▷ Lezione VII

Differenziazione numerica

Libro Capitolo 4, sezione 4.2.

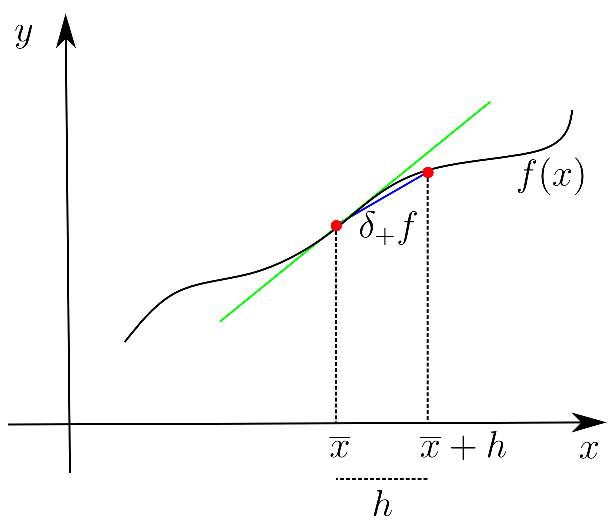
Differenziazione numerica

Consideriamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenziabile con continuità in $[a, b]$. Allora esiste

$$f'(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})}{h} \quad \forall \overline{x} \in [a, b].$$

L'idea è quella di approssimare la derivata con un rapporto incrementale, in particolare se consideriamo la differenza finita in avanti abbiamo

$$(\delta_+ f)(\overline{x}) = \frac{f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})}{h} \approx f'(\overline{x}),$$



dove in questo caso h è un dato valore finito. Per calcolare l'errore commesso con questa approssimazione, sviluppo f in serie di Taylor: se $f \in C^2[a, b]$ allora abbiamo

$$f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + (x - \overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{1}{2}(x - \overline{x})^2 f''(\xi)$$

dove $\xi \in [\overline{x}, \overline{x} + h]$ ed avendo $x = \overline{x} + h$. L'errore risulta quindi dato da

$$|e_+| = |(\delta_+ f)(\overline{x}) - f'(\overline{x})| = \left| \frac{f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})}{h} - f'(\overline{x}) \right| =$$

$$= \left| \frac{f(\overline{x}) + hf'(\overline{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi) - f(\overline{x})}{h} - f'(\overline{x}) \right| = \left| \frac{1}{2} h f''(\xi) \right| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \, h \leq ch.$$

Abbiamo quindi che $|e_+| \leq ch$ e quindi il metodo ha ordine di accuratezza pari a 1. Se nei passaggi precedenti avessimo sviluppato in serie di Taylor f fino al terzo ordine avremmo ottenuto

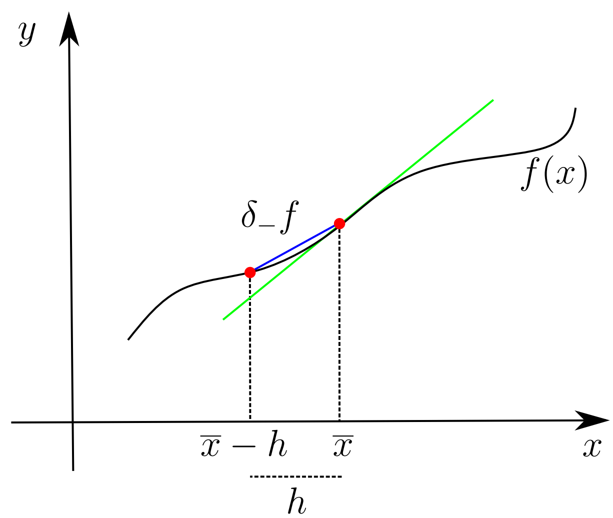
$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{1}{2}(x-\overline{x})^2 f''(\overline{x}) + \frac{1}{6}(x-\overline{x})^3 f'''(\xi),$$

che fornisce una stima dell'errore pari a

$$|e_+| = |(\delta_+ f)(\overline{x}) - f'(\overline{x})| = \left| \frac{f(\overline{x}+h) - f(\overline{x})}{h} - f'(\overline{x}) \right| =$$
$$= \left| \frac{f(\overline{x}) + hf'(\overline{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\overline{x}) + \frac{1}{6}h^3 f'''(\xi) - f(\overline{x})}{h} - f'(\overline{x}) \right| = \left| \frac{1}{2}hf''(\overline{x}) + \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi) \right| \leq ch.$$

essendo dominante l'errore in h rispetto all'errore in h^2, per h piccolo. Quindi sviluppando al terzo ordine f non abbiamo ottenuto un risultato migliore ma analogo a prima. Nel caso in cui consideriamo la differenza finita all'indietro data da

$$(\delta_- f)(\overline{x}) = \frac{f(\overline{x}) - f(\overline{x}-h)}{h} \approx f'(\overline{x}),$$



allora abbiamo che lo sviluppo di Taylor centrato in $\overline{x} - h$ è dato da

$$f(\overline{x}-h) = f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{1}{2}(x-\overline{x})^2 f''(\xi) = f(\overline{x}) - hf'(\overline{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi)$$

