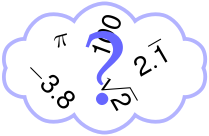
Statistica - 3^{a} lezione

28 febbraio 2023

VARIABILE ALEATORIA (v.a.) $=$ risultato di una misura in un esperimento aleatorio

ESEMPI:

- $X =$ numero che uscirà nel lancio di un dado
- $Y =$ numero di teste nei tre lanci di moneta
- $Z =$ altezza del 10^{o} intervistato

$X =$ 

Non ha un valore definito finché non la misuro

Variabili aleatorie

VARIABILE ALEATORIA (v.a.) $=$ risultato di una misura in un esperimento aleatorio

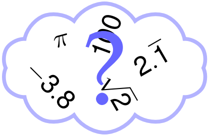
ESEMPI:

- $X =$ numero che uscirà nel lancio di un dado
- $Y =$ numero di teste nei tre lanci di moneta

} discrete

- $Z =$ altezza del 10^{o} intervistato

} continua

$X =$ 

Non ha un valore definito finché non la misuro

Variabili aleatorie

VARIABILE ALEATORIA (v.a.) $=$ risultato di una misura in un esperimento aleatorio

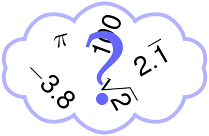
ESEMPI:

- X = numero che uscirà nel lancio di un dado
- Y = numero di teste nei tre lanci di moneta

} discrete

- Z = altezza del 10^{o} intervistato

} continua

$X =$ 

Non ha un valore definito finché non la misuro

Le v.a. non sono eventi, ma si possono usare per creare eventi:

- $E :=$ "$X = 6$" = "uscirà 6"
- $F :=$ "$Y = 3$" = "uscirà sempre testa"
- $G :=$ "$Z > 1.80\,\mathrm{m}$" = "il 10^{o} intervistato sarà più alto di $1.80\,\mathrm{m}$"

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente:

$$s < t \quad \Rightarrow \quad \text{“}X \leq s\text{” implica “}X \leq t\text{”}$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente:

$$\begin{aligned} s < t \quad &\Rightarrow \quad \text{“}X \leq s\text{” implica “}X \leq t\text{”} \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq s\text{”}\right) \leq \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right) \end{aligned}$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \le t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente:

$$\begin{aligned} s < t \quad &\Rightarrow \quad \text{“}X \le s\text{” implica “}X \le t\text{”} \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\text{“}X \le s\text{”}\right) \le \mathbb{P}\left(\text{“}X \le t\text{”}\right) \\ &\Rightarrow \quad F_X(s) \le F_X(t) \end{aligned}$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente:

$$\begin{aligned} s < t \quad &\Rightarrow \quad \text{“}X \leq s\text{” implica “}X \leq t\text{”} \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq s\text{”}\right) \leq \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right) \\ &\Rightarrow \quad F_X(s) \leq F_X(t) \end{aligned}$$

D'ora in poi, $\mathbb{P}\left(\text{“}\ldots\text{”}\right) = \mathbb{P}\left(\ldots\right)$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}\,(X \leq t)$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X < +\infty)$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}\,(X \leq t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\,(X < +\infty) = \mathbb{P}\,(\Omega) = 1$$

  e similmente per l'altro limite

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ e $F_X(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \leq t\right) = F_X(t) - F_X(s)$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \leq t\right) = F_X(t) - F_X(s)$:

  $F_X(t) = \mathbb{P}\left(X \leq t\right)$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \leq t\right) = F_X(t) - F_X(s)$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}\left(X \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq s\text{”} \vee \text{“}s < X \leq t\text{”}\right)$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \le t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ e $F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \le t\right) = F_X(t) - F_X(s)$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}\left(X \le t\right) = \mathbb{P}\left(\text{“}X \le s\text{”} \vee \text{“}s < X \le t\text{”}\right)$$

$$\overset{(3)}{=} \mathbb{P}\left(X \le s\right) + \mathbb{P}\left(s < X \le t\right)$$

