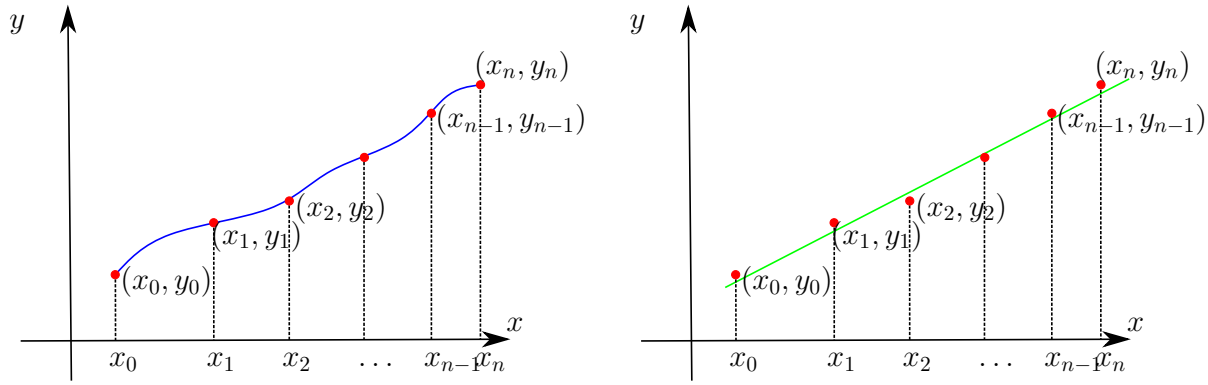
▷ Lezione V

Interpolazione

Vogliamo affrontre il problema che consiste nel trovare, dato un set di punti (x_i, y_i), una funzione interpolante ossia una funzione che passa per tutti i punti dati. Alternativamente, possiamo costruire una funzione più semplice, che passi solo sufficientemente vicino a tali punti. Un esempio è dato dai due grafici seguenti, a sinistra viene costruita la funzione *interpolante* in blu mentre a destra una retta *approssimante* in verde.



Interpolazione polinomiale

Date $n+1$ coppie di punti (x_i, y_i) distinte, per $i = 0, \ldots, n$, cerco un polinomio di grado n chiamato $\pi_n \in \mathbb{P}^n$, con $\mathbb{P}^n$ lo spazio dei polinomi fino al grado n, che passi per gli $n+1$ punti, ovvero, tale che soddisfi

$$\pi_n(x_i) = y_i \quad i = 0, \ldots, n.$$

Teorema 5.1

Dati $n+1$ punti (x_i, y_i), con $i = 0, \ldots, n$, tale che $x_i \neq x_k$ per $i \neq k$ allora esiste uno e un solo polinomio $\pi_n \in \mathbb{P}^n$ tale che

$$\pi_n(x_i) = y_i \quad i = 0, \ldots, n$$

Proof. Dimostriamo che il polinomio esiste, e lo facciamo per costruzione. Ciascun elemento dello spazio dei polinomi di grado n può essere costruito come combinazione lineare di monomi. Scriviamo quindi che

$$\forall p_n \in \mathbb{P}^n : \quad p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Alternativamente possiamo scrivere che lo spazio $\mathbb{P}^n$ è generato partendo dai monomi, in formula abbiamo

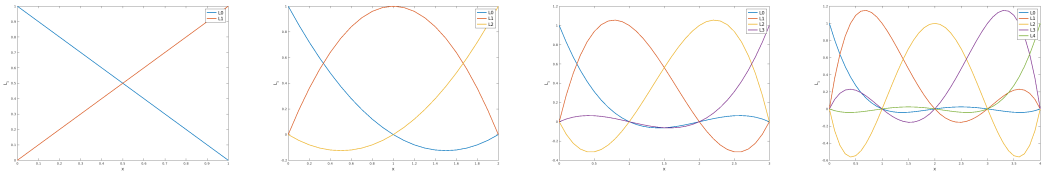
$$\mathbb{P}^n = \text{span}\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}.$$

Imporre che il polinomio p passi per gli $n+1$ punti genera un sistema di $n+1$ equazioni lineari in $n+1$ incognite: i coefficienti a_i (dove i coefficienti della matrice sono le potenze di x_i). Se vogliamo evitare di risolvere questo sistema $(n+1)\times(n+1)$, un approccio alternativo consiste nel costruire una *base* per i polinomi.

