Lab_9_Leggi_di_conservazione_(completo)

April 17, 2024

1 Lab 9 - leggi di conservazione: esercizi

Si consideri il seguente problema di trasporto lineare

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (v\,u)}{\partial x} = 0$$

sul dominio $\Omega = [0, 5]$ e nell'intervallo temporale $(0, 5]$. Scegliamo $v = 1$ e dato che la velocità è positiva il bordo di inflow è $x = 0$, dove imponiamo la condizione $u = 0$. Al bordo destro, $x = 5$, non prescriviamo alcuna condizione.

Il dato iniziale è

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si consideri la seguente `function` che risolve il problema di trasporto con il metodo dei Volumi Finiti:

```
def fvsolve(u0, f, df, L, T, h, dt, flux_function)
  #
  return xc, t, u
```

Questa function prende in **input**: il dato iniziale u_0, la funzione di flusso `f`, la sua derivata prima `df`, la lunghezza L di $\Omega = [0, L]$, il tempo finale T, la spaziatura della griglia spaziale: `h`, la spaziatura della griglia temporale: `dt`, il parametro `flux_function` corrisponde ad una funzione flusso (nel nostro caso sarà quella che implementarà il flusso di *upwind* e *Godunov*). L'**output** consiste in un vettore `xc` dei punti medi delle celle, un vettore degli istanti di tempo discreti `t`, una matrice `u` le cui colonne corrispondono ai valori che la soluzione assume ad ogni istante temporale in ogni intervallo di discretizzazione.

[1]:
```python
from utilis_solver_cl import fvsolve

# Dati del problema 1: trasporto lineare
# velocità
v = 1;
# definire la u_0
u0 = lambda x: 1*(x<2)*(x>1)
# definire la f
f =  lambda u: v*u
# definire la df
df = lambda u: v+0*u
```

```
# lunghezza di Omega
L=5
# Istante di tempo finale
T=5
```

Esercizio 1.1 Calcolare il passo temporale massimo che soddisfa la **condizione CFL** con i dati forniti e il corrispondente numero di passi temporali N_t, quando il numero di sottointervalli in cui è suddiviso il dominio spaziale è $N = 40$.

[2]:
```
# N suddivisione spazio
N = 40
# passo spaziale
h=L/N
# Nt suddivisione temporale
Nt = N
# passo temporale
dt = T/Nt
```

Soluzione

Occupiamoci del passo temporale massimo. Sappiamo dalla teoria che il passo temporale Δt deve rispettare la *condizione CFL*, cioè deve essere tale per cui

$$\Delta t \leq \frac{h}{C_L},$$

dove $|f'(u)| < C_L$ è una opportuna costante. Nel nostro caso, poiché il problema è lineare, possiamo porre subito

$$\Delta t \leq \frac{h}{v},$$

ed essendo $v = 1$ si deduce che il passo temporale massimo ammissibile è $\Delta t = h$, cioè $\Delta t = 5/40$. Dal momento che il tempo finale è fissato a $T = 5$, abbiamo $N_t = 40$ passi temporali.

Scegliendo valori del Δt superiori a questo si assiste alla generazione di oscillazioni spurie e a fenomeni di instabilità, che fanno fallire il metodo.

Esercizio 1.2 Implementare una *funzione* che calcoli il flusso numerico per il metodo **upwind** in un dato intervallo. Utilizzare la seguente intestazione:

```
def upwind_flux(f, df, uL, uR)
  #
  # implementazione
  #
  return F
```

dove:

- `f` e `df` sono due lambda function corrispondenti alla funzione di flusso e alla sua derivata prima
- `uL` e `uR` due vettori contenenti tutti i valori della soluzione all'estremo sinistro e destro, rispettivamente, di ogni cella.

L'output F consiste in un vettore contenente tutti i valori del flusso numerico nelle celle della griglia spaziale.

[3]:
```python
# Implementazione del flusso "alla upwind"
def upwind_flux(f, df, uL, uR):
  """
  Input:
    f  (lambda function)
    df (lambda function)
    uL (numpy.ndarray)
    uR (numpy.ndarray)
  Output:
    F (numpy.ndarray)
  """
  if(min(df(uL))>=0 and min(df(uR))>=0):
    F = f(uL)
  else:
    F = f(uR)
  return F

  def upwind_flux_for(f,df,uL,uR):
    """
    Input:
      f  (lambda function)
      df (lambda function)
      uL (numpy.ndarray)
      uR (numpy.ndarray)
    Output:
      F (numpy.ndarray)
    """
    F=[]
    for i in range(len(uL)):
      if (df(uL[i])*df(uR[i])<0):
        raise RuntimeError('Il metodo upwind non si può applicare')
      else:
        if (df(uL[i])>=0):
            F.append(f(uL[i]))
        else:
            F.append(f(uR[i]))

    return np.array(F)
```

Esercizio 1.3 Risolvere il problema dato scegliendo N_t, $N_t - 1$, $2N_t$ passi temporali.

