Statistica - 5ª lezione

14 marzo 2023

Variabili aleatorie discrete

X assolutamente continua		X discreta
$\displaystyle\int_I \dots f_X(z)\,\mathrm{d}z$	$\longrightarrow$	$\displaystyle\sum_{k\in I\cap S} \dots p_X(k)$

Variabili aleatorie discrete

X assolutamente continua		X discreta
$\displaystyle\int_I \dots f_X(z)\,\mathrm{d}z$	$\longrightarrow$	$\displaystyle\sum_{k\in I\cap S} \dots p_X(k)$

Definizioni

Il *valore atteso* e la *varianza* di una v.a. discreta X sono i numeri reali

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\in S} k\, p_X(k) \qquad \mathrm{var}[X] = \sum_{k\in S} (k - \mathbb{E}[X])^2\, p_X(k)$$

Variabili aleatorie discrete

X assolutamente continua		X discreta
$\int_I \ldots f_X(z)\,\mathrm{d}z$	$\longrightarrow$	$\sum_{k\in I\cap S} \ldots p_X(k)$

Definizioni

Il *valore atteso* e la *varianza* di una v.a. discreta X sono i numeri reali

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\in S} k\, p_X(k) \qquad \mathrm{var}[X] = \sum_{k\in S} (k - \mathbb{E}[X])^2\, p_X(k)$$

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{k\in S} g(k)\, p_X(k)$$

Valgono le stesse proprietà e gli stessi risultati del caso continuo

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{c\} \to [0, 1]$$

Variabili aleatorie costanti

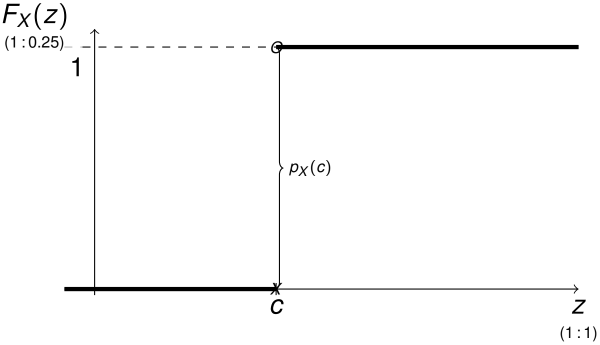
$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &p_X : \{c\} \to [0,1] \\ &p_X(c) = 1 \end{aligned}$$



Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & p_X : \{c\} \to [0,1] \\ & p_X(c) = 1 \end{aligned}$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k \, p_X(k)$

Variabili aleatorie costanti

$X = c \qquad$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0,1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k \, p_X(k) = c \cdot p_X(c)$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k\, p_X(k) = c \cdot p_X(c)$

  $= c \cdot 1 = c$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ & p_X(c) = 1 \end{aligned}$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\mathrm{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 \, p_X(k)$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0,1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\mathrm{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 \, p_X(k) = (c - c)^2 \cdot p_X(c)$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0,1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\mathrm{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 \, p_X(k) = (c-c)^2 \cdot p_X(c)$

  $= (c-c)^2 \cdot 1 = 0$

Variabili aleatorie costanti

$$X = c \qquad \text{qualunque sia il risultato dell'esperimento}$$

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\mathrm{var}[X] = 0$

$$\mathrm{var}[X] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ è una costante}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}\left(X = 0\right) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right)$$

$$p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & p_X : \{0,1\} \to [0,1] \\ & p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \\ & p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) \end{aligned}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

p_X si chiama densità *bernoulliana di parametro q* e si scrive

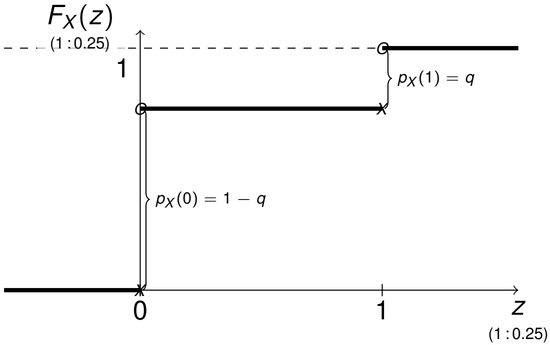
$$X \sim B(1,q)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$



Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k\, p_X(k)$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{ con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k\, p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1)$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k\, p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1)$$
  $$= 0 \cdot (1 - q) + 1 \cdot q$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k \in S} k\, p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) \\ &= 0 \cdot (1-q) + 1 \cdot q \\ &= q \end{aligned}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2$ perché $X^2 = X$ $\begin{pmatrix} 1^2 = 1 \\ 0^2 = 0 \end{pmatrix}$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{array}{l} p_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{array}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2$

