

# Statistica - 4<sup>a</sup> lezione

7 marzo 2023

## Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_X(z) dz \quad (\text{A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X])$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X$  è il baricentro della densità di  $X$
- Se  $f_X$  è simmetrica rispetto all'asse  $x = x_0$ , allora  $\mu_X = x_0$
- Se  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b \quad (\text{linearità di } \mathbb{E})$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E} \left[ (X - \mathbb{E}[X])^2 \right]$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E} \left[ (X - \mathbb{E}[X])^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$ :

$$\text{var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2) f_X(z) \, dz$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$ :

$$\begin{aligned}\text{var}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2) f_X(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z) dz - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} z f_X(z) dz + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) dz\end{aligned}$$



## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$ :

$$\begin{aligned} \text{var}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2) f_X(z) dz \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z) dz}_{\mathbb{E}[X^2]} - 2\mu_X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z f_X(z) dz}_{\mathbb{E}[X]} + \mu_X^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) dz}_1 \end{aligned}$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$ :

$$\begin{aligned}\text{var}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2) f_X(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z) dz - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} z f_X(z) dz + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) dz \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu_X \cdot \mu_X + \mu_X^2 \cdot 1\end{aligned}$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$ :

$$\begin{aligned}\text{var}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2) f_X(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z) dz - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} z f_X(z) dz + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) dz \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu_X \cdot \mu_X + \mu_X^2 \cdot 1\end{aligned}$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$
- $\text{var}[aX + b] = a^2 \text{var}[X]$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$
- $\text{var}[aX + b] = a^2 \text{var}[X]$ :

$$\text{var}[aX + b] = \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\}^2\right]$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$
- $\text{var}[aX + b] = a^2 \text{var}[X]$ :

$$\begin{aligned} \text{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - (a\mathbb{E}[X] + b)\}^2\right] \end{aligned} \quad \text{linearità di } \mathbb{E}$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$
- $\text{var}[aX + b] = a^2 \text{var}[X]$ :

$$\begin{aligned}\text{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - (a\mathbb{E}[X] + b)\}^2\right]\end{aligned}$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$
- $\text{var}[aX + b] = a^2 \text{var}[X]$ :

$$\begin{aligned}\text{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - (a\mathbb{E}[X] + b)\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\{a(X - \mathbb{E}[X])\}^2\right]\end{aligned}$$



## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$
- $\text{var}[aX + b] = a^2 \text{var}[X]$ :

$$\begin{aligned}\text{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - (a\mathbb{E}[X] + b)\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[a^2\{(X - \mathbb{E}[X])\}^2\right]\end{aligned}$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$
- $\text{var}[aX + b] = a^2 \text{var}[X]$ :

$$\begin{aligned}\text{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - (a\mathbb{E}[X] + b)\}^2\right] \\ &= a^2 \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \quad \text{linearità di } \mathbb{E}\end{aligned}$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$
- $\text{var}[aX + b] = a^2 \text{var}[X]$ :

$$\begin{aligned}\text{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\{(aX + b) - (a\mathbb{E}[X] + b)\}^2\right] \\ &= a^2 \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = a^2 \text{var}[X]\end{aligned}$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

## PROPRIETÀ:

- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$
- $\text{var}[aX + b] = a^2 \text{var}[X]$
- Per la *deviazione standard*  $\text{sd}[X] = \sqrt{\text{var}[X]}$  si ha

$$\text{sd}[aX + b] = |a| \text{sd}[X]$$

## Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua  $X$  è il numero reale

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

## PROPRIETÀ:

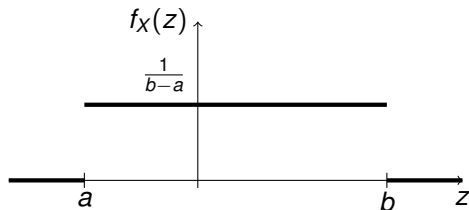
- $\text{var}[X] \geq 0$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$
- $\text{var}[aX + b] = a^2 \text{var}[X]$
- Per la *deviazione standard*  $\text{sd}[X] = \sqrt{\text{var}[X]}$  si ha

$$\text{sd}[aX + b] = |a| \text{sd}[X]$$

(A volte si scrive anche  $\sigma_X = \text{sd}[X]$ )

