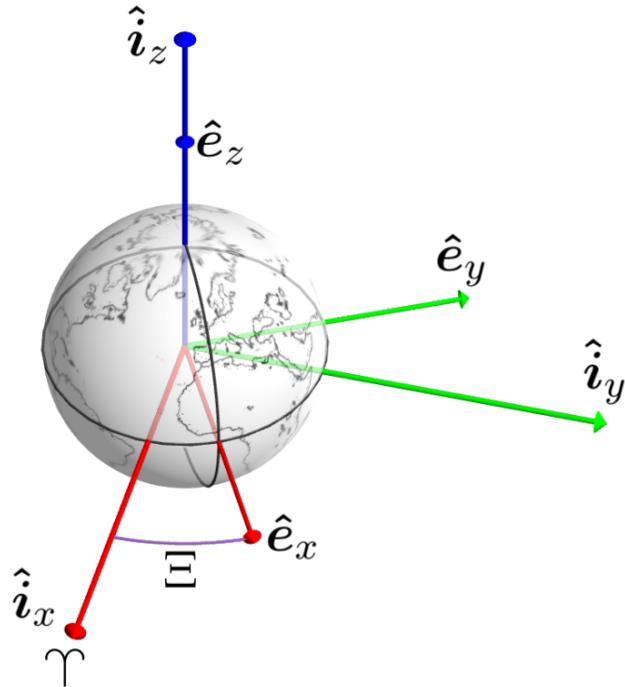


Figura 2.8: Sistema de referencia ECEF y ECI.

### Cuerpo

La transformación entre una terna de referencia y la terna de cuerpo se puede realizar de varias maneras. En particular cuando ambos sistemas coinciden en el origen, la transformación es una sucesión de tres rotaciones. Lo que difiere en las diversas formas de realizar este cambio de coordenadas es el tipo y el orden de rotaciones realizadas. En este trabajo, el orden que se utiliza para orientar un cuerpo rígido en el espacio es “ZYX”. Esto significa que para alcanzar la orientación de la terna de cuerpo, se deben realizar sobre la terna de referencia las siguientes operaciones:

1. Rotación sobre el eje Z en un ángulo  $\psi$ , llamado *yaw*
2. Rotación sobre el eje Y en un ángulo  $\theta$ , llamado *pitch*
3. Rotación sobre el eje X en un ángulo  $\phi$ , llamado *roll*

Esta transformación se describe matemáticamente como una productoria de matrices de cambio de base representando cada rotación. Un vector de coordenadas  $[\mathbf{x}]^R$  se pasa a coordenadas de cuerpo  $[\mathbf{x}]^B$  mediante:

$$[\mathbf{x}]^B = C_x(\phi)C_y(\theta)C_z(\psi)[\mathbf{x}]^R$$

$$C_R^B = C_x(\phi)C_y(\theta)C_z(\psi)$$

Como aclaración, se puede destacar que las rotaciones 2 y 3 (eje Y y eje X) se realizan sobre sistemas de coordenadas distintos, y no sobre los ejes del sistema de coordenadas inicial,  $R$ . Es decir, luego de la rotación inicial sobre Z, i.e.  $\hat{r}_{yaw}$ , la segunda rotación se da sobre un sistema intermedio, cuyo eje Y fue rotado respecto al inicial  $\hat{r}_p$ , según  $C_z(\psi)$ . Este mecanismo sucede nuevamente en la última rotación, que se da sobre el eje X de un otro sistema intermedio, producto de rotar la terna de referencia en  $C_y(\theta)C_z(\psi)$ .

## 2.5. Leyes de Kepler

En el año 1594, Johannes Kepler abandonaba sus estudios de teología en Tübingen, Alemania, para dedicarse al dictado de un seminario de matemática en Graz, Austria. Fue en esa estadía que, motivado por la teoría heliocéntrica de Nicolás Copérnico, comenzó a desarrollar la idea de que el movimiento de los planetas se debía a una fuerza ejercida por el Sol, proporcional a la inversa de la distancia. Luego de sus primeras publicaciones cobró fama y llamó la atención de un astrónomo danés, Tycho Brahe, quien por entonces se encontraba trabajando en Praga e invitó a Kepler a asistirlo en el cálculo de las órbitas planetarias. En el año 1609, luego de la muerte de Tycho, J. Kepler publicó en Praga su obra *Astronomia Nova*, donde enunció tres leyes empíricas referidas al movimiento de los planetas alrededor del Sol.

**Primera Ley de Kepler (Órbita elíptica).** *La órbita que describe cada planeta es una elipse con el Sol ubicado en uno de sus focos.*

**Segunda Ley de Kepler (Ley de áreas).** *El vector radial que indica la posición del planeta respecto al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.*

**Tercera Ley de Kepler (Períodos).** *El cuadrado del período de revolución,  $T_{orb}^2$ , es proporcional a  $a^3$  con  $a$  la distancia media al Sol.*

## 2.6. Leyes de Newton

Más tarde, en 1687, Isaac Newton, basado en los trabajos de J. Kepler y Tycho Brahe, postuló en su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, las famosas tres leyes físicas que gobiernan el movimiento de un cuerpo, además de la ley de gravitación universal.

**2º Ley de Newton** La fuerza a la que se somete un cuerpo puntual de masa  $m$  es proporcional a su aceleración,  $\mathbf{a}$ .

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{r}$  la posición y  $\mathbf{v}$  la velocidad. Es importante que las derivadas son respecto a un sistema de referencia inercial, fijo en el espacio.

**Ley de gravitación universal** La fuerza de atracción que experimentan dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$ , y posiciones  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , por efecto de la gravedad es:

$$\mathbf{F}_{g21} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (2.3)$$

donde  $G = 6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$  es la constante de gravitación universal.

La terna que se ve en la figura 2.9 debe entenderse como un sistema de referencia inercial. Es solo un accidente que permite interpretar más amigablemente el concepto de posición. No es un sistema de coordenadas. No tiene importancia la ubicación de su origen, bien podría ubicarse en cualquier lugar del espacio, siempre y cuando se mantenga fijo en la misma posición, de modo que las derivadas respecto a este sistema sean iniciales y así escribir la segunda ley de Newton. En este sentido, es importante que la norma  $\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$  queda bien definida sea cual sea el sistema de coordenadas que se utilice, puesto que se trata de una diferencia entre dos vectores.

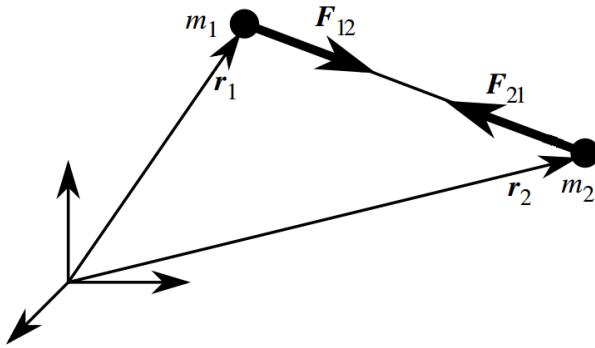


Figura 2.9: Ley de gravitación universal.

Las leyes de Kepler finalmente se deducen de las leyes de Newton, con lo cual solo alcanza con estas últimas para analizar el problema de la mecánica celeste. Sin embargo, el hecho de que el movimiento traslacional se realice en un plano (consecuencia de la primera ley de Kepler) nos permite eliminar una dimensión de nuestro problema y agilizar el desarrollo.

## 2.7. Parámetros orbitales

Vista la primera Ley de Kepler, sabemos que el movimiento de un satélite en condiciones ideales (sin perturbaciones) describe una elipse. Veamos entonces una serie de medidas que definen la forma de esta figura geométrica.

### 2.7.1. Medidas de la elipse

La ecuación de una elipse está dada por:

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1$$

donde  $a$  es el *semieje mayor*,  $b$  es el *semieje menor* y  $u, v$  son las coordenadas de la posición de un punto  $\mathbf{r}$  cualquiera de la elipse,

$$\mathbf{r} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}}$$

El sistema de coordenadas  $\mathcal{N} = \{O, \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$  tiene origen en el punto  $O$  de la figura 2.10, centro geométrico de la elipse.

Los *focos* de la elipse<sup>3</sup> son dos puntos ubicados, como muestra la figura 2.10, de forma tal que la suma de las distancias entre un punto de la elipse y cada foco es constante e igual a  $2a$  para todo punto de la curva. El desplazamiento del foco respecto al origen de coordenadas está dado por el parámetro  $c$ :

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Tomando como referencia un foco, el punto de la elipse más alejado se denomina *apoápside* y el más cercano *periápside*. Cuando en este foco ubicamos a la Tierra y usamos la elipse para describir el movimiento de un satélite, estos puntos cambian de sufijo resultando: *apogeo* y *perigeo*. En otro caso, por ejemplo, al ubicar el Sol en dicho foco y describir el movimiento de un planeta con la elipse, los nombres pasan a ser *apohelio* o *afelio* y *perihelio*. Tratándose del planeta Jupiter en otro caso, se conciben estos puntos como *apojoove* y *perijove*; y para el caso de la Luna, *aposelenio* y *periselenio*.

<sup>3</sup>También llamados *foci*, por su origen en latín

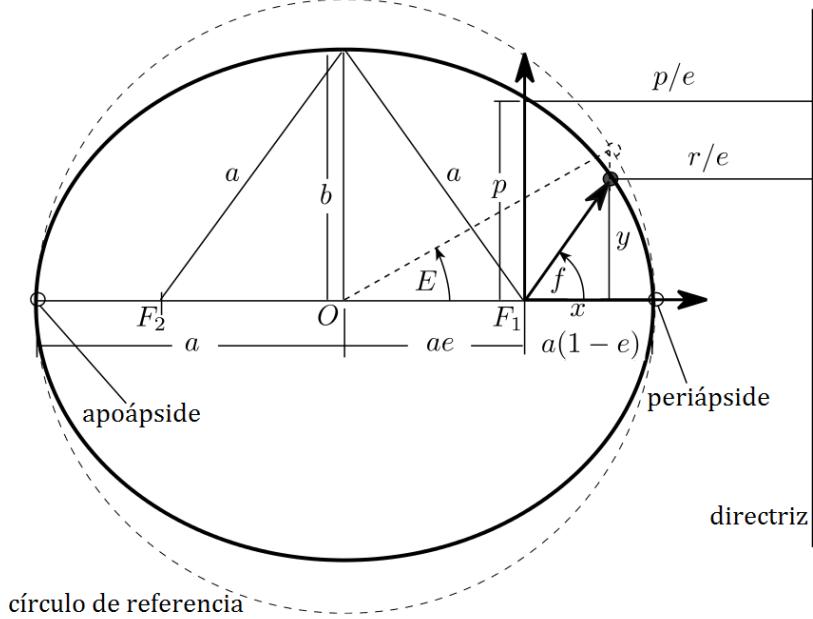


Figura 2.10: Parámetros de la elipse.

Llamaremos  $r_a$  a la distancia entre el foco de referencia y el apoápside, y  $r_p$  para el periápside. La línea que une el apoápside y el periápside se denomina *línea de apses*.

$$r_p = a - c$$

$$r_a = a + c$$

Otro parámetro fundamental en la descripción de la elipse, que se desprende de los anteriores, es la *excentricidad*, definida como la relación:

$$e = \frac{c}{a}$$

que nos da una idea de cuán elíptica es la órbita.  $e = 0$  corresponde a un círculo,  $0 < e < 1$  a una elipse,  $e = 1$  a una parábola y finalmente  $e > 1$  a una hipérbola.

Este parámetro permite escribir el semi-eje menor de la elipse,  $b$ , como:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (2.4)$$

Existe otra constante geométrica denominada *semi-latus rectum*, cuya fórmula es:

$$p = a(1 - e^2) \quad (2.5)$$

Con estas definiciones se puede formular:

$$r_p = a(1 - e) = \frac{p}{1 + e} \quad (2.6)$$

$$r_a = a(1 + e) = \frac{p}{1 - e} \quad (2.7)$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

Por otro lado, para localizar en qué punto de la órbita se encuentra el cuerpo, se utilizan diferentes medidas relacionadas al ángulo barrido y al tiempo transcurrido.

## Ángulo

En lo que respecta a la posición angular, se utiliza la *anomalía verdadera*,  $f$ , y la *anomalía excéntrica*,  $E$ . La primera define exactamente el ángulo formado por el radio vector del cuerpo (con origen en el foco de referencia) y la línea que une el foco con el perigeo. Si se desplaza el sistema de coordenadas  $\mathcal{N}$  en  $c$  unidades sobre el eje  $\hat{i}$  positivo, se obtiene un sistema con origen en  $F_1$ , que se puede llamar  $\mathcal{O} = \{F_1, \hat{o}_1, \hat{o}_2\}$ , ver Fig. 2.10. En este sistema, la posición del cuerpo está dada por:

$$\mathbf{r} = x\hat{o}_1 + y\hat{o}_2$$

En este sistema la anomalía verdadera recién definida se puede calcular con el arcotangente

$$f = \arctan \frac{y}{x}$$

En cambio, la anomalía excéntrica mide el ángulo dado por la proyección del cuerpo sobre una circunferencia de radio igual al semi-eje mayor de la elipse, y respecto al origen de coordenadas de la elipse. Esto puede verse con mayor claridad en la figura 2.10.

Mediante relaciones trigonométricas, se pueden escribir las siguientes fórmulas que relacionan ambos parámetros:

$$\begin{aligned} \cos E &= \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f}, & \sin E &= \frac{\sin f \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos f} \\ \cos f &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, & \sin f &= \frac{\sin E \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos f} \\ \tan \frac{f}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Se puede demostrar geométricamente, [4], que una fórmula para el radio vector en función de la anomalía excéntrica está dada por:

$$r = a[1 - e \cos E]$$

## Tiempo

La *anomalía media*,  $M$ , es otra medida de posición angular, pero en este caso se relaciona más con el tiempo transcurrido desde el último paso del vehículo por el periápside, y se define como:

$$M = n(t - t_p)$$

$$M = nt + M_0, \quad M_0 = -nt_p \quad (2.9)$$

con

$$n = \sqrt{\mu/a^3} \quad (2.10)$$

denominado *movimiento medio*, y  $t_p$  el instante de tiempo correspondiente al último paso por el periápside.

Con estas definiciones, también es posible escribir, de acuerdo a la ley de áreas de Kepler, la fórmula para el período orbital:

$$T_{orb} = \frac{2\pi}{n} \quad (2.11)$$

Por otra parte, la anomalía media se relaciona con la anomalía excéntrica según:

$$M = E - e \sin E \quad (2.12)$$

Esta ecuación, también conocida como ecuación de Kepler, es trascendente y solo puede resolverse para  $E$  de manera numérica. Existen muy variados métodos de análisis numérico para resolver este problema, entre los que se encuentran más comúnmente las aproximaciones sucesivas y Newton-Raphson, [24].

## 2.8. Ecuación de la órbita de un satélite

Por lo que sabemos de Mecánica Clásica, si conocemos las condiciones iniciales de posición, velocidad y orientación de un cuerpo; y el comportamiento de las fuerzas y momentos externos actuantes sobre este, el movimiento queda completamente determinado para todo instante de tiempo, mediante la integración de las ecuaciones de Newton y Euler.

La primera aproximación que se puede hacer para el problema de un satélite orbitando la Tierra, es que nuestro planeta es perfectamente esférico, y que nada en el universo interactúa con el sistema, excepto el propio satélite y la Tierra. Esto es, se tienen dos cuerpos con masas y condiciones iniciales conocidas, que se atraen mutuamente en el vacío. Por este motivo la única fuerza interactuante es la atracción gravitatoria, dada por la ley de inversa del cuadrado de Newton (2.3). Para este caso se tomará como cuerpo 1 a la Tierra, de masa  $m_T$  y posición  $\mathbf{r}_T$ ; y cuerpo 2 al satélite, de masa  $m_S$  y posición  $\mathbf{r}_S$ . Sea además  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_T = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , y la fuerza que sufre el satélite  $\mathbf{F}_S$ , mientras que la del planeta  $\mathbf{F}_T$ . Ambos cuerpos sufren una fuerza de igual magnitud  $\|\mathbf{F}_T\| = \|\mathbf{F}_S\| = F$ . Sin embargo, las aceleraciones son muy distintas, dadas por

$$\|\mathbf{a}_T\| = \frac{F_T}{m_T} = \frac{F}{m_T}$$

$$\|\mathbf{a}_S\| = \frac{F_S}{m_S} = \frac{F}{m_S}$$

Considerando que la masa de la Tierra es mucho mayor que la del satélite, la aceleración que sufrirá el planeta será despreciable frente a la que experimentará el vehículo.

$$m_T \gg m_S \Rightarrow \|\mathbf{a}_T\| \ll \|\mathbf{a}_S\|$$

De modo que se puede tomar para los fines prácticos que la Tierra se mantiene fija en el espacio inercial, mientras que el otro cuerpo se ve atraído hacia esta. Por este motivo, y como la posición del satélite que nos interesa es justamente respecto al centro de masa de la Tierra, la posición, velocidad y aceleración del satélite coincidirán con

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \end{aligned}$$

Nótese que hasta el momento todas las variables utilizadas son tensores de orden 0 y 1, representando magnitudes físicas. El análisis hasta aquí es independiente del sistema de coordenadas que se escoja para trabajar matemáticamente. La ecuación diferencial, en su forma tensorial, que gobierna el movimiento del satélite según las ecuaciones (2.1) y (2.3), está dada por:

$$m_S \mathbf{a} = \mathbf{F}_S$$

$$m_S \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -G \frac{m_T m_S}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

Como la masa del satélite figura en ambos miembros de la ecuación, se simplifica.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -G \frac{m_T}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

Usualmente, el producto constante  $Gm$ , donde  $m$  la masa de un planeta, se denomina *parámetro de gravedad estandar*, y se lo designa con la letra  $\mu$ . En el caso de la Tierra, que posee una masa

$m_T = 5,972 \cdot 10^{24} kg$ , este parámetro toma el valor  $\mu = 3,9860044189 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$ . De forma, que la ecuación se reduce a:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

donde  $r = \|\mathbf{r}\|$ . Resta la ecuación diferencial de la posición, dada por (2.2):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$$

Ahora si, se está en condiciones de abordar la matemática del problema. Tomando el sistema de coordenadas ECI, con origen en el planeta (ver 2.3), queda:

$$\begin{cases} \left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]^I = -\frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r}]^I \\ \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]^I = [\mathbf{v}]^I \end{cases}$$

Para que el sistema quede determinado, son necesarias condiciones iniciales en posición y velocidad,

$$\mathbf{r}_0 \triangleq \mathbf{r}(t=0) \quad \mathbf{v}_0 \triangleq \mathbf{v}(t=0)$$

Es notable que la fuerza de gravedad  $F_S$  puede escribirse como gradiente de otra función, i.e. es una fuerza conservativa

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_S(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu}{r^2} m_S \frac{\mathbf{r}}{r} = -\nabla V(\mathbf{r}) \\ V(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu}{r} m_S \end{aligned}$$

A veces se utiliza un potencial relativo a la aceleración

$$U(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})/m_S = -\frac{\mu}{r} \tag{2.13}$$

tal que la aceleración de la gravedad sea

$$\mathbf{a}_S = -\nabla U(\mathbf{r})$$

Un desarrollo de este problema en coordenadas cartesianas puede encontrarse en [24], mientras que otro en coordenadas polares puede verse en [19]. También es posible llegar a la solución mediante una aproximación puramente geométrica como en [4]. Ninguna de estas deducciones se replicarán en este documento, pero son fundamentales para la comprensión minuciosa de las fórmulas. Solo se presentarán los resultados necesarios para el posterior análisis y desarrollo del trabajo de tesis.

Es conveniente definir el momento angular específico como el momento angular por unidad de masa:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \frac{\mathbf{L}}{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\ h &= \|\mathbf{h}\| \end{aligned} \tag{2.14}$$

Debido a la conservación del momento angular, esta magnitud se mantiene constante para el caso de órbitas ideales keplerianas y se relaciona con el radio mediante:

$$h = r^2 \frac{df}{dt} \tag{2.15}$$

Se puede probar mediante deducciones geométricas, que el parámetro *semi-latus rectum*,  $p$  definido en la sección 2.7, se escribe en función de  $h$  según:

$$p = \frac{h^2}{\mu} \tag{2.16}$$

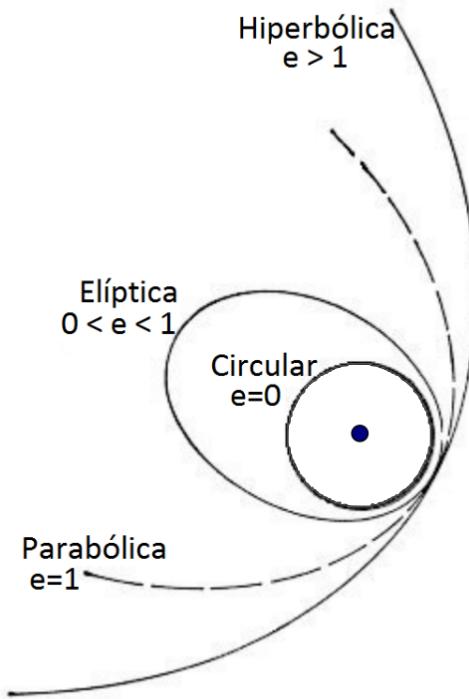


Figura 2.11: Tipos de órbitas

Finalmente, se llega a la fórmula que describe el comportamiento del módulo de la posición  $r = \|\mathbf{r}\|$  en función de la anomalía verdadera  $f$ :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (2.17)$$

Las soluciones de esta ecuación según el valor de excentricidad, son curvas cónicas. Estas corresponden a las distintas intersecciones posibles entre un cono y un plano, según la inclinación de este último (que se correlaciona con la excentricidad resultante), y pueden subdividirse en 4 casos.

### 2.8.1. Órbitas Circulares

En este caso la excentricidad es nula,  $e = 0$ , con lo cual, reemplazando en (2.17) el módulo del radio vector  $r$  se mantiene constante a lo largo de toda la trayectoria e igual a:

$$r = p = \frac{h^2}{\mu}$$

Además, como  $r$  es constante, entonces  $h$  también lo es, y por la definición vista anteriormente:

$$h = \|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\| = rv \cos(\beta)$$

Como  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}$  son ortogonales en todo punto de la órbita (ya que es un movimiento circular uniforme),  $\beta$  es constantemente nulo, y queda:

$$\begin{aligned} h &= rv \\ r &= \frac{h^2}{\mu} = \frac{(rv)^2}{\mu} \end{aligned}$$

$$v^2 = \frac{\mu}{r}$$

Donde se ve que el módulo de la velocidad es también constante.

### 2.8.2. Órbitas Elípticas

Este es el caso general de órbitas satelitales, las órbitas circulares se pueden pensar como solo un caso particular de órbitas elípticas. La excentricidad toma valores entre cero y uno,  $0 \leq e < 1$ . Mediante ecuaciones de energía se obtiene una fórmula para la velocidad que es muy importante y se utilizará a lo largo del trabajo, denominada ecuación *Vis-Viva*<sup>4</sup>.

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2a} \quad (2.18)$$

### 2.8.3. Órbitas Parabólicas

Este tipo de órbitas no tiene mucha importancia práctica, es más bien un límite matemático entre las órbitas elípticas y las hiperbólicas que se verán en breve. Sin embargo, los siguientes valores sirven de referencia y su explicación es interesante. Para este caso, la energía potencial es igual a la energía cinética del sistema. La excentricidad es exactamente 1,  $e = 1$ , y la velocidad depende del radio según:

$$v^2 = 2\frac{\mu}{r}$$

Este valor de velocidad es especial y se denomina *velocidad de escape*, puesto que al alcanzarse, el vehículo vence la atracción del cuerpo central, escapando de su órbita.

### 2.8.4. Órbitas Hiperbólicas

Las órbitas hiperbólicas se caracterizan por poseer energía cinética mayor que la potencial, por lo tanto superan la atracción del cuerpo central y describen una trayectoria homónima, con este (el cuerpo central) en uno de sus focos. La importancia de estas órbitas subyace en los viajes interplanetarios, como por ejemplo la sonda *Juno*, lanzada por la NASA en 2011, que cruzó el cinturón de asteroides y alcanzó la órbita del planeta Júpiter en Julio de 2016 para estudiar la composición gaseosa de su atmósfera y su campo magnético.

## 2.9. Órbita en el espacio

Si el cuerpo orbital se trata de un satélite de observación terrestre, interesa entonces conocer la orientación de la órbita respecto a la Tierra de modo de poder predecir las regiones que observará en cada momento. Si por otro lado se trata de una sonda interplanetaria, se requiere conocer la ubicación de la órbita inicial en la que se lanza el vehículo para que al alcanzar la velocidad de escape y vencer la fuerza de atracción terrestre, se encuentre en la dirección al planeta deseado. Para describir la órbita en el espacio se definen tres ángulos que esencialmente transforman la elipse de un plano de dos dimensiones a uno de tres. Estas medidas son ángulos de Euler, con la salvedad de que el orden de las rotaciones es distinto al utilizado para el satélite.

### Inclinación

El ángulo que se forma al inclinar el plano orbital respecto al plano XY inercial, se denomina *inclinación* y de ahora en más llamaremos  $i$ . Otra forma de definir la inclinación es como el ángulo entre  $\mathbf{h}$  y el eje Z de la terna inercial,  $\hat{\mathbf{i}}_z$ .

---

<sup>4</sup> La ecuación *Vis-Viva* estricta se formula en función de la energía y es general para todos los tipos de órbitas. Se escribe aquí el caso particular de las elípticas que coincide con las circulares y serán las utilizadas en este trabajo.

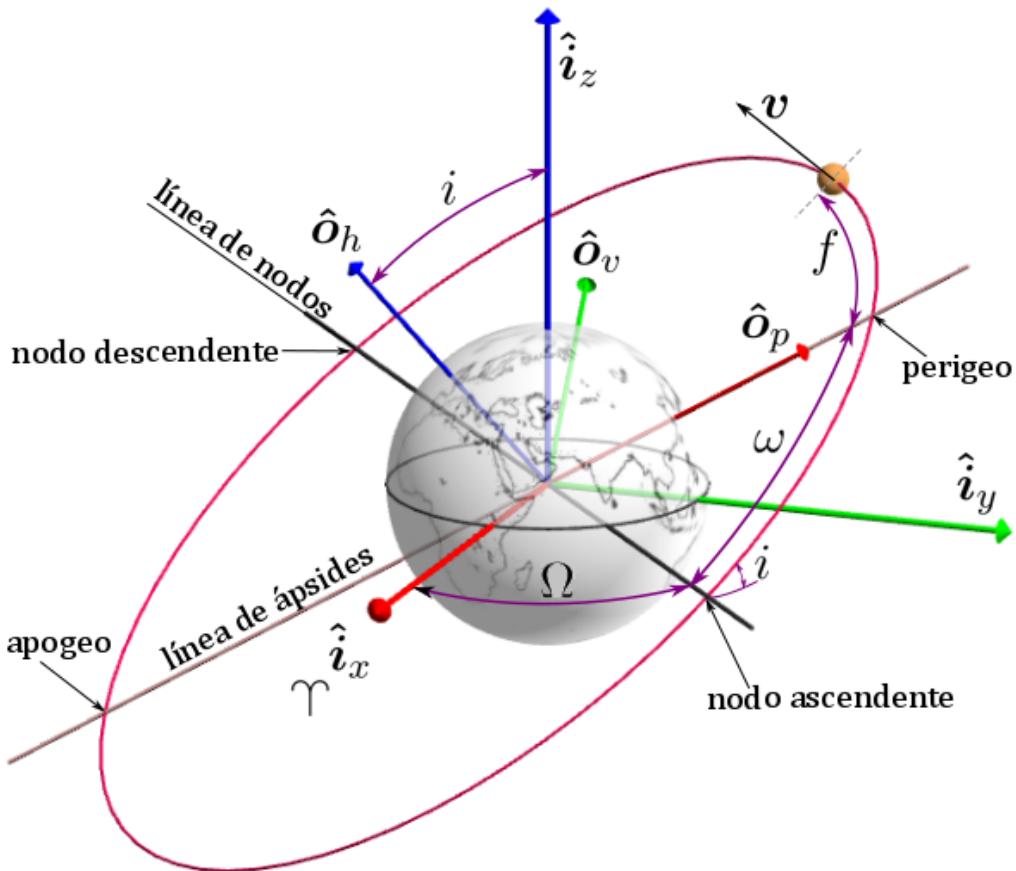


Figura 2.12: Sistema de referencia perifocal y parámetros de la órbita.

### Longitud del nodo

Los puntos en los que se intersectan el plano ecuatorial (XY inercial) y la órbita se denominan *nodos*, y la línea que los une *línea de nodos*. En su trayecto, cuando el satélite pasa de una posición con Z negativo (inercial) a Z positivo (es decir, cruza del hemisferio Sur al hemisferio Norte), el nodo que atraviesa se denomina *nodo ascendente*. En el otro nodo sucede entonces lo opuesto y por lo tanto es llamado *nodo descendente*.

La *longitud del nodo* es entonces el ángulo,  $\Omega$ , formado entre el eje X inercial y el nodo ascendente. Se puede construir un vector  $\mathbf{n}_o$  como producto vectorial entre el eje Z de la terna ECI y el momento angular específico:

$$\mathbf{n}_o = \hat{\mathbf{i}}_z \times \mathbf{h} \quad (2.19)$$

de modo que apunte hacia el nodo ascendente. De esta manera, queda claro que la longitud del nodo es el ángulo entre  $\hat{\mathbf{i}}_x$  y  $\mathbf{n}_o$ .

### Argumento de Perigeo

El *argumento de perigeo* es el ángulo,  $\omega$ , que forma el radio vector que apunta al perigeo de la órbita en el espacio ( $[\mathbf{r}_p]^I$ ) respecto a la línea de nodos (desde el nodo ascendente).

### 2.9.1. Sistema de referencia perifocal

El sistema de referencia *perifocal* posee origen en uno de los focos de la elipse, aquel donde se encuentra el planeta. El eje  $\hat{\mathbf{o}}_p$  se orienta hacia el perigeo de la órbita, y es colineal con la línea de ápsides. El eje  $\hat{\mathbf{o}}_v$  se encuentra en el plano orbital, perpendicular al eje de perigeo, y el eje  $\hat{\mathbf{o}}_h$  tiene el sentido y la dirección del momento angular de la órbita. Estos ejes se relacionan de forma tal que  $\hat{\mathbf{o}}_p \times \hat{\mathbf{o}}_v = \hat{\mathbf{o}}_h$ . El sistema queda definido como:

$$\mathcal{O} = \{O, \hat{\mathbf{o}}_p, \hat{\mathbf{o}}_v, \hat{\mathbf{o}}_h\}$$

En otras secciones se destacó que  $\mathbf{r}$  es un tensor que representa la posición del satélite y no depende del sistema de coordenadas que se utilice para representarlo. Por ejemplo, en coordenadas del sistema perifocal  $\mathcal{O}$  se puede escribir:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{o}}_p + y\hat{\mathbf{o}}_v + 0\hat{\mathbf{o}}_h$$

$$[\mathbf{r}]^O = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

En cambio, en el sistema de coordenadas inercial, ECI, las componentes de la posición difieren

$$\mathbf{r} = X\hat{\mathbf{i}}_x + Y\hat{\mathbf{i}}_y + Z\hat{\mathbf{i}}_z$$

$$[\mathbf{r}]^I = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

La transformación que relaciona ambas tuplas es una sucesión de rotaciones, con los elementos descriptos en la sección anterior. Si se parte del sistema de coordenadas inercial y se intenta llegar a la orientación del sistema perifocal, la sucesión de ángulos de Euler es en orden “ZXZ”:

1. Rotar en el eje Z, un ángulo de  $\Omega$
2. Rotar en el eje X, un ángulo de  $i$
3. Rotar en el eje Z, un ángulo de  $\omega$

Nótese que esto es una rotación del sistema de coordenadas, y no la rotación de un punto dentro de un mismo sistema de coordenadas. Por consiguiente, cada rotación se puede representar con una matriz de cosenos directores. Componiendo estas se obtiene:

$$[\mathbf{r}]^O = C_z(\omega)C_x(i)C_z(\Omega)[\mathbf{r}]^I \quad (2.20)$$

$$[\mathbf{r}]^O = C_I^O[\mathbf{r}]^I$$

### 2.10. Vector de elementos orbitales clásicos

Este juego de seis parámetros, describe completamente a una órbita kepleriana. Es útil construir un vector  $\alpha$  con dichos elementos:

$$\alpha = \begin{bmatrix} a \\ e \\ i \\ \omega \\ \Omega \\ M \end{bmatrix}$$

Este conjunto es equivalente a las 6 componentes de posición y velocidad en el mismo punto de la órbita,

$$\alpha \equiv \{\mathbf{r}(t_i), \mathbf{v}(t_i)\}$$

Así como existen infinitos conjuntos de posición y velocidad, dados por cada instante de tiempo  $t_i$ , que describen exactamente la misma órbita, también existen distintos conjuntos  $\alpha$  que representen equivalentemente la misma órbita kepleriana. Por ejemplo, una órbita de inclinación nula, un argumento de perigeo  $\omega = \beta$  (sea cierto ángulo  $\beta$ ), es indistinguible de otra órbita de inclinación nula y longitud de nodo  $\Omega = \beta$ , esto es:

$$\{i = 0, \omega = \beta, \Omega = 0\} \equiv \{i = 0, \omega = 0, \Omega = \beta\}$$

Esto se debe a que a que al anular la rotación en el eje X, la rotación que orienta a la órbita en el espacio, ec. 2.20, se compone de dos rotaciones sucesivas en el eje Z dadas por  $\omega$  y  $\Omega$ .

Incluso sin anular ninguna rotación es posible encontrar conjuntos de valores distintos de  $\{i, \omega, \Omega\}$  que sean equivalentes.

## 2.11. Transformaciones entre los elementos orbitales y [r, v]

### 2.11.1. De $\alpha$ a [r, v]

Las coordenadas  $(x, y)$  en el sistema perifocal  $\mathcal{O}$  (ver Fig. 2.10 y sec. 2.9.1) se escriben en función de los elementos orbitales según:

$$x = a \cos E - c$$

$$y = b \sin E$$

$$z = 0$$

La anomalía excéntrica,  $E$ , se obtiene a partir de la anomalía media,  $M$ , por métodos numéricos a partir de la ecuación de Kepler (2.12).

Luego se pasa la posición a la terna inercial según la transformación inversa de la ecuación 2.20,

$$[\mathbf{r}]^I = C_O^I [\mathbf{r}]^O$$

donde  $C_O^I = (C_I^O)^{-1} = C_z(-\Omega)C_x(-i)C_z(-\omega)$

En Sidi [19], se demuestra que la velocidad en coordenadas del sistema perifocal toma la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = \frac{a^2 n}{r} [-\sin E \hat{\mathbf{o}}_p + \sqrt{1 - e^2} \cos E \hat{\mathbf{o}}_v]$$

$$[\mathbf{v}]^O = \frac{a^2 n}{r} \begin{bmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1 - e^2} \cos E \end{bmatrix}$$

Luego, se utiliza nuevamente el cambio de base  $C_O^I$  para obtener las coordenadas ECI:

$$[\mathbf{v}]^I = C_O^I [\mathbf{v}]^O$$

### 2.11.2. De $[r, v]$ a $\alpha$

El elemento más directo para calcular a partir del conocimiento de los vectores de posición y velocidad, es el semieje mayor de la elipse. Este se despeja de la ecuación *Vis-Viva* (2.18):

$$a = \frac{\mu}{\left(\frac{2\mu}{r} - v^2\right)}$$

Como se vio en la definición del momento angular específico, ec. (2.14), este es perpendicular al plano orbital, por lo tanto es colineal al eje Z de la terna perifocal

$$\mathbf{h} = h\hat{\mathbf{o}}_h$$

$$[\mathbf{h}]^O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$$

Si las componentes en terna inercial se definen como:

$$\mathbf{h} = h_x\hat{\mathbf{i}}_x + h_y\hat{\mathbf{i}}_y + h_z\hat{\mathbf{i}}_z$$

$$[\mathbf{h}]^I = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}$$

Entonces la proyección del momento angular específico sobre el eje Z de la terna inercial,  $\hat{\mathbf{i}}_z$ , es  $h_z$ . Como la inclinación de la órbita es el ángulo entre  $\mathbf{h}$  y  $\hat{\mathbf{i}}_z$ , entonces recordando la figura 2.12

$$\cos i = \frac{h_z}{h}$$

Por otro lado, como la longitud del nodo es el ángulo entre  $\hat{\mathbf{i}}_z$  y  $\mathbf{n}_o$  (definido en la ec. 2.19, sec. 2.9), si se toma

$$\mathbf{n}_o = n_{ox}\hat{\mathbf{i}}_x + n_{oy}\hat{\mathbf{i}}_y + n_{oz}\hat{\mathbf{i}}_z$$

y  $n = \|\mathbf{n}\|$ , entonces

$$\cos \Omega = \frac{n_{ox}}{n}$$

Otra manera de obtener este elemento es con las siguientes relaciones:

$$\sin \Omega = \frac{h_x}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}, \quad \cos \Omega = \frac{-h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}$$

El coseno es igual para ángulos de sentidos opuestos ( $\cos \Omega = \cos -\Omega$ ), no así sucede con el seno (donde  $\sin -\Omega = -\sin \Omega$ ). Por lo tanto, un algoritmo para calcular el valor correcto del ángulo  $\Omega$  es:

$$\Omega = \text{arc cos}(\cos \Omega) \cdot \text{signo}(\sin \Omega)$$

$$\Omega = \text{arc cos} \left( \frac{-h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \right) \cdot \text{signo} \left[ \arcsin \left( \frac{h_x}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \right) \right]$$

Despejando de la ecuación (2.5) y reemplazando el *semi-latus rectum* por (2.16) se obtiene la excentricidad:

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}}$$

Para obtener la anomalía excéntrica se utilizan las relaciones:

$$\cos E = \frac{a - r}{ae}, \quad \sin E = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{e\sqrt{\mu a}}$$

Luego se utiliza el mismo algoritmo que en el caso de la longitud del nodo para calcular el valor correcto, esta vez de  $E$ :

$$E = \arccos(\cos E) \cdot \text{signo}(\sin E)$$

La anomalía media puede calcularse directamente mediante la ecuación de Kepler (2.12). Además, con las ecuaciones (2.8) se puede obtener la anomalía verdadera,  $f$ .

A partir de la transformación entre sistema intercial y perifocal que describe la ecuación (2.20) se pueden obtener relaciones para calcular el único elemento restante, el argumento de perigeo.

$$\sin(\omega + f) = \frac{Z}{r \sin i}, \quad \cos(\omega + f) = \frac{X \cos \Omega + Y \sin \Omega}{r}$$

$$\omega = \arccos(\cos(\omega + f)) \cdot \text{signo}(\sin(\omega + f)) - f$$

## 2.12. Maniobras orbitales

### 2.12.1. Impulso de ajuste orbital simple

Una órbita kepleriana está definida por los elementos clásicos ya descriptos, que componen el vector  $\alpha$ , o equivalentemente por la posición y velocidad instantánea en un punto cualquiera de la trayectoria. La maniobra de transferencia orbital más elemental se da cuando la órbita final coincide en un punto de su trayectoria con la órbita inicial, en otras palabras, ambas órbitas pasan por el mismo punto. De esta manera, en dicha posición la única diferencia entre una órbita y otra es la velocidad. Por lo tanto para realizar la transferencia orbital, es posible, teóricamente, ejecutar un impulso instantáneo de propulsión en ese punto, generando el incremento o decremento necesario para alcanzar la velocidad de la órbita final.

Supóngase un punto  $P_1$  en una órbita  $O_1$ . La posición y velocidad  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{v}_1$  instantáneas describen completamente esta órbita. Por otro lado, se tiene una órbita  $O_2$  con posición y velocidad  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{v}_2$  en el punto  $P_2$ , tal que  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$  y  $P_2 = P_1$  (Fig. 2.13).

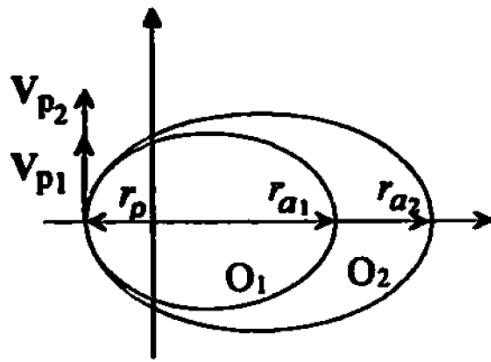


Figura 2.14: Maniobra de modificación del apogeo

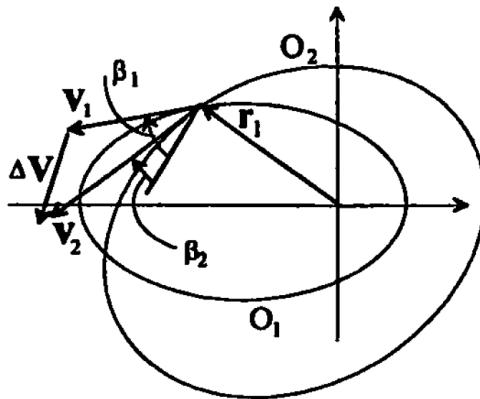


Figura 2.13: Maniobra de impulso simple

El método del impulso simple consiste en generar un incremento de velocidad (de carácter vectorial, es decir con módulo, dirección y sentido en el espacio) de modo de alcanzar  $\mathbf{v}_2$  en este punto. Este incremento es precisamente la diferencia (vectorial) entre la velocidad final y la inicial (Fig. 2.13):

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

Un caso sencillo para analizar es cuando  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son colineales, por ejemplo en el perigeo de una cierta órbita inicial hacia el perigeo de una cierta órbita final, de forma tal que el resultado de la maniobra sea un aumento del apogeo. En este caso, el módulo del incremento coincide con la diferencia entre los módulos de  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ . La velocidad en cada punto está dada por la ecuación 2.18, con  $r = r_p$

$$v_1 = \sqrt{2\mu \left( \frac{1}{r_{p1}} - \frac{1}{r_{p1} + r_{a1}} \right)}$$

$$v_2 = \sqrt{2\mu \left( \frac{1}{r_{p2}} - \frac{1}{r_{p2} + r_{a2}} \right)}$$

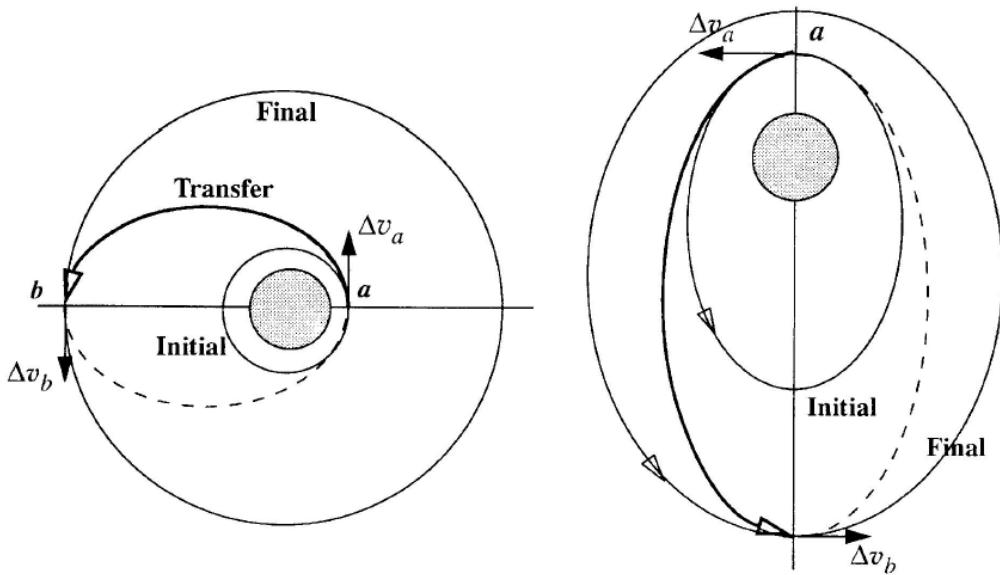


Figura 2.15: Maniobras de múltiples impulsos

Así, el incremento en velocidad requerido para la transferencia es:

$$\Delta V = v_2 - v_1$$

Si por ejemplo se desea circularizar una órbita elíptica, el punto de la órbita donde se optimiza el  $\Delta V$  es en el apogeo. Por lo tanto,

$$r_{p2} = r_{a2} = r_{a1}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_{a1}}}$$

$$\Delta V = \sqrt{\frac{\mu}{r_{a1}}} - \sqrt{2\mu \left( \frac{1}{r_{a1}} - \frac{1}{r_{p1} + r_{a1}} \right)} \quad (2.21)$$

Esta maniobra se utiliza para circularizar órbitas elípticas, modificar la excentricidad, el perigeo, el apogeo y el argumento de perigeo. La limitación que tiene es que como se dijo en un principio, ambas órbitas deben coincidir en un punto. Esto implica limitaciones en las combinaciones de perigeo y apogeo alcanzables, o bien de semi-eje mayor y excentricidad:

$$r_{p2} < r_1 < r_{a2}$$

$$a_2(1 - e_2) < r_1 < a_2(1 - e_2)$$

### 2.12.2. Multiples impulsos de ajuste orbital

Para alcanzar una órbita final que no coincide en ningún punto con la órbita inicial, es necesario aplicar al menos dos impulsos de control. El primero para alcanzar una órbita de *transferencia*, y el segundo para llegar a la órbita objetivo. Utilizando secuencias de impulsos es posible alcanzar cualquier órbita final sin restricciones.