  $= q - q^2$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2$

  $= q - q^2$

  $= q(1-q)$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{array}{l} p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{array}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = q(1 - q)$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = q(1 - q)$

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4$^{\text{o}}$ studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17$^{\text{o}}$ studente

$Y_4 =$ peso del 4$^{\text{o}}$ studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17$^{\text{o}}$ studente

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4$^{\text{o}}$ studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17$^{\text{o}}$ studente

$Y_4 =$ peso del 4$^{\text{o}}$ studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17$^{\text{o}}$ studente

Tra loro le variabili alatorie si possono sommare, moltiplicare ecc. :

$$X + Y \qquad\qquad XY \qquad\qquad \ldots$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)**):**

$$\mathrm{var}[X+Y] = \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - \mathbb{E}[X+Y]\}^2\right]$$

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$$\mathrm{var}[X+Y] = \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - \mathbb{E}[X+Y]\}^2\right]$$

$$\overset{(I)}{=} \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])\}^2\right]$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$$\operatorname{var}[X+Y] = \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - \mathbb{E}[X+Y]\}^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\{(X-\mathbb{E}[X]) + (Y-\mathbb{E}[Y])\}^2\right]$$

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$$\mathrm{var}[X+Y] = \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - \mathbb{E}[X+Y]\}^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\{(X-\mathbb{E}[X]) + (Y-\mathbb{E}[Y])\}^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2 + (Y-\mathbb{E}[Y])^2 + 2\,(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right]$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}[X+Y] &= \mathbb{E}\left[\{(X+Y)-\mathbb{E}[X+Y]\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\{(X-\mathbb{E}[X])+(Y-\mathbb{E}[Y])\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2+(Y-\mathbb{E}[Y])^2+2(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right] \\
&\overset{(I)}{=} \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]+\mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}[Y])^2\right]+2\,\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right]
\end{aligned}
$$

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$\mathrm{var}[X+Y] =$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]}_{\mathrm{var}[X]} + \underbrace{\mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}[Y])^2\right]}_{\mathrm{var}[Y]} + \underbrace{2\,\mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\Big]}_{\mathrm{cov}[X,Y]}$$

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

Per n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i] + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right]$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

Per n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right]$$

Come mi sbarazzo di $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right]$?

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\qquad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

$X, \ Y$ indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio	$Y =$ risultato del secondo lancio
$X + Y =$ somma dei due risultati	

$X, \; X + Y$ NON indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$X + Y =$ somma dei due risultati

$X, \; Y, \; X + Y$ NON indipendenti

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4$^{\text{o}}$ studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17$^{\text{o}}$ studente

$Y_4 =$ peso del 4$^{\text{o}}$ studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17$^{\text{o}}$ studente

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$\boxed{X_4 = \text{altezza del } 4^{\text{o}} \text{ studente} \quad X_{17} = \text{altezza del } 17^{\text{o}} \text{ studente}}$

$Y_4 =$ peso del 4^{o} studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17^{o} studente

$X_4,\ X_{17}$ indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$\boxed{X_4 = \text{ altezza del } 4^{\text{o}} \text{ studente}}$ $\quad X_{17} =$ altezza del 17^{o} studente

$Y_4 =$ peso del 4^{o} studente $\quad \boxed{Y_{17} = \text{ peso del } 17^{\text{o}} \text{ studente}}$

$X_4, \; Y_{17}$ indipendenti

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$\boxed{\begin{array}{l} X_4 = \text{ altezza del } 4^{\text{o}} \text{ studente} \\ Y_4 = \text{ peso del } 4^{\text{o}} \text{ studente} \end{array}}$ $\quad \begin{array}{l} X_{17} = \text{ altezza del } 17^{\text{o}} \text{ studente} \\ Y_{17} = \text{ peso del } 17^{\text{o}} \text{ studente} \end{array}$

$X_4, \ Y_4$ NON indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4° studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17° studente

$Y_4 =$ peso del 4° studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17° studente

$X_4, \; Y_4, \; X_{17}, \; Y_{17}$ NON indipendenti

Indipendenza

Definizione (per 2 variabili aleatorie)

Le v.a. $X, \ Y$ si dicono *indipendenti* se

$$\mathbb{P}\left(\text{“}X \in I\text{”} \wedge \text{“}Y \in J\text{”}\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(X \in I\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y \in J\right)$$

per ogni possibile scelta di $I, \ J \subseteq \mathbb{R}$

Indipendenza

Definizione (per n variabili aleatorie)

