Statistica - 4ª lezione

7 marzo 2023

Valore atteso

Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse $x = x_0$, allora $\mu_X = x_0$
- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\,\mathbb{E}[X] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)^2\right]$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\operatorname{var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2)\, f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\,\mathrm{d}z + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2)\, f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z}_{\mathbb{E}[X^2]} - 2\mu_X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\,\mathrm{d}z}_{\mathbb{E}[X]} + \mu_X^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\,\mathrm{d}z}_{1}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left[X\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2) \, f_X(z) \, \mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} z \, f_X(z) \, \mathrm{d}z + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) \, \mathrm{d}z \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu_X \cdot \mu_X + \mu_X^2 \cdot 1\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left[X\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2)\, f_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\,\mathrm{d}z + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu_X \cdot \mu_X + \mu_X^2 \cdot 1\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\operatorname{var}[aX + b] = a^2 \operatorname{var}[X]$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}[aX + b] = a^2 \,\mathrm{var}[X]$:

$$\mathrm{var}[aX + b] = \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\right\}^2\right]$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\left[aX + b\right] = a^2\,\mathrm{var}\left[X\right]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left[aX + b\right] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}\left[aX + b\right]\right\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - (a\mathbb{E}\left[X\right] + b)\right\}^2\right] \qquad \text{linearità di } \mathbb{E}\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\operatorname{var}[aX + b] = a^2 \operatorname{var}[X]$:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}[aX+b] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX+b) - \mathbb{E}[aX+b]\right\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX+\cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}[X]+\cancel{b})\right\}^2\right]\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\operatorname{var}[aX + b] = a^2 \operatorname{var}[X]$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\right\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + \cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}[X] + \cancel{b})\right\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\{a\,(X - \mathbb{E}[X])\right\}^2\right]
\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}[aX + b] = a^2 \, \mathrm{var}[X]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\{(aX + \cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}[X] + \cancel{b})\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[a^2\{(X - \mathbb{E}[X])\}^2\right]\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}[aX + b] = a^2\, \mathrm{var}[X]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\right\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + \cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}[X] + \cancel{b})\right\}^2\right] \\ &= a^2\, \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \qquad \text{linearità di } \mathbb{E} \end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, dz$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}[aX + b] = a^2\, \mathrm{var}[X]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\right\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + \cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}[X] + \cancel{b})\right\}^2\right] \\ &= a^2\, \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = a^2\, \mathrm{var}[X]\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\left[aX + b\right] = a^2\, \mathrm{var}\left[X\right]$
- Per la *deviazione standard* $\mathrm{sd}\left[X\right] = \sqrt{\mathrm{var}\left[X\right]}$ si ha

$$\mathrm{sd}\left[aX + b\right] = |a|\, \mathrm{sd}\left[X\right]$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\,[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\,[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

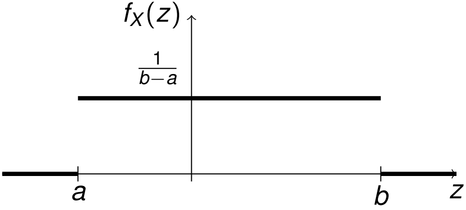
- $\mathrm{var}\,[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}\,[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\,[aX + b] = a^2\,\mathrm{var}\,[X]$
- Per la *deviazione standard* $\mathrm{sd}\,[X] = \sqrt{\mathrm{var}\,[X]}$ si ha

$$\mathrm{sd}\,[aX + b] = |a|\,\mathrm{sd}\,[X]$$

(A volte si scrive anche $\sigma_X = \mathrm{sd}\,[X]$)

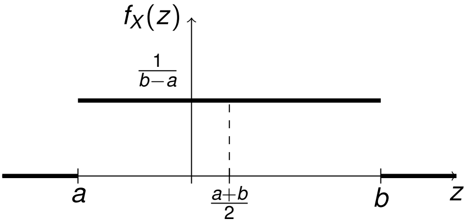
Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Valore atteso e varianza della densità uniforme

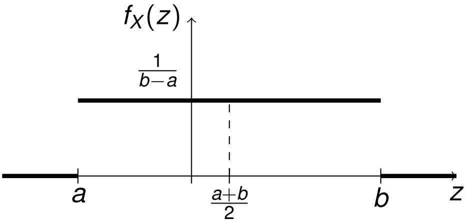
$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