El ejemplo más clásico de este tipo de estrategia es la transferencia de *Hohmann*, a la izquierda en la figura 2.15. En este caso se parte de una órbita inicial circular, de radio  $r_1$ , y el objetivo es alcanzar otra órbita circular de radio  $r_2 > r_1$ .<sup>5</sup> Para esto, se realiza un incremento de velocidad en algún punto inicial generando una órbita elíptica, cuyo perigeo sea el punto inicial (y por lo tanto coincide con  $r_1$ ) y cuyo apogeo coincida con  $r_2$ . Esta órbita intermedia se denomina órbita de transferencia, o *órbita de Hohmann*. Luego, en el apogeo de esta última, se imparte el impulso final para alcanzar la órbita circular final. Es posible demostrar que esta estrategia es óptima en cuanto a consumo de combustible para transferencias entre dos órbitas circulares, coplanares y concéntricas, siempre y cuando  $r_2 < 11,9r_1$ .

Otro ejemplo muy usado es entre dos elipses coplanares y coaxiales, como a la derecha en la figura 2.15.

## 2.13. Sistemas de propulsión

Un motor de propulsión en general funciona expulsando moléculas de gas a una determinada velocidad  $V_{ex}$  relativa al cuerpo del satélite. La fuerza de empuje que proporciona este fenómeno, está dada por:

$$\mathbf{F}_T = V_{ex} \frac{dm}{dt} + A_e [P_e - P_a] = V_{exef} \frac{dm}{dt} \quad (2.22)$$

donde  $A_e$  es el área de la tobera por donde se expulsa el propelente,  $P_e$  es la presión del gas y  $P_a$  la presión ambiente.  $V_{exef}$  es la velocidad efectiva de expulsión. *Fuerza de empuje*, o solo *empuje*, serán términos utilizados indistintamente para referirse a la fuerza realizada por el motor.

Un parámetro que se define para caracterizar la eficiencia de un motor es el *impulso específico*,  $I_{sp}$ , cuya unidad es de tiempo, y por lo tanto se mide en segundos.

$$I_{sp} = \frac{F_T}{g_0 \frac{dm}{dt}} = \frac{V_{exef}}{g_0} \quad (2.23)$$

con  $g_0$  la aceleración de la gravedad. El empuje puede escribirse entonces combinando las ecuaciones 2.22 y 2.23,

$$\mathbf{F}_T = I_{sp} g_0 \frac{dm}{dt} \quad (2.24)$$

Se debe tener en cuenta que el vehículo es impulsado en la dirección contraria a la que la masa es expulsada. Por lo tanto, vectorialmente, el empuje  $\mathbf{F}_T$ , y la velocidad de expulsión efectiva  $\mathbf{V}_{exef}$ , tienen sentidos opuestos:

$$\mathbf{F}_T = -\mathbf{V}_{exef} \frac{dm}{dt}$$

Con estas definiciones, la segunda ley de Newton puede escribirse de la siguiente manera, introduciendo la fuerza de empuje:

$$-\mathbf{F}_T = m \frac{dv}{dt}$$

Reemplazando con la ecuación 2.24,

$$-I_{sp} g_0 \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt}$$

Reagrupando términos:

$$dv = -I_{sp} g_0 \frac{dm}{m}$$

<sup>5</sup> La transferencia de Hohmann solo resulta óptima cuando la relación entre estos radios es tal que  $r_2 < 11,9r_1$ .

Al integrar esta ecuación se llega a

$$m_f = m_0 \exp\left(-\frac{\Delta V}{g_0 I_{sp}}\right) \quad (2.25)$$

donde  $m_0$  y  $m_f$  son la masa inicial y final del vehículo respectivamente. Esta fórmula es denominada *ecuación del cohete de Tsiolkovski*, y permite calcular la masa de combustible necesaria,  $\Delta m$ , para generar un incremento de velocidad  $\Delta V$  en el vehículo espacial:

$$\Delta m = m_0 - m_f = m_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta V}{g_0 I_{sp}}\right) \right] \quad (2.26)$$

En este sentido, los sistemas de propulsión se caracterizan principalmente por su impulso específico y empuje producido. Como se desprende de la última ecuación, a mayor  $I_{sp}$ , menor es la cantidad de combustible requerido ( $\Delta m$ ) para generar el mismo  $\Delta V$ . Por ejemplo, motores de combustión química que utilizan doble propelente líquido, como los que fabrica la empresa Bell, con monometil-hidracina (MMH) y tetraóxido de dinitrógeno ( $N_2O_4$ ), poseen un  $I_{sp}$  de 289s y una fuerza  $F_T$  de 4210 N [19].

## 2.14. Modelo de la dinámica de un vehículo espacial

La planta se modeló en líneas generales como un vehículo de seis grados de libertad, sometido a perturbaciones (resistencia aerodinámica y gravedad) y a fuerzas de control externas (fuerzas y momentos).

### 2.14.1. Traslación

Los 3 grados de libertad correspondientes a la translación del centro de masa del vehículo se modelaron mediante la segunda ley de Newton (ecs. 2.1, 2.2). Tomando coordenadas iniciales, se tiene:

$$\left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]^I = \frac{[\mathbf{F}]^I}{m} \quad (2.27)$$

$$\left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]^I = [\mathbf{v}]^I \quad (2.28)$$

Integrando,

$$[\mathbf{v}]^I_{(t)} = [\mathbf{v}_0]^I + \int_0^t \frac{[\mathbf{F}]^I}{m} dt \quad (2.29)$$

$$[\mathbf{r}]^I_{(t)} = [\mathbf{r}_0]^I + \int_0^t [\mathbf{v}]^I dt \quad (2.30)$$

Esto significa que la fuerza  $\mathbf{F}$  se somete a dos integradores para conformar la posición.

Dado que este modelo se utilizará en cercanías de la Tierra (órbitas de baja altitud, LEO), las únicas perturbaciones externas a considerar son la gravedad y la resistencia atmosférica. La justificación de esta elección radica en que otras perturbaciones como la presión solar y la atracción de la Luna solo ejercen una influencia considerable a partir de órbitas de mediana altitud (aproximadamente 1000km). Por lo tanto, el término de fuerza en la ecuación de Newton corresponde a la sumatoria de la gravedad, la resistencia atmosférica y la fuerza de control:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_C \quad (2.31)$$

## Modelo de la gravedad

Al considerar la forma elipsoidal de la Tierra (achatamiento en los polos), el modelo simple dado por la ley de la gravedad, eq. 2.3, no es correcto. Para modelar el comportamiento de la gravedad debido a esto, se utiliza un desarrollo en funciones armónicas del potencial gravitatorio, que de manera simplificada puede escribirse para el caso de cuerpos con simetría de rotación como en [18]:

$$U(r, \varphi) = -\frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^k J_k P_k(\sin \varphi) \right] \quad (2.32)$$

donde

- $R_e$  = 6378.388 km es el radio medio ecuatorial de la Tierra
- $J_k$  son los coeficientes zonales harmónicos
- $P_k(\cdot)$  son los polinomios de Legendre de grado  $k$  y orden 0
- $\varphi$  es la latitud asociada a  $\mathbf{r}$ .

Algunos de los primeros coeficientes zonales tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} J_2 &= 1082,63 \cdot 10^{-6} \\ J_3 &= -2,52 \cdot 10^{-6} \\ J_4 &= -1,61 \cdot 10^{-6} \\ J_5 &= -0,15 \cdot 10^{-6} \\ J_6 &= 0,57 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Como se puede ver, los coeficientes siguientes al  $J_2$  son aproximadamente 400 veces menores que este, por lo que la perturbación dominante se debe al término correspondiente a  $k = 2$ . Esto da un argumento práctico para simplificar el modelo hasta el 2do orden (J2) a la hora de diseñar los algoritmos de navegación y control. No obstante, para programar el simulador se tuvieron en cuenta los 6 términos.

## Resistencia atmosférica

La atmósfera ofrece resistencia al movimiento de un vehículo. Sin embargo, esta influencia se reduce a medida que el cuerpo en movimiento se aleja de la superficie terrestre adentrándose en la *exósfera* (capa de la atmósfera más alejada de la Tierra, arriba de 500 km de altura). Por este motivo, esta perturbación solo se considera generalmente para satélites de órbita baja (LEO), y en particular es la perturbación principal en altitudes menores a 500 km, en la capa de la atmósfera denominada *ionósfera* (80 - 500 km de altura).

Las capas de la atmósfera se pueden modelar como una masa de aire que envuelve a la Tierra y rota respecto al centro del planeta con una cierta velocidad. Por este motivo se construye una terna de referencia no inercial solidaria al aire en movimiento,  $\mathcal{W}$ . Al derivar la posición del satélite respecto a este sistema se obtiene:

$$\mathbf{v}^W = \frac{d^W \mathbf{r}}{dt}$$

Cabe aclarar una vez más que esta derivada no es respecto a la terna inercial como en la ecuación de Newton (2.2), sino respecto a la terna atmosférica, también llamada de viento o de aire.

La resistencia atmosférica entonces se modela como una fuerza ejercida sobre el cuerpo en la misma dirección de movimiento relativo a la atmósfera (es decir,  $\mathbf{v}^W$ ) pero con sentido contrario. En otras

palabras, es una fuerza no conservativa que desacelera al vehículo y reduce la energía total del sistema. La fórmula utilizada comúnmente para representarla es:

$$\mathbf{F}_D = -\frac{1}{2}\rho C_D S \|\mathbf{v}^W\|^2 \frac{\mathbf{v}^W}{\|\mathbf{v}^W\|}$$

o bien en forma de aceleración o fuerza específica  $\mathbf{a}_D = \frac{\mathbf{F}_D}{m}$   
donde

- $C_D$  = coeficiente aerodinámico de resistencia atmosférica
- $m$  = masa del satélite
- $S$  = área de la sección transversal del satélite (cara perpendicular a la dirección de movimiento)
- $\rho$  = densidad atmosférica
- $\mathbf{v}^W$  = vector velocidad del satélite relativa a la atmósfera

La densidad atmosférica depende de la altura respecto de la Tierra, y suele utilizarse el siguiente modelo para calcularla:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h-h_0}{H}}$$

- $h$  = la altitud instantánea
- $h_0$  = una altitud de referencia
- $\rho_0$  = la densidad atmosférica a una determinada altura de referencia,  $h_0$
- $H$  = se denomina, *escala de altura*.

En este caso se tomó de la tabla 7-4 del libro de Vallado [12], que utiliza el estándar de los Estados Unidos (1976), CIRA-72: una altitud de referencia de  $h_0 = 400$  km con una densidad de  $\rho_0 = 3.725 \times 10^{-12} \text{ kg m}^{-3}$  y escala de altura de  $H = 58.515$  km. Además, como todos los modelos atmosféricos poseen margenes de error bastante grandes (a veces hasta del 50 %), debido a la alta aleatoriedad del fenómeno, se simplificó la altitud instantánea como si la Tierra fuera perfectamente esférica,  $h = r - R_e$ .

También es común considerar que la atmósfera rota a la misma velocidad que la Tierra. De esta manera, el sistema de referencia de viento,  $\mathcal{W}$ , resulta idéntico al terrestre (ECEF),  $\mathcal{E}$ . Por lo tanto, en este trabajo se utiliza para el cálculo de esta fuerza

$$\mathbf{v}^W = \mathbf{v}^E$$

Tomando coordenadas iniciales, el modelo resultante es

$$[\mathbf{F}_D]^I = -\frac{1}{2}\rho C_D S \|\mathbf{v}^E\|^2 \frac{[\mathbf{v}^E]^I}{\|\mathbf{v}^E\|} \quad (2.33)$$

### 2.14.2. Rotación

Por otro lado, los 3 grados de libertad correspondientes a la rotación del cuerpo rígido se modelaron mediante la ecuación de Euler, que es el equivalente rotacional de la segunda ley de Newton. La ecuación de Euler relaciona el torque ejercido respecto al centro de masa del cuerpo (c.m. para abreviar), con la derivada respecto a la terna inercial del momento angular respecto al c.m.:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d^I \mathbf{L}^{BI}}{dt} \quad (2.34)$$

Donde el momento angular es  $\mathbf{L}^{BI} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{BI}$ , con  $\mathbf{I}$  el momento de inercia, tensor de 2do orden. Mediante la transformación de Euler (sec. 2.2.1), es posible reescribir esto en función de la derivada respecto a la terna de cuerpo:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d^B \mathbf{L}^{BI}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^{BI} \times \mathbf{L}^{BI}$$

Derivar respecto del cuerpo es muy conveniente en estos casos, puesto que el momento de inercia se mantiene invariante. Tomando coordenadas de cuerpo, la ecuación queda:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\tau}]^B &= [\mathbf{I}]^B \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}^{BI}}{dt} \right]^B + [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B \times ([\mathbf{I}]^B [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B) \\ \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}^{BI}}{dt} \right]^B &= ([\mathbf{I}]^B)^{-1} ([\boldsymbol{\tau}]^B - [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B \times ([\mathbf{I}]^B [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B)) \end{aligned}$$

Integrando esta ecuación se obtiene  $[\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B$  que es la velocidad angular del cuerpo rígido, respecto al sistema inercial, en coordenadas de cuerpo. Esta es la variable que mide por ejemplo un giróscopo al instalarse en el centro de masa de un vehículo.

Con esta velocidad, se puede obtener la orientación respecto al sistema inercial en cuaterniones, matriz de cosenos directores o ángulos de Euler. Dicho problema (obtener la orientación a partir de la velocidad angular) se conoce con el nombre de *determinación de actitud* y se puede encontrar correctamente documentado en la literatura, en textos como [25] o [19].

Los cuaterniones poseen la ventaja, frente a la matriz de cosenos directores, de contener menos elementos (4 contra 9) y por lo tanto significar menos ecuaciones diferenciales a resolver. Por otro lado, si bien el método de los ángulos de Euler entrega directamente la representación más cómoda para trabajar (los mismos ángulos), las ecuaciones diferenciales que los describen son no-lineales e involucran varias funciones trigonométricas. Esto significa mayor costo computacional. Además, el método de los ángulos de Euler posee singularidades para  $\theta = \pm\pi/2$ . La única desventaja de los cuaterniones es que la inicialización involucra necesariamente funciones trigonométricas, puesto que la condición inicial en cualquier problema viene dada en ángulos de Euler y se debe hacer la conversión correspondiente a cuaterniones.

Por lo recién expuesto, se optó por una representación de orientación en cuaterniones, dando lugar a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\mathbf{q}^{BI}}{dt} = \mathbf{q}^{BI} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

donde la representación de cuaternion utilizada coincide con la de [25] y la empleada internamente por las funciones de MATLAB y Simulink, poniendo en la primera posición del arreglo el término cosenoideal:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos(\epsilon/2) \\ \sin(\epsilon/2)\mathbf{n}_1 \\ \sin(\epsilon/2)\mathbf{n}_2 \\ \sin(\epsilon/2)\mathbf{n}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ [q] \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

con  $[\mathbf{n}] = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$  el eje de rotación de Euler y  $\epsilon$  el ángulo rotado, en el mismo sentido que la matriz de cambio de base, es decir, es el ángulo que se debe rotar a la terna I para alcanzar la orientación de B, por ejemplo en el caso de  $\mathbf{q}^{BI}$ .

Para obtener la orientación respecto a la terna orbital, es necesario primero obtener la velocidad angular del cuerpo respecto a la terna orbital,  $\boldsymbol{\omega}^{BR}$ .

$$\boldsymbol{\omega}^{BI} = \boldsymbol{\omega}^{BR} + \boldsymbol{\omega}^{RI}$$

Moviendo términos y tomando coordenadas de cuerpo:

$$[\boldsymbol{\omega}^{BR}]^B = [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B - [\boldsymbol{\omega}^{RI}]^B$$

Ahora bien,  $\boldsymbol{\omega}^{RI}$  es la velocidad angular de la terna de referencia orbital respecto del sistema ECI, que coincide justamente con la derivada de la anomalía verdadera,  $\frac{df}{dt}$ . Por lo tanto, puede calcularse reemplazándola en la ecuación 2.15:

$$[\boldsymbol{\omega}^{RI}]^I = \frac{h}{r^2} \frac{[\mathbf{h}]^I}{\|\mathbf{h}\|}$$

$$[\boldsymbol{\omega}^{RI}]^I = \frac{[\mathbf{h}]^I}{r^2}$$

y a su vez utilizando la definición en la ec. 2.14

$$[\boldsymbol{\omega}^{RI}]^I = \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]^I}{r^2}$$

$$[\boldsymbol{\omega}^{RI}]^I = \frac{[\mathbf{r}]^I \times [\mathbf{v}]^I}{r^2} \quad (2.37)$$

Por lo tanto, es más cómodo hacer la transformación:

$$[\boldsymbol{\omega}^{BR}]^B = [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B - C_I^B [\boldsymbol{\omega}^{RI}]^I \quad (2.38)$$

Luego, se utiliza la determinación de actitud para integrar y obtener la orientación en cuaterniones.

$$\frac{d\mathbf{q}^{BR}}{dt} = \mathbf{q}^{BR} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ [\boldsymbol{\omega}^{BR}]^B \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Por otro lado, el torque de la ecuación de Euler, ec. 2.34, consiste en la sumatoria del momento de control y los momentos generados por las perturbaciones. En este caso, la única perturbación modelada fue aquella debida al gradiente gravitacional de cuerpos asimétricos.

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_C + \boldsymbol{\tau}_G \quad (2.40)$$

### Momento por gradiente gravitacional

La fuerza de gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los cuerpos de atracción por la ley de Newton. Esto implica que puntos del cuerpo rígido a distinta distancia de la Tierra se someten a distintas magnitudes de fuerza gravitacional, y por lo tanto generan momento. En la figura puede verse que un diferencial de masa  $dm$ , a una distancia  $\rho$  del centro de masa, genera un momento respecto a este de:

$$d\boldsymbol{\tau}_G = \boldsymbol{\rho} \times d\mathbf{F}_g \quad (2.41)$$

Si el centro de masa se encuentra a una distancia  $R_{cm}$  del centro de la Tierra, y el vector que representa esta posición es  $\mathbf{R}_{cm}$ , entonces la posición del otro punto en cuestión queda determinada por  $\mathbf{r} = \mathbf{R}_{cm} + \boldsymbol{\rho}$ , y la fuerza que experimenta es:

$$d\mathbf{F}_g = -\frac{\mu dm}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

Ahora reemplazando en 2.41,

$$d\boldsymbol{\tau}_G = -\frac{\mu dm}{\|\mathbf{r}\|^3} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{r}$$

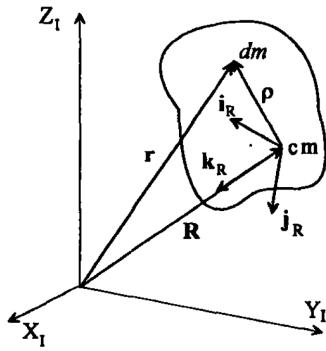


Figura 2.16: Momento por gradiente gravitacional. La terna con subíndice  $R$  corresponde a la RPY

Asumiendo que las dimensiones del satélite son insignificantes en comparación a la altitud, es decir  $\rho \ll R_{cm}$ , tomando coordenadas de cuerpo e integrando sobre todo el cuerpo rígido, finalmente se puede llegar al siguiente resultado [19]:

$$[\tau_G]^B = \begin{bmatrix} \tau_{Gx} \\ \tau_{Gy} \\ \tau_{Gz} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{Gx} = \frac{3\mu}{2R_{cm}^3}(I_z - I_y)\sin(2\phi)\cos^2(\theta) \\ \tau_{Gy} = \frac{3\mu}{2R_{cm}^3}(I_z - I_x)\sin(2\theta)\cos(\phi) \\ \tau_{Gz} = \frac{3\mu}{2R_{cm}^3}(I_x - I_y)\sin(2\theta)\sin(\phi) \end{array} \right. \quad (2.42)$$

donde  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  son los momentos de inercia principales del satélite respecto a la terna de cuerpo ; y  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  son los ángulos de Euler del cuerpo respecto a la terna orbital RPY.

## 2.15. Órbitas no-keplerianas

En una sección introductoria, se adelantó que un satélite real se somete a más fuerzas externas, además de la gravedad dada por la ley de Newton en la eq. (2.3). Estas perturbaciones se introducen en las ecuaciones de movimiento dando lugar a una trayectoria distinta a la de la órbita kepleriana clásica. La órbita resultante se dice que es no Kepleriana y los elementos orbitales, descriptos en secciones anteriores, ya no la representan cabalmente. Lo que sucede en la mayoría de los casos es que estos parámetros presentan perturbaciones y no se mantienen constantes a lo largo del tiempo.

Supóngase por ejemplo, que en algún instante de tiempo, durante una trayectoria de este estilo, se calculan los elementos orbitales clásicos, dada la posición y la velocidad instantánea, según las fórmulas de la sección 2.11.2. La trayectoria orbital representada por este conjunto de parámetros se denomina *órbita osculante*, y difiere de la trayectoria real del satélite, puesto que para el cálculo de la primera (la osculante), las fórmulas utilizadas no concibieron la intromisión de perturbaciones. No obstante, en el instante en que se calcula, ambas órbitas coinciden en ese punto y son tangentes (fig. 2.17). Cabe aclarar que por lo expuesto anteriormente, la órbita osculante es distinta en cada instante de tiempo, mientras que la trayectoria real es única.

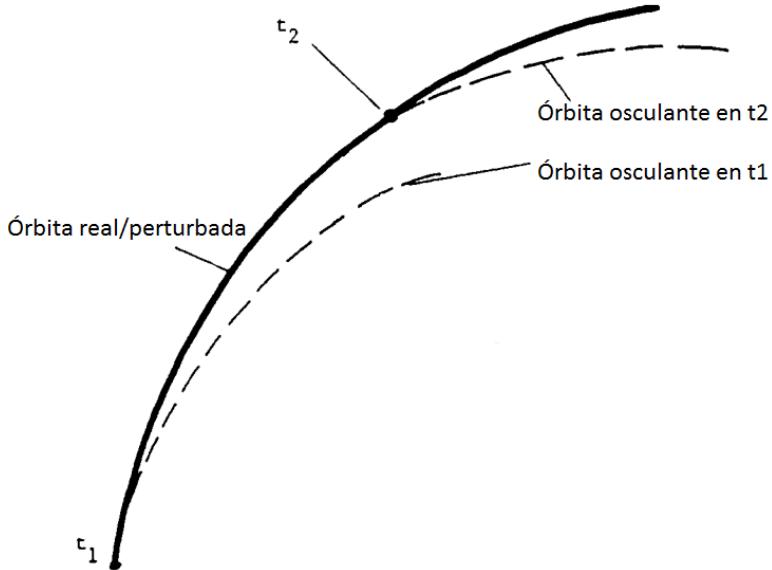


Figura 2.17: Órbita osculante y órbita real

Existen diversas técnicas para calcular los parámetros perturbados, entre ellos el método de Cowell y el de Encke, que se basan en integración numérica paso a paso de las ecuaciones de newton perturbadas, y pueden ser profundizados en [7]. Por otro lado, el método de variación de parámetros concluye en ecuaciones diferenciales que describen la evolución de los elementos osculantes. Estas últimas ecuaciones se denominan *ecuaciones planetarias* y a continuación se describe un subtipo de estas.

### 2.15.1. Ecuaciones de Lagrange

Como se explicó anteriormente, estas perturbaciones introducen nuevas fuerzas en la ecuación de movimiento translacional del satélite. Sea  $\mathbf{F}_p$  la fuerza perturbadora y  $\mathbf{F}_{G0}$  la fuerza de gravedad ideal (dada por la ley de gravedad de Newton, ec. 2.3), entonces la segunda ley de Newton queda:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{G0} + \mathbf{F}_p$$

(donde no se considera ninguna fuerza lineal de control,  $\mathbf{F}_C$  sobre el vehículo). El desarrollo que se sucede se puede encontrar detalladamente en [18]. Con esto se pueden escribir ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de los parámetros orbitales en función del tiempo y de la forma de las perturbaciones.

En el caso general para una fuerza perturbadora cualquiera, las ecuaciones a las que se llega se denominan ecuaciones planetarias de Gauss, [18]. En el caso especial en que esta fuerza responde al gradiente de un campo escalar, es posible escribir ecuaciones más simples. Este es el caso de las fuerzas conservativas, donde  $\mathbf{F}_p = -\nabla R(\mathbf{r})$ , como por ejemplo los efectos sobre la gravedad del achatamiento en los polos de la Tierra. Las ecuaciones resultantes de dicho desarrollo para una fuerza conservativa en general se conocen como las *ecuaciones de Lagrange*, se escriben en función de las derivadas parciales

del potencial perturbatorio,  $R$ , y se presentan a continuación.

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0} \quad (2.43)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{b}{na^3e} \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{b^2}{na^4e} \frac{\partial R}{\partial M_0} \quad (2.44)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{nab \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{nab \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad (2.45)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos i}{nab \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{b}{na^3e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (2.46)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{nab \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (2.47)$$

$$\frac{dM_0}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{b^2}{na^4e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (2.48)$$

$$\quad \quad \quad (2.49)$$

## Aplicación al modelo gravitatorio J2

En particular el potencial gravitatorio dado en la ecuación 2.32 se puede pensar como

$$U(r, \varphi) = U_0(r, \varphi) - R(r, \varphi)$$

donde el potencial de perturbación  $R$ , tomando únicamente hasta la aproximación J2 queda:

$$R(\mathbf{r}) = -\frac{J_2 \mu}{2} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 (3 \sin^2 \varphi - 1)$$

con  $\varphi$  la latitud terrestre que se relaciona con el argumento de perigeo, la anomalía verdadera y la inclinación de la órbita según:

$$\sin \varphi = \sin(\omega + f) \sin i = \sin \vartheta \sin i$$

donde se ha definido  $\vartheta \triangleq \omega + f$ . Esto resulta en un potencial perturbatorio de:

$$R(\alpha) = -\frac{J_2 \mu}{2} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 (3 \sin^2 \vartheta \sin^2 i - 1)$$

donde se considera el radio  $r = r(\alpha)$ , según la ecuación 2.17.

Tomando las derivadas parciales de este potencial se pueden escribir las ecuaciones de Lagrange para este caso, [18]:

$$\frac{da}{dt} = -3J_2n \frac{a^4}{br^2} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \left[ e \sin f (1 - 3 \sin^2 \vartheta \sin^2 i) + \frac{p}{r} \sin(2\vartheta) \sin^2 i \right] \quad (2.50)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{3}{2}J_2n \frac{a^2}{br} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \left[ \frac{p}{r} \sin f (1 - 3 \sin^2 \vartheta \sin^2 i) + (e + \cos f (2 + e \cos f)) \sin(2\vartheta) \sin^2 i \right] \quad (2.51)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{3}{4}J_2n \frac{a^2}{br} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \sin(2\vartheta) \sin(2i) \quad (2.52)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -3J_2n \frac{a^2}{br} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \sin^2 \vartheta \cos i \quad (2.53)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2}J_2n \frac{p}{r^2 e \eta^3} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 [2re \cos^2 i \sin^2 \vartheta - (p + r) \sin f \sin^2 i \sin(2\vartheta) + p \cos f (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \vartheta)] \quad (2.54)$$

$$\frac{dM_0}{dt} = \frac{3}{2}J_2n \frac{p}{r^2 e \eta^2} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 [(p + r) \sin f \sin^2 i \sin(2\vartheta) + (2re - p \cos f) (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \vartheta)] \quad (2.55)$$

donde todas las siguientes variables se escriben en función de los elementos de  $\alpha$ :

$$\eta \triangleq \sqrt{1 - e^2};$$

$f$  es la anomalía verdadera, y se obtiene a partir de la anomalía media

mediante la ecuación de Kepler, ec. 2.12,

y de las fórmulas 2.8;

$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$  es el movimiento medio, definido en ec. 2.10;

$p = a(1 - e^2)$  es el *semi-latus rectum*, definido en ec. 2.5;

$r = \frac{p}{1+e\cos f}$  es el radio, definido en ec. 2.17;

$b = a\sqrt{1 - e^2}$  es el semi-eje menor de la órbita, definido en ec. 2.4;

$\vartheta = \omega + f$ , definida recientemente.



# Capítulo 3

## Simulador

### 3.1. Implementación del modelo

Como se introdujo en la sección 2.14, la planta se modeló como un vehículo de seis grados de libertad, sometido a perturbaciones y a fuerzas de control externas. Para su implementación, se utilizó el programa Simulink de MATLAB R2015a. Los bloques principales de este sistema entonces son:

- Conversiones a la entrada
- Traslación
- Rotación
- Conversiones a la salida.

El diagrama en bloques correspondiente se puede ver en la figura 3.1

#### 3.1.1. Traslación

Las ecuaciones 2.30 y 2.29 se modelaron mediante una cascada de integradores, como se puede ver en la figura 3.2.

El modelo completo de traslación se puede ver en la figura 3.3

Además, la sumatoria de fuerzas de la ec. 2.31, se refleja en el bloque sumador de la figura 3.3. La fuerza de control es la entrada al bloque, y por lo tanto es generada externamente. Por el contrario, la aceleración de la gravedad y la resistencia atmosférica fueron programadas internamente, en los bloques que se pueden ver en la misma figura.

Por último, también se puede ver un bloque que calcula la velocidad angular de la terna RPY respecto a la ECI, según la ecuación 2.37.

#### Modelo J6

El modelo gravitatorio introducido en la sección 2.14.1 se implementó hasta el orden J6, como se puede ver en la figura 3.4.

#### Resistencia atmosférica

La implementación de la ecuación 2.33 en Simulink, puede verse en la figura 3.5.

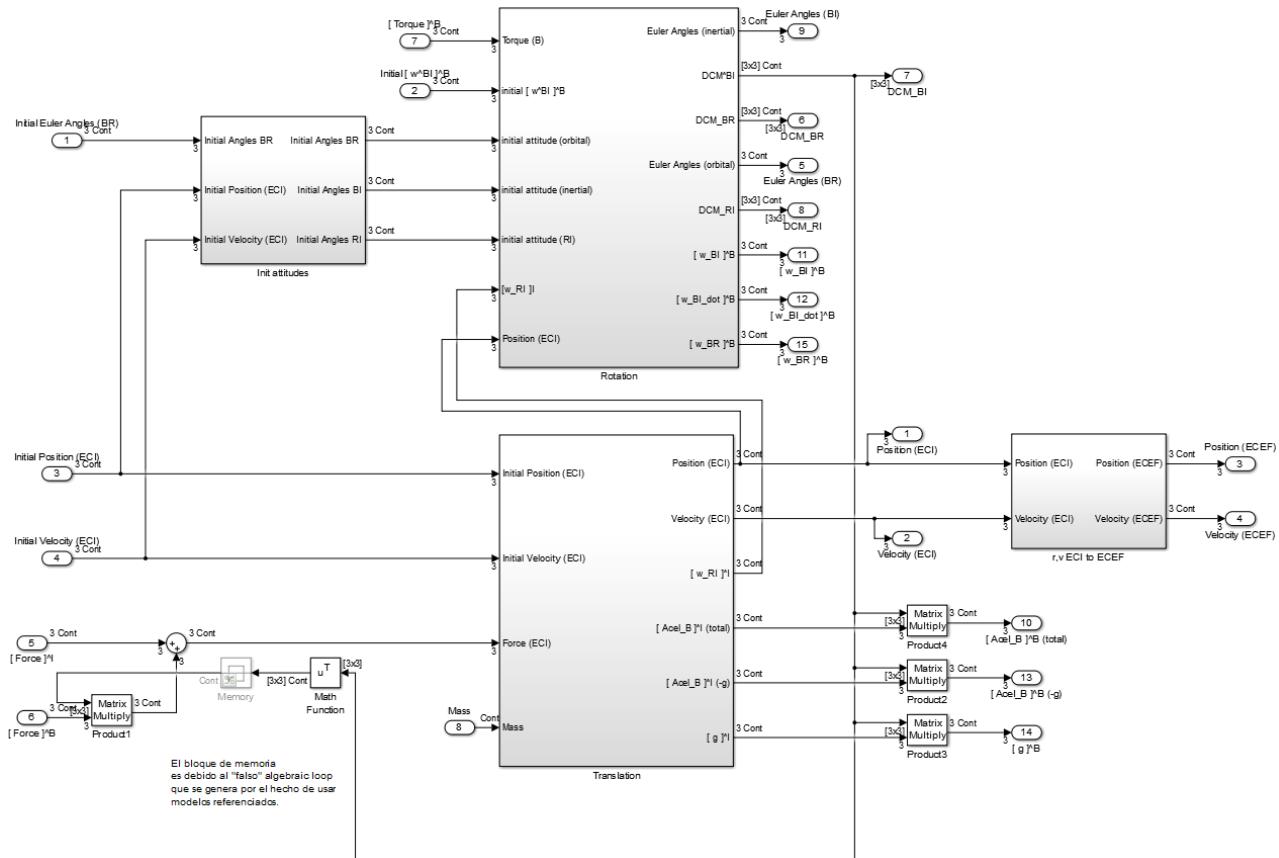


Figura 3.1: Bloques internos del modelo “SC\_dynamics”

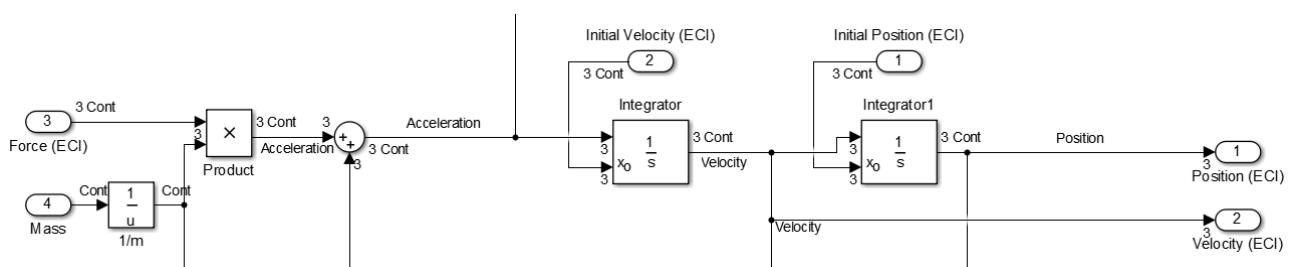


Figura 3.2: Implementación en Simulink de la segunda Ley de Newton.

