Soluzione

Teoria

1. Si indichino le condizioni necessarie per la convergenza quadratica del metodo di Newton:

☑ La funzione è di classe C^2 in un intorno dello zero.

☐ Lo zero è di molteplicità pari.

☐ Lo zero è di molteplicità dispari.

☑ Lo zero è di molteplicità 1.

☑ Il dato iniziale è sufficientemente vicino alla soluzione.

2. Quante operazioni floating point sono necessarie per risolvere un sistema triangolare inferiore di dimensione 20×20 con l'algoritmo delle sostituzioni in avanti:

☑ 400.

☐ 20.

☐ 40.

☐ 8000.

☐ 80.

3. Dato un sistema lineare $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, quale dei seguenti metodi iterativi converge nel minor numero di iterazioni:

☐ un metodo consistente con raggio spettrale della matrice di iterazione $\rho = 0.3$.

☐ un metodo con raggio spettrale della matrice di iterazione $\rho = 0.3$.

☐ un metodo con raggio spettrale della matrice di iterazione $\rho = 0.9$.

☐ un metodo consistente con raggio spettrale della matrice di iterazione $\rho = 0.9$.

☑ un metodo consistente con raggio spettrale della matrice di iterazione $\rho = 0.1$.

4. Si vuole utilizzare il metodo di bisezione per calcolare lo zero della funzione $f(x) = \cos(x/2) - 1/2$ nell'intervallo $[0, 4]$. Si calcoli il numero minimo di iterazioni necessarie per garantire un errore minore di toll $= 10^{-4}$.

- ☐ 12.
- ☐ 14.
- ☑ 15.
- ☐ 16.
- ☐ 22.

5. Dati $n+1$ punti distinti di coordinate (x_i, y_i), con $i = 0, \ldots, n$:

- ☐ il polinomio lineare composito che li interpola ha grado polinomiale che dipende dal numero di punti $n+1$.
- ☑ il polinomio interpolante di Lagrange ha grado polinomiale che dipende dal numero di punti $n+1$.
- ☐ l'interpolante polinomiale definito dalle spline cubiche ha grado polinomiale che dipende dal numero di punti $n+1$.
- ☐ l'approssimazione ai minimi quadrati ha grado polinomiale che dipende dal numero di punti $n+1$.
- ☑ il polinomio interpolante di Lagrange ha grado polinomiale pari a n.

6. Sia f una funzione continua con derivata prima continua sull'intervallo $[a, b]$. Indicare quale schema di approssimazione alle differenze finite si può utilizzare per approssimare la derivata prima di f nell'estremo b e il corrispondente ordine di accuratezza:

- ☐ differenze finite in avanti, ordine 1.
- ☐ differenze finite centrate, ordine 2.
- ☐ differenze finite all'indietro, ordine 2.
- ☐ differenze finite in avanti, ordine 2.
- ☑ differenze finite all'indietro, ordine 1.

7. Date le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

- ☐ solo A ammette la fattorizzazione LU.
- ☐ solo A e B ammettono la fattorizzazione LU.
- ☐ solo B e C ammettono la fattorizzazione LU.
- ☑ solo A e C ammettono la fattorizzazione LU.
- ☐ A, B e C ammettono tutte la fattorizzazione LU.

8. Per integrare esattamente un polinomio di grado 7 in un intervallo $[a, b]$ si deve utilizzare:

- ☐ La formula di quadratura dei trapezi.
- ☐ La formula di quadratura di Simpson.
- ☐ La formula di quadratura di Gauss-Legendre con 3 nodi.
- ☐ La formula di quadratura di Gauss-Legendre con 2 nodi.
- ☑ La formula di quadratura di Gauss-Legendre con 4 nodi.

9. Dato il problema ai limiti $-u''(x) = f(x)$ definito nell'intervallo (a, b) con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee, la sua formulazione debole deve essere ambientata nello spazio:

- ☐ $L^2([a, b])$.
- ☐ $H^1([a, b])$.
- ☑ $H_0^1([a, b])$.
- ☐ $C^1([a, b])$.
- ☐ $C^0([a, b])$.

10. Per approssimare il problema ai limiti $-u''(x) + u = f(x)$ definito nell'intervallo (a, b) con condizioni al bordo di Neumann omogenee su una griglia ottenuta suddividendo l'intervallo in 100 sotto-intervalli, lo spazio degli elementi finiti lineari utilizzato ha dimensione:

- ☐ 100.
- ☑ 101.
- ☐ 99.
- ☐ 10000.
- ☐ 10.

Esercizio 1

Assegnata la funzione $f(x) = x + 3x^2 + 2x^3$, si vuole calcolare numericamente l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dall'asse delle ascisse nell'intervallo $[0, 1]$.