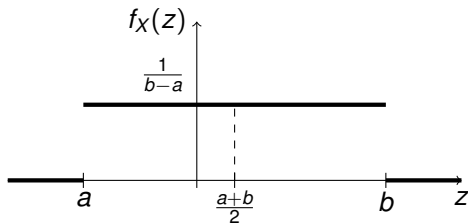
# Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



# Valore atteso e varianza della densità uniforme

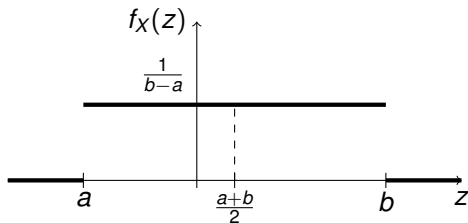
$$f_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$  perché  $f_X$  è simmetrica rispetto a  $z = \frac{a+b}{2}$

# Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

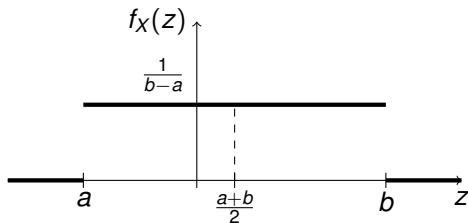


- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$  perché  $f_X$  è simmetrica rispetto a  $z = \frac{a+b}{2}$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$



# Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

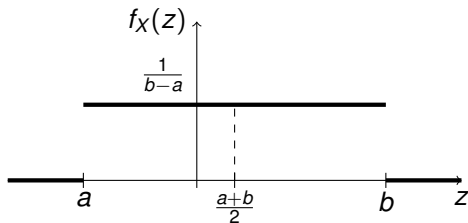


- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$  perché  $f_X$  è simmetrica rispetto a  $z = \frac{a+b}{2}$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$  dove

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z) dz$$

# Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

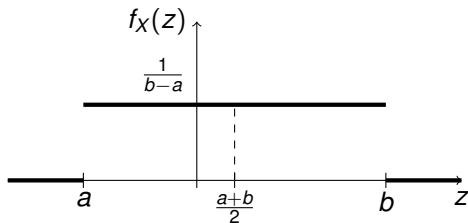


- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$  perché  $f_X$  è simmetrica rispetto a  $z = \frac{a+b}{2}$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$  dove

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z) dz = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a} dz$$

# Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

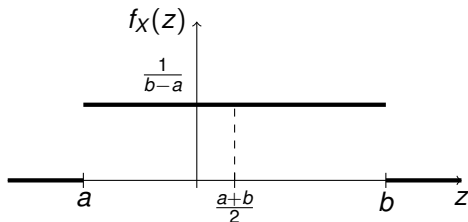


- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$  perché  $f_X$  è simmetrica rispetto a  $z = \frac{a+b}{2}$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$  dove

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z) dz = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a} dz \\ &= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{z=a}^{z=b} \end{aligned}$$

# Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

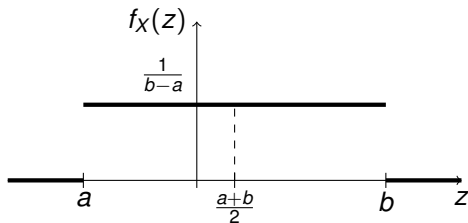


- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$  perché  $f_X$  è simmetrica rispetto a  $z = \frac{a+b}{2}$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$  dove

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z) dz = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a} dz \\ &= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{z=a}^{z=b} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \end{aligned}$$

# Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

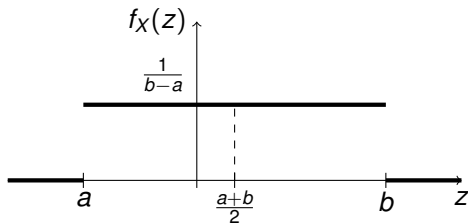


- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$  perché  $f_X$  è simmetrica rispetto a  $z = \frac{a+b}{2}$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z) dz = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a} dz \\ &= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{z=a}^{z=b} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \end{aligned}$$

# Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$  perché  $f_X$  è simmetrica rispetto a  $z = \frac{a+b}{2}$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$   
 $= \frac{(b-a)^2}{12}$

# Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

# Disuguaglianza di Chebyshev

## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**ESEMPIO:** Se  $\varepsilon = k \sigma_X$ :

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq k \sigma_X) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k \sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



# Disuguaglianza di Chebyshev

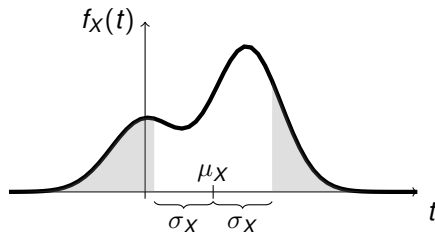
## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**ESEMPIO:** Se  $\varepsilon = k \sigma_X$ :

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq k \sigma_X) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k \sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



$k = 1$ :

$$\text{Gray Area} \leq \frac{1}{1^2} = 100\%$$

# Disuguaglianza di Chebyshev

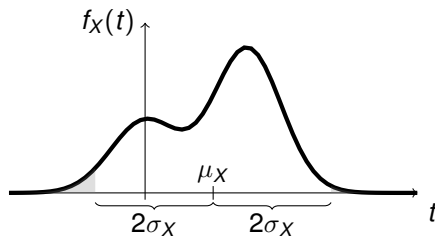
## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**ESEMPIO:** Se  $\varepsilon = k \sigma_X$ :

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq k \sigma_X) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k \sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



$k = 2$ :

$$\text{■} \leq \frac{1}{2^2} = 25\%$$

# Disuguaglianza di Chebyshev

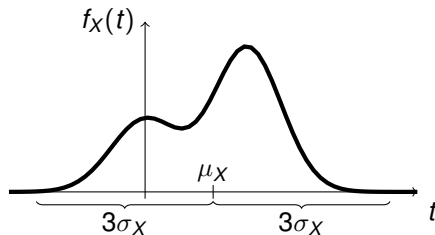
## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

**ESEMPIO:** Se  $\varepsilon = k \sigma_X$ :

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq k \sigma_X) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k \sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



$k = 3$ :

$$\leq \frac{1}{3^2} = 11.1\%$$

# Disuguaglianza di Chebyshev

## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

## DIMOSTRAZIONE:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz$$

# Disuguaglianza di Chebyshev

## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

### DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz \\ &= \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz + \int_{|z - \mu_X| < \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz\end{aligned}$$

# Disuguaglianza di Chebyshev

## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

### DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz \\ &= \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2 f_X(z)}_{\geq 0} \, dz + \int_{|z - \mu_X| < \varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2 f_X(z)}_{\geq 0} \, dz\end{aligned}$$

# Disuguaglianza di Chebyshev

## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

### DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz \\ &= \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz + \int_{|z - \mu_X| < \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz \\ &\geq \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz\end{aligned}$$

# Disuguaglianza di Chebyshev

## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

### DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz \\&= \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz + \int_{|z - \mu_X| < \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) \, dz \\&\geq \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2}_{\geq \varepsilon^2} f_X(z) \, dz\end{aligned}$$



# Disuguaglianza di Chebyshev

## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

### DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz \\&= \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz + \int_{|z - \mu_X| < \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz \\&\geq \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2}_{\geq \varepsilon^2} f_X(z) dz \geq \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} \varepsilon^2 f_X(z) dz\end{aligned}$$

# Disuguaglianza di Chebyshev

## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

### DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz \\&= \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz + \int_{|z - \mu_X| < \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz \\&\geq \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2}_{\geq \varepsilon^2} f_X(z) dz \geq \varepsilon^2 \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} f_X(z) dz\end{aligned}$$

# Disuguaglianza di Chebyshev

## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

### DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz \\&= \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz + \int_{|z - \mu_X| < \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz \\&\geq \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz \geq \varepsilon^2 \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} f_X(z) dz \\&= \varepsilon^2 \mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq \varepsilon)\end{aligned}$$

