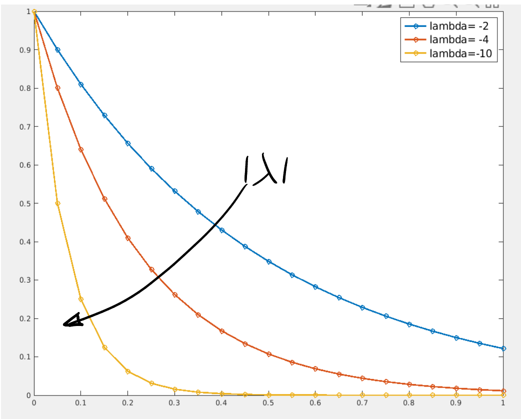
ASSOLUTA STABILITÀ del θ-METODO
– ESEMPI –



Problema modello

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \lambda < 0$$

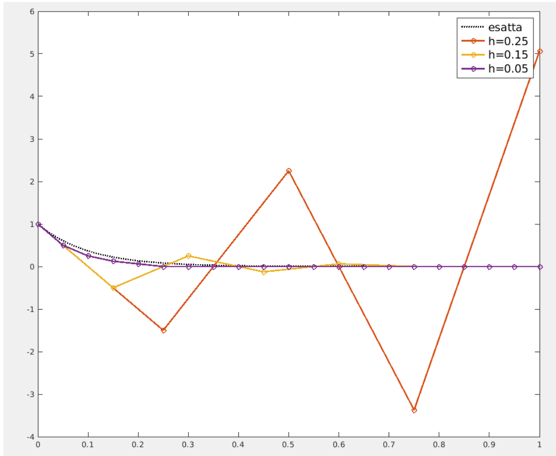
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \qquad y = e^{-\lambda t}$$

$|\lambda|$ grande: "dinamica" più veloce

EULERO ESPLICITO:

Scelgo il caso $\lambda = -10$.

$h < \dfrac{2}{|\lambda|} \Rightarrow h < \dfrac{2}{10} = 0.2$ per avere l'assoluta stabilità.



Con $h = 0.25 \Rightarrow$ oscillazioni di ampiezza crescente

Con $h = 0.15 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$ TUTTAVIA la soluzione è inaccurata e diventa anche < 0

Con $h = 0.05$ stabile e accurata.

UN COMMENTO: POSITIVITÀ della SOLUZIONE (non parte del programma)

So che $y = e^{-\lambda t} > 0 \quad \forall t$

Tuttavia questo non è garantito per u_n! $\quad u_{n+1} = u_n(1 + h\lambda) = u_0 \cdot (1+h\lambda)^{n+1}$

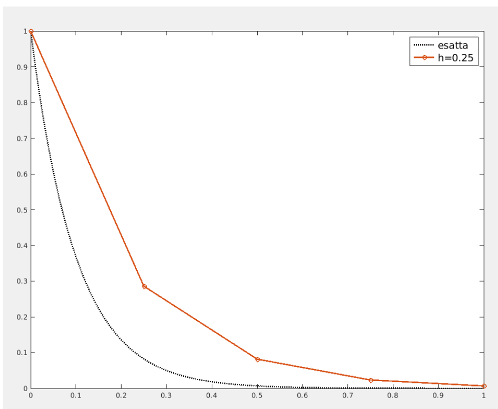
Chiedo quindi che $1 + h\lambda > 0$ per garantire $u_{n+1} > 0$

$h\lambda > -1 \qquad h < -\dfrac{1}{\lambda} \qquad h < \dfrac{1}{|\lambda|}$ (più stringente rispetto alla stabilità)

EULERO IMPLICITO

È assolutamente stabile $\forall h$

(ma non necessariamente accurato!)



CRANK NICOLSON:

Calcoli per la condizione di assoluta stabilità

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n) + \frac{h}{2} f(t_{n+1}, u_{n+1}) = u_n + \frac{h\lambda}{2} u_n + \frac{h\lambda}{2} u_{n+1}$$

$$u_{n+1}\left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right) = u_n\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right) \qquad u_{n+1} = \left[\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\right]^{n+1}$$

$$\left|\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\right| < 1 \qquad \left|1+\frac{h\lambda}{2}\right| < 1 - \frac{h\lambda}{2} \leftarrow \text{sempre} > 0$$

- $1 + \frac{h\lambda}{2} > 0 \qquad h\lambda > -2 \qquad \begin{cases} h < \frac{2}{|\lambda|} \\ \cancel{1} + \frac{h\lambda}{2} < \cancel{1} - \frac{h\lambda}{2} \qquad h\lambda < 0 \quad \forall h \end{cases} \Rightarrow h < \frac{2}{|\lambda|}$

