Lab 5 - Interpolazione (completo)

March 7, 2024

1 Interpolazione polinomiale

Lo scopo delle tecniche di interpolazione è quello di ricavare, in forma chiusa, una relazione del tipo $y = p(x)$ a partire da alcune osservazioni sperimentali $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Strettamente parlando, si parla di *interpolazione* se a partire dai dati viene proposta una funzione $\tilde{p}$ che passa **esattamente** dai dati sperimentali, cioè

$$y_i = \tilde{p}(x_i) \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Si parla invece di *approssimazione ai minimi quadrati* se l'obiettivo è quello di trovare una funzione $\hat{p}$ che minimizzi lo scarto quadratico

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{p}(x_i)|^2$$

all'interno di una "classe di possibili funzioni".

Oggi ci focalizzaremo su tre tipologie di interpolazione e approssimazione:

1. Interpolazione polinomiale di Lagrange, dove $\tilde{p}$ è un polinomio di grado $n-1$
2. Interpolazione composita (spline), dove $\tilde{p}$ è un polinomio di grado k *a tratti* (es: spezzata/spline cubica)
3. Approssimazione polinomiale (minimi quadrati), dove $\hat{p}$ è un polinomio di grado $k < n-1$.

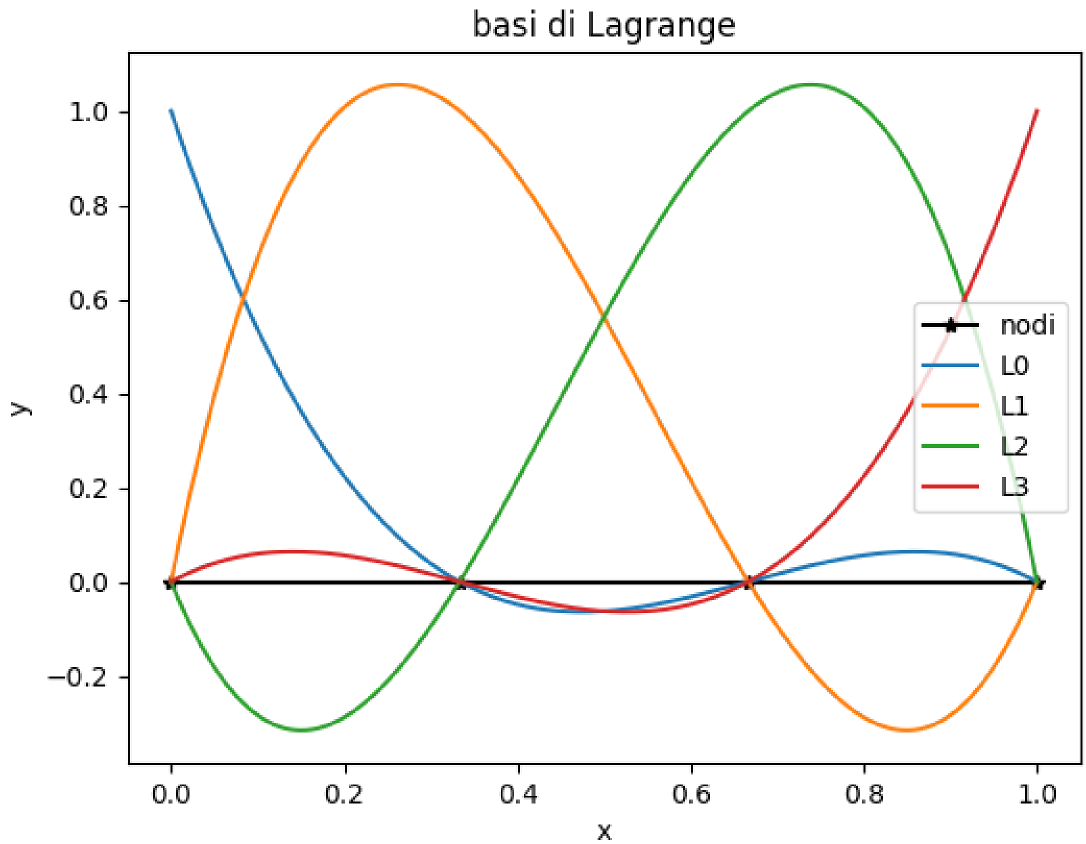
1.1 Esercizio 1

Fissato l'intervallo $[0, 1]$ e il grado deg $= 3$ del polinomio di interpolazione, rappresentare su un'unica figura tutte le funzioni di base di Lagrange $L_i(x)$ per $i = 0, \dots, n$. Utilizzare le funzioni `polyfit` e `polyval` della libreria `numpy`.

[ ]:
```python
# Esempio della costruzione di basi
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from numpy import polyfit, polyval, linspace

# grado del polinomio
deg = 3
# estremi dell'intervallo
a,b = 0,1
# numero dei nodi
n_nodi = deg+1
# nodi nell'intervallo 0 1
```

```python
x_nodi = linspace(a,b,n_nodi)
# punti dove valutiamo il polinomio per la rappresentazione grafica
xx = linspace(a,b,1000)
plt.plot(x_nodi,np.zeros(n_nodi),'k*-',label = 'nodi')

for i in range(n_nodi):
    y_nodi = np.zeros(n_nodi)
    y_nodi[i]=1
    # coefficienti del polinomio di grado deg che interpola i nodi␣
 ↪(x_nodi,y_nodi)
    p = polyfit(x_nodi, y_nodi, deg)
    # interpolante in questo caso è una lambda function
    interpolante = lambda x: polyval(p,x)  # yy = polyval(p,xx)
    # plotto il grafico della i-esima base
    plt.plot(xx,interpolante(xx), label = 'L%d' %i)
    # se voglio posso anche stampare la valutazione delle basi nei nodi. Mi␣
 ↪aspetto che il nodo i-esimo sia della base i-esima sia 1 e i restanti 0
    print('stampo la valutazione della base L%d nei nodi x_nodi:' %i)
    print(interpolante(x_nodi))

# fuori dal ciclo aggiungo le specifiche della figura e la legenda
plt.title("basi di Lagrange")
plt.legend()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.show()
```

```
stampo la valutazione della base L0 nei nodi x_nodi:
[ 1.00000000e+00 -2.22044605e-15 -3.77475828e-15 -3.55271368e-15]
stampo la valutazione della base L1 nei nodi x_nodi:
[ 2.66453526e-15  1.00000000e+00  5.03301104e-15 -4.44089210e-15]
stampo la valutazione della base L2 nei nodi x_nodi:
[-8.88178420e-16 -2.96059473e-15  1.00000000e+00 -8.88178420e-16]
stampo la valutazione della base L3 nei nodi x_nodi:
[0.00000000e+00 3.70074342e-16 5.92118946e-16 1.00000000e+00]
```



