# Statistica - $6^a$ lezione

21 marzo 2023

# Riproducibilità

Qual è la densità di $X + Y$ se conosco la densità di $X$ e quella di $Y$?

# Riproducibilità

## Teorema

Se $X \sim B(m, q)$ e $Y \sim B(n, q)$ (con lo stesso parametro $q$) sono indipendenti, allora $X + Y \sim B(m + n, q)$

# Riproducibilità

## Teorema

Se $X \sim B(m, q)$ e $Y \sim B(n, q)$ (con lo stesso parametro $q$) sono indipendenti, allora $X + Y \sim B(m + n, q)$

**DIMOSTRAZIONE:**

$$\begin{aligned} X + Y &= \text{numero di successi in } m+n \text{ prove indipendenti e tutte} \\ &\quad\ \text{con la stessa probabilità di successo } q \\ &\sim B(m+n, q) \end{aligned}$$

# Riproducibilità

### Teorema

Se $X \sim B(m, q)$ e $Y \sim B(n, q)$ (con lo stesso parametro $q$) sono indipendenti, allora $X + Y \sim B(m + n, q)$

### Teorema

Se $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sono indipendenti, allora $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

# Riproducibilità

### Teorema

Se $X \sim B(m, q)$ e $Y \sim B(n, q)$ (con lo stesso parametro $q$) sono indipendenti, allora $X + Y \sim B(m + n, q)$

### Teorema

Se $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sono indipendenti, allora $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

### Teorema (non dimostrato)

Se $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ sono indipendenti, allora

$$X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y,\ \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

# Metodo delta

Come si calcola $\mathbb{E}\left[g(X)\right]$ o $\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right]$ ?

# Metodo delta

Come si calcola $\mathbb{E}\left[g(X)\right]$ o $\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right]$ ?

- Se $X$ è continua, sappiamo che

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Ma l'integrale potrebbe essere difficile!

# Metodo delta

Come si calcola $\mathbb{E}\left[g(X)\right]$ o $\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right]$ ?

- Se $X$ è continua, sappiamo che

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Ma l'integrale potrebbe essere difficile!

- Se $g(X, Y) = X + Y$, sappiamo che

$$\mathbb{E}\left[X + Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[Y\right]$$

Ma $g(X, Y)$ potrebbe essere una funzione più complicata!

# Metodo delta

## Teorema

- In prima approssimazione,

$$\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] \simeq g(\mu_X, \mu_Y)$$

# Metodo delta

## Teorema

- In prima approssimazione,

$$\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] \simeq g(\mu_X, \mu_Y)$$

- In prima approssimazione, se $X$ e $Y$ sono indipendenti,

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left[g(X, Y)\right] \;\simeq\; & \left[\partial_1 g\left(\mu_X, \mu_Y\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[X\right] \;+ \\ & + \;\left[\partial_2 g\left(\mu_X, \mu_Y\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[Y\right]\end{aligned}$$

dove

$$\partial_1 g\left(\mu_X, \mu_Y\right) = \left.\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right|_{(\mu_X, \mu_Y)} \qquad \partial_2 g\left(\mu_X, \mu_Y\right) = \left.\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right|_{(\mu_X, \mu_Y)}$$

# Metodo delta

**DIMOSTRAZIONE:**

Sviluppo $g$ in serie di Taylor intorno a $(\mu_X, \mu_Y)$:

$$g(x, y) = g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y) + \\ + \dots$$

# Metodo delta

**DIMOSTRAZIONE:**

Sviluppo $g$ in serie di Taylor intorno a $(\mu_X, \mu_Y)$:

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y) + \cancel{\dots}$$

# Metodo delta

**DIMOSTRAZIONE:**

Sviluppo $g$ in serie di Taylor intorno a $(\mu_X, \mu_Y)$:

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(X - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(Y - \mu_Y)$$

# Metodo delta

**DIMOSTRAZIONE:**

Sviluppo $g$ in serie di Taylor intorno a $(\mu_X, \mu_Y)$:

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

**DIMOSTRAZIONE:**

Sviluppo $g$ in serie di Taylor intorno a $(\mu_X, \mu_Y)$:

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

$$\mathbb{E}\,[g(X, Y)] \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \qquad \text{linearità di } \mathbb{E}$$

$$+ \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)\,\mathbb{E}\,[X - \mu_X] + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)\,\mathbb{E}\,[Y - \mu_Y]$$

# Metodo delta

**DIMOSTRAZIONE:**

Sviluppo $g$ in serie di Taylor intorno a $(\mu_X, \mu_Y)$:

$$g(x,y) \simeq g(\mu_X,\mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)(x-\mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)(y-\mu_Y)$$

$$g(X,Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X,\mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)}_{\text{costante}}(X-\mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)}_{\text{costante}}(Y-\mu_Y)$$

$$\mathbb{E}\,[g(X,Y)] \simeq g(\mu_X,\mu_Y) + \qquad \text{linearità di } \mathbb{E}$$

$$+\,\partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)\underbrace{\mathbb{E}\,[X-\mu_X]}_{=\mu_X-\mu_X} + \partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)\underbrace{\mathbb{E}\,[Y-\mu_Y]}_{=\mu_Y-\mu_Y}$$

**DIMOSTRAZIONE:**

Sviluppo $g$ in serie di Taylor intorno a $(\mu_X, \mu_Y)$:

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

$$\mathbb{E}\,[g(X, Y)] \simeq g(\mu_X, \mu_Y) +$$

$$+\,\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\,[X - \mu_X]}}_{=\mu_X - \mu_X} + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\,[Y - \mu_Y]}}_{=\mu_Y - \mu_Y}$$

**DIMOSTRAZIONE:**

Sviluppo $g$ in serie di Taylor intorno a $(\mu_X, \mu_Y)$:

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] &\simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \\ &\qquad + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\left[X - \mu_X\right]}}_{=\mu_X - \mu_X} + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\left[Y - \mu_Y\right]}}_{=\mu_Y - \mu_Y} \\ &= g(\mu_X, \mu_Y)\end{aligned}$$

**DIMOSTRAZIONE:**

Sviluppo $g$ in serie di Taylor intorno a $(\mu_X, \mu_Y)$:

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

Per calcolare $\mathrm{var}\,[g(X, Y)]$, uso la formula

$\mathrm{var}\,[aX + bY + c] = a^2 \mathrm{var}\,[X] + b^2 \mathrm{var}\,[Y]$ se $X$ e $Y$ sono indipendenti

# Metodo delta

**DIMOSTRAZIONE:**

Sviluppo $g$ in serie di Taylor intorno a $(\mu_X, \mu_Y)$:

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=c} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=a}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=b}(Y - \mu_Y)$$

Per calcolare $\mathrm{var}\,[g(X, Y)]$, uso la formula

$\mathrm{var}\,[aX + bY + c] = a^2 \mathrm{var}\,[X] + b^2 \mathrm{var}\,[Y]$ se $X$ e $Y$ sono indipendenti

$$\begin{aligned} \mathrm{var}\,[g(X, Y)] &\simeq \\ &\simeq [\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2\,\mathrm{var}\,[X - \mu_X] + [\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2\,\mathrm{var}\,[Y - \mu_Y] \end{aligned}$$

# Metodo delta

**DIMOSTRAZIONE:**

Sviluppo $g$ in serie di Taylor intorno a $(\mu_X, \mu_Y)$:

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=c} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=a}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=b}(Y - \mu_Y)$$

Per calcolare $\mathrm{var}\,[g(X, Y)]$, uso la formula

$\mathrm{var}\,[aX + bY + c] = a^2\mathrm{var}\,[X] + b^2\mathrm{var}\,[Y]$ se $X$ e $Y$ sono indipendenti

$$\mathrm{var}\,[g(X, Y)] \simeq$$

$$\simeq [\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2 \underbrace{\mathrm{var}\,[X - \mu_X]}_{=\mathrm{var}[X]} + [\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2 \underbrace{\mathrm{var}\,[Y - \mu_Y]}_{=\mathrm{var}[Y]}$$

# Metodo delta

**DIMOSTRAZIONE:**

Sviluppo $g$ in serie di Taylor intorno a $(\mu_X, \mu_Y)$:

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=c} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=a}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=b}(Y - \mu_Y)$$

Per calcolare $\mathrm{var}\,[g(X, Y)]$, uso la formula

$\mathrm{var}\,[aX + bY + c] = a^2\mathrm{var}\,[X] + b^2\mathrm{var}\,[Y]$ se $X$ e $Y$ sono indipendenti

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\,[g(X, Y)] &\simeq \\
&\simeq [\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2 \underbrace{\mathrm{var}\,[X - \mu_X]}_{=\mathrm{var}[X]} + [\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2 \underbrace{\mathrm{var}\,[Y - \mu_Y]}_{=\mathrm{var}[Y]} \\
&= [\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2\, \mathrm{var}\,[X] + [\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2\, \mathrm{var}\,[Y]
\end{aligned}$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

**ESEMPI:**

- Nel lancio di due dadi:

$$\left.\begin{array}{l} X = \text{numero che uscirà sul primo dado} \\ Y = \text{numero che uscirà sul secondo dado} \end{array}\right\} \quad X, Y \text{ è un campione aleatorio}$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

**ESEMPI:**

- Nel lancio di due dadi:

  $$\left.\begin{array}{l} X = \text{numero che uscirà sul primo dado} \\ Y = \text{numero che uscirà sul secondo dado} \end{array}\right\} \quad X, Y \text{ è un campione aleatorio}$$

- Nel lancio di tre monete:

  $$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se uscirà testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  $X_1, X_2, X_3$ è un campione aleatorio

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

**ESEMPI:**

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

  $$X_i = \text{altezza dell'}i\text{-esimo intervistato}$$

  $X_1, \ldots, X_{100}$ è un campione aleatorio

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

La media campionaria di un campione aleatorio
è una variabile aleatoria

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = ???$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \dots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] \qquad \text{linearità di } \mathbb{E}$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \dots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{ media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} \cdot n\mu$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}\mu = \mu$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}\mu = \mu$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{ media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \operatorname{var}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right] = ???$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \qquad \text{quadraticità di var}$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \dots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \operatorname{var}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right] = \operatorname{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i] \qquad \text{indipendenza delle } X_i$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \operatorname{var}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right] = \operatorname{var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n\sigma^2$$

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \;=\; \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \operatorname{var}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) : $\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right] = \dfrac{\sigma^2}{n}$

$$\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right] = \operatorname{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \ = \ \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \operatorname{var}[X_i]$ (uguale per tutte le $i$) : $\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right] = \dfrac{\sigma^2}{n}$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

**ESEMPIO:**

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni $i$ :

$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N$ riproducibilità di $N$

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

**ESEMPIO:**

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni $i$:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N \qquad\qquad X \sim N \;\Rightarrow\; aX + b \sim N$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{ media campionaria}$$

**ESEMPIO:**

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni $i$:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \qquad\right) \qquad \mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

**ESEMPIO:**

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni $i$:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{\sigma^2}{n}$$

# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

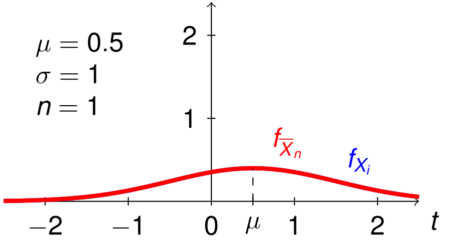
$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

**ESEMPIO:**

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni $i$:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

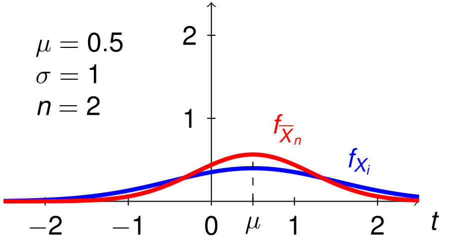
$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

**ESEMPIO:**

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni $i$:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

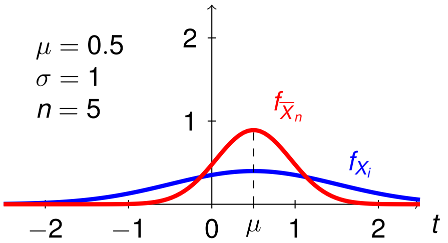
$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \; = \; \text{media campionaria}$$

**ESEMPIO:**

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni $i$:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

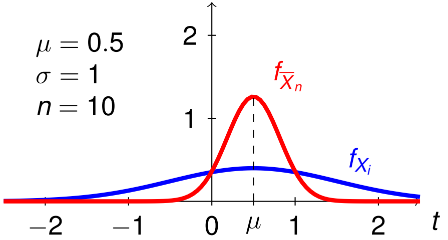
$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

**ESEMPIO:**

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni $i$:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



# Campioni aleatori

## Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità $n$ è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

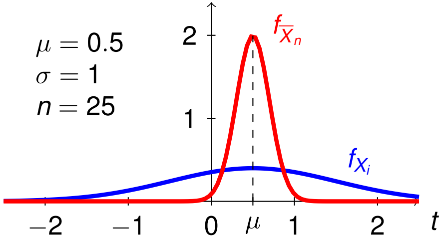
$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

**ESEMPIO:**

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni $i$:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



# Legge dei grandi numeri

## Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

La media campionaria *tende in probabilità* al valore atteso delle $X_i$:

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$$

# Legge dei grandi numeri

**Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)**

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

La media campionaria *tende in probabilità* al valore atteso delle $X_i$:

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$$

$\mu$ non si può misurare, ma $\overline{X}_n$ sì !

# Legge dei grandi numeri

## Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**DIMOSTRAZIONE:**

$$1 \underset{\mathbb{P}(E) \leq 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right)$$

# Legge dei grandi numeri

### Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**DIMOSTRAZIONE:**

$$1 \underset{\mathbb{P}(E) \leq 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right)$$

# Legge dei grandi numeri

## Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**DIMOSTRAZIONE:**

$$1 \underset{\mathbb{P}(E) \leq 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right)$$

# Legge dei grandi numeri

## Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**DIMOSTRAZIONE:**

$$
\begin{aligned}
1 \underset{\mathbb{P}(E)\,\leq\,1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) &\underset{\substack{\mathbb{P}(E)\,= \\ =\,1\,-\,\mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n]\,=\,\mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\underset{\text{Chebyshev}}{\geq} 1 - \frac{\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right]}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

**Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)**

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**DIMOSTRAZIONE:**

$$\begin{aligned}
1 \underset{\mathbb{P}(E) \le 1}{\ge} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) &\underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \ge \varepsilon\right) \\
&\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \ge \varepsilon\right) \\
&\underset{\text{Chebyshev}}{\ge} 1 - \frac{\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right]}{\varepsilon^2} \\
&\underset{\sigma^2 := \operatorname{var}[X_i]}{=} 1 - \frac{(\sigma^2/n)}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

# Legge dei grandi numeri

## Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**DIMOSTRAZIONE:**

$$\begin{aligned}
1 \underset{\mathbb{P}(E) \leq 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) &\underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\underset{\text{Chebyshev}}{\geq} 1 - \frac{\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right]}{\varepsilon^2} \\
&\underset{\sigma^2 := \operatorname{var}[X_i]}{=} 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

**Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)**

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**DIMOSTRAZIONE:**

$$
\begin{aligned}
1 \underset{\mathbb{P}(E) \le 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) &\underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\underset{\text{Chebyshev}}{\geq} 1 - \frac{\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right]}{\varepsilon^2} \\
&\underset{\sigma^2 := \operatorname{var}[X_i]}{=} 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

# Legge dei grandi numeri

## Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**DIMOSTRAZIONE:**

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}$$

# Legge dei grandi numeri

## Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**DIMOSTRAZIONE:**

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1$$

### Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**DIMOSTRAZIONE:**

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

# Legge dei grandi numeri

**Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)**

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}$$

# Legge dei grandi numeri

## Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \quad \equiv \quad p$$

# Legge dei grandi numeri

**Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)**

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \quad \equiv \quad p$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(n, p) = \frac{\sigma}{\sqrt{n(1-p)}}$$

# Legge dei grandi numeri

## Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \dots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

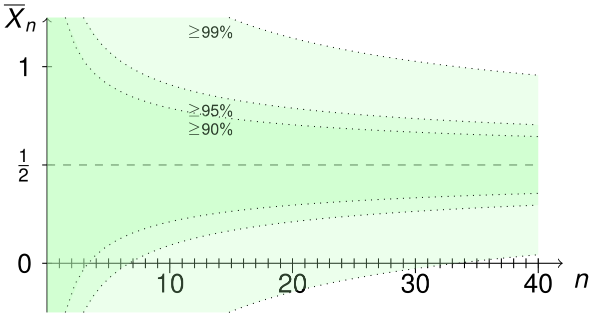
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**ESEMPIO:**

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}$$

con Chebyshev



# Legge dei grandi numeri

## Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

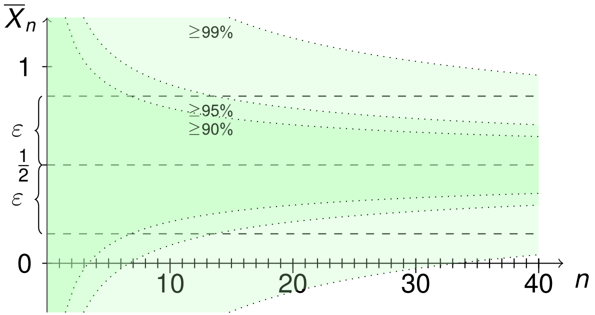
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**ESEMPIO:**