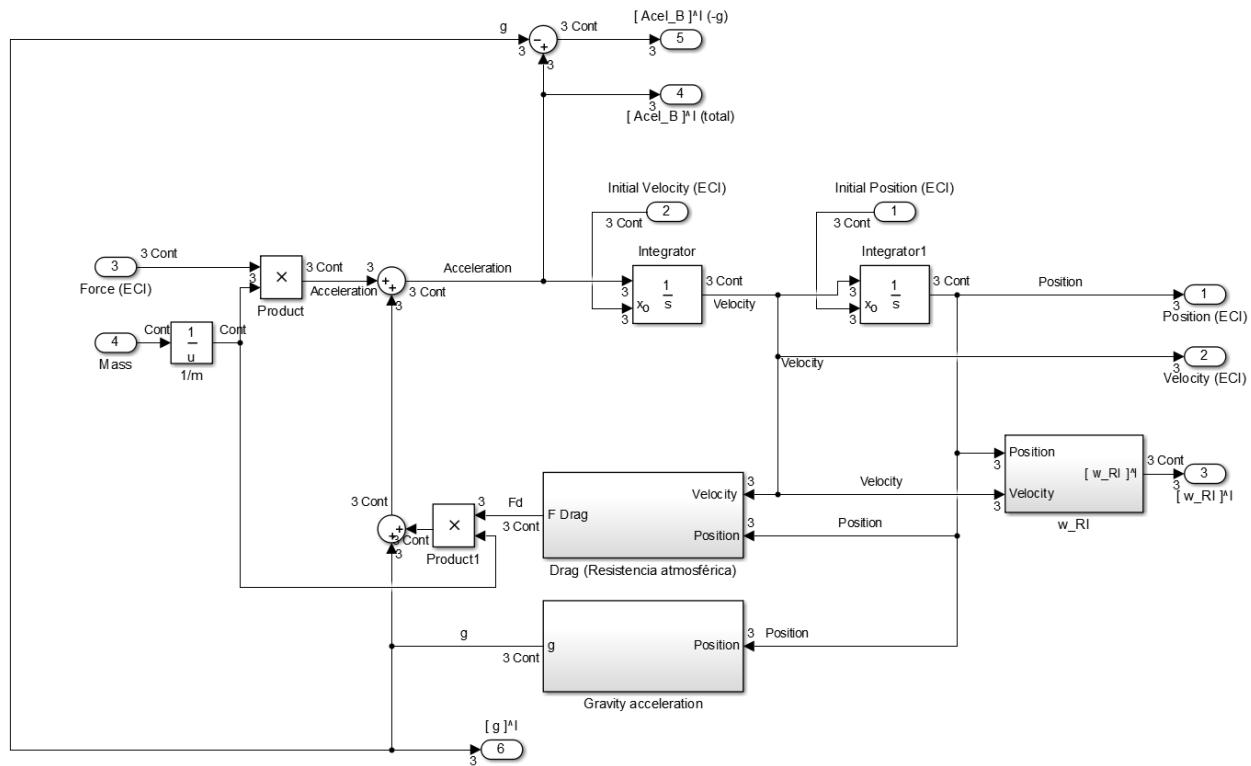


Figura 3.3: Implementación en Simulink del módulo de traslación

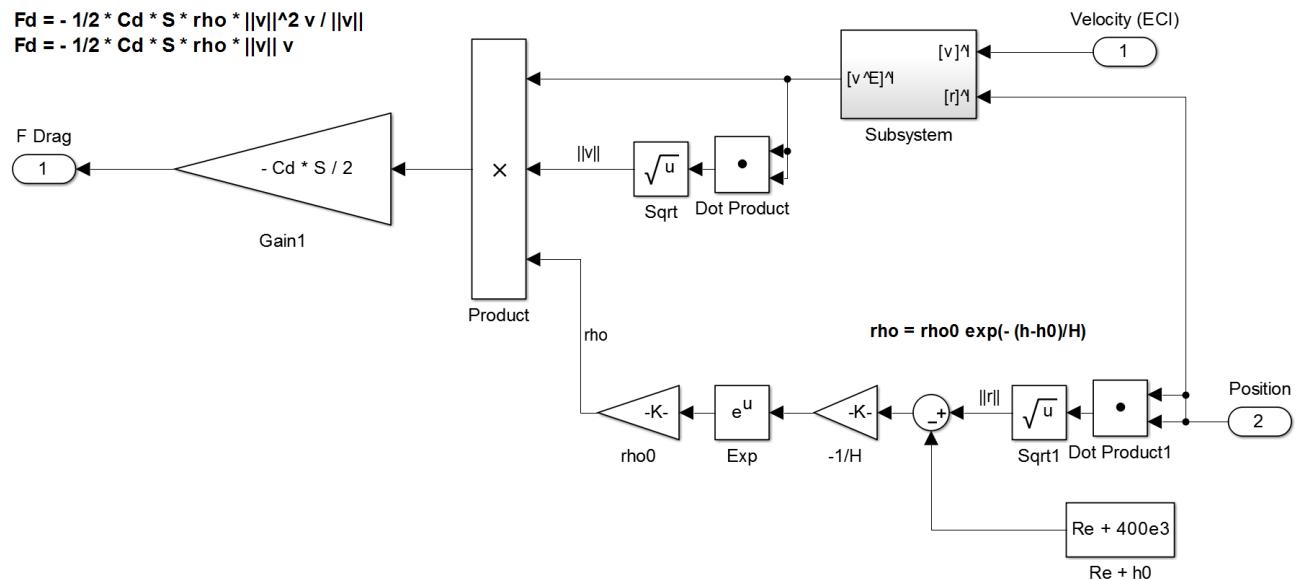


Figura 3.5: Implementación en Simulink de la resistencia atmosférica

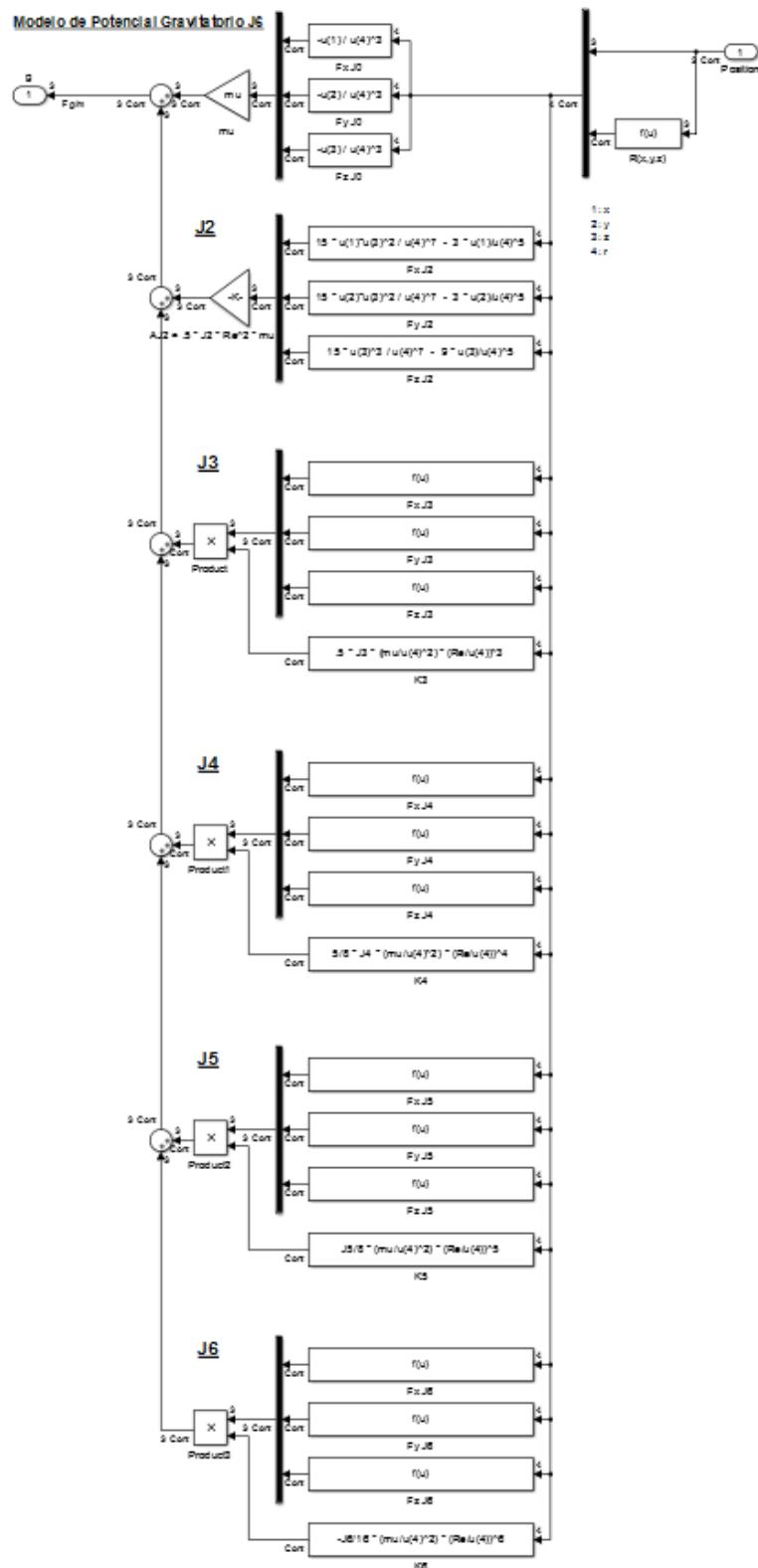


Figura 3.4: Implementación en Simulink del modelo gravitatorio

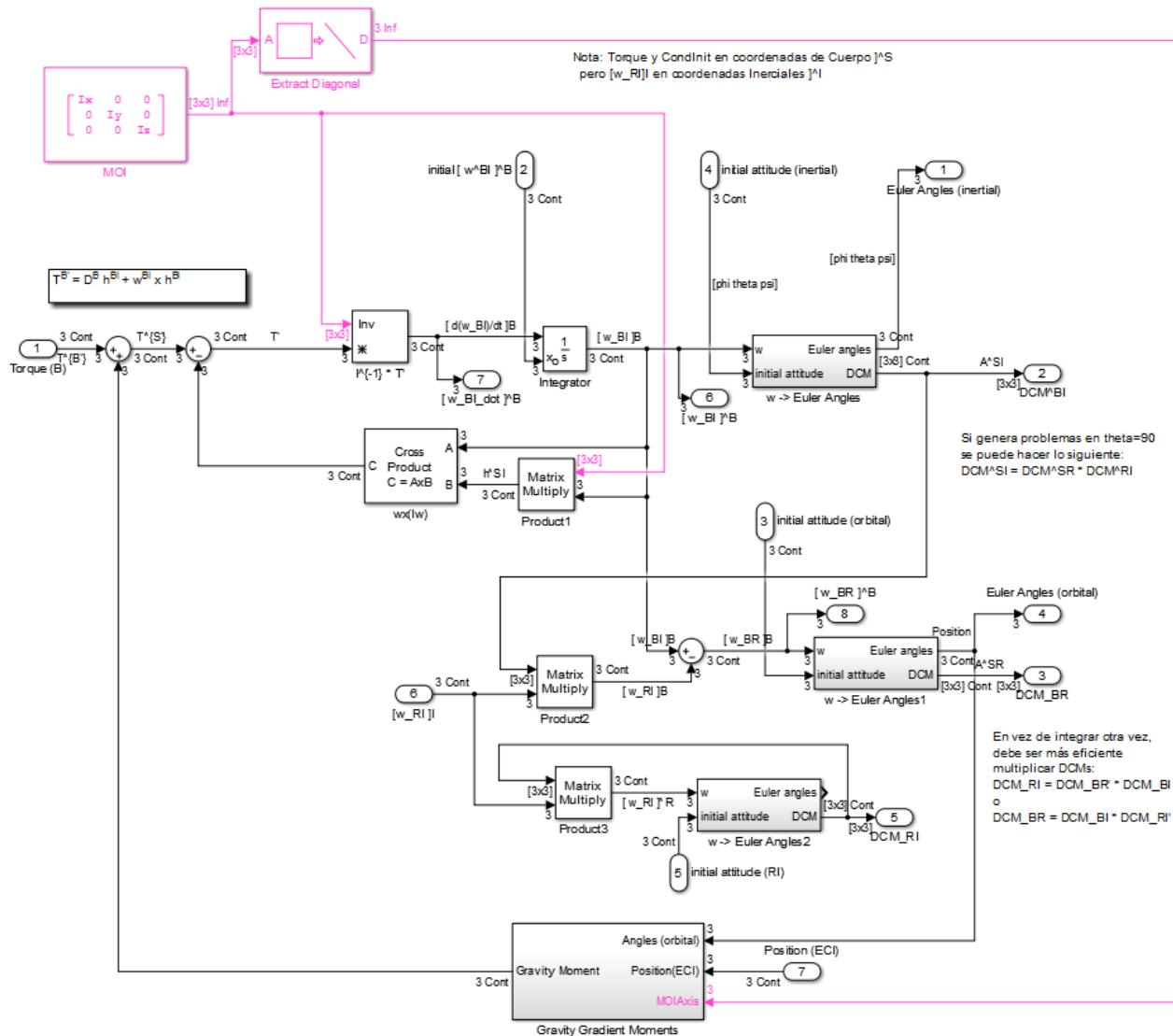


Figura 3.6: Implementación en Simulink del módulo de rotación

### 3.1.2. Rotación

El diagrama completo del módulo de rotación se puede ver en la figura 3.6. A la entrada, el momento de control se genera externamente al bloque, y se introduce mediante el puerto 1. El momento por gradiente gravitacional se programó en un bloque interno, como muestra la misma figura. La sumatoria de la ecuación 2.40 se refleja en el bloque sumador entre el puerto 1 y la salida del bloque del momento por gradiente gravitacional.

### Momento por gradiente gravitacional

La implementación de esta perturbación se puede ver en la figura 3.7

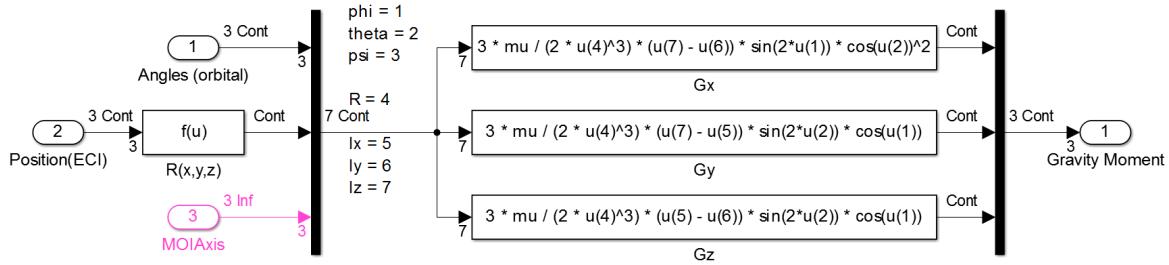


Figura 3.7: Implementación en Simulink del momento por gradiente gravitacional

### 3.1.3. Conversión de ECI a ECEF

El modelo de traslación se realizó en terna inercial (ECI). Sin embargo, también es sumamente útil disponer de su equivalente en terna terrestre (ECEF), ya que por ejemplo, es esta representación la que utiliza el receptor GPS. Para calcular estas salidas, es posible utilizar una transformación lineal que se desarrollará a continuación. La relación entre la terna inercial y la terrestre es simplemente la orientación de la tierra, que gira sobre su propio eje con velocidad angular constante, como se vio en el apartado 2.4.1. La posición en terna terrestre puede escribirse como un cambio de coordenadas de la posición en terna ECI hacia la terna ECEF, esto es:

$$[\mathbf{r}]^E = C_I^E [\mathbf{r}]^I \quad (3.1)$$

Por otro lado, para comprender lo que sucede con la velocidad es importante comprender que cuando hablamos de la velocidad inercial, nos referimos a la derivada respecto a una terna inercial (ECI), de la posición inercial, en coordenadas iniciales.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d^I \mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}^I \\ &[\mathbf{v}^I]^I \end{aligned}$$

En cambio, al hablar de velocidad terrestre, hablamos de la derivada respecto a la terna terrestre (ECEF), de la posición terrestre, en coordenadas ECEF. Las siguientes ecuaciones clarifican esta diferencia.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^E &= \frac{d^E \mathbf{r}}{dt} \\ &[\mathbf{v}^E]^E \end{aligned}$$

Por la transformación de Euler de la derivada rotacional se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d^I \mathbf{r}}{dt} &= \frac{d^E \mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^{EI} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{v}^I &= \mathbf{v}^E + \boldsymbol{\omega}^{EI} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{v}^E &= \mathbf{v}^I - \boldsymbol{\omega}^{EI} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tomando coordenadas terrestres

$$[\mathbf{v}^E]^E = C_I^E [\mathbf{v}^I]^I - C_I^E ([\boldsymbol{\omega}^{EI}]^I \times [\mathbf{r}]^I) \quad (3.3)$$

El producto vectorial de la ecuación anterior se puede escribir de forma matricial como:

$$[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^I \times [\mathbf{r}]^I = S([\boldsymbol{\omega}^{EI}]^I) [\mathbf{r}]^I$$

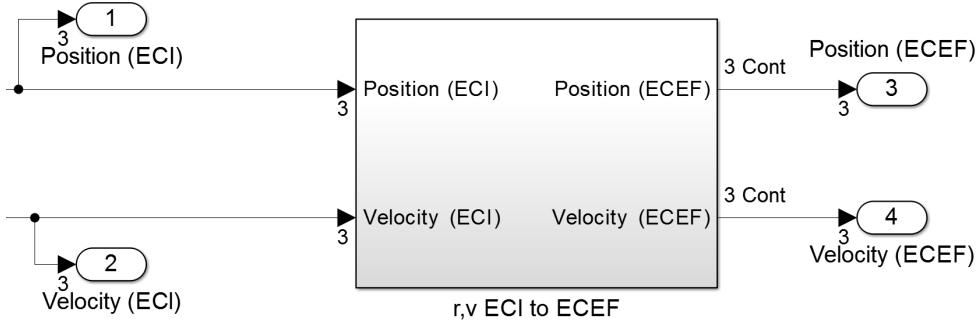


Figura 3.8: Conversión de posición y velocidad iniciales a terrestres.

La velocidad de rotación de la Tierra  $\omega^{EI}$  posee un módulo igual a  $\omega^{EI} = 7.292\,115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$  y como la rotación se da sobre el eje  $\hat{\mathbf{i}}_z$  únicamente, resulta  $[\omega^{EI}]^I = [0\ 0\ \omega^{EI}]$ . Para simplificar la notación se define

$$\Omega^E = S([\omega^{EI}]^I) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{EI} & 0 \\ \omega^{EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Volviendo a la ecuación 3.3

$$[\mathbf{v}^E]^E = C_I^E [\mathbf{v}^I]^I - C_I^E \Omega^E [\mathbf{r}]^I \quad (3.5)$$

Las ecuaciones 3.1 y 3.5 pueden escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v}^E \end{bmatrix}^E = \begin{bmatrix} C_I^E & 0_{3 \times 3} \\ -C_I^E \Omega^E & C_I^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v}^I \end{bmatrix}^I \quad (3.6)$$

$$M^{EI} \triangleq \begin{bmatrix} C_I^E & 0_{3 \times 3} \\ -C_I^E \Omega^E & C_I^E \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Del mismo modo puede obtenerse su inversa si así se requiriera en algún algoritmo.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v}^I \end{bmatrix}^I = \begin{bmatrix} C_E^I & 0_{3 \times 3} \\ \Omega^E C_E^I & C_E^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v}^E \end{bmatrix}^E \quad (3.8)$$

$$M^{IE} \triangleq \begin{bmatrix} C_E^I & 0_{3 \times 3} \\ \Omega^E C_E^I & C_E^I \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Ahora es fácil implementar esta transformación en el simulador ya que es una simple multiplicación matricial.

Por otro lado, en el modelo de la resistencia atmosférica, ec. 2.33, se requiere la velocidad relativa a la terna terrestre, sin embargo, en coordenadas iniciales. Para obtener esta variable se parte de la ecuación 3.2 y se toman coordenadas iniciales

$$[\mathbf{v}^E]^I = [\mathbf{v}^I]^I - [\boldsymbol{\omega}_{EI}]^I \times [\mathbf{r}]^I$$

Como  $\boldsymbol{\omega}_{EI}$  es colineal al eje de rotación entre la terna terrestre y la inercial, resulta  $[\boldsymbol{\omega}_{EI}]^E = [\boldsymbol{\omega}_{EI}]^I$ , puesto que la rotación de un vector que se encuentra sobre el eje de rotación se transforma en el mismo vector. Esto permite utilizar nuevamente  $\Omega^E$ .

$$[\mathbf{v}^E]^I = [\mathbf{v}^I]^I - \Omega^E [\mathbf{r}]^I$$

Considerando la definición de  $\Omega^E$ , ec. 3.4, las componentes de esta ecuación resultan:

$$\begin{bmatrix} v_x^E \\ v_y^E \\ v_z^E \end{bmatrix}^I = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}^I - \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{EI} & 0 \\ \omega^{EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}^I$$

$$[\mathbf{v}^E]^I = \begin{bmatrix} v_x^E \\ v_y^E \\ v_z^E \end{bmatrix}^I = \begin{bmatrix} v_x + \omega^{EI}r_y \\ v_y - \omega^{EI}r_x \\ v_z \end{bmatrix}^I$$

### 3.1.4. Conversiones a la entrada

El módulo de rotación necesita condiciones iniciales de orientación respecto al sistema orbital,  $\Theta^{BR}(0)$ , así como también la orientación inicial de este último sistema (orbital) respecto al inercial,  $\Theta^{RI}(0)$ . Por otro lado, son necesarias condiciones iniciales en posición y velocidad para integrar las ecuaciones de Newton,  $\mathbf{r}^I(0)$ ,  $\mathbf{v}^I(0)$ . Sin embargo,  $\Theta^{RI}(0)$  puede deducirse fácilmente a partir de la posición y velocidad iniciales según lo expuesto en la sección 2.3. Por esta razón se programó un módulo que inicialice la orientación de las ternas según únicamente  $\Theta^{BR}(0)$ ,  $\mathbf{r}^I(0)$  y  $\mathbf{v}^I(0)$ .

Como se vio en la sección 2.4.1, un tensor expresado en coordenadas del sistema RPY,  $[\mathbf{x}]^R$ , puede representarse en coordenadas inerciales,  $[\mathbf{x}]^I$ , según:

$$[\mathbf{x}]^I = C_R^I [\mathbf{x}]^R$$

donde las columnas de  $C_R^I$  son los vectores de la tríada del sistema RPY en coordenadas ECI:

$$C_R^I = [ \hat{\mathbf{r}}_{roll}^I \quad \hat{\mathbf{r}}_{pitch}^I \quad \hat{\mathbf{r}}_{yaw}^I ]$$

Por otro lado, de acuerdo a la sección 2.3, tomando coordenadas inerciales a la definición de la terna RPY en función de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}$  inerciales, se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_{yaw}^I &= -[\mathbf{r}_0]^I \frac{1}{\|\mathbf{r}_0\|} \\ \hat{\mathbf{r}}_{pitch}^I &= ([\mathbf{v}_0]^I \times [\mathbf{r}_0]^I) \frac{1}{\|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{r}_0\|} \\ \hat{\mathbf{r}}_{roll}^I &= \hat{\mathbf{r}}_{pitch}^I \times \hat{\mathbf{r}}_{yaw}^I \end{aligned}$$

Finalmente, como es una matriz ortonormal,

$$C_I^R = (C_R^I)^{-1} = (C_R^I)^T$$

Luego, existen fórmulas para convertir de la matriz de cosenos directores de rotación ZYX a los ángulos de Euler. Estas se pueden encontrar en [25].

## 3.2. Utilización del modelo

En la figura 3.9 se pueden ver las entradas y salidas del bloque implementado en Simulink con el modelo teórico del vehículo espacial.

### 3.2.1. Entradas

Las primeras 4 entradas son las condiciones iniciales de movimiento, en el orden siguiente:

- $\Theta_0^{BR}$ : Orientación del cuerpo respecto a la terna de referencia orbital RPY, en ángulos de Euler “ZYX”. (La orientación de la terna RPY respecto a la inercial queda definida automáticamente según la posición y velocidad iniciales.)
- $[\omega_0^{BI}]^B$ : Velocidad angular del cuerpo rígido, respecto a la terna inercial, en coordenadas de cuerpo.
- $[r_0]^I$ : Posición inicial del centro de masa en terna ECI.
- $[v_0]^I$ : Velocidad (inercial) inicial del centro de masa en terna ECI.

Los ángulos de Euler corresponden a la cadena de rotaciones “ZYX”. El vector  $\Theta$  se forma con el roll en la primera posición, pitch en la segunda y yaw en la tercera:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \phi = \text{roll} \\ \theta = \text{pitch} \\ \psi = \text{yaw} \end{bmatrix}$$

Las tres entradas siguientes son las fuerzas de control de la planta, fuerza y momento. La fuerza se puede introducir tanto en coordenadas de cuerpo como en coordenadas inerciales. Internamente, ambas señales se suman, con el correspondiente cambio de coordenadas. Se programó esta facilidad ya que en ocasiones es conveniente introducir la fuerza en la terna inercial, mientras que otras veces se prefiere la terna de cuerpo. Estas entradas entonces son:

- $[F]^I$ : La fuerza aplicada sobre el centro de masa del cuerpo, en coordenadas inerciales.
- $[F]^B$ : La fuerza aplicada sobre el centro de masa del cuerpo, en coordenadas de cuerpo.
- $[\tau]^B$ : El torque aplicado respecto al centro de masa del cuerpo, en coordenadas de cuerpo.

Finalmente, la última entrada del bloque es la masa del vehículo, la cual podría variar de instante a instante.

- $m$ : La masa del cuerpo rígido.

Todas las entradas son vectores columna de 3 filas, excepto la masa que es una señal de una única dimensión.

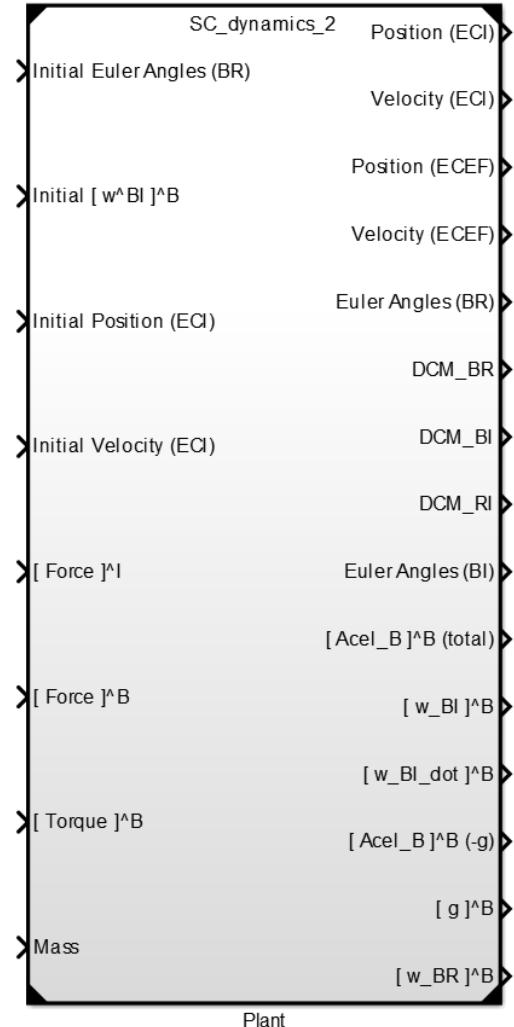


Figura 3.9: Modelo

### 3.2.2. Salidas

Las primeras cuatro salidas del bloque son producto de la traslación del vehículo. En el siguiente orden:

- $[r]^I$ : Posición del centro de masa en terna inercial.
- $[v]^I$ : Velocidad (inercial) del centro de masa en terna inercial.
- $[r]^E$ : Posición del centro de masa en terna terrestre.
- $[v^E]^E$ : Velocidad (terrestre) del centro de masa en terna terrestre.

A continuación se tiene la orientación del cuerpo en distintas representaciones

- $\Theta^{BR}$ : Ángulos de Euler del cuerpo rígido, respecto a la terna de referencia orbital RPY.
- $C_R^B$ : Matriz de cambio de base (DCM) de  $R$ (RPY) a  $B$ (cuerpo).
- $C_I^B$ : Matriz de cambio de base (DCM) de  $I$ (ECI) a  $B$ (cuerpo).
- $C_I^R$ : Matriz de cambio de base (DCM) de  $I$ (ECI) a  $R$ (RPY).
- $\Theta^{BI}$ : Ángulos de Euler del cuerpo rígido, respecto a la terna inercial.

Todos los ángulos de Euler se encuentran en la misma convención que en las condiciones iniciales de la entrada.

Por último se presentan algunas salidas de aceleración lineal, y aceleración y velocidad angulares, convenientes para utilizar el sistema junto con modelos de sensores iniciales, como acelerómetros y giróscopos.

- $[a]^B$ : Aceleración (inercial) del cuerpo en coordenadas de cuerpo (aceleración total).
- $[\omega^{BI}]^B$ : Velocidad angular del cuerpo respecto a la terna inercial, en coordenadas de cuerpo.
- $\left[ \frac{d^B \omega^{BI}}{dt} \right]^B$ : Derivada respecto de la terna de cuerpo de la velocidad angular del cuerpo, en coordenadas de cuerpo (o lo que es igual: derivada de la salida anterior).
- $[a_p]^B$ : Aceleración perturbadora =  $[a]^B - [g]^B$  (aceleración total menos la gravedad).
- $[g]^B$ : Aceleración de la gravedad en coordenadas de cuerpo.
- $[\omega^{BR}]^B$ : Velocidad angular del cuerpo respecto a la terna de referencia orbital RPY.

Todas las salidas son vectores columna de 3 filas, a excepción de las matrices de cambio de base que son justamente matrices de  $3 \times 3$ .

### 3.2.3. Variables de entorno

Al mismo tiempo se necesitan configurar algunas variables en el espacio de trabajo de MATLAB (*workspace*) para que el modelo funcione correctamente:

Variable	Valor
mu	398600441900000
Re	6378388
J2	0.0010826
J3	-2.52e-6
J4	-1.61e-6
J5	-0.15e-6
J6	0.57e-6
w_earth	7.292115e-05
k_quat	0.005
Ix	$I_x$ , Momento de inercia principal, eje x
Iy	$I_y$ , Momento de inercia principal, eje y
Iz	$I_z$ , Momento de inercia principal, eje z
Cd	$C_d$ , Coeficiente de resistencia atmosférica
S	$S$ , Área de la sección transversal del satélite

Cuadro 3.1: Variables de espacio de trabajo de MATLAB

La variable k\_quat es un factor de normalización que se utiliza en el método numérico de determinación de actitud. Se puede modificar, considerando que valores más grandes reducen el error en la integración, pero hacen que la simulación sea más lenta.

Las últimas 5 variables son propiedades del vehículo a simular y deben ser ajustadas al caso de estudio.

### 3.2.4. Unidades

Para las unidades se utilizó el estándar internacional SI, que se resume en la tabla 3.2

Elemento	Unidad
Tiempo	s
Ángulos	rad
Velocidad angular	$\text{rad s}^{-1}$
Posición	m
Velocidad lineal	$\text{m s}^{-1}$
Fuerza	N
Torque	N m
Masa	kg
Aceleración lineal	$\text{m s}^{-2}$
Aceleración angular	$\text{rad s}^{-2}$
Momentos de inercia	$\text{kg m}^2$
Área	$\text{m}^2$

Cuadro 3.2: Unidades del sistema SI

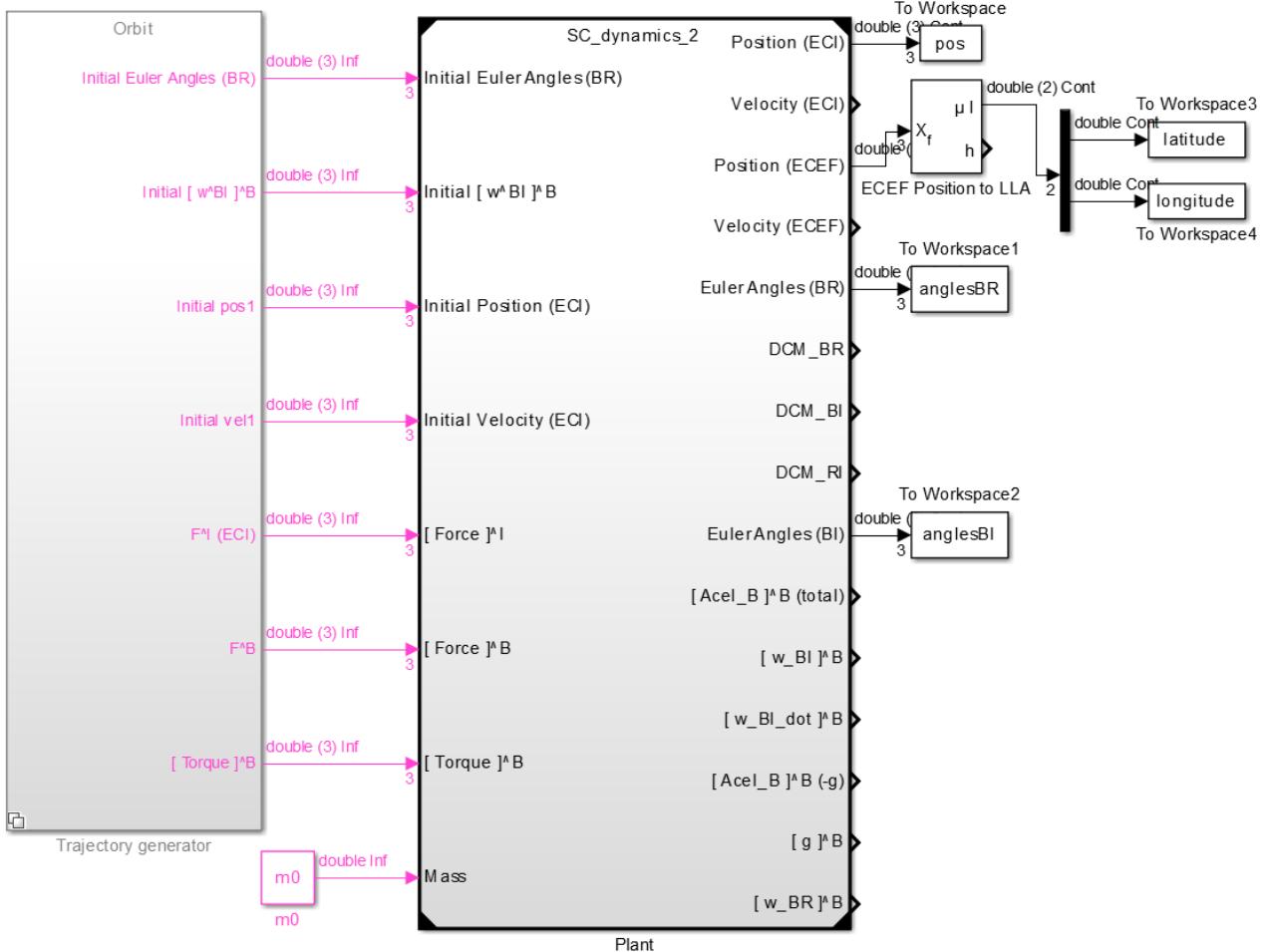


Figura 3.10: Ejemplo de uso I

### 3.2.5. Ejemplo I

En este ejemplo, se programó un módulo denominado “Trajectory generator”. Internamente este bloque contiene una serie de variantes<sup>1</sup> con trayectorias del satélite y de algunos vehículos terrestres para hacer pruebas, configurables a través de la variable de MATLAB “Trajectory\_mode”. En este caso se utilizó el modo “Órbita”,

```
Trajectory_mode = 0;
```

Esta variante incluye un bloque (Fig. 3.11) que transforma los elementos orbitales clásicos en posición y velocidad, según las fórmulas de la sección 2.11.1. Esto es muy útil puesto que al simular órbitas es más intuitivo definir las condiciones iniciales según la forma y orientación en el espacio que según los valores de posición y velocidad. Por estos motivos, además de las variables del modelo dinámico, tabla 3.1, se hacen necesarias algunas variables más para el modo “Órbita”. En el caso particular de este ejemplo, se introdujeron los elementos orbitales iniciales dados por la tabla 3.3.

Por otro lado, la condición inicial en orientación es arbitraria, mientras que aquella en velocidad

angular,  $[\omega_0^{BI}]^B = \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,02 \\ 0,02 \end{bmatrix}$ , se ha tomado de las condiciones de inyección de manuales de vehículos

<sup>1</sup>Bloques “Variant Subsystem” de Simulink

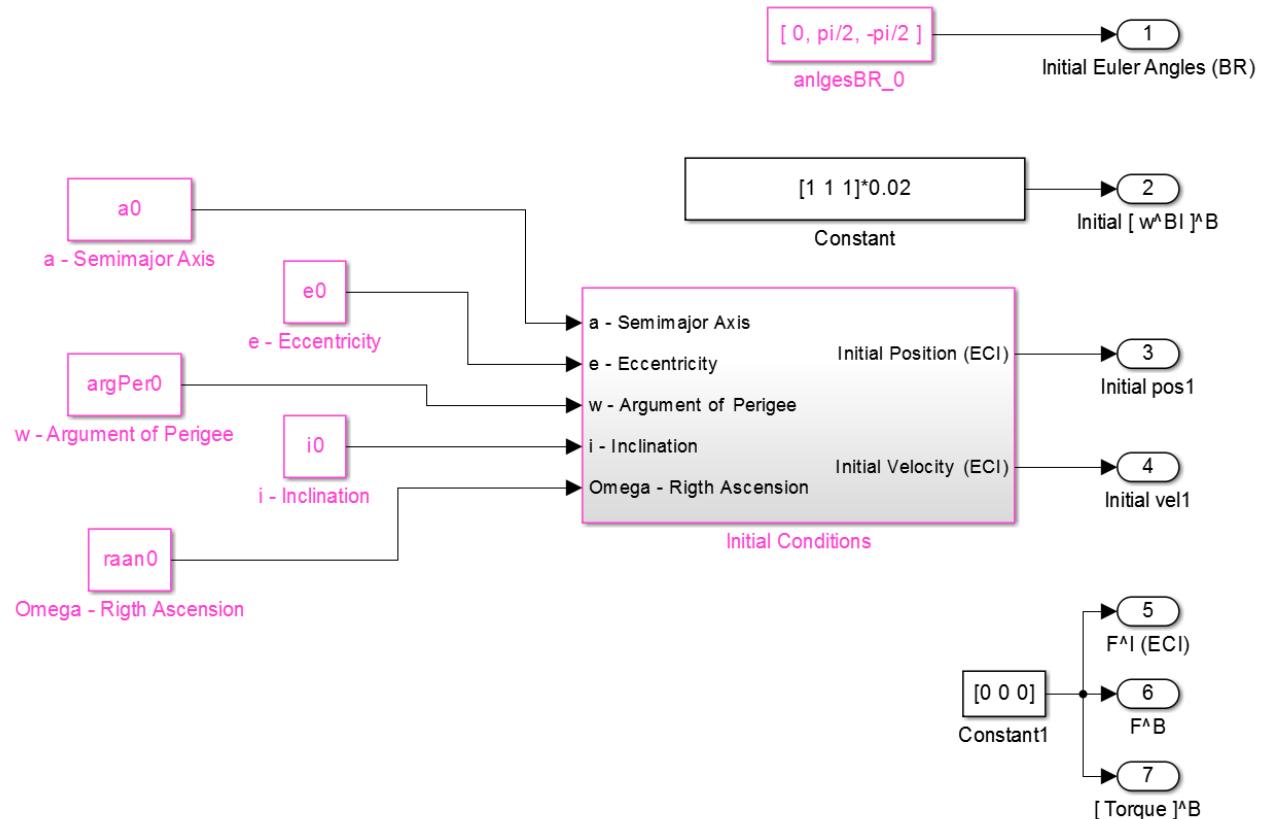


Figura 3.11: Generador de condiciones iniciales del modo “Órbita”

Variable	Valor	Unidades	Descripción
Trajectory_mode	0	-	Trayectoria elegida (órbita)
$a_0$	$R_e + 400$	km	Semieje mayor inicial
$e_0$	0.0074	-	Excentricidad inicial
$i_0$	$-83\frac{\pi}{180}$	rad	Inclinación inicial
$\text{argPer}_0$	$54\frac{\pi}{180}$	rad	Argumento de perigeo inicial
$\text{raan}_0$	$-69\frac{\pi}{180}$	rad	Longitud del nodo inicial

Cuadro 3.3: Variables de MATLAB para el modo “Órbita”

lanzadores comerciales, [1], [2], [3], [13].

Las fuerzas de control se mantuvieron nulas, dejando orbitar libremente al vehículo, sujeto a las perturbaciones de resistencia atmosférica y momento por gradiente gravitacional.

Por último, con el valor de semieje mayor inicial, se espera un período orbital acorde a la ecuación 2.11 de 5545 segundos. Para redondear, se corrió una simulación con una duración de 6000 segundos.

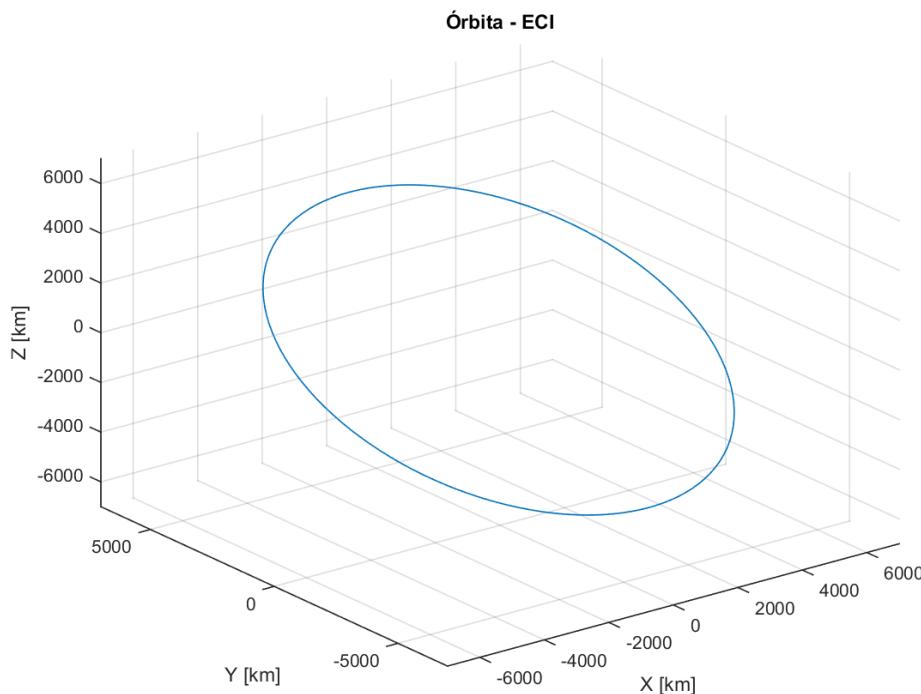


Figura 3.12: Trayectoria en tres dimensiones

En la figura 3.12 se puede ver un gráfico de la trayectoria descripta por el centro de masa en terna inercial. En la figura 3.13 se muestra un tipo de gráfico muy habitual denominado “trayectoria terrestre”, en inglés *ground track*, que mapea la posición del satélite a coordenadas geográficas de latitud y longitud. Esto permite visualizar mejor sobre qué regiones del planeta se encuentra el vehículo. El marcador ('X') indica el punto de inyección en la órbita, es decir, la posición inicial de la simulación.

En cuanto a la orientación, se puede ver en la figura 3.14 la evolución de los ángulos de Euler respecto a la terna ECI y a la terna orbital RPY. Esta forma de onda se debe al momento por gradiente gravitacional que sufre el cuerpo rígido, ya que no existe ningún torque de control aplicado a la planta y por lo tanto el satélite rota libremente.

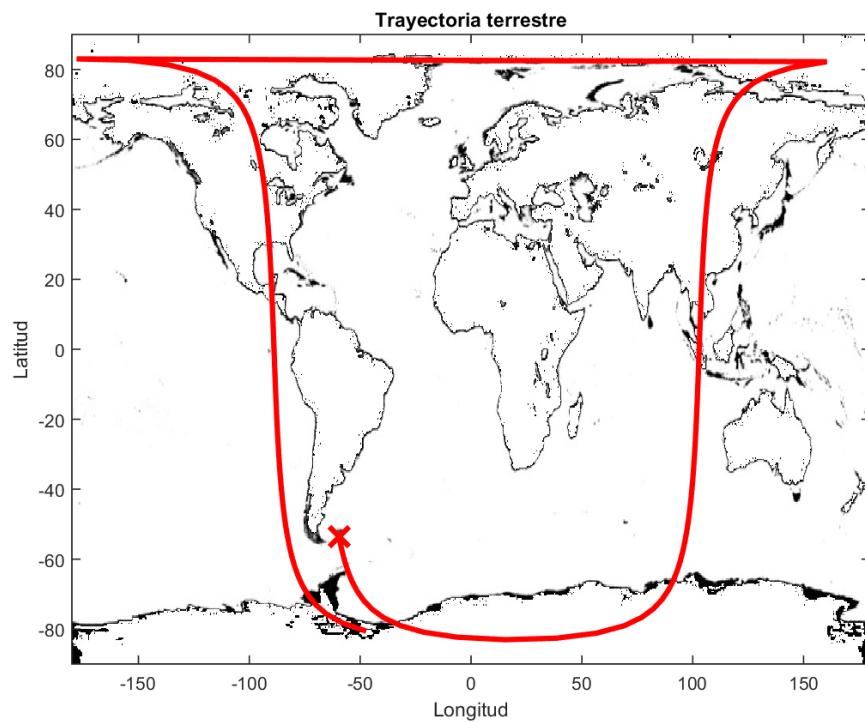


Figura 3.13: Trayectoria terrestre

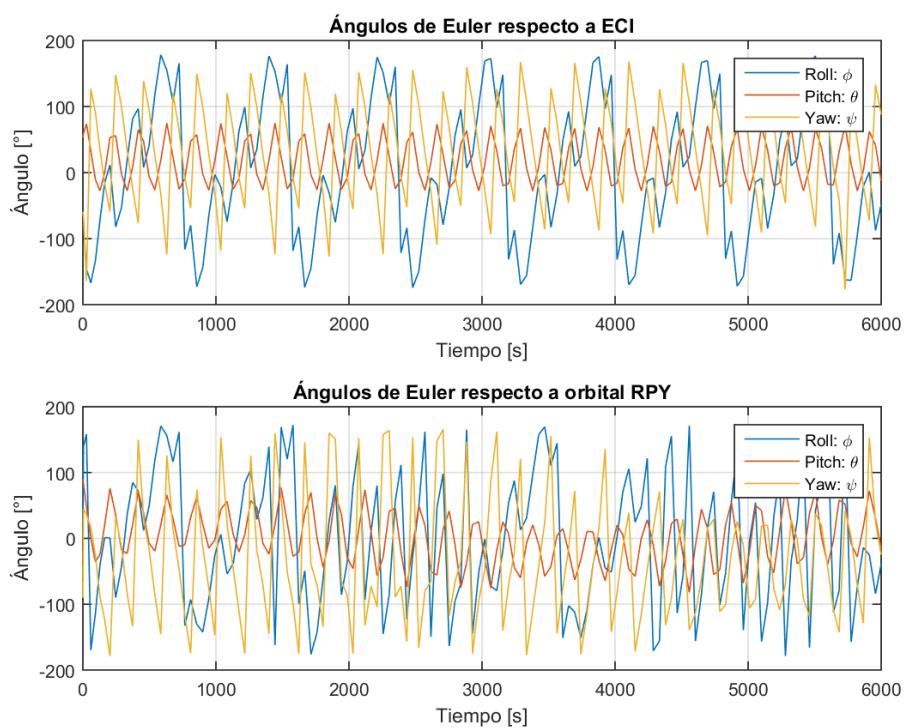


Figura 3.14: Ángulos de Euler respecto a la terna inercial y orbital

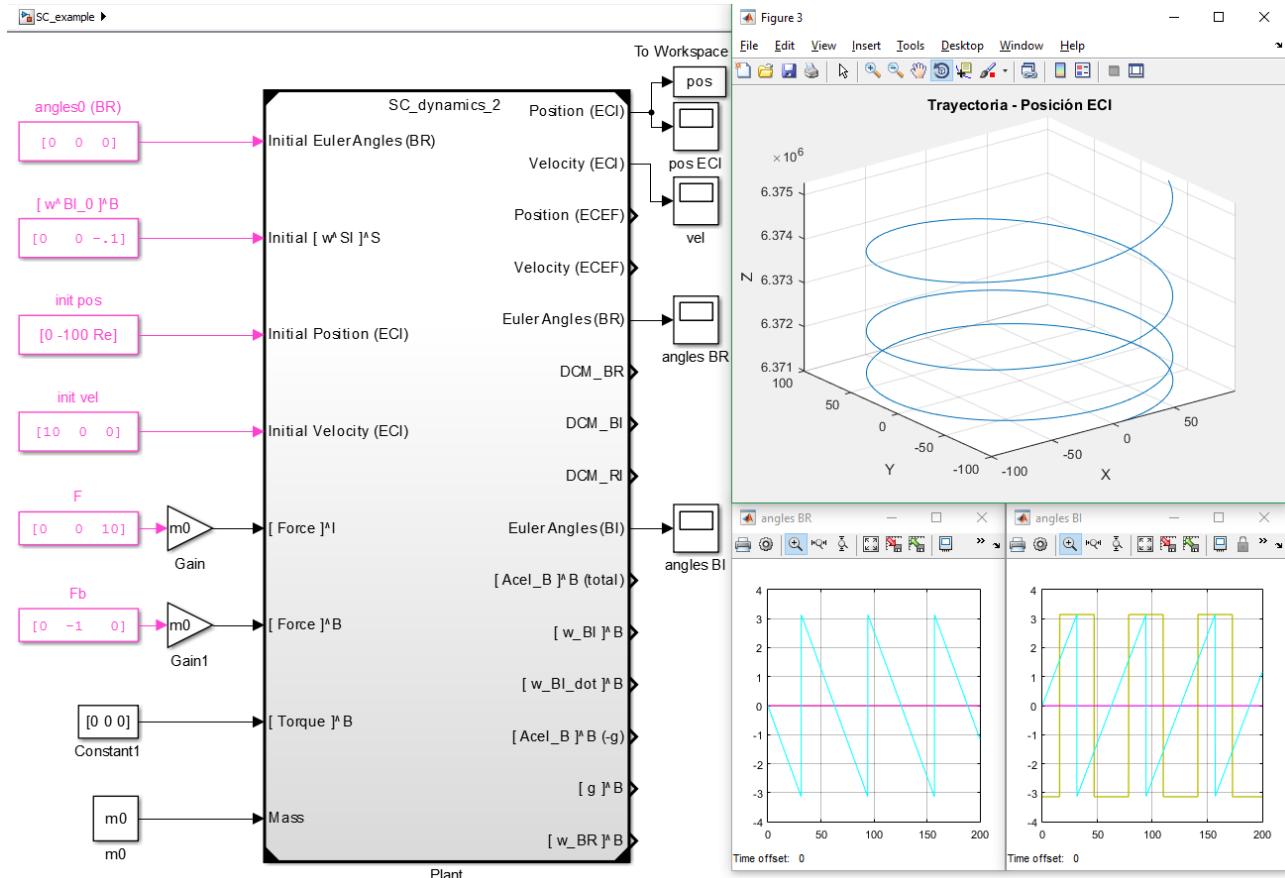


Figura 3.15: Ejemplo II de uso del modelo

### 3.2.6. Ejemplo II

En este ejemplo, se demuestra que el simulador implementado no solo se puede utilizar para la trayectoria orbital del satélite, sino también para otros problemas teóricos de mecánica clásica.