1.2 Esercizio 2

Nella tabella qui sotto riportata vengono elencati i risultati di un esperimento eseguito per individuare il legame tra lo *sforzo* σ e la relativa *deformazione* ε.

test	σ [MPa]	ε[cm/cm]
1	0.00	0.00
2	0.06	0.08
3	0.14	0.14
4	0.25	0.20
5	0.31	0.23
6	0.47	0.25
7	0.60	0.28
8	0.70	0.29

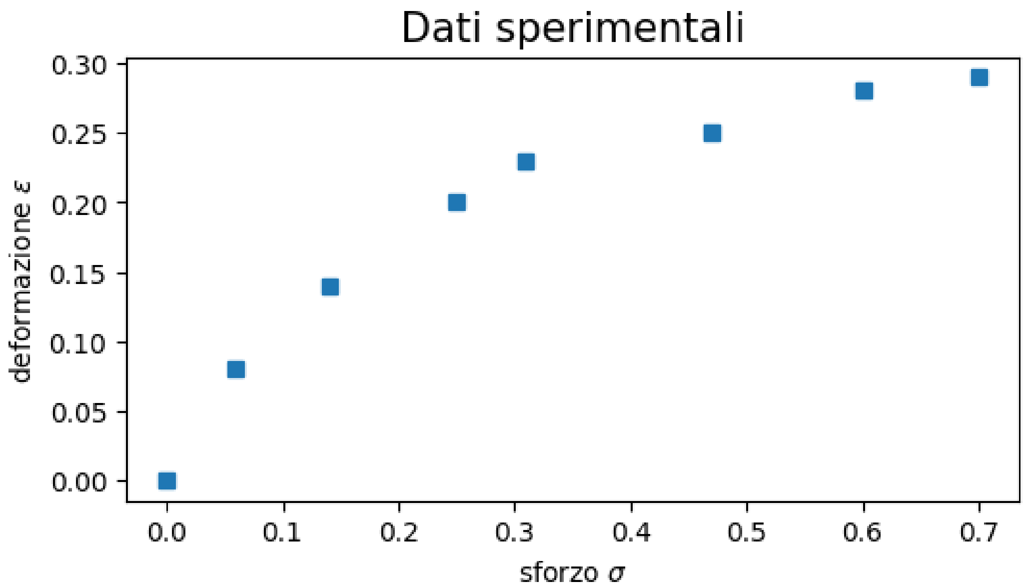
(1)

A partire da questi dati (utilizzando opportune tecniche di interpolazione e approssimazione) si vuole stimare la deformazione in corrispondenza dei valori di sforzo per cui non si ha a disposizione un dato sperimentale.

Esercizio 2.1: rappresentazione grafica dei dati Rappresentare i dati graficamente.

```
[ ]: # sigma ed epsilon
sigma = [0.00, 0.06, 0.14, 0.25, 0.31, 0.47, 0.60, 0.70]
epsilon = [0.00, 0.08, 0.14, 0.20, 0.23, 0.25, 0.28, 0.29]
```

```
[ ]: import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure(figsize = (6, 3))
plt.plot(sigma, epsilon, 's')
plt.xlabel("sforzo $\sigma$")
plt.ylabel("deformazione $\\varepsilon$")
plt.title("Dati sperimentali", fontsize = 15)
plt.show()
```

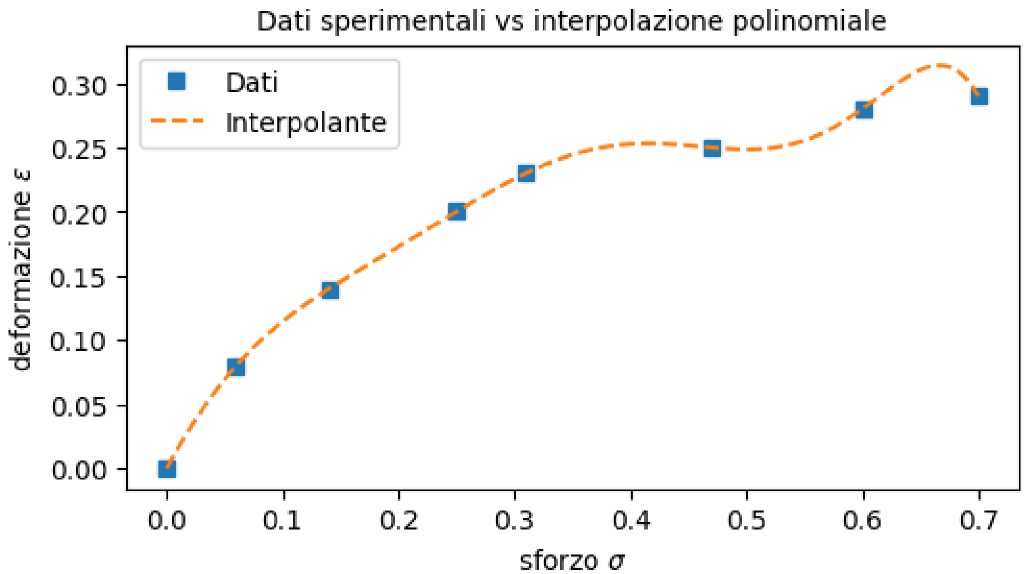


Esercizio 2.2: interpolazione polinomiale Calcolare l'interpolante polinomiale di Lagrange, quindi confrontarla con i dati sperimentali. A tale scopo, si sfruttino le funzioni `polyfit` e `polyval` della libreria `numpy`.

Nota: Si rammenti che un polinomio di Lagrange interpolante n dati ha grado $n - 1$.

