Statistica - 7ª lezione

28 marzo 2023

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

standardizzazione di $\overline{X}_n$

Teorema del limite centrale

Qual è la densità di $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ quando n è grande ?

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n] \qquad$ linearità di $\mathbb{E}$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{\mu} + \ldots + \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{\mu}$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{\mu} + \ldots + \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{\mu} = n\mu$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\mu$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\mu$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$ indipendenza delle X_i

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\mu$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \underbrace{\mathrm{var}[X_1]}_{\sigma^2} + \ldots + \underbrace{\mathrm{var}[X_n]}_{\sigma^2}$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\mu$$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $$\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \underbrace{\mathrm{var}[X_1]}_{\sigma^2} + \ldots + \underbrace{\mathrm{var}[X_n]}_{\sigma^2} = n\,\sigma^2$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\mu$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\sigma^2$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad \underbrace{X_1 + \ldots + X_n \;=\; n\overline{X}_n \;\approx\; N}$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\mu$
- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = n\sigma^2$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 + \ldots + X_n \;\approx\; N(n\mu,\, n\sigma^2)}$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad \underbrace{X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N}$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\mu$
- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\sigma^2$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 + \ldots + X_n \approx N(n\,\mu,\, n\,\sigma^2)}$$

Teorema del Limite Centrale (versione equivalente)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora

$$X_1 + \ldots + X_n \sim B(n, q)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q)$$
$$X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\; n\,\sigma^2\right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{aligned} X_1 + \ldots + X_n &\sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n &\approx N\left(n\,\mu,\; n\,\sigma^2\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\; n\,\sigma^2\big)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)$$

Quali sono i parametri della gaussiana ?

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)$$

- $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)$$

- $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q$
- $\sigma^2 = \mathrm{var}\left[X_i\right] = q(1-q)$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)}_{} $$

$$\Downarrow$$

- $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q$
- $\sigma^2 = \mathrm{var}\left[X_i\right] = q(1-q)$

$$\Rightarrow \boxed{B(n,\, q) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big)}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1,q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{aligned} X_1 + \ldots + X_n &\sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n &\approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{B(n,\, q) \simeq N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ \mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q \\ &\bullet\ \sigma^2 = \mathrm{var}\left[X_i\right] = q(1-q) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{B(n,\, q) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big)}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale (versione formale)

Se $Y_n \sim B(n,q)$ per ogni n, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_n - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo esatto:

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \sum_{k=0}^{19} p_{Y_{30}}(k)$$

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo esatto:

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \sum_{k=0}^{19} p_{Y_{30}}(k)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo esatto:

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \sum_{k=0}^{19} p_{Y_{30}}(k) = \sum_{k=0}^{19} \binom{30}{k} 0.5^k (1-0.5)^{30-k}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo esatto:

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \sum_{k=0}^{19} p_{Y_{30}}(k) = \sum_{k=0}^{19} \binom{30}{k} 0.5^k (1-0.5)^{30-k} = ???$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\; n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\; 30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)\big)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\quad \begin{matrix} Y_{30} \\ \end{matrix} \quad < \quad \begin{matrix} 20 \\ \end{matrix} \quad \right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_{30} - n\,q}{} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{} \right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\Bigg)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}} \right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}} \right) = \Phi(1.826)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\Bigg)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Col calco

$B(30, ($ … $0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}\left(Y_{30} < 20\right) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}} \right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Col calco

$B(30, ($ ... $- 0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}(Y_{30} \leq 19.5)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Col calco

$B(30,$ … $-0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}(Y_{30} \leq 19.5)$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{19.5 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Col calco

$B(30, ($ … $-0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}(Y_{30} \leq 19.5)$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{19.5 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.643) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Col calco

$B(30, ($ … $- 0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}(Y_{30} \leq 19.5)$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{19.5 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.643) = 94.950\%$$

Approssimazione gaussiana vs. poissoniana

$$B(n,q) \;\simeq\; \left\{ \begin{array}{ll} N\big(n\,q,\; n\,q(1-q)\big) \quad \text{se} & \begin{cases} n \geq 20 \\ n\,q \geq 5 \\ n(1-q) \geq 5 \end{cases} \\ & \\ & \end{array} \right.$$

Approssimazione gaussiana vs. poissoniana

$$B(n,q) \;\simeq\; \begin{cases} N\big(n\,q,\; n\,q(1-q)\big) & \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ n\,q \geq 5 \\ n(1-q) \geq 5 \end{cases} \\[2em] \mathcal{P}(n\,q) & \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ q \leq 0.01 \\ n\,q \simeq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Approssimazione gaussiana vs. poissoniana

$$B(n,q) \simeq \begin{cases} N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) & \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ n\,q \geq 5 \\ n(1-q) \geq 5 \end{cases} \\ \\ \mathcal{P}(n\,q) & \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ q \leq 0.01 \\ n\,q \simeq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(\lambda) \simeq N(\lambda,\, \lambda) \quad \text{se} \quad \lambda \geq 5$$

TLC e gaussianità delle misure

Se misuriamo un lato del tavolo, il risultato sarà la v.a.

$$L = \ell + X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

dove:

$\ell =$ lunghezza *vera* del lato (costante deterministica)

$X_1 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del tavolo (v.a.)

$X_2 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del metro (v.a.)

$X_3 =$ errore dovuto all'imprecisione dello sperimentatore (v.a.)

$\cdots\cdots\cdots$

TLC e gaussianità delle misure

Se misuriamo un lato del tavolo, il risultato sarà la v.a.

$$L = \ell + X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

dove:

$\ell =$ lunghezza *vera* del lato (costante deterministica)

$X_1 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del tavolo (v.a.)