# Disuguaglianza di Chebyshev

## Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a.  $X$  vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

### DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz \\&= \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz + \int_{|z - \mu_X| < \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz \\&\geq \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z) dz \geq \varepsilon^2 \int_{|z - \mu_X| \geq \varepsilon} f_X(z) dz \\&= \varepsilon^2 \mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2} \geq \mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq \varepsilon)\end{aligned}$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$ :

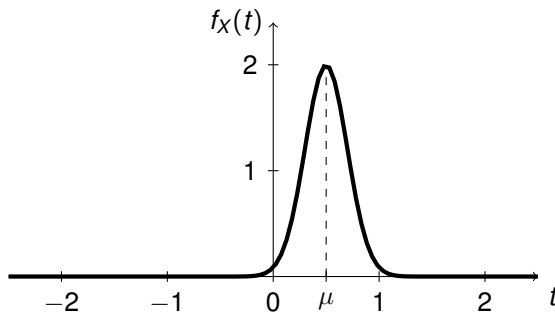
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$  :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



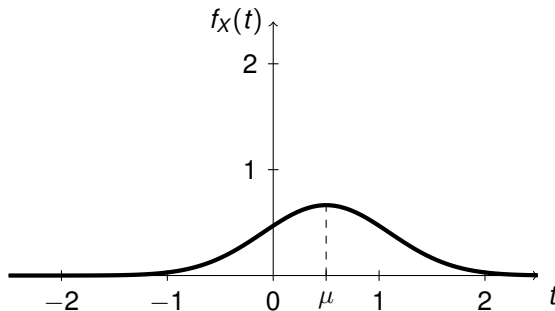
$$\begin{aligned} \mu &= 0.5 \\ \sigma &= 0.2 \end{aligned}$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$  :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



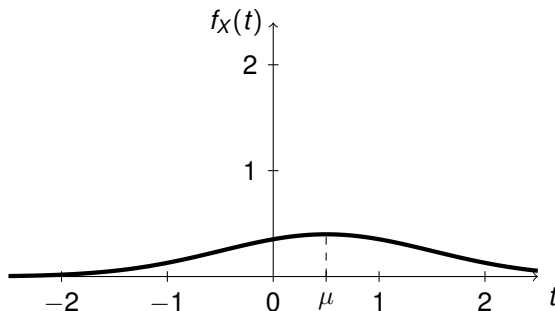
$$\begin{aligned} \mu &= 0.5 \\ \sigma &= 0.6 \end{aligned}$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$ :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



$$\begin{aligned} \mu &= 0.5 \\ \sigma &= 1 \end{aligned}$$

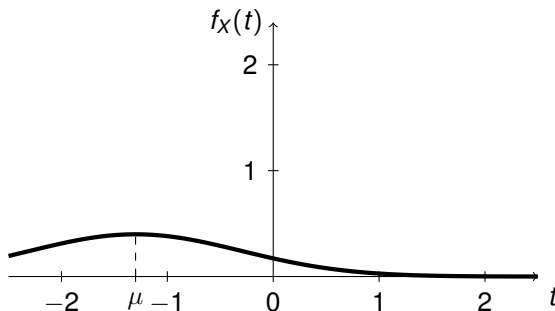


# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$ :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



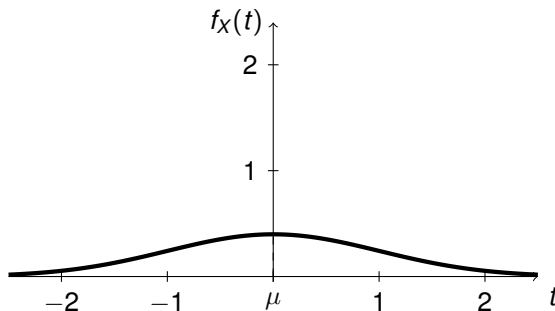
$$\begin{aligned} \mu &= -1.3 \\ \sigma &= 1 \end{aligned}$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$  :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



$$\begin{aligned} \mu &= 0 \\ \sigma &= 1 \end{aligned}$$

$N(0, 1)$  è la densità *normale standard*

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$ :

