Soluzione

Teoria

1. Si indichino le condizioni necessarie per la convergenza del metodo di bisezione per una funzione f nell'intervallo $[a, b]$:

☑ La funzione è continua nell'intervallo considerato.

☐ Lo zero è di molteplicità pari.

☑ Lo zero è di molteplicità dispari.

☐ La funzione sia tale che $f(a)f(b) > 0$.

☑ La funzione sia tale che $f(a)f(b) < 0$.

2. Quante operazioni floating point sono necessarie per risolvere un sistema triangolare superiore di dimensione 100×100 con l'algoritmo di sostituzione all'indietro:

☑ 10000.

☐ 1000000.

☐ 20000.

☐ 40000.

☐ 100.

3. Si indichino le condizioni necessarie per la convergenza del metodo del gradiente per la soluzione del sistema $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

☑ A è una matrice simmetrica definita positiva.

☑ A è invertibile.

☐ Esiste la fattorizzazione LU di A.

☐ Il numero di condizionamento di A è minore di 1.

☐ Il raggio spettrale di A è minore di 1.

4. Il metodo di Newton applicato al sistema non lineare $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, con $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]$ e $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ richiede:

☑ la soluzione di un sistema lineare di dimensione $n \times n$ ad ogni iterazione.

☑ la soluzione di un sistema definito dallo Jacobiano di f ad ogni iterazione.

☐ la soluzione di un solo sistema lineare di dimensione $n \times n$.

☐ la soluzione di un solo sistema definito dallo Jacobiano di f.

☐ la soluzione di n sistemi lineari di dimensione $n \times n$ ad ogni iterazione.

5. Dati una funzione f e $n+1$ nodi distinti $x_i, i = 0, \dots, n$ nell'intervallo $[a, b]$, il polinomio interpolante di Lagrange converge a f per n che tende all'infinito:

☐ per ogni scelta di nodi.

☐ se i nodi sono equispaziati.

☐ se i nodi non sono equispaziati.

☑ se i nodi sono i nodi di Chebyshev.

☐ se f è di classe C^2.

6. Dati 3 punti di coordinate $P_0 = (-1, 2)$, $P_1 = (0, 4)$, $P_2 = (1, -3)$, si fornisca l'espressione esplicita del polinomio caratteristico di Lagrange associato al nodo $x_0 = -1$ e l'espressione del polinomio di Lagrange che interpola i punti P_i, $i = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}, \\ \Pi_2(x) &= -\frac{9}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 4. \end{aligned}$$

7. Per integrare esattamente un polinomio di grado 4 in un intervallo $[a, b]$ si può utilizzare:

☐ La formula di quadratura dei trapezi.

☐ La formula di quadratura di Simpson.

☐ La formula di quadratura di Gauss-Legendre con 2 nodi.

☐ La formula del punto medio.

☑ La formula di quadratura di Gauss-Legendre con 3 nodi.

8. Si consideri il problema ai limiti $-u''(x) + u' + u = f(x)$ definito nell'intervallo (a, b) con una condizione di Dirichlet nell'estremo a e una condizione di Neumann nell'estremo b su una griglia ottenuta suddividendo l'intervallo in 200 sotto-intervalli. Se si approssima il problema con il metodo agli elementi finiti, la soluzione è cercata in uno spazio finito-dimensionale di dimensione:

☑ 200.

☐ 201.

☐ 199.

☐ 40000.

☐ 401.

9. Si consideri un metodo numerico per la soluzione di un problema di Cauchy. Si indichi quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

☑ Se il metodo è convergente allora è consistente e zero-stabile.

☐ Se il metodo è consistente allora è convergente e zero-stabile.

☑ Se il metodo è consistente e zero-stabile allora è convergente.

☑ Se il metodo è ad un passo e consistente allora è convergente.

☐ Se il metodo è ad un passo e zero-stabile allora è convergente.

10. Se si approssima l'equazione del calore con elementi finiti lineari in spazio (con passo di discretizzazione spaziale h) e il metodo di Eulero esplicito in tempo (con passo di discretizzazione temporale dt), il metodo è stabile per:

☐ qualunque valore di dt.

☐ nessun valore di dt.

☑ $dt \leq Ch^2$.

☐ $dt \leq Ch$.

☐ $dt = h$.

Esercizio 1

Si consideri il sistema A$\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ottenuto discretizzando con elementi finiti lineari il problema di Poisson $-u''(x) = 1$ sul dominio $[0, 1]$ con condizioni di Dirichlet omogenee e una griglia uniforme con passo $h = 0.1$.

11. Si definisca la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel e si riporti il valore del suo raggio spettrale per il sistema considerato.

$$\mathrm{B_{GS}} = (\mathrm{D} - \mathrm{E})^{-1}(\mathrm{D} - \mathrm{E} - \mathrm{A}),$$

dove:

- $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\mathrm{A})$.
- E è una matrice triangolare inferiore i cui soli elementi non nulli sono $e_{ij} = -a_{ij}$, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, i-1$.

Il valore del raggio spettrale di $\mathrm{B_{GS}}$ è:

$$\rho_{\mathrm{GS}} = 0.9045.$$

12. Si riportino i comandi Matlab necessari per risolvere il sistema con il metodo di Gauss-Seidel a partire dalla soluzione iniziale nulla con una tolleranza di 10^{-6}.

```
% dati
a = 0; b = 1;
mu = 1; h = 0.1;
fun = @(x) +1 + 0*x;

% nodi di bordo
x0 = a;
xL = b;

% nodi interni
xin = [x0+h:h:xL-h]';
N = length(xin);

% matrice di rigidezza A
d0  = ones(N,1);
d1  = ones(N-1,1);
A = mu/h  * (2*diag(d0) - diag(d1,1) - diag(d1,-1));

% termine noto b
b = h*fun(xin);

% Applico Gauss-Seidel
toll = 1e-6;
nmax = 1000;
x0_sol = zeros(N,1);
[uGS,kGS] = gs(A,b,x0_sol,toll,nmax);

% aggiunta dei bordi per i nodi di griglia e per la soluzione di
% Gauss-Seidel
X = [x0;xin;xL];
UGS = [0;uGS;0];
```

13. Si definisca la matrice di iterazione di Jacobi e si riporti il valore del suo raggio spettrale per il sistema considerato.

$$\mathrm{B_J} = \mathrm{D}^{-1}(\mathrm{D} - \mathrm{A}),$$

dove $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\mathrm{A})$.

Il valore del raggio spettrale di $\mathrm{B_J}$ è:

$$\rho_{\mathrm{J}} = 0.9511.$$

14. Si riportino i comandi Matlab necessari per risolvere il sistema con il metodo di Jacobi a partire dalla soluzione iniziale nulla con una tolleranza di 10^{-6}.

```
% A, b, x0_sol, toll, nmax sono ottenuti come nel quesito 12.
% I nodi di griglia X sono identici a quelli ottenuti nel quesito 12.

% Applico Jacobi
[uJ,kJ] = jacobi(A,b,x0_sol,toll,nmax);

% aggiunta dei bordi per la soluzione di Jacobi
UJ = [0;uJ;0];
```

15. Si riporti il numero di iterazioni necessarie per i due metodi e si commenti sinteticamente il risultato.

$$k_{\mathrm{GS}} = 139, \qquad k_{\mathrm{J}} = 275.$$

I metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono entrambi convergenti. Infatti i raggi spettrali delle loro matrici di iterazione sono minori di 1. In particolare, poichè $\rho_{\mathrm{GS}} < \rho_{\mathrm{J}}$, il metodo di Gauss-Seidel converge più velocemente di quello di Jacobi. Inoltre, essendo A una matrice tridiagonale non singolare, i raggi spettrali sono tali per cui $\rho_{\mathrm{GS}} = \rho_{\mathrm{J}}^2$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione $y(x) = x\cos(2\pi x)$.

16. Il valore esatto della derivata prima di y nel punto $x = 1/4$ è:

$$y'(x = 1/4) = -1.5708.$$

17. Si riportino i comandi Matlab necessari per approssimare la derivata prima nel punto $x = 1/4$ con la formula delle differenze finite in avanti per diversi valori del passo di discretizzazione spaziale $h = 0.1, 0.05, 0.025$ e per calcolare l'errore rispetto alla soluzione esatta (Copia & Incolla da Matlab).

```matlab
f = @(x) x .* cos(2*pi*x);
df = @(x) cos(2*pi*x) - 2*pi*x .* sin(2*pi*x);
x0 = 0.25;
df_ex = df(x0);

hh = [0.1, 0.05, 0.025]';
err_da = zeros(length(hh),1);
err_dc = zeros(length(hh),1);

for i = 1:length(hh)
   I = [x0-hh(i), x0, x0+hh(i)];
   fI = f(I);

   % Differenze in avanti
   df_da = (fI(3)-fI(2))/hh(i);

   % Differenze centrate
   df_dc = (fI(3)-fI(1))/(2*hh(i));

   % Errori
   err_da(i) = abs(df_ex-df_da);
   err_dc(i) = abs(df_ex-df_dc);
end
```

18. Si riportino i comandi Matlab necessari per approssimare la derivata prima nel punto $x = 1/4$ con la formula delle differenze finite centrate per diversi valori del passo di discretizzazione spaziale $h = 0.1, 0.05, 0.025$ e per calcolare l'errore rispetto alla soluzione esatta (Copia & Incolla da Matlab).

Si veda la risposta al quesito 17.

19. Si utilizzino i risultati ottenuti per stimare numericamente l'ordine di accuratezza delle due formule.

Eseguendo la regressione lineare:

```matlab
coeff_da = polyfit(log(hh),log(err_da),1);
coeff_dc = polyfit(log(hh),log(err_dc),1);

OA_da = coeff_da(1);
OA_dc = coeff_dc(1);
```

si ottiene:

- ordine di accuratezza differenze finite in avanti: OA_da = 0.8488.
- ordine di accuratezza differenze finite centrate: OA_dc = 1.9866.

20. Si commentino sinteticamente i risultati ottenuti.

Si osserva che gli errori ottenuti usando la formula delle differenze finite centrate sono minori rispetto a quelli ottenuti usando la formula delle differenze finite in avanti. Inoltre, stimando numericamente l'ordine di accuratezza delle due formule, si ha conferma che la formula delle differenze finite in avanti è accurata al prim'ordine, mentre la formula delle differenze finite centrate è accurata al second'ordine.