Definisco quindi per ogni $i = 0, \dots, n$ un polinomio $\mathcal{L}_i$ di grado n con le seguenti caratteristiche:

$$\mathcal{L}_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

tali polinomi sono detti polinomi caratteristici di Lagrange, e hanno la seguente rappresentazione grafica per il grado 1, 2, 3 e 4.



I polinomi $\mathcal{L}_i$ sono linearmente indipendenti, infatti voglio mostrare che la seguente espressione è valida se e solo se tutti i coefficienti $\alpha_i = 0$

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathcal{L}_i(x) = 0 \quad \xrightarrow{\text{pongo } x=x_j} \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathcal{L}_i(x_j) = \alpha_j \mathcal{L}_j(x_j) = \alpha_j = 0 \quad \forall \quad j = 0, \dots, n$$

e quindi costituiscono una base di $\mathbb{P}^n$, ovvero possiamo scrivere che $\mathbb{P}^n$ è costruito anche come

$$\mathbb{P}^n = \text{span}\{\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n\}.$$

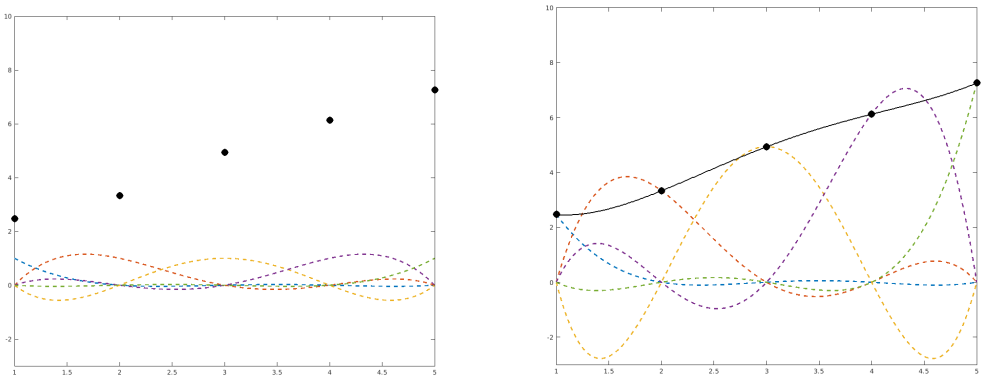
Significa che ogni polinomio p_n può essere scritto come

$$\forall p_n \in \mathbb{P}^n : \quad p_n(x) = b_0\mathcal{L}_0(x) + b_1\mathcal{L}_1(x) + b_2\mathcal{L}_2(x) + \ldots + b_n\mathcal{L}_n(x).$$

Date le proprietà dei polinomi di Lagrange, allora possiamo costruire l'interpolante polinomiale $\pi_n(x)$ tale che $\pi_n(x_i) = y_i$ nel seguente modo

$$\pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathcal{L}_i(x),$$

detto interpolante polinomiale Lagrangiano.



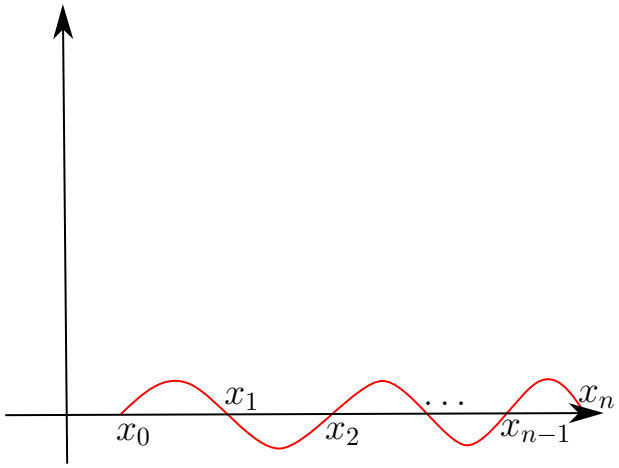
Dimostriamo ora l'unicità, e lo facciamo per assurdo, supponendo che esistano due polinomi distinti di $\mathbb{P}^n$ che interpolano gli $n+1$ punti (x_i, y_i):

$$\pi_n \in \mathbb{P}^n \quad \text{e anche} \quad \tilde{\pi}_n \in \mathbb{P}^n$$

tali che soddisfano

$$\pi_n(x_i) = y_i \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}_n(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Definisco ora un terzo polinomio $p_n = \pi_n - \tilde{\pi}_n$, che per costruzione soddisfa: $p_n \in \mathbb{P}^n$ e anche che $p_n(x_i) = \pi_n(x_i) - \tilde{\pi}(x_i) = 0$.