Plottare i grafici delle soluzioni approssimate utilizzando la function `xtplot` in **utilis_plot_cl.py** e commentare i risultati ottenuti.

[4]:
```python
from utilis_plot_cl import xtplot
import numpy as np
# rappresentazione grafica per Nt
dt = T/Nt

xc, t, u = fvsolve(u0, f, df, L, T, h, dt, upwind_flux)
xtplot(xc, t, u, 'animation')
#xtplot(xc, t, u, 'surface')
```

<IPython.core.display.Image object>

[5]:
```python
# rappresentazione grafica per Nt-1
dt = T/(Nt-1)

xc, t, u = fvsolve(u0, f, df, L, T, h, dt, upwind_flux)
xtplot(xc, t, u, 'animation')
#xtplot(xc, t, u, 'surface')
```

<IPython.core.display.Image object>

[6]:
```python
# rappresentazione grafica per 2*Nt
dt = T/(2*Nt)

xc, t, u = fvsolve(u0, f, df, L, T, h, dt, upwind_flux)
xtplot(xc, t, u, 'animation')
#xtplot(xc, t, u, 'surface')
```

<IPython.core.display.Image object>

Esercizio 2 Si consideri ora l'equazione di Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

sul dominio $\Omega = [0, 5]$ e nell'intervallo temporale $(0, 10]$, con condizione iniziale

$$u_0(x) = \begin{cases} 4(x-1)(2-x) & \text{per } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Anche in questo caso imponiamo la condizione di Dirichlet sul bordo sinistro, $u(0, t) \equiv u(0, 0)$ per ogni $t \in (0, 10]$. Osserviamo quindi che, più in generale, se $u \geq 0$, anche in questo caso il bordo sinistro è di inflow.

Esercizio 2.1 Rappresentare in un grafico l'andamento della funzione flusso $f(u)$ e della sua derivata prima $f'(u)$ per $0 \leq u \leq 1$.

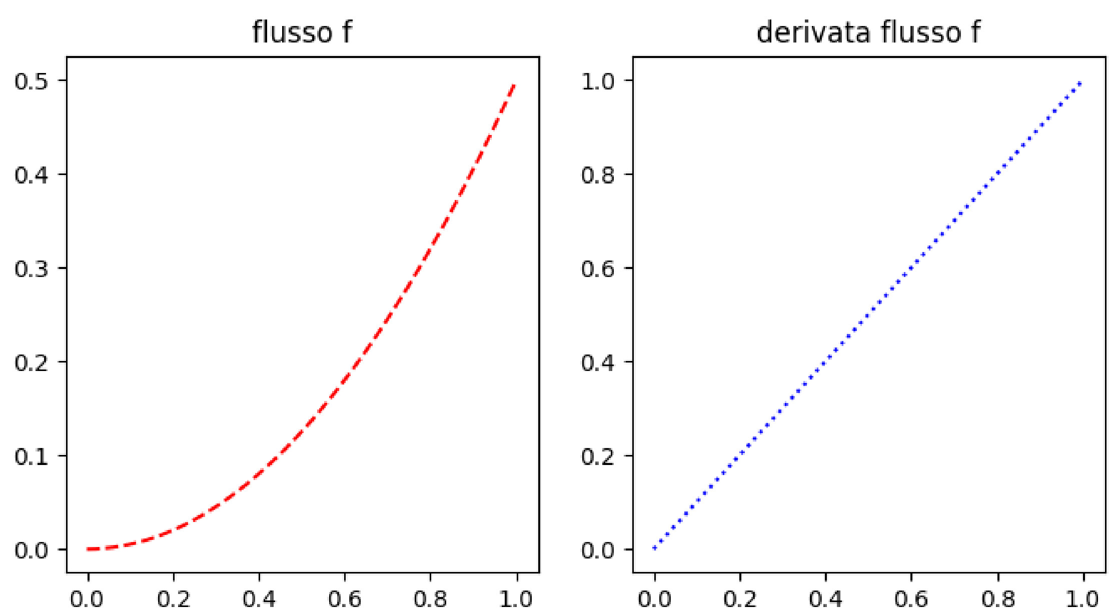
[7]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Dati del problema
```