$X_2 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del metro (v.a.)

$X_3 =$ errore dovuto all'imprecisione dello sperimentatore (v.a.)

$\ldots\ldots\ldots$

IPOTESI: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e n è grande

TLC e gaussianità delle misure

Se misuriamo un lato del tavolo, il risultato sarà la v.a.

$$L = \ell + \underbrace{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}_{E}$$

dove:

$\ell =$ lunghezza *vera* del lato (<u>costante deterministica</u>)

$X_1 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del tavolo (<u>v.a.</u>)

$X_2 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del metro (<u>v.a.</u>)

$X_3 =$ errore dovuto all'imprecisione dello sperimentatore (<u>v.a.</u>)

. . . .

IPOTESI: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e n è grande

CONSEGUENZA: $E := X_1 + X_2 + \ldots + X_n \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0, \sigma_E^2)$

con $\sigma_E^2 = n \operatorname{var}[X_i]$

TLC e gaussianità delle misure

Se misuriamo un lato del tavolo, il risultato sarà la v.a.

$$L = \ell + X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ = \ell + E \approx N(\ell, \sigma_E^2)$$

dove:

$$\ell = \text{lunghezza } \textit{vera} \text{ del lato} \quad (\underline{\text{costante deterministica}})$$

$$X_1 = \text{errore dovuto alla dilatazione termica del tavolo} \qquad (\underline{\text{v.a.}})$$

$$X_2 = \text{errore dovuto alla dilatazione termica del metro} \qquad (\underline{\text{v.a.}})$$

$$X_3 = \text{errore dovuto all'imprecisione dello sperimentatore} \quad (\underline{\text{v.a.}})$$

$\ldots\ldots\ldots$

IPOTESI: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e n è grande

CONSEGUENZA: $E := X_1 + X_2 + \ldots + X_n \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0, \sigma_E^2)$

con $\sigma_E^2 = n \operatorname{var}[X_i]$

Cose da non fare MAI

- Credere che il TLC renda le X_i gaussiane quando n è grande:

  È assurdo !

  È $\overline{X}_n$ che diventa gaussiana. La densità delle X_i non può cambiare né se $n = 1$ né se $n = 10$ né se $n = 1'000'000$

Cose da non fare MAI

- Credere che il TLC renda le X_i gaussiane quando n è grande:

  È assurdo !

  È $\overline{X}_n$ che diventa gaussiana. La densità delle X_i non può cambiare né se $n = 1$ né se $n = 10$ né se $n = 1\,000\,000$

- Credere che $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ sia la stessa cosa di $n\,X_1$:

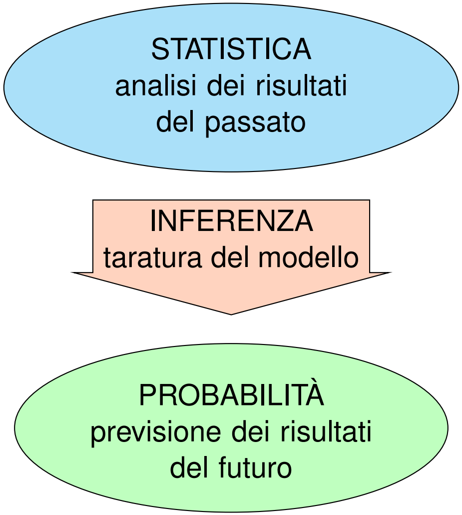
  Non ha senso !

  Se lancio un dado $n = 2$ volte ed esce $x_1 = 4$ al primo lancio e $x_2 = 1$ al secondo, la somma dei due lanci non può essere $n\,x_1 = 8$, ma è piuttosto $x_1 + x_2 = 5$.

Programma

- Statistica descrittiva
  (riassumere molti dati attraverso poche caratteristiche essenziali)
- Probabilità
  (costruire un modello che preveda il risultato di un esperimento)
- Inferenza statistica
  (tarare i parametri del modello in base ai risultati dell'esperimento)
- Regressione lineare
  (riconoscere relazioni tra dati di tipo diverso)

Statistica e Probabilità



Inferenza statistica

PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	
	$X_2 =$ 	
	$\dots$	

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	
	$X_2 =$ 	
	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	

	PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	
	$X_2 =$ 	
	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\cdots$	$\rightarrow$	$\cdots$	

densità $\left\{ \; X_i \sim f_\theta \right.$

parametri $\left\{ \begin{array}{l} \theta \in \mathbb{R} \\ \text{oppure } \theta \in \mathbb{R}^k \end{array} \right.$

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$			

Inferenza statistica

		PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento		
variabili aleatorie i.i.d.	$\{$	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	$\}$	realizzazioni (dati)
		$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$		
		$\cdots$	$\rightarrow$	$\cdots$		
densità	$\{$	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$		
parametri	$\{$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\}$	parametri

Inferenza statistica

PRIMA dell'esperimento → **DOPO l'esperimento**

variabili aleatorie i.i.d.:

$X_1 =$ 

$\rightarrow$ $x_1 = 1.2$

$X_2 =$ 

$\rightarrow$ $x_2 = 0.6$

$\ldots \rightarrow \ldots$

realizzazioni (dati)

densità: $X_i \sim f_\theta \rightarrow *$

parametri: $\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$ $\rightarrow$ $\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$ parametri

Vogliamo approssimare θ in base ai dati !

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\cdots$	$\rightarrow$	$\cdots$	
densità	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\mu = 1.5$ $\sigma = 0.8$	$\rightarrow$	$\mu = 1.5$ $\sigma = 0.8$	parametri

Vogliamo approssimare μ e σ in base ai dati !

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \dots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Una statistica è una variabile aleatoria !

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: $\overline{X}$ si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: $\overline{X}$ si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

Uno stimatore è una variabile aleatoria !

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: $\overline{X}$ si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA $=$ realizzazione di uno stimatore <u>dopo</u> l'esperimento aleatorio

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: $\overline{X}$ si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA $=$ realizzazione di uno stimatore dopo l'esperimento aleatorio

ESEMPIO: dopo $n = 3$ misure trovo $x_1 = 1.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 2.9$

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: $\overline{X}$ si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA $=$ realizzazione di uno stimatore dopo l'esperimento aleatorio

ESEMPIO: dopo $n = 3$ misure trovo $x_1 = 1.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 2.9$

$$\Rightarrow \quad \overline{x} = \frac{1.2 + 0.6 + 2.9}{3} = 1.567 \text{ è una stima di } \mu$$

Stima puntuale

STATISTICA $=$ qualsiasi funzione del campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$

ESEMPIO: la media campionaria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv h(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

STIMATORE $=$ statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: $\overline{X}$ si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA $=$ realizzazione di uno stimatore <u>dopo</u> l'esperimento aleatorio

ESEMPIO: dopo $n = 3$ misure trovo $x_1 = 1.2, \quad x_2 = 0.6, \quad x_3 = 2.9$

$$\Rightarrow \quad \overline{x} = \frac{1.2 + 0.6 + 2.9}{3} = 1.567 \text{ è una stima di } \mu$$

Una stima è un numero !

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\cdots$	$\rightarrow$	$\cdots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$			

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$	
densità	$X_i \sim f_\theta$	$\rightarrow$	$*$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	$\rightarrow$	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	$\rightarrow$	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima

θ non si può misurare, ma $\hat{\Theta}$ sì !

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	$\rightarrow$	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	$\rightarrow$	$x_2 = 0.6$	
	$X_3 =$ 	$\rightarrow$	$x_3 = 2.9$	
densità	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$	$\rightarrow$	$\ast$	
parametri	$\mu = 1.5$ $\sigma = 0.8$	$\rightarrow$	$\mu = 1.5$ $\sigma = 0.8$	parametri
stimatore	$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$	$\rightarrow$	$\overline{x} = \frac{1.2+0.6+2.9}{3}$	stima

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \underbrace{\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)}_{\text{distorsione}}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta)$$

  $\mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}$ è *non-distorto* (o *corretto*)

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)$$

  $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}$ è *non-distorto* (o *corretto*)

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)$$

  $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}$ è *non-distorto* (o *corretto*)

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

  $$\Rightarrow \quad \underbrace{\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta)}_{\text{errore quadratico medio}} := \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{deve esser piccolo}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \operatorname{bias}(\hat{\Theta}; \theta)$$

  $\operatorname{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}$ è *non-distorto* (o *corretto*)

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

  $$\Rightarrow \quad \underbrace{\operatorname{mse}(\hat{\Theta}; \theta)}_{\substack{\text{mean}\\ \text{square}\\ \text{error}}} := \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{deve esser piccolo}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ:

- $\hat{\Theta}$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta)$$

  $\mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}$ è *non-distorto* (o *corretto*)

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

  $\Rightarrow \quad \mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta) := \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$ deve esser piccolo

  Se $\hat{\Theta}_n = h_n(X_1, \ldots, X_n)$, allora

  $\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}_n$ è *consistente in media quadratica*

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\Theta}_n$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\Theta}_n$ non deve dipendere da θ

  $\Rightarrow$ si vede a occhio

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere centrata in θ

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\hat{\Theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta =: \operatorname{bias}(\hat{\Theta};\theta)$$

  $\operatorname{bias}(\hat{\Theta};\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}_n$ è *non-distorto* (o *corretto*)

- la densità di $\hat{\Theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

  $\Rightarrow \quad \operatorname{mse}(\hat{\Theta};\theta) := \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$ deve esser piccolo

  Se $\hat{\Theta}_n = h_n(X_1, \ldots, X_n)$, allora

  $\operatorname{mse}(\hat{\Theta}_n;\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Theta}_n$ è *consistente in media quadratica*

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$ perché $\mathrm{mse} \geq 0$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$:

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \; = \; \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2 - 2\,\theta\,\hat{\Theta} + \theta^2\right]$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$:

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2 - 2\,\theta\,\hat{\Theta} + \theta^2\right] = \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2\right] - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right] + \theta^2$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\text{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\text{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\text{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \text{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \text{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$:

$$\begin{aligned}\text{mse}(\hat{\Theta};\theta) &= \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2 - 2\,\theta\,\hat{\Theta} + \theta^2\right] = \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2\right] - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right] + \theta^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2\right] - \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right]^2 + \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right]^2 - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right] + \theta^2\end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$ DISTORSIONE

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$ ERRORE QUADRATICO MEDIO

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) &= \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2 - 2\,\theta\,\hat{\Theta} + \theta^2\right] = \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2\right] - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right] + \theta^2 \\ &= \underbrace{\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2\right] - \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right]^2}_{\mathrm{var}[\hat{\Theta}]} + \underbrace{\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right]^2 - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right] + \theta^2}_{\left(\mathbb{E}[\hat{\Theta}]-\theta\right)^2}\end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$ DISTORSIONE

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$ ERRORE QUADRATICO MEDIO

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) &= \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2 - 2\,\theta\,\hat{\Theta} + \theta^2\right] = \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2\right] - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right] + \theta^2 \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}^2\right] - \mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right]^2}_{\mathrm{var}[\hat{\Theta}]} + \underbrace{\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right]^2 - 2\,\theta\,\mathbb{E}\left[\hat{\Theta}\right] + \theta^2}_{\left(\mathbb{E}[\hat{\Theta}]-\theta\right)^2} \\
&= \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2
\end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$
$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{\begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \ \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \ \text{ consistente in media quadratica} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \underset{\mathbb{P}(E) \le 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right)$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty,\, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0,\, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{\begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta$:

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \underset{\mathbb{E}[\hat{\Theta}_n] = \theta}{=} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right)$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat\Theta;\theta) = \mathbb{E}[\hat\Theta] - \theta$$ DISTORSIONE

$$\mathrm{mse}(\hat\Theta;\theta) = \mathbb{E}[(\hat\Theta - \theta)^2]$$ ERRORE QUADRATICO MEDIO

1. $\mathrm{bias}(\hat\Theta;\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat\Theta;\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat\Theta;\theta) = \mathrm{var}\left[\hat\Theta\right] + \mathrm{bias}(\hat\Theta;\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat\Theta_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat\Theta_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hat\Theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat\Theta_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\hat\Theta_n - \mathbb{E}[\hat\Theta_n]\right| < \varepsilon\right)$$

$$\underset{\text{Chebyshev}}{\geq} 1 - \frac{\mathrm{var}[\hat\Theta_n]}{\varepsilon^2}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$ DISTORSIONE

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$ ERRORE QUADRATICO MEDIO

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty,\ +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0,\ +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \ \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \ \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \quad = \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right)$$

$$\geq \quad 1 - \frac{\mathrm{var}[\hat{\Theta}_n]}{\varepsilon^2} \underset{\text{bias } = \ 0}{=} 1 - \frac{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n;\ \theta)}{\varepsilon^2}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$
$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \ \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \ \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta:$

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \quad = \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right)$$
$$\geq \quad 1 - \frac{\mathrm{var}[\hat{\Theta}_n]}{\varepsilon^2} \quad = \quad 1 - \frac{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n;\, \theta)}{\varepsilon^2}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty,\ +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0,\ +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n;\ \theta)}{\varepsilon^2}$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty,\ +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0,\ +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \ \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \ \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n;\ \theta)}{\varepsilon^2} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1$$

perché $\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n;\ \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta$:

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}_n;\, \theta)}{\varepsilon^2} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Proprietà di bias e mse

$$\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \qquad \text{DISTORSIONE}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \qquad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1. $\mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta) \in (-\infty, +\infty)$
2. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) \in [0, +\infty)$
3. $\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta) = \mathrm{var}\left[\hat{\Theta}\right] + \mathrm{bias}(\hat{\Theta};\theta)^2$
4. $\left\{ \begin{array}{c} \hat{\Theta}_n \ \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \ \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ?

  $\hat{M}_n$ NO

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ?

$\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ?

$\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

  $\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}[X_3]$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

  $\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}[X_3] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{var}[X_3]$ NO

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad \hat{M}'_n$ SÌ $\qquad \hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad \mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad \mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

  $\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}[X_3] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{var}[X_3]$ NO

  $\mathrm{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathrm{bias}(\overline{X}_n; \mu)^2$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

  $\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}[X_3] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{var}[X_3]$ NO

  $\mathrm{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathrm{bias}(\overline{X}_n; \mu)^2 = \dfrac{\mathrm{var}[X_i]}{n}$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \hat{M}'_n = X_3 \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$$\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{SÌ}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}[X_3] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{var}[X_3] \qquad \text{NO}$$

$$\mathrm{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathrm{bias}(\overline{X}_n; \mu)^2 = \frac{\mathrm{var}[X_i]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \cancel{\hat{M}'_n = X_3} \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

  $\hat{M}_n$ NO $\qquad$ $\hat{M}'_n$ SÌ $\qquad$ $\hat{M}''_n$ SÌ

- Lo stimatore è non-distorto ?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

  $\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}[X_3] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{var}[X_3]$ NO

  $\mathrm{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathrm{bias}(\overline{X}_n; \mu)^2 = \dfrac{\mathrm{var}[X_i]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu} \qquad \cancel{\hat{M}'_n = X_3} \qquad \hat{M}''_n = \overline{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ?

  $\hat{M}_n$ NO

$\overline{X}_n$ è lo stimatore migliore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

- Lo stimatore è non-distorto?

  $\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu$ SÌ $\qquad$ $\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu$ SÌ

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

  $\mathrm{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(\mu - \mu)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

  $\mathrm{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mu)^2\right] = \mathrm{var}[X_3] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{var}[X_3]$ NO

  $\mathrm{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathrm{bias}(\overline{X}_n; \mu)^2 = \dfrac{\mathrm{var}[X_i]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SÌ

Altre quantità

- ERRORE STANDARD $= \underbrace{\mathrm{se}(\hat{\Theta};\theta)}_{\substack{\text{\underline{s}tandard} \\ \text{\underline{e}rror}}} := \sqrt{\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta)}$

Altre quantità

- ERRORE STANDARD $= \mathrm{se}(\hat{\Theta};\theta) := \sqrt{\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta)}$
- EFFICIENZA RELATIVA di $\hat{\Theta}$ contro $\hat{\Theta}'$ $:= \dfrac{\mathrm{mse}(\hat{\Theta}';\theta)}{\mathrm{mse}(\hat{\Theta};\theta)}$

Altre quantità

- ERRORE STANDARD $= \operatorname{se}(\hat{\Theta};\theta) := \sqrt{\operatorname{mse}(\hat{\Theta};\theta)}$

- EFFICIENZA RELATIVA di $\hat{\Theta}$ contro $\hat{\Theta}'$ $:= \dfrac{\operatorname{mse}(\hat{\Theta}';\theta)}{\operatorname{mse}(\hat{\Theta};\theta)}$

  Se supera 1, lo stimatore $\hat{\Theta}$ è meglio di $\hat{\Theta}'$ in termini di mse

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}\,[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \quad \sum X_i^2 \quad - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \quad \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ?

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \quad \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto?

  $\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = ???$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \operatorname{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n\cdot\overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \mathrm{var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum X_i^2 - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{\sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right]\right\}$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad\Rightarrow\quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow\quad \mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \mathrm{var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \left(\sigma^2 + \mu^2\right) \right.$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \mathrm{var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \left(\sigma^2 + \mu^2\right) \right.$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ?   SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{\sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum \left(\sigma^2 + \mu^2\right)\right.$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ?   SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \left(\sigma^2 + \mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \right\}$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathrm{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] = \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] + \mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n\cdot\overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ?   SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ n\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - \left(\sigma^2 + n\,\mu^2\right) \right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n\cdot\overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum\left(\sigma^2+\mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ n\left(\sigma^2+\cancel{\mu^2}\right) - \left(\sigma^2+\cancel{n\mu^2}\right) \right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \left(\sigma^2 + \mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ n\left(\sigma^2 + \cancel{\mu^2}\right) - \left(\sigma^2 + \cancel{n\mu^2}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}(n-1)\,\sigma^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}\,[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n\cdot\overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ \sum\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ n\left(\sigma^2 + \cancel{\mu^2}\right) - \left(\sigma^2 + \cancel{n\mu^2}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\cancel{n-1}}\cancel{(n-1)}\,\sigma^2 = \sigma^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_n^2\right] &= \frac{1}{n-1}\left\{\sum \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - n\,\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^2\right]\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\sum\left(\sigma^2+\mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{n\left(\sigma^2+\cancel{\mu^2}\right) - \left(\sigma^2+\cancel{n\mu^2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\cancel{n-1}}\cancel{(n-1)}\,\sigma^2 = \sigma^2
\end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$$\mathrm{mse}\big(S_n^2\,;\,\sigma^2\big) = \mathrm{var}\left[S_n^2\right] + \mathrm{bias}\big(S_n^2\,;\,\sigma^2\big)^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$$\mathrm{mse}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right) = \mathrm{var}\left[S_n^2\right] + \cancel{\mathrm{bias}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right)^2}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$$\mathrm{mse}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right) = \mathrm{var}\left[S_n^2\right] + \cancel{\mathrm{bias}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[(X_i-\mu)^4\right] - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)}$$ (più complicato)

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 \quad - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$$\mathrm{mse}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right) = \mathrm{var}\left[S_n^2\right] + \cancel{\mathrm{bias}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\,\mathbb{E}\left[(X_i-\mu)^4\right] - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n\cdot\overline{X}_n^2\right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ? SÌ

$$\mathrm{mse}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right) = \mathrm{var}\left[S_n^2\right] + \cancel{\mathrm{bias}\left(S_n^2\,;\,\sigma^2\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[(X_i-\mu)^4\right] - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \overline{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? SÌ
- Lo stimatore è non-distorto ? SÌ
- Lo stimatore è consistente in media quadratica ? SÌ

S_n^2 è un buono stimatore di σ^2

Funzioni di parametri

IPOTESI: $\left\{ \begin{array}{l} \text{-} \quad \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Funzioni di parametri

IPOTESI:

$$\begin{cases} \text{- } \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{- } \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ \text{- } \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:

$$\begin{cases} \text{- } \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{- } \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ \text{- } \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$$

Qual è uno stimatore non distorto di θ?

Funzioni di parametri

IPOTESI:

$$\begin{cases} \text{- } \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{- } \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ \text{- } \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

Funzioni di parametri

IPOTESI:

$$\begin{cases} \text{-} \quad \alpha, \beta, \theta \ \text{ parametri con } \ \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{-} \quad \hat{A} \ \text{ stimatore non-distorto di } \ \alpha \\ \text{-} \quad \hat{B} \ \text{ stimatore non-distorto di } \ \beta \end{cases}$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})]$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:
$$\begin{cases} \text{-}\ \ \alpha, \beta, \theta \ \text{ parametri con } \ \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{-}\ \ \hat{A} \ \text{ stimatore non-distorto di } \ \alpha \\ \text{-}\ \ \hat{B} \ \text{ stimatore non-distorto di } \ \beta \end{cases}$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] \; = \; \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \underset{\substack{\text{metodo}\\ \text{delta}}}{\simeq} g\big(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]\big)$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:
$$\begin{cases} - \ \alpha, \beta, \theta \ \text{ parametri con } \ \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \ \hat{A} \ \text{ stimatore non-distorto di } \ \alpha \\ - \ \hat{B} \ \text{ stimatore non-distorto di } \ \beta \end{cases}$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ:

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g\big(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]\big) \underset{\substack{\mathbb{E}[\hat{A}] = \alpha \\ \mathbb{E}[\hat{B}] = \beta}}{=} g(\alpha, \beta)$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:

- α, β, θ parametri con $\theta = g(\alpha, \beta)$
- $\hat{A}$ stimatore non-distorto di α
- $\hat{B}$ stimatore non-distorto di β

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ:

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g\big(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]\big) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:
$$\begin{cases} - \;\; \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \;\; \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \;\; \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ:

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] \;=\; \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \;\simeq\; g\big(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]\big) \;=\; g(\alpha, \beta) \;=\; \theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \simeq 0$$

Funzioni di parametri

IPOTESI:

- α, β, θ parametri con $\theta = g(\alpha, \beta)$
- $\hat{A}$ stimatore non-distorto di α
- $\hat{B}$ stimatore non-distorto di β

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ:

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g\big(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]\big) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \simeq 0$$

OSSERVAZIONE:

$\theta = a\,\alpha + b\,\beta \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta} = a\,\hat{A} + b\,\hat{B}$ è esattamente non-distorto

Funzioni di parametri

IPOTESI:
$$\begin{cases} \text{-} \quad \alpha, \beta, \theta \ \text{ parametri con } \ \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{-} \quad \hat{A} \ \text{ stimatore non-distorto di } \ \alpha \\ \text{-} \quad \hat{B} \ \text{ stimatore non-distorto di } \ \beta \end{cases}$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] \;=\; \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \;\simeq\; g\big(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]\big) \;=\; g(\alpha, \beta) \;=\; \theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \simeq 0$$

OSSERVAZIONE:

$\theta = a\,\alpha + b\,\beta \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta} = a\,\hat{A} + b\,\hat{B}$ è esattamente non-distorto

E per stimare l'errore $\mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta)$?

Funzioni di parametri

IPOTESI:

- α, β, θ parametri con $\theta = g(\alpha, \beta)$
- $\hat{A}$ stimatore non-distorto di α
- $\hat{B}$ stimatore non-distorto di β

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

$\mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = e\,(\alpha, \beta, \mathrm{var}[\hat{A}], \mathrm{var}[\hat{B}])$ con e funzione opportuna

Funzioni di parametri

IPOTESI:
- α, β, θ parametri con $\theta = g(\alpha, \beta)$
- $\hat{A}$ stimatore non-distorto di α
- $\hat{B}$ stimatore non-distorto di β

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

$\mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = e\,(\alpha, \beta, \mathrm{var}[\hat{A}], \mathrm{var}[\hat{B}])$ con e funzione opportuna

IPOTESI ULTERIORI:
- S_A^2 stimatore non-distorto di $\mathrm{var}[\hat{A}]$
- S_B^2 stimatore non-distorto di $\mathrm{var}[\hat{B}]$

Funzioni di parametri

IPOTESI: $\begin{cases} \text{-}\ \alpha, \beta, \theta \ \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ \text{-}\ \hat{A} \ \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ \text{-}\ \hat{B} \ \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{cases}$

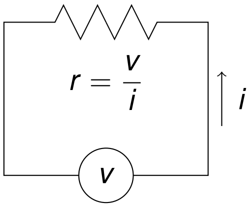
$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

$\mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = e\,(\alpha, \beta, \mathrm{var}[\hat{A}], \mathrm{var}[\hat{B}])$ con e funzione opportuna

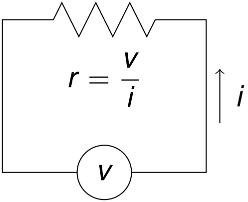
IPOTESI ULTERIORI: $\begin{cases} \text{-}\ S_A^2 \ \text{ stimatore non-distorto di } \mathrm{var}[\hat{A}] \\ \text{-}\ S_B^2 \ \text{ stimatore non-distorto di } \mathrm{var}[\hat{B}] \end{cases}$

$\underset{\text{stesso motivo di prima}}{\Rightarrow}$ $\widehat{\mathrm{MSE}} := e\,(\hat{A}, \hat{B}, S_A^2, S_B^2)$ stimatore approssimativamente non-distorto di $\mathrm{mse}(\hat{\Theta}; \theta)$

ESEMPIO



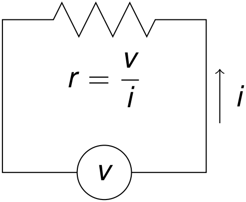
ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

ESEMPIO



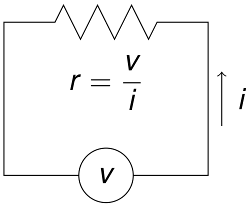
$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

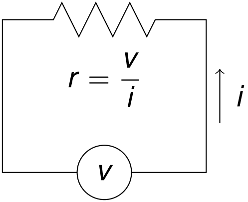
no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[V_i] = v$

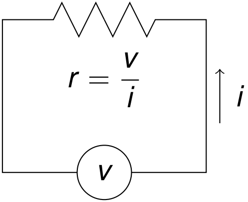
$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i]$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[V_i] = v$

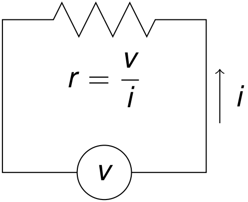
$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i] = v$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

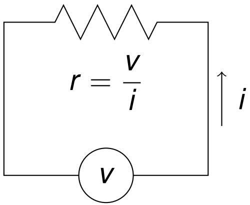
$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

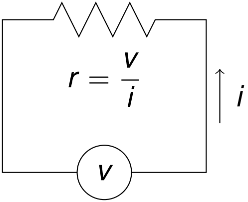
no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché
$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$
- $\overline{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

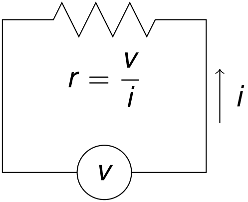
no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché
$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$
- $\overline{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)
- $\hat{R} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

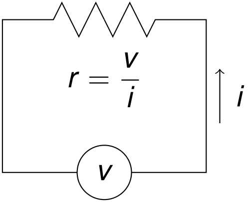
$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$

- $\overline{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r, perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] = \mathbb{E}\left[\frac{\overline{V}}{\overline{I}}\right]$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \dots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

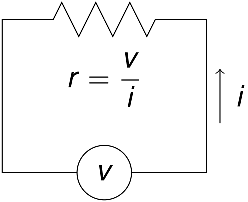
$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \dfrac{\overline{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r, perché

$$\mathbb{E}\left[\hat{R}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\overline{V}}{\bar{I}}\right] \underset{\substack{\text{metodo}\\ \text{delta}}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\overline{V}]}{\mathbb{E}[\bar{I}]}$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[V_i\right] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

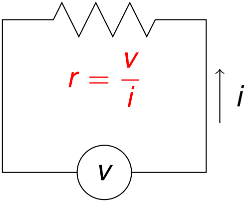
- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}\left[V_i\right] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$

- $\overline{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r, perché

$$\mathbb{E}\left[\hat{R}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\overline{V}}{\overline{I}}\right] \underset{\substack{\text{metodo} \\ \text{delta}}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\overline{V}]}{\mathbb{E}[\overline{I}]} = \frac{v}{i}$$



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

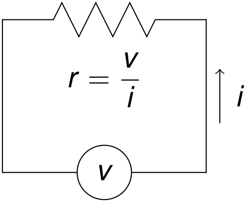
$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$

- $\overline{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r, perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] = \mathbb{E}\left[\frac{\overline{V}}{\overline{I}}\right] \underset{\substack{\text{metodo}\\ \text{delta}}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\overline{V}]}{\mathbb{E}[\overline{I}]} = \frac{v}{i} = r$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione $V_1, \ldots, V_5$ i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\,[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[I_j\right] = i$

- $\overline{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \ldots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v, perché

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = \mathbb{E}\,[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{bias}(\overline{V}; v) = 0$$

- $\overline{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r, perché

$$\mathbb{E}\left[\hat{R}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\overline{V}}{\overline{I}}\right] \underset{\substack{\text{metodo}\\\text{delta}}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\overline{V}]}{\mathbb{E}[\overline{I}]} = \frac{v}{i} = r$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}[V_i]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\left[V_i\right]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$

- $\mathrm{mse}(\overline{V}; v) = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \mathrm{bias}(\overline{V}; v)^2$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$

- $\mathrm{mse}(\overline{V}; v) = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \cancel{\mathrm{bias}(\overline{V}; v)^2} = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\,[I_j]$

- $\mathrm{mse}(\overline{V}; v) = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \cancel{\mathrm{bias}(\overline{V}; v)^2} = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \dfrac{\sigma_V^2}{m}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\left[V_i\right]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$

- $\mathrm{mse}(\overline{V}; v) = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \cancel{\mathrm{bias}(\overline{V}; v)^2} = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \dfrac{\sigma_V^2}{m}$

  $\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_V := \dfrac{S_V^2}{m}$ è uno stimatore non-distorto di $\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}[I_j]$

- $\mathrm{mse}(\overline{V}; v) = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \cancel{\mathrm{bias}(\overline{V}; v)^2} = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \dfrac{\sigma_V^2}{m}$

  $\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_V := \dfrac{S_V^2}{m}$ è uno stimatore non-distorto di $\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$

- $\mathrm{mse}(\bar{I}; i) = \ \ldots\ldots = \dfrac{\sigma_I^2}{n}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$

- $\mathrm{mse}(\overline{V}; v) = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \cancel{\mathrm{bias}(\overline{V}; v)^2} = \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \dfrac{\sigma_V^2}{m}$

  $\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_V := \dfrac{S_V^2}{m}$ è uno stimatore non-distorto di $\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$

- $\mathrm{mse}(\bar{I}; i) = \ldots\ldots = \dfrac{\sigma_I^2}{n}$

  $\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_I := \dfrac{S_I^2}{n}$ è uno stimatore non-distorto di $\mathrm{mse}(\bar{I}; i)$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\,[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \underbrace{\mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2}_{\simeq 0}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \underbrace{\mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2}_{\simeq 0} \simeq \mathrm{var}[\hat{R}]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g\,(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\,(v, i)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g\,(\overline{V}, \bar{I})\right]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g(\overline{V}, \bar{I})\right]$

$$\underset{\substack{\text{metodo}\\ \text{delta}}}{\simeq} \left[\partial_1 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \left[\partial_2 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\bar{I}\right]$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\left[V_i\right]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g\left(\overline{V}, \bar{I}\right)$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\left(v, i\right)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g\left(\overline{V}, \bar{I}\right)\right]$

$$\simeq \left[\partial_1 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \left[\partial_2 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\bar{I}\right]$$

$$\partial_1 g\left(x, y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \qquad \partial_2 g\left(x, y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g(\overline{V}, \bar{I})\right]$

$$\simeq \left[\partial_1 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \left[\partial_2 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\bar{I}\right]$$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \qquad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = v \qquad \mathbb{E}\left[\bar{I}\right] = i$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g(\overline{V}, \bar{I})\right]$

$$\simeq \left[\partial_1 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \left[\partial_2 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\bar{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\bar{I}\right]$$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \qquad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = v \qquad \mathbb{E}\left[\bar{I}\right] = i \qquad \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \frac{\sigma_V^2}{m} \qquad \mathrm{var}\left[\bar{I}\right] = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\left[V_i\right]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = g\left(\overline{V}, \overline{I}\right)$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\left(v, i\right)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g\left(\overline{V}, \overline{I}\right)\right]$

$$\simeq \left[\partial_1 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\overline{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \left[\partial_2 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\overline{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{I}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n}$$

$$\partial_1 g\left(x, y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \qquad \partial_2 g\left(x, y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = v \qquad \mathbb{E}\left[\overline{I}\right] = i \qquad \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \frac{\sigma_V^2}{m} \qquad \mathrm{var}\left[\overline{I}\right] = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \overline{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\,[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = g(\overline{V}, \overline{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) = \mathrm{var}[\hat{R}] + \mathrm{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \mathrm{var}[\hat{R}] = \mathrm{var}\left[g(\overline{V}, \overline{I})\right]$

$$\simeq \left[\partial_1 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\overline{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] + \left[\partial_2 g\left(\mathbb{E}\left[\overline{V}\right], \mathbb{E}\left[\overline{I}\right]\right)\right]^2 \mathrm{var}\left[\overline{I}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n}$$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \qquad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}\right] = v \qquad \mathbb{E}\left[\overline{I}\right] = i \qquad \mathrm{var}\left[\overline{V}\right] = \frac{\sigma_V^2}{m} \qquad \mathrm{var}\left[\overline{I}\right] = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g\,(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\,(v, i)$
- $\overline{V}$ non-distorto di v
- $\bar{I}$ non-distorto di i

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g\,(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\,(v, i)$
- $\overline{V}$ non-distorto di v
- $\bar{I}$ non-distorto di i

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\,[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g\,(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\,(v, i)$
- $\overline{V}$ non-distorto di v
- $\bar{I}$ non-distorto di i

- $$\mathrm{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e\,(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2)$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\overline{V}$ non-distorto di v
- $\bar{I}$ non-distorto di i

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e\left(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2\right)$

  $\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_R := e\left(\overline{V}, \bar{I}, S_V^2, S_I^2\right)$ è uno stimatore approx. non-distorto di $\mathrm{mse}(\hat{R}; r)$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\left[V_i\right]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\left[I_j\right]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g\left(\overline{V}, \bar{I}\right)$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\left(v, i\right)$
- $\overline{V}$ non-distorto di v
- $\bar{I}$ non-distorto di i

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e\left(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2\right)$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_R := e\left(\overline{V}, \bar{I}, S_V^2, S_I^2\right) = \left[\frac{1}{\bar{I}}\right]^2 \cdot \frac{S_V^2}{m} + \left[-\frac{\overline{V}}{\bar{I}^2}\right]^2 \cdot \frac{S_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (V_i - \overline{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \mathrm{var}\,[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \mathrm{var}\,[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\overline{V}}{\bar{I}} = g\,(\overline{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g\,(v, i)$
- $\overline{V}$ non-distorto di v
- $\bar{I}$ non-distorto di i

- $\mathrm{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e\,(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2)$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{MSE}}_R := e\left(\overline{V}, \bar{I}, S_V^2, S_I^2\right)$$

$$= \frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\overline{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Dopo le misure:
$$\begin{matrix} v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \\ v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{matrix} v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \\ v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{i} = 1.83 \\ s_I^2 = 0.123 \end{cases}$$

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \quad v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_I^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	
v	$\overline{V}$	
i	$\bar{I}$	
r	$\frac{\overline{V}}{\bar{I}}$	
$\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$	$\frac{S_V^2}{m}$	
$\mathrm{mse}(\bar{I}; i)$	$\frac{S_I^2}{n}$	
$\mathrm{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\overline{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$	

prima dell'esperimento

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{matrix} v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \\ v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_I^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	$\overline{V}$	3.12
i	$\bar{I}$	1.83
r	$\frac{\overline{V}}{\bar{I}}$	
$\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$	$\frac{S_V^2}{m}$	
$\mathrm{mse}(\bar{I}; i)$	$\frac{S_I^2}{n}$	
$\mathrm{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\overline{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$	

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{prima dell'esperimento}}$ $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{dopo l'esperimento}}$

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \quad v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_I^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	$\overline{V}$	3.12
i	$\bar{I}$	1.83
r	$\frac{\overline{V}}{\bar{I}}$	$\frac{3.12}{1.83} = 1.70$
$\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$	$\frac{S_V^2}{m}$	
$\mathrm{mse}(\bar{I}; i)$	$\frac{S_I^2}{n}$	
$\mathrm{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\overline{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$	
	prima dell'esperimento	dopo l'esperimento

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \quad v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \quad \Rightarrow \begin{cases} \overline{v} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \overline{i} = 1.83 \\ s_I^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	$\overline{V}$	3.12
i	$\overline{I}$	1.83
r	$\frac{\overline{V}}{\overline{I}}$	$\frac{3.12}{1.83} = 1.70$
$\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$	$\frac{S_V^2}{m}$	$\frac{0.092}{5} = 0.018$
$\mathrm{mse}(\overline{I}; i)$	$\frac{S_I^2}{n}$	$\frac{0.123}{3} = 0.041$
$\mathrm{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\overline{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\overline{V}^2}{\overline{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$	

prima dell'esperimento — dopo l'esperimento

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \quad v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{V} = 3.12 \\ s_V^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{I} = 1.83 \\ s_I^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	$\overline{V}$	3.12
i	$\bar{I}$	1.83
r	$\frac{\overline{V}}{\bar{I}}$	$\frac{3.12}{1.83} = 1.70$
$\mathrm{mse}(\overline{V}; v)$	$\frac{S_V^2}{m}$	$\frac{0.092}{5} = 0.018$
$\mathrm{mse}(\bar{I}; i)$	$\frac{S_I^2}{n}$	$\frac{0.123}{3} = 0.041$
$\mathrm{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\overline{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$	$\frac{1}{1.83^2} \cdot \frac{0.092}{5} + \frac{3.12^2}{1.83^4} \cdot \frac{0.123}{3} = 0.041$
	prima dell'esperimento	dopo l'esperimento