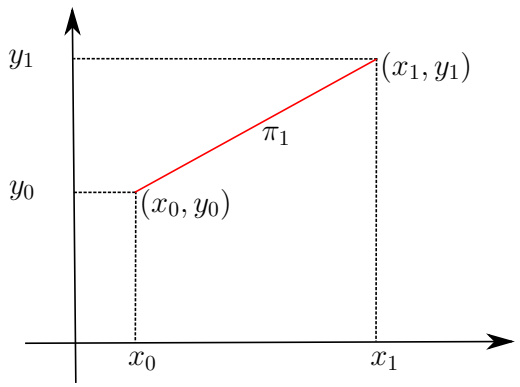
Tuttavia, se un polinomio di grado n si annulla in $n+1$ punti deve necessariamente essere il polinomio identicamente nullo, ovvero

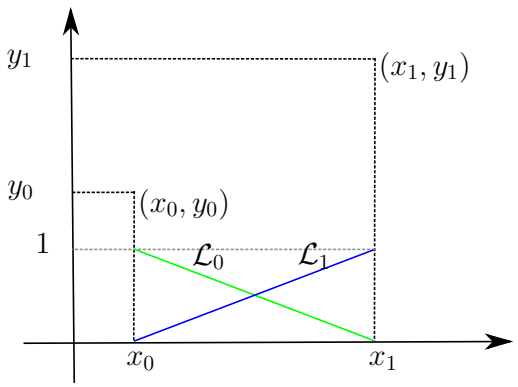
$$p_n(x) = 0 \quad \forall x,$$

andiamo quindi in contraddizione con l'ipotesi e necessariamente esiste solamente un polinomio interpolante. □

Esempio 5.1

Consideriamo il caso in cui $n+1 = 2$, ovvero cerco un interpolante di grado 1.





Data l'espressione del polinomio interpolante di Lagrange, abbiamo che

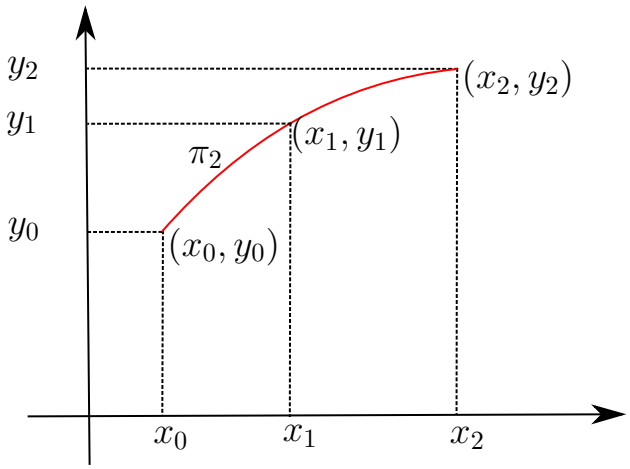
$$\pi_n(x) = \sum_{i=0}^{1} y_i \mathcal{L}_i(x) = y_0 \mathcal{L}_0(x) + y_1 \mathcal{L}_1(x)$$

dove ciascun polinomio è dato dall'espressione

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Esempio 5.2

Consideriamo ora il caso in cui $n + 1 = 3$, ovvero cerco un interpolante di grado 2.



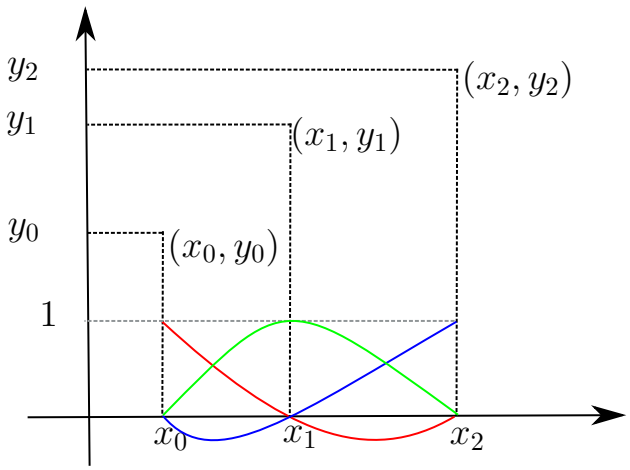
Data l'espressione del polinomio interpolante di Lagrange, abbiamo che

$$\pi_n(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \mathcal{L}_i(x) = y_0 \mathcal{L}_0(x) + y_1 \mathcal{L}_1(x) + y_2 \mathcal{L}_2(x)$$

dove ciascun polinomio è dato dall'espressione

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Graficamente questi polinomi sono rappresentabili come in figura, dove notiamo che ogni polinomio è pari a uno nel nodo corrispondente, e si annulla negli altri due.



Teorema 5.2 - Stima dell'errore per l'interpolazione di Lagrange

Dato un intervallo limitato I, si considerano $n+1$ nodi di interpolazione distinti. Se $f \in C^{n+1}(I)$ allora per ogni $x \in I$, esiste uno ξ tale che

$$E_n f(x) = f(x) - \pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Osserviamo che l'errore è nullo se valutato nei punti di interpolazione, ovvero che $E_n f(x_i) = 0$. Questo risultato può essere meglio precisato nel caso di nodi equispaziati, ossia $x - x_i = h \ \forall i$. Nel caso di nodi uniformi risulta evidente che il teorema non garantisce che si abbia convergenza, ovvero in generale

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in I} |E_n f(x)| \neq 0.$$

Stabilità dell'interpolazione

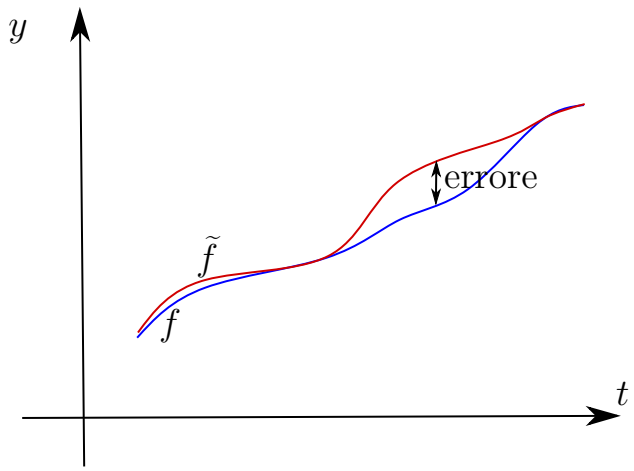
Data una funzione f definita su I e dati $n+1$ nodi x_i, considero quindi la sua interpolazione Lagrangiana data da

$$\Pi_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathcal{L}_i(x),$$

dove Π_n è l'operatore di interpolazione che data una funzione f restituisce il polinomio interpolatore π_n negli $n+1$ punti x_i. Nella formula precedente abbiamo anche che gli $\mathcal{L}_i$ sono polinomi caratteristici di Lagrange. Considero ora una funzione $\widetilde{f}$ ottenuta perturbando f: il suo interpolato è dato dalla seguente espressione

$$\Pi_n \widetilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{f}(x_i)\mathcal{L}_i(x).$$

Ci chiediamo, se la differenza $f - \widetilde{f}$ è piccola allora possiamo anche dire che la differenza $\Pi_n f - \Pi_n \widetilde{f}$ è piccola? In altre parole, l'interpolazione è stabile?



Svolgiamo il seguente calcolo

$$\left\|\Pi_n f - \Pi_n \widetilde{f}\right\|_\infty = \max_{x\in I}\left|\Pi_n f(x) - \Pi_n \widetilde{f}(x)\right| = \max_{x\in I}\left|\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_i(x) - \sum_{i=0}^{n}\widetilde{f}(x_i)\mathcal{L}_i(x)\right| \leq$$
$$\leq \max_{i=0,\dots,n}\left|f(x_i) - \widetilde{f}(x_i)\right| \max_{x\in I}\sum_{i=0}^{n}|\mathcal{L}_i(x)|$$

L'ultimo termine, che non dipende da f ma solo dai valori dei $\mathcal{L}_i$ nei nodi x_i, è detto costante di Lebesgue e, per nodi equispaziati, è data da

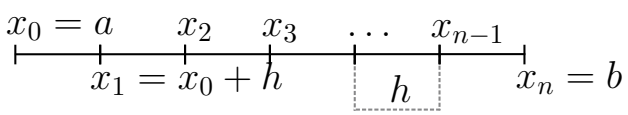
$$\Lambda_n = \max_{x\in I}\sum_{i=0}^{n}|\mathcal{L}_i(x)| \approx \frac{2^{n+1}}{en(\log n + \gamma)}$$

dove $e \approx 2.71$ è il numero di Nepero e $\gamma \approx 0.57721$. Abbiamo, ad esempio che dato $n = 20$ con nodi equi-spaziati allora la costante di Lebesgue risulta pari a $\Lambda_{20} = 20000$ ottenendo quindi un'interpolazione instabile. Tuttavia, il valore di Λ_n dipende dal posizionamento dei nodi ed è possibile scegliere una spaziatura dei nodi di interpolazione particolarmente vantaggiosa. Consideriamo i nodi detti di *Chebychev-Gauss-Lobatto*: la costante di Lebesgue in questo caso risulta $\Lambda^c_{20} = 3$, ottenendo quindi un'interpolazione stabile dato che

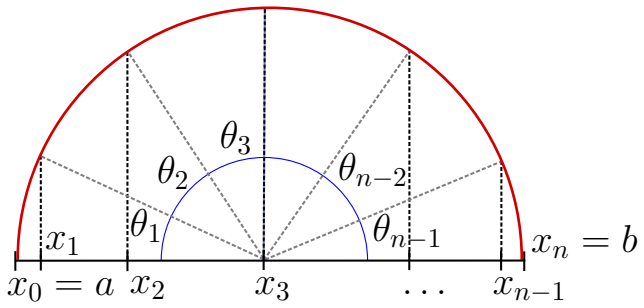
$$\Lambda_n < \frac{2}{\pi}\left(\log n + \gamma + \log\frac{8}{\pi}\right) + \frac{\pi}{72n^2} \approx \frac{2}{\pi}\log n$$

ha una crescita di tipo logaritmico in n.

Possiamo rappresentare graficamente i nodi equi-spaziati nel seguente modo



I nodi di Chebychev-Gauss-Lobatto invece si calcolano partendo dalla seguente costruzione



dove abbiamo suddiviso l'intervallo $[0, \pi]$ in n intervalli uguali, ottenendo angoli $\theta_i = \frac{\pi i}{n}$; la posizione dei nodi $\hat{x}_i \in [-1, 1]$ si ottiene quindi come

$$\hat{x}_i = -\cos\frac{\pi i}{n} \quad i = 0, \ldots, n.$$

Per interpolare un generico intervallo $[a, b]$ allora posso mappare gli $\hat{x}_i$ con la formula

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\hat{x}_i \quad i = 0, \ldots, n.$$

ottenendo quindi che $x_i \in [a, b]$. Per $\hat{x}_0$ abbiamo $x_0 = a$ ed analogamente $\hat{x}_n = 1$ implica $\hat{x}_n = b$.

Lemma 5.1 - Convergenza dell'interpolazione

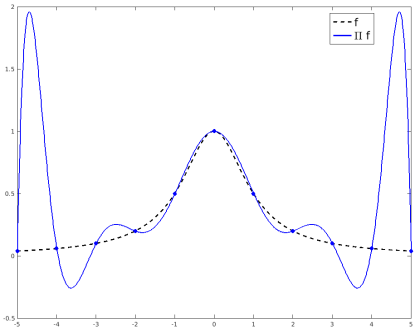
Se $f \in C^1(I)$ allora considerando i nodi di Chebychev-Gauss-Lobatto il polinomio interpolatore $\Pi_n f$ è tale che $\Pi_n f \to f$ per $n \to \infty$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in I} |E_n f(x)| = 0.$$

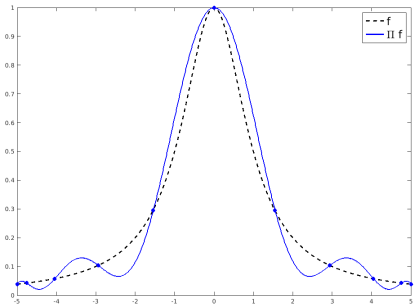
L'interpolazione polinomiale sui nodi non equi-spaziati di Chebychev-Gauss-Lobatto, grazie al lemma precedente è convergente.

Esempio 5.3

Consideriamo la funzione di Runge $f = \frac{1}{1+x^2}$ sull'intervallo $[-5, 5]$. Se cerchiamo di interpolare tale funzione con nodi equispaziati (a) osserviamo che il polinomio interpolante, all'aumentare del numero di nodi esibisce forti oscillazioni agli estremi dell'intervallo. Questo fenomeno è noto come *fenomeno di Runge* ed è chiaramente un effetto indesiderato in quanto l'approssimazione peggiora invece che convergere. Osserviamo invece che, utilizzando i nodi di Chebychev, il fenomeno è ridotto e l'approssimazione converge.



