Lab 5 - Interpolazione (traccia)

March 7, 2024

1 Interpolazione polinomiale

Lo scopo delle tecniche di interpolazione è quello di ricavare, in forma chiusa, una relazione del tipo $y = p(x)$ a partire da alcune osservazioni sperimentali $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Strettamente parlando, si parla di *interpolazione* se a partire dai dati viene proposta una funzione $\tilde{p}$ che passa **esattamente** dai dati sperimentali, cioè

$$y_i = \tilde{p}(x_i) \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Si parla invece di *approssimazione ai minimi quadrati* se l'obiettivo è quello di trovare una funzione $\hat{p}$ che minimizzi lo scarto quadratico

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{p}(x_i)|^2$$

all'interno di una "classe di possibili funzioni".

Oggi ci focalizzaremo su tre tipologie di interpolazione e approssimazione:

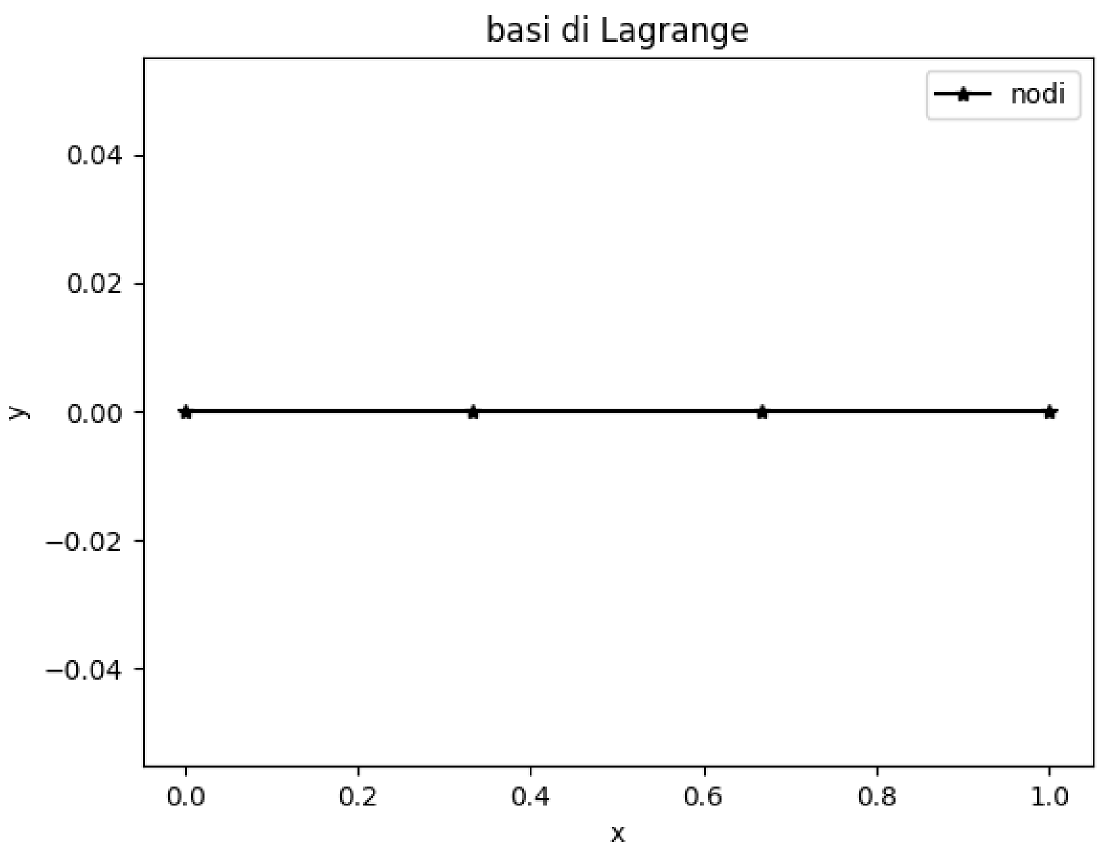
1. Interpolazione polinomiale di Lagrange, dove $\tilde{p}$ è un polinomio di grado $n-1$
2. Interpolazione composita (spline), dove $\tilde{p}$ è un polinomio di grado k *a tratti* (es: spezzata/spline cubica)
3. Approssimazione polinomiale (minimi quadrati), dove $\hat{p}$ è un polinomio di grado $k < n-1$.

1.1 Esercizio 1

Fissato l'intervallo $[0, 1]$ e il grado $\deg = 3$ del polinomio di interpolazione, rappresentare su un'unica figura tutte le funzioni di base di Lagrange $L_i(x)$ per $i = 0, \dots, n$. Utilizzare le funzioni `polyfit` e `polyval` della libreria `numpy`.