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}$$

con Chebyshev



# Legge dei grandi numeri

## Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

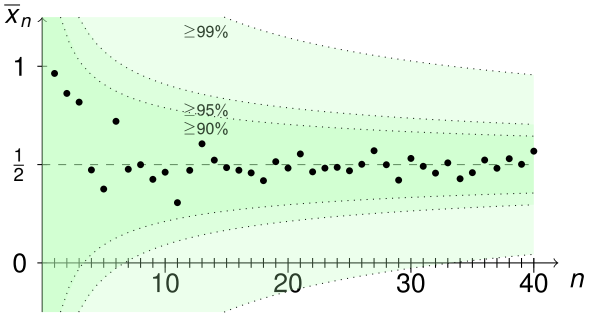
$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**ESEMPIO:**

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}$$

con Chebyshev




$\overline{x}_n =$ *realizzazione* di $\overline{X}_n$ dopo l'esperimento

# Legge dei grandi numeri

## Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \dots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

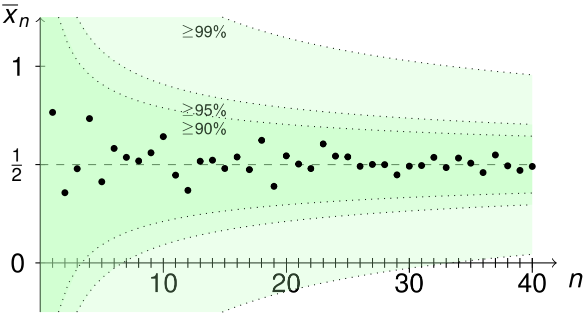
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**ESEMPIO:**

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}$

con Chebyshev




$\overline{x}_n =$ *realizzazione* di $\overline{X}_n$ dopo l'esperimento

# Legge dei grandi numeri

**Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)**

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

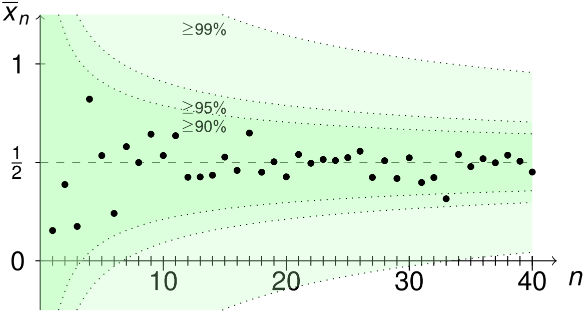
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**ESEMPIO:**

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$\Rightarrow \quad \mu = \dfrac{1}{2}$

con Chebyshev




$\overline{x}_n =$ *realizzazione* di $\overline{X}_n$ dopo l'esperimento

# Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

# Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

# Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}}$$

# Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q$ = probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica (dei successi)}$$

# Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}\left[X_i\right] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

# Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}\left[X_i\right] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

# Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

# Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se trover\`o } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

# Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots \quad$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{P}\,(a \leq Z_i \leq b)$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}\,[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

# Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \dots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \dots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1,q)$ con $q = \mathbb{P}(a \leq Z_i \leq b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

# Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1,q)$ con $q = \mathbb{P}(a \leq Z_i \leq b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \mathrm{FR}([a,b])$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

# Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots \quad$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{P}(a \leq Z_i \leq b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \mathrm{FR}([a, b])$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{FR}([a, b]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

# Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots \quad$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{P}(a \leq Z_i \leq b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \mathrm{FR}([a, b])$$

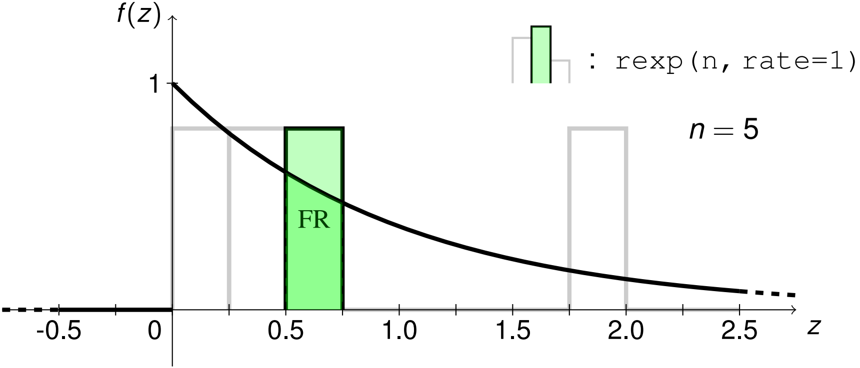
$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{FR}([a, b]) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$$

La frequenza relativa converge all'area sottesa dalla densità !

# Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

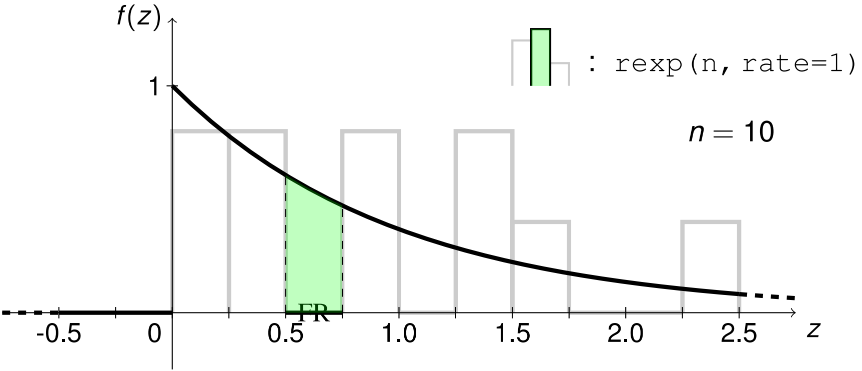
$$f(z) = \begin{cases} e^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



# Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

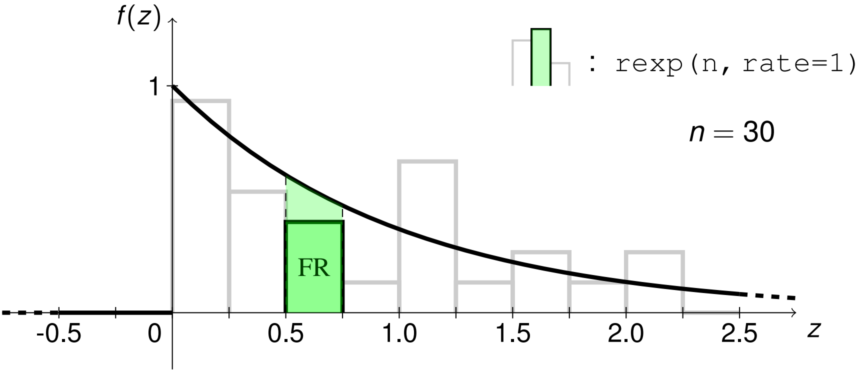
$$f(z) = \begin{cases} e^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



# Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

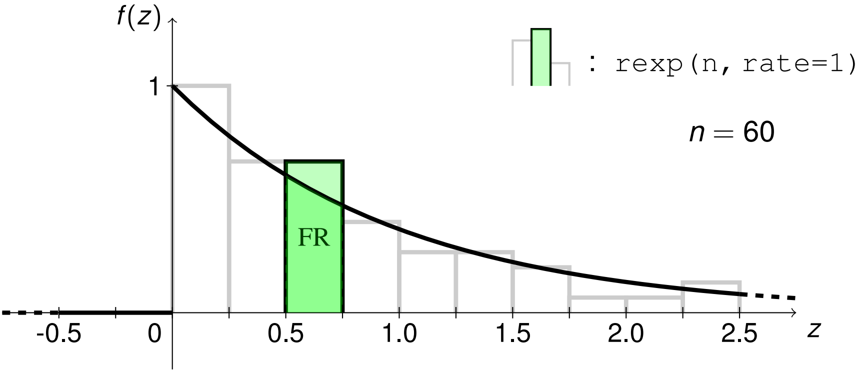
$$f(z) = \begin{cases} e^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



# Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

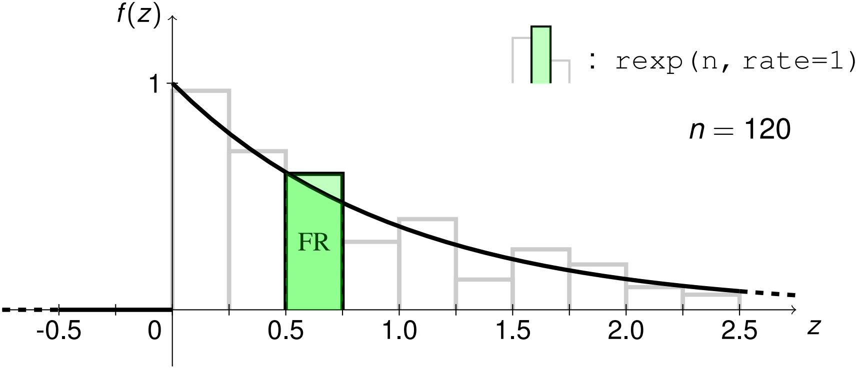
$$f(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



# Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$f(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



# Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

# Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

- Se $n = 1$: $\quad \overline{X}_n = X_1 \sim f \quad$ (ovviamente!)

# Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

- Se $n = 1$ : $\overline{X}_n = X_1 \sim f$ (ovviamente!)
- Se $n > 1$ è piccolo : non lo so

# Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

- Se $n = 1$: $\overline{X}_n = X_1 \sim f$ (ovviamente!)
- Se $n > 1$ è piccolo: non lo so
- Se $n > 1$ è grande: esiste il famoso...

# Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

- Se $n = 1$: $\overline{X}_n = X_1 \sim f$ (ovviamente!)
- Se $n > 1$ è piccolo: non lo so
- Se $n > 1$ è grande: esiste il famoso...

**Teorema del Limite Centrale (versione informale)**

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$

$\approx$ : 'ha circa densità'

# Teorema del limite centrale

## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$

**OSSERVAZIONI:**

- Tipicamente, ‘grande’ $=$ ‘maggiore di 30’

## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$

**OSSERVAZIONI:**

- Tipicamente, 'grande' $=$ 'maggiore di 30'
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, già sapevamo che $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

# Teorema del limite centrale

## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$

**OSSERVAZIONI:**

- Tipicamente, 'grande' $=$ 'maggiore di 30'
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, già sapevamo che $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- Il TLC vale qualunque sia la densità delle $X_i$

# Teorema del limite centrale

## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è `grande'}$$

**OSSERVAZIONI:**

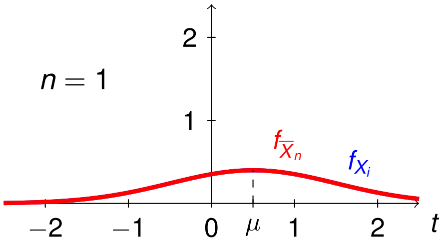
- Tipicamente, 'grande' = 'maggiore di 30'
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, già sapevamo che $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$
- Il TLC vale qualunque sia la densità delle $X_i$
- Il TLC non dice nulla sulla densità delle $X_i$

# Teorema del limite centrale

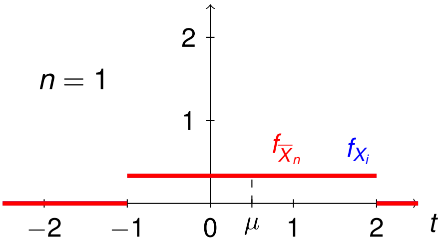
## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