```
# definire la u_0
u0 = lambda x: -4*(x-1)*(x-2)*(x<2)*(x>1)
# definire la f
f =  lambda u: 0.5*u*u
# definire la df
df = lambda u: u
# lunghezza di Omega
L=5
# Istante di tempo finale
T=10

xx= np.linspace(0,1,1000)
plt.figure(figsize=(8,4))

plt.subplot(121)
plt.plot(xx,f(xx),'--r')
plt.title('flusso f')
plt.subplot(122)
plt.plot(xx,df(xx),':b')
plt.title('derivata flusso f');
plt.show()
```



Soluzione

La funzione di flusso $f(u) = u^2/2$ rappresenta un arco di parabola nell'intervallo $[0, 1]$, monotona crescente. La derivata è rappresentata dalla retta $f'(u) = u$.

Esercizio 2.2 In base ai risultati del punto precedente, il metodo Upwind è applicabile? Risolvere il problema prendendo $N = 40$ e $Nt = 80$.

Soluzione

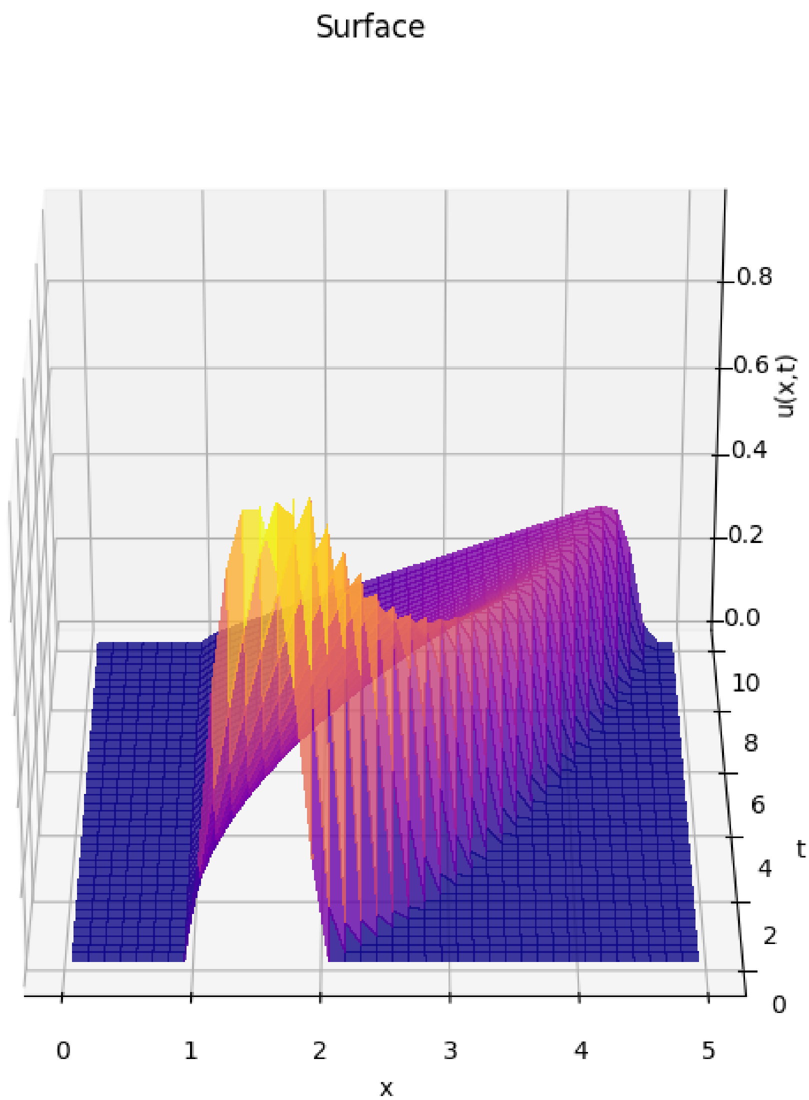
La funzione di flusso è monotona crescente in senso stretto nell'intervallo $[0, 1]$ e la sua derivata è dunque sempre positiva. Il metodo Upwind è applicabile.

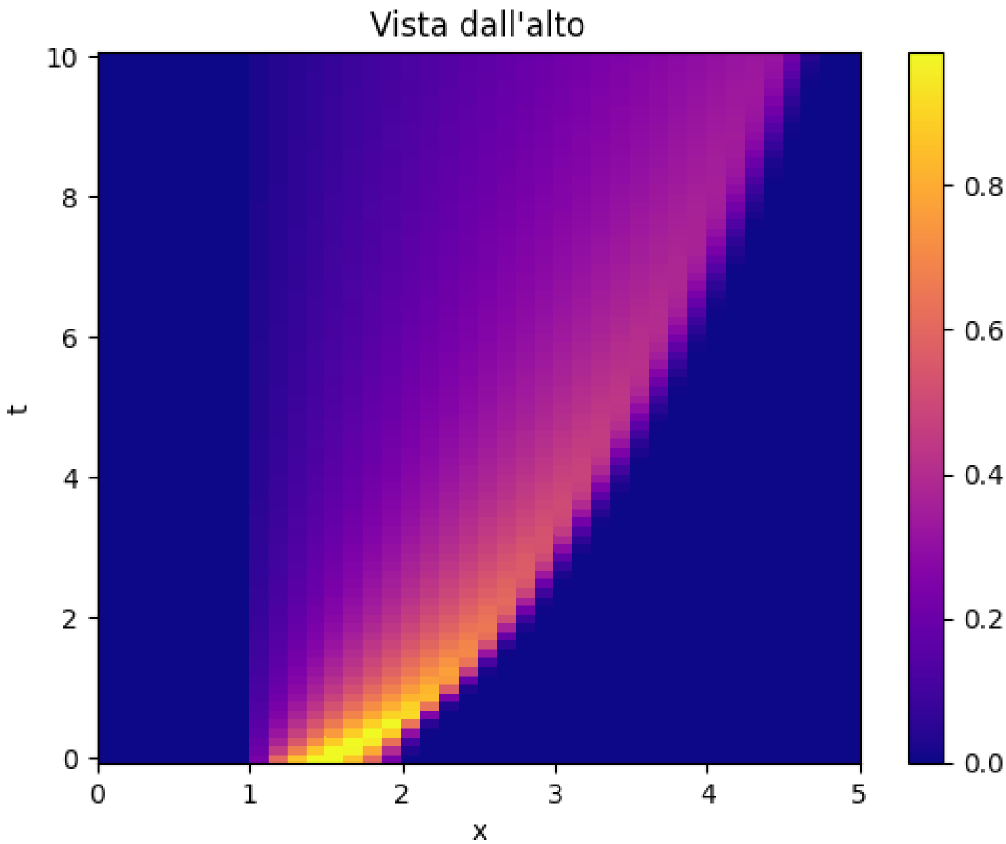
Affinché il metodo rimanga stabile, cioé venga rispettata la **condizione CFL**, occorre che $C_L \geq 1$, dal momento che $|f'(u)| 1 $. Il numero di passi temporali necessari è dato da $N_t = \frac{T}{\Delta t}$. Assumendo di prendere $\Delta t = h = 5/40$ si ottiene $N_t = 80$ passi temporali.

[8]:
```
# N suddivisione spazio
N=40
# passo spaziale
h=L/N
# Nt suddivisione temprale
Nt = 2*N