[ ]:
```python
# Esempio della costruzione di basi
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from numpy import polyfit, polyval, linspace

# grado del polinomio
deg = 3
# estremi dell'intervallo
a,b = 0,1
# numero dei nodi
n_nodi = deg+1
# nodi nell'intervallo 0 1
```

```
x_nodi = linspace(a,b,n_nodi)
# punti dove valutiamo il polinomio per la rappresentazione grafica
xx = linspace(a,b,1000)
plt.plot(x_nodi,np.zeros(n_nodi),'k*-',label = 'nodi')

# costruzione e rappresentazione grafica delle funzioni di basi




plt.title("basi di Lagrange")
plt.legend()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.show()
```



1.2 Esercizio 2

Nella tabella qui sotto riportata vengono elencati i risultati di un esperimento eseguito per individuare il legame tra lo *sforzo* σ e la relativa *deformazione* ε.

test	σ [MPa]	ε[cm/cm]
1	0.00	0.00
2	0.06	0.08
3	0.14	0.14
4	0.25	0.20
5	0.31	0.23
6	0.47	0.25
7	0.60	0.28
8	0.70	0.29

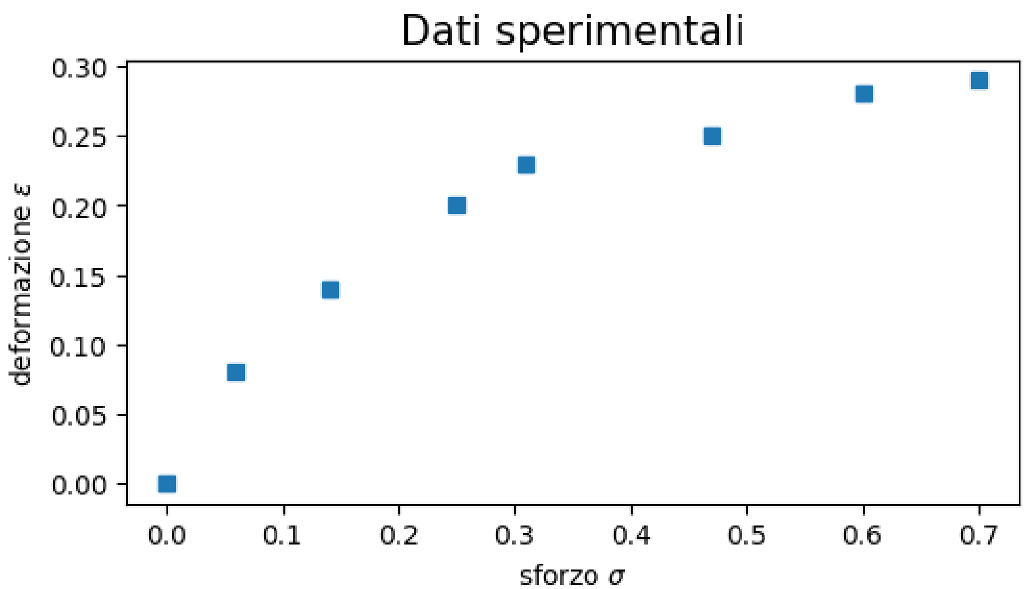
(1)

A partire da questi dati (utilizzando opportune tecniche di interpolazione e approssimazione) si vuole stimare la deformazione in corrispondenza dei valori di sforzo per cui non si ha a disposizione un dato sperimentale.

Esercizio 2.1: rappresentazione grafica dei dati Rappresentare i dati graficamente.

[ ]:
```
# sigma ed epsilon
sigma = [0.00, 0.06, 0.14, 0.25, 0.31, 0.47, 0.60, 0.70]
epsilon = [0.00, 0.08, 0.14, 0.20, 0.23, 0.25, 0.28, 0.29]
```