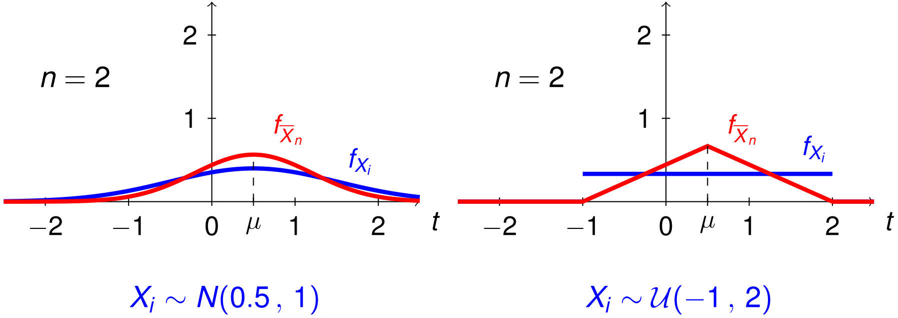

$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

# Teorema del limite centrale

**Teorema del Limite Centrale (versione informale)**

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

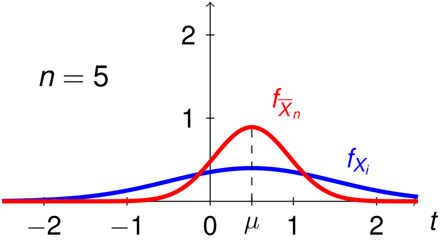
$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



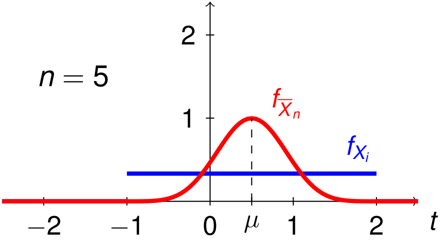
## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



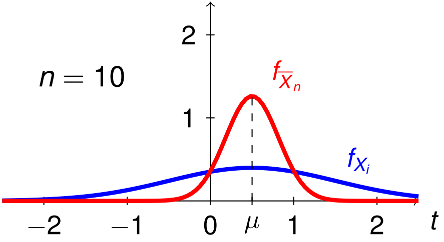

$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

# Teorema del limite centrale

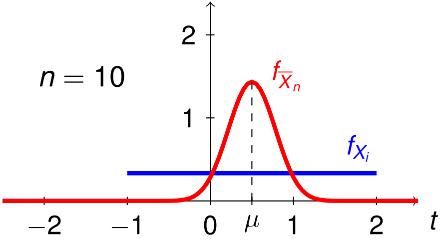
## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



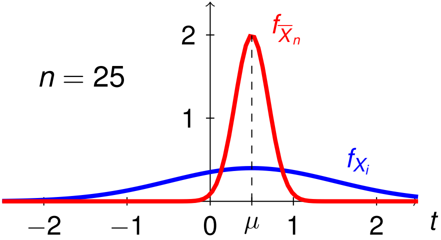

$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

# Teorema del limite centrale

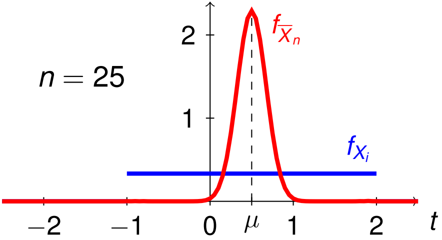
## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



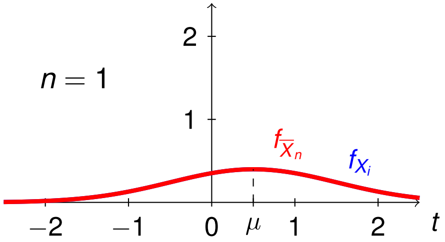

$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

# Teorema del limite centrale

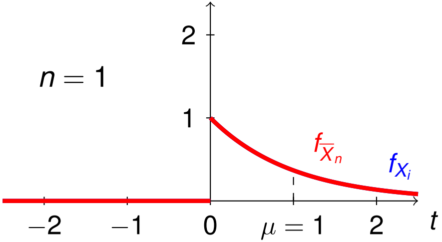
## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



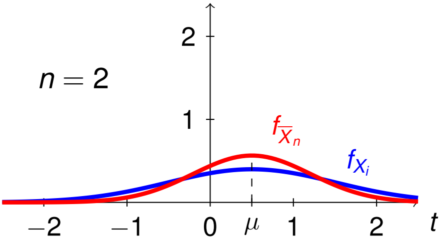

$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

# Teorema del limite centrale

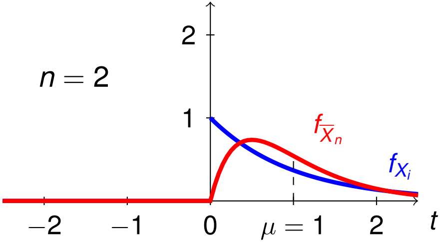
## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$