- $1 + \frac{h\lambda}{2} < 0 \qquad h\lambda < -2 \qquad \begin{cases} h > \frac{2}{|\lambda|} \\ -1 - \frac{h\lambda}{2} < 1 - \frac{h\lambda}{2} \qquad \forall h \end{cases} \Rightarrow h > \frac{2}{|\lambda|}$

Riassumendo, è assolutamente stabile $\forall h$

CASO PIÙ GENERALE:

$$y' = f(t)\lambda \quad \text{con} \quad -M < f(t) < -m \quad \text{con } m > 0,\ M > 0$$

Esempio: $f(t) = 5(\sin(2\pi t) - 2)$

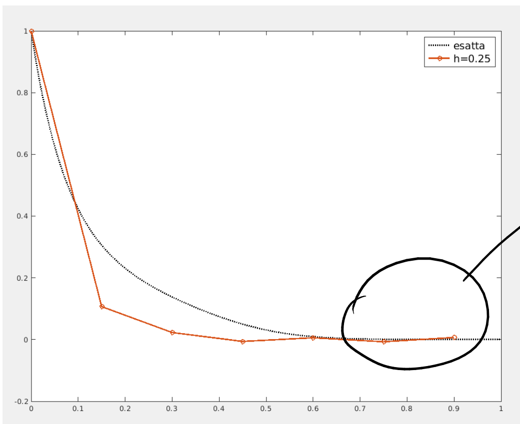
Intervallo di tempo considerato $[0, T)$ con $T = 1$

$$\Rightarrow -1 \leq \sin(2\pi t) \leq 1$$

$$\Rightarrow -15 \leq f(t) \leq -5 \qquad M = 15$$

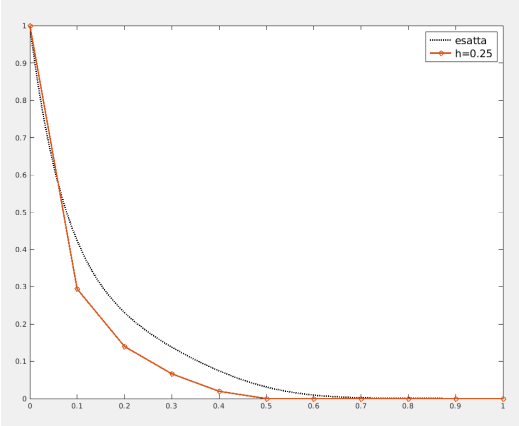
Con Eulero esplicito $h < \frac{2}{15} = 0.133$

Con $h = 0.15$ ottengo



la soluzione ricomincia a crescere!

Con $h = 0.1$



non è accurata ma $\to 0$

CASO DI UN SISTEMA di EQUAZIONI

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -3y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 2 \end{cases}$$

Forma matriciale:

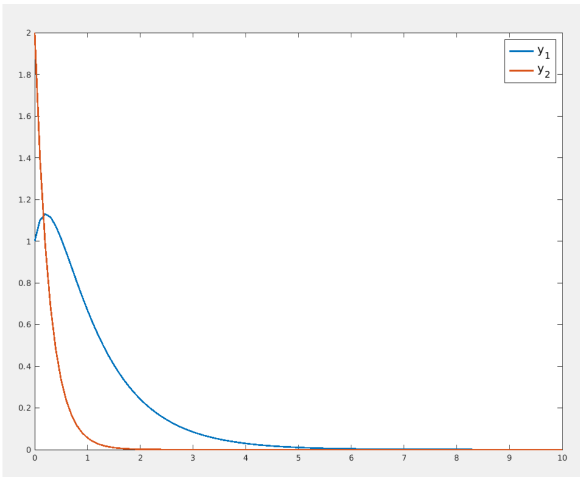
$$\underline{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{y} \qquad J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 0 & \lambda+3 \end{bmatrix} = 0$$

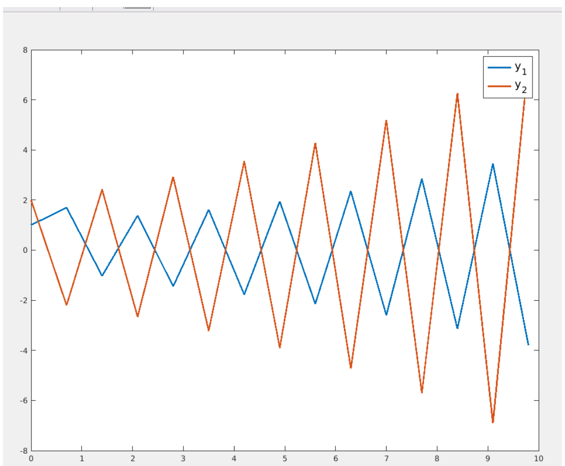
$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = -3$$

Assoluta stabilità di EE ESPLICITO:

$$h < \frac{2}{|-3|} = 0.66$$

Con $h = 0.1$ allora





Con $h = 0.7$ invece...