- Non si possono consultare libri, note, ed ogni altro materiale o persone durante l'esame ad eccezione delle funzioni Matlab fornite.
- Risolvere i seguenti esercizi con l'ausilio di Matlab.
- La durata del compito è di 90 minuti.
- Questo esame ha 3 domande, per un totale di 30/30 punti.
- Svolgere gli esercizi su fogli protocollo, indicando: nome, cognome, codice persona e data
- Per ciascun esercizio consegnare su webeep un file nominato, ad esempio, "esercizio1.m" con il codice Matlab sviluppato.
- Per utilizzare le funzioni Matlab sviluppate durante il corso, è necessario aggiungere la cartella con il comando `addpath functions2022`.

Esercizio 1 (punti 11)

Si consideri la seguente funzione f definita

$$f(x) = x\sin(2\pi x)e^x \quad \text{per} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Fissando una tolleranza pari a 10^{-6} risolvere i seguenti punti giustificando tutti i passaggi.

(a) (4 punti) Rappresentare graficamente la funzione f e una retta di equazione $y = 0$. Valutare approssimativamente il numero e la posizione degli zeri della funzione f. Utilizzando l'algoritmo di bisezione è possibile calcolare tutti gli zeri di f? Per questi, definire un opportuno intervallo e applicare l'algoritmo di bisezione. Riportare i valori e il numero di iterazioni ottenuti. [T+M]

(b) (3 punti) Introdurre il metodo di Newton per la ricerca degli zeri di una funzione. Per ciascuno zero di f selezionare un opportuno valore iniziale (non uguale allo zero stesso) in modo che l'algoritmo converge. Riportare i valori e il numero di iterazioni ottenuti applicando il metodo di Newton. Cosa si osserva? [T+M]

(c) (4 punti) Introdurre il metodo di Newton modificato dettagliando in quali casi risulta utile. Calcolare nuovamente gli zeri di f, cosa si osserva? [T+M]

Esercizio 2 (punti 10)

Si consideri la seguente funzione f definita

$$f(x) = x^2 \sin^3 x \quad \text{per} \quad x \in [0,2]$$

Sapendo che l'integrale indefinito di f è dato da

$$I(x) = \frac{1}{108}(-81(-2+x^2)\cos(x) + (-2+9x^2)\cos(3x) - 6x(-27\sin(x)+\sin(3x))) + c$$

(a) (4 punti) Introdurre l'algoritmo di quadratura composita del punto medio, specificando l'ordine di accuratezza. Si approssimi l'integrale $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ utilizzando la formula di quadratura composita del punto medio con un numero di sotto-intervalli variabile tra 1 e 10, si valuti analiticamente l'integrale esatto e si riporti il valore dell'errore al variare del numero di sotto-intervalli. Cosa si osserva? [T+M]

(b) (3 punti) Introdurre l'algoritmo di quadratura composita dei trapezi, specificando l'ordine di accuratezza. Si approssimi l'integrale $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ utilizzando la formula di quadratura composita dei trapezi con un numero di sotto-intervalli variabile tra 1 e 10, si valuti analiticamente l'integrale esatto e si riporti il valore dell'errore al variare del numero di sotto-intervalli. Cosa si osserva? [T+M]

(c) (3 punti) Introdurre l'algoritmo di quadratura composita di Simpson, specificando l'ordine di accuratezza. Si approssimi l'integrale $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ utilizzando la formula di quadratura composita di Simpon con un numero di sotto-intervalli variabile tra 1 e 10, si valuti analiticamente l'integrale esatto e si riporti il valore dell'errore al variare del numero di sotto-intervalli. Cosa si osserva? [T+M]

Esercizio 3 (punti 9)

Si consideri il seguente problema differenziale di tipo diffusione-reazione

$$\begin{cases} -u''(x) + \pi u(x) = \pi(4\pi + 1)\sin(2\pi x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 0. \end{cases}$$

La cui soluzione esatta è data da

$$u_{ex}(x) = \sin(2\pi x)$$

(a) (5 punti) Introdurre il metodo degli elementi finiti lineari per un problema ellittico monodimensionale, riportare anche l'ordine di convergenza in L^2 rispetto ad h. [T]

(b) (4 punti) Calcolare l'errore L^2 commesso utilizzando i seguenti passi di discretizzazione $[0.2, 0.1, 0.05, 0.025]$, tale errore è calcolabile come

```
err = sqrt(sum(h*(u - u_ex(x)).^2))
```

Riportare l'ordine di convergenza e discutere il risultato rispetto alla teoria precedentemente esposta. [M]