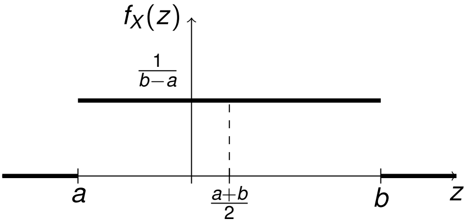
$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

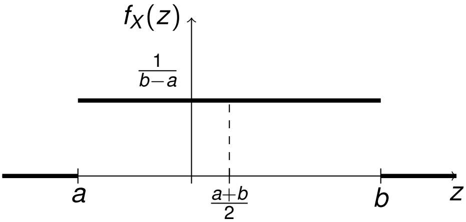


- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ dove

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

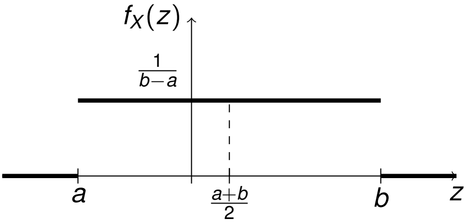


- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ dove

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}z$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

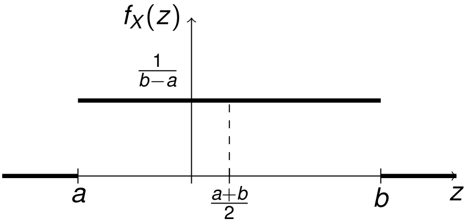


- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ dove

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=a}^{z=b}$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



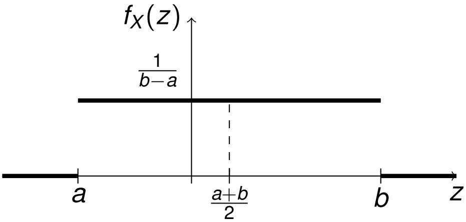
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ dove

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=a}^{z=b} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



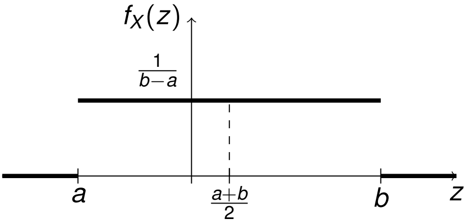
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=a}^{z=b} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \dfrac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO: Se $\varepsilon = k\,\sigma_X$:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq k\,\sigma_X\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k\,\sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

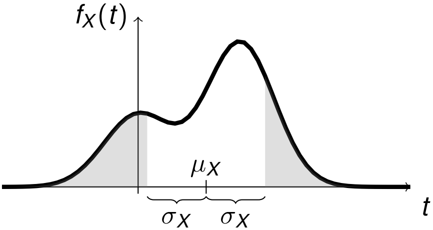
Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO: Se $\varepsilon = k\,\sigma_X$:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq k\,\sigma_X\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k\,\sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



$k = 1$:

 $\leq \frac{1}{1^2} = 100\%$

Disuguaglianza di Chebyshev

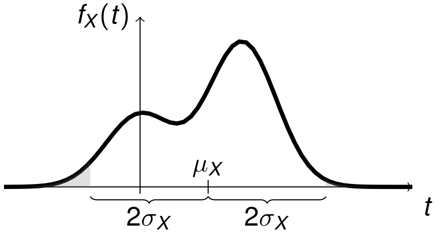
Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO: Se $\varepsilon = k\,\sigma_X$:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq k\,\sigma_X\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k\,\sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



$k = 2$:

$$\leq \frac{1}{2^2} = 25\%$$

Disuguaglianza di Chebyshev

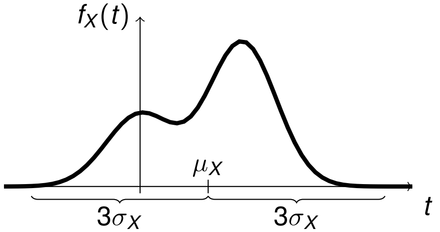
Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO: Se $\varepsilon = k\,\sigma_X$:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq k\,\sigma_X\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k\,\sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