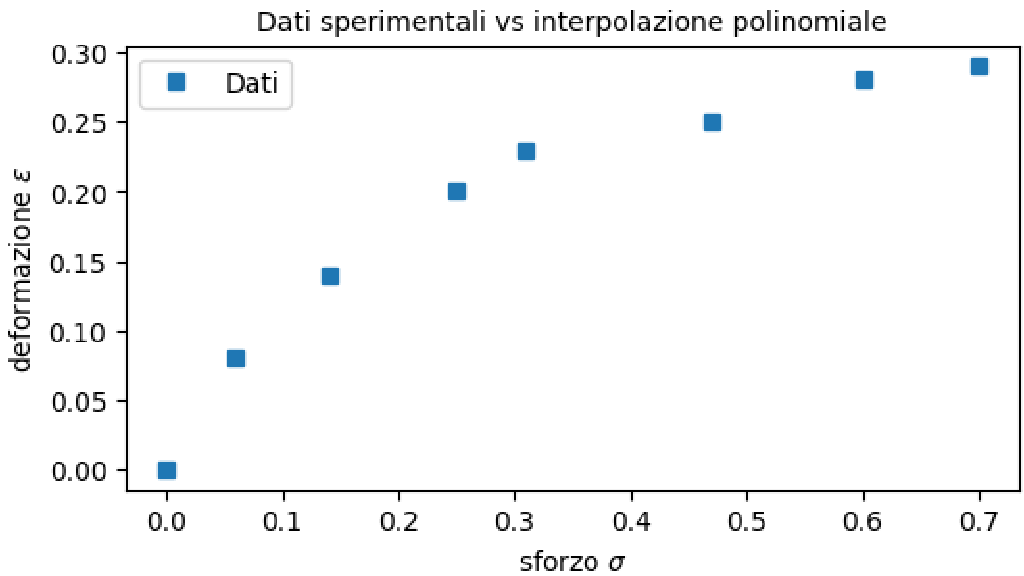
[ ]:
```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure(figsize = (6, 3))
plt.plot(sigma, epsilon, 's')
plt.xlabel("sforzo $\sigma$")
plt.ylabel("deformazione $\\varepsilon$")
plt.title("Dati sperimentali", fontsize = 15)
plt.show()
```



Esercizio 2.2: interpolazione polinomiale Calcolare l'interpolante polinomiale di Lagrange, quindi confrontarla con i dati sperimentali. A tale scopo, si sfruttino le funzioni `polyfit` e `polyval` della libreria `numpy`.

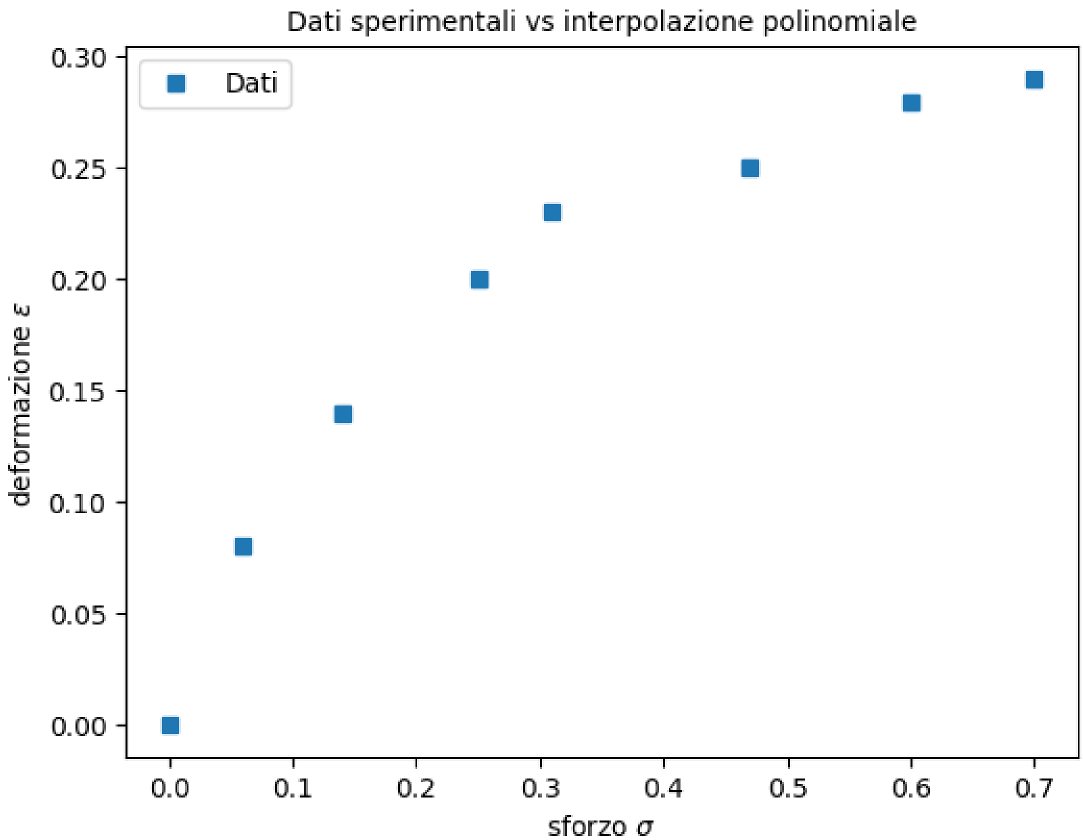
Nota: Si rammenti che un polinomio di Lagrange interpolante n dati ha grado $n-1$.

[ ]:
```
from numpy import polyfit, polyval, linspace
# interpolazione di lagrange

plt.figure(figsize = (6, 3))
plt.plot(sigma, epsilon, 's', label = 'Dati')
plt.xlabel("sforzo $\sigma$")
plt.ylabel("deformazione $\\varepsilon$")
plt.title("Dati sperimentali vs interpolazione polinomiale", fontsize = 10)
plt.legend()
plt.show()
```



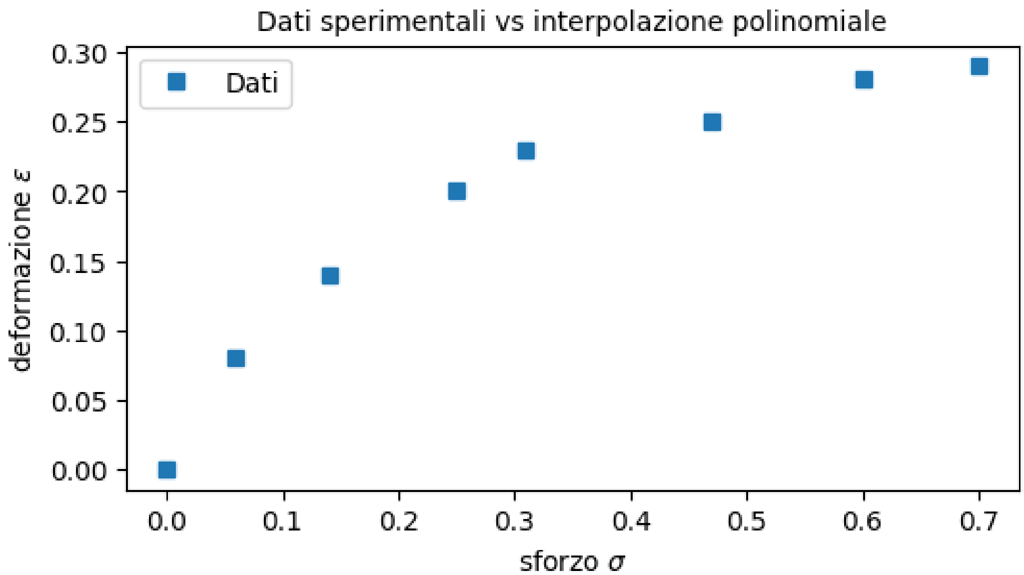
Esercizio 2.3: spline lineare Confrontare i dati sperimentali con la loro interpolante lineare a tratti (spline lineare). Si sfrutti la funzione `interp` della libreria `numpy`.

[ ]:
```
from numpy import interp
# spline lineari

plt.figure(figsize = (6, 3))
plt.plot(sigma, epsilon, 's', label = 'Dati')
plt.xlabel("sforzo $\sigma$")
plt.ylabel("deformazione $\\varepsilon$")
plt.title("Dati sperimentali vs interpolazione polinomiale", fontsize = 10)
plt.legend()
plt.show()
```



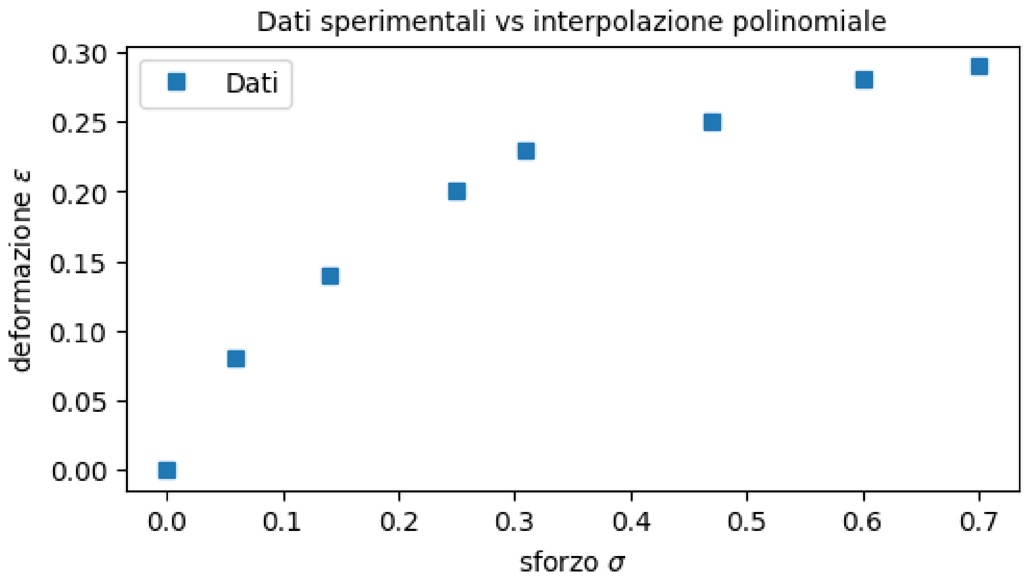
Esercizio 2.4: spline cubica Confrontare i dati sperimentali con la loro interpolante cubica a tratti (spline cubica). Si sfrutti la classe `CubicSpline` presente nel modulo `scipy.interpolate`.