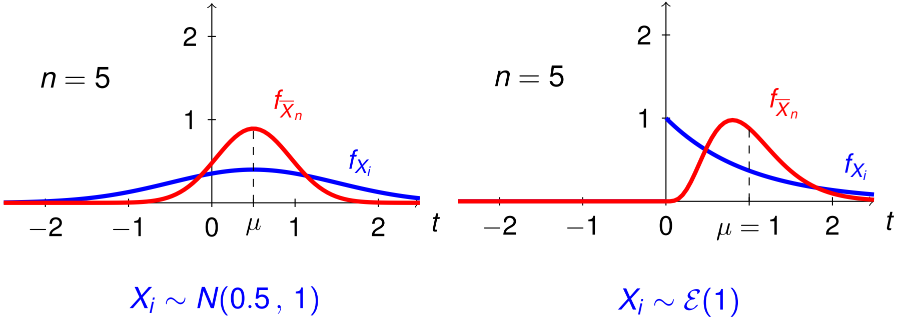



$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$

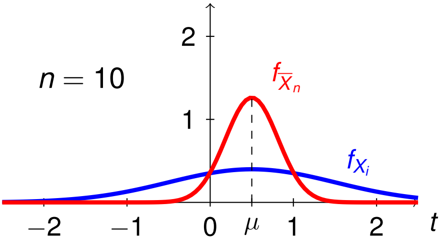


# Teorema del limite centrale

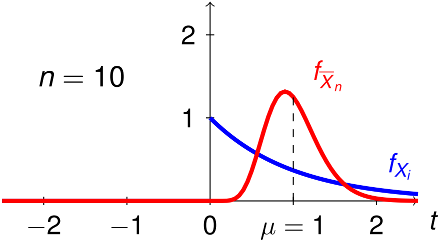
## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



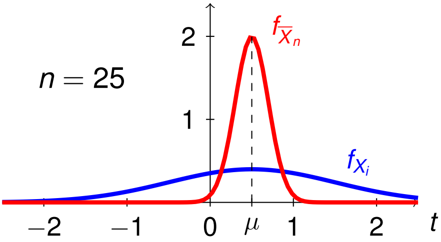

$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

# Teorema del limite centrale

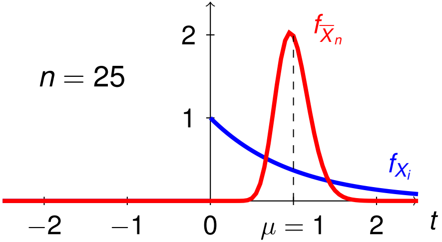
## Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$

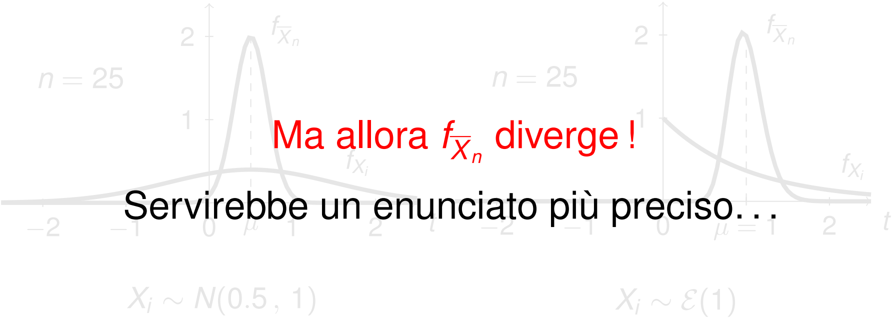



$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

### Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$




Ma allora $f_{\overline{X}_n}$ diverge !

Servirebbe un enunciato più preciso…

# Teorema del limite centrale

## Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left( \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z \right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

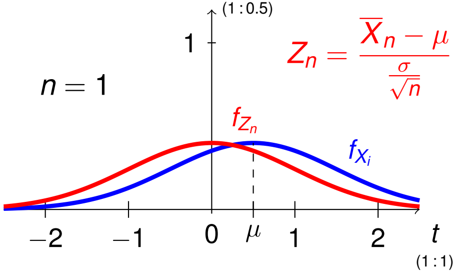
standardizzazione di $\overline{X}_n$

# Teorema del limite centrale

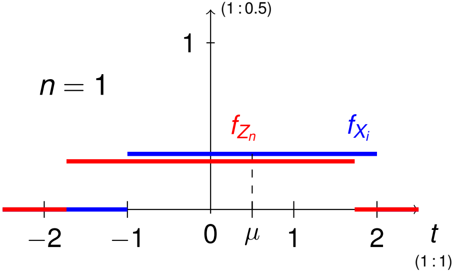
## Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



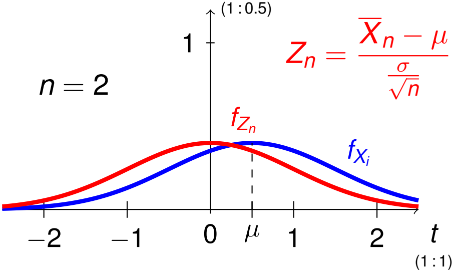

$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

# Teorema del limite centrale

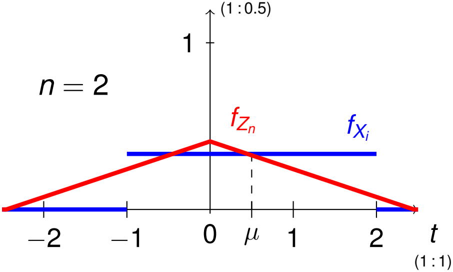
## Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



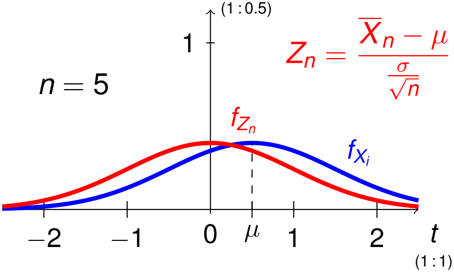

$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

# Teorema del limite centrale

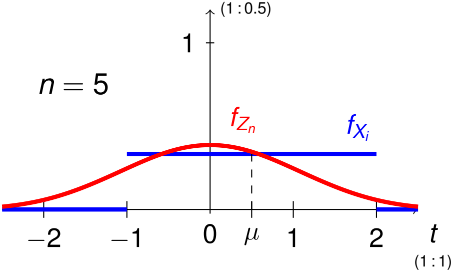
## Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left( \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z \right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$