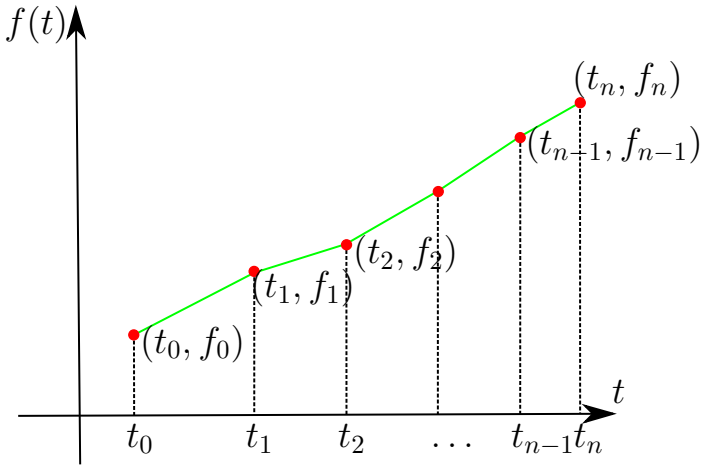
(a)



(b)

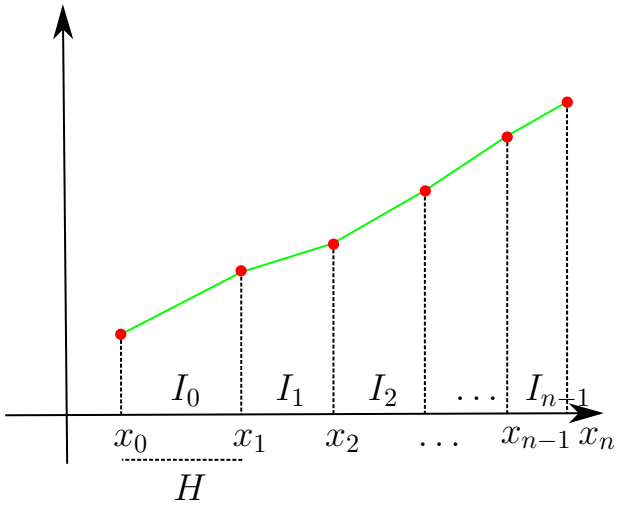
Interpolazione lineare composita

L'idea in questo caso è quella di costruire un interpolante andando a suddividere l'intervallo di interesse in sotto-intervalli e quindi usare dei polinomi di grado basso in ciascuno di essi. Un esempio di interpolazione composita lineare è data dal seguente grafico.



Su ciascun intervallo I_i, con $i = 0, \ldots, n-1$, posso fare un'interpolazione locale di grado basso. Data una funzione $f \in C^2(I)$ e dati $n+1$ nodi equi-spaziati $x_0, \ldots, x_n$ nell'intervallo I, abbiamo

$$\Pi_1^H f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \quad \text{per} \quad x \in I_i$$



In questo caso l'errore risulta dato da

$$\max_{x\in I}|E(x)| = \max_{x\in I}\left|f(x) - \Pi_1^H f(x)\right| \leq \frac{H^2}{8}\max_{x\in I}|f''(x)|\,,$$

dove $H = (b-a)/n$ e con $I = [a,b]$. Abbiamo quindi che

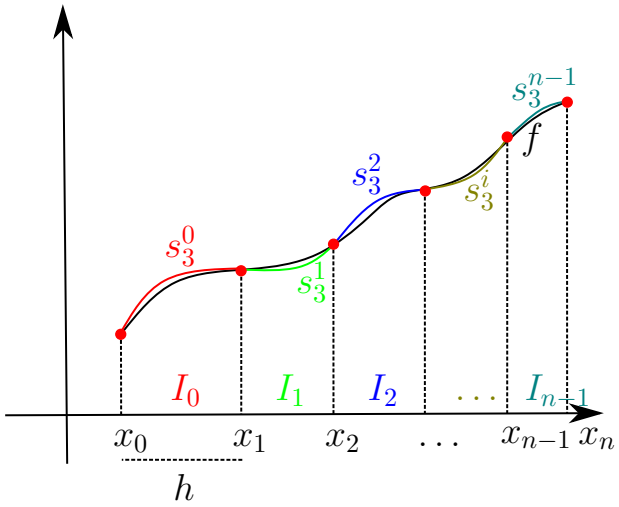
$$\max_{x\in I}|E(x)| \xrightarrow{H\to 0} 0 \quad \text{dato che} \quad \max_{x\in I}|E(x)| \sim CH^2 \quad \text{dove} \quad C = \frac{1}{8}\max_{x\in I}|f''(x)|\,.$$