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X \left( \frac{t-b}{a} \right)$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$ :

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X \left( \frac{t-b}{a} \right) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{t-b}{a} - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$ :

$$\begin{aligned} f_{aX+b}(t) &= \frac{1}{|a|} f_X \left( \frac{t-b}{a} \right) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{t-b}{a} - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t - a\mu - b}{a\sigma} \right)^2 \right] \end{aligned}$$



# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$ :

$$\begin{aligned} f_{aX+b}(t) &= \frac{1}{|a|} f_X \left( \frac{t-b}{a} \right) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{t-b}{a} - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t - (a\mu + b)}{|a|\sigma} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$ :

$$\begin{aligned} f_{aX+b}(t) &= \frac{1}{|a|} f_X \left( \frac{t-b}{a} \right) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{t-b}{a} - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t - (a\mu + b)}{|a|\sigma} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$
- Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , allora  $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  (standardizzazione)

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$
- Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , allora  $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  (standardizzazione):

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \frac{-\mu}{\sigma}$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$
- Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , allora  $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  (standardizzazione):

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \frac{-\mu}{\sigma} \sim N\left(\frac{1}{\sigma}\mu + \frac{-\mu}{\sigma}, \left(\left|\frac{1}{\sigma}\right|\sigma\right)^2\right)$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$
- Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , allora  $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  (standardizzazione):

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \frac{-\mu}{\sigma} \sim N\left(\frac{1}{\sigma}\mu + \frac{-\mu}{\sigma}, \left(\left|\frac{1}{\sigma}\right|\sigma\right)^2\right) = N(0, 1)$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$
- Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , allora  $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  (standardizzazione)
- La f.d.r. di  $N(0, 1)$  si indica con  $\Phi$  e si trova tabulata

Tavola della funzione di ripartizione della distribuzione N(0,1)										
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524

$$\begin{aligned}\Phi(0.36) &= \\ &= \Phi(0.3 + 0.06) \\ &= 0.64058\end{aligned}$$

# Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

## PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$  (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$  (col calcolo)
- $aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$
- Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , allora  $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  (standardizzazione)
- La f.d.r. di  $N(0, 1)$  si indica con  $\Phi$  e si trova tabulata

Tavola della funzione di ripartizione della distribuzione N(0,1)										
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524

$$\begin{aligned}\Phi(0.36) &= \\ &= \Phi(0.3 + 0.06) \\ &= 0.64058\end{aligned}$$

$$q_{0.64058} = 0.36$$



## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1)$$

**ESEMPIO:**

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(0 < X < 5.1\right)$$

## ESEMPIO:

$$X \sim N(\underbrace{3.2}_{\mu}, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(0 - 3.2 < X - \mu < 5.1 - 3.2\right)$$

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, \underbrace{7.6}_{\sigma^2})$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right)\end{aligned}$$

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)\end{aligned}$$

# Densità gaussiana

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)\end{aligned}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59094	0.59481	0.59867	0.60251	0.60635	0.61018	0.61399
0.3	0.61770	0.62149	0.62527	0.62904	0.63279	0.63653	0.64026	0.64398	0.64769	0.65139
0.4	0.65508	0.65877	0.66245	0.66611	0.66975	0.67338	0.67699	0.68059	0.68417	0.68774
0.5	0.69130	0.69487	0.69842	0.70194	0.70544	0.70892	0.71238	0.71583	0.71925	0.72265
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327

$$\begin{aligned}\Phi(0.689) &= \\ &= \Phi(0.6 + 0.09) \\ &= 0.75490\end{aligned}$$