$k = 3$:

$$\leq \frac{1}{3^2} = 11.1\%$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{|z-\mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X| < \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2 f_X(z)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2 f_X(z)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X| < \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2\, f_X(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\;\mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\;\mathrm{d}z \\
&\geq \int_{\color{red}{|z-\mu_X|\geq\varepsilon}} \underbrace{(z - \mu_X)^2}_{\color{red}{\geq\varepsilon^2}} f_X(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&\geq \int_{\color{red}{|z-\mu_X|\geq\varepsilon}} \underbrace{(z - \mu_X)^2}_{\color{red}{\geq\varepsilon^2}} f_X(z)\,\mathrm{d}z \geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} \varepsilon^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} \underbrace{(z-\mu_X)^2}_{\geq\varepsilon^2} f_X(z)\,\mathrm{d}z \geq \varepsilon^2 \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} f_X(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}[X]|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2}\qquad\text{per ogni } \varepsilon>0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}(z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z\\ &= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon}(z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z+\int_{|z-\mu_X|<\varepsilon}(z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z\\ &\geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon}(z-\mu_X)^2\,f_X(z)\,\mathrm{d}z\geq\varepsilon^2\int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon}f_X(z)\,\mathrm{d}z\\ &= \varepsilon^2\,\mathbb{P}\left(|X-\mu_X|\geq\varepsilon\right)\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \geq \varepsilon^2 \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \varepsilon^2\, \mathbb{P}\left(|X-\mu_X| \geq \varepsilon\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2} \geq \mathbb{P}\left(|X-\mu_X| \geq \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

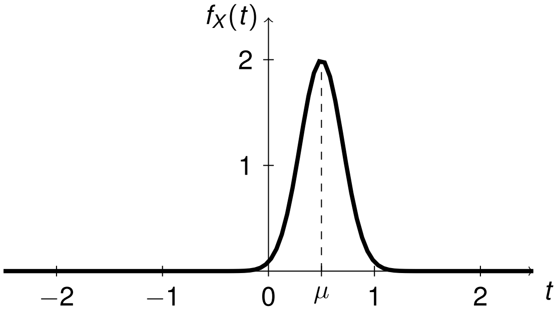
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



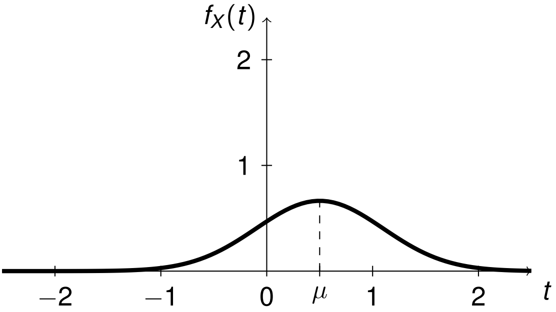
$\mu = 0.5$
$\sigma = 0.2$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



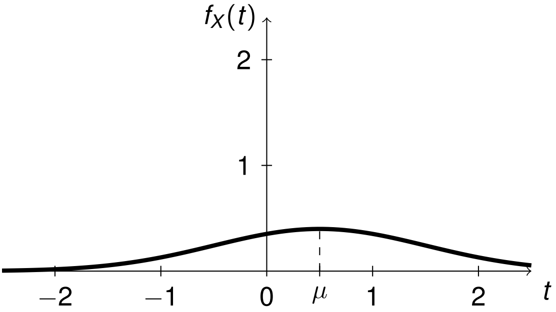
$\mu = 0.5$
$\sigma = 0.6$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



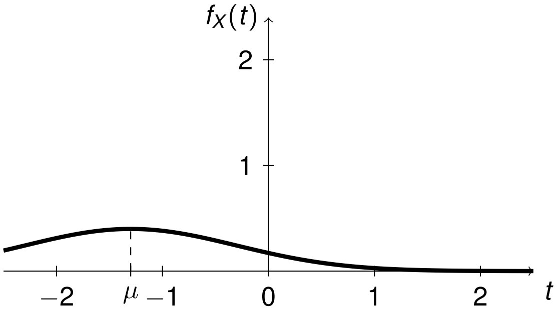
$\mu = 0.5$
$\sigma = 1$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