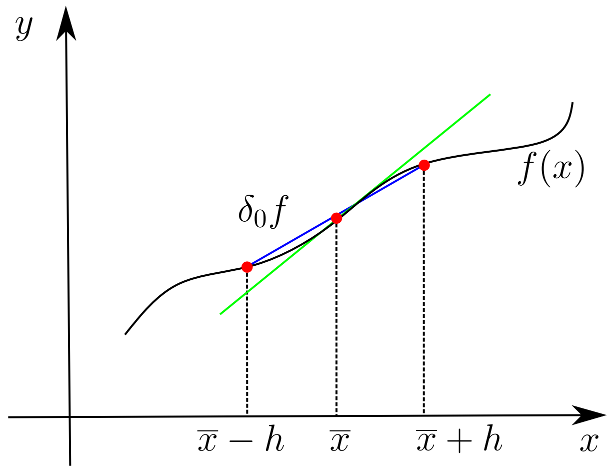
avendo $x = \overline{x} - h$ e dove in questo caso $\xi \in [\overline{x}-h, \overline{x}]$. Ripercorrendo i passaggi fatti precedentemente per il calcolo dell'errore, otteniamo

$$|e_-| = |(\delta_- f)(\overline{x}) - f'(\overline{x})| = \left| \frac{f(\overline{x}) - f(\overline{x}-h)}{h} - f'(\overline{x}) \right| =$$
$$= \left| \frac{f(\overline{x}) - f(\overline{x}) + hf'(\overline{x}) - \frac{1}{2}h^2 f''(\xi)}{h} - f'(\overline{x}) \right| = \left| -\frac{1}{2}hf''(\xi) \right| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|\, h \leq ch.$$

Otteniamo che anche in questo caso abbiamo un errore che ha ordine di accuratezza pari a 1, ovvero $|e_-| \leq ch$.

Nel caso in cui considerassimo una differenza finita centrata per l'approssimazione della derivata prima di f, otterremmo la seguente espressione

$$(\delta_0 f)(\overline{x}) = \frac{f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}-h)}{2h},$$



come fatto prima sviluppiamo entrambi i fattori con Taylor

$$f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + hf'(\overline{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\overline{x}) + \frac{1}{6}h^3 f'''(\xi)$$
$$f(\overline{x} - h) = f(\overline{x}) - hf'(\overline{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\overline{x}) - \frac{1}{6}h^3 f'''(\eta)$$

per $\xi \in [\overline{x}, \overline{x} + h]$ e $\eta \in [\overline{x} - h, \overline{x}]$. L'errore commesso dalla differenza finita centrata risulta dato da

$$|e_0| = \left| \frac{f(\overline{x} + h) - f(\overline{x} - h)}{2h} - f'(\overline{x}) \right| =$$
$$= \left| \frac{f(\overline{x}) + hf'(\overline{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\overline{x}) + \frac{1}{6}h^3 f'''(\xi) - f(\overline{x}) + hf'(\overline{x}) - \frac{1}{2}h^2 f''(\overline{x}) + \frac{1}{6}h^3 f'''(\eta) - 2hf'(\overline{x})}{2h} \right| =$$
$$= \frac{1}{12} \left| f'''(\xi) + f'''(\eta) \right| h^2 \leq ch^2$$

dove la costante c è ora definita come $c = \frac{1}{6} \max_{x \in I} |f'''(\overline{x})|$. Utilizzando le differenze finite è possibile calcolare un'approssimazione anche per le derivate superiori alla prima di f, per la derivata seconda f'' abbiamo

$$(\delta_0^2 f)(\overline{x}) = \frac{f(\overline{x} + h) - 2f(\overline{x}) + f(\overline{x} - h)}{h^2}$$

tale formula deriva dalla seguente espressione approssimata per il calcolo della derivata seconda

$$f''(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(\overline{x} + h) - f'(\overline{x})}{h} \approx \frac{(\delta_+ f)(\overline{x}) - (\delta_- f)(\overline{x})}{h} = \frac{\frac{f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})}{h} - \frac{f(\overline{x}) - f(\overline{x} - h)}{h}}{h} =$$
$$= \frac{f(\overline{x} + h) - 2f(\overline{x}) + f(\overline{x} - h)}{h^2}$$

In questo caso dobbiamo sviluppare la funzione f con Taylor fino al quarto grado, ottenendo

$$f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + hf'(\overline{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\overline{x}) + \frac{1}{6}h^3 f'''(\overline{x}) + \frac{1}{24}h^4 f^{iv}(\xi)$$
$$f(\overline{x} - h) = f(\overline{x}) - hf'(\overline{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\overline{x}) - \frac{1}{6}h^3 f'''(\overline{x}) + \frac{1}{24}h^4 f^{iv}(\eta)$$

per $\xi \in [\overline{x}, \overline{x}+h]$ e $\eta \in [\overline{x}-h, \overline{x}]$. Che fornisce il seguente errore

$$\begin{aligned}
\left|e_0^2\right| = \left|(\delta_0^2 f)(\overline{x}) - f''(\overline{x})\right| &= \left|\frac{f(\overline{x}+h) - 2f(\overline{x}) + f(\overline{x}-h)}{h^2} - f''(\overline{x})\right| = \\
&= \left|\frac{\frac{1}{2}h^2 f''(\overline{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\overline{x}) + \frac{1}{24}h^4\left[f^{iv}(\xi) + f^{iv}(\eta)\right]}{h^2} - f''(\overline{x})\right| = \\
&= \frac{1}{12}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{iv}(x)\right| h^2 = ch^2
\end{aligned}$$

dove c è una costante che dipende solamente dalla funzione ed è pari a $\frac{1}{12}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{iv}(x)\right|$. Il metodo risulta quindi avere accuratezza quadratica, sempre se la funzione f risulta derivabile con continuità quattro volte.