[ ]:
```
from scipy.interpolate import CubicSpline
# spline cubiche


plt.figure(figsize = (6, 3))
plt.plot(sigma, epsilon, 's', label = 'Dati')
plt.xlabel("sforzo $\sigma$")
plt.ylabel("deformazione $\\varepsilon$")
plt.title("Dati sperimentali vs interpolazione polinomiale", fontsize = 10)
plt.legend()
plt.show()
```



Esercizio 2.5: minimi quadrati Confrontare i dati sperimentali con il corrispondente polinomio di grado 4 ai minimi quadrati. Si sfruttino nuovamente le funzioni `polyfit` e `polyval` di `numpy`, facendo attenzione all'argomento `deg`.

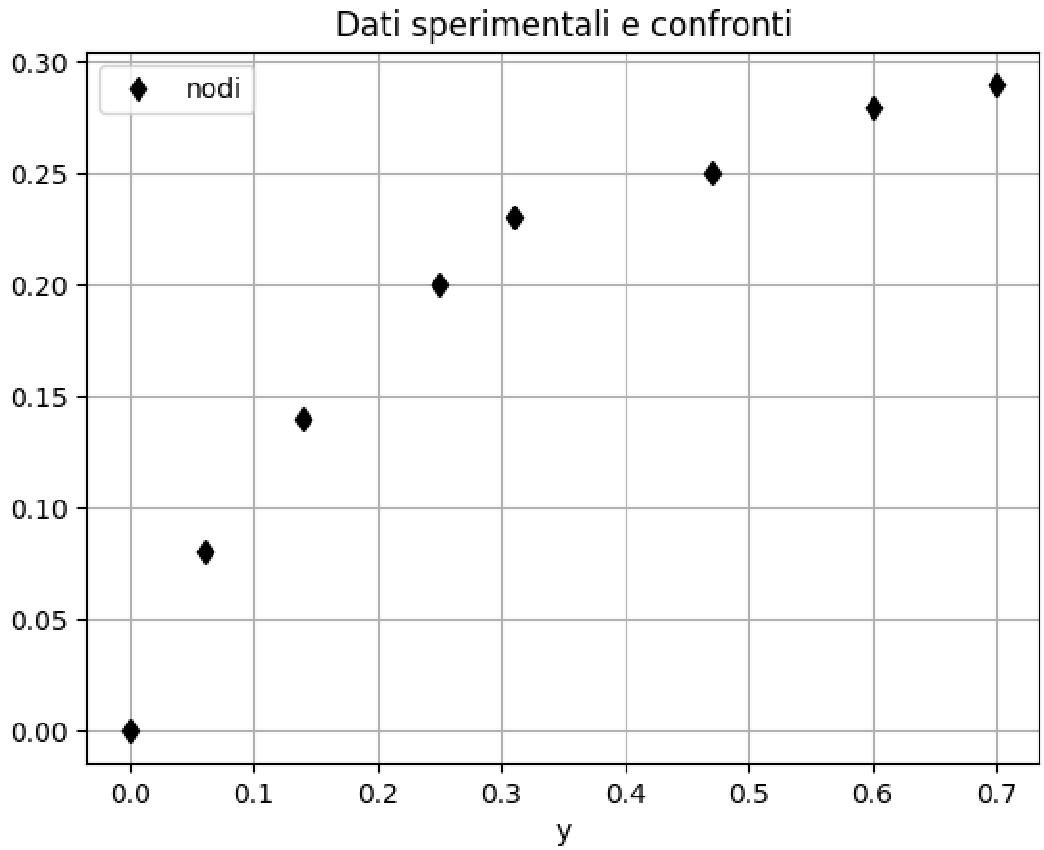
[ ]:
```
# Minimi quadrati



plt.figure(figsize = (6, 3))
plt.plot(sigma, epsilon, 's', label = 'Dati')
plt.xlabel("sforzo $\sigma$")
plt.ylabel("deformazione $\\varepsilon$")
plt.title("Dati sperimentali vs interpolazione polinomiale", fontsize = 10)
plt.legend()
plt.show()
```



Esercizio 2.6: confronto globale

Confrontare, in un unico grafico, i dati sperimentali con tutte le interpolanti e approssimanti