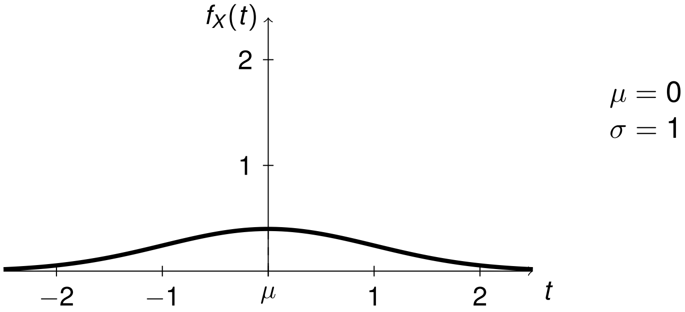
$\mu = -1.3$
$\sigma = 1$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



$N(0, 1)$ è la densità *normale standard*

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\,(|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a} - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{|a|\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t - \ \ a\mu - b}{a\,\sigma}\right)^2\right]$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{|a|\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-(a\mu+b)}{|a|\sigma}\right)^2\right]$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{|a|\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-(a\mu+b)}{|a|\sigma}\right)^2\right]$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione)

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione) :

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \frac{-\mu}{\sigma}$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b, (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione) :

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \frac{-\mu}{\sigma} \sim N\left(\frac{1}{\sigma}\mu + \frac{-\mu}{\sigma}, \left(\left|\frac{1}{\sigma}\right|\sigma\right)^2\right)$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\ (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione) :

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \frac{-\mu}{\sigma} \sim N\left(\frac{1}{\sigma}\mu + \frac{-\mu}{\sigma}\,,\ \left(\left|\frac{1}{\sigma}\right|\,\sigma\right)^2\right) = N(0,1)$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\,(|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione)
- La f.d.r. di $N(0,1)$ si indica con Φ e si trova tabulata

Tavola della funzione di ripartizione della distribuzione N(0,1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524

$$\Phi(0.36) =$$
$$= \Phi(0.3 + 0.06)$$
$$= 0.64058$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione)
- La f.d.r. di $N(0,1)$ si indica con Φ e si trova tabulata

Tavola della funzione di ripartizione della distribuzione N(0,1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524

$\Phi(0.36) =$

$= \Phi(0.3+0.06)$

$= 0.64058$

$q_{0.64058} = 0.36$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\;,\;7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2\ ,\ 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\Bigg(\; 0 \qquad < \quad X \qquad < \quad 5.1 \qquad \Bigg)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\underbrace{3.2}_{\mu},\ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{c} 0 - 3.2 \\ \end{array} < \begin{array}{c} X - \mu \\ \end{array} < \begin{array}{c} 5.1 - 3.2 \\ \end{array} \right)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\,,\,\underbrace{7.6}_{\sigma^2})$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\;,\;7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\;,\;7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\;,\;7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\;,\;\;7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327

$$\Phi(0.689) =$$

$$= \Phi(0.6+0.09)$$

$$= 0.75490$$

ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2\ ,\ 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)$$

$$= 0.75490$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774

$$\Phi(-1.161) =$$

$$= 1 - \Phi(1.161)$$

$$= 1 - 0.87698$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ \ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)$$

$$= 0.75490 - (1 - 0.87698)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774

$$\Phi(-1.161) =$$

$$= 1 - \Phi(1.161)$$

$$= 1 - 0.87698$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\
&= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161) \\
&= 0.75490 - (1 - 0.87698) \\
&= 0.63188 = 63.188\%
\end{aligned}$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

S è un insieme discreto quando tutti i suoi punti sono isolati

$\Rightarrow$ S è finito o al più numerabile

Variabili aleatorie discrete

Definizione

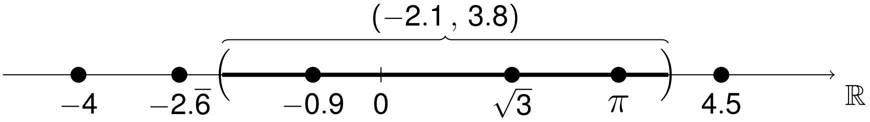
Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

S è un insieme discreto quando tutti i suoi punti sono isolati

$\Rightarrow$ S è finito o al più numerabile

ESEMPIO: $S = \{-4,\ -2.\overline{6},\ -0.9,\ \sqrt{3},\ \pi,\ 4.5\}$ $\qquad I = (-2.1\,,\,3.8)$



Si richiede $\mathbb{P}(X \in (-2.1\,,\,3.8)) = \mathbb{P}\left(X \in \{-0.9,\ \sqrt{3},\ \pi\}\right)$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$:

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S)$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$:

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R})$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$:

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0, 1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S)$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}(\text{“}X = k_1\text{”} \vee \ldots \vee \text{“}X = k_n\text{”})$$

con $I \cap S = \{k_1, \ldots, k_n\}$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}(\text{“}X = k_1\text{”} \vee \ldots \vee \text{“}X = k_n\text{”})$$

$$\overset{(3)}{=} \mathbb{P}(X = k_1) + \ldots + \mathbb{P}(X = k_n) \qquad \text{con } I \cap S = \{k_1, \ldots, k_n\}$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}(\text{“}X = k_1\text{”} \vee \ldots \vee \text{“}X = k_n\text{”})$$

$$= \mathbb{P}(X = k_1) + \ldots + \mathbb{P}(X = k_n) \qquad \text{con } I \cap S = \{k_1, \ldots, k_n\}$$

$$= \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0,1]$ per ogni $k \in S$ (positività)

  perché $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0,1]$ per ogni $k \in S$ (positività)
- $\sum_{k \in S} p_X(k) = 1$ (normalizzazione)

  perché $\mathbb{P}(X \in S) = 1$

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0,1]$ per ogni $k \in S$ (positività)
- $\sum_{k \in S} p_X(k) = 1$ (normalizzazione)

proprietà fondamentali

Variabili aleatorie discrete

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

Variabili aleatorie discrete

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to [0, 1]$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to [0, 1]$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\text{“uscirà } k\text{”}) \\ \text{tutti i } k \in S \text{ sono equiprobabili} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$p_X(k) = p_X(k') \quad \forall k, k' \in S$$

Variabili aleatorie discrete

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} \underbrace{\begin{array}{c} p_X(k) = \mathbb{P}\,(X = k) = \mathbb{P}\,(\text{“uscirà } k\text{”}) \\ \text{tutti i } k \in S \text{ sono equiprobabili} \end{array}} \\ \Downarrow \\ p_X(k) = p_X(k') \quad \forall k, k' \in S \end{array} \qquad \sum_{k \in S} p_X(k) = 1}$$

$$\Downarrow$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

p_X si chiama densità *uniforme discreta* su $\{1,2,3,4,5,6\}$ e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1,2,3,4,5,6\})$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

p_X si chiama densità *uniforme discreta* su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = ???$

Variabili aleatorie discrete

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

p_X si chiama densità *uniforme discreta* su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

$$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = \sum_{k \in \{3,4\}} p_X(k)$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

p_X si chiama densità *uniforme discreta* su $\{1,2,3,4,5,6\}$ e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1,2,3,4,5,6\})$$

$$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = \sum_{k \in \{3,4\}} p_X(k) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

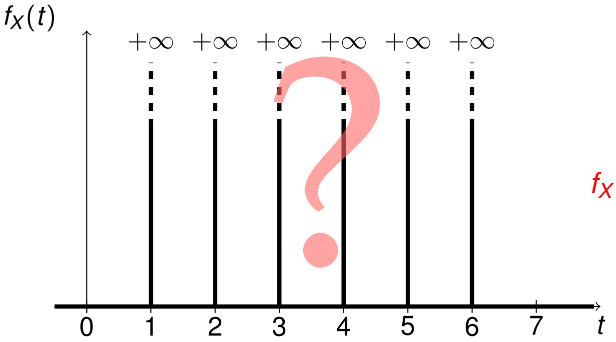
Variabili aleatorie discrete

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$



f_X non esiste!!!

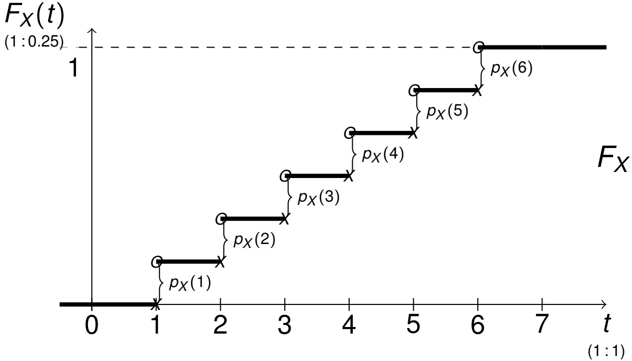
Variabili aleatorie discrete

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$



$$F_X(t) = \sum_{\substack{k \le t \\ k \in S}} p_X(k)$$