Además de cargar las variables de la tabla 3.1, es necesario generar las condiciones iniciales y las fuerzas de control adecuadas al caso de estudio. Para este ejemplo se busca como objetivo sintetizar una trayectoria en espiral ascendente como puede verse en la figura 3.15. La traslación de este movimiento puede descomponerse en dos partes. Por un lado, en el eje Z se trata de un ascenso vertical acelerado, dado por una fuerza constante en coordenadas inerciales apuntando al polo Norte celeste:

$$[\mathbf{F}_v]^I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}^I \cdot m$$

donde  $m$  es la masa del vehículo, cuyo correlato en el simulador se encuentra en una variable  $m_0$ , en este caso de 1000 kg. Por otro lado, en el plano XY se mantiene un movimiento circular uniforme (MCU) de condiciones iniciales:

$$[\mathbf{r}_0]^I = \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ R_e \end{bmatrix}^I, \quad [\mathbf{v}_0]^I = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^I$$

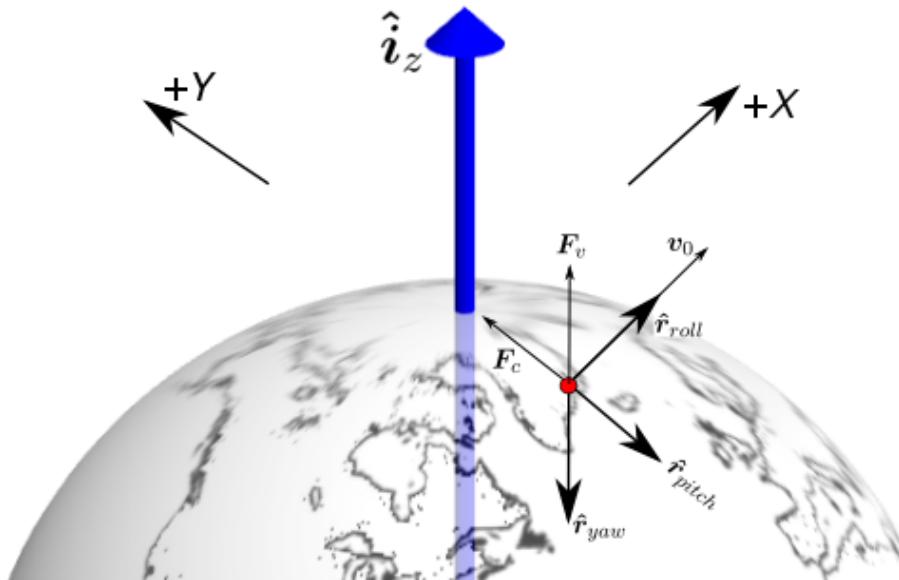


Figura 3.16: Condiciones iniciales del ejemplo II.

Esto significa que el centro de masa se encuentra inicialmente sobre la superficie terrestre<sup>2</sup>, a 100 metros del polo norte geográfico, en el sentido negativo del eje Y. Además, tiene una velocidad inicial de  $10 \text{ m s}^{-1}$  en el eje X positivo. Esta posición y velocidad inicial, implican, según la definición de la sección 2.3, que la terna de referencia RPY se alinea inicialmente según:

$$\hat{r}_{yaw} = -\hat{i}_z, \quad \hat{r}_{roll} = \hat{i}_x, \quad \hat{r}_{pitch} = -\hat{i}_y$$

Con estas condiciones iniciales de traslación se puede calcular el módulo de la aceleración centrípeta,  $a_c$  para que el movimiento sea circular,

$$a_c = \frac{v_0^2}{r_0} = \frac{10^2}{100} = 1$$

donde  $r_0$  y  $v_0$  son las normas de las condiciones iniciales  $[r_0]^I$  y  $[v_0]^I$  respectivamente, pero solo en el plano XY, que es donde se da el MCU, es decir:

$$r_0 = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \end{bmatrix} \right\|, \quad v_0 = \left\| \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|$$

En consecuencia, como se desea que el centro de la circunferencia se encuentre en el origen del plano XY, a la altura del polo Norte geográfico, es decir  $[0 \ 0 \ R_e]^T$ , se aplica una fuerza constante perpendicular a la velocidad, proporcional a la aceleración recién calculada, en el sentido negativo del eje Y de cuerpo, de modo que apunte al centro del círculo.

$$[\mathbf{F}_c]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot m$$

La velocidad de revolución con que recorre la circunferencia queda determinada por:

$$\frac{v_0}{r_0} = 0.1 \text{ rad s}^{-1}$$

<sup>2</sup>Se considera para este ejemplo sencillo que la superficie de la Tierra en el polo Norte geográfico se encuentra a una distancia  $R_e$  del origen

que implica un período de revolución de  $P = \frac{2\pi}{0,1} = 20\pi$

En cuanto a la rotación del cuerpo rígido, se desea que la terna de cuerpo se mantenga alineada con la terna de referencia RPY, por lo tanto la orientación inicial se anula y se hace coincidir la velocidad angular del cuerpo con la velocidad de revolución del MCU.

$$\Theta^{BR} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,1 \end{bmatrix}$$

En el gráfico de los ángulos BR de la figura 3.15, se puede ver que efectivamente el único ángulo que evoluciona distinto de 0 es el de yaw, con un período igual a 20π.

### 3.3. Comparación con el STK

Para validar el simulador, se compararon los resultados de los elementos orbitales clásicos con aquellos calculados por una aplicación comercial de simulación de vehículos aeroespaciales, el STK (*Systems Tool Kit*) de la empresa AGI, [20].

En ambos programas se cargó una órbita con parámetros iniciales dados por la Tabla 3.4, para un cuerpo rígido de 250 kg de masa.

Elemento	Valor	Unidades
Semieje mayor ( $a$ )	$R_e + 400$	km
Excentricidad ( $e$ )	0.0074	-
Inclinación ( $i$ )	95	°
Argumento de Perigeo ( $\omega$ )	0	°
Longitud del nodo ( $\Omega$ )	0	°
Anomalía verdadera ( $f$ )	0	°

Cuadro 3.4: Elementos orbitales iniciales

con  $R_e$  el radio medio de la Tierra.

Estos valores implican una altitud de perigeo y apogeo de 350 km y 450 km respectivamente, como condición inicial (estos son elementos osculantes). Además, se destaca que el vehículo inicia la simulación en el perigeo.

En la figura 3.17 se puede apreciar la evolución de los elementos orbitales osculantes según el simulador desarrollado a la izquierda, y según el STK a la derecha.

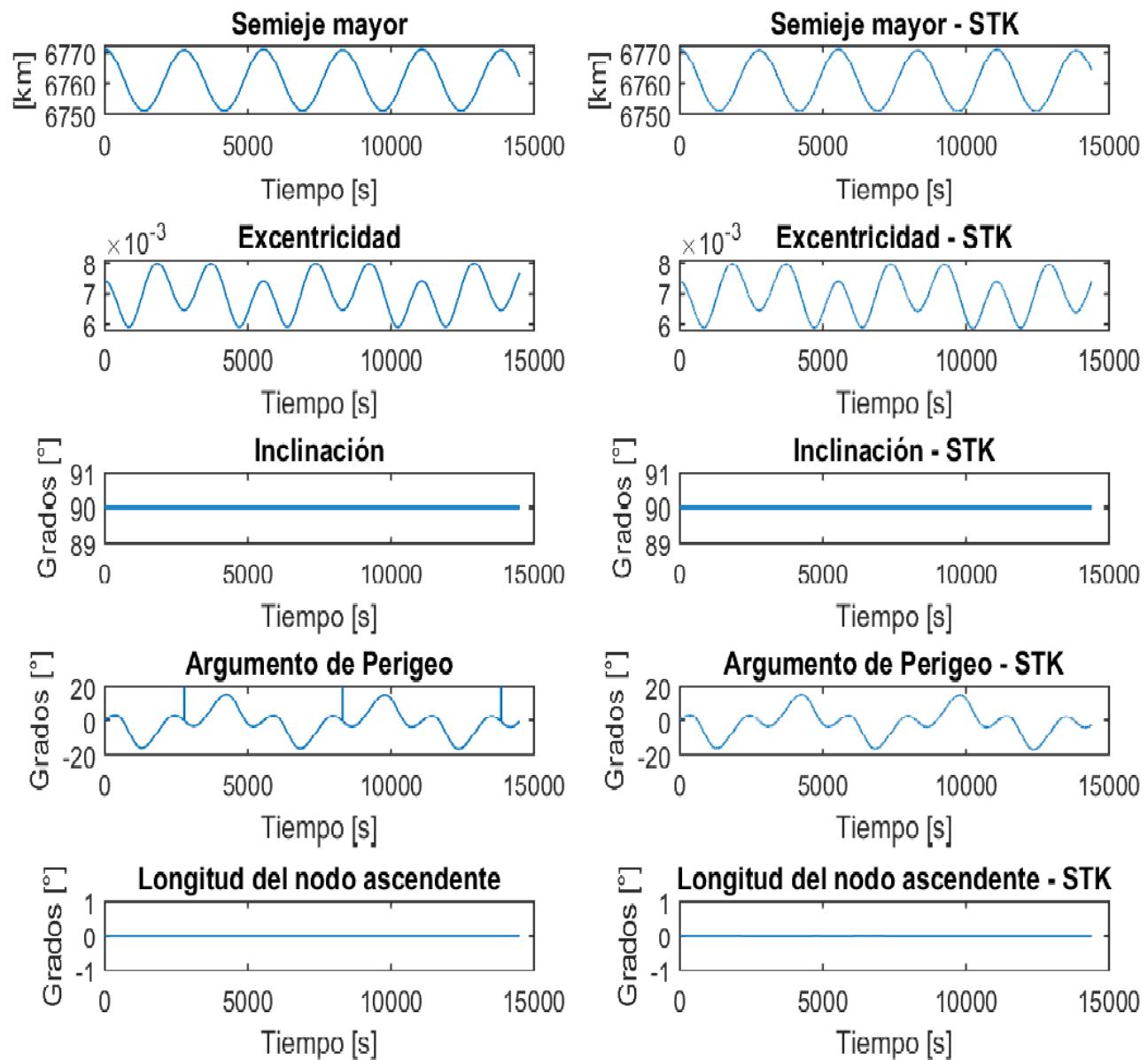


Figura 3.17: Evolución de los elementos orbitales durante 2 órbitas y media.



# Capítulo 4

## Navegador

A continuación se hace una breve descripción de las técnicas de navegación encontradas en la literatura y se argumenta su elección.

### 4.1. Navegador inercial (INS)

Frente a la ecuación diferencial que describe la traslación del centro de masa ( $2^{\circ}$ ley de Newton, ec. 2.1), la primera aproximación que se puede hacer para obtener la posición y velocidad de este, es integrar dicha ecuación y calcular la velocidad, como en las ecuaciones 2.30 y 2.29. En estas ecuaciones se suele definir la fuerza específica:

$$\mathbf{f}_{sp} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

Con este cambio de variable, las ecuaciones resultan más útiles en la práctica considerando que los instrumentos de medición (acelerómetros) lo que en verdad miden es la fuerza específica y no la fuerza inercial  $\mathbf{F}$ . Además, la fuerza de gravedad interactúa de manera uniforme sobre el instrumento (tanto sobre la estructura como sobre la masa testigo), de forma tal que no puede ser medida por este. Para reflejar esta situación en las ecuaciones, se puede escribir entonces:

$$\mathbf{f}_{sp} = \mathbf{f}_a + \mathbf{g}$$

donde  $\mathbf{f}_a$  es lo que mide el instrumento y  $\mathbf{g}$  la fuerza de gravedad.

Reemplazando esta variable en la ecuación diferencial 2.27, en coordenadas iniciales queda entonces:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]^I &= [\mathbf{f}_a]^I + [\mathbf{g}]^I \\ \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]^I &= [\mathbf{v}]^I \end{aligned} \tag{4.1}$$

La gravedad en coordenadas iniciales,  $[\mathbf{g}]^I$ , se calcula mediante el modelo teórico J2 en función de la posición (ver sección 2.14.1).

Si bien los acelerómetros miden la fuerza específica, en el caso de unidades iniciales *strap-down* el dispositivo se encuentra fijo al vehículo, de modo que miden la variable en coordenadas de cuerpo. Por lo tanto, específicamente lo que miden es  $[\mathbf{f}_{sp}]^B$ . Entonces es necesario convertir esta magnitud a coordenadas iniciales para completar la ecuación 4.1, resultando:

$$\left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]^I = C_B^I [\mathbf{f}_a]^B + [\mathbf{g}]^I$$

Integrando, se obtiene:

$$[\mathbf{v}]_{(t)}^I = [\mathbf{v}_0]^I + \int_0^t (C_B^I [\mathbf{f}_a]^B + [\mathbf{g}]^I) dt \quad (4.2)$$

$$[\mathbf{r}]_{(t)}^I = [\mathbf{r}_0]^I + \int_0^t [\mathbf{v}]_{(t)}^I dt \quad (4.3)$$

En ambos casos, se está asumiendo además el conocimiento de las condiciones iniciales en posición y velocidad, datos que en la práctica se tienen con un cierto grado de incertidumbre. Es decir, que el valor de condición inicial que uno pone en la integral tiene un error. Este error se integra continuamente en cada instante de tiempo. De forma que el error final en velocidad y posición dependerá de la trayectoria realizada por la aceleración, y en el caso general, diverge con el tiempo.

El mismo análisis se puede realizar si se considera la rotación del cuerpo rígido, integrando en este caso el momento (equivalente rotacional de la aceleración lineal) para obtener la velocidad angular, y luego integrar una vez más para obtener la orientación del cuerpo rígido. Sin embargo, la aplicación en la práctica no tiene la misma utilidad, ya que para la rotación, los instrumentos más comunes de medición aportan información sobre la velocidad angular, y no el momento. Por este motivo, se suele integrar directamente la velocidad angular para obtener así los ángulos de Euler o alguna representación equivalente de la actitud del cuerpo rígido. Este procedimiento, totalmente cinemático, se trata en la literatura como el problema de la determinación de actitud de un cuerpo rígido dada su velocidad angular. La ecuación diferencial en cuaterniones para este caso fue presentada en la introducción, sec. 2.14.2.

En suma, la estimación de las variables de estado mediante la integración directa de las ecuaciones de Newton y Euler, se conoce como Navegador Inercial, y a partir de ahora, abreviaremos INS (*Inertial Navigation System*).

Por el momento, hemos considerado que los instrumentos proveían los valores de aceleración y velocidad angular verdaderos. La situación empeora al considerar instrumentos reales, donde el valor de la variable a medir se encuentra inmerso en ruido y sesgado, a lo que se le suman otros errores por no linealidad u ortogonalidad de los ejes del instrumento. El error resultante de integrar estas mediciones empeora notablemente, divergiendo en la mayoría de los casos prácticos.

Ante la ausencia de instrumentos de medición, también es posible utilizar un modelo nominal, en caso de que las fuerzas y momentos ejercidos sobre el cuerpo fueran conocidos de antemano. En dicho caso, se puede introducir el modelo de aceleraciones en reemplazo de la medición del acelerómetro. Por el lado de la rotación, se hace lo mismo con los giróscopos y además, se puede utilizar directamente la ecuación de Euler, dado el conocimiento del torque actuante.

Las ecuaciones diferenciales que se deben resolver para navegar inercialmente (INS), en resumen son:

$$\left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]^I = [\mathbf{v}]^I \quad (4.4)$$

$$\left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]^I = C_B^I [\mathbf{f}_a]^B + [\mathbf{g}]^I \quad (4.5)$$

$$\frac{d\mathbf{q}^{BI}}{dt} = \mathbf{q}^{BI} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

con  $[\mathbf{f}_a]^B$  obtenida por los acelerómetros,  $[\mathbf{g}]^I$  mediante el modelo gravitatorio y  $[\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B$  medida por los giróscopos.

Un desarrollo similar se obtiene derivando la posición respecto a la terna ECEF y utilizando donde corresponda la transformación de Euler, y se llega a las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]^E &= [\mathbf{v}^E]^E \\ \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]^E &= C_B^E [\mathbf{f}_a]^B + [\tilde{\mathbf{g}}]^E - 2\Omega^E [\mathbf{v}^E]^E \\ \frac{d\mathbf{q}^{BI}}{dt} &= \mathbf{q}^{BI} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B \end{bmatrix} \\ \mathbf{q}^{BE} &= \mathbf{q}_{(t=0)}^{E'E_0} \mathbf{q}^{IE'} \mathbf{q}^{BI}\end{aligned}$$

donde se define

$$[\tilde{\mathbf{g}}]^E \triangleq [\mathbf{g}]^E - (\Omega^E)^2 [\mathbf{r}]^E \quad (4.7)$$

con  $\Omega^E$  definida en ec. 3.4 y con la salvedad de que las derivadas de posición y velocidad son respecto al sistema de referencia ECEF y no al inercial como en la ley de Newton.

La última ecuación de transformación de cuaterniones merece una aclaración. El término  $\mathbf{q}_{(t=0)}^{E'E_0}$  se debe al ángulo horario inicial de la Tierra respecto a la terna ECI, que no necesariamente es 0. La terna I es la ECI y E es la ECEF como siempre. Por otro lado,  $E_0$  es una terna inercial, pero rotada en un ángulo  $\Xi_0$ , correspondiente al ángulo horario de la terna terrestre en el instante  $t = 0$ , es decir que coincide con E en dicho momento. Además,  $E'$  es una terna auxiliar que rota con la misma velocidad y eje de rotación que la ECEF, aunque con un ángulo horario inicial nulo, es decir, que coincide con la ECI en  $t = 0$ . En consecuencia, la evolución del cuaternion de orientación de esta terna es:

$$\mathbf{q}_{(t)}^{IE'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^E \end{bmatrix}$$

En base a estas definiciones, en el instante inicial  $t = 0$ , se cumplen las siguientes igualdades:

$$\mathbf{q}_{(t=0)}^{IE_0} = \mathbf{q}_{(t=0)}^{E'E_0} = \mathbf{q}_{(t=0)}^{E'E}$$

#### 4.1.1. Discretización

Para que una computadora pueda resolver automáticamente este problema, es necesario pasar de tiempo continuo a tiempo discreto. Existen diversos métodos numéricos que resuelven problemas generales de ecuaciones diferenciales. El método más utilizado por su simpleza y efectividad, es la linealización de Taylor en primer o segundo orden. Una función continua  $x(\cdot)$ , en un punto  $t_0$  de su dominio, se puede aproximar a un polinomio de grado N por el método de Taylor a través de la siguiente fórmula:

$$x(t) \approx x(t_0) + \frac{dx(t_0)}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2x(t_0)}{dt^2}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{N!} \frac{d^N x(t_0)}{dt^N}(t - t_0)^N \quad (4.8)$$

Si se considera por ejemplo una ecuación diferencial continua (no necesariamente lineal):

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t)$$

y al instante  $t_k$  como  $t_0$  y al  $t_{k+1}$  como  $t$  (es decir, el punto a evaluar en el polinomio aproximador), entonces se puede escribir la siguiente fórmula, mediante Taylor de primer orden:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \frac{dx(t_k)}{dt}(t_{k+1} - t_k)$$

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + f(x(t_k), t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

Si además se considera  $T_s = (t_{k+1} - t_k)$  constante, entonces la discretización de la ecuación diferencial, queda:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + f(x(t_k), t_k)T_s \quad (4.9)$$

Si se toma un segundo orden de aproximación de Taylor, el resultado es:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + T_s f(x(t_k), t_k) + \frac{T_s^2}{2} \frac{df}{dt}(x(t_k), t_k) \quad (4.10)$$

Cabe destacar que este método se utiliza para discretizar el sistema y no necesariamente para linealizarlo, ya que en  $f(x, t)$  se introducen funciones que podrían depender no-linealmente de  $x(t_k)$ .

## ECI

Si se considera por ejemplo a la velocidad inercial en función del tiempo como  $x(\cdot)$ , se puede escribir entonces la siguiente fórmula, mediante Taylor de primer orden, ec. 4.9:

$$[\mathbf{v}]_{(t_{k+1})}^I = [\mathbf{v}]_{(t_k)}^I + \left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]_{(t_k)}^I (t_{k+1} - t_k)$$

$$[\mathbf{v}]_{(t_{k+1})}^I = [\mathbf{v}]_{(t_k)}^I + \left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]_{(t_k)}^I T_s$$

con  $T_s = t_{k+1} - t_k$  el período de muestreo de la aceleración, que consideraremos constante para todo instante de tiempo.

Reemplazando con la ec. 4.5 queda:

$$[\mathbf{v}]_{(t_{k+1})}^I = [\mathbf{v}]_{(t_k)}^I + T_s \left( C_{B(t_k)}^I [\mathbf{f}_a]_{(t_k)}^B + [\mathbf{g}]_{(t_k)}^I \right)$$

Para la posición se utiliza una aproximación de Taylor de segundo orden, ya que se dispone de la segunda derivada, ec. 4.10:

$$[\mathbf{r}]_{(t_{k+1})}^I = [\mathbf{r}]_{(t_k)}^I + \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{(t_k)}^I (t_{k+1} - t_k) + \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_{(t_k)}^I (t_{k+1} - t_k)^2$$

Reemplazando con la definición de  $T_s$ , las ecuaciones 4.4 y 4.5 y considerando que la velocidad es la derivada de la posición, según eq. 2.2, se obtiene:

$$[\mathbf{r}]_{(t_{k+1})}^I = [\mathbf{r}]_{(t_k)}^I + T_s [\mathbf{v}]_{(t_k)}^I + \frac{T_s^2}{2} \left( C_{B(t_k)}^I [\mathbf{f}_a]_{(t_k)}^B + [\mathbf{g}]_{(t_k)}^I \right)$$

En lo que respecta a la orientación, aplicando la aproximación de Taylor de primer orden:

$$\mathbf{q}_{(t_{k+1})}^{BI} = \mathbf{q}_{(t_k)}^{BI} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{T_s}{2} [\omega^{BI}]_{(t_k)}^B \end{bmatrix}$$

## ECEF

Mediante un razonamiento análogo, las ecuaciones en tiempo discreto del INS en terna ECEF, aproximadas en primer y segundo orden de Taylor son:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}^E]_{(t_{k+1})}^E &= [\mathbf{v}^E]_{(t_k)}^E + T_s \left( C_B^E[\mathbf{f}_a]_{(t_k)}^B + [\tilde{\mathbf{g}}]_{(t_k)}^E - 2\Omega^E[\mathbf{v}^E]_{(t_k)}^E \right) \\ [\mathbf{r}]_{(t_{k+1})}^E &= [\mathbf{r}]_{(t_k)}^E + T_s[\mathbf{v}^E]_{(t_k)}^E + \frac{T_s^2}{2} \left( C_B^E[\mathbf{f}_a]_{(t_k)}^B + [\tilde{\mathbf{g}}]_{(t_k)}^E - 2\Omega^E[\mathbf{v}^E]_{(t_k)}^E \right) \\ \mathbf{q}_{(t_k+1)}^{BI} &= \mathbf{q}_{(t_k)}^{BI} \cdot \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{T_s}{2} [\omega^{BI}]_{(t_k)}^B \end{array} \right] \\ \mathbf{q}_{(t_k)}^{BE} &= \mathbf{q}_{(t=0)}^{E'E_0} \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -kT_s[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^E \end{array} \right] \mathbf{q}_{(t_k)}^{BI} \end{aligned}$$

## 4.2. Navegador integrado

Los acelerómetros y giróscopos no suelen ser los únicos sensores a bordo de la nave. Es muy común en los sistemas de determinación orbital de un satélite, o en el navegador de un lanzador, incluir un receptor GPS que provea una medición de la posición y velocidad del vehículo respecto a la terna ECEF. Otras veces se toman directamente los datos crudos de las antenas -el pseudorango y el corrimiento de fase-, y se hacen cálculos para obtener esas variables. Estos dispositivos suelen entregar mediciones con una frecuencia de actualización muy lenta, en el orden de 1 Hz, con un error de aproximadamente 5 m en posición y 0.1 m/s en velocidad. En general, el receptor GPS se dice que es un sensor externo, dado que la fuente de información lo proveen los satélites de la constelación GPS/GLONASS o el sistema que sea que se esté utilizando. Otros sensores de este tipo son los magnetómetros, los altímetros y los barómetros. De modo de aprovechar tanto los sensores iniciales como los externos se utilizan herramientas de integración de información que permiten fusionar estos datos, esperando obtener errores acotados en las variables y mejores que si se tomara cada sensor por separado.

En este trabajo se aplica este concepto utilizando el algoritmo propuesto por R. F. Kalman, denominado Filtro de Kalman, en su variante “Extendido”, que se utiliza para modelos de dinámica no-lineal. En esencia, el algoritmo combina la navegación inercial a partir de los datos de la IMU, con actualizaciones periódicas de los sensores externos mediante un modelo de observador estocástico (es decir, una medición ruidosa). Las correcciones en las variables de estado se calculan de modo de optimizar la relación de compromiso existente entre reducir la varianza del estimador y aumentar la rapidez de convergencia.

### 4.2.1. Filtro de Kalman para sistemas lineales

El filtro de Kalman se utiliza sobre modelos lineales en tiempo discreto de la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = C_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k \end{cases} \quad (4.11)$$

donde

$\boldsymbol{x}_k$	es el vector de estados en el instante $k$
$\Phi_k$	es la matriz de transición de estados del instante $k$ al $k + 1$
$\boldsymbol{w}_k$	es el ruido de proceso, gaussiano de media nula
$\boldsymbol{y}_k$	es la salida del sistema
$C_k$	es la matriz de salida
$\boldsymbol{\eta}_k$	es el ruido de medición, gaussiano de media nula
$Q_{d(k)}$	es la matriz de covarianza del ruido de proceso: $E[\boldsymbol{w}_i \boldsymbol{w}_j^T] = \begin{cases} Q_{d(k)}, & \text{si } i = j = k \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$
$R_k$	es la matriz de covarianza del ruido de medición: $E[\boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_j^T] = \begin{cases} R_k, & \text{si } i = j = k \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$

El algoritmo consiste en un primer paso de inicialización donde se establece una primera estimación de las variables de estado y del error cometido:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_0 = E[\boldsymbol{x}_0] \quad (4.12)$$

$$P_0 = E[(\boldsymbol{x}_0 - E[\boldsymbol{x}_0])(\boldsymbol{x}_0 - E[\boldsymbol{x}_0])^T] \quad (4.13)$$

$P$  es la matriz de covarianza del estimador:  $P = E[(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})^T]$

Luego, se ejecuta el paso de Predicción, mediante la matriz de transición de estados:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} = \Phi_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$$

$$P_{k+1|k} = \Phi_k P_{k|k} \Phi_k^T + Q_{d(k)}$$

donde  $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}$  es la mejor estimación del vector de estados en el instante  $k + 1$  dada la secuencia de mediciones  $\{y\}$  hasta el instante  $k$ . Este paso se reitera con cada medición de la IMU, hasta que se tenga una nueva medición de los sensores externos. En dicho momento se pasa a la etapa de Actualización, donde se corrigen las variables con la nueva información mediante:

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} C_k^T (C_k P_{k+1|k} C_k^T + R_k)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} + K_{k+1} (\boldsymbol{y}_k - C_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k})$$

$$P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1} C_k) P_{k+1|k}$$

A continuación se vuelve al paso de Predicción, completando el ciclo del algoritmo.

---

### Algoritmo 1 Filtro de Kalman

---

- ```

1:  $\hat{\boldsymbol{x}}_0 = E[\boldsymbol{x}_0]$  ▷ Inicialización
2:  $P_0 = E[(\boldsymbol{x}_0 - E[\boldsymbol{x}_0])(\boldsymbol{x}_0 - E[\boldsymbol{x}_0])^T]$  ▷ Inicialización
3: for all nueva medición inercial do
4:    $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} = \Phi_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$  ▷ Predicción
5:    $P_{k+1|k} = \Phi_k P_{k|k} \Phi_k^T + Q_{d(k)}$  ▷ Predicción
6:   if nueva medición externa then
7:      $K_{k+1} = P_{k+1|k} C_k^T (C_k P_{k+1|k} C_k^T + R_k)^{-1}$  ▷ Actualización
8:      $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} + K_{k+1} (\boldsymbol{y}_k - C_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k})$  ▷ Actualización
9:      $P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1} C_k) P_{k+1|k}$  ▷ Actualización
10:   end if
11: end for

```
-

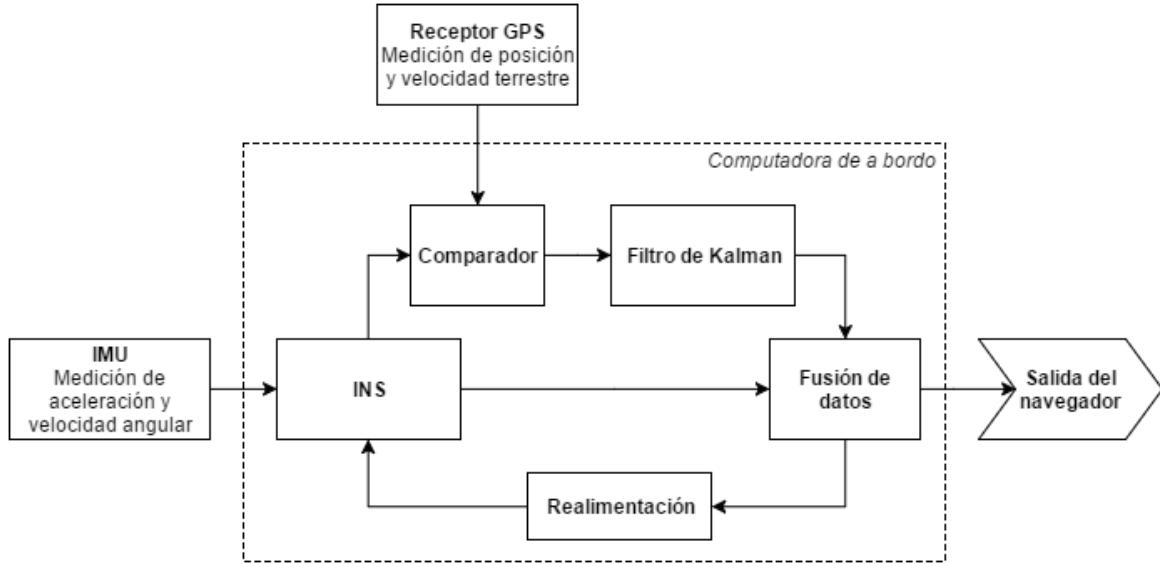


Figura 4.1: Integración débilmente acoplada con realimentación

#### 4.2.2. Filtro de Kalman Extendido

Cuando la planta del sistema no es lineal, la solución inmediata es linealizarla en algún punto de trabajo. El Filtro de Kalman Extendido propone linealizar el modelo en el punto dado por la estimación del estado en la iteración inmediatamente anterior. De esta forma se obtiene  $\Phi$  y  $C$  para calcular la ganancia  $K$  del paso de actualización. No obstante, en la predicción, se puede utilizar directamente la función no-lineal de transición de estados, dado que no se requiere ningún cálculo matricial.

#### 4.2.3. Integración Débilmente Acoplada con realimentación

Este procedimiento puede ser interpretado también mediante el esquema de la figura 4.1. Allí se tiene un bloque de predicción, donde se ejecuta el Navegador Inercial (INS) no-lineal. Por otro lado, un Filtro de Kalman se utiliza para estimar los errores del INS, mediante la información provista por la salida de este y los sensores externos, actualizando la estimación. Luego, con los cálculos de este bloque se pueden fusionar los datos entre el INS y la salida del filtro de Kalman, corrigiendo el estado. Finalmente se realimenta la estimación actual del estado a la entrada del INS, reiterando el algoritmo.

Cuando se utiliza la salida del módulo receptor GPS de posición y velocidad en terna ECEF, esta configuración se conoce con el nombre de Navegador Integrado *Débilmente Acoplado*. El módulo GPS posee un filtro interno donde estima como mejor puede estas variables, a partir del pseudorango y corrimiento de fase, independientemente del INS y la salida del navegador integrado.

#### 4.2.4. Integración fuertemente acoplada

Por otra parte, existe una configuración denominada Navegador Integrado *Fuertemente Acoplado* donde se utilizan directamente las mediciones de pseudorango y corrimiento de fase (desplazamiento por efecto Doppler) de las antenas GPS. Conociendo las efemérides de los satélites de la constelación GPS, se puede calcular una estimación del pseudorango y corrimiento de fase a partir de la posición y velocidad del INS. Esto permite comparar estas variables entre el GPS y el INS para alimentar el filtro de Kalman de fusión de datos y realimentar nuevamente el sistema, como se ve en la figura 4.2 [10]. De esta manera, en vez de tener un filtro individual para el GPS y otro de fusión de datos, se centraliza el algoritmo en un único filtro de integración de información.

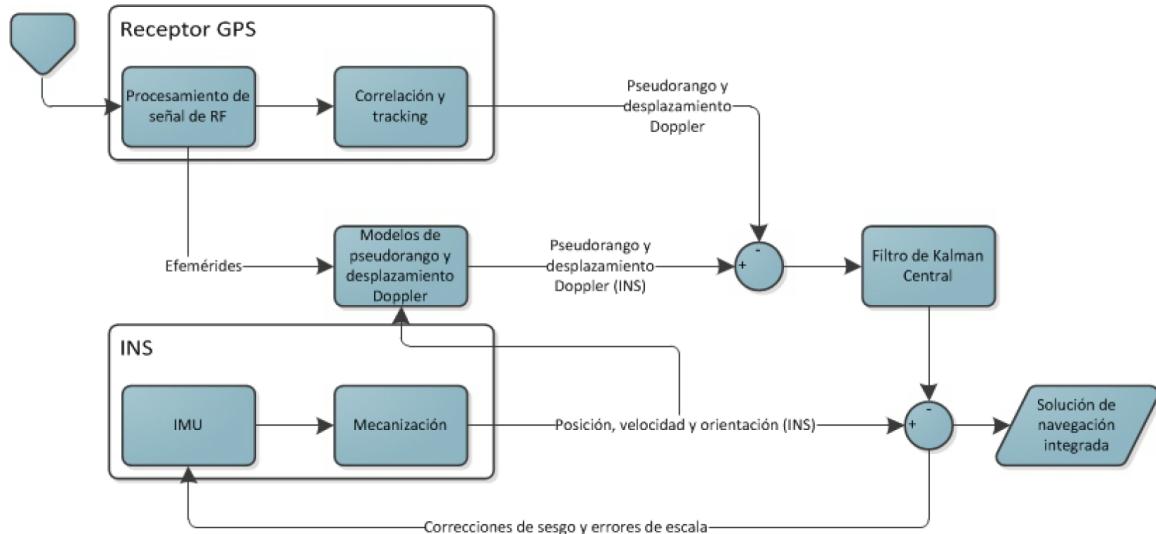


Figura 4.2: Integración fuertemente acoplada

#### 4.2.5. Integración ultra-fuertemente acoplada

En otros casos también es posible utilizar la salida del filtro de Kalman de fusión de datos para mejorar la estimación de pseudorango del receptor GPS, aumentando aún más el acoplamiento entre los datos crudos de todos los componentes del sistema de navegación. La implementación de este sistema es mucho más compleja y requiere productos comerciales específicos que permitan no solo acceder al pseudorango y desplazamiento Doppler, sino también, corregirlos internamente, o bien acceso a las señales de radiofrecuencia elementales que generan las antenas.

#### 4.2.6. Integración Débilmente Acoplada sin realimentación

Existe otra configuración débilmente acoplada, donde se ejecutan en paralelo el INS y el filtro de Kalman, pero la salida de esta fusión de datos se usa como salida final del navegador, en contraste con la configuración realimentada, donde la salida del filtro de Kalman se utiliza para corregir la entrada del INS.

#### 4.2.7. Elección del tipo de integración

Las integraciones fuertemente acopladas requieren de un receptor que permita el acceso a las mediciones en crudo del GPS, que comercialmente no es el caso general. Por otro lado, la integración débilmente acoplada simple (sin realimentación) es menos estable ya que el error del INS crece indefinidamente y el sistema puede escapar de la región lineal. En cambio, el Navegador Integrado Débilmente Acoplado con realimentación a la entrada, además de tener una implementación más simple, es más robusto a reemplazos en los componentes del sistema, ya que cualquier GPS o INS comercial se puede utilizar. Por estos motivos, esta fue la configuración elegida para el sistema propuesto.

Por esta razón, el sistema utilizado fue el de la figura 4.1. El bloque INS de esa misma figura implementa las ecuaciones de la sección 4.1.1 (esto puede ser o bien en terna ECI o bien en terna ECEF, en este trabajo se optó por la terna terrestre). El filtro de Kalman (a la derecha en la figura) consiste en el algoritmo 1. Sus estados  $\mathbf{x}$  son los *errores* en posición, velocidad y orientación, cometidos por el INS en el cálculo; y las observaciones  $\mathbf{y}$  (a la entrada del filtro) son la diferencia entre las mediciones del GPS y la salida del INS.

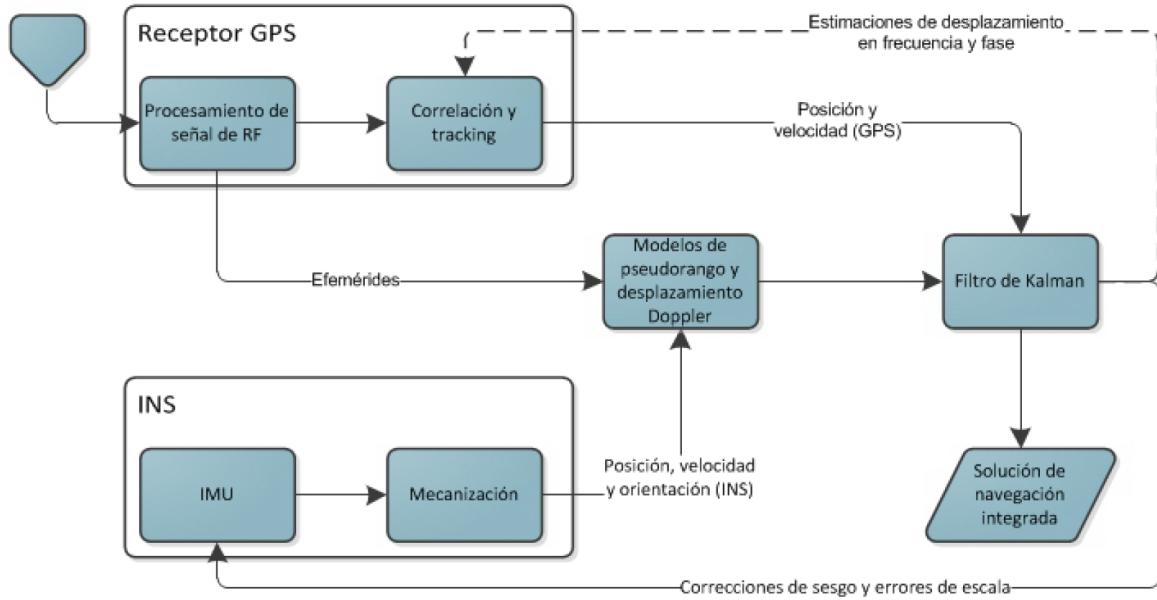


Figura 4.3: Integración ultra-fuertemente acoplada

#### 4.2.8. Modelo de la dinámica del error

Como se explicó recientemente, el filtro de Kalman estima el error cometido por el INS, y por lo tanto, es necesario un modelo que describa la dinámica de estos errores. Se distinguen dos ternas de cuerpo, la terna real y la calculada. Ambas se construyen respecto a una terna inercial única. Sin embargo, solo la terna real describe perfectamente la orientación del vehículo, mientras que la terna calculada se equivoca, pero es sobre la cual realizamos todos los cálculos a bordo. En la literatura puede encontrarse esta diferencia entre ternas de cuerpo a causa de errores de cómputo en la computadora o a causa de perturbaciones en la terna real. Es posible demostrar que ambas aproximaciones concluyen en iguales resultados [14].