perché $\text{“}X \le s\text{”} \wedge \text{“}s < X \le t\text{”} = \varnothing$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \le t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ e $F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \le t\right) = F_X(t) - F_X(s)$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}\left(X \le t\right) = \mathbb{P}\left(\text{“}X \le s\text{”} \vee \text{“}s < X \le t\text{”}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X \le s\right) + \mathbb{P}\left(s < X \le t\right)$$

$$= F_X(s) + \mathbb{P}\left(s < X \le t\right)$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \le t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}(s < X \le t) = F_X(t) - F_X(s)$:

$$\begin{aligned}
F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) \;&= \mathbb{P}\left(\text{“}X \le s\text{”} \vee \text{“}s < X \le t\text{”}\right) \\
&= \mathbb{P}(X \le s) + \mathbb{P}(s < X \le t) \\
&= F_X(s) + \mathbb{P}(s < X \le t) \\
&\Rightarrow \quad \mathbb{P}(s < X \le t) = F_X(t) - F_X(s)
\end{aligned}$$

Funzione di ripartizione

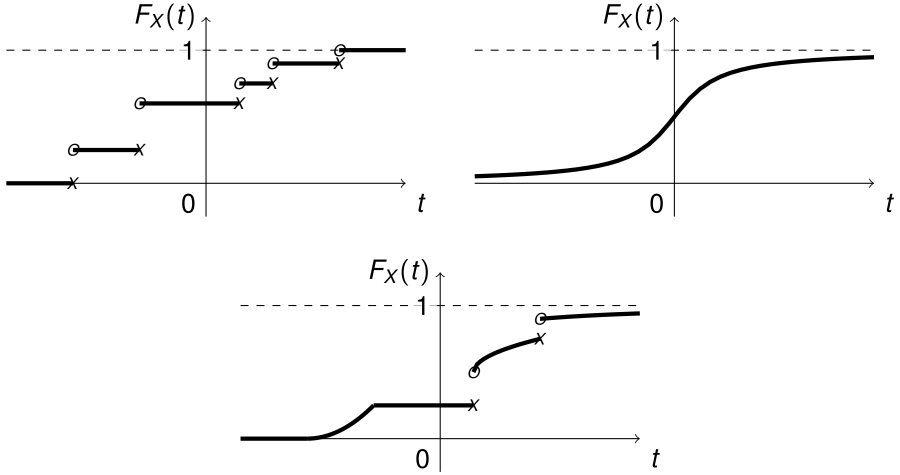
La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \leq t\right) = F_X(t) - F_X(s)$
- F_X è continua da destra con limite da sinistra

ESEMPI:



Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}\,(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

La funzione f_X è la *densità* di X, e soddisfa

- $f_X(z) \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ (positività)

  perché $\mathbb{P}(s \leq X \leq t) \geq 0$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$ con $s < t$

Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(s \le X \le t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

La funzione f_X è la *densità* di X, e soddisfa

- $f_X(z) \ge 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ (positività)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\,\mathrm{d}z = 1$ (normalizzazione)

  perché $\mathbb{P}(-\infty < X < +\infty) = 1$

Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}\,(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

La funzione f_X è la *densità* di X, e soddisfa

- $f_X(z) \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ (positività)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\,\mathrm{d}z = 1$ (normalizzazione)

ATTENZIONE: per una v.a. assolutamente continua

$$\mathbb{P}\,(X = t) = 0 \qquad \mathbb{P}\,(X < t) = \mathbb{P}\,(X \leq t) \qquad \text{ecc.}$$

Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

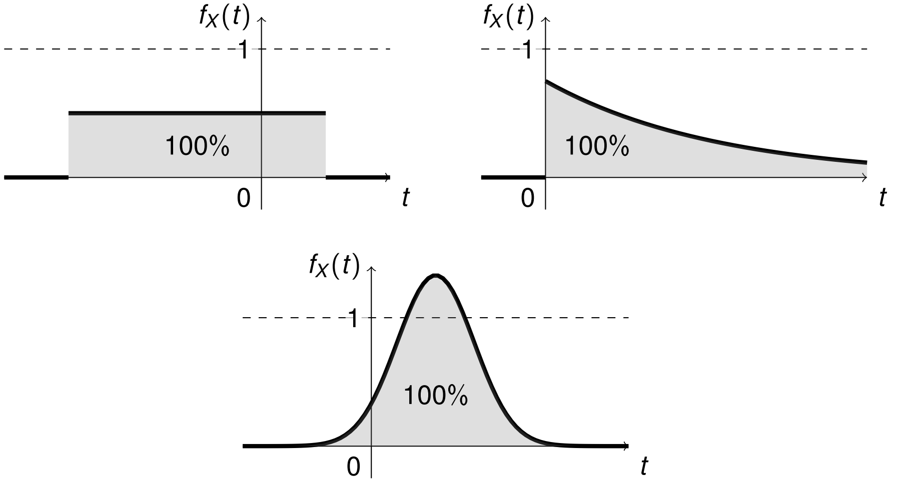
Legame densità - f.d.r. per una v.a. assolutamente continua:

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \quad f_X(t) = \frac{\mathrm{d}\,F_X(t)}{\mathrm{d}t}$$

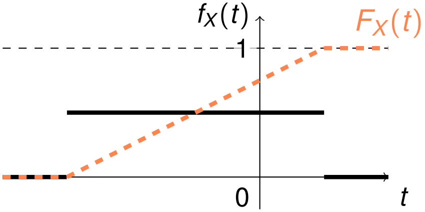
Variabili aleatorie assolutamente continue

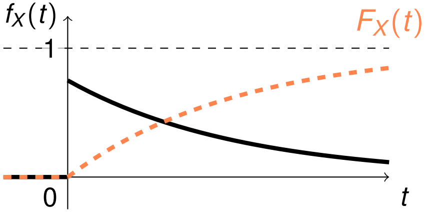
ESEMPI:

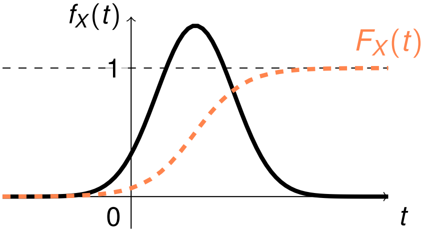


Variabili aleatorie assolutamente continue

ESEMPI:







Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $a < b$ fissati

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

dove la *funzione indicatrice* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è

$$\mathbb{1}_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

dove la *funzione indicatrice* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è

$$\mathbb{1}_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

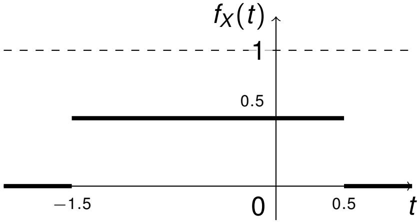
La densità f_X si chiama *uniforme continua* di parametri a, b e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(a,b)$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

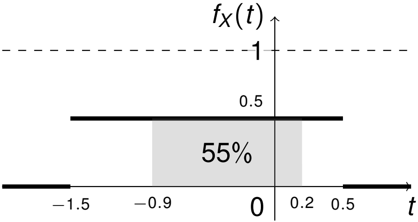
ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



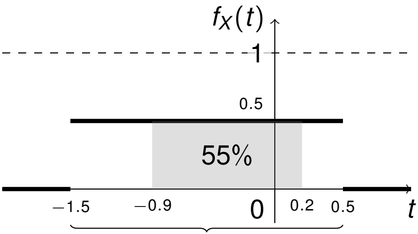
$$\mathbb{P}(-0.9 \leq X \leq 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5, \; b = 0.5$:



X può prendere solo questi valori

$$\mathbb{P}\,(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

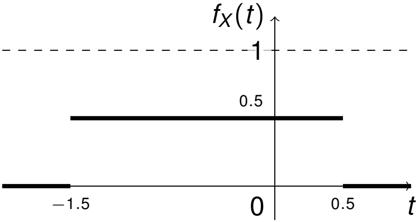
$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}\,(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

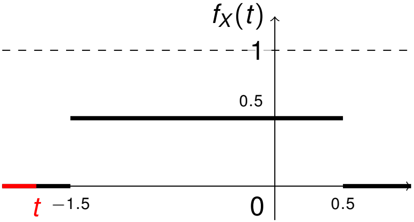
$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\mathrm{supp}\, f_X$ è il *supporto* della v.a. X

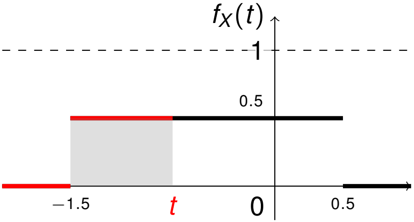
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}z = 0 & \text{se } t < -1.5 \\ & \\ & \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

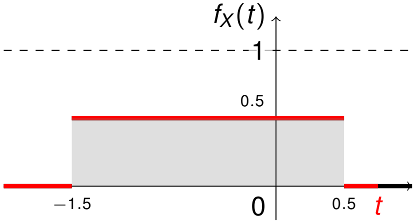
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}z = 0 & \text{se } t < -1.5 \\ \int_{-\infty}^{-1.5} 0\,\mathrm{d}z + \int_{-1.5}^{t} 0.5\,\mathrm{d}z = 0.5(t+1.5) & \text{se } -1.5 \le t \le 0.5 \\ \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

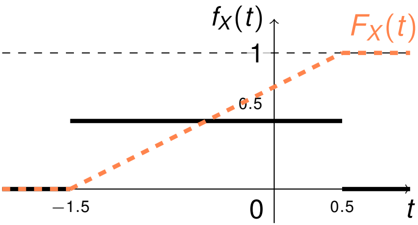
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}z = 0 & \text{se } t < -1.5 \\ \int_{-\infty}^{-1.5} 0\,\mathrm{d}z + \int_{-1.5}^{t} 0.5\,\mathrm{d}z = 0.5(t+1.5) & \text{se } -1.5 \le t \le 0.5 \\ \int_{-\infty}^{-1.5} 0\,\mathrm{d}z + \int_{-1.5}^{0.5} 0.5\,\mathrm{d}z + \int_{0.5}^{t} 0\,\mathrm{d}z = 1 & \text{se } t > 0.5 \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

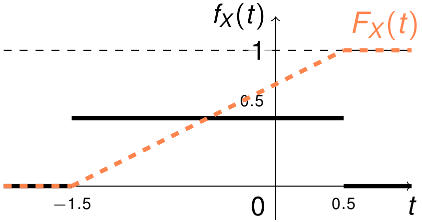
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1.5 \\ 0.5(t+1.5) & \text{se } -1.5 \le t \le 0.5 \\ 1 & \text{se } t > 0.5 \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5,\ b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) =$$
$$= F_X(0.2) - F_X(-0.9)$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1.5 \\ 0.5(t+1.5) & \text{se } -1.5 \le t \le 0.5 \\ 1 & \text{se } t > 0.5 \end{cases}$$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \qquad \Rightarrow \qquad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \qquad \Rightarrow \qquad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se conosco la densità X, qual è quella di Y?

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \qquad \Rightarrow \qquad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \qquad \Rightarrow \qquad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \qquad \Rightarrow \qquad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \qquad \Rightarrow \qquad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(g(X) \in (-\infty, t])$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(g(X) \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}\left(X \in g^{-1}((-\infty, t])\right)$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(g(X) \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}\left(X \in g^{-1}((-\infty, t])\right) = \int_{g^{-1}((-\infty,t])} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \qquad \Rightarrow \qquad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \qquad \Rightarrow \qquad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(g(X) \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}\left(X \in g^{-1}((-\infty, t])\right) = \int_{g^{-1}((-\infty,t])} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t}$$

Funzioni di una v.a.

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati}$$

Funzioni di una v.a.

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati}$$

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati}$$

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t)$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}\,(Y \leq t) \;= \mathbb{P}\,(aX + b \leq t) \;= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$
$$= \qquad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t}$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}\,(Y \leq t) = \mathbb{P}\,(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$

Funzioni di una v.a.