[ ]:
```
# Grafico che rappresenta il processo di estrapolazione
import matplotlib.pyplot as plt
# Estremi dell'intervallo dove valutare il polinomio
# a,b =
# punti di valutazione
xx = linspace(a,b,1000)

plt.plot(sigma,epsilon,'kd', label = 'nodi')

# interpolante polinomiale

# spline lineare

# spline cubiche

# minimi quadrati

plt.legend()
plt.title('Dati sperimentali e confronti')
plt.grid()
plt.xlabel('x')
plt.xlabel('y')
plt.show()
```



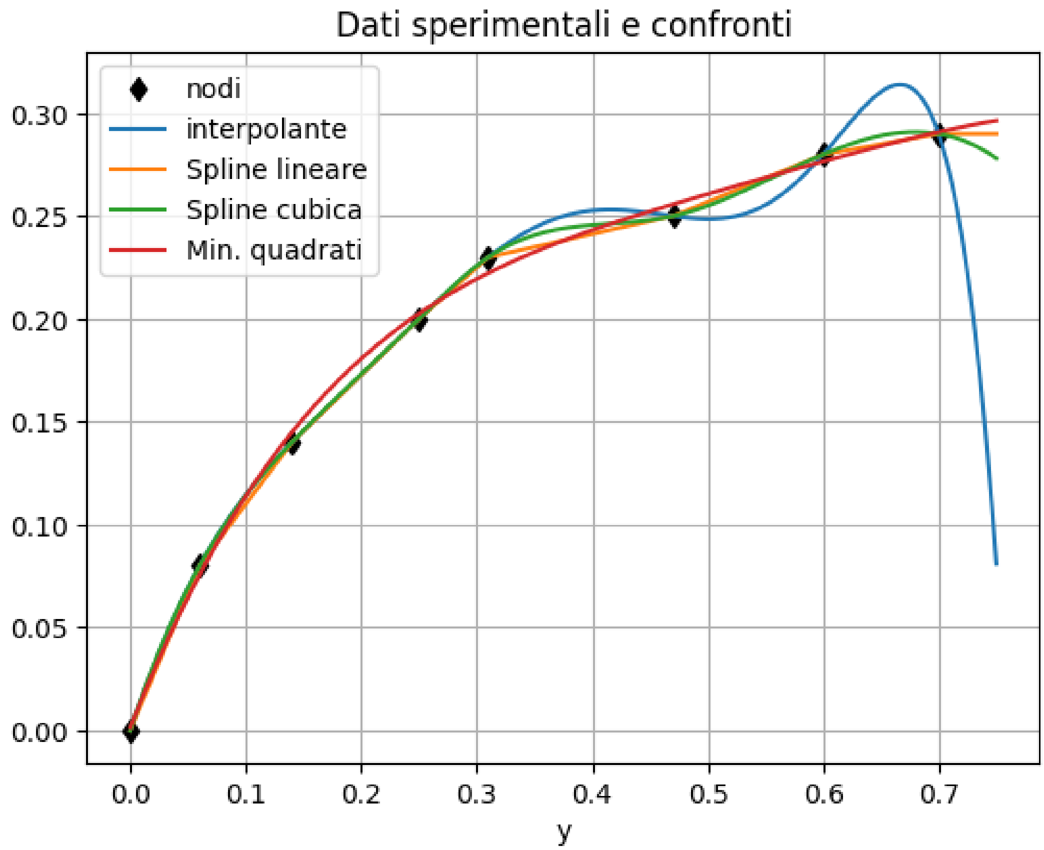
Esercizio 2.7: confronto approssimazioni in extra points

Confrontare le approssimazioni proposte dalle tre interpolanti e dell'approssimazione ai minimi quadrati quando $\sigma = 0.4$ MPa e $\sigma = 0.75$ MPa, si commentino i risultati ottenuti.

[ ]:
```
print("\033[1mValore stimato per sigma = 0.4\033[0m")
print("Lagrange\tSpline lineare\tSpline cubica\tMinimi quadrati (grado 4)")
# print("%.4f\t\t%.4f\t\t%.4f\t\t%.4f" % (interpolante, spline_lineare,␣
 ↪spline_cubica, minq))

print("\n\033[1mValore stimato per sigma = 0.75\033[0m")
print("Lagrange\tSpline lineare\tSpline cubica\tMinimi quadrati (grado 4)")
# print("%.4f\t\t%.4f\t\t%.4f\t\t%.4f" % (interpolante, spline_lineare,␣
 ↪spline_cubica, minq))
```

```
Valore stimato per sigma = 0.4
Lagrange        Spline lineare  Spline cubica   Minimi quadrati (grado 4)

Valore stimato per sigma = 0.75
Lagrange        Spline lineare  Spline cubica   Minimi quadrati (grado 4)
```