De este modo, los errores en actitud se plantean como la diferencia entre la terna real del cuerpo ( $B$ ) y una terna de cuerpo calculada ( $\hat{B}$ ), sobre la cual se realizan los cálculos en la computadora

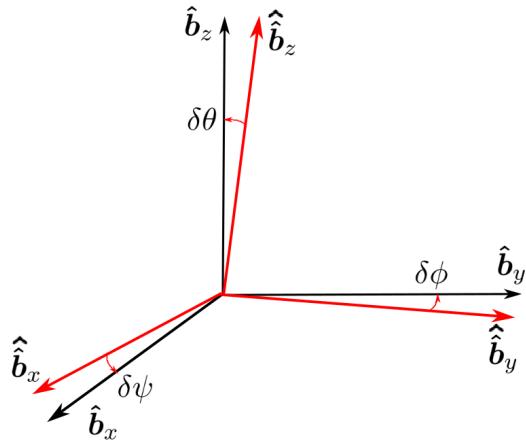


Figura 4.4: Terna real y terna calculada de cuerpo.

de a bordo. Si se supone que dichos ángulos son pequeños, la teoría de pequeñas rotaciones permite escribir:

$$C_{\hat{B}}^B \approx I_3 + S(\varphi)$$

con  $\varphi = \begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \end{bmatrix}$  los ángulos de Euler del cuerpo respecto a la terna inercial,  $I_3$  la matriz identidad de  $3 \times 3$ , y  $S(\varphi)$  la matriz antisimétrica del producto vectorial aplicada a  $\varphi$ :

$$S(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\psi & \delta\theta \\ \delta\psi & 0 & -\delta\phi \\ -\delta\theta & \delta\phi & 0 \end{bmatrix}$$

La relación con la terna inercial entonces queda establecida por:

$$C_{\hat{B}}^I = C_B^I C_{\hat{B}}^B = C_B^I + \delta C_B^I$$

y en cuaterniones:

$$\mathbf{q}^{I\hat{B}} = \mathbf{q}^{B\hat{B}} \mathbf{q}^{IB}$$

$\mathbf{q}^{B\hat{B}}$  calculado a partir de  $C_{\hat{B}}^B$ .

En general, en este análisis, una variable calculada,  $\hat{x}$  se define como:

$$\hat{x} = x + \delta x$$

donde  $\hat{x}$  es la variable calculada,  $x$  la variable real y  $\delta x$  el error en el cálculo.

## ECI

La posición y la velocidad calculadas en este caso se definen como

$$[\hat{\mathbf{r}}]^I = [\mathbf{r}]^I + [\delta\mathbf{r}]^I$$

$$[\hat{\mathbf{v}}]^I = [\mathbf{v}]^I + [\delta\mathbf{v}]^I$$

donde las variables con sombrero son las calculadas, sin sombrero las reales, y anteponiendo  $\delta$  es el error en dicha variable. Y las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de los errores son:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} \right]^I &= [\delta\mathbf{v}]^I \\ \left[ \frac{d\delta\mathbf{v}}{dt} \right]^I &= \gamma^I [\delta\mathbf{r}]^I - C_B^I S([\mathbf{f}_a]^B) \varphi + C_B^I [\delta\mathbf{f}_a]^B \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\Omega^B \varphi + [\delta\omega^{BI}]^B \end{aligned}$$

donde se define la derivada del modelo gravitatorio respecto a la posición:

$$\gamma^I \triangleq \left[ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}} \right]^I \Big|_{[\mathbf{r}]^I}$$

y la matriz antisimétrica del producto vectorial:

$$\Omega^B \triangleq S([\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B)$$

Con estas ecuaciones, el modelo en variable de estado para el caso ECI, en tiempo continuo, puede escribirse matricialmente como:

$$\begin{cases} \delta\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t) \delta\mathbf{x}(t) + B(t) \boldsymbol{\xi}(t) \\ \delta\mathbf{y}(t) = C(t) \delta\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\eta}(t) \end{cases} \quad (4.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} [\delta\mathbf{r}]^I \\ [\delta\mathbf{v}]^I \\ \varphi \end{bmatrix} & A &= \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \\ \gamma^I & 0_3 & -C_B^I S([\mathbf{f}_a]^B) \\ 0_3 & 0_3 & -\Omega^B \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ I_3 & C_B^I & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \\ C(t) &= M^{EI}(t) & \boldsymbol{\xi} &= \begin{bmatrix} \xi_g \\ \xi_f \\ \xi_w \end{bmatrix} & \boldsymbol{\eta} &= \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_v \end{bmatrix} \\ \delta\mathbf{y} &= M^{EI} \begin{bmatrix} [\delta\mathbf{r}]_{INS}^I \\ [\delta\mathbf{v}]_{INS}^I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\delta\mathbf{r}_{GPS}]^E \\ [\delta\mathbf{v}_{GPS}^E]^E \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con  $M^{EI}$  definida en la ecuación 3.7,  $0_3$  una matriz nula de  $3 \times 3$  y  $I_3$  la matriz identidad de  $3 \times 3$ .

Además, la matriz de covarianza del ruido de medición es una diagonal con la varianza de los errores de posición y velocidad de la medición del receptor GPS:

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_{r(GPS)}^2 I_3 & 0_3 \\ 0_3 & \sigma_{v(GPS)}^2 I_3 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

La matriz de covarianza del ruido de proceso, queda definida por un lado por el error en el modelo gravitatorio  $\sigma_g$ , y por otro por los errores de los instrumentos de medición iniciales, i.e. VRW y ARW de acelerómetros y giróscopos,  $\sigma_f$  y  $\sigma_w$  respectivamente.

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_g^2 I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & \sigma_f^2 I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & \sigma_w^2 I_3 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

En tiempo discreto, el modelo resulta [10]:

$$\begin{cases} \delta\dot{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi_k \delta\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \delta\mathbf{y}_k = C_k \delta\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k \end{cases} \quad (4.17)$$

con

$$\Phi_k = I_9 + T_s A_{(t_k)} + \frac{T_s^2}{2} A_{(t_k)}^2 \quad (4.18)$$

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = Q_{d(k)} = B_{(t_k)} Q B_{(t_k)}^T T_s \quad (4.19)$$

$$R_k = R \quad (4.20)$$

con  $I_9$  la matriz identidad de  $9 \times 9$ .

El paso de fusión de datos de la navegación integrada para calcular el estimador final, consiste por último en:

$$[\mathbf{r}]^I = [\mathbf{r}_{INS}]^I - [\delta\mathbf{r}]^I$$

$$[\mathbf{v}]^I = [\mathbf{v}_{INS}]^I - [\delta\mathbf{v}]^I$$

$$\mathbf{q}^{BI} = \mathbf{q}_{INS}^{BI} \mathbf{q}^{B\hat{B}}$$

donde las variables con subíndice  $INS$  son las salidas del navegador inercial (INS), mientras que aquellas con  $\delta$  corresponden a la salida del filtro de Kalman de errores.

## ECEF

Para el caso en que se tomen las variables respecto al sistema de referencia ECEF, los errores y la posición y velocidad calculadas se definen:

$$\mathbf{q}^{E\hat{B}} = \mathbf{q}^{B\hat{B}} \mathbf{q}^{EB}$$

$$[\hat{\mathbf{r}}]^E = [\mathbf{r}]^E + [\delta \mathbf{r}]^E$$

$$[\hat{\mathbf{v}}^E]^E = [\mathbf{v}^E]^E + [\delta \mathbf{v}^E]^E$$

las matrices del modelo en tiempo continuo, ec. 4.14, son:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} [\delta \mathbf{r}]^E \\ [\delta \mathbf{v}^E]^E \\ \varphi \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \\ \gamma^E & -2\Omega^E & -C_B^E S([\mathbf{f}_a]^B) \\ 0_3 & 0_3 & -\Omega^B \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ I_3 & C_B^E & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix} \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_g \\ \xi_f \\ \xi_w \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_v \end{bmatrix} \\ \delta \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} [\delta \mathbf{r}]_{INS}^E - [\delta \mathbf{r}_{GPS}]^E \\ [\delta \mathbf{v}^E]_{INS}^E - [\delta \mathbf{v}^E_{GPS}]^E \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En este caso,  $\gamma^E$  corresponde a la derivada del modelo gravitatorio, según la definición 4.7:

$$\gamma^E \triangleq \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \mathbf{r}} \right]_{[\mathbf{r}]^E}^E = \left[ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}} \right]_{[\mathbf{r}]^E}^E - (\Omega^E)^2$$

Luego, con las mismas ecuaciones 4.18, 4.19 y 4.20 se obtiene el sistema discreto 4.17.

El paso de fusión de datos de la navegación integrada para calcular el estimador final, consiste por último en:

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}]^E &= [\mathbf{r}_{INS}]^E - [\delta \mathbf{r}]^E \\ [\mathbf{v}^E]^E &= [\mathbf{v}_{INS}^E]^E - [\delta \mathbf{v}^E]^E \\ \mathbf{q}^{BE} &= \mathbf{q}_{INS}^{\hat{B}E} \mathbf{q}^{B\hat{B}} \end{aligned}$$

donde nuevamente las variables con subíndice *INS* son las salidas del navegador inercial (INS), mientras que aquellas con  $\delta$  corresponden a la salida del filtro de Kalman de errores.

### 4.2.9. Elección de los sistemas de referencia y coordenadas

Al escribir las ecuaciones diferenciales del modelo se presenta la disyuntiva de qué sistemas de referencia utilizar. La primera opción es utilizar terna inercial ECI, dada su simplicidad. Además considerando que para obtener los parámetros orbitales se debe utilizar la posición y velocidad iniciales, este modelo es muy práctico, puesto que a la salida arroja  $[\mathbf{r}]^I$  y  $[\mathbf{v}]^I$ . Sin embargo, lo cierto es que las mediciones del GPS se refieren al sistema ECEF, lo cual implica una matriz de salida ( $C$ ) que realice las transformaciones correspondientes en el filtro de Kalman.

Por otro lado, si se utiliza la terna ECEF para escribir el modelo, se tiene una matriz de salida ( $C$ ) más simple, pero en las ecuaciones diferenciales aparecen nuevos términos debido a la fuerza de Coriolis y a la aceleración centrífuga. Además en este caso no se escapa a la transformación de ECEF a ECI, puesto que más adelante para obtener los parámetros orbitales se necesita posición y velocidad iniciales, como se comentó anteriormente.

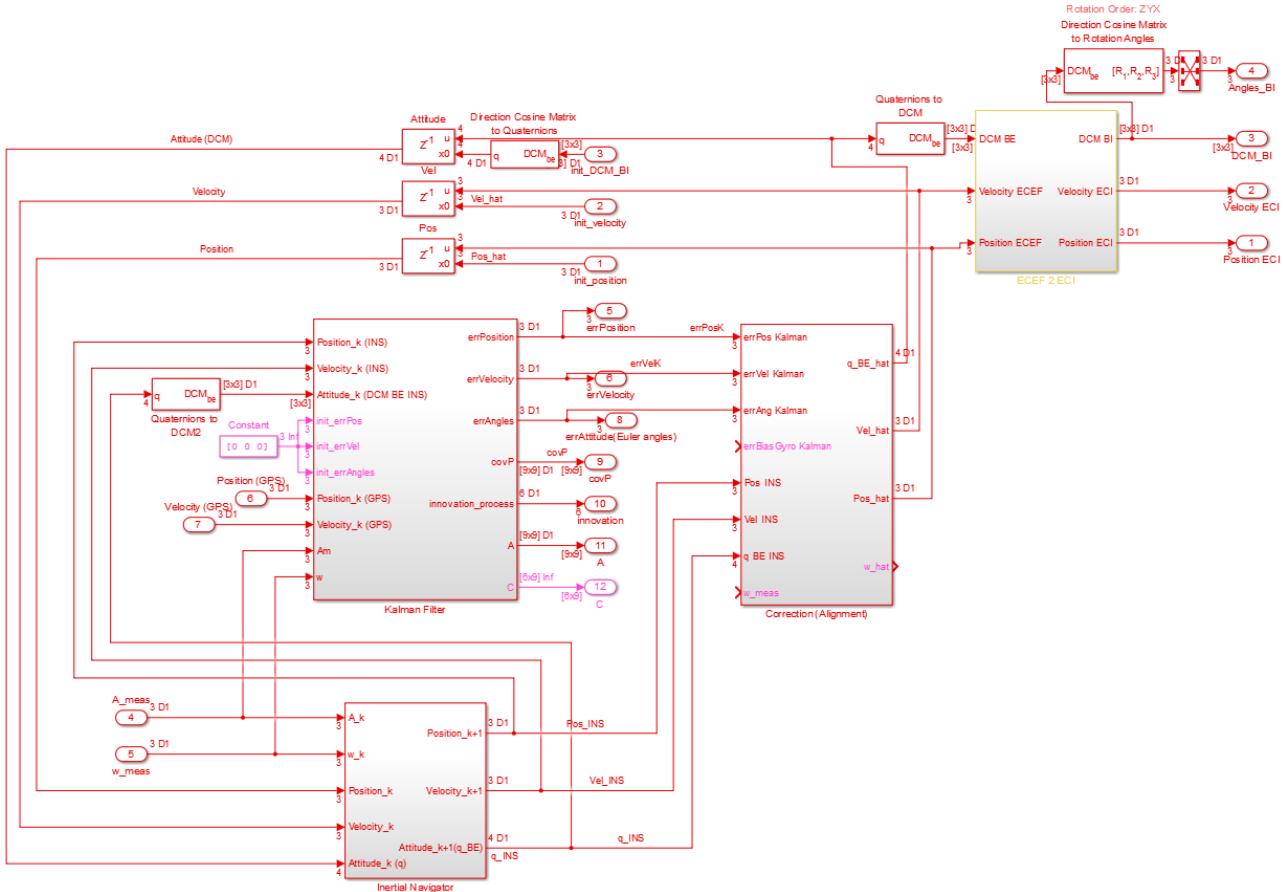


Figura 4.5: Implementación del navegador integrado en Simulink

Ambas alternativas se han desarrollado y simulado con iguales resultados. La matriz de transición de estados  $\Phi$  es muy similar en ambos casos, los nuevos términos en el caso ECEF no significan un gasto considerable de recursos computacionales. No así sucede con la matriz de salida,  $C$ , que en el caso ECI depende del tiempo y contiene matrices de cosenos directores, mientras que en el caso ECEF es prácticamente una identidad concatenada con ceros. Ahora bien, para calcular los parámetros orbitales son necesarias la posición y velocidad iniciales, por lo tanto en el caso ECEF no se escapa a la transformación con  $M^{IE}$ . No obstante, el cálculo de los parámetros orbitales solo es necesario durante el guiado de la transferencia orbital, que se reduce a un corto período de tiempo. Sabiendo que el satélite requiere un navegador para toda la misión, es mucho más práctico utilizar el ECEF, puesto que en la mayoría de los casos, en un satélite de observación terrestre, interesa más la posición respecto a la Tierra que a las estrellas.

### 4.3. Simulación

Con el modelo en terna ECEF se armó un bloque en Simulink (Fig. 4.5) para navegar posición, velocidad y orientación de la dinámica del satélite (Fig. 4.6). Se definieron las condiciones iniciales para una órbita programada con los parámetros de la tabla 4.1, iguales a los del ejemplo I del capítulo 3. Las fuerzas de control se mantuvieron nulas, dejando orbitar libremente al vehículo, sujeto a las perturbaciones de resistencia atmosférica y momento por gradiente gravitacional. También se modelaron el ruido en las condiciones iniciales y los sensores inerciales y exteriores.

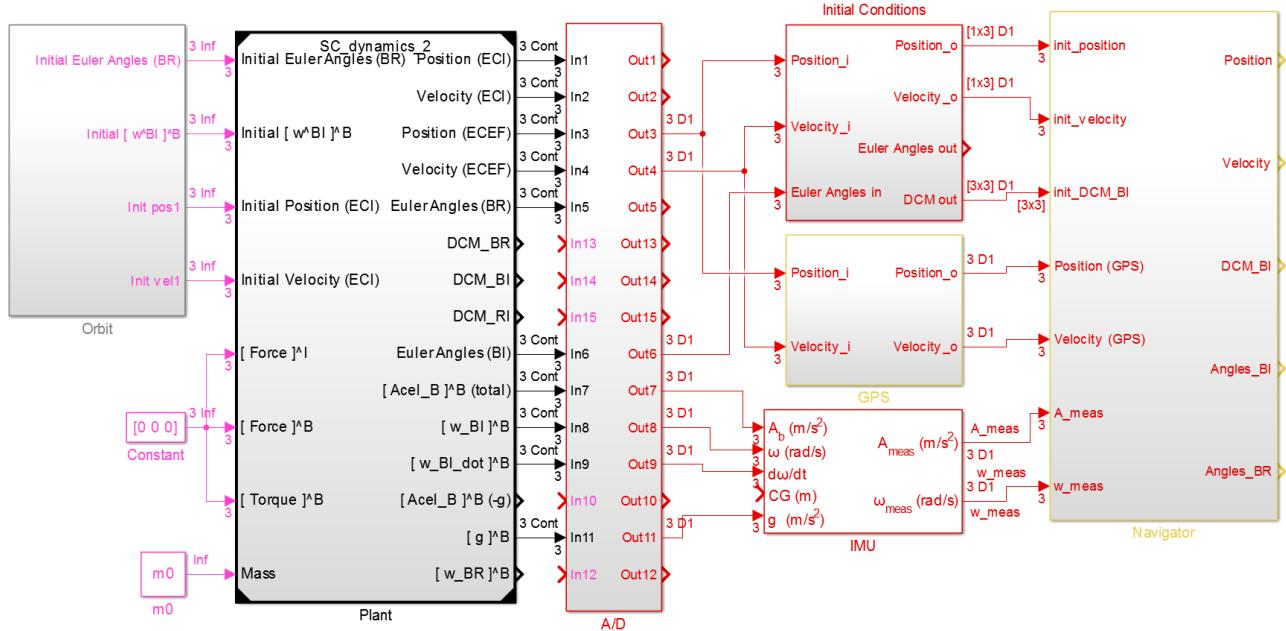


Figura 4.6: Simulador, sensores y navegador en Simulink

| Elemento | Valor       | Unidades |
|----------|-------------|----------|
| $a$      | $R_e + 400$ | km       |
| $e$      | 0.0074      | -        |
| $i$      | -83         | °        |
| $\omega$ | 54          | °        |
| $\Omega$ | -69         | °        |
| $M_0$    | 0           | °        |

Cuadro 4.1: Elementos orbitales iniciales de la simulación

| Elegidas para la Simulación                    |                                                                                  |
|------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| Error en Posición                              | 5 m                                                                              |
| Error en Velocidad                             | $0.5 \text{ m s}^{-1}$                                                           |
| Error en Orientación                           | $1^\circ$                                                                        |
| Velocidad angular                              | $1^\circ \text{ s}^{-1}$                                                         |
| Vex1B<br>(Condiciones finales del lanzamiento) |                                                                                  |
| Error en Posición                              | 3.1 m                                                                            |
| Error en Velocidad                             | $0.21 \text{ m s}^{-1}$                                                          |
| Error en Orientación                           | $0.35^\circ$                                                                     |
| Vehículo lanzador LM-3A                        |                                                                                  |
| Velocidad angular                              | $< 1^\circ \text{ s}^{-1}$                                                       |
| Vehículo lanzador Vega                         |                                                                                  |
| Error en Orientación                           | $< 1.5^\circ$                                                                    |
| Velocidad angular                              | $< 1^\circ \text{ s}^{-1}$                                                       |
| Vehículo lanzador Delta IV<br>(sin spin)       |                                                                                  |
| Error en Orientación                           | $1.4^\circ$                                                                      |
| Velocidad angular                              | $0.5 \text{ (roll)} \quad 1.5 \text{ (pitch,yaw)} \text{ }^\circ \text{ s}^{-1}$ |
| (con spin)                                     |                                                                                  |
| Error en Orientación                           | $2^\circ$                                                                        |
| Velocidad angular                              | $30 \text{ (roll)} \quad 1.5 \text{ (pitch,yaw)} \text{ }^\circ \text{ s}^{-1}$  |

Cuadro 4.2: Condiciones iniciales

En la figura 4.6, además se puede ver un bloque “A/D” cuya función es convertir las señales de tiempo continuo a tiempo discreto.

### 4.3.1. Condiciones iniciales

Para las condiciones iniciales, se buscaron las condiciones finales típicas de un lanzamiento en manuales de lanzadores como [2], [1], [3], [13], y por otro lado en [6]. Los valores elegidos se pueden ver en la tabla 4.2. Los errores corresponden a un desvío de  $1\sigma$ .

Cabe destacar que no es sencillo encontrar en estos manuales los errores en posición y velocidad del navegador utilizado. En general, el error de posición que proveen es directamente el error de inyección, es decir sobre el semieje mayor de la órbita requerida. No obstante, si se indican errores de orientación y velocidad angular, utilizables no tanto en el navegador, sino en el simulador de la dinámica (sec. 2.14.2).

### 4.3.2. GPS

El sensor externo utilizado fue un receptor de señal GPS. Para este se consideraron los valores de módulos comerciales, entre los cuales no hay mucha diferencia en error. En particular se utilizaron las características del SGR-20 de la empresa Surrey Satellite Technology Limited (tabla 4.3).

| Elegidas para la Simulación |                          |
|-----------------------------|--------------------------|
| Posición                    | 10 m                     |
| Velocidad                   | $0.125 \text{ m s}^{-1}$ |
| TOPSTAR 3000                |                          |
| Posición                    | 10 m                     |
| Velocidad                   | $0.01 \text{ m s}^{-1}$  |
| SGR-20                      |                          |
| Posición                    | 10 m                     |
| Velocidad                   | $0.125 \text{ m s}^{-1}$ |

Cuadro 4.3: Errores del receptor de señal GPS ( $1\sigma$ ).

#### 4.3.3. IMU

Como sensores inerciales se utilizó una unidad de mediciones inerciales, IMU, compuesta de giróscopos y acelerómetros triaxiales.

#### Giróscopos

Por otro lado, los giróscopos son el componente esencial en la calidad de navegación de los ángulos, por lo tanto se analizaron varias tecnologías. En la gama más baja se simularon giróscopos microelectromecánicos (MEMS<sup>1</sup>) de unidades inerciales de la serie ADIS, de Analog Devices. En particular, se tomó el modelo más barato, ADIS445, y el más caro, ADIS485. Esta tecnología es una miniaturización de un sistema mecánico de masa-resorte, por lo general utilizando algún tipo de material que se deforme al ser acelerado y por lo tanto produzca diferencias de tensión medibles. Las unidades MEMS son muy pequeñas y baratas con lo cual se utilizan en muchas aplicaciones de consumo masivo. Sin embargo, la falta de precisión impide que se puedan integrar en aplicaciones de alto nivel.

En la gama intermedia y alta, se encuentran los giróscopos ópticos. Existen dos tipos principalmente en el mercado: fibra óptica (FOG<sup>2</sup>, de gama intermedia) y laser en anillo (RLG<sup>3</sup>, de gama alta). En ambos casos se utiliza la luz y técnicas de interferometría gracias a un fenómeno físico llamado *efecto Sagnac*.

En los dispositivos RLG un láser se divide en direcciones opuestas alrededor de un camino óptico en forma de anillo. En el medio hay una mezcla de gases inertes y espejos de alta reflexión para dirigir el haz correctamente. Por otro lado, un detector que mide la diferencia entre las llegadas de cada haz permite calcular a partir de esto la velocidad angular de rotación.

Los dispositivos FOG, por otra parte, emiten la luz generalmente con un diodo LED, pero fundamentalmente la diferencia con los RLG radica en el camino óptico que atraviesa la luz, que en los FOG es una bobina de fibra óptica.

#### Acelerómetros

Los acelerómetros son en su mayoría de tipo MEMS. No obstante existen distintas subcategorías dentro de esta misma tecnología. Por ejemplo, aquellos que utilizan materiales de cuarzo logran valores mucho más precisos y limpios de ruido que los que usan silicio.

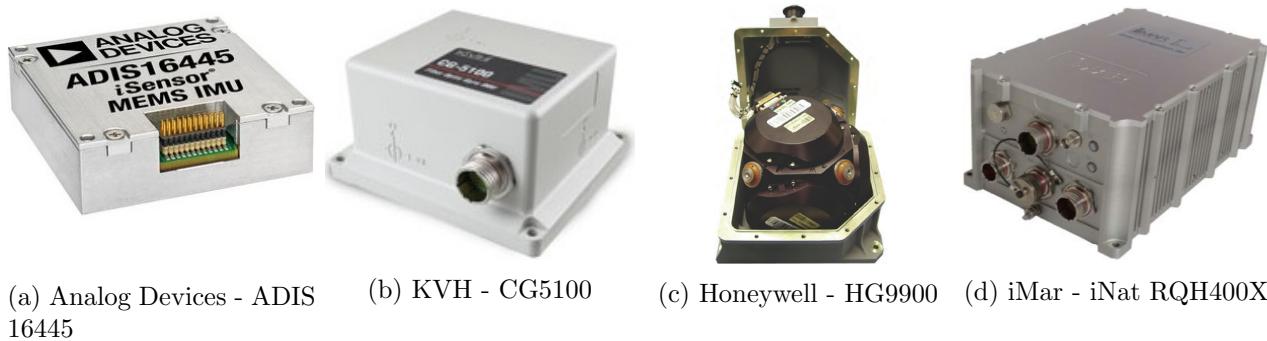
<sup>1</sup> Micro-Electromechanical Systems

<sup>2</sup> Fiber Optic Gyros

<sup>3</sup> Ring Laser Gyro

| Unidad       | Giróscopo  |                              |                        | Acelerómetro           |            | Precio  |
|--------------|------------|------------------------------|------------------------|------------------------|------------|---------|
|              | Tecnología | ARW [ $^{\circ}/\sqrt{hr}$ ] | Sesgo [ $^{\circ}/s$ ] | VRW [ $mg/\sqrt{Hz}$ ] | Sesgo [mg] | (U\$S)  |
| ADIS445      | MEMS       | 0.56                         | 0.5                    | 0.124                  | 8          | 305     |
| ADIS485      | MEMS       | 0.3                          | 0.2                    | 0.039                  | 3          | 1095    |
| HG1700       | RLG        | 0.125                        | $2.7 \times 10^{-4}$   | 0.337                  | 1          | 9000    |
| KVH CG5100   | FOG        | 0.067                        | $1.6 \times 10^{-3}$   | 0.12                   | 0.25       | 15125   |
| KVH 1775     | FOG        | 0.012                        | $2.7 \times 10^{-4}$   | 0.12                   | 0.05       | 19950   |
| iNat RQT4003 | RLG        | 0.005                        | $2.7 \times 10^{-6}$   | 0.0012                 | 0.1        | 110 000 |
| HG9900       | RLG        | 0.002                        | $8.3 \times 10^{-7}$   | 0.0015                 | 0.025      |         |
| iNat RQH4001 | RLG        | 0.0011                       | $5.5 \times 10^{-7}$   | 0.008                  | 0.025      | 160 000 |

Cuadro 4.4: IMUs



(a) Analog Devices - ADIS 16445

(b) KVH - CG5100

(c) Honeywell - HG9900

(d) iMar - iNat RQH400X

Figura 4.7: IMUs

De cualquier manera, este no es un componente esencial en el navegador, puesto que las aceleraciones en una trayectoria orbital libre tienen valores muy pequeños, debidos casi únicamente a la resistencia atmosférica.

## Elección

En base a estas descripciones, la elección del tipo de giróscopo depende claramente de las prestaciones que requiera la aplicación. Los MEMS son los más diminutos y baratos, menos precisos y menos durables. Los RLG poseen buena exactitud a lo largo del tiempo, gran precisión, pero también alto costo. Los FOG se encuentran en un escalón intermedio. En este trabajo se simularon modelos comerciales de cada tipo y se presentan los resultados.

Para la simulación, se consideraron calibradas las unidades de medición inercial, por lo tanto conteniendo un sesgo insignificante. La potencia de ruido fue calculada mediante las fórmulas de [9].

| IMU        | Error inicial | Error final | Unidades |
|------------|---------------|-------------|----------|
| ADIS 16445 | 5             | 1.1024      | m        |
| ADIS 16485 | 5             | 1.0619      | m        |
| HG 1700    | 5             | 1.1068      | m        |
| KVH CG5100 | 5             | 1.0872      | m        |
| KVH 1775   | 5             | 1.0971      | m        |
| HG 9900    | 5             | 0.8786      | m        |

Cuadro 4.5: Error en posición

| IMU        | Error inicial | Error final | Unidades          |
|------------|---------------|-------------|-------------------|
| ADIS 16445 | 0.5           | 0.0291      | $\text{m s}^{-1}$ |
| ADIS 16485 | 0.5           | 0.0158      | $\text{m s}^{-1}$ |
| HG 1700    | 0.5           | 0.0352      | $\text{m s}^{-1}$ |
| KVH CG5100 | 0.5           | 0.0209      | $\text{m s}^{-1}$ |
| KVH 1775   | 0.5           | 0.0250      | $\text{m s}^{-1}$ |
| HG 9900    | 0.5           | 0.0058      | $\text{m s}^{-1}$ |

Cuadro 4.6: Error en velocidad

#### 4.3.4. Resultados

En las tablas 4.5, 4.6 y 4.7 se pueden ver los resultados de la simulación. En cada caso, el error final corresponde al desvío final del estimador, es decir, la raíz cuadrada de la diagonal de la matriz de covarianza del estimador,  $P$ .

| IMU        | Error inicial | Error en el 1ºapogeo | Error en el 2ºapogeo | Unidades |
|------------|---------------|----------------------|----------------------|----------|
| ADIS 16445 | 1             | 2.7804               | 3.5748               | °        |
| ADIS 16485 | 1             | 1.7854               | 2.6214               | °        |
| HG 1700    | 1             | 1.0161               | 1.0536               | °        |
| KVH CG5100 | 1             | 1.0030               | 1.0067               | °        |
| KVH 1775   | 1             | 1                    | 1                    | °        |
| HG 9900    | 1             | 1                    | 1                    | °        |

Cuadro 4.7: Error en orientación

#### 4.4. Conclusiones

Se debe destacar que el vehículo se encuentra prácticamente en una caída libre orbitando la tierra, ya que la única fuerza que actúa sobre él, además de la gravedad, es la resistencia atmosférica. Esta última es de una magnitud tan chica que no permite que el algoritmo, tal como fue planteado, estime correctamente los ángulos de Euler. Lo que sucede esencialmente es que el error en los ángulos resulta inobservable con las mediciones de GPS e IMU. Por lo tanto, como el filtro de Kalman no logra observar los errores en orientación, la salida del navegador son directamente los ángulos calculados por el INS.

Por este motivo, la inclusión del acelerómetro en el sistema es prácticamente inútil para la trayectoria de órbita libre simulada. Sin embargo, esta conclusión podría ser distinta ante una trayectoria propulsada como la que se verá en el capítulo 6 de transferencia orbital.

Si se requiriese mejorar los errores de estimación en ángulos, una posibilidad es agregar instrumentos de medición de orientación como sensores de horizonte terrestre, sensores solares, star-trackers, etc. De este modo se tendría una observación directa de los ángulos de Euler.

Otra posibilidad es modificar el algoritmo considerando el control de orientación sobre el satélite. Una ley de control utilizable será presentada en el capítulo siguiente. Con esto se tiene una trayectoria nominal en base al guiado que se requiera para la orientación. Introduciendo este conocimiento en el sistema de navegación se pueden reducir los errores notablemente sin agregar componentes y por lo tanto, sin aumentar el costo del proyecto.



# Capítulo 5

## Control de orientación

Con el objetivo de controlar la orientación del vehículo se diseñó un control automático que estabiliza los ángulos de Euler respecto a la terna de referencia orbital RPY (definida en sec. 2.3), manteniendo así una orientación constante respecto a la Tierra. Este podría ser el caso de una alineación constante con el nadir, que es el caso de mayor relevancia en un satélite de observación terrestre.

### 5.1. Control Proporcional Derivativo (PD)

En principio, se comienza el análisis con un tipo de control Proporcional Derivativo. El torque de control se aplica en la ecuación de Euler, ec. 2.34, y la fórmula para cada eje es la 5.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{Cx} = K_x \varepsilon \phi + K_{xd} \frac{d\varepsilon\phi}{dt} \\ \tau_{Cy} = K_y \varepsilon \theta + K_{yd} \frac{d\varepsilon\theta}{dt} \\ \tau_{Cz} = K_z \varepsilon \psi + K_{zd} \frac{d\varepsilon\psi}{dt} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

con  $[\boldsymbol{\tau}]^B = [\tau_{Cx} \ \tau_{Cy} \ \tau_{Cz}]^T$ . Los términos de error  $\varepsilon\phi, \varepsilon\theta, \varepsilon\psi$  corresponden a la diferencia entre los ángulos deseados y los ángulos actuales para roll, pitch y yaw respectivamente. Se escribirá el desarrollo para el caso del roll, ya que es igual en cada eje. En este caso, el error se define:

$$\varepsilon\phi = \phi_d - \phi \quad (5.2)$$

Este tipo de controlador es el más común de encontrar en la literatura, por ejemplo en [19], puesto que su cómputo es muy simple y prácticamente cualquier satélite posee sensores de orientación (sensor solar, horizonte terrestre, o estelar, star-tracker), y de velocidad angular (giróscopos), o al menos un navegador que estime estas variables de algún modo.

Además, dado que la dinámica del satélite ya contiene de manera natural una cadena de integradores, la anulación del error en estado estable queda garantizada. Por lo tanto se puede prescindir de la acción integral en el controlador (PID), evitando la inestabilidad relativa producida por este.

La teoría que fundamenta su utilización se basa en un modelo de planta lineal, que no es el caso general para un satélite (como se vio en el modelo teórico se la sección 2.14). Sin embargo, para pequeños ángulos y velocidades bajas, podemos despreciar varios términos de las ecuaciones dinámicas y linealizar, reduciéndose a una cadena de dos integradores para cada eje, [19]:

$$I_x \frac{d^2\phi}{dt^2} = \tau_{Cx} + \tau_{Dx}$$

y equivalentemente en pitch y yaw.  $I_x$  es el momento de inercia principal en el eje **x** de cuerpo,  $\hat{b}_x$ .

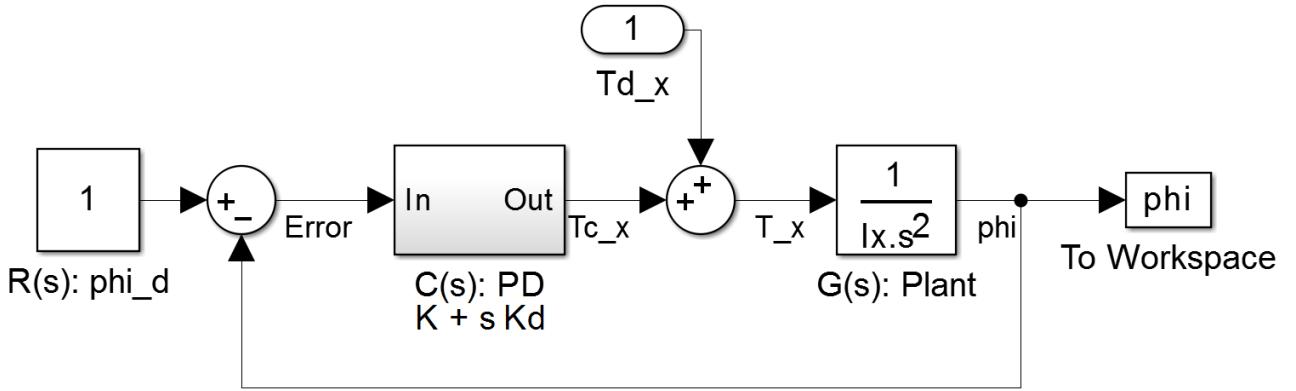


Figura 5.1: Diagrama en bloques del sistema de control PD para la planta lineal

Aplicando la ley de control PD presentada anteriormente (ec. 5.1) a uno de los ejes, obtenemos:

$$I_x \frac{d^2\phi}{dt^2} = K_x(\phi_d - \phi) + K_{xd} \left( \frac{d\phi_d}{dt} - \frac{d\phi}{dt} \right) + \tau_{Dx}$$

Este sistema se puede representar con el diagrama en bloques de la figura 5.1.

Se permite escribir las transformadas de Laplace como  $\phi(s) \triangleq \mathcal{L}\{\phi(t)\}$ . Si se suponen condiciones iniciales nulas al igual que los momentos de perturbación  $\tau_{Dx}$ , la transferencia del sistema entre el ángulo comandado y el ángulo obtenido se puede obtener por inspección del diagrama de la figura 5.1:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(s)}{\phi_d(s)} &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \\ &= \frac{K_x + sK_{xd}}{s^2 I_x + sK_{xd} + K_x} \\ &= \frac{\frac{K_x}{I_x} + s \frac{K_{xd}}{I_x}}{\Delta(s)} \end{aligned}$$

El denominador de la transferencia es entonces:

$$\Delta(s) = s^2 + \frac{K_{xd}}{I_x} s + \frac{K_x}{I_x}$$

Este desarrollo es idéntico para cada eje, con su correspondiente momento de inercia principal y constantes de control. Como podemos ver, queda un conocido sistema de segundo orden, cuya ecuación característica con la cual calcular los polos del sistema es:

$$0 = s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2 \quad (5.3)$$

donde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_x}{I_x}}, \quad \sigma = \frac{K_{xd}}{2I_x}$$

$\omega_n$  es la frecuencia natural del sistema, y  $\sigma$  es la atenuación. Por lo tanto, definiendo requerimientos de diseño para estos parámetros podemos deducir:

$$K_x = \omega_n^2 I_x, \quad K_{xd} = 2\sigma I_x \quad (5.4)$$

Los polos de la transferencia son las raíces de la ecuación característica 5.3 y se ubican en :

$$s_{p1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_n^2}$$

de modo que mientras la atenuación sea distinta de cero y positiva,  $\sigma > 0$ , los polos se ubicán en el semiplano izquierdo del plano complejo, dando lugar a un sistema estable de segundo orden. Por otro lado, el cero finito de la transferencia se encuentra en

$$s_0 = -\frac{K_x}{K_{xd}} = -\frac{\omega_n^2}{2\sigma}$$

Por lo tanto, el cero es real y mientras  $\sigma > 0$ , será negativo, ubicándose al igual que los polos en el semiplano izquierdo. Esto significa que para toda atenuación positiva se tiene un sistema de *fase mínima*. Es posible demostrar que un sistema de este tipo asegura la estabilidad de cualquier estado inobservable del sistema, que podría no estar reflejado en la función de transferencia.

## 5.2. Control PD modificado

Sin embargo, el problema que tiene este controlador tal como fue presentado es que requiere derivar el error  $\varepsilon\phi$  para cada ángulo, lo cual puede traer problemas numéricos durante la implementación en la computadora de abordo. Esto se podría resolver teniendo a disposición la derivada de la referencia  $\phi_d$ , i.e.  $\frac{d\phi_d}{dt}$ , pero en la práctica no sucede.

Lo que si es sencillo en la práctica es tener acceso a la salida del sistema (los ángulos) y a la derivada de esta misma (la velocidad angular), sea o bien por sensores que las miden directamente (como los giróscopos) o bien por estimadores (como el navegador). Por lo tanto, se modifica ligeramente la ley de control de la ecuación 5.1 eliminando justamente la derivada de la referencia ( $d\phi_d/dt$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{Cx} = K_x \varepsilon \phi - K_{xd} \frac{d\phi}{dt} \\ \tau_{Cy} = K_y \varepsilon \theta - K_{yd} \frac{d\theta}{dt} \\ \tau_{Cz} = K_z \varepsilon \psi - K_{zd} \frac{d\psi}{dt} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

En el caso del roll, se tiene:

$$\tau_{Cx} = K_x (\phi_d - \phi) - K_{xd} \frac{d\phi}{dt}$$

Con esta modificación el diagrama en bloques del sistema se puede ver en la figura 5.2 La transferencia en este caso resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(s)}{\phi_d(s)} &= \frac{K_x}{s^2 I_x + s K_{xd} + K_x} \\ &= \frac{\frac{K_x}{I_x}}{\Delta(s)} \end{aligned}$$

Evidentemente, la diferencia con la transferencia del PD original es el cero, que en el nuevo caso se encuentra ausente (en el infinito). El efecto de la ausencia de este cero es un menor margen de fase y mayor tiempo de establecimiento, dada la disminución de la ganancia en las frecuencias altas. Esta diferencia se evidencia más cuanto más cerca se encuentra el cero de los polos, es decir, cuanto mayor es la relación de amortiguamiento  $\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n}$ , y en consecuencia, más amortiguado es el sistema. Para  $0 < \zeta < 1$  el sistema es subamortiguado, y los polos dominan al cero, puesto que tienen una respuesta más lenta (se encuentran más a la derecha en el plano complejo). No obstante cuanto menos amortiguado, más oscilante es el sistema.

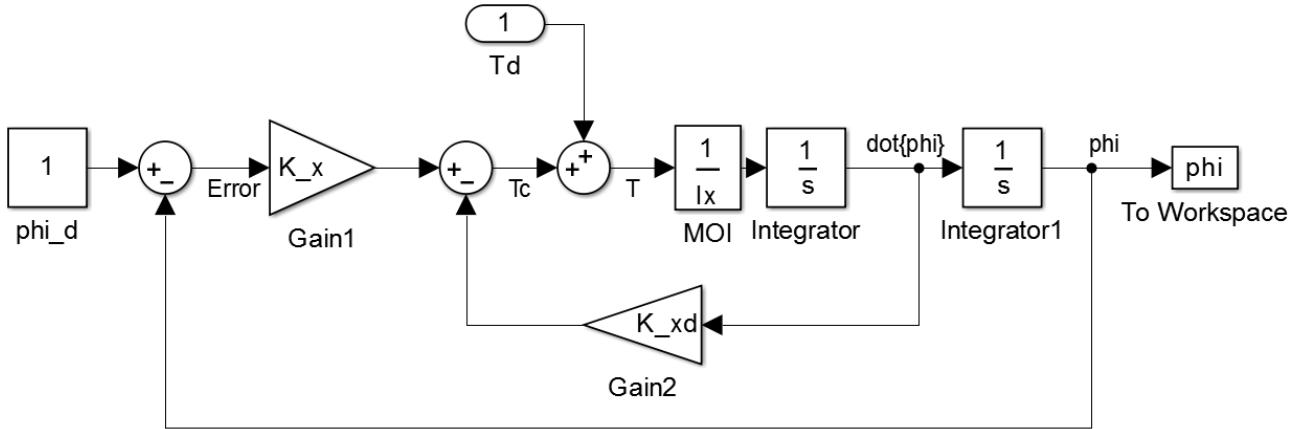


Figura 5.2: Diagrama en bloques del sistema con el controlador PD modificado

| Eje | Tronador |       | SARE  |       |
|-----|----------|-------|-------|-------|
|     | $K$      | $K_d$ | $K$   | $K_d$ |
| x   | 3.24     | 53.33 | 0.81  | 13.33 |
| y   | 5.265    | 86.66 | 1.316 | 21.67 |
| z   | 5.265    | 86.66 | 1.316 | 21.67 |

Cuadro 5.1: Parámetros del controlador PD

### 5.3. Diseño del PD modificado: $K$ , $K_d$

Por otro lado, cuanto mayor es  $\omega_n$  mayor es el ancho de banda y por lo tanto el sistema es más sensible a ruido. Al mismo tiempo implica un mayor  $K$  lo que mejora el rechazo a las perturbaciones ( $\tau_d$ ) que se introducen en la planta. En el caso de estudio se cree que el ruido que introduce el navegador es más dominante que los momentos de perturbación, por lo tanto se prefiere un ancho de banda reducido a costa de una constante de proporcionalidad baja. Por estas razones se optó por  $\zeta = 0,7407$ , y  $\omega_n = 0,09$ , resultando en una atenuación de  $\sigma = 0,0667$ , tiempo de establecimiento al 2 % de  $t_s = 60$  s y un sobreímpico de  $M_p = 3,13\%$ . Esto implica una constante de tiempo de  $1/\sigma = 15$  s y un ancho de banda reducido a bajas frecuencias. Esto es útil ya que atenúa notablemente el ruido introducido por los sensores, el navegador y las perturbaciones en general. Con estos valores y suponiendo  $I_x = 400$ , se obtiene según las fórmulas 5.4:

$$K_x = 3,24, \quad K_{xd} = 53,33$$

Este sistema se implementó en Simulink con los valores recién calculados, condiciones iniciales nulas y sin perturbaciones, como en la figura 5.2, con un valor deseado de referencia constante igual a 1. El resultado es la respuesta del sistema a un escalón unitario, y se aprecia en la figura 5.3, junto con referencias al tiempo de establecimiento, sobreímpico y respuesta deseada.

Finalmente, utilizando las ecuaciones 5.4 para cada eje de rotación se calcularon los valores de la tabla 5.1 en el caso del Tronador, con una masa de  $m = 1000$  kg y momentos de inercia de  $I_x = 400$  kg m<sup>2</sup>,  $I_y = I_z = 650$  kg m<sup>2</sup>.

En el caso del SARE, con una masa de  $m = 350$  kg y momentos de inercia de  $I_x = 100$  kg m<sup>2</sup>,  $I_y = I_z = 162.5$  kg m<sup>2</sup>, los parámetros del control se muestran a la derecha en la tabla 5.1.

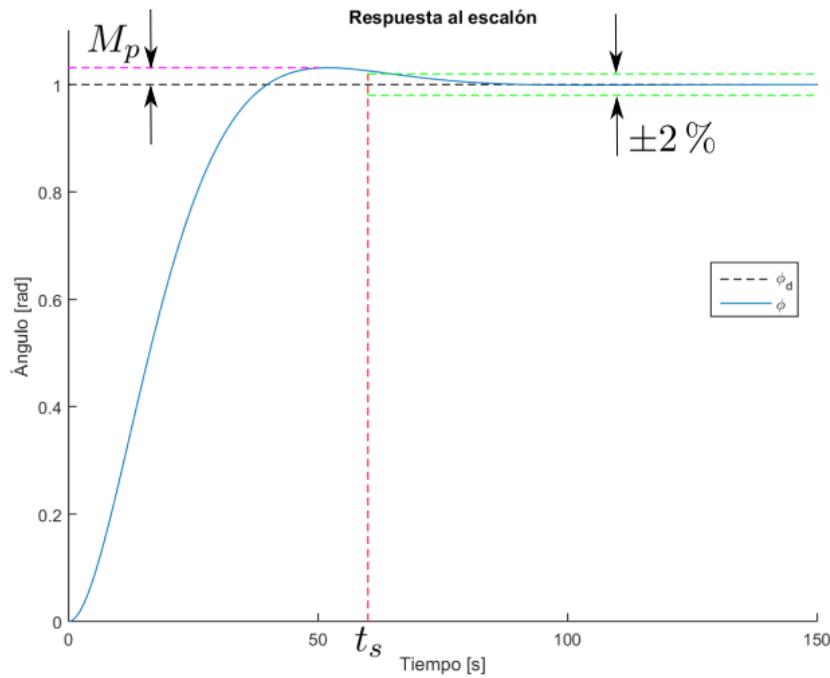


Figura 5.3: Simulación del sistema de control PD modificado

## 5.4. Simulación

Se implementó en Simulink la planta lineal del satélite con los 3 ejes y el control propuesto, como se ve en la figura 5.4. En el interior de la planta lineal se agregó el bloque que modela las perturbaciones por gradiente gravitacional (sec. 2.14.2 y 3.1.2). Se simularon condiciones iniciales aleatorias para los ángulos iniciales en el rango  $(-\pi, \pi)$  para roll y yaw, y  $(-\pi/2, \pi/2)$  para pitch; y velocidad angular en el rango  $(-0,05, 0,05)$ . La referencia a seguir se configuró en  $0^\circ$  para todos los ángulos. En la figura 5.5 se ve la evolución de los ángulos de Euler, que en aproximadamente 60s alcanzan la referencia, tal como era esperado (caso Tronador). Estas curvas pueden compararse con los resultados del ejemplo I del capítulo 3, figura 3.14, donde sobre el cuerpo solo actuaban las perturbaciones por gradiente gravitacional sin ningún tipo de control.

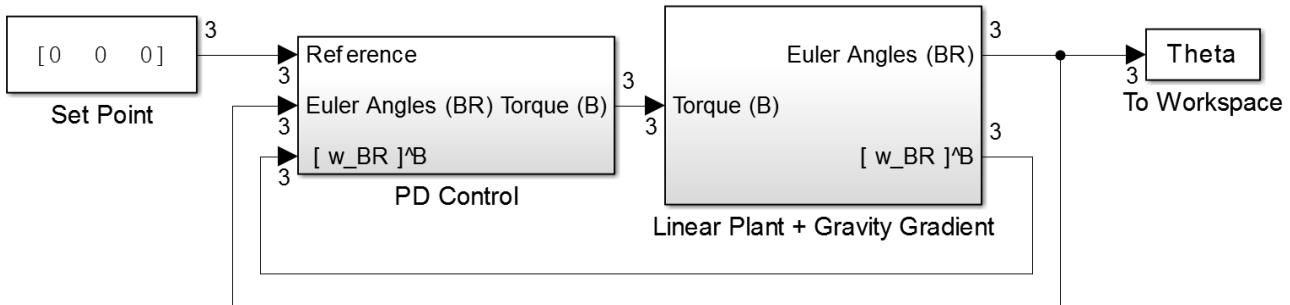


Figura 5.4: Sistema de control con planta lineal

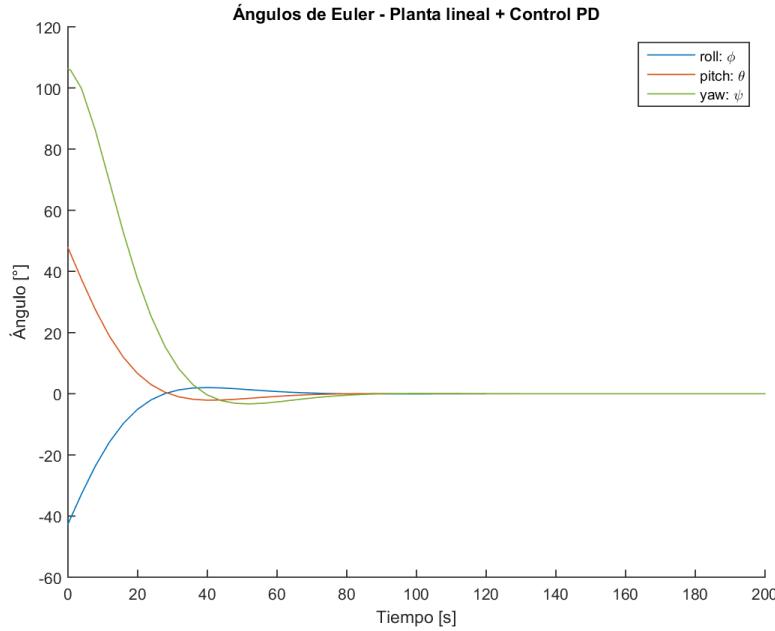


Figura 5.5: Resultados del control PD

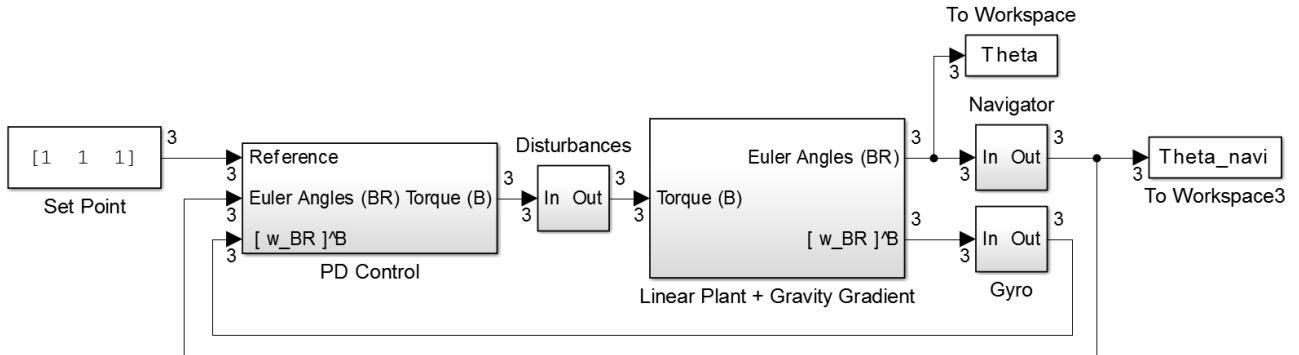


Figura 5.6: Simulación de ruidos en el sistema

#### 5.4.1. Ruidos

En otra simulación se consideraron los ruidos introducidos por giróscopos, navegador y otras posibles perturbaciones no modeladas (Fig. 5.6). Todos se modelaron como ruidos blancos gaussianos de media nula, con distintos desvíos. Para los primeros se tomó el peor caso, el ADIS16445 (tabla 4.4). Para el navegador se tomó el desvío del error angular correspondiente a dicho sensor,  $3.6^\circ$  (tabla 4.7). Finalmente, las perturbaciones por momentos externos no considerados en el modelo se asumieron con un desvío de  $0.01 \text{ N m}$ .

Los resultados con esta configuración se aprecian en la figura 5.7 para la respuesta al escalón, con un acercamiento a la referencia unitaria. En el gráfico de arriba se ve la salida de la planta, es decir, los estados reales del sistema, mientras que en el gráfico de abajo se ve la salida del navegador. Efectivamente, el controlador alcanza la referencia en 1 minuto, con un sobreímpetu de aproximadamente 3.5%, y la sigue con menos de un 1% de error, a pesar de la ruidos a la salida del navegador. Cabe destacar que los ruidos en giróscopos y perturbaciones externas no presentan mayores problemas, sino que el desafío para el controlador es el ruido introducido en la medición de los ángulos (en el

navegador). Para la respuesta a referencia nula, la figura 5.8 muestra los resultados.

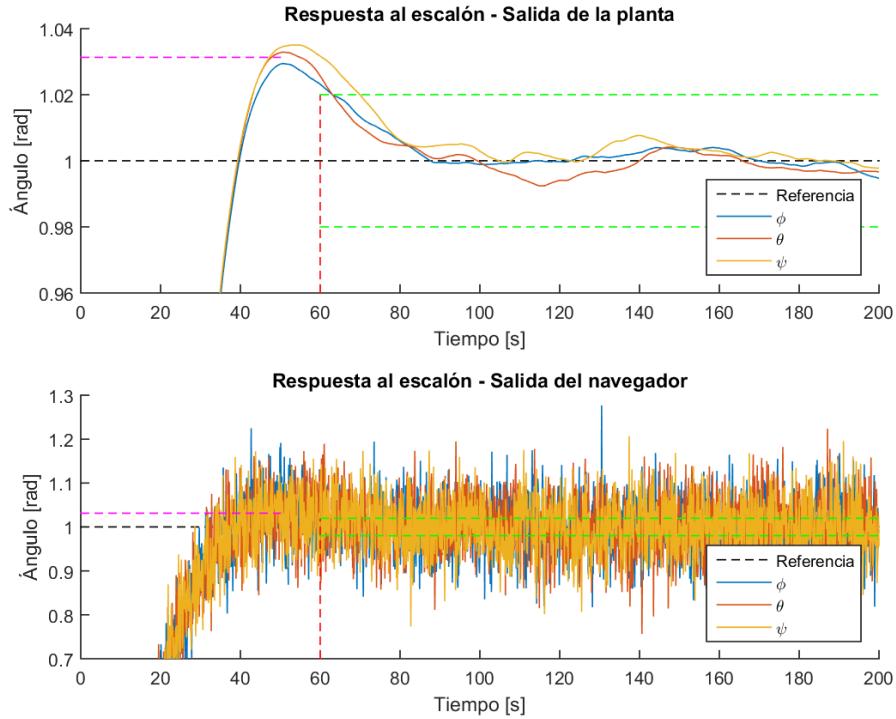


Figura 5.7: Simulación de ruidos en el sistema. Respuesta al escalón

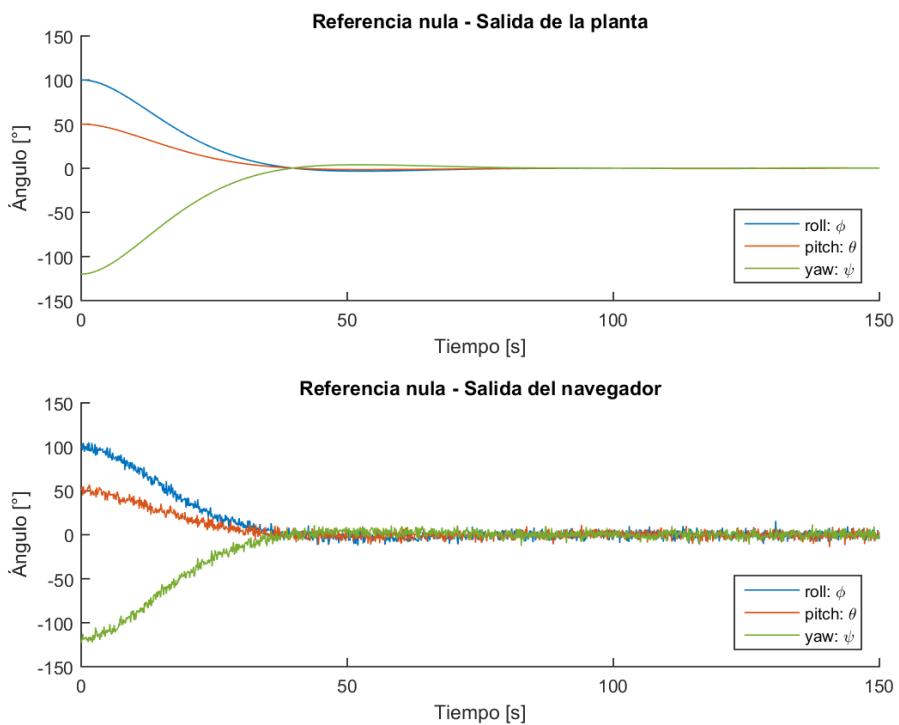


Figura 5.8: Simulación de ruidos en el sistema. Referencia nula

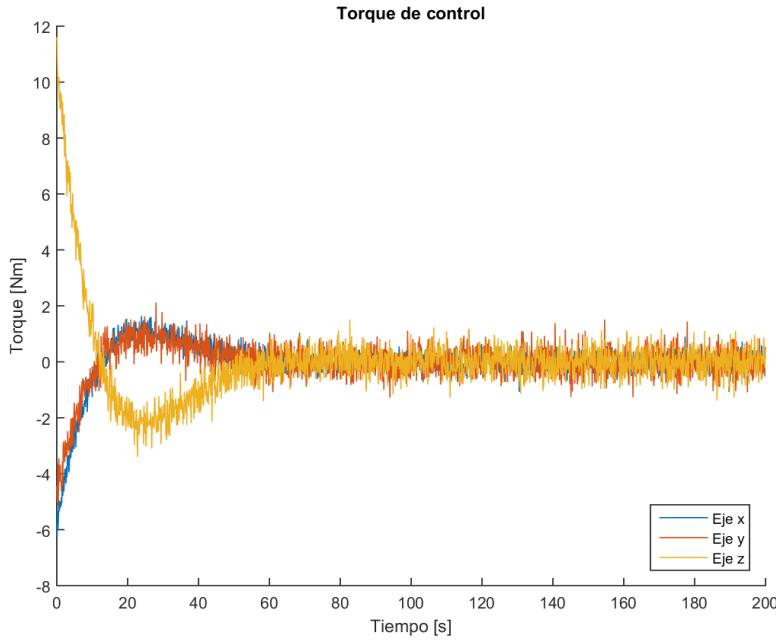


Figura 5.9: Esfuerzo en los actuadores

#### 5.4.2. Desventajas del PD

El control PD no es la panacea. En efecto, la acción proporcional genera un torque de control muy alto que en muchos casos puede saturar los actuadores en la práctica. Esta fue otra de las razones por las cuales se optó por una constante de proporcionalidad chica. Además, este tipo de control tampoco es necesariamente óptimo desde el punto de vista del consumo energético o de combustible (según se utilicen ruedas de reacción o propulsores respectivamente). No obstante, el objetivo principal de este control era solo estabilizar la planta y seguir una trayectoria de referencia. La amplitud que puede alcanzar el torque de control se ve en la figura 5.9, que corresponde a la configuración con ruidos, descripta en la sección anterior.

#### Actuadores saturados

Por ejemplo, las ruedas de reacción W45HT de la empresa neerlandesa Moog Bradford (fig. 5.10) solo pueden aplicar un torque máximo de 0.403Nm, mientras que las W45 de la misma empresa, solo alcanzan un valor de 0.248Nm. Si el controlador le pide mayor torque, saturan a dicho valor. Para ver como se comporta el controlador frente a esta situación, se agregó un bloque de saturación con estas características para cada caso (Fig. 5.11).

En la figura 5.12 se ve que una consecuencia de este bloque es un tiempo de establecimiento mayor. Para el W45HT, este tiempo es de aproximadamente 200s, y para el W45 350s. Igualmente, estos valores dependen fuertemente de las condiciones iniciales de orientación y velocidad angular. En esta simulación se mostraron los peores casos. El sobreímpetu del transitorio también es algo mayor, pero lo importante es que eventualmente se alcanza el valor de referencia y en ambos casos el error en estado estable es menor a  $1^\circ$ . Este error es aceptable ya que está en el orden del error que se obtiene con el navegador incluso en los mejores casos.

La figura 5.13 muestra el torque a la entrada de la planta, que es la suma del torque de control y el ruido de perturbaciones no modeladas. En estos gráficos se ve claramente el efecto del saturador en los actuadores.

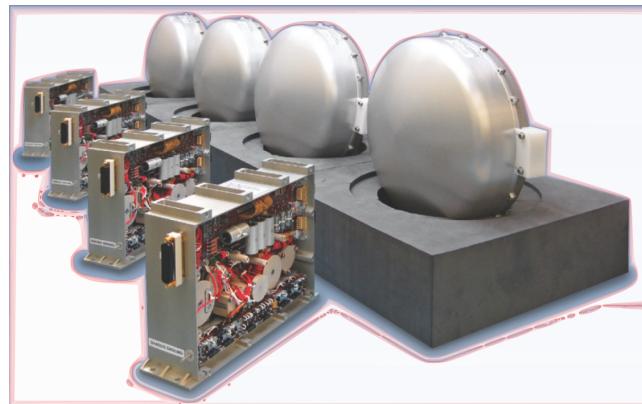


Figura 5.10: Ruedas de reacción Moog Bradford

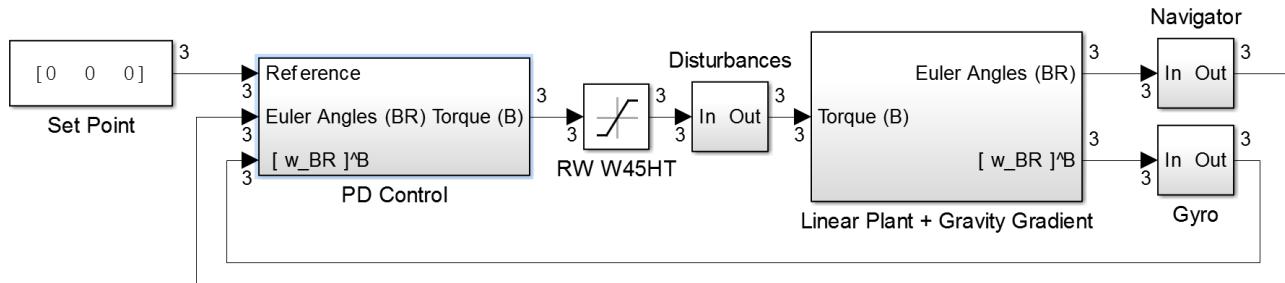


Figura 5.11: Incorporación del bloque de saturación

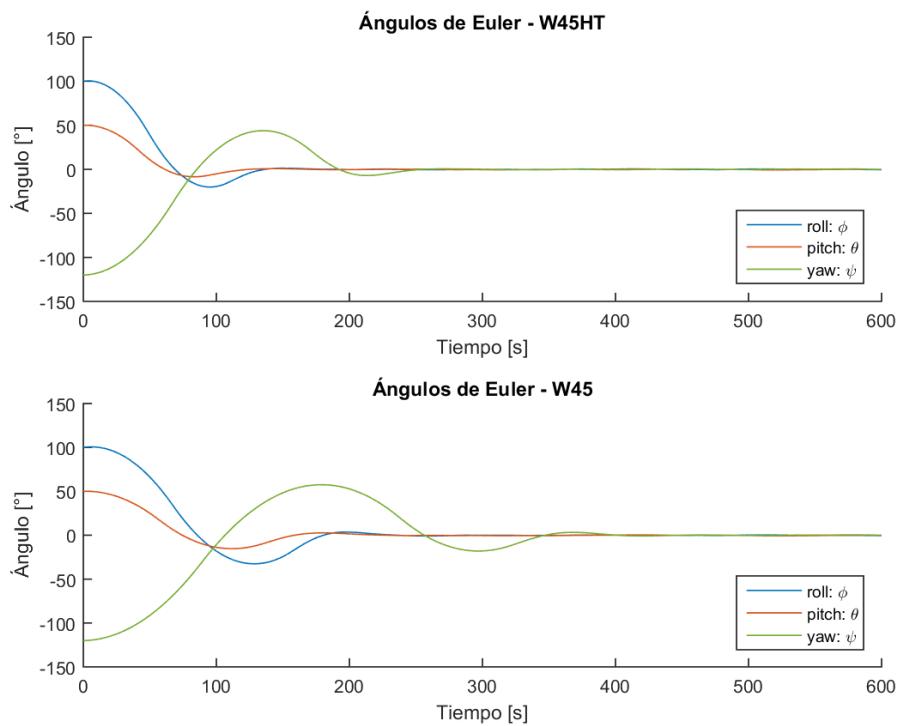


Figura 5.12: Saturación con ruedas de reacción comerciales

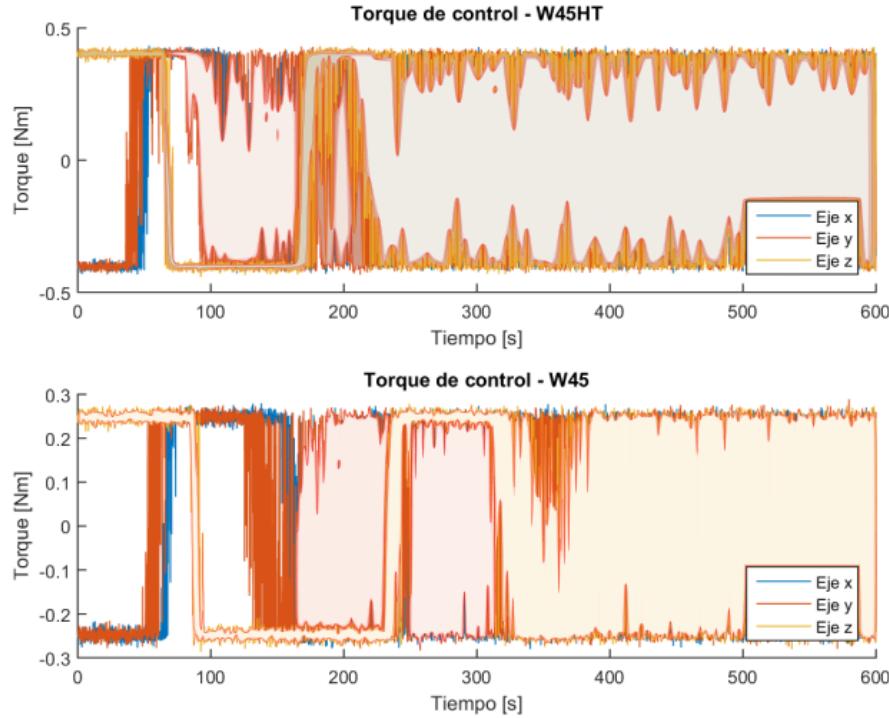


Figura 5.13: Saturación con ruedas de reacción comerciales

#### 5.4.3. Aplicación sobre la planta no-lineal

En la figura 5.14 se ve la aplicación del control diseñado a la planta no-lineal de 6 grados de libertad, presentada en el capítulo 3, con las condiciones iniciales correspondientes a la órbita del ejemplo I del mismo capítulo (sec: 3.2.5), los sensores y el navegador del capítulo 4, y los actuadores de la sección anterior. Esto representa la mejor aproximación posible del sistema real, durante este trabajo. Lo único que se ha agregado a estos componentes ha sido en el navegador la estimación de  $[\omega^{BR}]^B$ , i.e. la velocidad angular del cuerpo respecto a la terna de referencia orbital RPY, en coordenadas de cuerpo. Esta salida se puede ver en la parte inferior del bloque de navegación. Para calcularla se implementaron las ecuaciones 2.38 y 2.37 a partir de las estimaciones de posición y velocidad inerciales y de la medición de los giróscopos.

En el gráfico superior de la figura 5.15 se muestra la respuesta del sistema a un escalón de  $30^\circ$ . El sobrepico alcanza el 25 % y el error en estado estable se mantiene alrededor de 10 %. En este caso no se utilizó el mismo escalón unitario que se usó para la planta lineal debido a que el controlador se diseñó sobre la hipótesis de pequeños ángulos de rotación, como se explicó inicialmente en este capítulo. Cuando el sobrepico del transitorio supera los  $90^\circ$  en alguno de los ejes, el sistema se desestabiliza. Esto puede deberse al fenómeno de *gimbal-lock* inherente en la representación con ángulos de Euler. Posiblemente un control PD basado en el error en cuaterniones no sufra este inconveniente permitiendo excursiones mayores en los ángulos sin desestabilizarse.

Por otra parte, en el gráfico de abajo de la figura 5.15 los resultados corresponden a una referencia de guiado nula, que es el caso de mayor interés práctico. Estas curvas son muy similares a aquellas del caso con la planta lineal (Fig. 5.12).

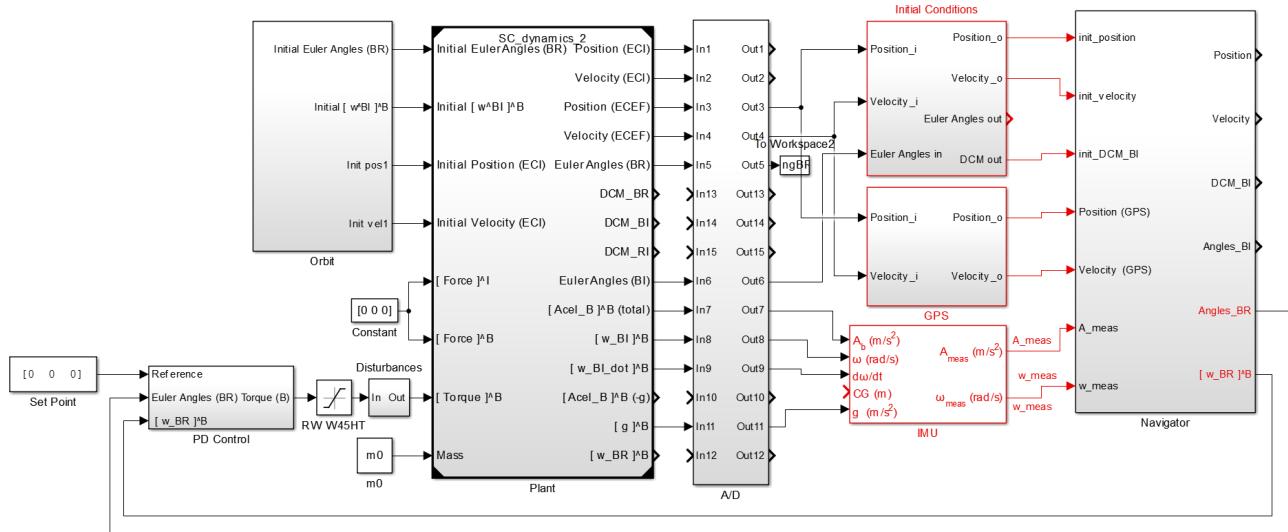


Figura 5.14: Sistema de control con planta no-lineal, navegador, control PD, sensores y actuadores

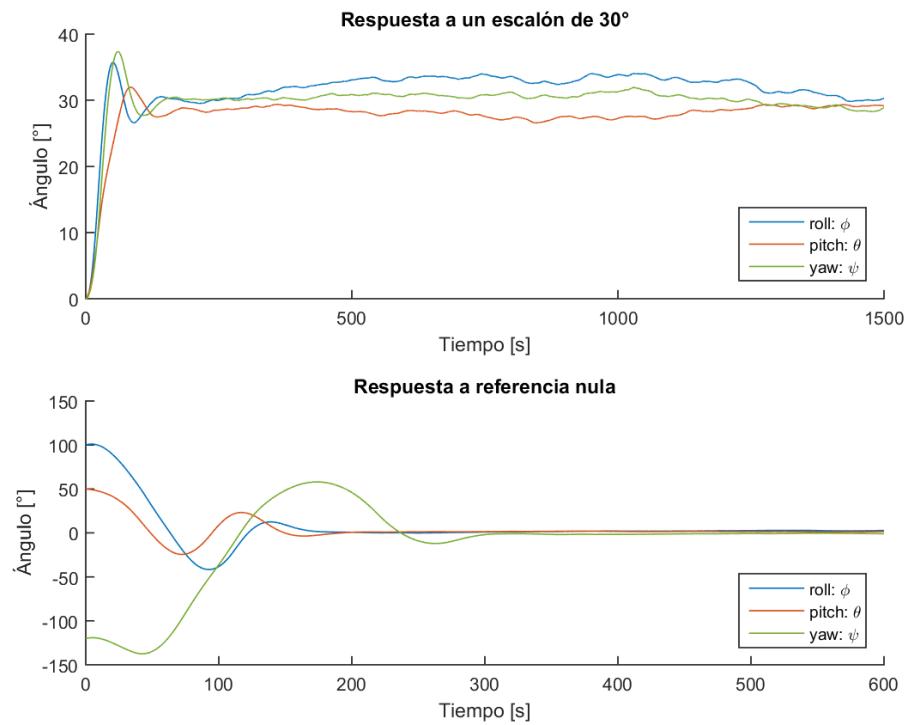


Figura 5.15: Resultados del sistema completo

## 5.5. Conclusiones

Como se vio en la sección anterior, el satélite puede analizarse como una planta lineal, cuya transferencia es simplemente  $\frac{I^{-1}}{s^2}$ , sin que los resultados se alejen de la realidad significativamente. Esto permite utilizar todas las técnicas conocidas de la teoría de control lineal, como por ejemplo el control proporcional-derivativo aplicado en este caso, así como también aprovechar mejor los recursos de la computadora de a bordo del satélite.

Sin embargo, utilizar la representación en ángulos de Euler para diseñar el control quizás limita un poco el desempeño. Como se explicó anteriormente, si los requerimientos lo hacen necesario, convendría utilizar una ley de control PD con el error en cuaterniones en vez de ángulos de Euler. Esto consiste en modificar únicamente el cálculo del error proporcional en el bloque del controlador PD, como se explica en [19].

Esta aproximación lineal también podría utilizarse a la hora de diseñar el navegador, como en el capítulo 4, en lo que respecta a la orientación. Posiblemente se podría rediseñar un navegador más sencillo, pero esto aún se debe estudiar con cuidado.

# Capítulo 6

## Control orbital

### 6.1. Objetivo

El lanzador llega con la carga al espacio y se ubica en un órbita inicial que se denomina *órbita de inyección*. El perigeo de esta trayectoria tiene una altitud de aproximadamente 350km, mientras que el apogeo de 465km. Los elementos orbitales que describen esta órbita se encuentran en la tabla 6.1.

| Elemento   | Órbita de inyección inicial | Órbita circular final | Unidades |
|------------|-----------------------------|-----------------------|----------|
| $a_0$      | $R_e + 400$                 | $R_e + 465$           | km       |
| $e_0$      | 0.0074                      | 0                     | -        |
| $i_0$      | -83                         | -83                   | °        |
| $\omega_0$ | 54                          | 54                    | °        |
| $\Omega_0$ | -69                         | -69                   | °        |
| $M_0$      | 0                           | 0                     | °        |

Cuadro 6.1: Elementos keplerianos de la órbita de inyección y de la órbita circular final

El objetivo de los algoritmos que se presentan en el presente capítulo, es transferir al satélite de la órbita de inyección elíptica inicial a una órbita circular de radio igual al apogeo de la primera, es decir, de unos 465km, con los parámetros de la tabla 6.1.

Estas órbitas se esquematizan en la figura 6.1.

Estos métodos se introducen de manera general, de modo que puedan ser utilizados igualmente para otras órbitas de baja altitud (LEO), con el cuidado de realizar nuevamente las simulaciones para verificar el comportamiento de la teoría. Para aplicar en órbitas de altitudes mayores, (MEO <sup>1</sup>, HEO <sup>2</sup>), sería necesario considerar otras perturbaciones como la atracción ejercida por la Luna y/u otros planetas, o la presión solar, que no fueron tomadas en cuenta en este análisis.

### 6.2. Estrategias

#### 6.2.1. Ascenso directo

Para analizar el problema de alcanzar la órbita operativa (órbita objetivo) de la misión satelital, una primera aproximación se denomina *ascenso directo*. Con este método el lanzador quema combustible hasta alcanzar exactamente una posición y velocidad correspondientes a la órbita deseada, momento en el cual se desprende de la carga.

<sup>1</sup> Medium-Earth Orbit, mediana altitud, 2000km-36000km

<sup>2</sup> High-Earth Orbit, alta altitud, más de 36000km

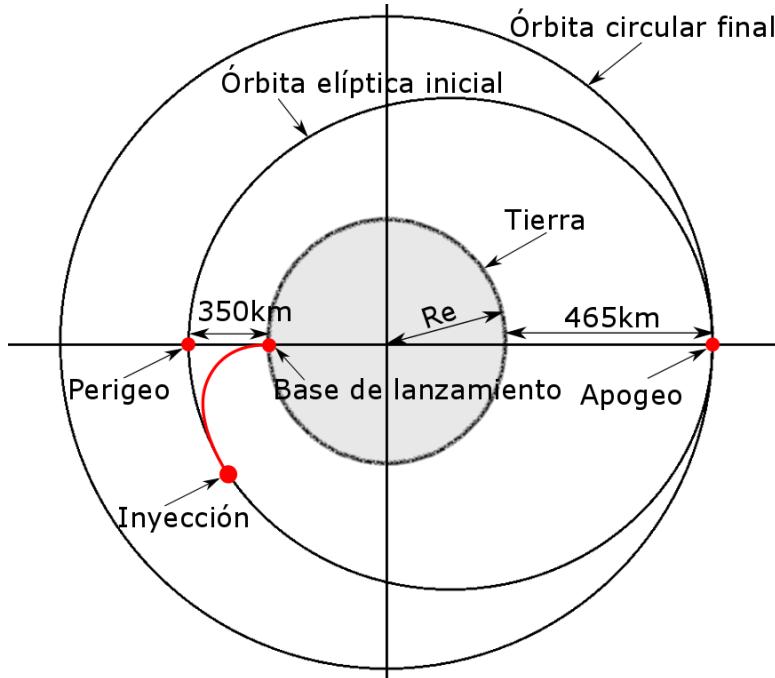


Figura 6.1: Órbitas inicial y final

| Vehículo | $m_0$ [kg] | $I_{sp}$ [s] | $F_T$ [N] |
|----------|------------|--------------|-----------|
| Tronador | 1000       | 300          | 27896.8   |
| SARE     | 350        | 220          | 20        |

Cuadro 6.2: Características de los motores de cada vehículo

### 6.2.2. Hohmann

Sin embargo, se puede ahorrar mucho combustible si el cohete deja la carga a una altura más baja, pero de forma tal que se mantenga en una órbita elíptica con un apogeo igual (o cercano) a la órbita objetivo, y luego el satélite (o una nueva etapa superior del lanzador) corrige la órbita. Para esto, primero se deja orbitar libremente desde el lanzamiento y al llegar al apogeo, se imprime un impulso a los propulsores del satélite (o de la etapa superior del lanzador) de modo que alcance la velocidad objetivo  $v$ . Esto es una semi-transferencia de Hohmann, como la mencionada en la introducción, pero iniciándose directamente en la órbita elíptica de transferencia (que es la órbita de inyección).

La maniobra entonces se reduce a un único impulso de incremento de velocidad en el apogeo de la órbita de inyección.

Esta maniobra puede ser realizada por la última etapa del vehículo lanzador o bien directamente por el satélite, una vez desacoplado.

En el primer caso, la masa total es la suma del vehículo más el satélite, resultando aproximadamente en 1000 kg. El motor es de combustible líquido y utiliza como propelente un compuesto de la hidracina. El empuje de este es de 2850 kgf y el impulso específico  $I_{sp} = 300$ .

En el segundo caso, se tiene únicamente al satélite, cuya masa es de aproximadamente 350 kg. El sistema de propulsión que utiliza consta de 4 toberas capaces de producir un empuje de 5 N cada una, resultando en un total de 20 N. El impulso específico en este caso es de  $I_{sp} = 220$ .

### Algoritmo ideal

Para llevar a cabo la estrategia de Hohmann, es necesario conocer el  $\Delta V$  que se debe aplicar al vehículo para corregir la órbita así como también el instante de tiempo en el cual ejecutar el impulso.

Para calcular el primero, se utiliza la ecuación 2.21, de la sección 2.12.1, que circulariza una órbita elíptica. Resolver esta ecuación implica conocer el perigeo y el apogeo de la órbita inicial  $r_p, r_a$ ; o lo que es equivalente, conocer el semieje mayor y la excentricidad de esta primer órbita, ya que a través de las ecuaciones 2.6 y 2.7 se pueden calcular  $r_p$  y  $r_a$ .

Por otro lado, el instante en el cual aplicar el impulso es justamente en el apogeo de la órbita, por lo tanto se desea conocer el tiempo de paso por el apogeo,  $t_a$ . Este se puede calcular mediante la ecuación 2.9, donde se definió la anomalía media. Sabiendo que el apogeo se corresponde con  $M = \pi$ , y haciendo  $t = t_a$ , se puede despejar el tiempo:

$$\begin{aligned} t &= \frac{M - M_0}{n} \\ t_a &= \frac{\pi - M_0}{n} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Cabe destacar que en este instante, todas las anomalías coinciden en  $\pi$ ,  $M = E = f = \pi$ .

Mediante las fórmulas de la sección 2.11.2 es posible transformar la posición y velocidad instantáneas en cualquier punto de la órbita en los elementos orbitales clásicos del vector  $\alpha$ , en particular el semieje mayor y la excentricidad. Ante la ausencia de perturbaciones, el conjunto de estos elementos más el conocimiento de  $M_0$  (dado por el tiempo de paso por el perigeo  $t_p$ , ec. 2.9) proveerían, junto a las fórmulas 2.21 y 6.1, el  $\Delta V$  y el  $t_a$  deseados sin inconvenientes.

Luego, mediante las ecuaciones del cohete, ecs. 2.25 y 2.26, es posible calcular la cantidad de combustible utilizado en la maniobra,

$$\Delta m = m_0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\Delta V}{g_0 I_{sp}} \right) \right]$$

donde  $m_0$  es la masa inicial del vehículo,  $\Delta V$  fue obtenido recientemente, y  $I_{sp}$  es el impulso específico del motor en uso (esta es la ecuación 2.26).

Por otro lado, como un impulso instantáneo no es realizable físicamente, lo que se genera es un pulso de empuje,  $F_T$ . Mientras el ancho de este pulso sea mucho menor que el período orbital, esto se aproxima al mismo resultado de un impulso instantáneo. Para calcular el ancho de este pulso,  $\Delta t$ , se parte de la fórmula 2.24 del empuje de un motor de propulsión, donde se tiene que

$$F_T = I_{sp} g_0 \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Despejando  $\Delta t$ ,

$$\Delta t = \frac{I_{sp} g_0}{F_T} \Delta m$$

Reemplazando con 2.26,

$$\Delta t = \frac{I_{sp} g_0}{F_T} m_0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\Delta V}{g_0 I_{sp}} \right) \right] \quad (6.2)$$

Este pulso se debe centrar en el apogeo, por lo tanto el inicio y final del pulso deben ser:

$$t_1 = t_a - \frac{\Delta t}{2} \quad t_2 = t_a + \frac{\Delta t}{2}$$

El empuje  $F_T$  y el impulso específico son parámetros del motor. La masa inicial del vehículo es un dato que se conoce, al igual que la constante  $g_0$ . Por lo tanto el ancho del pulso de control se puede calcular directamente a partir del  $\Delta V$  requerido para la maniobra. Así, la información que se necesita para realizar el algoritmo es únicamente  $\Delta V$  y  $t_a$ .

### Maniobra realizada por el satélite

Durante la misión satelital, la resistencia atmosférica desacelera lentamente al satélite, reduciendo el radio de la órbita. Por este motivo, se deben aplicar correcciones periódicamente para contrarrestar este fenómeno y mantenerse en la órbita correcta. Este problema se conoce con el nombre de *mantenimiento orbital*. El tiempo de vida de una misión satelital depende fuertemente, entre otras cosas, de la cantidad de combustible que lleve para realizar estas correcciones. Por otra parte, la cantidad de combustible necesaria para realizar la transferencia orbital posterior a la inyección es significativa en relación al presupuesto de combustible que conlleva la misión satelital para mantenimiento. El combustible requerido para esta maniobra equivale aproximadamente a un año de mantenimiento orbital por efecto de la resistencia atmosférica. Por lo tanto, realizar esta maniobra con el satélite, implica una reducción importante del tiempo de vida de la misión.