Le v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si dicono *indipendenti* se

$$\mathbb{P}\left(\text{“}X_1 \in I_1\text{”} \wedge \text{“}X_2 \in I_2\text{”} \wedge \ldots \wedge \text{“}X_n \in I_n\text{”}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(X_1 \in I_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_2 \in I_2\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(X_n \in I_n\right)$$

per ogni possibile scelta di $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$

Indipendenza

Definizione (per n variabili aleatorie)

Le v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si dicono *indipendenti* se

$$\mathbb{P}(\text{“}X_1 \in I_1\text{”} \wedge \text{“}X_2 \in I_2\text{”} \wedge \ldots \wedge \text{“}X_n \in I_n\text{”}) = \\ = \mathbb{P}(X_1 \in I_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in I_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \in I_n)$$

per ogni possibile scelta di $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i]$$

Indipendenza

Definizione (per n variabili aleatorie)

Le v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si dicono *indipendenti* se

$$\mathbb{P}\left(\text{“}X_1 \in I_1\text{”} \wedge \text{“}X_2 \in I_2\text{”} \wedge \ldots \wedge \text{“}X_n \in I_n\text{”}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(X_1 \in I_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_2 \in I_2\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(X_n \in I_n\right)$$

per ogni possibile scelta di $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}\left[X_i\right]$$

ATTENZIONE: Non vale il viceversa

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$ linearità di $\mathbb{E}$

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}\left[X - Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] - \mathbb{E}\left[Y\right]$ linearità di $\mathbb{E}$
- $\mathrm{var}\left[X - Y\right] = \mathrm{var}\left[X\right] + \mathrm{var}\left[-Y\right]$ indipendendenza di $X, \ Y$

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti, allora $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}\left[X - Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] - \mathbb{E}\left[Y\right]$ linearità di $\mathbb{E}$
- $\mathrm{var}\left[X - Y\right] = \mathrm{var}\left[X\right] + \mathrm{var}\left[-Y\right]$ indipendendenza di X, Y

  $= \mathrm{var}\left[X\right] + (-1)^2 \mathrm{var}\left[Y\right]$ quadraticità di var

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$ linearità di $\mathbb{E}$
- $\operatorname{var}[X - Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[-Y]$ indipendendenza di X, Y

  $= \operatorname{var}[X] + (-1)^2 \operatorname{var}[Y]$ quadraticità di var

  $= \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y]$

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$ linearità di $\mathbb{E}$
- $\mathrm{var}[X - Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[-Y]$ indipendendenza di X, Y

  $= \mathrm{var}[X] + (-1)^2 \mathrm{var}[Y]$ quadraticità di var

  $= \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)
2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q
3. le prove non si influenzano tra loro

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)
2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q
3. le prove non si influenzano tra loro

$$Y = \text{numero di successi nelle } n \text{ prove}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

3. le prove non si influenzano tra loro

$$Y = \text{numero di successi nelle } n \text{ prove}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \;\text{ per ogni } i = 1, \dots, n$$

3. le prove non si influenzano tra loro

$$Y = \text{numero di successi nelle } n \text{ prove}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \ \text{ per ogni } i = 1, \dots, n$$

3. le prove non si influenzano tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \dots, X_n \ \text{ sono indipendenti}$$

$$Y = \text{numero di successi nelle } n \text{ prove}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n$$

3. le prove non si influenzano tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \text{ sono indipendenti}$$

$$\begin{aligned} Y &= \text{numero di successi nelle } n \text{ prove} \\ &= X_1 + X_2 + \ldots + X_n \end{aligned}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \ \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n$$

3. le prove non si influenzano tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{ sono indipendenti}$$

$X_1, \ldots, X_n$ sono
(i.) ndipendenti e
(i.) denticamente
(d.) istribuite

$$\begin{aligned} Y &= \text{numero di successi nelle } n \text{ prove} \\ &= X_1 + X_2 + \ldots + X_n \end{aligned}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}\left[Y\right] = ???$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$ linearità di $\mathbb{E}$

  $= \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{q} + \underbrace{\mathbb{E}[X_2]}_{q} + \ldots + \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{q} \qquad X_i \sim B(1, q) \quad \text{per ogni } i$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{q} + \underbrace{\mathbb{E}[X_2]}_{q} + \ldots + \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{q} \\ &= nq\end{aligned}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = ???$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$ indipendenza delle X_i