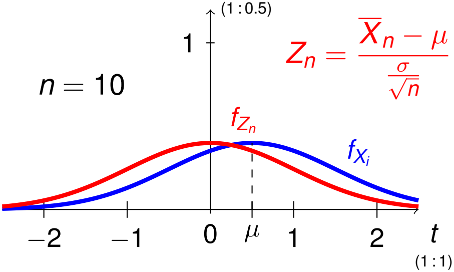



$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

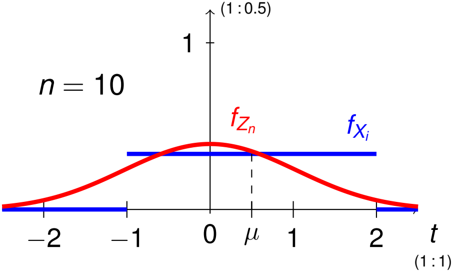
## Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



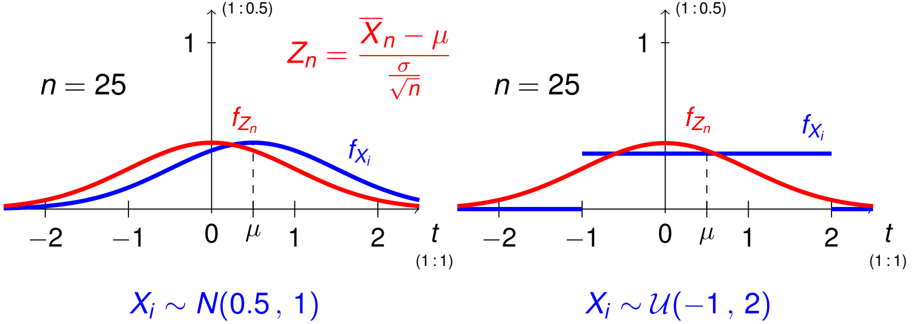

$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

# Teorema del limite centrale

## Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

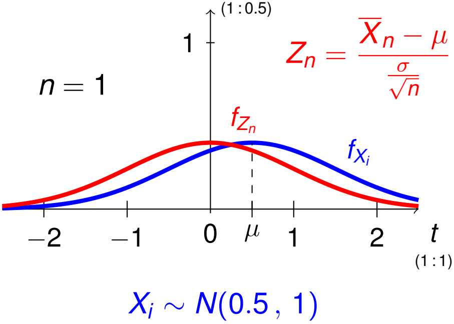


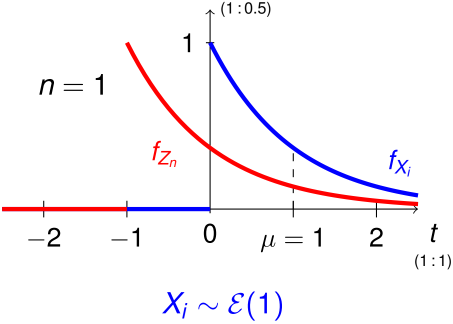
# Teorema del limite centrale

## Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



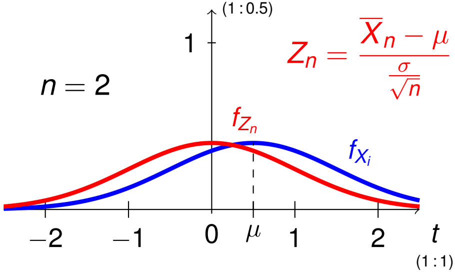



# Teorema del limite centrale

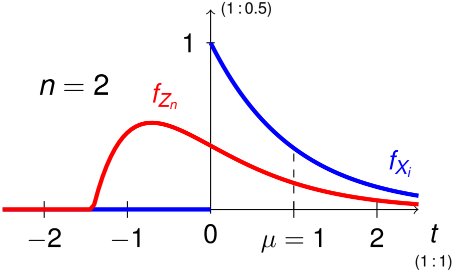
## Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



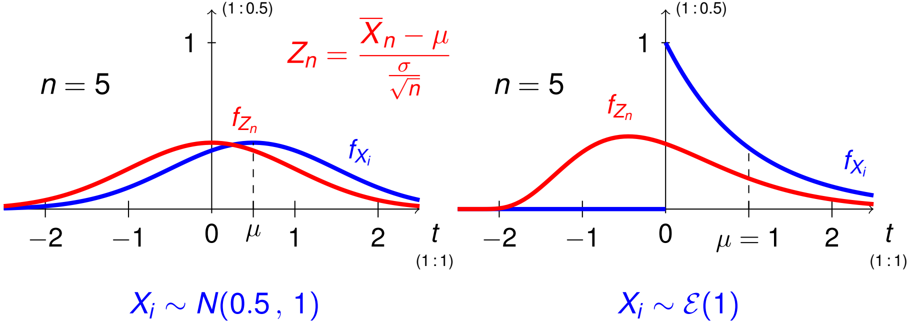

$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

# Teorema del limite centrale

## Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

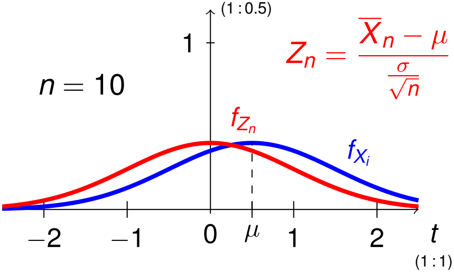


# Teorema del limite centrale

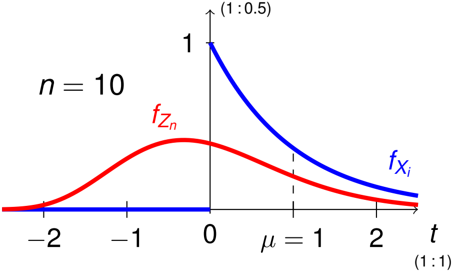
## Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$




$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$




$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

# Teorema del limite centrale

## Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$