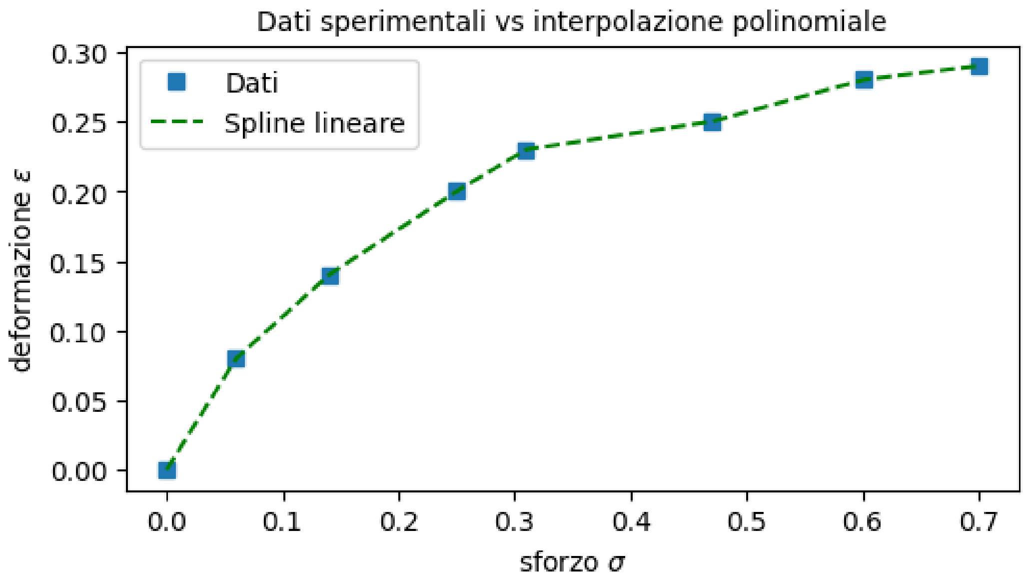
```
[ ]: from numpy import polyfit, polyval, linspace

p = polyfit(sigma, epsilon, deg = len(sigma)-1)
interpolante = lambda x: polyval(p, x)

sigmaplot = linspace(min(sigma), max(sigma), 1000)
plt.figure(figsize = (6, 3))
plt.plot(sigma, epsilon, 's', label = 'Dati')
plt.plot(sigmaplot, interpolante(sigmaplot), '--', label = 'Interpolante')
```

```
plt.xlabel("sforzo $\sigma$")
plt.ylabel("deformazione $\\varepsilon$")
plt.title("Dati sperimentali vs interpolazione polinomiale", fontsize = 10)
plt.legend()
plt.show()
```



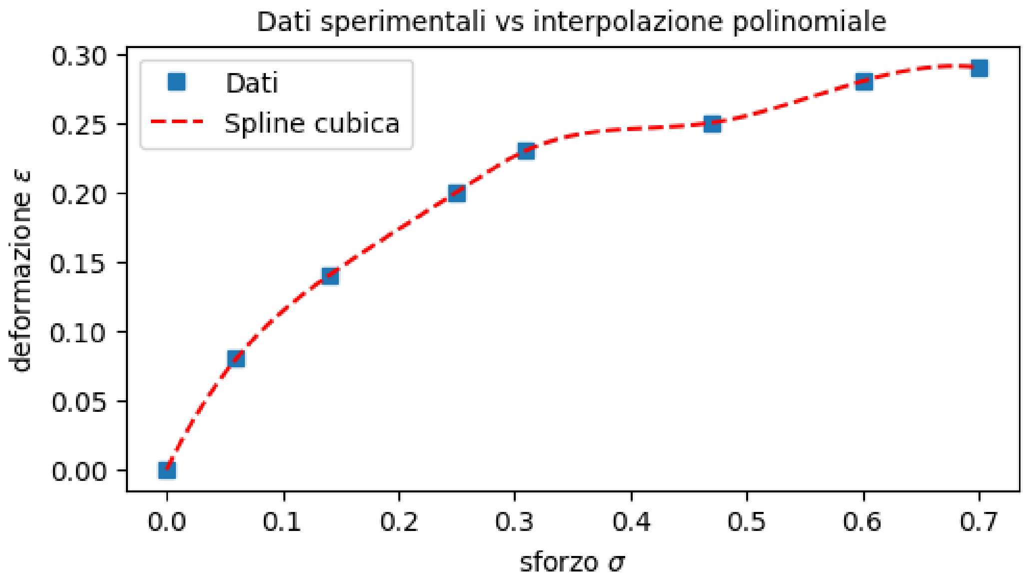
Esercizio 2.3: spline lineare Confrontare i dati sperimentali con la loro interpolante lineare a tratti (spline lineare). Si sfrutti la funzione `interp` della libreria `numpy`.

[ ]:
```
from numpy import interp

spline_lineare = lambda x: interp(x, sigma, epsilon)
plt.figure(figsize = (6, 3))
plt.plot(sigma, epsilon, 's', label = 'Dati')
plt.plot(sigmaplot, spline_lineare(sigmaplot), '--', label = 'Spline lineare',␣
 ↪color = 'green')
plt.xlabel("sforzo $\sigma$")
plt.ylabel("deformazione $\\varepsilon$")
plt.title("Dati sperimentali vs interpolazione polinomiale", fontsize = 10)
plt.legend()
plt.show()
```



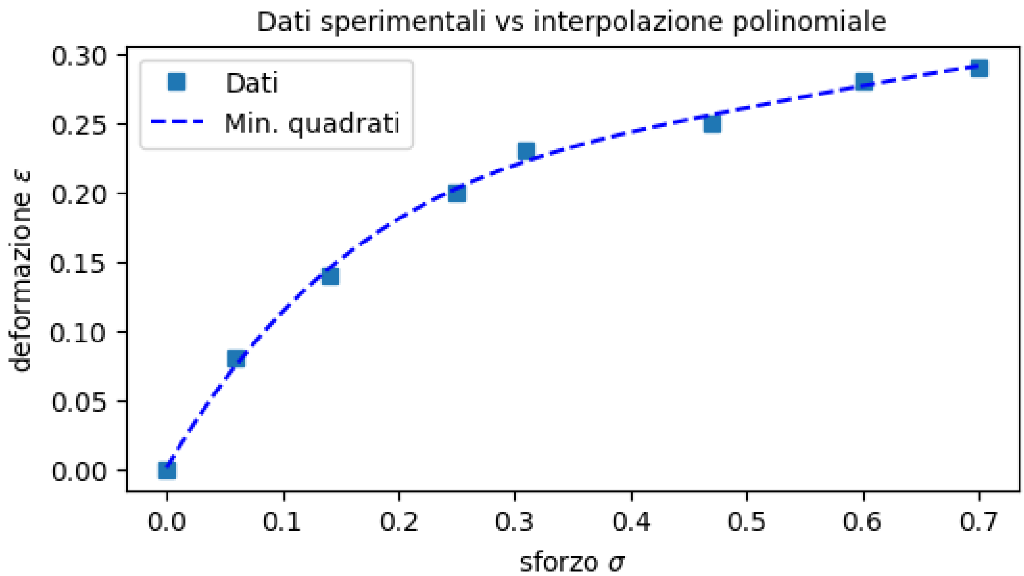
Esercizio 2.4: spline cubica Confrontare i dati sperimentali con la loro interpolante cubica a tratti (spline cubica). Si sfrutti la classe `CubicSpline` presente nel modulo `scipy.interpolate`.

[ ]:
```
from scipy.interpolate import CubicSpline

spline_cubica = CubicSpline(sigma, epsilon)
plt.figure(figsize = (6, 3))
plt.plot(sigma, epsilon, 's', label = 'Dati')
plt.plot(sigmaplot, spline_cubica(sigmaplot), '--', label = 'Spline cubica',␣
 ↪color = 'red')
plt.xlabel("sforzo $\sigma$")
plt.ylabel("deformazione $\\varepsilon$")
plt.title("Dati sperimentali vs interpolazione polinomiale", fontsize = 10)
plt.legend()
plt.show()
```



Esercizio 2.5: minimi quadrati Confrontare i dati sperimentali con il corrispondente polinomio di grado 4 ai minimi quadrati. Si sfruttino nuovamente le funzioni `polyfit` e `polyval` di `numpy`, facendo attenzione all'argomento `deg`.

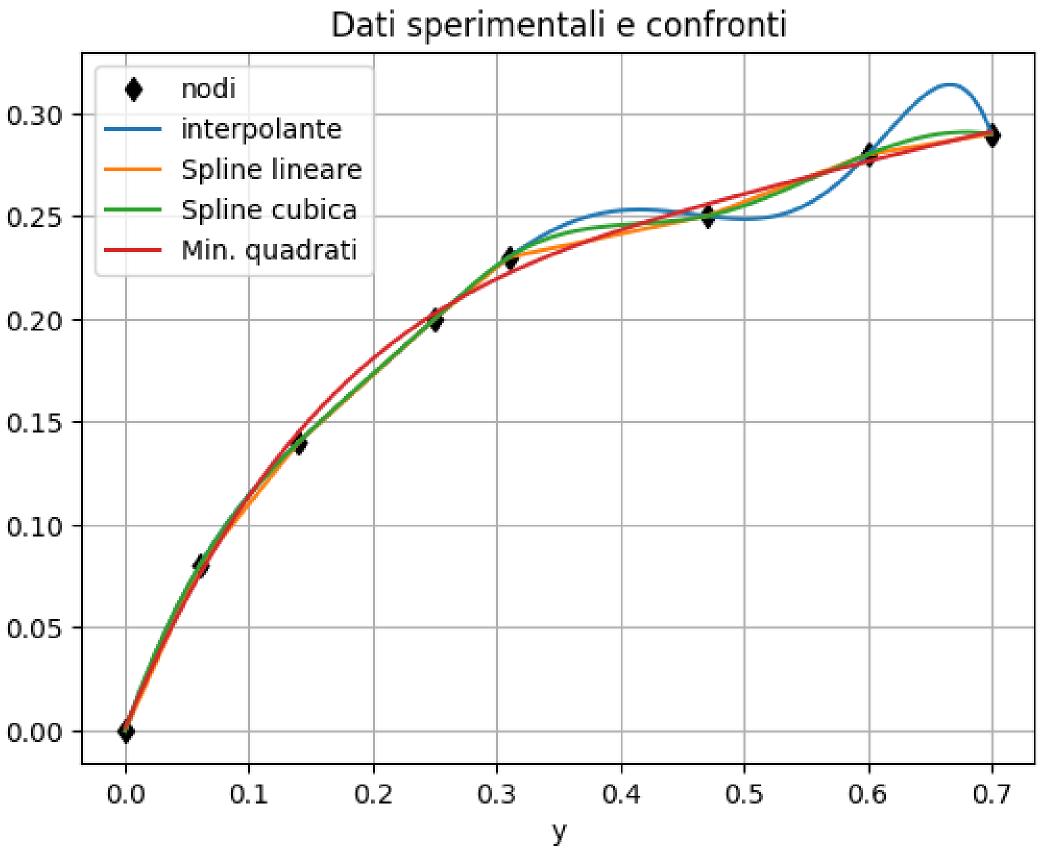
[ ]:
```
p_minq = polyfit(sigma, epsilon, deg = 4)
minq = lambda x: polyval(p_minq, x)

sigmaplot = linspace(min(sigma), max(sigma), 1000)
plt.figure(figsize = (6, 3))
plt.plot(sigma, epsilon, 's', label = 'Dati')
plt.plot(sigmaplot, minq(sigmaplot), '--', color = 'blue', label = 'Min.␣
    ↪quadrati')
plt.xlabel("sforzo $\sigma$")
plt.ylabel("deformazione $\\varepsilon$")
plt.title("Dati sperimentali vs interpolazione polinomiale", fontsize = 10)
plt.legend()
plt.show()
```



Esercizio 2.6: confronto globale

Confrontare, in un unico grafico, i dati sperimentali con tutte le interpolanti e approssimanti

[ ]:
```
# Grafico che rappresenta il processo di estrapolazione
import matplotlib.pyplot as plt
# Estremi dell'intervallo dove valutare il polinomio
a,b = min(sigma), max(sigma)
# punti di valutazione
xx = linspace(a,b,1000)

plt.plot(sigma,epsilon,'kd', label = 'nodi')

# problemi nell'interpolante per il valore 0.75, struttura molto rigida
plt.plot(xx,interpolante(xx), label='interpolante')
# spline lineare nei valori fuori dall'intervallo di definizione rimane costante
plt.plot(xx,spline_lineare(xx), label='Spline lineare')
# flessibilità spline cubiche
plt.plot(xx,spline_cubica(xx), label='Spline cubica')
# flessibilità minimi quadrati
plt.plot(xx,minq(xx), label = 'Min. quadrati')
plt.legend()
plt.title('Dati sperimentali e confronti')
plt.grid()
plt.xlabel('x')
plt.xlabel('y')
plt.show()
```



Commento: Nella figura sopra è riportato il confronto grafico tra tutte le interpolanti, da cui si nota che, rispetto alle altre, l'interpolazione polinomiale di Lagrange è la meno adatta a descrivere il legame sforzi–deformazioni, in quanto presenta un andamento oscillante ad un estremo. Le altre interpolazioni sembrano invece avere andamenti qualitativamente migliori. In particolare l'interpolazione lineare composita risulta ideale, in quanto fornisce un dato di prima approssimazione del valore incognito senza introdurre alcun tipo di oscillazione. La spline, invece, sebbene produca una curva più regolare, può introdurre delle oscillazioni, che in alcuni casi portano a valori al di fuori dei limiti previsti dal buon senso, ma non è questo il caso.

Esercizio 2.7: confronto approssimazioni in extra points

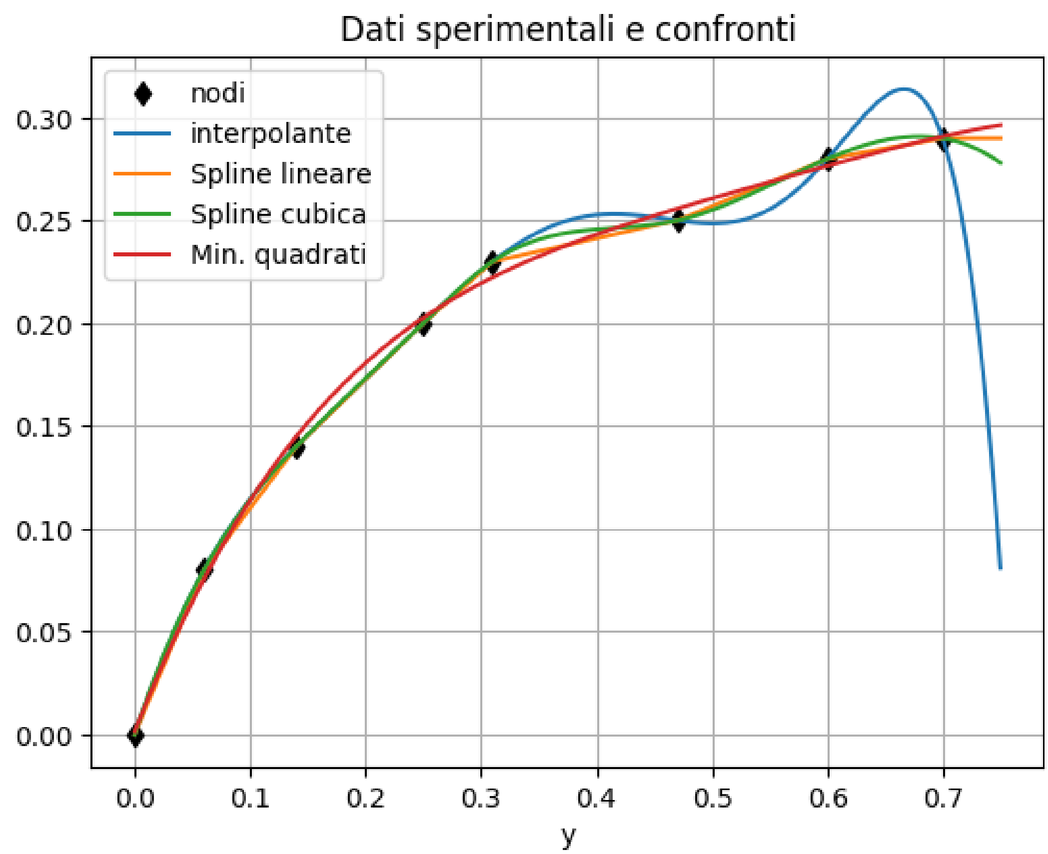
Confrontare le approssimazioni proposte dalle tre interpolanti e dell'approssimazione ai minimi quadrati quando $\sigma = 0.4$ MPa e $\sigma = 0.75$ MPa, si commentino i risultati ottenuti.

[ ]:
```
print("\033[1mValore stimato per sigma = 0.4\033[0m")
print("Lagrange\tSpline lineare\tSpline cubica\tMinimi quadrati (grado 4)")
print("%.4f\t\t%.4f\t\t%.4f\t\t%.4f" % (interpolante(0.4), spline_lineare(0.4),␣
  ↪spline_cubica(0.4), minq(0.4)))

print("\n\033[1mValore stimato per sigma = 0.75\033[0m")
print("Lagrange\tSpline lineare\tSpline cubica\tMinimi quadrati (grado 4)")
```

```
print("%.4f\t\t%.4f\t\t%.4f\t\t%.4f" % (interpolante(0.75), spline_lineare(0.
↪75), spline_cubica(0.75), minq(0.75)))
```

```
Valore stimato per sigma = 0.4
Lagrange        Spline lineare  Spline cubica   Minimi quadrati (grado 4)
0.2527          0.2413          0.2457          0.2432

Valore stimato per sigma = 0.75
Lagrange        Spline lineare  Spline cubica   Minimi quadrati (grado 4)
0.0810          0.2900          0.2781          0.2964
```

[ ]:
```
# Grafico che rappresenta il processo di estrapolazione

# Estremi dell'intervallo dove valutare il polinomio
a,b = min(sigma), 0.75
# punti di valutazione
xx = linspace(a,b,1000)

plt.plot(sigma,epsilon,'kd', label = 'nodi')

# problemi nell'interpolante per il valore 0.75, struttura molto rigida
plt.plot(xx,interpolante(xx), label='interpolante')
# spline lineare nei valori fuori dall'intervallo di definizione rimane costante
plt.plot(xx,spline_lineare(xx), label='Spline lineare')
# flessibilità spline cubiche
plt.plot(xx,spline_cubica(xx), label='Spline cubica')
# flessibilità minimi quadrati
plt.plot(xx,minq(xx), label = 'Min. quadrati')
plt.legend()
plt.title('Dati sperimentali e confronti')
plt.grid()
plt.xlabel('x')
plt.xlabel('y')
plt.show()
```



Commento: I risultati confermano quanto detto in precedenza. In particolare l'interpolazione polinomiale di Lagrange risulta inadeguata per rappresentare la legge tra sforzi e deformazioni, con valori elevati di sforzo. Per $\sigma = 0.40$ MPa l'interpolazione composita lineare, l'approssimante ai minimi quadrati di grado 4 e la spline cubica forniscono valutazioni ragionevoli. Tuttavia l'interpolante composita lineare è una funzione solamente C^0 sull'intervallo considerato, mentre l'approssimante ai minimi quadrati e la spline garantisce una maggiore regolarità essendo una funzione C^2. Discorso analogo può essere ripetuto per il valore $\sigma = 0.75$ MPa, dove tuttavia emergono i limiti della interpolazione lineare composita che non fornisce un valore costante a causa della sua natura.

1.3 Esercizio 3: Il fenomeno di Runge

L'interpolazione polinomiale può anche essere utilizzata per approssimare una data funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. In questo caso, si valuta f su di una griglia con $n + 1$ nodi, $\{x_0, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ e la si approssima con l'interpolante $\tilde{p} = \Pi_n f$ passante per i nodi $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^n$. La notazione $\Pi_n f$ sta ad enfatizzare che l'interpolante dipende dalla funzione f e dal numero di intervalli della partizione n. La qualità dell'approssimazione può essere indagata a posteriori valutando l'errore globale

$$E_n := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$$

sull'intervallo $[a, b]$. Come vedremo, nel caso di interpolazione polinomiale di Lagrange, la numerosità dei nodi non basta a garantire una buona approssimazione: occorre anche posizionare i nodi in modo opportuno!

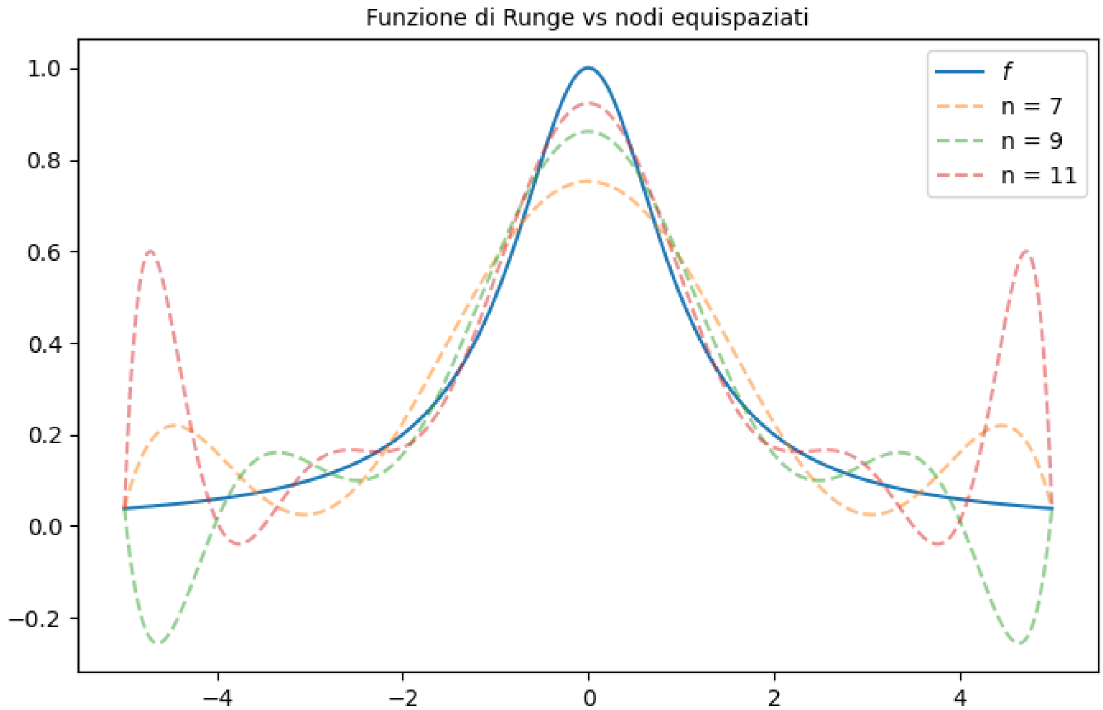
Esercizio 3.1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

sull'intervallo $[a, b] = [-5, 5]$. Si approssimi f usando l'interpolazione polinomiale di Lagrange su di una griglia equispaziata con $n = 7, 9, 11$ intervalli. Confrontare graficamente la funzione f con le varie interpolanti. Calcolare inoltre gli errori E_n: che cosa sta succedendo all'aumentare di n?

[ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import cos, pi, arange, linspace, polyfit, polyval

# lambda function per la f
f = lambda x: 1.0/(1+x**2)
# estrmi dell'intervallo
a, b = -5, 5
xplot = linspace(a, b, 1000)


plt.figure(figsize = (8, 5))
plt.plot(xplot, f(xplot), label = '$f$')
e = []
for n in [7, 9, 11]:
  x = linspace(a, b, n+1)
  p = polyfit(x, f(x), deg = n)
  plt.plot(xplot, polyval(p, xplot), '--', label = 'n = %d' % n, alpha = 0.5)
  e.append(abs(f(xplot)-polyval(p, xplot)).max())

print("\nErrore al variare di n: " + str(e))
plt.title("Funzione di Runge vs nodi equispaziati", fontsize = 10)
plt.legend()
plt.show()
```

```
Errore al variare di n: [0.24733818290101317, 0.3002845435175577,
0.5567287570018075]
```



Esercizio 3.2 Si ripeta il punto precedente, utilizzando questa volta i nodi di Chebyshev. Si rammenta che, scelto n, sull'intervallo $\hat{I} = [-1, 1]$, essi sono dati da

$$\hat{x}_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right),$$

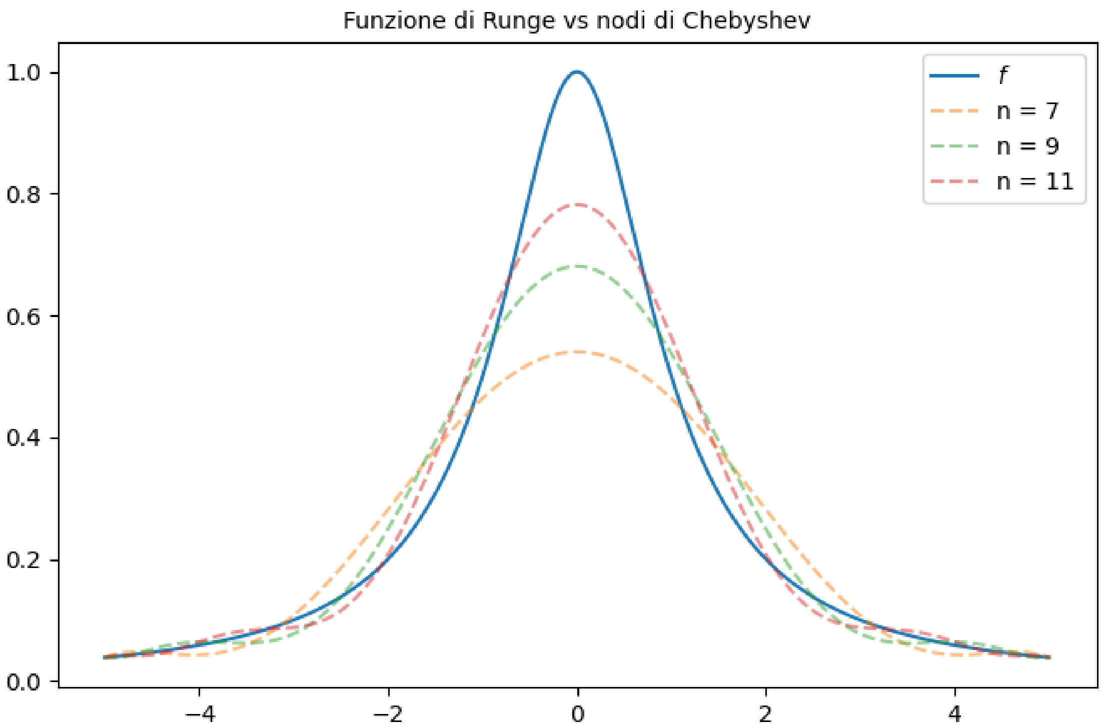
dove $i = 0, \ldots, n$. I nodi possono essere trasferiti su un generico intervallo $[a, b]$ con la trasformazione

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\hat{x}_i.$$

```
[ ]: # definire la funzione che restituisca i nodi di Chebychev
def nodi_Chebyshev(a,b,n):
    xhat = -cos(pi*arange(n+1)/n)
    # trasformazione
    x = (a+b)/2 + (b-a)*xhat/2
    return x

# rappresentazione grafica dell'esercizio precedente
plt.figure(figsize = (8, 5))
plt.plot(xplot, f(xplot), label = '$f$')
e = []
for n in [7, 9, 11]:
  x = nodi_Chebyshev(a,b,n)
  p = polyfit(x, f(x), deg = n-1)
```

```
  plt.plot(xplot, polyval(p, xplot), '--', label = 'n = %d' % n, alpha = 0.5)
  e.append(abs(f(xplot)-polyval(p, xplot)).max())

print("\nErrore al variare di n: " + str(e))
plt.title("Funzione di Runge vs nodi di Chebyshev", fontsize = 10)
plt.legend()
plt.show()
```

```
Errore al variare di n: [0.4595822991030174, 0.3190741528824297,
0.21768685765556217]
```



1.4 Esercizio 4

Si consideri la funzione $f(x) = xsin(x)$.

1. Si disegni il grafico della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-2, 6]$.
2. Si costruiscano i polinomi interpolanti di Lagrange $\Pi_n f$ di grado $n = 2, 4, 6$ relativi ad una distribuzione di nodi equispaziati.
3. Si rappresenti graficamente l'andamento dell'errore $\varepsilon(x) = |f(x) - \Pi_n f(x)|$ e si calcoli la norma infinito:

$$\| \varepsilon(x) \|_\infty = \max_{x\in[-2,6]} |f(x) - \Pi_n f(x)|.$$

Commentare i risultati.

```
[ ]: # rappresentazione grafica di f
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from numpy import linspace, polyval, polyfit

# usa la lambda function per rappresentare la f
f = lambda x: x*np.sin(x)
# estremi dell'intervallo
a,b = -2,6
xx=linspace(a,b,1000)

# plto della funzione f
plt.plot(xx,f(xx), 'k-', label='f')
# inizializzo le liste degli errori
err=[]
errorMax=[]

deg = [2,4,6]
# ciclo for
for i in deg:
  x_nodi = linspace(a,b,i+1)
  p = polyfit(x_nodi, f(x_nodi), i)
  interpolante = lambda x: polyval(p,x)
  plt.plot(xx,interpolante(xx), label ='poli %d' %i)
  err.append(abs(f(xx)-interpolante(xx)))
  errorMax.append(np.max(err))

plt.title("grafico della funzione $f(x) = x\sin(x)$")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.show()

plt.figure(2)
j=0
for i in deg:
  plt.plot(xx,err[j], label = 'error: poli %d' %i)
  j = j+1

plt.title("grafico dell'errore")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.show()
```

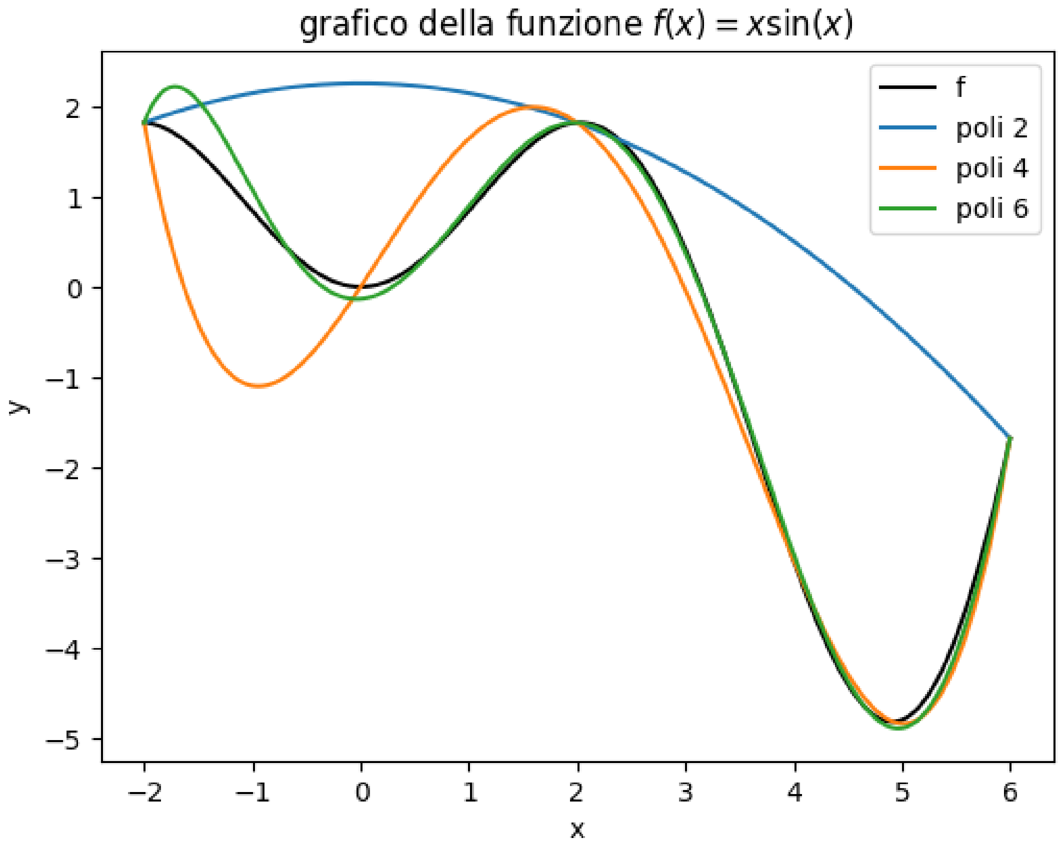
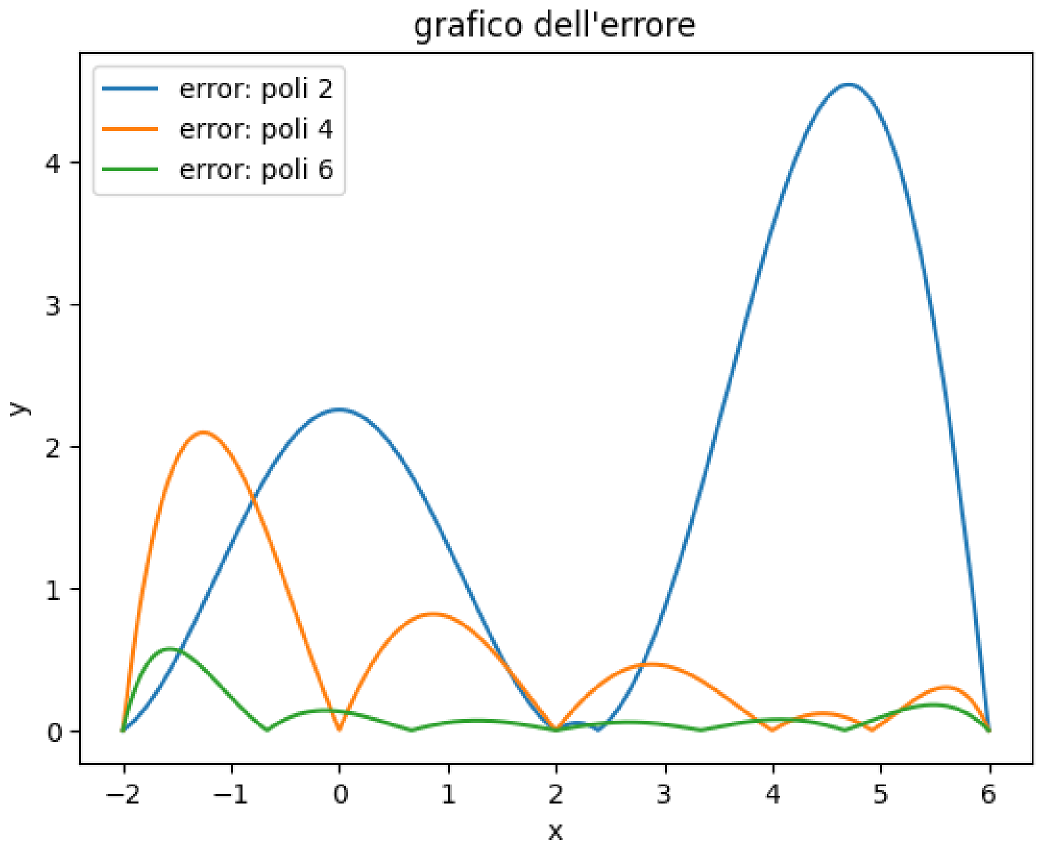


grafico della funzione $f(x) = x\sin(x)$
f
poli 2
poli 4
poli 6
y
x
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6



Commento: Nella prima figura si possono vedere a confronto i grafici della funzione e dei polinomi interpolatori di grado 2, 4, 6. Nella seconda figura si osserva l'andamento dell'errore e quello che si può notare è che questo diminuisce all'aumentare del grado del polinomio di interpolazione. Si osserva che aumentando il grado del polinomio interpolatore si riesce, in questo caso, ad approssimare meglio la funzione richiesta.