# Densità gaussiana

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161) \\ &= 0.75490\end{aligned}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58319	0.58709	0.59099	0.59488	0.59876	0.60264	0.60651	0.61038	0.61424
0.3	0.61808	0.62186	0.62563	0.62939	0.63314	0.63688	0.64061	0.64433	0.64805	0.65176
0.4	0.65536	0.65905	0.66273	0.66640	0.67006	0.67371	0.67734	0.68096	0.68457	0.68817
0.5	0.69176	0.69534	0.69891	0.70246	0.70599	0.70951	0.71301	0.71650	0.71997	0.72342
0.6	0.72684	0.73025	0.73364	0.73701	0.74036	0.74369	0.74699	0.75027	0.75353	0.75678
0.7	0.75999	0.76318	0.76634	0.76947	0.77257	0.77565	0.77871	0.78175	0.78477	0.78777
0.8	0.79075	0.79371	0.79665	0.79957	0.80247	0.80535	0.80821	0.81105	0.81388	0.81669
0.9	0.81948	0.82226	0.82501	0.82774	0.83045	0.83314	0.83581	0.83846	0.84109	0.84370
1.0	0.84629	0.84886	0.85141	0.85394	0.85645	0.85894	0.86141	0.86387	0.86631	0.86873
1.1	0.87114	0.87353	0.87590	0.87825	0.88058	0.88289	0.88518	0.88745	0.88970	0.89193
1.2	0.89414	0.89633	0.89850	0.90065	0.90278	0.90489	0.90698	0.90905	0.91110	0.91314
1.3	0.91516	0.91717	0.91916	0.92113	0.92308	0.92501	0.92692	0.92881	0.93068	0.93253

$$\begin{aligned}\Phi(-1.161) &= \\ &= 1 - \Phi(1.161) \\ &= 1 - 0.87698\end{aligned}$$

# Densità gaussiana

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161) \\ &= 0.75490 - (1 - 0.87698)\end{aligned}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59482	0.59868	0.60254	0.60639	0.61023	0.61406
0.3	0.61788	0.62169	0.62549	0.62928	0.63306	0.63683	0.64059	0.64434	0.64808	0.65181
0.4	0.65542	0.65912	0.66281	0.66649	0.67016	0.67382	0.67747	0.68111	0.68474	0.68836
0.5	0.69196	0.69555	0.69913	0.70270	0.70626	0.70981	0.71335	0.71688	0.72040	0.72391
0.6	0.72740	0.73089	0.73436	0.73782	0.74127	0.74471	0.74814	0.75156	0.75497	0.75837
0.7	0.76176	0.76514	0.76851	0.77187	0.77521	0.77854	0.78186	0.78517	0.78847	0.79176
0.8	0.79503	0.79829	0.80154	0.80478	0.80799	0.81118	0.81436	0.81753	0.82069	0.82384
0.9	0.82698	0.83011	0.83322	0.83632	0.83941	0.84249	0.84556	0.84861	0.85166	0.85469
1.0	0.85770	0.86070	0.86368	0.86665	0.86961	0.87256	0.87550	0.87843	0.88135	0.88426
1.1	0.88716	0.89005	0.89292	0.89578	0.89862	0.90145	0.90427	0.90708	0.90988	0.91267
1.2	0.91544	0.91820	0.92094	0.92366	0.92636	0.92904	0.93171	0.93437	0.93699	0.93959
1.3	0.94217	0.94474	0.94729	0.94982	0.95233	0.95482	0.95729	0.95974	0.96217	0.96460

$$\begin{aligned}\Phi(-1.161) &= \\ &= 1 - \Phi(1.161) \\ &= 1 - 0.87698\end{aligned}$$

## ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2, 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\ &= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161) \\ &= 0.75490 - (1 - 0.87698) \\ &= 0.63188 = 63.188\%\end{aligned}$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

$S$  è un *insieme discreto* quando tutti i suoi punti sono isolati

$\Rightarrow S$  è finito o al più numerabile

# Variabili aleatorie discrete

## Definizione

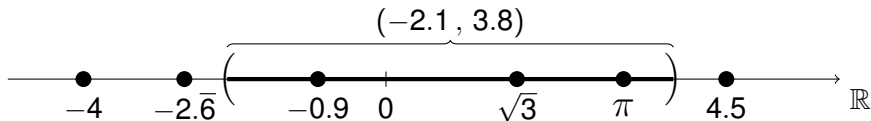
Una v.a.  $X$  si dice **discreta** se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

