Lab 6 - Approssimazione di integrali e derivate (traccia)

March 12, 2024

1 Lab 6 - Approssimazione numerica di integrali e derivate

2 Formule di quadratura (approssimazione di integrali)

Le formule di quadratura sono tecniche numeriche volte ad approssimare integrali del tipo

$$\int_a^b f(s)ds$$

per mezzo di valutazioni *puntuali* dell'integranda f. In altre parole, una volta fissata un opportuna griglia $\{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\} \subset [a, b]$, l'idea è quella di combinare in maniera opportuna i valori $\{(x_i, f(x_i))\}$ per approssimare l'integrale in questione. Molto spesso, queste formule vengono costruire rimpiazzando f con opportune interpolanti/approssimanti il cui integrale sia facile da calcolare. In quanto segue, assumiamo di utilizzare una griglia uniforme di passo $h > 0$.

2.0.1 Metodo del punto medio (composito)

$$\int_a^b f(s)ds \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) = h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$$

Geometricamente parlando, si sta approssimando l'area sottesa da f con una serie di rettangoli (equivalentemente, stiamo sostituendo f con una sua approssimazione **costante a tratti**).

[ ]:
```python
from niceplots import show
show("Punto medio")
```

2.0.2 Metodo dei trapezi (composito)

$$\int_a^b f(s)ds \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\Big[f(x_i) + f(x_{i+1})\Big](x_{i+1} - x_i) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\Big[f(x_i) + f(x_{i+1})\Big].$$

Geometricamente parlando, si sta approssimando l'area sottesa da f con una serie di trapezi (equivalentemente, stiamo sostituendo f con una sua approssimazione **lineare a tratti**).

[ ]:
```python
show("Trapezi")
```

2.0.3 Metodo di Cavalieri-Simpson (composito)

$$\int_a^b f(s)ds \approx \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})\right].$$

Geometricamente parlando, si sta approssimando l'area sottesa da f con una serie di "sotto parabole" (equivalentemente, stiamo sostituendo f con una sua approssimazione **quadratica a tratti**).

[ ]:
```
show("Simpson")
```

Esercizio 1 Scrivere tre funzioni, chiamate *pmedcomp*, *trapcomp* e *simpcomp*, che implementano rispettivamente le formule di quadratura composite del punto medio, del trapezio e di Simpson su intervalli equispaziati. Tali funzioni dovranno ricevere in ingresso gli estremi di integrazione a e b, il numero di sottointervalli N in cui si vuole suddividere il dominio di integrazione, e la funzione f da integrare; in uscita, dovranno restituire il valore approssimato dell'integrale.

[ ]:
```
import numpy as np
```

[ ]:
```
def pmedcomp(f, a, b, N):
    """ Formula del punto medio composita
    Input:
       f:   funzione da integrare
       a:   estremo inferiore intervallo di integrazione
       b:   estremo superiore intervallo di integrazione
       N:   numero di sottointervalli (N = 1 formula di integrazione semplice)
    Output:
       I:   integrale approssimato """

    ### Bla bla...
    ### Bla bla...
    ### Bla bla...
    ### Bla bla...

    return I
```

[ ]:
```
def trapcomp(f, a, b, N):
    """ Formula dei trapezi composita
    Input:
       f:   funzione da integrare
       a:   estremo inferiore intervallo di integrazione
       b:   estremo superiore intervallo di integrazione
       N:   numero di sottointervalli (N = 1 formula di integrazione semplice)
    Output:
       I:   integrale approssimato """

    ### Bla bla...
    ### Bla bla...
```

```
    ### Bla bla...
    ### Bla bla...

    return I
```

[ ]:
```
def simpcomp(f, a, b, N):
    """ Formula di Cavalieri-Simpson composita
    Input:
        f:   funzione da integrare
        a:   estremo inferiore intervallo di integrazione
        b:   estremo superiore intervallo di integrazione
        N:   numero di sottointervalli (N = 1 formula di integrazione semplice)
    Output:
        I:   integrale approssimato """

    ### Bla bla...
    ### Bla bla...
    ### Bla bla...
    ### Bla bla...

    return I
```

Esercizio 2 Utilizzando le funzioni definite all'Es. 1, approssimate il valore del seguente integrale,

$$I = \int_0^1 x^2 dx.$$

usando $N = 20$ sottointervalli. Calcolate quindi -a mano- il vero valore del suddetto integrale e confrontatelo con le approssimazioni ottenute. Cosa osservate? Commentate opportunamente il risultato ottenuto.

[ ]:
```

```

3 Formule alle differenze finite (approssimazione di derivate)

Data una funzione f ed un punto x_0, la sua derivata nel punto x_0 si può approssimare attraverso le seguenti formule:

- $f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left[f(x_0+h) - f(x_0)\right]$ (differenza in avanti)
- $f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left[f(x_0) - f(x_0-h)\right]$ (differenza all'indietro)
- $f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}\left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right]$ (differenza centrata)

dove $h > 0$ è il cosìdetto *passo*.

Esercizio 3 Sia $f(x) = e^{-x}$. Si calcoli -a mano- il valore della derivata di f nel punto $x_0 = 0.25$, quindi lo si confronti con la sua approssimazione alle differenze finite per $h = 0.05$. In particolare, si calcoli l'errore ottenuto con tre metodi, evidenziando quello che restituisce la miglior approssimazione.

[ ]:

Esercizio 4 Ripetere l'analisi proposta all'Es. 3 facendo variare l'ampiezza del passo h. In particolare, si consideri

$$h \in \{0.2, 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125\}.$$

Verificare graficamente l'ordine di convergenza delle singole formule come previsto dalla teoria (per farlo, utilizzare un opportuno grafico in scala logaritmica).

[ ]:

Esercizio 5 Si consideri ora una partizione uniforme dell'intervallo $[1, 3]$ e si immagini di approssimare la derivata prima di f in ciascun punto della partizione, secondo le formule proposte sopra. Cosa si può dire delle tre diverse formule per l'approssimazione della derivata negli estremi dell'intervallo?

4 Esercizi per casa

Esercizio 6 Ripetere l'analisi proposta all'Es. 4, ma avendo posto $f(x) = 4(x - 0.25)|x - 0.25|$, sapendo che tale funzione è derivabile in $x_0 = 0.25$, e che $f'(x_0) = 0.0$. Cosa si osserva? Perché?

[ ]:

Esercizio 7 Si consideri il seguente integrale,

$$I = \int_0^1 x^5 \sin(\pi x) dx,$$

il cui valore esatto è $(120 - 20\pi^2 + \pi^4)/\pi^5$. Si calcolino gli errori associati alle tre formule di quadratura (punto medio, trapezi, Cavalieri-Simpson) per il calcolo dell'integrale I, al variare dell'ampiezza dei sottointervalli $h = 2^{-k}$, $k = 2, \ldots, 10$.

Si verifichino quindi gli ordini di convergenza previsti dalla teoria impostando un opportuno grafico in scala logaritmica.

[ ]: