2024_01_25_exam

April 23, 2024

1 Esame del 25 gennaio 2024

- Non si possono consultare libri, note, ed ogni altro materiale o persone durante l'esame ad eccezione delle funzioni Python fornite.
- Risolvere i seguenti esercizi con l'ausilio di Python.
- La durata del compito è di 90 minuti.
- Questo esame ha 3 domande, per un totale di 30/30 punti.
- Svolgere gli esercizi marcati con [T] su fogli protocollo, indicando: nome, cognome, codice persona e data

#Esercizio 1 (10 punti)

Consideriamo la seguente funzione definita sull'intervallo $(-1, 1)$.

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

a) (3 punti) [P] Approssimare f mediante interpolazione polinomiale Lagrangiana su nodi equispaziati di grado $n = [5, 10, 15]$. Riportare graficamente i polinomi interpolanti ottenuti sovrapposti alla funzione f e l'errore in spazio; stampare a schermo il massimo dell'errore nei tre casi,

$$\mathrm{err}_n = \max_{x \in (-1,1)} |f(x) - \Pi_n f(x)|$$

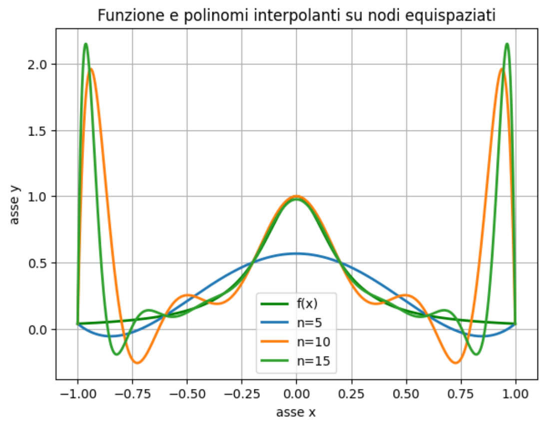
Cosa osserviamo?

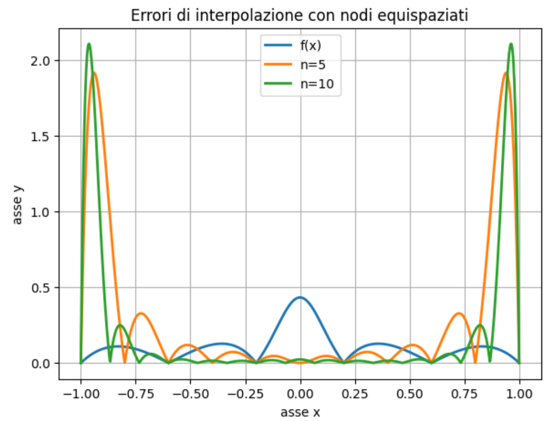
Soluzione. Possiamo costruire l'inerpolazione polinomiale Lagrangiana su nodi equispaziati come segue:

[ ]:
```
# Punto (a)
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Dati del problema
a,b = -1,1
fun = lambda x : 1/(1 + 25 * x**2)
```

```python
grado = [5,10,15]
err_max = []

# Coordinate per plottare la funzione
x_dis = np.linspace(a,b,1000)
f_dis = fun(x_dis)

# Plot funzione
plt.figure(figsize = (15,5))
plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(x_dis,f_dis,'g',linewidth = 2)
plt.title('Funzione e polinomi interpolanti su nodi equispaziati')
plt.xlabel('asse x')
plt.ylabel('asse y')
plt.grid()

plt.subplot(1,2,2)
plt.title('Errori di interpolazione con nodi equispaziati')
plt.xlabel('asse x')
plt.ylabel('asse y')
plt.grid()

for n in grado:
  # Nodi di interpolazione
  x_nod = np.linspace(a, b, n+1)
  f_nod  = fun(x_nod)
  # Polinomio interpolante
  P = np.polyfit(x_nod, f_nod, n)
  # Coordinate per plottare l'interpolante
  poly_dis = np.polyval(P, x_dis)

  plt.subplot(1,2,1)
  plt.plot(x_dis, poly_dis, linewidth = 2)

  # Calcolo dell'errore
  err_dis = np.abs(poly_dis - f_dis)
  err_max.append(np.max(err_dis))

  # Plot errore
  plt.subplot(1,2,2)
  plt.plot(x_dis, err_dis, linewidth = 2)

plt.subplot(1,2,1)
plt.legend(['f(x)', 'n=5', 'n=10', 'n=15'])
plt.subplot(1,2,2)
plt.legend(['f(x)', 'n=5', 'n=10', 'n=15'])
```

```
plt.savefig('ese1_sol_a.png')
plt.show()

print('n \t\t err \n' + '-'*15)
for n in range(len(grado)):
  print('%d \t %f' %(grado[n], err_max[n]))
```






```
n               err
---------------
5         0.432669
10        1.915633
15        2.106860
```

Notiamo che aumentando il grado di approssimazione lìnterpolante risulta meno accurato agli estremi dell'intervallo $(-1, 1)$, tipico fenomeno Runge associato all'interpolazione polinomiale Lagrangiana su nodi equispaziati. Infine il massimo errore è il seguente:

0.432669

1.915633

2.106860

b) (4 punti) [T] Si discuta la stabilità e la convergenza dell'interpolazione polinomiale Lagrangiana du nodi equispaziati e su nodi di Chebychev-Gauss-Lobatto.

Soluzione. Data una funzione f definita du I e dati $n+1$ nodi x_i, considero la sua interpolazione Lagrangiana data da

$$\Pi_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_i(x = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathcal{L}_i(x),$$

dove Π_n è l'operatore di interpolazione che data una funzione f restituisce il polinomio interpolatore π_n negli $n+1$ punti x_i. Considero ora una funzione $\tilde{f}$ ottenuta perturbando f: il suo interpolato è dato dalla seguente espressione

$$\Pi_n \tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{f}(x_i)\mathcal{L}_i(x).$$

Possiamo calcolare la differenza tra l'interpolata di f e la sua perturbata per capire come si propagano le perturbazioni

$$\|\Pi_n f - \Pi_n \tilde{f}\|_\infty \leq \max_{i=0,\dots,n} |f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \max_{x\in I}\left|\sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}_i(x)\right|$$

L'ultimo termine, che non dipende da f ma solo dai valori dei $\mathcal{L}_i$ nei nodi x_i, è detto costante di Lebesgue e, per nodi equispaziati, è data da

$$\Lambda_n = \max_{x\in I}\left|\sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}_i(x)\right| \approx \frac{2^{n+1}}{en\log(n+\gamma)}$$

tale valore cresce molto all'aumentare di n rendendo quindi non stabile l'interpolazione polinomiale Lagrangiana su nodi equispaziati. Nel caso in cui considerassimo i nodi Chebyschev-Gauss-Lobatto tale costante risulterebbe

$$\Lambda_n < \frac{2}{\pi}\log n$$

ha una crescita di tipo logaritmico in n.

Per quanto rigruarda la convergenza, non è garantita nel caso di nodi uniformi, ovvero in generale

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in I} |E_n f(x)| \neq 0.$$

Mentre per nodi di Chebychev-Gauss-Lobatto il polinomio intepolatore $\Pi_n f$ è tale che $\Pi_n f \to f$ per $n \to \infty$, ovvero abbiamo convergenza all'aumentare del grado polinomiale.

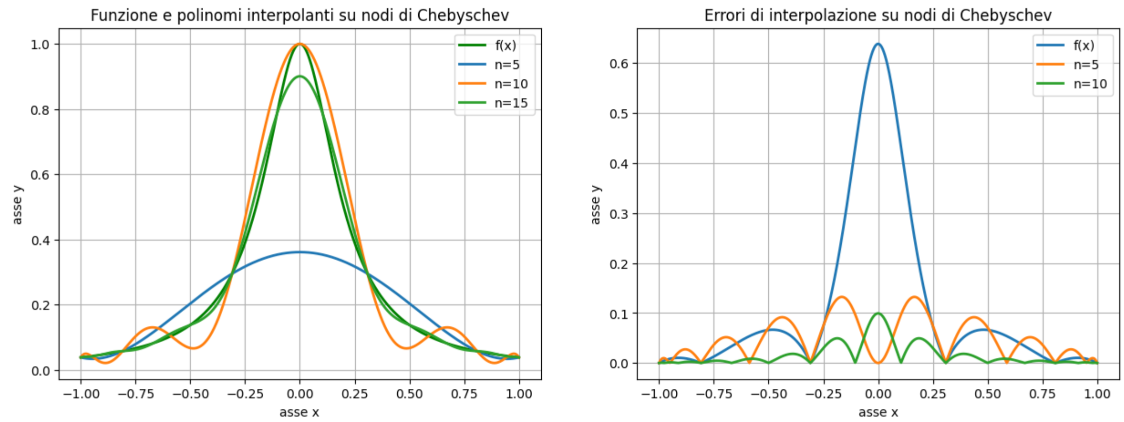
c) (3 punti) [P] Ripetere quanto fatto al punto (a) per nodi di Chebyschev-Gauss-Lobatto.

Soluzione. Possiamo costruire l'interpolazione polinomiale Lagrangiana su nodi di Chebyschev-Gauss-Lobatto come segue:

[ ]:
```
#Punto (c)
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Dati del problema
a,b = -1,1
fun = lambda x : 1/(1 + 25 * x**2)

grado = [5,10,15]
err_max = []
```

```python
# Plot funzione
x_dis = np.linspace(a,b,1000)
f_dis = fun(x_dis)

plt.figure(figsize = (15,5))
plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(x_dis,f_dis,'g',linewidth = 2)
plt.title('Funzione e polinomi interpolanti su nodi di Chebyschev')
plt.xlabel('asse x')
plt.ylabel('asse y')
plt.grid()

plt.subplot(1,2,2)
plt.title('Errori di interpolazione su nodi di Chebyschev')
plt.xlabel('asse x')
plt.ylabel('asse y')
plt.grid()

for n in grado:
  # Nodi di interpolazione
  k = np.arange(n+1)
  t = -np.cos(np.pi*k/n)
  x_nod = (a+b)/2 + ((b-a)/2)*t
  f_nod  = fun(x_nod)
  # Polinomio interpolante
  P = np.polyfit(x_nod, f_nod, n)
  # Coordinate per plot intepolante
  poly_dis = np.polyval(P, x_dis)

  plt.subplot(1,2,1)
  plt.plot(x_dis, poly_dis, linewidth = 2)

  # Calcolo dell'errore
  err_dis = np.abs(poly_dis - f_dis)
  err_max.append(np.max(err_dis))

  plt.subplot(1,2,2)
  plt.plot(x_dis, err_dis, linewidth = 2)

plt.subplot(1,2,1)
plt.legend(['f(x)', 'n=5', 'n=10', 'n=15'])
plt.subplot(1,2,2)
plt.legend(['f(x)', 'n=5', 'n=10', 'n=15'])

plt.savefig('ese1_sol_c.png')
plt.show()
```

```
print('n \t\t err \n' + '-'*15)
for n in range(len(grado)):
  print('%d \t %f' %(grado[n], err_max[n]))
```




```
n 		 err
---------------
5 	 0.638617
10 	 0.132195
15 	 0.099308
```

Notiamo che aumentando il grado di approssimazione l'interpolante risulta più accurata su tutto l'intervallo $(-1, 1)$, non abbiamo più fenomeno di Runge associato all'interpolazione polinomiale Lagrangiana su nodi equispaziati.

Il massimo dell'errore che otteniamo è il seguente:

0.638617

0.132195

0.099308

2 Esercizio 2 (10 punti)

Si consideri la seguente funzione

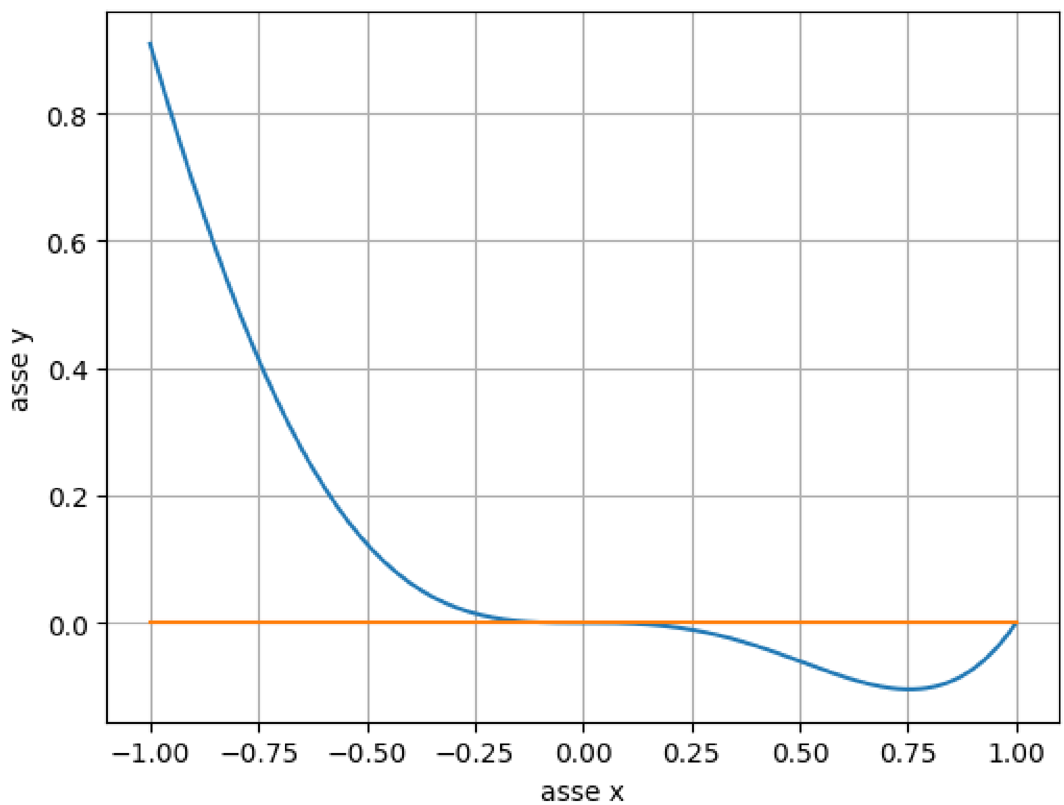
$$f(x) = x^3 \sin(x-1) \quad \text{per } x \in (-1, 1)$$

a) (1 punto) [P] Si rappresenti f in Python e si identifichi il valore α tale per cui $f(\alpha) = 0$.

Soluzione. Ecco un possibile script per rappresentare f

[ ]:
```
#Punto (a)
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
f = lambda x : x**3 * np.sin(x-1)

a,b = -1,1

x_val = np.linspace(a, b, 1000)

plt.figure()
plt.plot(x_val,f(x_val))
plt.plot(x_val, 0*x_val)    # Plot asse y = 0
plt.grid()
plt.xlabel('asse x')
plt.ylabel('asse y')
plt.show()
```



Dal grafico possiamo notare che lo zero α della funzione f è situato in 0.

b) (3 punti) [T] Derivare il metodo di Newton per la ricerca degli zeri di una funzione, riportando anche le sue proprietà di convergenza.

Soluzione. Dato, all'iterazione k, un valre di tentativo per lo zero esatto x^k, la retta tangente a f in x^k$ è data da

$$\frac{f(x)-f(x^k)}{x-x^k} = f'(x^k) \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(x^k) + f'(x^k)(x-x^k).$$

Quindi dato x^k, il punto x^{k+1} è trovato come punto di intersezione della retta tangente l'asse x ovvero lo zero della retta tangente approssimante f. Abbiamo che

$$f(x^{k+1}) = f(x^k) + f'(x^k)(x^{k+1}-x^k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f(x^k)}.$$

Per la convergenza ci basiamo sul seguente risultato:

Teorema 1. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ in $[a,b]$. Sia α tale che $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$, ovvero di molteplicità algebrica pari a 1. Allora esiste $\eta > 0$ tale che scelgo x^0 in modo che $|x^0 - \alpha| < \eta$ allora si ha*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |x^k - \alpha| < \eta,$$

inoltre il metodo risulta convergente, ovvero

$$\lim_{k\to\infty} x^k = \alpha,$$

infine il meotodo di Newton ha una convergenza quadratica, abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{k+1}-\alpha}{(x^k-\alpha)^2} = C = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

c) (2 punti) [P] Applicare il metodo di Newton per il calcolo di α, partire da un valore iniziale pari a $x_0 = 0.5$ e impostare una tolleranza pari a 10^{-8}. Rappresentare in sacala semilogy l'errore ottenuto e commentare alla luce della teoria.

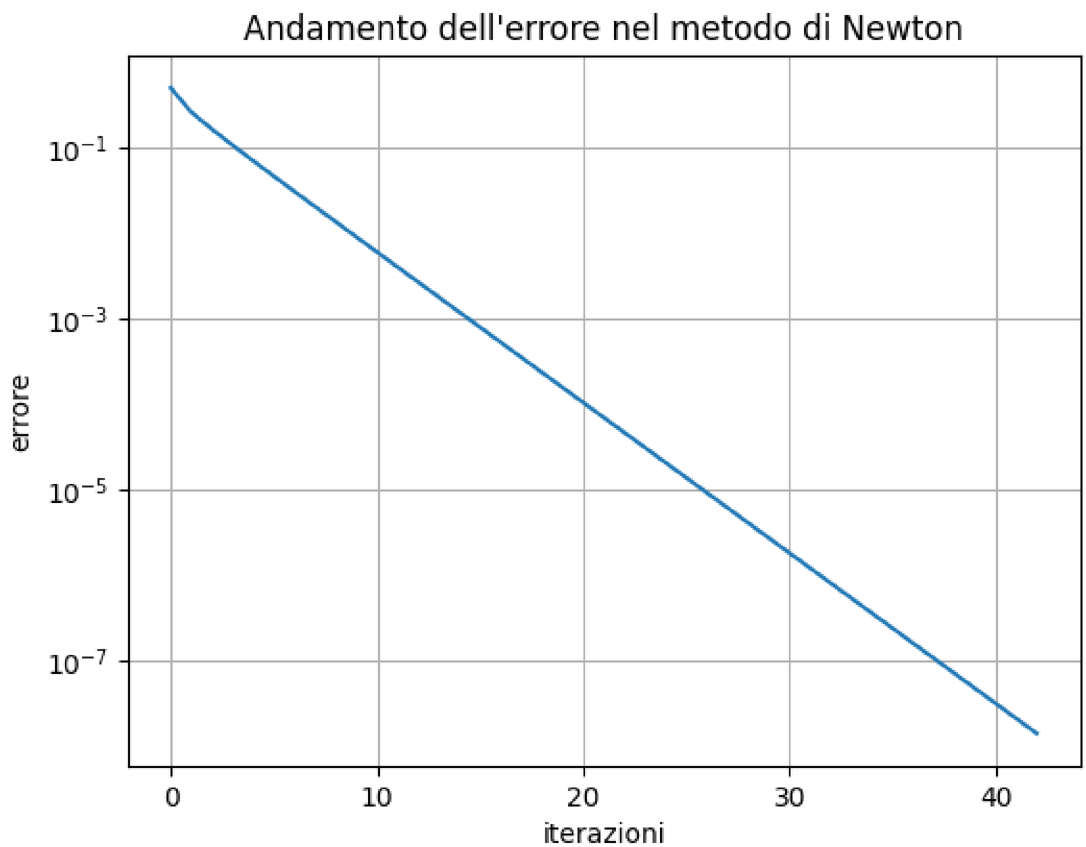
Per il metodo di Newton si utilizzi la function `newton` presente nello script `functions2023.py`

[ ]:
```python
#Punto (c)
from functions import newton

x0 = 0.5
tol = 1e-8
nmax = 1000

x_ex = 0      # Prendiamo x = 0 come zero esatto

df = lambda x : 3*x**2 * np.sin(x-1) + x**3 * np.cos(x-1)

xvect,it = newton(x0,nmax,tol,f,df)
```

```
Numero di iterazioni: 42

Zero calcolato: 1.391349e-08
```

Il metodo si arresta dopo 42 iterazioni e il valore finale calcolato è $1.391349 \cdot 10^{-8}$. Assumento $\alpha = 0$ la soluzione esatta, allora l'errore calcolato è rappresentato dal seguente grafico, in cui possiamo notare l'andamento lineare

[ ]:
```python
plt.figure()
plt.semilogy(np.abs(xvect - x_ex))
plt.title("Andamento dell'errore nel metodo di Newton")
plt.xlabel('iterazioni')
plt.ylabel('errore')
plt.grid()
plt.show()
```



d) (2 punti) [T] Si proponga una modifica al metodo di Newton per il calcolo degli zeri di molteplicità algebrica maggiore di 1.

Soluzione. Introducendo m come molteplicità algebrica dello zero α, possiamo quindi presentare il metodo di Newton modificato come

$$x^{k+1} = x^k - m\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}.$$

Se tale metodo converge, allora converge quadraticamente, come nel caso di Newton la convergenza è solo locale, cioè per un x^0 sufficientemente vicino al valore di α.

e) (2 punti) [P] Si estenda opportunamente la function `newton` in modo da implementare quanto proposto al punto precedente. Utilizzando questa nuova funzione ripetere quanto fatto al punto c, sovrapponendo gli errori sullo stesso grafico. Commentare i risultati ottenuti.

Soluzione. La function `newtmod` che implementa il metodo di Newton modificato è la seguente

[ ]:
```python
def newtmod(x0,nmax,toll,fun,dfun,mol):
    """
    Metodo di Newton modificato per la ricerca degli zeri della funzione fun.
    Test d'arresto basato sul controllo della differenza tra due iterate␣
    ↪successive.

    input:
            x0: punto di partenza
            nmax: numero massimo di iterazioni
            toll: tolleranza sul test d'arresto
            fun, dfun: lambda function contenenti la funzione e la sua derivata
            mol: molteplicità dello zero cercato

     output:
            xvect: vettore contenente tutte le iterate calcolate
                   (l'ultima componente è la soluzione)
            it: iterazioni effettuate
    """

    err = toll+1
    it = 0
    xvect = [x0]

    while it < nmax and err >= toll:
      xv = xvect[-1]
      if np.abs(dfun(xv)) < np.finfo(float).eps:
        print('Arresto per azzeramento di dfun')
        it = it+1
        break
      else:
        xn = xv - mol * fun(xv) / dfun(xv)
        err = np.abs(xn-xv)
        xvect.append(xn)
        it = it+1

    print('\n Numero di iterazioni: %d\n' %it)
    print(' Zero calcolato: %e' %xvect[-1])

    xvect = np.array(xvect)
```

```
    return xvect,it
```

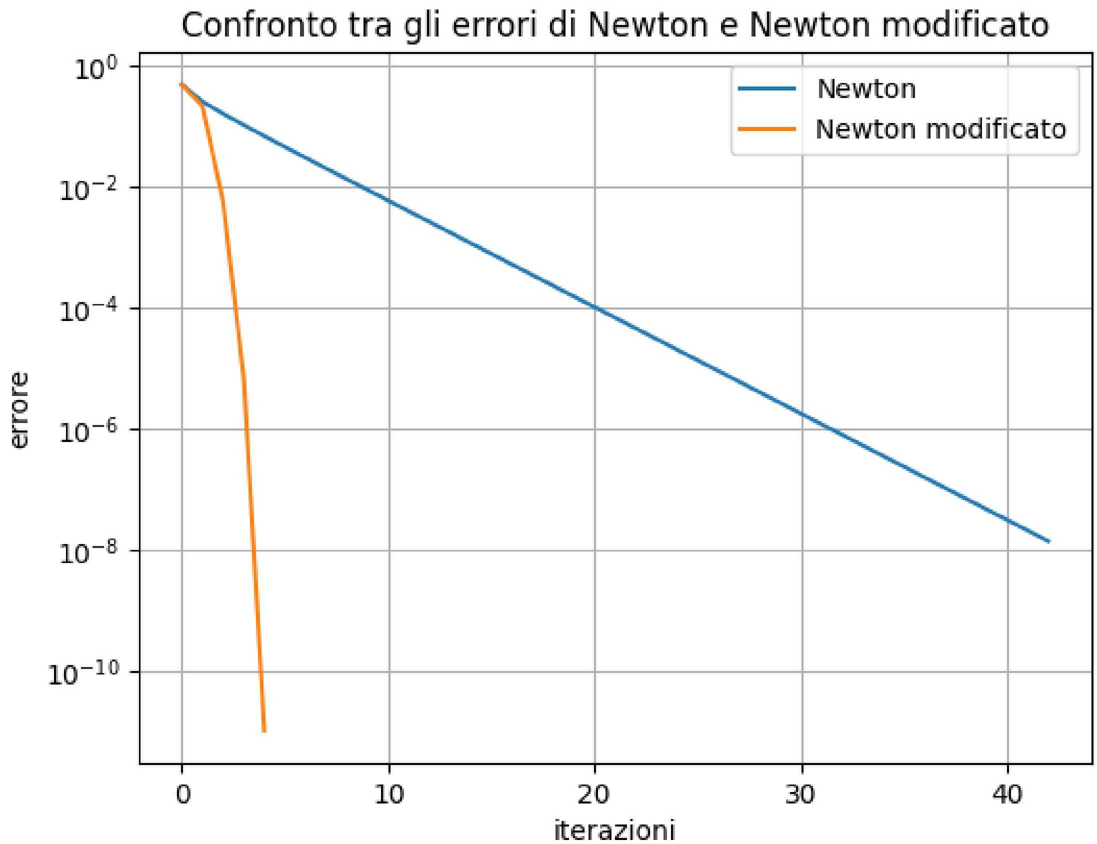
Possiamo quindi calcolare lo zero della funzione nel modo seguente

[ ]:
```
# Punto (c)

mol = 3
xvect_mod,it_mod = newtmod(x0,nmax,tol,f,df,mol)
```

```
Arresto per azzeramento di dfun

 Numero di iterazioni: 5

 Zero calcolato: -1.029883e-11
```

Il metodo si arresta dopo 5 iterazioni e il valore finale calcolato è $-1.029883 \cdot 10^{-11}$.

[ ]:
```
plt.figure()
plt.semilogy(np.abs(xvect - x_ex))
plt.semilogy(np.abs(xvect_mod - x_ex))
plt.title("Confronto tra gli errori di Newton e Newton modificato")
plt.xlabel('iterazioni')
plt.ylabel('errore')
plt.legend(['Newton','Newton modificato'])
plt.grid()
plt.savefig('ese2_sol_c.png')
plt.show()
```



Dal grafico sull'andamento dell'errore notiamo che la nuova versione converge molto più rapidamente.

#*Esercizio 3* (10 punti)

Assumendo $c > 0$, si consideri la seguente equazione di conservazione

$$\begin{cases} \partial_t c + \partial_x (0.5c^2) = 0, & x \in (0,5),\ t \in (0,T], \\ c(0,x) = \begin{cases} 3, & x \leq 2.5, \\ 5.5 - x, & x > 3.5, \end{cases} & x \in (0,5), \\ c(t,0) = 0, & t \in (0,T] \end{cases}$$

dove il tempo finale è pari a $T = 1$.

a) (3 punti) [T] Verificare se il flusso numerico Upwind è applicabile per la discretizzazione proposta con il metodo dei volumi finiti. Scegliere il valore $h = 0.125$ costante per l'ampiezza delle celle. Calcolare quindi il massimo Δt ammeso e chiamare Δt_{max} tale valore.

Soluzione. Nel caso in esame abbiamo $f(c) = \dfrac{1}{2}c^2$ e $f'(c) = c$. In base ai dati iniziali forniti il valore minimo e massimo di c sono rispettivamente $c_m = c(5) = 0.5$ e $c_M = 3$, e per tali valori la derivata prima della funzione flusso è sempre non negativa quindi il flusso Upwind è apllicabile. Il massimo della derivata $f'(c)$ si ottiene in corrispondenza di $c = 3$ e vale $\max_{c\in(c_m,c_M)} |f'(c)| = 3$. Per soddisfare la condizione CFL dobbiamo quindi garantire che $\Delta t \max_{c\in(c_m,c_M)} |f'(c)| < h$. Con i valori scelti si ottiene $\Delta t_{max} = 0.125/3 = 0.041\bar{6}$.

b) (3 punti) [P] Sia $N = \dfrac{T}{\Delta t_{max}}$, risolvere il problema utilizzando la function `fvsolve` contenuta nel file `funzioni.py`, utilizzando il metodo Upwind per N, $N-2$ e $2N$ passi temporali (attenzione: calcolare i Δt corrispondenti!) e rappresentare le soluzioni ottenute usando la function `xtplot` contenuta nel file `utilis_plot_cl.py`.

Commentare cosa si osserva.

Soluzione. Il numero di intervalli N si ottiene come $N = 1/0.125 = 8$. Definiamo i dati necessari per la soluzione numerica e impostiamo il ciclo per calcolare la soluzione con il numero di intervalli richiesto:

[ ]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import functions
from utilis_plot_cl import xtplot

# Dati del problema
u0 = lambda x : 3*(x <= 2.5) + (5.5 - x)*(x > 2.5)
f  = lambda c : 0.5*c**2
df = lambda c : c

h = 0.125
dtlim = h/df(3)
L = 5
T =1
N = T/dtlim

# Soluzione per vari valori di N
for n in [N, N-2, N*2]:
  xc, t, u = functions.fvsolve(u0, f, df, L, T, h, T/n, 'UPWIND')
  plt.figure()
  xtplot(xc,t,u)
  plt.show()
```

```
<IPython.core.display.Image object>

<Figure size 640x480 with 0 Axes>

<IPython.core.display.Image object>

<Figure size 640x480 with 0 Axes>

<IPython.core.display.Image object>

<Figure size 640x480 with 0 Axes>
```

Osserviamo nei tre grafici che per il passo temporale “limite” la soluzione è corretta e si osserva la formazione di uno shock; per un passo temporale leggermente superiore al massimo consentito dalla CFL si ha un andamento non fisico; per passi temporali minori si ha una soluzione corretta, con una maggiore diffusione numerica.

c) (2 punti) [T] Si descriva il flusso numerico di Godunov e se ne discutano le proprità.

Soluzione. L'idea per introdurre il flusso di Godunov è quella di partire da una soluzione costante a tratti a tempo t_n e di risolvere problemi di Riemann ad ogni interfaccia fra due celle vicine. Per calolare il flusso di Godunov fra le celle i e $i+1$ consideriamo che, a seconda dei valori c_n^i e c_{i+1}^n e della "forma" del flusso, possiamo avere uno shock, una rarefazione o una combinazione dei due; questo determina il valore della soluzione c^* nel nodo $i+\dfrac{1}{2}$ nell'intervallo di tempo $[t_n, t_{n+1}]$. Utilizzando c^* possiamo valutare il flusso numerico all'interfaccia.

Il flusso di Godunov risultante si può esprimere in modo sintetico con la seguente definizione:

$$F^G_{i+\frac{1}{2}}(c_i, c_{i+1}) = \begin{cases} \min f(\xi), \ \ \xi \in [c_i, c_{i+1}] & \text{se } c_i \leq c_{i+1}, \\ \max f(\xi), \ \ \xi \in [c_{i+1}, c_i] & \text{se } c_i \geq c_{i+1}. \end{cases}$$

Osserviamo che se f è monotona questa definizione coincide con il flusso upwind.

d) (2 punti) [P] Si calcoli la soluzione del problema proposto utlizzando ora il flusso numerico di Godunov e un opportuno passo temporale.

Soluzione. Scegliamo ad esempio un passo $\Delta t = 0.9 \Delta t_{\max}$:

[ ]:
```
xc, t, u = functions.fvsolve(u0, f, df, L, T, h, T/N, 'GODUNOV')
plt.figure()
xtplot(xc,t,u)
plt.show()
```

```
<IPython.core.display.Image object>
```

```
<Figure size 640x480 with 0 Axes>
```

La soluzione ottenuta è simile a quella ottenuta con il flusso upwind.