### Maniobra realizada por el lanzador

Por otra parte, si la maniobra la realiza el lanzador, por ejemplo mediante una última etapa del vehículo, el combustible del que dispone se diseña específicamente para esto, y por lo tanto no implica una reducción del tiempo de vida de la misión. En todo caso, significa un mayor costo del proyecto, aunque en un porcentaje reducido comparado con el combustible total del lanzamiento.

Sin embargo, en este caso para aplicar el promedio, sería necesario dejar orbitar libremente al vehículo. Esto significa que el control de orientación diseñado en el capítulo anterior, se debe seguir utilizando aún con el satélite acoplado, lo que genera un esfuerzo considerable de los actuadores, específicamente, las ruedas de reacción. Además, el satélite debe encenderse cuánto antes sea posible para abrir los paneles solares y realizar todas las tareas de calibración de sus instrumentos. Dada la extrema hostilidad del ambiente en el que se encuentra, debe encender todos los controles, como por ejemplo el de temperatura, introducido en el capítulo 2, antes de que se congele.

## 6.3. Presentación del problema

La ausencia de perturbaciones no se condice con la realidad. Como se explicó en la introducción, existen diversas fuerzas que actúan continuamente sobre el vehículo desplazándolo de la órbita ideal kepleriana. Las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de los elementos orbitales en general fue descripta en la sección 2.15 del capítulo 2. Al aplicar las fórmulas del potencial gravitatorio, por ejemplo, en estas ecuaciones, queda un sistema no lineal que no tiene solución analítica con fórmula cerrada. En algunos casos en la literatura [24], [18], se aproximan ciertos términos periódicos en las ecuaciones por sus promedios temporales y por lo tanto se alcanzan soluciones analíticamente. Sin embargo, este resultado es una aproximación a la variación del promedio de cada elemento orbital. Lo que se requiere para este caso de estudio es la variación instantánea de los elementos orbitales keplerianos, y esto implica resolver las ecuaciones diferenciales de manera exacta.

Un ejemplo de estas variaciones se puede ver en las figuras 6.2, 6.3 y 6.4, donde se simuló una órbita de condiciones iniciales dadas por los valores a la izquierda de la tabla 6.1. Estos parámetros iniciales se transforman en posición y velocidad iniciales para correr el simulador, mediante las ecuaciones de la sección 2.11.1. Luego en cada instante de tiempo se recalculan los parámetros orbitales con las ecuaciones inversas a las anteriores, dadas en la sección 2.11.2. Las curvas de la figura corresponden a este último cálculo.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Si bien, pareciera que los valores de  $i$ ,  $\omega$  y  $\Omega$  no se asemejan en ningún momento a los elementos orbitales iniciales, se puede comprobar que la representación que se ha calculado es equivalente a la de las condiciones iniciales:

$$\{i = -83^\circ, \omega = 54^\circ, \Omega = -69^\circ\} \equiv \{i = +83^\circ, \omega = -126^\circ, \Omega = 111^\circ\}$$

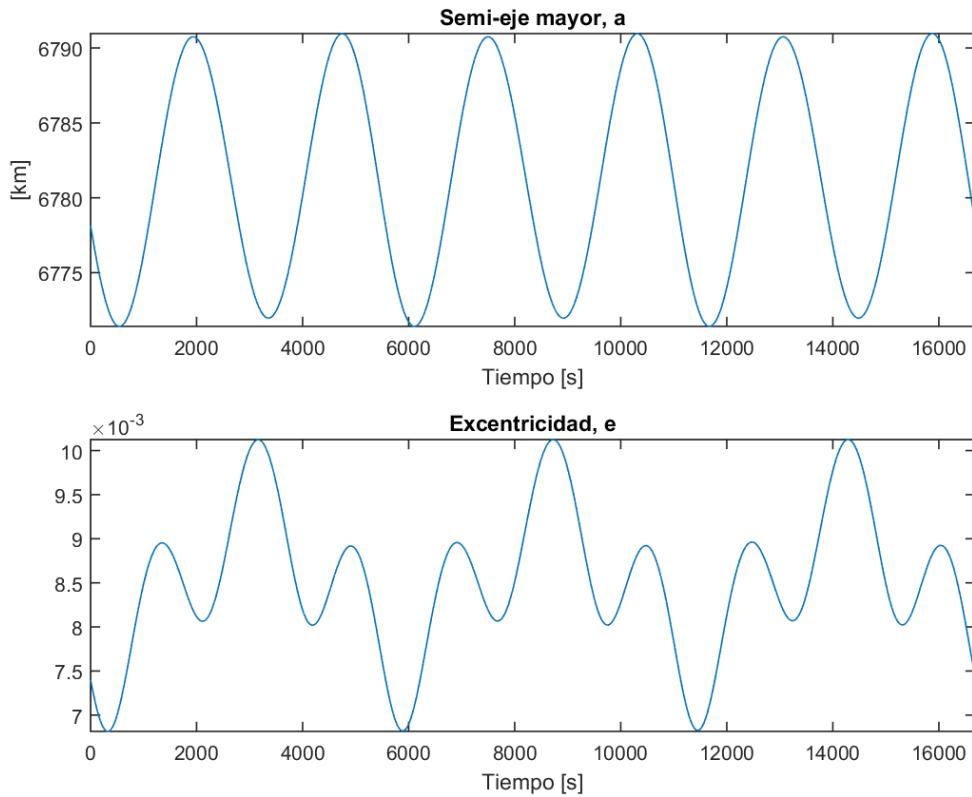


Figura 6.2: Variación de parámetros orbitales (I)

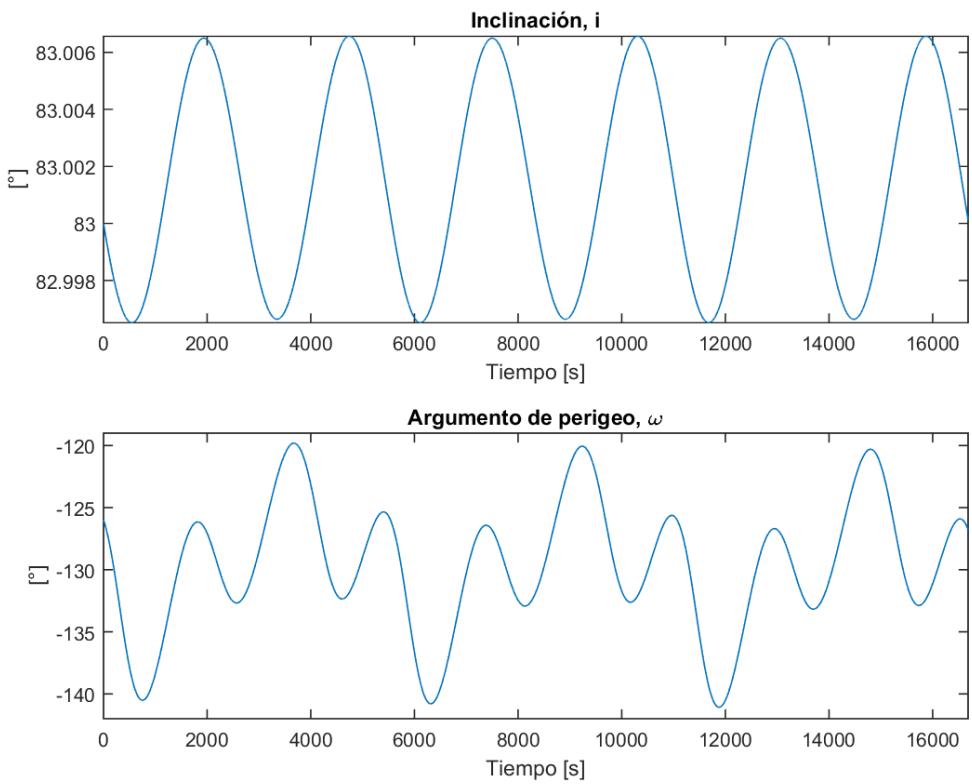


Figura 6.3: Variación de parámetros orbitales (II)

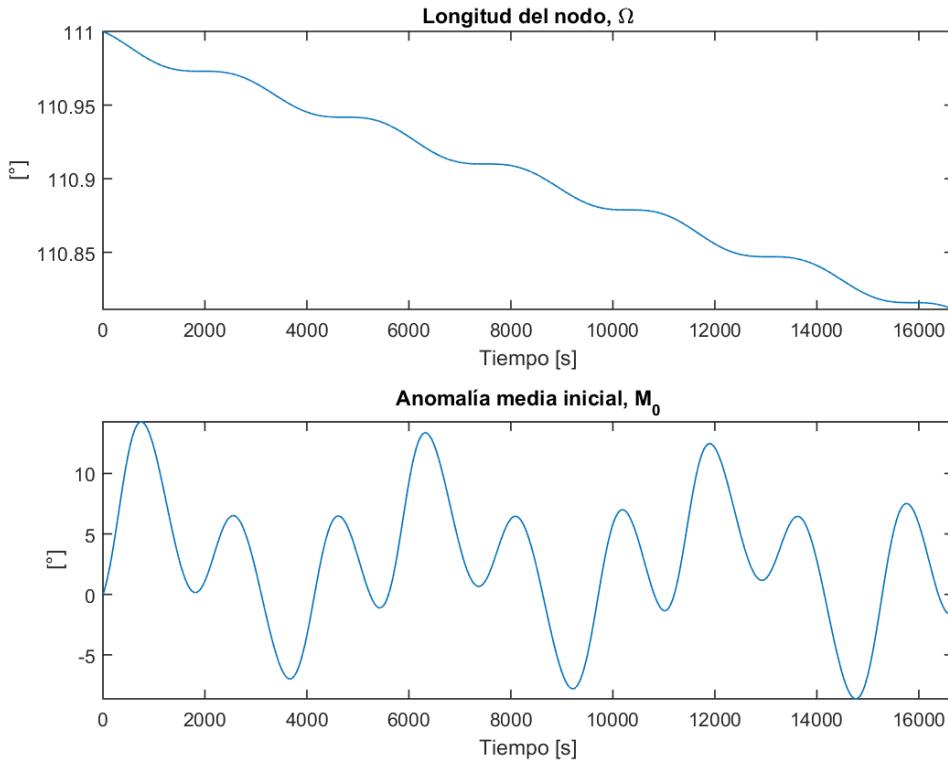


Figura 6.4: Variación de parámetros orbitales (III)

Debido a estas variaciones, es necesario idear algún método nuevo que permita calcular en última instancia el  $\Delta V$  y  $t_a$  requeridos para la maniobra orbital. En las siguientes secciones se presentan en primer lugar la solución clásica a este problema, que consiste en tomar un promedio temporal para cada parámetro; y luego algunos métodos de propagación de las ecuaciones diferenciales de movimiento sea a través de la posición y velocidad (mediante la segunda ley de Newton), o bien directamente de los elementos osculantes (mediante las ecuaciones de Lagrange).

## 6.4. Algoritmos

### 6.4.1. Promediar varias órbitas

Habitualmente, en la operación de un satélite, cuando se desea realizar una maniobra orbital, se tiene a disposición los datos de navegación de varias órbitas, a veces de varios días. La solución más sencilla para resolver el cálculo del  $\Delta V$  consiste en calcular los parámetros osculantes para cada instante de tiempo y luego realizar un promedio con todos los datos. Con estos datos también se puede conocer con exactitud el período orbital, y así predecir el próximo instante de apogeo. Con estos valores se utilizan las ecuaciones 2.21 y 6.1 para calcular el incremento de velocidad y el instante del impulso.

Esta tarea se hace en la estación terrena, con los datos enviados por el satélite, se hacen los cálculos y finalmente se envían los comandos manualmente para que sean ejecutados por el vehículo.

### 6.4.2. Propagar ecuaciones de Newton

Otra posibilidad es tomar la posición y velocidad en un cierto instante  $t_0$  de la órbita de inyección y utilizarlas como condiciones iniciales para propagar las 6 ecuaciones diferenciales de Newton del modelo, ecs. 2.27 y 2.28 (3 para la posición y 3 para la velocidad). En principio, incluyendo únicamente las fuerzas de perturbación producidas por el modelo gravitatorio en aproximación J2. Eventualmente, si se desea mayor precisión, se podrían incluir los términos de orden superior e incluso la resistencia atmosférica.

Esta forma de propagación también se conoce como *método de perturbaciones especiales de Cowell* y se suele utilizar para su implementación algún procedimiento numérico de la familia Runge-Kutta.

Con esto, el sistema a resolver queda formado por 6 ecuaciones diferenciales no-lineales:

$$\frac{dr_x}{dt} = v_x \quad (6.3)$$

$$\frac{dr_y}{dt} = v_y \quad (6.4)$$

$$\frac{dr_z}{dt} = v_z \quad (6.5)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} r_x - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{\mu}{r^2} \right) \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \left( 1 - 5 \left( \frac{r_z}{r} \right)^2 \right) \frac{r_x}{r} \quad (6.6)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} r_y - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{\mu}{r^2} \right) \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \left( 1 - 5 \left( \frac{r_z}{r} \right)^2 \right) \frac{r_y}{r} \quad (6.7)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} r_z - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{\mu}{r^2} \right) \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \left( 3 - 5 \left( \frac{r_z}{r} \right)^2 \right) \frac{r_z}{r} \quad (6.8)$$

donde  $\mathbf{r}^I = [r_x, r_y, r_z]^T$  y  $\mathbf{v}^I = [v_x, v_y, v_z]^T$  son las componentes en coordenadas inerciales de la posición y la velocidad inerciales respectivamente, y

$$[\mathbf{r}]_{(t=0)}^I = [\mathbf{r}_0]^I, \quad [\mathbf{v}]_{(t=0)}^I = [\mathbf{v}_0]^I$$

sus condiciones iniciales. Además,  $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$ , y  $R_e$  es el radio medio ecuatorial de la Tierra.

Para obtener el perigeo y apogeo reales de la órbita, se debe propagar buscando el mínimo y máximo respectivamente de la distancia propagada,  $\hat{r}(t)$ . En cuanto se alcanza al menos una vez cada uno de estos, se puede calcular el  $\Delta V$ .

$$\hat{r}_p = \min\{\hat{r}(t)\} \quad (6.9)$$

$$\hat{r}_a = \max\{\hat{r}(t)\} \quad (6.10)$$

En el instante de la propagación en que se alcanza el apogeo, se obtiene a su vez el instante en que se deberá ejecutar el impulso de la maniobra,  $t_a$ , por lo tanto:

$$\hat{t}_a = \max_t \{\hat{r}(t)\} \quad (6.11)$$

Cabe destacar que todo el cálculo se realiza en el instante de tiempo  $t_0$ , durante el tiempo que requiera la computadora para realizar la propagación, que es insignificante comparado al período orbital. En consecuencia, este método permite realizar la transferencia a la órbita final en el primer apogeo posterior al lanzamiento, lo que lo hace un método rápido. Además, todo el cálculo lo puede hacer internamente el satélite sin necesidad de interactuar con la estación terrena.

En la figura 6.5 se puede ver una línea de tiempo con los eventos del algoritmo. Allí se puede ver con mayor claridad la ubicación temporal de cada proceso. La duración de la propagación del modelo depende de la implementación que se lleve a cabo en la computadora, al igual que el cálculo de  $\Delta V$ ,  $\Delta t$ ,  $t_1$  y  $t_2$ .

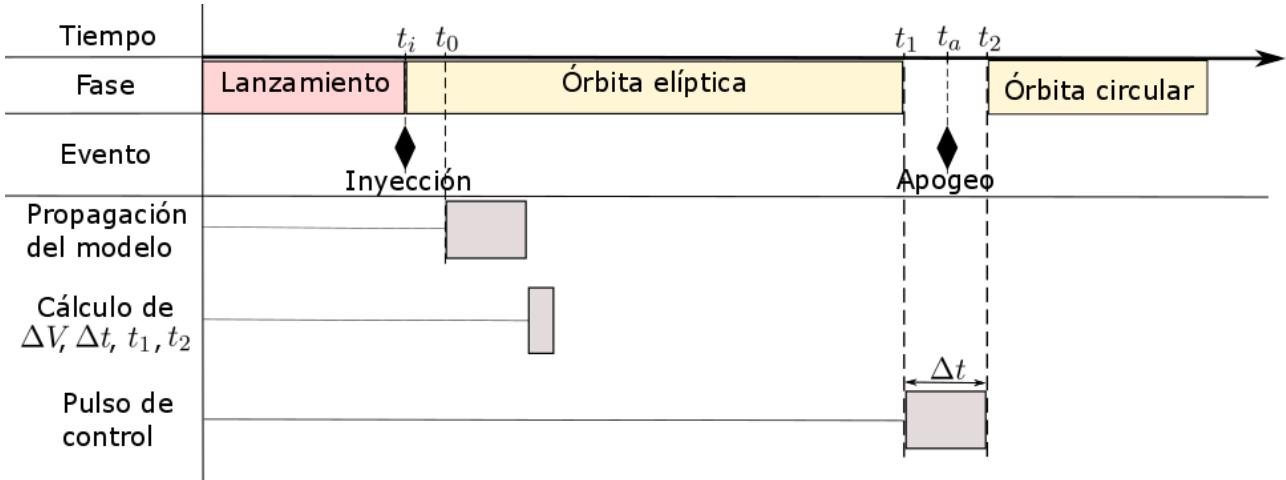


Figura 6.5: Línea de tiempo del algoritmo de propagación.

#### 6.4.3. Propagar ecuaciones de Lagrange

Como alternativa a las ecuaciones de Newton, para obtener los parámetros orbitales directamente, es posible propagar las 6 ecuaciones diferenciales de Lagrange aplicadas al potencial gravitatorio J2, ecs. 2.50-2.55 , a partir de condiciones iniciales tomadas para un determinado instante de tiempo inicial  $t_0$ . En este punto se toman las salidas del navegador en posición y velocidad y se utilizan las fórmulas de la sección 2.11.2 para obtener los equivalentes elementos orbitales.

El algoritmo en este caso es idéntico al del propagador de las ecuaciones de Newton, es decir, ecs. 6.9, 6.10 y 6.11, con la salvedad de que el radio esta vez se calcula a partir de los elementos orbitales mediante la ecuación 2.17.

En resumen, la diferencia es que en este caso se propagan los elementos orbitales en vez de la posición y velocidad directamente. Por lo tanto, el algoritmo 2 y la figura 6.5 también representan este caso.

En este caso, al igual que en el de Newton, todos los cálculos se realizan en la computadora en el instante  $t_0$ , y por lo tanto la corrección orbital puede ejecutarse en el apogeo inmediatamente posterior al lanzamiento.

---

#### Algoritmo 2 Propagar órbita mediante ecuaciones diferenciales

---

- 1: Inyección
  - 2: **function** PROPAGAR MODELO( $t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ )
  - 3:      $\hat{\mathbf{r}}(t) \leftarrow$  Resolver sistema de ecuaciones diferenciales (Newton o Lagrange)
  - 4:      $\hat{r}_p \leftarrow \min\{\hat{r}(t)\}$
  - 5:      $\hat{r}_a \leftarrow \max\{\hat{r}(t)\}$
  - 6:      $\hat{t}_a \leftarrow \max_t\{\hat{r}(t)\}$
  - 7:     **return**  $\hat{r}_p, \hat{r}_a, \hat{t}_a$
  - 8: **end function**
  - 9:  $\Delta V \leftarrow fun(\hat{r}_p, \hat{r}_a)$  , ec. 2.21
  - 10:  $\Delta t \leftarrow fun(\Delta V)$ , ec. 6.2
  - 11:  $t_1 \leftarrow \hat{t}_a - \Delta t/2$
  - 12:  $t_2 \leftarrow \hat{t}_a + \Delta t/2$
  - 13: Ejecución del pulso en el apogeo
-

#### 6.4.4. Propagar ecuaciones de Lagrange reducidas

Al mirar las ecuaciones de Lagrange, ecs. 2.50-2.55, lo primero que se puede destacar es que la longitud del nodo,  $\Omega$ , no contribuye en la evolución de ningún otro parámetro, i.e. no aparece en ninguna ecuación diferencial. Además, como no es necesario conocer la evolución de este parámetro, se puede descartar completamente la ecuación 2.53 del algoritmo propagador.

Por otra parte, haciendo simulaciones se encontró que la variación en el parámetro de inclinación, a pesar de contribuir en el resto de las ecuaciones diferenciales, no es influyente en el resultado final. Este resultado permite reemplazar la variación de la inclinación,  $i(t)$ , por una constante igual a la inclinación inicial,  $i_0$ , y además eliminar la ecuación diferencial de este parámetro, ec. 2.52. Por esto, se define:

$$s_i \triangleq \sin i_0 = cte, \quad c_i \triangleq \cos i_0 = cte$$

Con estas modificaciones, el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver queda formado por las ecuaciones

$$\frac{da}{dt} = -3J_2n \frac{a^4}{br^2} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \left[ e \sin f (1 - 3 \sin^2 \vartheta s_i^2) + \frac{p}{r} \sin(2\vartheta) s_i^2 \right] \quad (6.12)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{3}{2} J_2 n \frac{a^2}{br} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \left[ \frac{p}{r} \sin f (1 - 3 \sin^2 \vartheta s_i^2) + (e + \cos f (2 + e \cos f)) \sin(2\vartheta) s_i^2 \right] \quad (6.13)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2} J_2 n \frac{p}{r^2 e \eta^3} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 [2r e c_i^2 \sin^2 \vartheta - (p + r) \sin f s_i^2 \sin(2\vartheta) + p \cos f (1 - 3s_i^2 \sin^2 \vartheta)] \quad (6.14)$$

$$\frac{dM_0}{dt} = \frac{3}{2} J_2 n \frac{p}{r^2 e \eta^2} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 [(p + r) \sin f s_i^2 \sin(2\vartheta) + (2re - p \cos f)(1 - 3s_i^2 \sin^2 \vartheta)] \quad (6.15)$$

donde al igual que en la sección 2.15,

$$\eta \triangleq \sqrt{1 - e^2};$$

$f$  es la anomalía verdadera, y se obtiene a partir de la anomalía media mediante la ecuación de Kepler, ec. 2.12, y de las fórmulas 2.8;

$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$  es el movimiento medio, definido en ec. 2.10;

$p = a(1 - e^2)$  es el *semi-latus rectum*, definido en ec. 2.5;

$r = \frac{p}{1+e\cos f}$  es el radio, definido en ec. 2.17;

$b = a\sqrt{1 - e^2}$  es el semi-eje menor de la órbita, definido en ec. 2.4;

$\vartheta = \omega + f$ .

Para calcular la anomalía verdadera,  $f$ , se calcula primero la anomalía media,  $M$ , mediante la ecuación 2.9 a partir del valor propagado de  $M_0$ . Sin embargo, se encontró al realizar las simulaciones, que el propagador funciona mejor al utilizar en la ecuación 2.9 el movimiento medio,  $n$ , a partir del promedio del semi-eje mayor,  $\bar{a}$ , y no de su valor instantáneo.

$$\bar{a} = \frac{1}{T_{orb}} \int_{t_0}^{t_0+T_{orb}} a(t) dt$$

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}}$$

$$M = M_0 + \bar{n}t$$

Luego, se debe resolver numéricamente la ecuación de Kepler, ec 2.12 para llegar a la anomalía excéntrica y finalmente por medio de las fórmulas 2.8, calcular la anomalía verdadera,  $f$ .

#### 6.4.5. Tomar nota en 1 órbita y media

Si se permite orbitar libremente al vehículo durante una órbita y media, es posible tomar nota de los valores alcanzados por el perigeo y apogeo en tiempo real, almacenando el mínimo y máximo del radio vector respectivamente. Si  $r(t)$  es el módulo de la posición  $\mathbf{r}$  a la salida del navegador, entonces al avanzar en su trayectoria eventualmente el satélite alcanzará un mínimo de  $r(t)$ , que se corresponde con el perigeo  $r_p$ , y un máximo, que se corresponde con  $r_a$ .

$$r_p = \min\{r(t)\}$$

$$r_a = \max\{r(t)\}$$

$$t_p = \min_t\{r(t)\}$$

$$t_a = \max_t\{r(t)\}$$

El intervalo de tiempo transcurrido entre el paso por el perigeo y luego por el apogeo es:

$$\Delta_{p \rightarrow a} = t_a - t_p$$

Por otro lado, el tiempo desde el apogeo hasta el perigeo es:

$$\Delta_{a \rightarrow p} = t_p - t_a$$

Estos intervalos no resultan exactamente iguales, debido a las perturbaciones que sufre la órbita, sin embargo, lo que si se cumple es que el período orbital es la suma de ambos:

$$T_{orb} = \Delta_{p \rightarrow a} + \Delta_{a \rightarrow p} \quad (6.16)$$

Cuando la inyección se da en una anomalía anterior al perigeo, entonces el primer evento a ocurrir es justamente el primer perigeo, en  $t_{p1}$ . Por lo tanto, al llegar posteriormente al primer apogeo, en  $t_{a1}$ , el intervalo a calcular es  $\Delta_{p \rightarrow a} = t_{a1} - t_{p1}$ . Luego, se llegará al segundo perigeo, en el instante  $t_{p2}$  y se podrá predecir el instante del próximo apogeo como:

$$\hat{t}_{a2} = t_{p2} + \Delta_{p \rightarrow a}$$

En la figura 6.6 se esquematiza la línea de tiempo del algoritmo.

Si por el contrario la inyección se da en un punto posterior al perigeo, entonces el primer evento a ocurrir es el apogeo, y por lo tanto al llegar luego al perigeo el intervalo que se calculará será  $\Delta_{a \rightarrow p}$ , pero este no permite calcular directamente el siguiente apogeo, sin conocer  $T_{orb}$ . En este caso para poder realizar la maniobra lo antes posible, en el próximo apogeo, es necesario detectar el instante en el que se completa un período orbital. Esto se consigue monitoreando por ejemplo el radio vector,  $r$ . Al completar una órbita exacta, el radio tomará el mismo valor que en el punto de inyección y la derivada tendrá el mismo signo.

$$r(T_{orb}) = r(t_0), \quad \frac{dr}{dt}(T_{orb}) = \frac{dr}{dt}(t_0)$$

Por lo tanto, se puede detectar este punto, anotando el valor de  $T_{orb}$ . Luego, conociendo el tiempo de paso por el primer apogeo, el próximo se predice que ocurrirá en:

$$\hat{t}_{a2} = t_{a1} + T_{orb}$$

En la figura 6.7 se esquematiza la línea de tiempo del algoritmo para este caso.

Cabe destacar que sea la inyección antes o después del perigeo, siempre es cercana a este punto, y por lo tanto la duración máxima de la estrategia, como se puede ver en la línea de tiempo, es de aproximadamente una órbita y media.

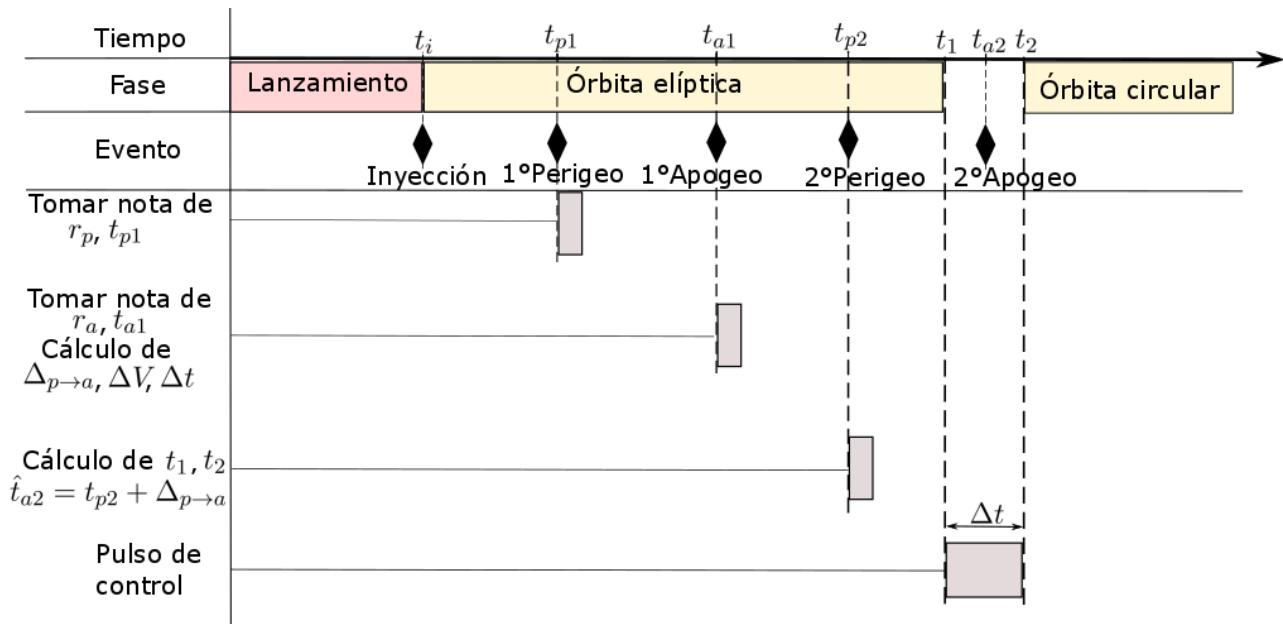


Figura 6.6: Algoritmo de tomar nota. Inyección previa al perigeo.

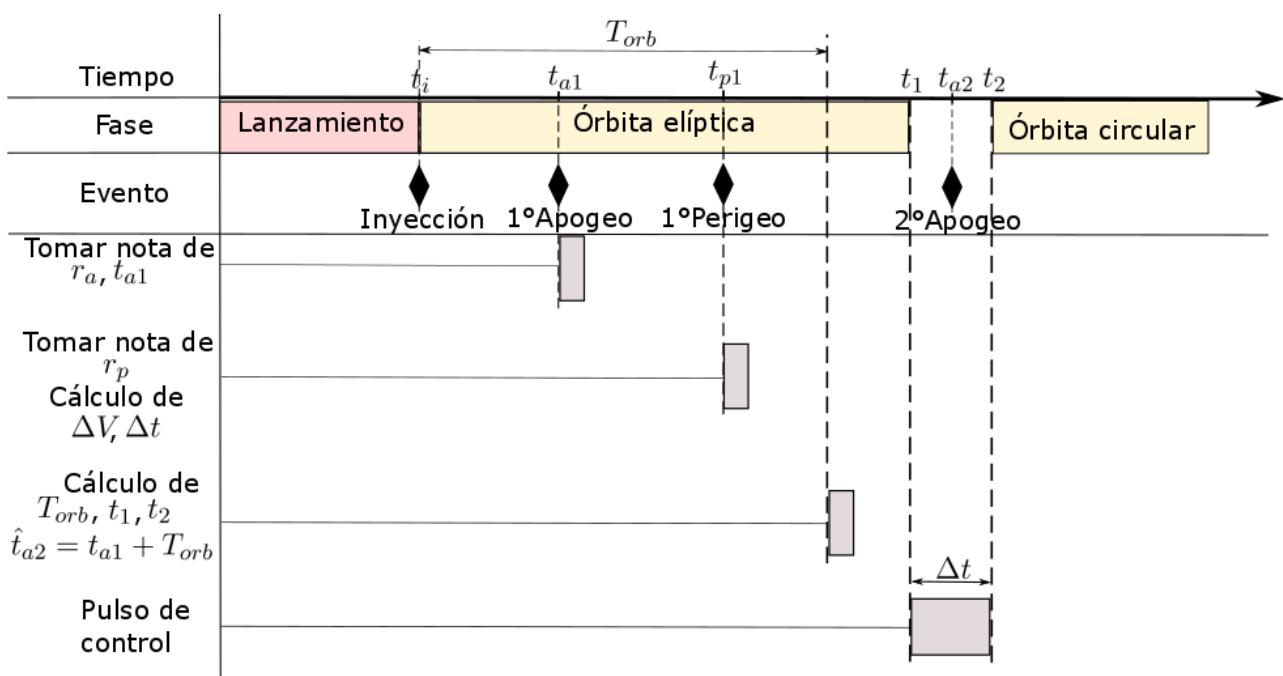


Figura 6.7: Algoritmo de tomar nota. Inyección posterior al perigeo.

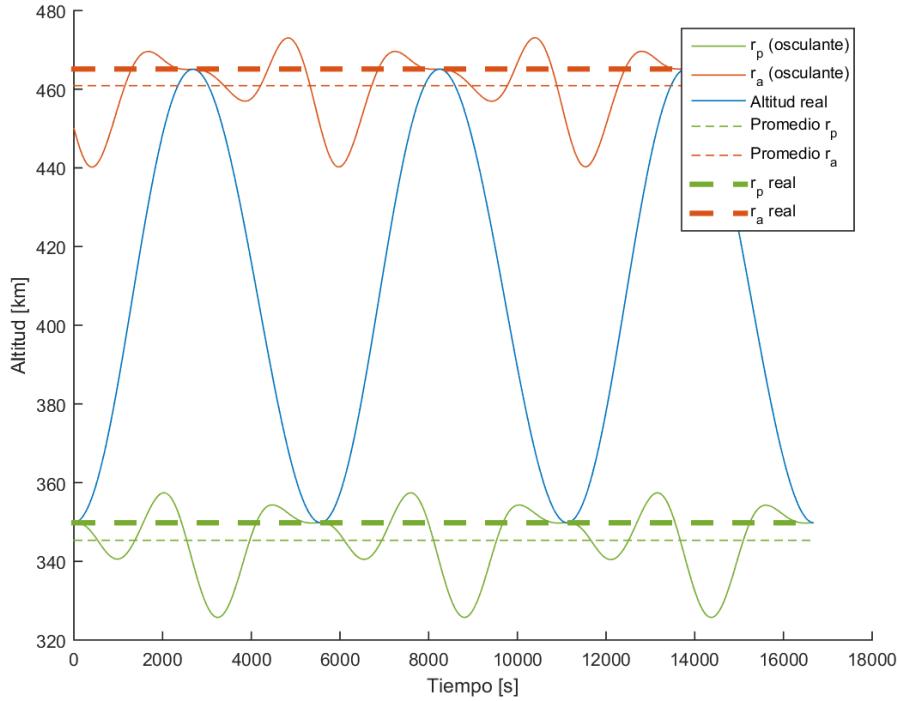


Figura 6.8: Valores osculantes-promedio-reales

## 6.5. Errores

### 6.5.1. Promedio

Mediante simulaciones se constató que la diferencia entre el valor real del radio de perigeo y el promedio tomado luego de varias órbitas es de aproximadamente 5km. El mismo error se encuentra en el caso del apogeo.

No obstante, ambos errores son o bien mayores al promedio, o bien menores en conjunto, pero no uno y uno. Como se puede ver en la figura 6.8, la forma de onda de  $r_p$  y  $r_a$  osculantes son iguales, y el valor real sucede en el mismo punto de la curva para cada caso. Allí se puede ver, por ejemplo, que en ambos casos el valor promedio es menor al valor real. En la figura se ha restado el radio medio de la Tierra a todas las señales para visualizar números más comparables.

Por lo tanto el incremento de velocidad que se calcula con estos valores resulta muy similar al  $\Delta V$  que se calcula con los valores reales. La diferencia entre estos dos es de aproximadamente 0,3 %. Un error de esta magnitud en la velocidad se corresponde con apenas unos 100 m de error en el radio de la órbita final.

### 6.5.2. Newton

Si se toma las integrales de la segunda ley de Newton para resolver la posición y la velocidad, ecs. 2.29 y 2.30, y se le incorpora un error en las condiciones iniciales así como también en la fuerza, se obtiene:

$$[\mathbf{v}]^I_{(t)} + \varepsilon v_{(t)} = [\mathbf{v}_0]^I + \varepsilon v_0 + \int_0^t \frac{[\mathbf{F}]^I + \varepsilon F_{(t)}}{m} dt \quad (6.17)$$

$$[\mathbf{r}]_{(t)}^I + \varepsilon r_{(t)} = [\mathbf{r}_0]^I + \varepsilon r_0 + \int_0^t ([\mathbf{v}]^I + \varepsilon v_{(t)}) dt \quad (6.18)$$

Cancelando los términos de las igualdades de las ecuaciones 2.29 y 2.30, se puede obtener las fórmulas de los errores:

$$\varepsilon v_{(t)} = \varepsilon v_0 + \int_0^t \frac{\varepsilon F_{(t)}}{m} dt \quad (6.19)$$

$$\varepsilon r_{(t)} = \varepsilon r_0 + \int_0^t (\varepsilon v_{(t)}) dt \quad (6.20)$$

La fuerza que se ejerce sobre el cuerpo es esencialmente la gravedad, por lo tanto depende de la posición  $\mathbf{r}$ .

Dado que este es solo un cálculo aproximado, se harán las cuentas con la norma de la posición,  $r$ , velocidad,  $v$ , y de la fuerza,  $F$ .

El error propagado en la fórmula de la gravedad a partir del error en posición puede ser calculado mediante:

$$\begin{aligned} \varepsilon F_{(t)} &= \frac{\partial F}{\partial r} \varepsilon r_{(t)} \\ \varepsilon F_{(t)} &= -2 \frac{\mu}{r^3} m \varepsilon r_{(t)} = -2F \frac{\varepsilon r_{(t)}}{r} \end{aligned}$$

donde se consideró el error en el conocimiento de la masa  $m$  insignificante. Volviendo a la ecuación del error, ec. 6.19, queda:

$$\varepsilon v_{(t)} = \varepsilon v_0 - \int_0^t \frac{2F}{m} \frac{\varepsilon r_{(t)}}{r} dt$$

Se toma como aproximación que el radio es constante y la Tierra es perfectamente esférica, y por lo tanto también lo es la gravedad  $F/m = g_0$ . En este caso resulta:

$$\begin{cases} \varepsilon v_{(t)} = \varepsilon v_0 - \frac{2g_0}{r} \int_0^t (\varepsilon r_{(t)}) dt \\ \varepsilon r_{(t)} = \varepsilon r_0 + \int_0^t (\varepsilon v_{(t)}) dt \end{cases}$$

Estas ecuaciones integrales pueden escribirse en forma diferencial como

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon v_{(t)}}{dt} = -\frac{2g_0}{r} \varepsilon r_{(t)} \\ \frac{d\varepsilon r_{(t)}}{dt} = \varepsilon v_{(t)} \end{cases}$$

Si se deriva la primer ecuación nuevamente:

$$\frac{d^2\varepsilon v_{(t)}}{dt^2} = -\frac{2g_0}{r} \frac{d\varepsilon r_{(t)}}{dt} = -\frac{2g_0}{r} \varepsilon v_{(t)}$$

Lo mismo sucede al derivar por segunda vez la segunda ecuación

$$\frac{d^2\varepsilon r_{(t)}}{dt^2} = \frac{d\varepsilon v_{(t)}}{dt} = -\frac{2g_0}{r} \varepsilon r_{(t)}$$

Por lo tanto, las soluciones en ambos casos son funciones trigonométricas del tipo:

$$\varepsilon r_{(t)} = A \sin(wt + \beta)$$

con

$$w = \sqrt{\frac{2g_0}{r}}$$

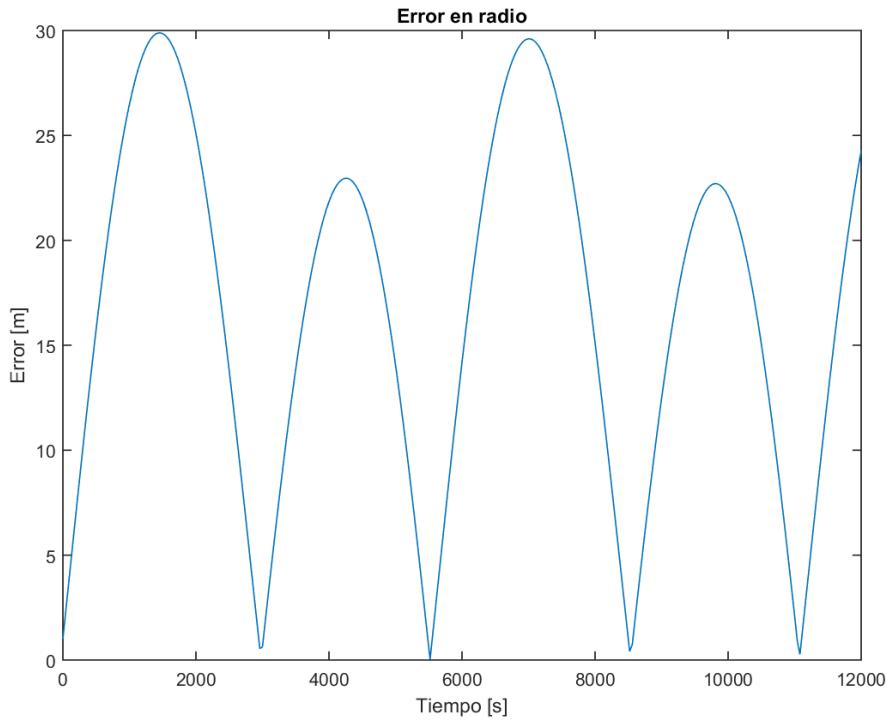


Figura 6.9: Error en el módulo de la posición

$$\beta = \arctan\left(\frac{w}{\varepsilon v_0}\right)$$

$$A = \frac{\varepsilon r_0}{\sin \beta}$$

Por ejemplo, para un radio de  $r = 450$  km, y errores iniciales tomados de la salida del navegador (tablas 4.5 y 4.6) de  $\varepsilon r_0 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 1.732$  m y  $\varepsilon v_0 = 0,03$ , la amplitud de los errores  $\varepsilon r_{(t)}$  y  $\varepsilon v_{(t)}$  resultan respectivamente:

$$A_r = 30.7 \text{ m}$$

$$A_v = A_r w = 0.052 \text{ m s}^{-1}$$

Estos valores sirven como cotas para el error final del algoritmo.

En la figura 6.9 se ve un gráfico del error cometido en el cálculo del módulo de la posición debido a un error de 1 m en las condiciones iniciales de posición y  $0.03 \text{ m s}^{-1}$  en las de velocidad. Para calcular este error, primero se simula la trayectoria con condiciones iniciales ideales, almacenando el resultado. Luego se simula con los errores en las condiciones iniciales y se almacena el resultado en otra variable. El error graficado es la diferencia entre ambos resultados almacenados.

De igual manera, la figura 6.10 muestra el error en el módulo de la velocidad, así como también el error en cada componente de la velocidad por separado. El error en el módulo de la velocidad es la diferencia entre  $v$  de la simulación con condiciones ideales perfectas, y  $v$  con error en las condiciones iniciales. Por lo tanto se aclara que este error no es necesariamente la norma de los errores en las distintas componentes por separado.