# rappresentazione grafica per Nt
dt = T/Nt
xc, t, u = fvsolve(u0, f, df, L, T, h, dt, upwind_flux)
xtplot(xc, t, u, 'animation')
xtplot(xc, t, u, 'surface')
```

```
<IPython.core.display.Image object>
```


Surface
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
u(x,t)
10
8
6
4
2
0
t
0
1
2
3
4
5
x



Esercizio 3 Si consideri ora l'equazione del traffico

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

sul dominio $\Omega = [0, 5]$ e nell'intervallo temporale $(0, 10]$. Qui la funzione f è la seguente:

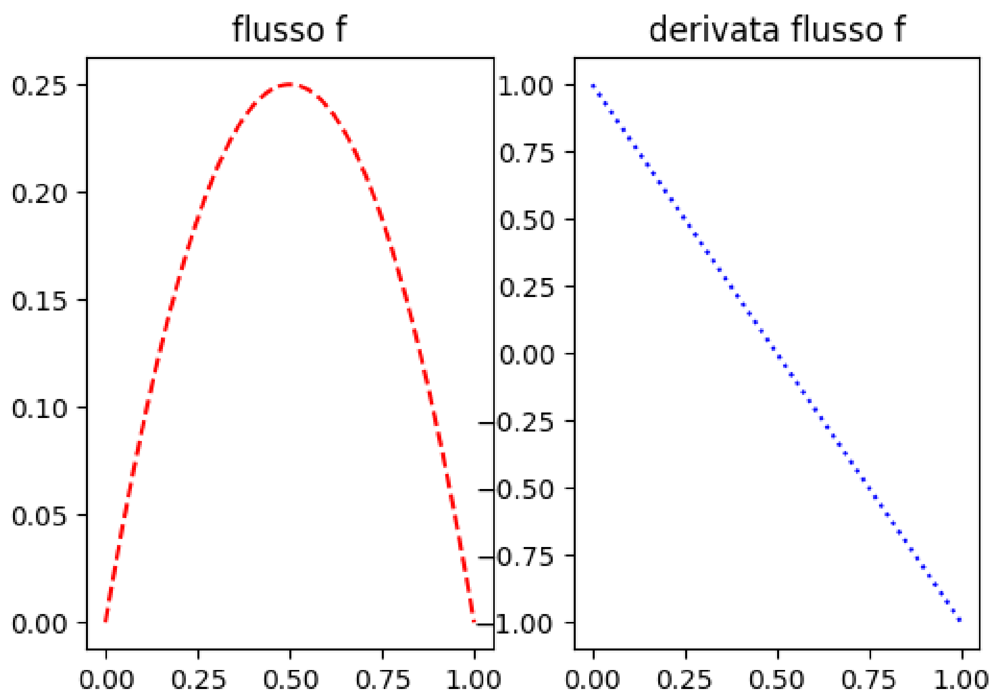
$$f(u) = v\, u \left(1 - \frac{u}{u_{max}}\right).$$

v indica una velocità che viene modulata in funzione della densità di auto u. In particolare quando u raggiunge il valore massimo u_{max} il flusso si annulla (traffico bloccato).

Esercizio 3.1 Dopo aver scelto $v = 1$ e $u_{max} = 1$, rappresentare la funzione flusso e la sua derivata per $0 \leq u \leq 1$.

[9]:
```
# Dati del problema
v = 1;
umax = 1;
# definire la f
f =  lambda u: v*u*(1-u/umax);
# definire la df
df = lambda u: v*(1-2*u/umax);
```

