Lab 2 - Equazioni non lineari (soluzione lezione)

February 26, 2024

1 Lab 2 - Equazioni non lineari

Si consideri il problema della ricerca degli zeri dell'equazione non lineare $f(x) = 0$, dove f è definita da:

$$f(x) := e^x - x^2 - \sin(x) - 1, \qquad x \in [-2, 2] \, . \tag{1}$$

2 Rappresentazione grafica della funzione

Disegnare il grafico della funzione f e la retta $y = 0$ in modo da evidenziare le due soluzioni dell'equazione.

[1]:
```
# step 0 -> ricordarsi di importare i pacchetti numpy and matplotlib

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Vediamo un nuovo costrutto utile per costruire funzioni matematiche "lambda function" in modo semplice e veloce.

```
f = lambda nome_variabili: esperessione della funzione
```

[2]:
```
# esempi di lambda function

f = lambda t: np.sin(t*np.pi)
g = lambda x: np.sin(x*np.pi) # la variabile è locale e quindi queste du␣
 ↪funzioni sono uguali
h = lambda x,y,z: x+2*y+2*z

print("valuto la funzione f in 0.5: %f" % f(0.5))
print("valuto la funzione g in 0.5: %f" % g(0.5))
print("valuto la funzione h in (1,2,3): %f" % h(1,2,3))
```

```
valuto la funzione f in 0.5: 1.000000
valuto la funzione g in 0.5: 1.000000
valuto la funzione h in (1,2,3): 11.000000
```

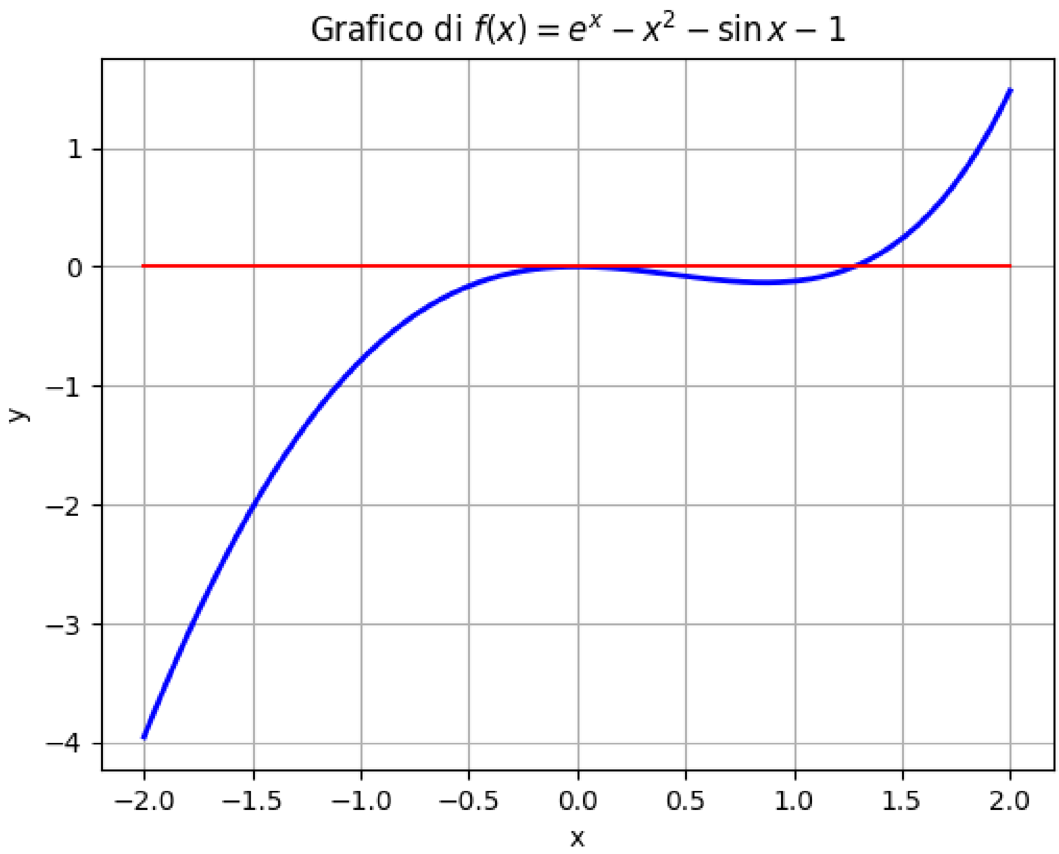
Scrivere la funzione f dell'esercizio usando la lambda function

[3]:
```
# lambda function della funzione f

f = lambda x: np.exp(x) - x**2 - np.sin(x) - 1.0
```

Rappresentazione grafica

[4]:
```
# rappresentazione grafica
# discretizzazione dell'intervallo [-2 2]
xgrid=np.linspace(-2,2,1000)
# plot di f
plt.plot(xgrid, f(xgrid),'b-',linewidth=2.0)
# plot asse y=0
plt.plot(xgrid,np.zeros(np.shape(xgrid)),'r-') # o semplicemente plt.
 ↪plot([-2,2],[0,0],'r-')
# specifiche grafiche titolo, legenda, grid,
plt.title("Grafico di $f(x)=e^x-x^2-\sin x-1$")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid()
plt.show()
```



3 Bisezione

Domanda: Il metodo di bisezione è applicabile per calcolare entrambe le radici? Motivare la risposta.

Esercizio 1.1: implementazione bisezione

Scrivere una function `bisez` che implementi il metodo di bisezione. L'intestazione della funzione sarà ad esempio la seguente:

```
def bisez(f,a,b,toll):
#
# implementazione di bisezione
#
return xvect
```

Tale funzione riceve in input: * `f` → funzione di cui vogliamo calcolare gli zeri, * a → primo estremo * b → secondo estremo * `toll` → tolleranza richiesta

e in out * `xvect` → il vettore delle iterate.

[5]:
```python
# definizione del metodo di bisezione
def bisez(f, a, b, toll = 1e-6):

  # controllo se gli estremi sono una bracket (opzionale)
  if (f(a)*f(b)>=0):
   raise RuntimeError('ERRORE: l''intervallo [a,b] non è una bracket')

  # inizializzazione
  xvect = []

  while (abs(b-a)>toll):
    x = 0.5*(a+b)

    # primo controllo se x è uno zero (opzionale)
    if (f(x)==0):
      xvect.append(x)
      print("x è esattamente uno zero della funzione")
      break

    # metodo di bisezione
    if (f(a)*f(x)>0):
        a = x
    else:
        b = x

    xvect.append(x)

  return  np.array(xvect)
```

Esercizio 1.2 Quando è possibile, applicare il metodo di bisezione alla funzione f. Stampare il numero di iterazioni, lo zero trovato x^* e il valore della funzione $f(x^*)$.

[6]:
```
# scelta degli estremi a,b
a , b = 1, 1.5
xvect = bisez(f, a, b, 1e-12)

x0 = xvect[-1]
print("Numero iterazioni: %d." % len(xvect))
print("Ultimo valore di x: %f" % x0)
print("Ultimo valore di f: %.e\n" % f(x0))
```

```
Numero iterazioni: 39.
Ultimo valore di x: 1.279701
Ultimo valore di f: 7e-13
```

4 Metodo di Newton

Domanda: Discutere le proprietà di convergenza del metodo di Newton per entrambi gli zeri, valutando l'opportunità di applicare il metodo di Newton.

Esercizio 2.1: implementazione Newton Scrivere una function `newton` che implementi il metodo di Newton. L'intestazione della funzione sarà ad esempio la seguente:

```
def newton (f,df,x0,nmax,toll)
#
# implementazione del metodo di newton
#
return xvect
```

Tale funzione riceve in input: * `f` → funzione di cui vogliamo calcolare gli zeri, * `df` → la derivata della funzione f, * x_0 → punto di partenza * `nmax` → numero massimo di iterazione * `toll` → tolleranza richiesta

e in out * `xvect` → il vettore delle iterate.

Si utilizzi un criterio d'arresto basato sul modulo della differenza tra due iterate successive.

[7]:
```
# Definizione del metodo di Newton (questa è già la versione modificata)
def newton (f,df,x0,nmax=100,toll=1e-6,m=1) :

  xvect=[]
  xold = x0

  for nit in range(nmax) :
    # verifica che la derivata prima non è nulla
    if (df(xold) == 0): # if (abs(df(xold)<np.finfo(float).eps): -> questo un␣
↪altro modo
        raise RuntimeError('ERRORE: Derivata prima nulla \n')
    else :
```

```
        # calcolo il nuovo punto
        xnew=xold-m*f(xold)/df(xold)
        #carico i vettori
        xvect.append(xnew)

      # criterio di arresto e aggiorno
      if (abs(xnew-xold) < toll) :
          break
      else :
          xold=xnew

  return np.array(xvect)
```

Esercizio 2.2: modifica di Newton Si scriva, modificando opportunamente la function `newton`, il metodo di Newton modificato, passando come parametro in ingresso anche la molteplicità dello zero cercato. L'intestazione della funzione sarà la seguente:

```
def newton (f,df,x0,nmax,toll,m=1)
  #
  # modificare il passo iteratativo di newton
  #  x^{k+1} = x^k - m f(x^k)/f'(x^k)
  #
  return xvect
```

dove `m` è la molteplicità dello zero cercato.

Esercizio 2.3

Applicare il metodo di Newton e, quando è il caso, il metodo di Newton modificato (aggiungendo la specifica `m`) con tolleranza 10^{-6}, per la funzione

$$f(x) := e^x - x^2 - \sin(x) - 1, \qquad x \in [-2, 2] \,. \tag{2}$$

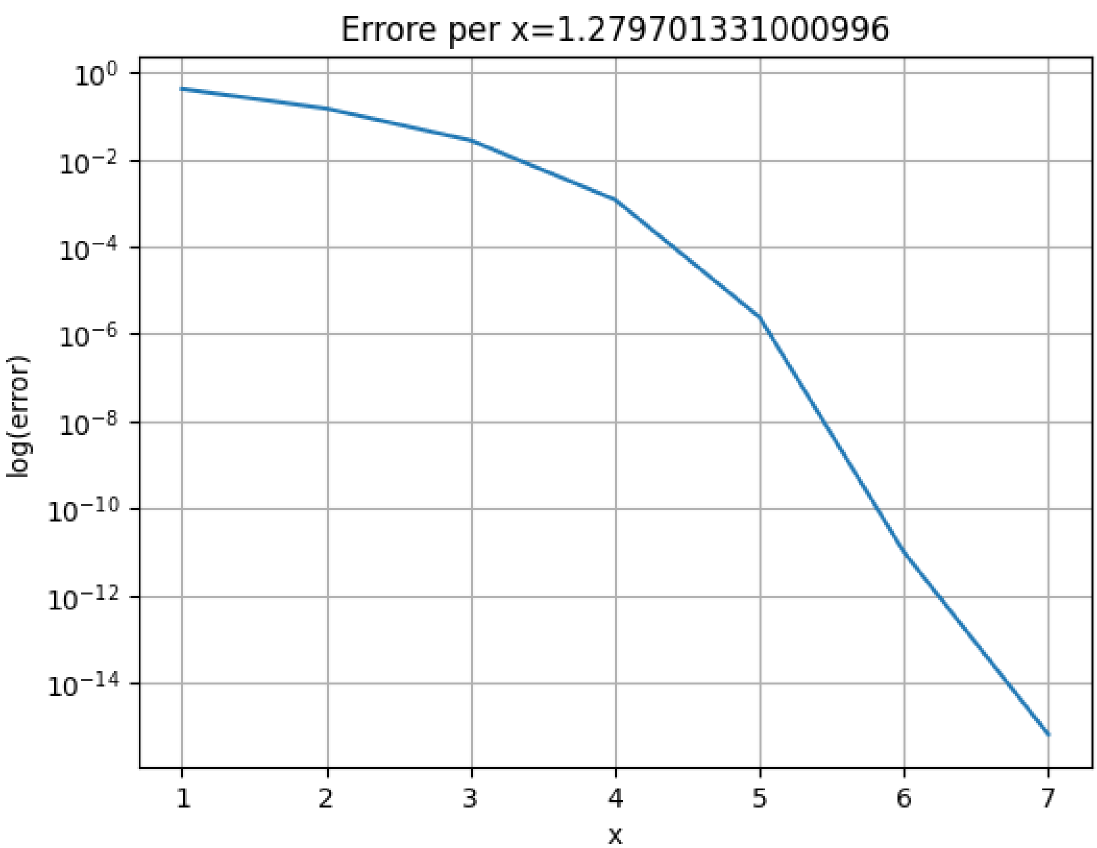
Riportare su un grafico in scala semilogaritmica l'andamento dell'errore in funzione del numero di iterazioni. Per il calcolo dell'errore si assuma come valore esatto dello zero non nullo, il valore $x = 1.279701331000996$. Cosa si osserva nell'ordine di convergenza?

[8]:
```
# funzione f e la sua derivata df
f = lambda t: np.exp(t) - t**2 - np.sin(t) - 1.0
df = lambda t: np.exp(t) - 2*t - np.cos(t)
```

[9]:
```
# ricerca dello zero xe=1.279701331000996
xe=1.279701331000996
# starting point
x0=1

xvect = newton(f, df, x0, 100, 1e-6)
# calcolo dell'errore
error = np.abs(xe-xvect)
```

```python
# rappresentazione grafica dell'errore
plt.semilogy(np.arange(1,len(xvect)+1), error)
plt.title("Errore per x=%.15f" % xe)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('log(error)')
plt.grid()
plt.show()
```



[10]:
```python
# Ricerca dello zero xe=0
xe=0
# starting point
x0=0.1

# chiamo newton
xvect_n=newton(f,df,x0,100, 1e-6)
# calcolo dell'errore per newton
error_n = np.abs(xe-xvect_n)

# chiamo newton modificato con m=2
xvect_nm=newton(f,df,x0,100, 1e-6, m=2)
```

```python
# calcolo dell'errore per newton modificato
error_nm = np.abs(xe-xvect_nm)

plt.semilogy(np.arange(1,len(xvect_n)+1), error_n)
plt.semilogy(np.arange(1,len(xvect_nm)+1), error_nm)
plt.legend(['newton', 'newton mod m=2'])
plt.title("Errore per x=%d:" % xe)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('log(error)')
plt.grid()
plt.show()
```