  $= \mathrm{var}[X_1] + \mathrm{var}[X_2] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\operatorname{var}[Y] = \operatorname{var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

$$= \underbrace{\operatorname{var}[X_1]}_{q(1-q)} + \underbrace{\operatorname{var}[X_2]}_{q(1-q)} + \ldots + \underbrace{\operatorname{var}[X_n]}_{q(1-q)} \qquad X_i \sim B(1, q) \quad \text{per ogni } i$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

$$= \underbrace{\mathrm{var}[X_1]}_{q(1-q)} + \underbrace{\mathrm{var}[X_2]}_{q(1-q)} + \ldots + \underbrace{\mathrm{var}[X_n]}_{q(1-q)}$$

$$= nq(1-q)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = nq(1-q)$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = nq(1-q)$
- $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ per ogni $k \in S = \{0,\, 1,\, 2, \ldots,\, n\}$

dove $\underbrace{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\text{coefficiente binomiale di } n \text{ su } k}$

p_Y è la densità *binomiale* di parametri n e q:

$$Y \sim B(n,\, q)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}\left[Y\right] = nq$
- $\mathrm{var}\left[Y\right] = nq(1-q)$
- $p_Y(k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) q^k (1-q)^{n-k} \quad$ per ogni $k \in S = \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n\}$

dove $\quad \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \ = \ \#\{I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \ \mid \ \#I = k\}$

Per esempio, con $n = 3$ e $k = 2$:

$$\{I \subseteq \{1,2,3\} \ \mid \ \#I = 2\} \ = \ \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right) = \# \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad = 3$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\underbrace{\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”}}_{\text{successo nelle prove } I}$$

Per esempio, con $I = \{1, 3\}$:

$$\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} = \text{“}X_1 = 1\text{”} \wedge \text{“}X_3 = 1\text{”}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\underbrace{\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right)}_{\text{successo solo nelle prove } I}$$

Per esempio, con $I = \{1, 3\}$ e $n = 3 \quad \Rightarrow \quad I^c = \{2\}$:

$$\bigwedge_{i \in I^c} \text{“}X_i = 0\text{”} \ = \ \text{“}X_2 = 0\text{”}$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\underbrace{\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right]}_{\text{esattamente } k \text{ successi}}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) \ = \ \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \Bigg)}_{\text{esattamente } k \text{ successi}}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}\,(Y = k) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}\,(Y = k) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}\,(X_i = 1) \right) \times \left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}\,(X_j = 0) \right) \qquad \text{indipendenza}$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left(\prod_{i \in I} \underbrace{\mathbb{P}(X_i = 1)}_{q} \right) \times \left(\prod_{j \in I^c} \underbrace{\mathbb{P}(X_j = 0)}_{1-q} \right)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \underbrace{\left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = 1) \right)}_{q^k} \times \underbrace{\left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}(X_j = 0) \right)}_{(1-q)^{n-k}}$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = 1) \right)}_{q^k} \times \underbrace{\left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}(X_j = 0) \right)}_{(1-q)^{n-k}}$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = 1) \right) \times \left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}(X_j = 0) \right)$$

$$= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = 1) \right) \times \left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}(X_j = 0) \right)$$

$$= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$$

Densità di Poisson

$$\overbrace{\hspace{10cm}}^{\text{1 anno}}$$

$Y =$ numero di terremoti in un anno

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[Y\right] = 3.72}_{\text{fissato}}$$

Densità di Poisson

$$\overbrace{\underbrace{\rule{6cm}{0.4pt}}_{1^{\circ}\text{ semestre}}\underbrace{\rule{6cm}{0.4pt}}_{2^{\circ}\text{ semestre}}}^{1\text{ anno}}$$

X_i = numero di terremoti nell'i-esimo semestre, $\quad i = 1, 2$

Y = numero di terremoti in un anno $= X_1 + X_2$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]$$

Densità di Poisson

$$\overbrace{\underbrace{\rule{6cm}{0.4pt}}_{1^{\circ}\ \text{semestre}}\underbrace{\rule{6cm}{0.4pt}}_{2^{\circ}\ \text{semestre}}}^{1\ \text{anno}}$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo semestre, $\quad i = 1, 2$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + X_2$

$$\underbrace{\mathbb{E}\,[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \mathbb{E}\,[X_1] + \mathbb{E}\,[X_2]$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$\Rightarrow \quad X_1, X_2 \qquad$ sono i.i.d.

Densità di Poisson

$$\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{1^{\circ}\text{ semestre}}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{2^{\circ}\text{ semestre}}}^{1\text{ anno}}$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo semestre, $\quad i = 1, 2$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + X_2$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]}_{\text{tutti uguali}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{2}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$\Rightarrow \quad X_1, X_2$ sono i.i.d.