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(aX + b \le t) = \mathbb{P}\left(X \le \frac{t-b}{a}\right)$$
$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$
$$= \quad F_X'\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$
$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$
$$= \quad F_X'\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$
$$= \quad f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$

$$= \quad F'_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \quad f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a < 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \geq \frac{t-b}{a}\right)$$

$$= 1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$

$$= -F_X'\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$= -f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

Funzioni di una v.a.

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a \neq 0$$

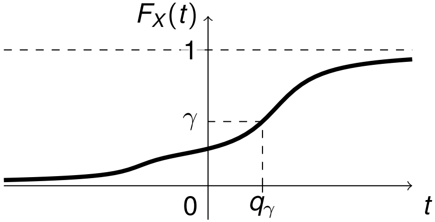
In conclusione,

$$f_Y(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} \text{-} \quad \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ \text{-} \quad \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

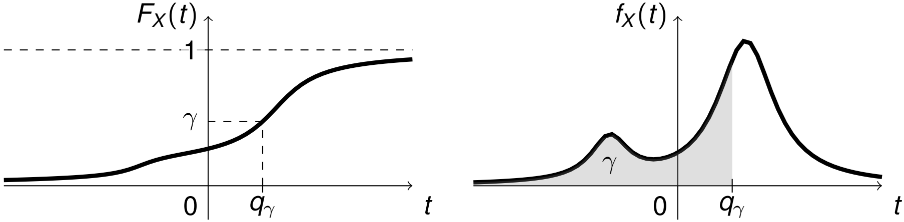
allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine γ* (della densità) di X



Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} \text{-} \quad \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ \text{-} \quad \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine γ* (della densità) di X



Se $\gamma = 0.5$, ottengo la *mediana* di X ecc.

Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} \text{-} \quad \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ \text{-} \quad \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine* γ (della densità) di X

PROPRIETÀ:

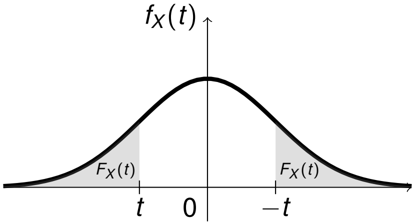
- Se $Y = aX + b$, allora $q^Y_\gamma = \begin{cases} a\, q^X_\gamma + b & \text{se } a > 0 \\ a\, q^X_{1-\gamma} + b & \text{se } a < 0 \end{cases}$

Se: $\begin{cases} \text{-} \quad \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ \text{-} \quad \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine* γ (della densità) di X

PROPRIETÀ:

- Se $Y = aX + b$, allora $q_\gamma^Y = \begin{cases} a\,q_\gamma^X + b & \text{se } a > 0 \\ a\,q_{1-\gamma}^X + b & \text{se } a < 0 \end{cases}$
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse delle y ($\Leftrightarrow$ $f_X = f_{-X}$), allora
  - $F_X(t) = 1 - F_X(-t)$



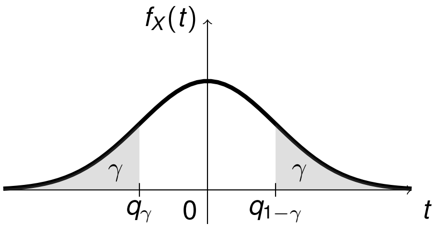
Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} \text{-} \quad \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ \text{-} \quad \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine* γ (della densità) di X

PROPRIETÀ:

- Se $Y = aX + b$, allora $q_\gamma^Y = \begin{cases} a\, q_\gamma^X + b & \text{se } a > 0 \\ a\, q_{1-\gamma}^X + b & \text{se } a < 0 \end{cases}$
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse delle y ($\Leftrightarrow$ $f_X = f_{-X}$), allora
  - $F_X(t) = 1 - F_X(-t)$
  - $q_\gamma = -q_{1-\gamma}$



Valore atteso

Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Valore atteso

Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

Valore atteso

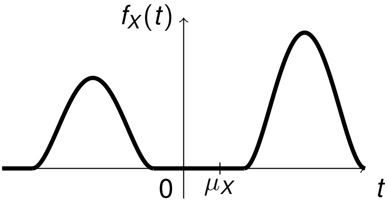
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