Splines cubiche

Utilizzando l'interpolazione composita lineare, le derivate, a partire dalla prima, sono discontinue suoi nodi. Si può ottenere una interpolazione composita che garantisca un certo grado di regolarità, ovvero tale che

$$\Pi^c f \in C^0 \quad \text{ed anche} \quad \Pi^c f \in C^1 \quad \text{e in aggiunta} \quad \Pi^c f \in C^2.$$

Per questo utilizziamo le splines cubiche che garantiscono una regolarità della soluzione anche tra un sotto-intervallo e quello successivo. Abbiamo quindi



$$\begin{aligned}
\text{su } I_0 &\quad \to \quad s_3^0 \in \mathbb{P}^3(I_0)\\
\text{su } I_1 &\quad \to \quad s_3^1 \in \mathbb{P}^3(I_1)\\
\text{su } I_2 &\quad \to \quad s_3^2 \in \mathbb{P}^3(I_2)\\
\text{su } I_3 &\quad \to \quad s_3^3 \in \mathbb{P}^3(I_3)
\end{aligned}$$

in cui ognuna delle S è data da un polinomio cubico,

$$s_3^i(x) = a_0^i + a_1^i x + a_2^i x^2 + a_3^i x^3,$$

mentre l'interpolante globale viene definito da $s_3(x) = s_3^i(x)$ per $x \in I_i$. Dati n sotto-intervalli, devo determinare n funzioni cubiche abbiamo quindi $4n$ incognite (n sotto-intervalli e 4 parametri per ogni curva per essere determinata) e $4n-2$ equazioni che esprimono

$$\begin{aligned}
&n+1 \quad \text{interpolazione} \quad && s_3(x_i) = f(x_i)\\
&n-1 \quad \text{continuità } C^0 \text{ ai nodi} \quad && s_3^{i+1}(x_i) = s_3^i(x_i)\\
&n-1 \quad \text{continuità } C^1 \text{ ai nodi} \quad && (s_3^{i+1})'(x_i) = (s_3^i)'(x_i)\\
&n-1 \quad \text{continuità } C^2 \text{ ai nodi} \quad && (s_3^{i+1})''(x_i) = (s_3^i)''(x_i)
\end{aligned}$$

Mancano quindi due condizioni per poter chiudere il sistema, vi sono diverse alternative. Una possibilità è quella di impostare la condizione

$$s_3''(x_0) = s_3''(x_n) = 0$$

si parla in questo caso di spline cubiche naturali. Oppure possiamo richiedere che s_3''' sia continua in x_1 e x_{n-1}, parliamo quindi di spline *not-a-knot*.

Abbiamo il seguente risultato teorico che ci garantisce la buona approssimazione utilizzando le spline, data da

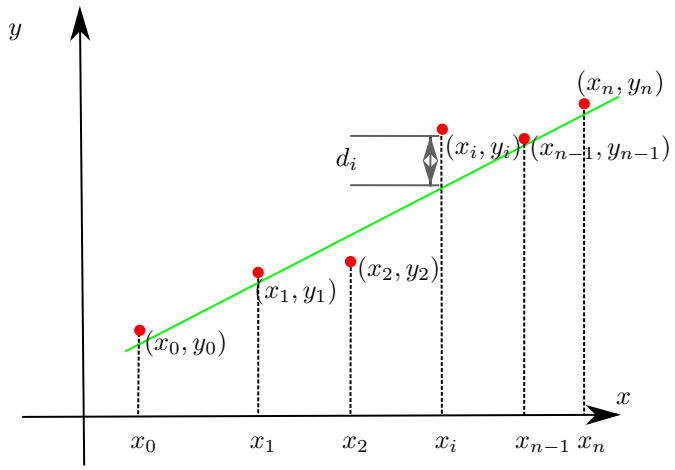
$$\max_{x\in I} \left| f^{(r)}(x) - s_3^{(r)}(x) \right| \leq C H^{4-r}$$

dove r è il grado di derivazione.