Densità di Poisson

$$\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{1^{\mathrm{o}}\text{ quadrimestre}}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{2^{\mathrm{o}}\text{ quadrimestre}}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{3^{\mathrm{o}}\text{ quadrimestre}}}^{1\text{ anno}}$$

X_i = numero di terremoti nell'i-esimo quadrimestre, $\quad i = 1, 2, 3$

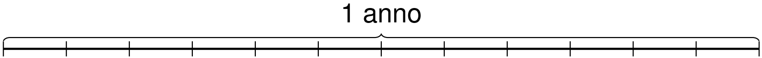
Y = numero di terremoti in un anno $= X_1 + X_2 + X_3$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3]}_{\text{tutti uguali}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{3}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, X_2, X_3 \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson



$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo mese, $\quad i = 1, \ldots, 12$

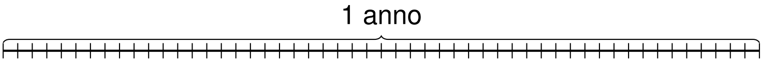
$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_{12}$

$$\underbrace{\mathbb{E}\,[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}\,[X_1] + \ldots + \mathbb{E}\,[X_{12}]}_{\text{tutti uguali}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}\,[X_i] = \frac{3.72}{12}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_{12} \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson



X_i = numero di terremoti nell'i-esima settimana, $\quad i = 1, \ldots, 52$

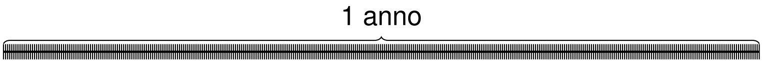
Y = numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_{52}$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_{52}]}_{\text{tutti uguali}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{52}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_{52} \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson



$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo giorno, $\quad i = 1, \ldots, 365$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_{365}$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_{365}]}_{\text{tutti uguali}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{365}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_{365} \quad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson

1 anno

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo istante, $\quad i = 1, \ldots, n$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_n$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = \lambda}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]}_{\text{tutti uguali}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}[X_i] = \frac{\lambda}{n}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson

1 anno

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo istante, $\quad i = 1, \ldots, n$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_n$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = \quad \lambda}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]}_{\text{tutti uguali}} \qquad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{\lambda}{n}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

  $\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \qquad$ sono i.i.d.

- n grande $\quad \Rightarrow \quad$ le X_i possono prendere solo valori $\{0, 1\}$

  $\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{E}[X_i] = \dfrac{\lambda}{n} \quad$ piccolo

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\, q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Uparrow$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo istante, $\quad i = 1, \ldots, n$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_n$

$$\underbrace{\mathbb{E}\,[Y] = \quad \lambda}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}\,[X_1] + \ldots + \mathbb{E}\,[X_n]}_{\text{tutti uguali}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}\,[X_i] = \frac{\lambda}{n}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \qquad \text{sono i.i.d.}$$

- n grande $\quad \Rightarrow \quad$ le X_i possono prendere solo valori $\{0, 1\}$

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \quad \text{con} \quad q = \mathbb{E}\,[X_i] = \frac{\lambda}{n} \quad \text{piccolo}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Y ha (circa!) densità *di Poisson* (o *poissoniana*) di parametro λ

$$Y \approx \mathcal{P}(\lambda)$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$p_Y(k) \;=\; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$p_Y(k) \;=\; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \end{aligned}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\,\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\,\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\,\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}}\,\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\,\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}}\,\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \end{aligned}$$

$$\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \dots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$p_Y(k) \;=\; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}}\frac{n!}{n^k\,(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n^k + O(n^{k-1})}{n^k}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$p_Y(k) \;=\; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}}\underbrace{\frac{n!}{n^k\,(n-k)!}}_{\to 1}$$

$$\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n^k + O(n^{k-1})}{n^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\,\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\,\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}}\,\underbrace{\frac{n!}{n^k\,(n-k)!}}_{\to 1} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\,[Y] = nq$ perché $Y \sim B(n, q)$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\,[Y] = nq \underset{\substack{n\to\infty \\ q\to 0 \\ nq=\lambda}}{\longrightarrow} \lambda$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\,[Y] = \lambda$
- $\mathrm{var}\,[Y] = nq(1-q)$ perché $Y \sim B(n, q)$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\left[Y\right] = \lambda$
- $\mathrm{var}\left[Y\right] = nq(1-q) \underset{\substack{n\to\infty \\ q\to 0 \\ nq=\lambda}}{\longrightarrow} \lambda \cdot 1$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\,[Y] = \lambda$
- $\mathrm{var}\,[Y] = \lambda$