Metodi Analitici e Numerici per l'Ingegneria – A.A. 2018/2019
Appello del 15 Luglio 2019 - Docenti: Mola e Parolini

Nome: .... Cognome: .... Matr. | | | | | | |

Attenzione: *risolvere i seguenti esercizi con l'ausilio di Matlab. Per ciascun esercizio riportare sul retro del foglio i comandi Matlab utilizzati. Per accedere alle funzioni Matlab richieste eseguire in Matlab il comando* `addpath('M:\MATLAB\Toolbox\Parolini')`.

Esercizio 1. Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore governato dalla seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} m\,\ddot{y}(t) + \gamma\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = 0, \quad 0 < t \leq 5, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

con $m = 1$, $\gamma = 1$ e $k = 50$.

a. Si riformuli il problema come sistema di equazioni differenziali ordinarie di primo ordine e si introduca il metodo di Eulero esplicito per la soluzione del sistema. [T]

b. Si calcoli un'approssimazione della soluzione utilizzando il metodo di Eulero esplicito implementato nella function `eulero_avanti_sys.m` con passo di discretizzazione $h = 0.01$. Si riporti l'approssimazione della posizione y all'istante $t = 5$. Si riporti il valore della velocità massima raggiunta nell'intervallo temporale $[0, 5]$ e l'istante temporale in cui è raggiunta. [M]

c. Si fornisca la definizione di convergenza e assoluta stabilità di un metodo per l'approssimazione numerica di un problema di Cauchy. Si discutano la convergenza e l'assoluta stabilità del metodo di Eulero esplicito. [T]

Esercizio 2.

a. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una generica matrice. Dopo avere introdotto la definizione di fattorizzazione LU della matrice A, si derivi la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{x}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, sfruttando esplicitamente tale fattorizzazione. [T]

b. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & & & & & \\ 0.1 & 1 & 0.2 & & & & \\ & 0.1 & 1 & 0.2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0.1 & 1 & 0.2 & \\ & & & & 0.1 & 1 & 0.2 \\ & & & & & 0.1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{50\times 50}, \tag{1}$$

utilizzando la fattorizzazione LU e i comandi `fwsub.m` e `bksub.m`, si risolva il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b}$ tale che la soluzione esatta risulti $\mathbf{x}_{ex} = [1, 2, ..., 50]^T \in \mathbb{R}^{50}$. Calcolare e riportare la norma 2 dell'errore associato e commentare il risultato così ottenuto. [M]

c. Fornire le condizioni i) solo sufficienti e ii) necessarie e sufficienti per garantire l'esistenza e l'unicità della fattorizzazione LU di una generica matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, senza dovere ricorrere alla tecnica del pivoting e verificare che la fattorizzazione della matrice A esiste ed è unica. [T+M]

Esercizio 3. Si consideri il seguente integrale $I = \int_0^1 x\, e^{-x}\, dx$

a. Si approssimi l'integrale utilizzando la formula dei trapezi composita (funzione `trapcomp.m`) su 2, 4 e 8 sottointervalli e si riportino le approssimazioni ottenute. [M]

b. Si ripeta il punto precedente utilizzando la formula di Simpson composita (funzione `simpcomp.m`). [M]

c. Sapendo che l'integrale esatto vale $I = -2/e+1$, si valuti l'errore per le approssimazioni trovate e si commenti il risultato. [T+M]