Metodo dei minimi quadrati

L'interpolazione classica richiede di costruire un polinomio $\pi_n(x) \in \mathbb{P}^n$ che sia interpolatorio, ovvero tale che $\pi_n(x_i) = y_i$ per tutti gli $i = 0, \dots, n$. Tuttavia, se considerassimo nodi equispaziati aumentando l'ordine di approssimazione otterremmo delle oscillazioni. Il metodo dei

minimi quadrati permette di costruire un'approssimazione *non interpolante* della funzione f, con $y_i = f(x_i)$, ossia tale che il polinomio ottenuto non passi necessariamente per i nodi (x_i, y_i). Si veda la figura seguente



Dati quindi $n+1$ punti distinti, cerco un polinomio $\hat{\pi}$ di grado $1 \leq m < n$, che minimizza la distanza dell'approssimante da (x_i, y_i). Più precisamente $\hat{\pi} \in \mathbb{P}^m$ è tale che

$$\sum_{i=0}^{n} [y_i - \hat{\pi}(x_i)]^2 \leq \sum_{i=0}^{n} [y_i - p_m(x_i)]^2$$

dove p_m è un qualunque polinomio di grado m. Alternativamente, posso scrivere che tra tutti i polinomi $p_m \in \mathbb{P}^m$ cerco $\hat{\pi}$ che minimizza la somma dei quadrati delle differenze $d_i = y_i - \hat{\pi}(x_i)$.

In Python l'interpolazione Lagrangiana può essere calcolata usando il comando

```
import numpy as np
a = np.polyfit(x, y, n)
```

avendo $n+1$ punti e grado polinomiale di approssimazione pari a n. In uscita otteniamo il vettore $a = [a_n, a_{n-1} \ldots, a_0]$ tale per cui

$$\pi_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

L'approssimazione ai minimi quadrati è invece ottenuta tramite

```
a = np.polyfit(x, y, m)
```

avendo $n+1$ punti e grado polinomiale di approssimazione pari a $m < n$. Nel caso si volesse calcolare la retta di regressione lineare allora si può utilizzare il comando precedente prendendo $m = 1$.

Esempio 5.4

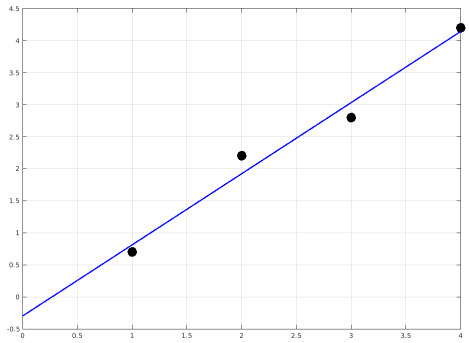
Consideriamo i seguenti punti (x_i, y_i) con $\boldsymbol{x} = [1, 2, 3, 4]$, $\boldsymbol{y} = [0.7, 2.2, 2.8, 4.2]$. Vogliamo calcolare la retta approssimante ai minimi quadrati, di equazione $\hat{\pi}(x) = a_0 + a_1 x$. Notiamo che, imponendo l'appartenenza dei 4 punti alla retta otteniamo 4 equazioni per due sole incognite, ossia il seguente sistema rettangolare $X\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$ con

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Se utilizziamo il comando

```
import numpy as np
a = np.linalg.lstsq(X, y, rcond=None)[0]
```

in Python otteniamo una soluzione, nonostante il sistema sia rettangolare, in particolare $a_0 = -0.3$, $a_1 = 1.11$ ossia l'intercetta all'origine e la pendenza della retta approssimante, in figura.



Tale soluzione corrisponde alla soluzione del sistema $X^\top X\boldsymbol{a} = X^\top \boldsymbol{y}$ in cui, premoltiplicando per $X^\top$ otteniamo un sistema quadrato 2×2. Il codice equivalente a quello di prima è dato da

```
a = np.linalg.solve(X.T @ X, X.T @ y)
```

Detto $\boldsymbol{d}$ il vettore $\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{a}$, che contiene le distanze fra i punti dati e la retta ai minimi quadrati, il prodotto $\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{d}$ fornisce la somma dei quadrati di tali distanze; dimostrare per esercizio che la soluzione del sistema $X^\top X\boldsymbol{a} = X^\top \boldsymbol{y}$ corrisponde alla ricerca del minimo di $\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{d}$.