Mediante simulaciones, se calculó el error en el  $\Delta V$  deducido con este propagador, a partir de condiciones iniciales con error como se explicó anteriormente. El error en el apogeo es de 21.9 m, mientras que en el perigeo de -5.4 m. La diferencia con el  $\Delta V$  calculado sin errores es de apenas

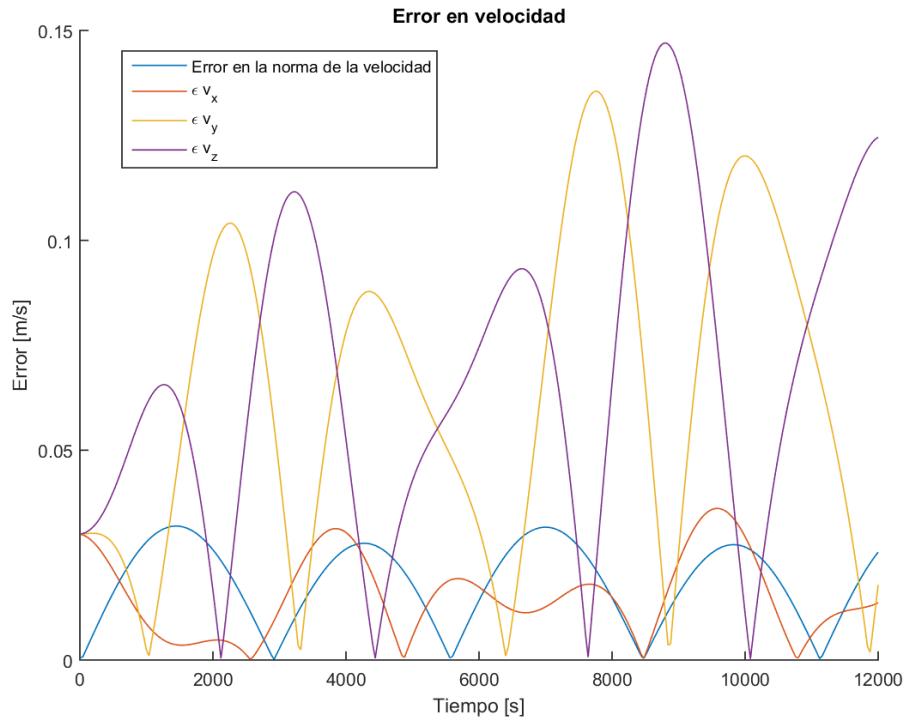


Figura 6.10: Error en la velocidad

0.023 %. La estimación del instante de apogeo tiene un error del orden del paso de integración numérica elegido para la simulación, con lo cual es imperceptible.

Al aplicar el pulso de control con los parámetros estimados, la diferencia en la órbita final es insignificante.

### 6.5.3. Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange son en el fondo equivalentes a las de Newton, y por lo tanto al hacer las conversiones necesarias entre parámetros orbitales y posición y velocidad, los resultados que se obtienen son muy similares. Esto se constató con simulaciones, alcanzando los mismos errores que con el método de Newton.

### 6.5.4. Tomar nota

En este caso se toman los valores reales de apogeo y perigeo al pasar en tiempo real por estos puntos, una órbita antes de ejecutar el pulso. Por lo tanto el error solo puede deberse a efectos de las perturbaciones entre una órbita y la siguiente, pero esto es prácticamente despreciable. Además, el tiempo de apogeo desde el último perigeo no se modifica significativamente entre dos órbitas, con lo cual este error tampoco se considera. En conclusión, el error de este método se debe únicamente al error a la salida del navegador, 1m en cada componente, y por lo tanto en módulo:  $\varepsilon r = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 1,73\text{m}$ .

En la tabla 6.3 se resumen los errores para cada algoritmo descripto en esta sección. El error en el radio de la órbita final, luego de ejecutar el impulso de control, se ubica en la última columna,

| Algoritmo  | $\varepsilon r_a$ [m] | $\varepsilon r_p$ [m] | $\varepsilon t_a$ [s] | $\varepsilon \Delta V$ [%] | $\varepsilon r_{circular}$ |
|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------------|----------------------------|
| Promedio   | 4191                  | 4450                  | 0                     | 0.32                       | $\pm 5\text{km}$           |
| Newton     | 21.9                  | -5.4                  | $T_{sp}$              | 0.023                      | $\pm 5\text{km}$           |
| Lagrange   | 15.6                  | -5.4                  | $T_{sp}$              | 0.018                      | $\pm 5\text{km}$           |
| Tomar nota | 1.73                  | 1.73                  | $T_{sn}$              | $\approx 0$                | $\pm 5\text{km}$           |

Cuadro 6.3: Errores en los algoritmos.  $T_{sp}$ : paso de integración en la propagación.  $T_{sn}$ : período de muestreo del navegador

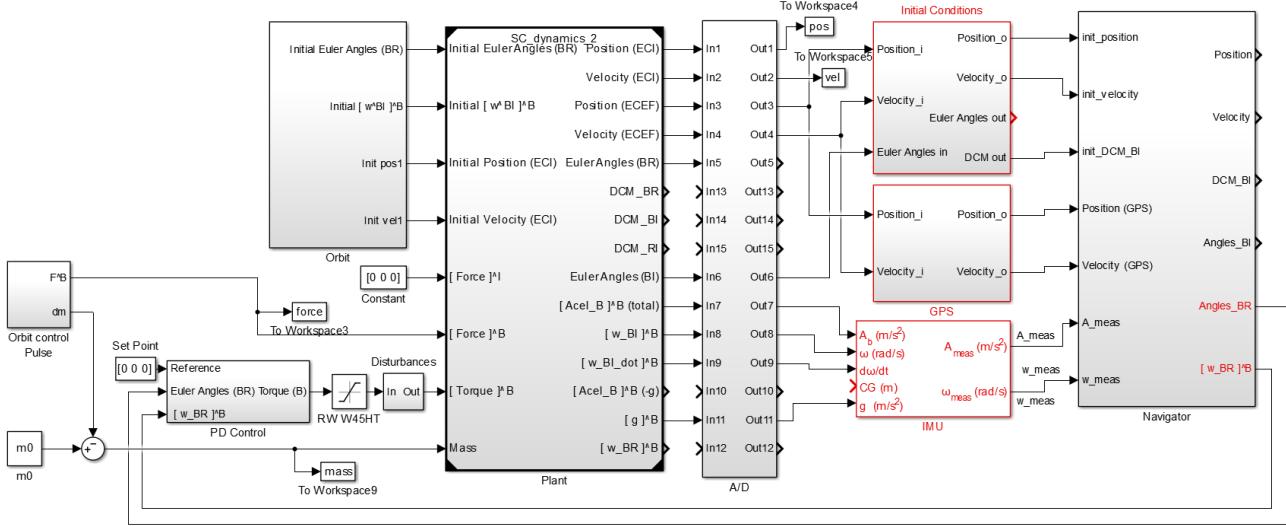


Figura 6.11: Implementación en Simulink de la circularización

$\varepsilon r_{circular}$ , esto es la diferencia entre el radio final (que no se mantiene exactamente constante) y el radio deseado de 465km.

## 6.6. Simulación

Para simular los algoritmos se tomó el simulador implementado en el capítulo 3, el navegador del capítulo 4 y el control de orientación del capítulo 5, modelando sensores y actuadores, tal como en la última simulación de la sección 5.4.3.

Como la diferencia de error entre los distintos algoritmos es insignificante, se utilizó directamente en la simulación el pulso de control con los valores ideales. Por lo tanto, en primer lugar se corrió una simulación sin el control orbital, y se anotaron los valores de  $r_p$ ,  $r_a$  y  $t_a$ . Con esto, se calculó el  $\Delta V$ ,  $\Delta t$ ,  $t_1$  y  $t_2$ , y se construyó el pulso de control. En una segunda simulación, se incorporó este pulso y se graficaron los resultados.

En esta ocasión, se incorporó el impulso de control orbital a la entrada de la planta, como una fuerza en la dirección del eje  $\hat{b}_x$  de la terna de cuerpo, la cual al estar alineada continuamente con la terna RPY (gracias al control de orientación PD), es entonces la misma dirección de la velocidad en el apogeo. Los bloques de Simulink pueden verse en la figura 6.11. El bloque que genera el pulso y la variación de la masa del vehículo se puede ver en la figura 6.12.

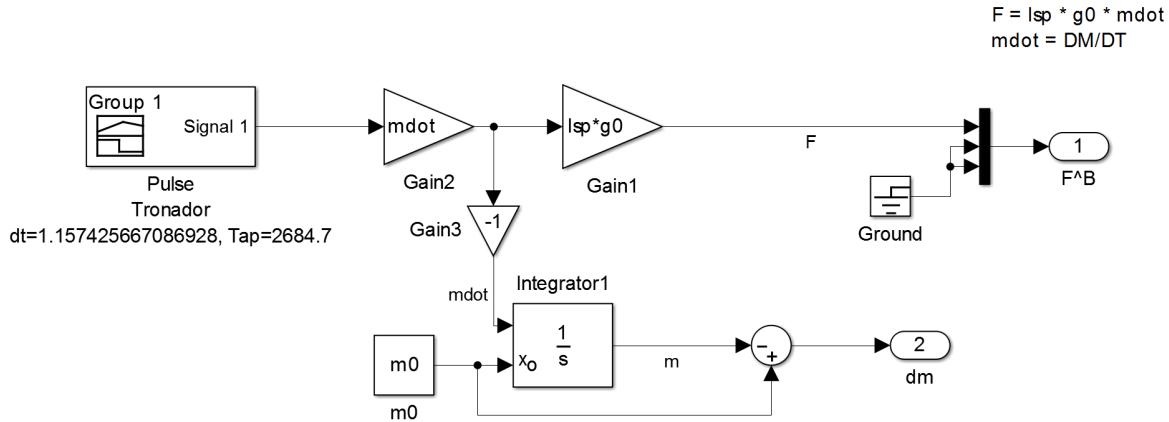


Figura 6.12: Generación del pulso de control y la variación de la masa

## 6.7. Resultados

Se debe tener en cuenta que incluso con una excentricidad nula, las perturbaciones del modelo gravitatorio impiden que el radio se mantenga constante. Este último presenta variaciones del orden de  $\pm 7,5$ km de amplitud. Con el simulador se introdujeron las mismas condiciones iniciales de la tabla 6.1, exceptuando la excentricidad, cuyo valor fue 0. En la figura 6.13 se puede ver el radio, perigeo y apogeo de esta simulación. La altitud es el resultado de restarle el radio terrestre,  $R_e$ , al radio vector de la posición. Con rigurosidad, esta no es exactamente la altitud, ya que el radio terrestre depende de la latitud de la posición y en este caso se utilizó la constante  $R_e$ , radio medio ecuatorial. Sin embargo, el único objetivo en este caso es comparar las diferencias y no el valor exacto de la altitud respecto a la superficie terrestre. Habiendo hecho esta aclaración, en los resultados se hablará de altitud, sabiendo que no es exactamente la altitud respecto a la superficie terrestre real, sino a un radio terrestre constante de  $R_e$ .

Además, en la figura 6.14 se puede ver la variación de la excentricidad a lo largo del tiempo, a pesar de la nulidad en la condición inicial.

### 6.7.1. Lanzador

Por otro lado, la aplicación del pulso de control en el simulador presentado recientemente, para el caso en que se utilice el motor de la última etapa del lanzador Tronador, tabla 6.2, se puede ver en la figura 6.15. Allí se ve que la circularización finaliza en una órbita con un radio que varía un máximo de 10km aproximadamente ( $\pm 5$ km). Este es un buen resultado, considerando el gráfico visto al principio de esta sección (fig. 6.13), donde se simuló una órbita con condiciones iniciales perfectamente circulares ( $e_0 = 0$ ).

En esta misma simulación, la figura 6.16 muestra el pulso de control ejecutado en el motor de propulsión y la evolución de la masa de combustible utilizada.

### 6.7.2. Satélite

En el caso en que la maniobra es realizada por el satélite, con el motor del SARE de la tabla 6.2, se calcularon los tiempos del pulso de control y se utilizó nuevamente el simulador. El resultado en la altitud es prácticamente idéntico al obtenido para el caso del Tronador y por lo tanto no se replicará en este apartado.

La figura 6.17 muestra el pulso de control ejecutado en el motor de propulsión y la evolución de la masa de combustible utilizada.

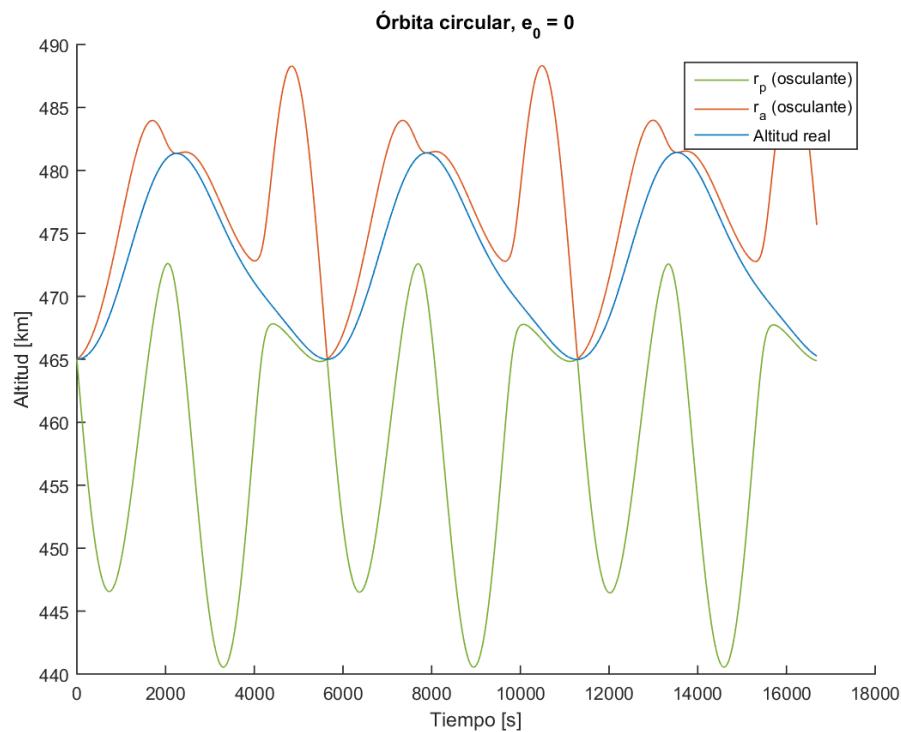


Figura 6.13: Altitud, perigeo y apogeo de una órbita circular

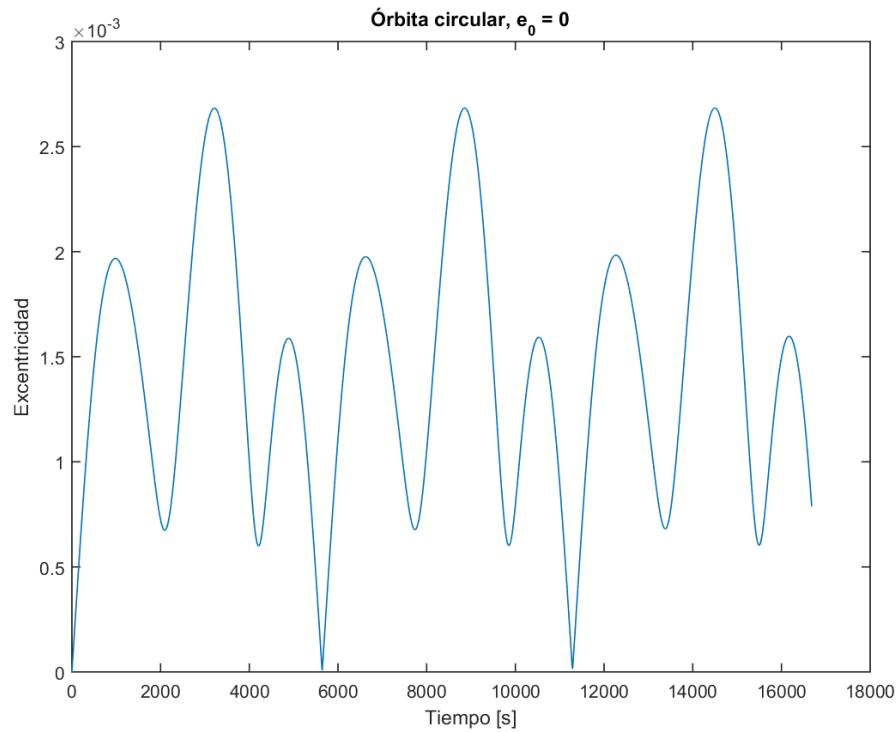


Figura 6.14: Evolución de la excentricidad de una órbita circular

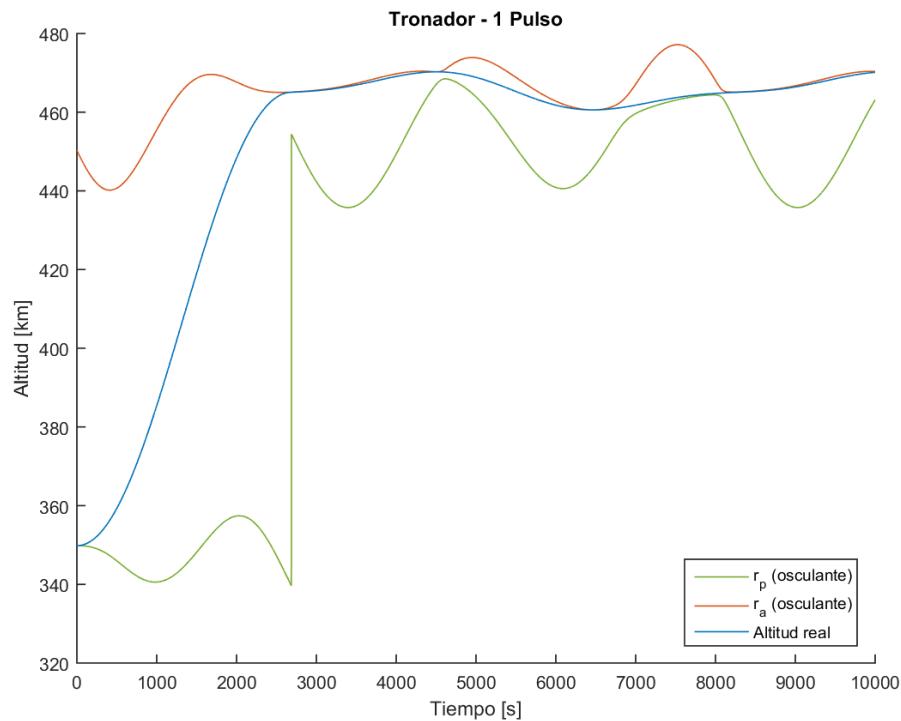


Figura 6.15: Resultado de la transferencia orbital

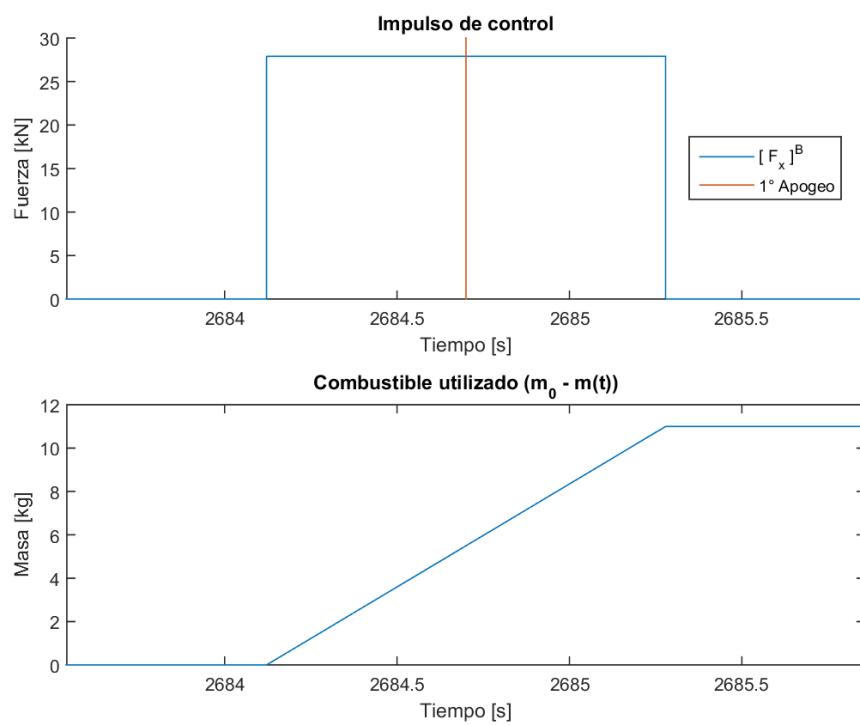


Figura 6.16: Pulso de control y evolución de la masa

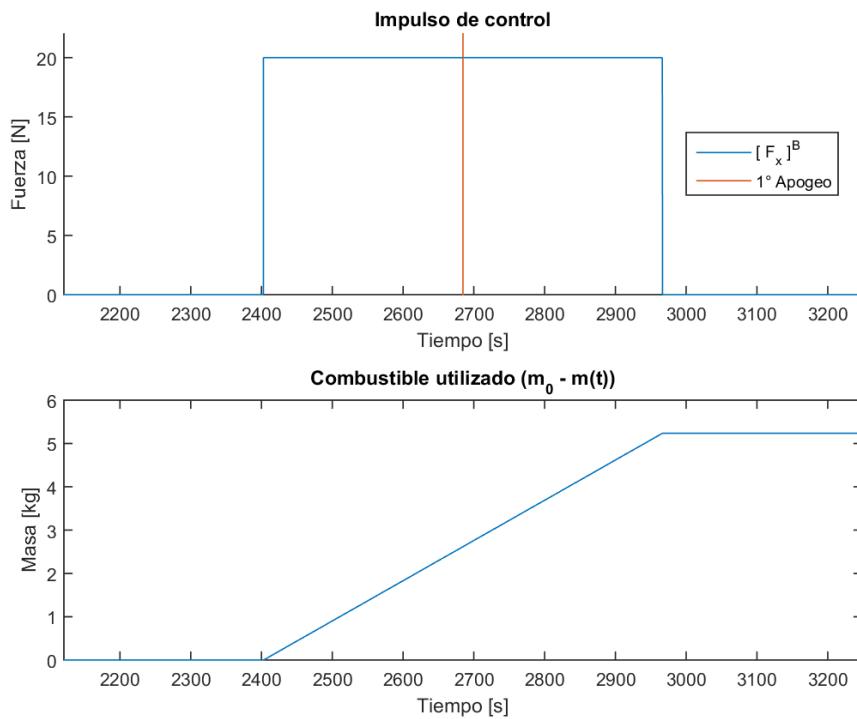


Figura 6.17: Pulso de control y evolución de la masa

| Vehículo | $\Delta m$ [kg] | $\Delta t$ [s] |
|----------|-----------------|----------------|
| Tronador | 11              | 1.15           |
| SARE     | 5.24            | 563.92         |

Cuadro 6.4: Combustible requerido y ancho del pulso de control en cada caso

En la tabla 6.4 se resume la cantidad de combustible requerido en cada caso y el ancho del pulso a aplicar en el motor.

### 6.7.3. Evolución del error de orientación

En la figura 6.18 se grafica el desvío (en  $2\sigma$ ) del estimador de orientación del navegador durante la maniobra. En este caso se utilizó el modelo de sensor inercial ADIS 16445. Se puede ver que al ejecutar el pulso, existe una caída drástica del error de estimación, que, una vez finalizado el pulso, vuelve a aumentar.

La figura 6.19 muestra lo análogo para el sensor ADIS 16485, mientras que la figura 6.20 es el caso del sensor de Honeywell, HG1700.

Los resultados en este sentido son idénticos tanto en el caso del lanzador como del satélite.

La influencia de este error en el resultado de la órbita final es bastante poca. Con cualquiera de los sensores simulados el error en el radio final de la órbita circular resulta de 10km igualmente ( $\pm 5\text{km}$ ).

Modificando a mano el error en orientación se encuentra que recién a partir de un error de  $5^\circ$  en pitch y yaw, el error final aumenta apreciablemente, en 1km. Con un error más elevado, de  $10^\circ$ , la amplitud final de este error aumenta en 3km. El error en roll no influye debido a que no afecta la dirección ni el módulo del incremento de velocidad producido, y por lo tanto no afecta la maniobra.

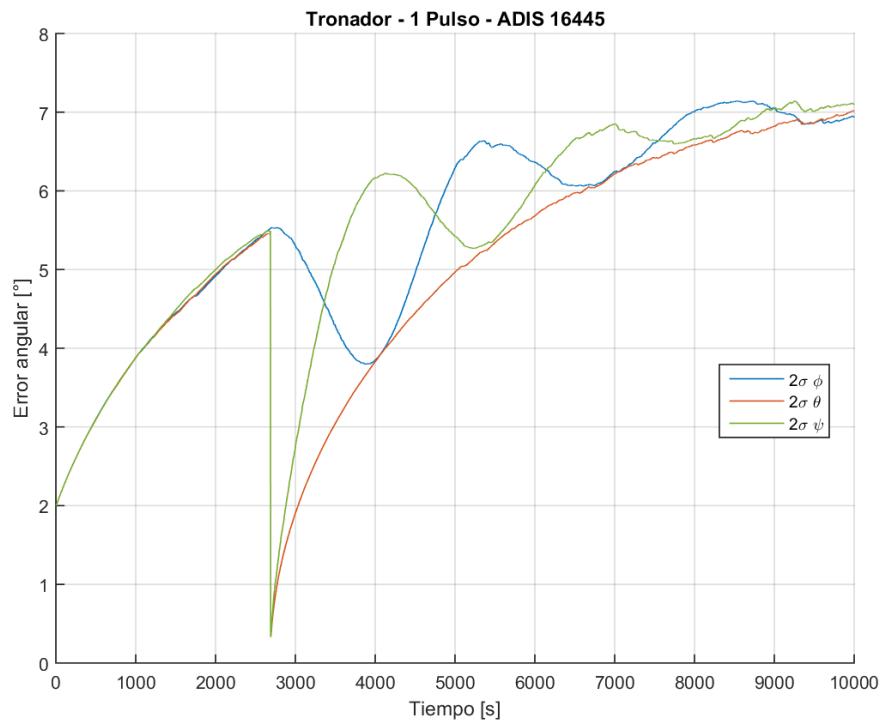


Figura 6.18: Evolución del error angular. ADIS 16445



Figura 6.19: Evolución del error angular. ADIS 16485

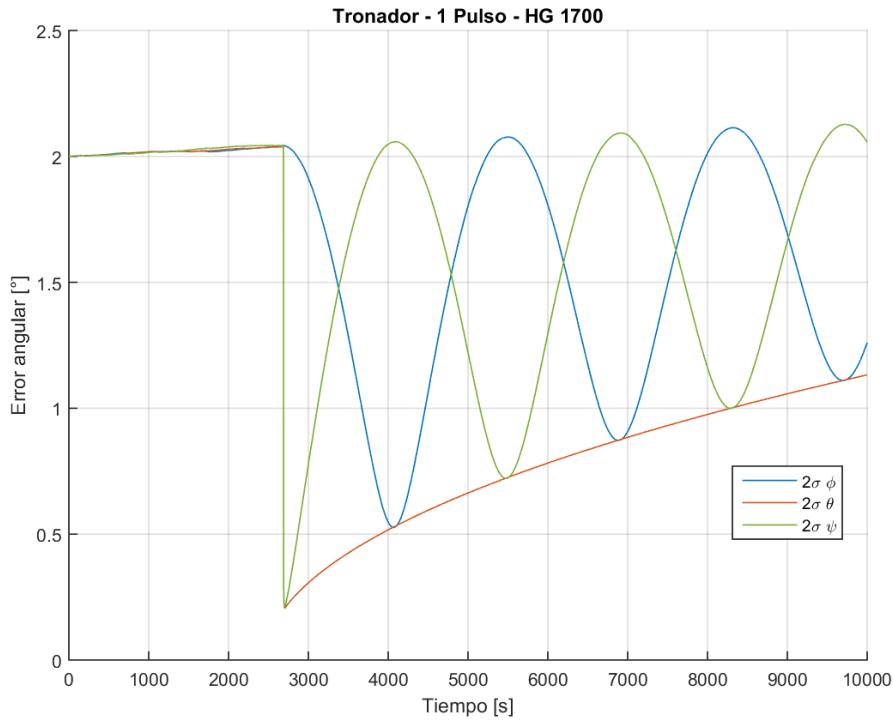


Figura 6.20: Evolución del error angular. HG 1700

en ningún sentido.

## 6.8. Conclusiones

### 6.8.1. Estrategias

La estrategia tradicional de ascenso directo posee la desventaja de un consumo elevado de combustible, aunque el beneficio de un menor riesgo asociado a la maniobra. Esto se debe en primer lugar a que es el método más rápido para alcanzar la órbita objetivo y por lo tanto se minimiza el tiempo en las alturas más bajas, que son las más hostiles por los efectos atmosféricos y perturbaciones magnéticas.

Por otra parte, con la estrategia de Hohmann la cantidad de combustible requerido es menor, y el tiempo requerido en la órbita de transferencia (órbita de inyección inicial) depende del algoritmo utilizado para calcular el ancho del pulso de corrección orbital y el instante de ejecución, pero será no menor a medio período orbital y no mayor a una órbita y media.

### 6.8.2. Algoritmos

El caso más rápido en la estrategia de Hohmann se obtiene cuando el pulso se calcula mediante la propagación del modelo, en un instante posterior a la inyección. No obstante, la desventaja de esto es el uso de recursos de la computadora de a bordo, y en consecuencia una cierta probabilidad de falla de hardware.

En este sentido, el método con menor uso de recursos computacionales es el de tomar nota al pasar por perigeo y apogeo. No obstante, este es el método más largo, ya que requiere de aproximadamente una órbita y media para ejecutar el algoritmo. Además, debido a que requiere aproximadamente la

| Estrategia      | Algoritmo   | Duración | Ventaja         | Desventaja             |
|-----------------|-------------|----------|-----------------|------------------------|
| Ascenso directo | -           | Corta    | Mínimo riesgo   | Consumo de combustible |
| Hohmann         | Propagación | Media    | Hohmann rápido  | Uso de recursos        |
| Hohmann         | Tomar nota  | Larga    | Uso de recursos | Ambiente hostil        |

Cuadro 6.5: Resumen de estrategias

misma duración que el algoritmo de tomar el promedio de una órbita y posee menor error, este último algoritmo (tomar promedio) puede descartarse frente al primero (tomar nota).

En conclusión, si se admite que el satélite realice la maniobra (requiere 5kg de uso de combustible) y que este orbite libremente durante una órbita y media, entonces lo mejor sería utilizar el algoritmo de tomar nota. Si por el contrario, se prefiere que el vehículo lanzador ejecute enteramente la transferencia (requiere 11kg de combustible), existen dos opciones. Si se admite orbitar libremente durante una órbita y media al conjunto vehículo+satélite acoplados, entonces el mejor algoritmo para realizar la maniobra es aquel en que se toma nota de perigeo y apogeo. Si por el contrario se desea realizar la maniobra lo antes posible, pero sin el consumo elevado del ascenso directo, el mejor algoritmo entonces es el de propagación del modelo.

Por último, como se vio en la tabla 6.3 de la sección 6.5, el error en la órbita final es el mismo luego de la utilización de cualquiera de los algoritmos. Por lo tanto, la precisión no es un punto crítico en la elección de estos.

### 6.8.3. Propagación de ecs. de Newton vs. ecs. de Lagrange

Para propagar el modelo existe una relación de compromiso entre utilizar las ecuaciones de Newton y utilizar las ecuaciones planetarias de Lagrange.

En resumen, el primer caso posee 2 integradores más (6 en total), pero fórmulas más sencillas que fundamentalmente no utilizan funciones trigonométricas. Por el contrario, el segundo caso, posee menos ecuaciones diferenciales (4 en total), pero requiere del cálculo de funciones trigonométricas en todas las fórmulas, lo que puede significar un costo muy significativo del uso de recursos computacionales.

Sin embargo, luego de haber visto en la sección 6.5 que la integración de estas ecuaciones no produce un error significativo, el algoritmo de propagación más adecuado al proyecto resulta aquel que resuelve las ecuaciones de Newton, incorporando únicamente el modelo gravitatorio hasta el orden de aproximación J2.



## Capítulo 7

# Conclusiones generales

### 7.1. Conclusiones de la tesis

En este trabajo de tesis se integró todo el conocimiento adquirido durante la carrera de Ingeniería Electrónica y se profundizó el aprendizaje sobre mecánica clásica, matemática, astrodinámica, teoría de control, sistemas de NG&C y tecnología aeroespacial, entre otros temas. Se encontró que la dinámica de un vehículo admite un modelo simplificado muy sencillo en algunos casos, como para el control de orientación. En otras ocasiones es necesario considerar otros fenómenos que hacen el modelo más complejo, como para la estimación de perigeo y apogeo.

El simulador implementado alcanza resultados muy similares a los provistos por el software comercial de uso habitual en la industria espacial. No obstante, el objetivo perseguido en este caso fue educativo y específicamente de aplicación a la maniobra de corrección orbital por impulso simple. Por lo tanto, el programa realizado, es algo más difícil y engorroso de usar para casos prácticos de la industria. En cambio, para comprender fenómenos teóricos y probar algoritmos, esta implementación es más sencilla. En cualquier caso, podría tomarse como punto de partida para emprender un paquete de software profesional.

Existe un sin fin de variantes para el navegador y todas pueden encontrarse documentadas en la literatura. En este trabajo se demostró que una de las alternativas más elementales del navegador integrado, se puede utilizar perfectamente en la transferencia orbital con un desempeño que no impacta negativamente en el resultado final de la maniobra. Se encontró que la utilización de un acelerómetro en este subsistema no tiene una incidencia profunda en el resultado final de la puesta en órbita, a pesar de la notable mejora en la estimación de la posición angular del vehículo (únicamente durante el pulso de control orbital).

El control de orientación diseñado, demuestra que es posible utilizar uno de los controladores más sencillos encontrados en la teoría, el Proporcional-Derivativo, para cumplir el objetivo y orientar correctamente el cuerpo para la maniobra de corrección orbital final. Además, se demostró su robustez frente a perturbaciones no modeladas, ruido en los sensores y saturación en los actuadores.

En el capítulo de control orbital, se exploraron tan solo un reducido conjunto de estrategias de transferencia orbital para aplicar en la puesta en órbita del satélite que desea lanzar la CoNAE con el vehículo Tronador. Se analizaron ventajas y desventajas en cada caso, pero lo fundamental es que se encontraron soluciones al problema que origina la tesis, ¿cómo poner en una órbita circular un satélite inyectado en una órbita elíptica, con las restricciones particulares del vehículo lanzador argentino? Con los algoritmos propuestos, no solo se ahorra combustible, sino que el propio satélite puede automatizar la tarea sin depender de la operación humana en la estación terrena. No obstante, se debe seguir analizando la estrategia, considerando la implementación práctica en la computadora, elección del método numérico, paso de integración, etc.

## 7.2. Trabajo futuro

Tomando esta tesis como punta pie, el trabajo que podría continuarse a futuro se divide en tantas líneas de trabajo como subsistemas fueron desarrollados.

### 7.2.1. Simulador

En primer lugar, sería muy conveniente replantearse el simulador de dinámica del vehículo y reprogramarlo sobre una plataforma más prolífica, escalable y eficiente. Una posibilidad sería reescribir el programa en scripts de MATLAB, basándose por ejemplo en los códigos de la web <https://smallsats.org/>. Esta plataforma, en comparación con Simulink, es además más independiente de la versión de MATLAB utilizada, y podría subirse a algún sistema de versionado de archivos como GitHub para que cualquiera que se interese en el tema pueda colaborar.

Incluso, podría buscarse la forma de agregarle al simulador una visualización gráfica, de modo de ver en tiempo real la orientación de las distintas ternas. Un punto de partida para esto se encuentra en la aplicación KeplerOrbit desarrollada en este trabajo, ya alojada en GitHub, <https://github.com/sebastian-sampayo/KeplerOrbit>, [15], [16].

### 7.2.2. Navegador

La plataforma Simulink es muy cómoda para sistemas de pequeña escala. En cuanto se incrementa la cantidad de bloques y la cantidad de frecuencias de muestreo distintas, el desarrollo se torna más complejo y se requiere mucha más experiencia en el uso de Simulink. Este es el caso del navegador. Realizarlo en MATLAB sería más fácil e incluso podría utilizarse alguna implementación más completa como por ejemplo el software NaveGo [9].

### 7.2.3. Control de orientación

El control de orientación diseñado fue concebido sin la existencia de saturadores. Al incorporar estos, el torque de control se encuentra casi todo el tiempo en estado saturado positivo o negativo. Quizás analizar con mayor profundidad las implicancias de los actuadores en el modelo resultaría en una ley de control mejor adaptada a esta situación que fuerce menos los componentes y aproveche mejor la energía.

Como mínimo, se debería adaptar este control a una representación en cuaterniones, como se explicó en las conclusiones del capítulo 5.

### 7.2.4. Control orbital

Si todo el sistema fuese implementado en otra plataforma como scripts de MATLAB, C o C++, la implementación del algoritmo de control orbital sería más directa y cercana al código real que se implementaría en la computadora de a bordo del vehículo. Sería posible en este caso ejecutar en una sola corrida toda la estrategia en vez de realizar dos simulaciones distintas (una simulando el algoritmo de cálculo del pulso y otra ejecutando efectivamente la transferencia). En este caso, también debería analizarse en mayor profundidad el método numérico de integración a utilizar, así como también el paso de tiempo en él.

En cuanto a la estrategia en si, una línea de trabajo a futuro consistiría en la aplicación de un impulso orbital simple pero para alcanzar una órbita Mólniya, en lugar de la circular. El primer paso para esto es encontrar el vector velocidad en un punto donde se crucen la órbita elíptica de inyección y la Mólniya objetivo. Posiblemente sea necesario además del incremento en módulo del  $\Delta V$ , una orientación distinta del propulsor, de modo de poder modificar también la inclinación, además del semieje mayor y la excentricidad. Todo el simulador implementado se puede utilizar para esto, ajustando

el guiado de orientación del satélite y el ancho de pulso de control orbital. La trayectoria del satélite en este tipo de órbitas atraviesa las regiones LEO y MEO. Por lo tanto, para que el resultado final sea más cercano a la realidad, en este caso deberían considerarse otras perturbaciones que no fueron modeladas en este proyecto, como la atracción de la Luna y la presión solar. Lograr ubicar satélites en este tipo de órbitas sería muy interesante, puesto que permiten establecer sistemas de comunicaciones a un costo menor que los satélites geoestacionarios, con lo cual podría poseer una veta comercial más provechosa.

Otra estrategia que se podría implementar con estos mismos algoritmos sería una maniobra de 2 impulsos para alcanzar cualquier órbita circular independientemente del apogeo de la órbita de inyección inicial. En este caso, el primer impulso se haría también en el apogeo, pero en vez de circularizar la órbita, debería alcanzar una órbita elíptica intermedia entre la de inyección inicial y la circular final, de modo que el apogeo de esta órbita de transferencia intermedia sea igual que el radio de la órbita final. Esto es sencillo, ya que lo único que se debe modificar es el  $\Delta V$  requerido, en base al apogeo deseado, y por lo tanto lo único que cambiará respecto a lo expuesto en el capítulo 6 es un aumento en el ancho del pulso de control. Finalmente, un nuevo impulso en el apogeo de esta órbita de transferencia debería circularizar la trayectoria, al igual que se realizó en el capítulo 6.



# Bibliografía

- [1] United Launch Alliance. *Delta II Payload Planners Guide*, December, 2006.
- [2] United Launch Alliance. *Delta IV Launch Services User's Guide*, June, 2013.
- [3] Arianespace. *Vega User's Manual*, April, 2014.
- [4] R.R. Bate, D.D. Mueller, and J.E. White. *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Books on Aeronautical Engineering Series. Dover Publications, 1971. ISBN 9780486600611. URL <https://books.google.com.ar/books?id=UtJK8cetqGkC>.
- [5] R.H. Battin. *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics & Astronautics, 1999. ISBN 9781600860263. URL <https://books.google.com.ar/books?id=0jH7aVhiGdcC>.
- [6] Pablo Tomás Bernadí. Sistema de navegación ins/gps para un cohete suborbital controlado. *Universidad de Buenos Aires*, 2013.
- [7] V.A. Chobotov. *Orbital Mechanics*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics & Astronautics, 2002. ISBN 9781600860973. URL <https://books.google.com.ar/books?id=SuPQmbqyrFAC>.
- [8] Martín España. *Fundamentos de la navegación integrada*. Ed. Asociación Argentina de Control Automático, 2010.
- [9] Rodrigo Gonzalez, Juan Ignacio Giribet, and Héctor Daniel Patiño. Navego: a simulation framework for low-cost integrated navigation systems. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 17:110–120, 2015.
- [10] Ezequiel Grondona. Sistema de navegación integrada, diseño y comparativa de algoritmos de navegación fuerte y débilmente integrados con gps. *Universidad de Buenos Aires*, 2013.
- [11] CoNAE Tronador II, 2016. URL <http://www.conae.gov.ar/index.php/espanol/acceso-al-espacio/tronador-ii>.
- [12] W.D. McClain and D.A. Vallado. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Space Technology Library. Springer Netherlands, 2001. ISBN 9780792369035. URL <https://books.google.com.ar/books?id=PJLlWzMBKjkC>.
- [13] China Academy of Launch Vehicle Technology. *LM-3A Series Launch Vehicle User's Manual*, 20011.
- [14] R.M. Rogers. *Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems*. Number v. 1 in AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003. ISBN 9781563476563. URL <https://books.google.com.ar/books?id=dfS2WcYba9wC>.

- [15] Sebastián Lucas Sampayo. Código fuente de la aplicación keplerorbit, 2016. URL <https://github.com/sebastian-sampayo/KeplerOrbit>.
- [16] Sebastián Lucas Sampayo. Keplerorbit web, 2016. URL <https://sebastian-sampayo.github.io/>.
- [17] CoNAE SARE, 2016. URL <http://www.conae.gov.ar/index.php/espanol/misiones-satelitales/sare/objetivos>.
- [18] Hanspeter Schaub and John L. Junkins. *Analytical Mechanics of Space Systems*. AIAA Education Series, Reston, VA, 2nd edition, October 2009. doi: 10.2514/4.867231.
- [19] M.J. Sidi. *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press, 1997. ISBN 9780521787802. URL <https://books.google.co.uk/books?id=xQpZJMtDehQC>.
- [20] AGI STK, 2016. URL <https://www.agi.com/>.
- [21] James R. Wertz. Autonomous navigation and autonomous orbit control in planetary orbits as a means of reducing operations cost. In *5th International Symposium on Reducing the Cost of Spacecraft Ground Systems and Operations*, Pasadena, CA, July 2003. Microcosm, Inc.
- [22] James R. Wertz, Thomas L. Mullikin, and Robert F. Brodsky. Reducing the cost and risk of orbit transfer. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 25(1):75–80, 1988.
- [23] J.R. Wertz. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Astrophysics and Space Science Library. Springer Netherlands, 2012. ISBN 9789400999077. URL <https://books.google.co.uk/books?id=crTwCAAAQBAJ>.
- [24] Pedro E. Zadunaisky. *Introducción a la astrodinámica*. CONAE, 1998. ISBN 978-987-96864-0-9.
- [25] P.H. Zipfel. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000. ISBN 9781563474569. URL <https://books.google.co.in/books?id=vbhIRd0R4QQC>.