11. Si utilizzi il metodo dei trapezi composito con un numero di sotto-intervalli pari a $n = 8$ per calcolare l'area e si riporti la soluzione ottenuta in format short.

$$I_{TC} = 2.0156$$

12. Si utilizzi il metodo di Simpson composito con un numero di sotto-intervalli pari a $n = 8$ per calcolare l'area e si riporti la soluzione ottenuta in format short.

$$I_{SC} = 2$$

13. Si riportino i comandi Matlab necessari per calcolare, sapendo che il valore esatto dell'area è 2, l'errore per i due metodi considerati, utilizzando diversi valori del numero di sotto-intervalli ($n = 2, 4, 8, 16$) e visualizzare il risultato su un grafico in scala logaritmica (Copia & Incolla da Matlab).

```
f = @(x) x + 3*x.^2 + 2*x.^3;
a = 0; b = 1;

k = 2.^[1:4];
N = length(k);

I_TC = zeros(1,N);
I_SC = zeros(1,N);

for i = 1:N
   I_TC(i) = trapcomp(a,b,k(i),f);
   I_SC(i) = simpcomp(a,b,k(i),f);
end

I_ex = 2*ones(1,N);

E_TC = abs(I_ex-I_TC);
E_SC = abs(I_ex-I_SC);
H = (b-a)./k;

figure
loglog(H,E_TC,'ro--',H,E_SC,'gx-.','linewidth',2)
hold on, grid on
loglog(H,H.^2,'k',H,H.^4,'k--')
legend('E\_TC','E\_SC','H^2','H^4','location','southeast')
```

14. Per ciascuno dei due metodi, si stimi numericamente l'ordine di accuratezza sulla base dei risultati ottenuti e se ne riporti il valore.

Eseguendo la regressione lineare:

```
coeff_TC = polyfit(log(H),log(E_TC),1);
coeff_SC = polyfit(log(H),log(E_SC),1);

OA_TC = coeff_TC(1);
OA_SC = coeff_SC(1);
```

si ottiene:

- ordine di accuratezza metodo dei trapezi composito: OA_TC = 2.

- ordine di accuratezza metodo di Simpson composito: OA_SC = NaN.

  Ciò è dovuto al fatto che con il metodo di Simpson composito si ottiene il risultato esatto, e quindi gli errori sono identicamente nulli.

15. Si commentino sinteticamente i risultati ottenuti.

Il metodo dei trapezi composito è accurato al second'ordine e ha grado di esattezza pari a 1. Il metodo di Simpson composito è accurato al quart'ordine e ha grado di esattezza pari a 3. Poichè la funzione $f(x)$ è un polinomio di grado 3, il metodo di Simpson composito fornisce il risultato esatto, mentre il metodo dei trapezi composito fornisce un risultato approssimato.

Esercizio 2

Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore governato dal seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} my''(t) + sy'(t) + ky(t) = 0, \quad 0 < t \leq 5\,, \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

con $m = 2$, $s = 1$ e $k = 30$.

16. L'equazione differenziale in esame è:

- ☑ un'equazione differenziale ordinaria di secondo grado.
- ☐ un'equazione differenziale alle derivate parziali.
- ☐ un'equazione differenziale ordinaria di primo grado.
- ☑ equivalente ad un sistema di due equazioni differenziali ordinarie di primo grado.
- ☐ nessuna delle precedenti.

17. Si riformuli il problema come sistema di equazioni differenziali ordinarie di primo ordine.

Una equazione differenziale ordinaria di secondo grado può essere scritta come un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) & = \underline{f}(t, \underline{y}), \\ \underline{y}(0) & = \underline{y_0}\,. \end{cases}$$

il vettore $\underline{y}$ è un vettore colonna di due componenti $\underline{y}(t) = (y_1(t),\, y_2(t))^T$, la funzione $\underline{f}$ è fatta nel seguente modo:

$$\underline{f}(t, \underline{y}) = \begin{cases} f_1(t, \underline{y}) & = y_2, \\ f_2(t, \underline{y}) & = -\frac{k}{m} y_1 - \frac{s}{m} y_2, \end{cases}$$

e il vettore dei valori iniziali è composto da $\underline{y}_0 = (-1, 0)^T$. Il sistema si può ricavare dal precedente problema differenziale ponendo $y_1 = y$ e $y_2 = y'$. Tale metodo è standard per scrivere il sistema partendo dall'equazione differenziale.

18. Si riportino i comandi Matlab necessari per approssimare la soluzione utilizzando il metodo di Eulero esplicito con passo $h = 0.01$ (Copia & Incolla da Matlab).

```
% Dati
tmin = 0;
tmax = 5;

x0 = -1;
v0 = 0;

m = 2;
k = 30;
s = 1;

fun = @(t,y) [y(2); -k/m * y(1) - s/m * y(2)];

% Eulero in avanti
```

```
h = 1e-2;
[t_h, u_h] = eulero_avanti(fun,tmin,tmax,[x0;v0],h);

% Plots
figure
plot(t_h, u_h(1,:), 'r-','LineWidth',2)
title('spostamento')

figure
plot(t_h, u_h(2,:), 'b-','LineWidth',2)
title('velocità')
```

19. Si riporti il valore della velocità massima raggiunta nell'intervallo temporale $[0, 5]$ e l'istante temporale in cui è raggiunta.

$$y'_{max} = y'(t_{max}) = 3.6180, \qquad t_{max} = 0.39.$$

20. Il metodo utilizzato è:

- ☐ incondizionatamente assolutamente stabile.
- ☑ condizionatamente assolutamente stabile.
- ☐ incondizionatamente assolutamente instabile.
- ☑ zero stabile.
- ☐ nessuna delle altre risposte è corretta.