$S$  è un **insieme discreto** quando tutti i suoi punti sono isolati

$\Rightarrow S$  è finito o al più numerabile

**ESEMPIO:**  $S = \{-4, -2.\bar{6}, -0.9, \sqrt{3}, \pi, 4.5\}$       $I = (-2.1, 3.8)$



Si richiede  $\mathbb{P}(X \in (-2.1, 3.8)) = \mathbb{P}(X \in \{-0.9, \sqrt{3}, \pi\})$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$ :

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S)$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$ :

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R})$$



## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$ :

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S)$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}("X = k_1" \vee \dots \vee "X = k_n")$$

$$\text{con } I \cap S = \{k_1, \dots, k_n\}$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}("X = k_1" \vee \dots \vee "X = k_n")$$

$$\stackrel{(3)}{=} \mathbb{P}(X = k_1) + \dots + \mathbb{P}(X = k_n) \quad \text{con } I \cap S = \{k_1, \dots, k_n\}$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in I) &= \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}("X = k_1" \vee \dots \vee "X = k_n") \\ &= \mathbb{P}(X = k_1) + \dots + \mathbb{P}(X = k_n) \quad \text{con } I \cap S = \{k_1, \dots, k_n\} \\ &= \sum_{k \in I \cap S} p_X(k) \end{aligned}$$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0, 1]$  per ogni  $k \in S$  (positività)  
perché  $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$



## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0, 1]$  per ogni  $k \in S$  (positività)
- $\sum_{k \in S} p_X(k) = 1$  (normalizzazione)

perché  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$

## Definizione

Una v.a.  $X$  si dice *discreta* se esiste un insieme discreto  $S \subset \mathbb{R}$  t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \quad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- $S$  è il *supporto* di  $X$ , e soddisfa  $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di  $X$  è

$$p_X : S \rightarrow [0, 1] \quad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$  per ogni  $I \subseteq \mathbb{R}$

- $p_X(k) \in [0, 1]$  per ogni  $k \in S$  (positività)
  - $\sum_{k \in S} p_X(k) = 1$  (normalizzazione)
- } proprietà fondamentali

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\text{"uscirà } k\text{"})$$

tutti i  $k \in S$  sono equiprobabili



$$p_X(k) = p_X(k') \quad \forall k, k' \in S$$

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\text{"uscirà } k\text{"})$$

tutti i  $k \in S$  sono equiprobabili

$$\sum_{k \in S} p_X(k) = 1$$

$\Downarrow$

$$p_X(k) = p_X(k') \quad \forall k, k' \in S$$

$\Downarrow$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

$p_X$  si chiama densità *uniforme discreta* su  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

$p_X$  si chiama densità *uniforme discreta* su  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

$$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = ???$$



## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

$p_X$  si chiama densità *uniforme discreta* su  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

$$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = \sum_{k \in \{3, 4\}} p_X(k)$$

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

$p_X$  si chiama densità *uniforme discreta* su  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

$$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = \sum_{k \in \{3, 4\}} p_X(k) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

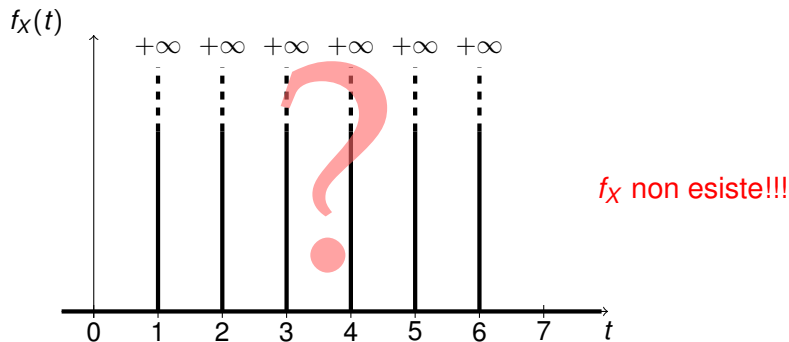
# Variabili aleatorie discrete

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$



# Variabili aleatorie discrete

## ESEMPIO:

$X$  = numero che uscirà nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