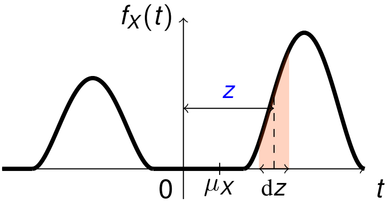
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X])$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

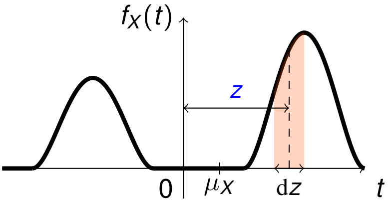
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

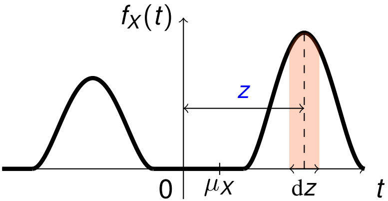
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X])$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

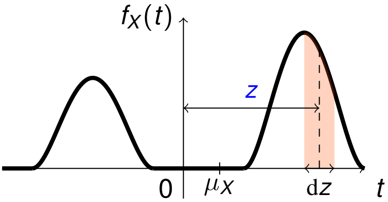
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X])$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



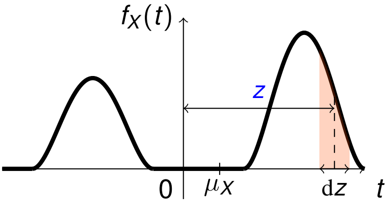
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

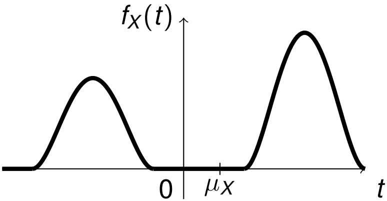
Definizione

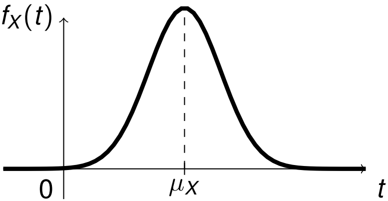
Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse $x = x_0$, allora $\mu_X = x_0$





Valore atteso

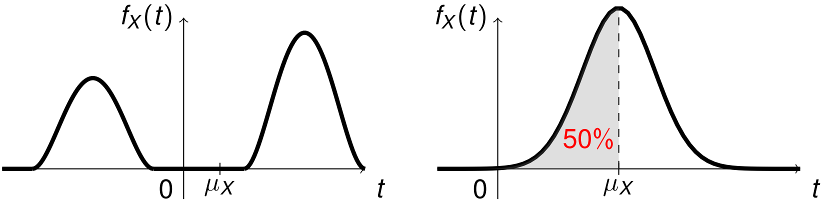
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse $x = x_0$, allora $\mu_X = x_0 = q_{0.5}^X$



Valore atteso

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, come si calcola

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = ???$$

Valore atteso

Secondo la definizione,

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_{g(X)}(z)\, \mathrm{d}z$$

ma in pratica il passaggio $f_X \quad \rightarrow \quad f_{g(X)}$ è laborioso

Valore atteso

Secondo la definizione,

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z \, f_{g(X)}(z) \, \mathrm{d}z$$

ma in pratica il passaggio $f_X \quad \rightarrow \quad f_{g(X)}$ è laborioso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

  $$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

  Infatti, con $g(z) = az + b$:

  $$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (az + b)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

  $$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

  Infatti, con $g(z) = az + b$:

  $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[aX + b\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (az + b)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\, \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

  $$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

  Infatti, con $g(z) = az + b$:

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[aX + b\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (az + b)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \\ &= a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z}_{\mathbb{E}[X]} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\, \mathrm{d}z}_{1} \end{aligned}$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

Infatti, con $g(z) = az + b$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[aX + b\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (az + b)\, f_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= a\int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\,\mathrm{d}z + b\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b\end{aligned}$$