```
plt.figure(figsize=(6,4))
plt.subplot(121)
plt.plot(xx,f(xx),'--r')
plt.title('flusso f')
plt.subplot(122)
plt.plot(xx,df(xx),':b')
plt.title('derivata flusso f');
plt.show()
```



Esercizio 3.2 In base al punto precedente, il metodo Upwind è applicabile?

Soluzione

Il flusso non è monotono, pertanto la sua derivata non ha segno costante. Upwind non è applicabile.

Flusso di Godunov

Si consideri la funzione `godunov_flux` che implementa il calcolo del flusso numerico *Godunov*.

[10]:
```
# Implementazione del flusso di Godunov
def godunov_flux(f, df, uL, uR):

  iL, iR = [], []
  for i in range(len(uL)):
      iL.append(min(uL[i],uR[i]))
```

```python
        iR.append(max(uL[i],uR[i]))

    iL = np.array([iL])
    iR = np.array([iR])

    g = np.linspace(0, 1, 1000)
    g=np.array([g])
    itot = f(iL.T@g + iR.T@(1-g))
    imins = np.min(itot, axis=1)
    imaxs = np.max(itot, axis=1)
    candidates = imins
    dir = np.sign(uR-uL)
    candidates[np.where(dir<0)] = imaxs[np.where(dir<0)]
    F = candidates

    return F
```

Esercizio 3.3

Applicando il flusso numerico di *Godunov*, risolvere il problema del traffico con coda al semaforo, descritto dalla condizione iniziale

$$u_0(x) = \begin{cases} u_{max} & \text{per } x \leq 2, \\ \frac{1}{8}u_{max} & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

e prendendo $N = 40$ e $N_t = 80$. Cosa si osserva?

[11]:
```python
# definire la u_0
u0 = lambda x: 1.0*(x<=2)+1/8*(x>2);
L=5
# N suddivisione spazio
N=40
# passo spaziale
h=L/N
# tempo finale
T=10
# scelta de Nt
Nt=80
# scelta di dt
dt=T/Nt


xc, t, u = fvsolve(u0, f, df, L, T, h, dt, godunov_flux);
xtplot(xc, t, u, 'animation')
```

```
<IPython.core.display.Image object>
```

Questo simula il comportamento di una colonna di macchine in partenza da un semaforo rosso.

Esercizio 3.4 Risolvere il problema del traffico con condizione iniziale

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}u_{max} & \text{per } x \leq 2, \\ u_{max} & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

con gli stessi dati di prima. Cosa si osserva?

[12]:
```
# definire la u_0
u0 = lambda x: 1.0*(x>2)+1/8*(x<=2);

xc, t, u = fvsolve(u0, f, df, L, T, h, dt, godunov_flux);
xtplot(xc, t, u, 'animation')
```

```
<IPython.core.display.Image object>
```

Soluzione

Invertendo i coefficienti sulla condizione iniziale si ottiene, in modo totalmente analogo, una simulazione che questa volta rappresenta la creazione di una colonna di macchina che rallentano fino a fermarsi.