[ ]:
```python
# Grafico che rappresenta il processo di estrapolazione
import matplotlib.pyplot as plt
# Estremi dell'intervallo dove valutare il polinomio
# a,b =
# punti di valutazione
xx = linspace(a,b,1000)

plt.plot(sigma,epsilon,'kd', label = 'nodi')

# interpolante polinomiale

# spline lineare

# spline cubiche

# minimi quadrati

plt.legend()
plt.title('Dati sperimentali e confronti')
plt.grid()
plt.xlabel('x')
plt.xlabel('y')
plt.show()
```



1.3 Esercizio 3: Il fenomeno di Runge

L'interpolazione polinomiale può anche essere utilizzata per approssimare una data funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. In questo caso, si valuta f su di una griglia con $n+1$ nodi, $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ e la si approssima con l'interpolante $\tilde{p} = \Pi_n f$ passante per i nodi $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$. La notazione $\Pi_n f$ sta ad enfatizzare che l'interpolante dipende dalla funzione f e dal numero di intervalli della partizione n. La qualità dell'approssimazione può essere indagata a posteriori valutando l'errore globale

$$E_n := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$$

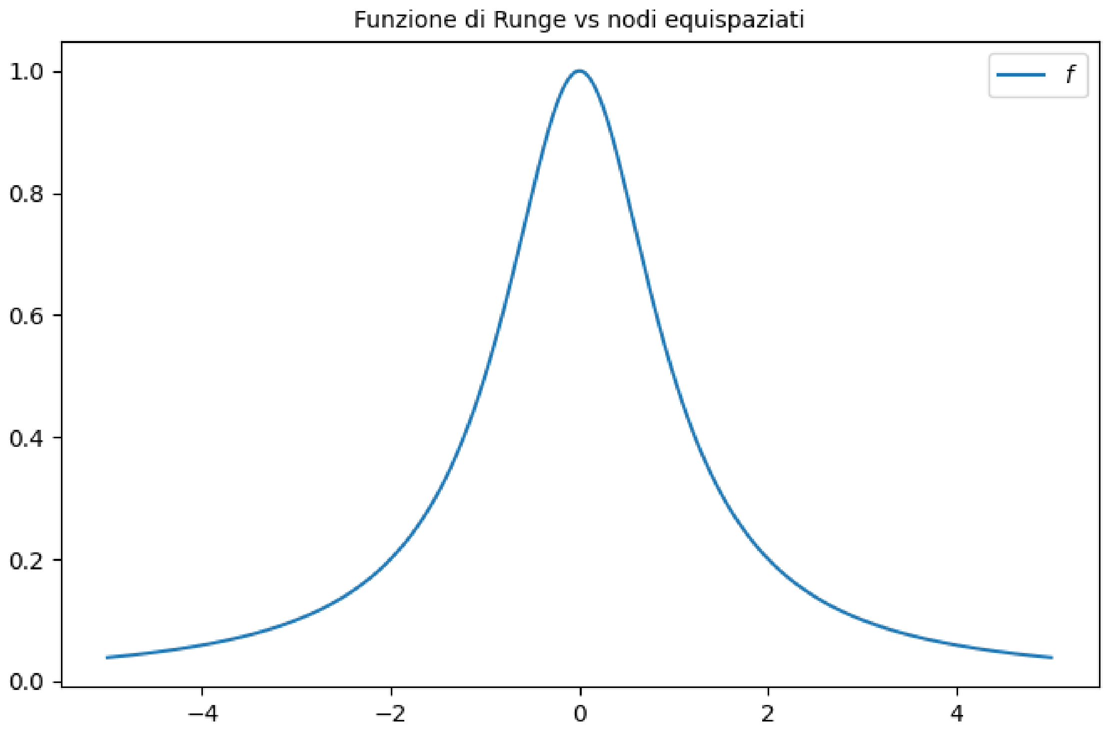
sull'intervallo $[a, b]$. Come vedremo, nel caso di interpolazione polinomiale di Lagrange, la numerosità dei nodi non basta a garantire una buona approssimazione: occorre anche posizionare i nodi in modo opportuno!

Esercizio 3.1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

sull'intervallo $[a, b] = [-5, 5]$. Si approssimi f usando l'interpolazione polinomiale di Lagrange su di una griglia equispaziata con $n = 7, 9, 11$ intervalli. Confrontare graficamente la funzione f con le varie interpolanti. Calcolare inoltre gli errori E_n: che cosa sta succedendo all'aumentare di n?

[ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import cos, pi, arange, linspace, polyfit, polyval

# lambda function per la f
f = lambda x: 1.0/(1+x**2)
# estrmi dell'intervallo
a, b = -5, 5
xplot = linspace(a, b, 1000)


plt.figure(figsize = (8, 5))
plt.plot(xplot, f(xplot), label = '$f$')


plt.title("Funzione di Runge vs nodi equispaziati", fontsize = 10)
plt.legend()
plt.show()
```



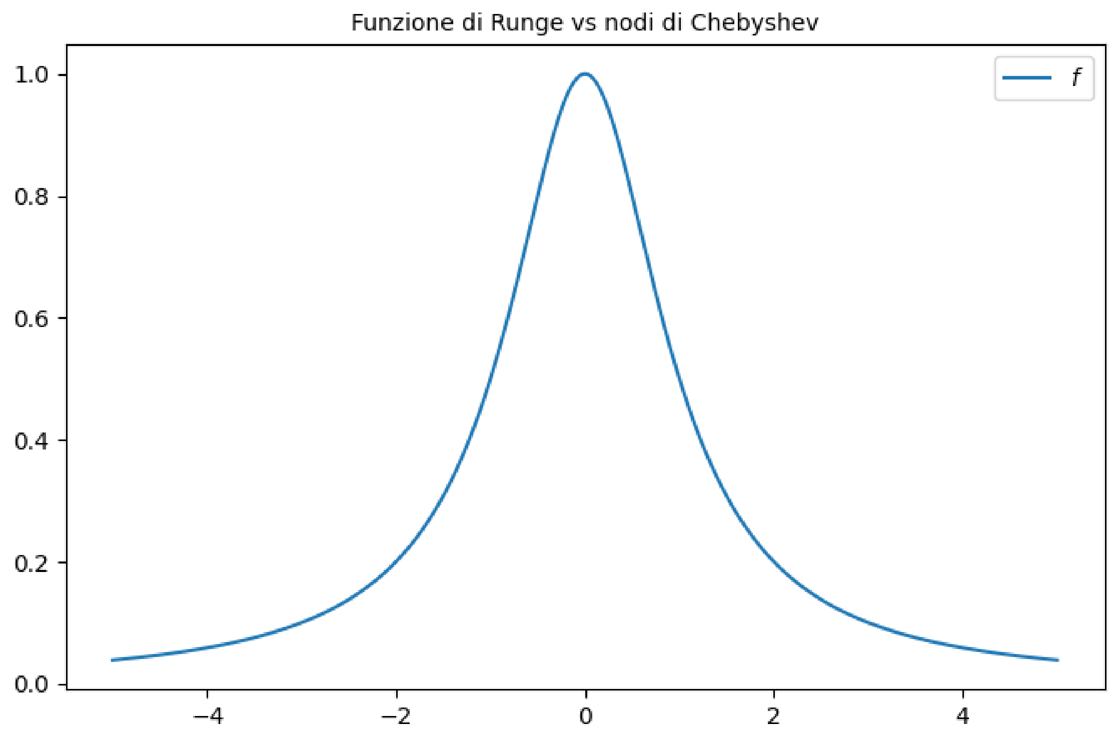
Esercizio 3.2 Si ripeta il punto precedente, utilizzando questa volta i nodi di Chebyshev. Si rammenta che, scelto n, sull'intervallo $\hat{I} = [-1, 1]$, essi sono dati da

$$\hat{x}_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right),$$

dove $i = 0, \dots, n$. I nodi possono essere trasferiti su un generico intervallo $[a, b]$ con la trasformazione

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\hat{x}_i.$$

[ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import cos, pi, arange, linspace, polyfit, polyval
# definire la funzione che restituisca i nodi di Chebychev
#def nodi_Chebyshev(a,b,n):
  ###
  ###
  ###  return x

# rappresentazione grafica dell'esercizio precedente
plt.figure(figsize = (8, 5))
plt.plot(xplot, f(xplot), label = '$f$')


plt.title("Funzione di Runge vs nodi di Chebyshev", fontsize = 10)
plt.legend()
plt.show()
```



1.4 Esercizio 4

Si consideri la funzione $f(x) = xsin(x)$.

1. Si disegni il grafico della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-2, 6]$.
2. Si costruiscano i polinomi interpolanti di Lagrange $\Pi_n f$ di grado $n = 2$, 4, 6 relativi ad una distribuzione di nodi equispaziati.
3. Si rappresenti graficamente l'andamento dell'errore $\varepsilon(x) = |f(x) - \Pi_n f(x)|$ e si calcoli la norma infinito:

$$\| \varepsilon(x) \|_\infty = \max_{x\in[-2,6]} |f(x) - \Pi_n f(x)|.$$

Commentare i risultati.

```
[ ]:
```