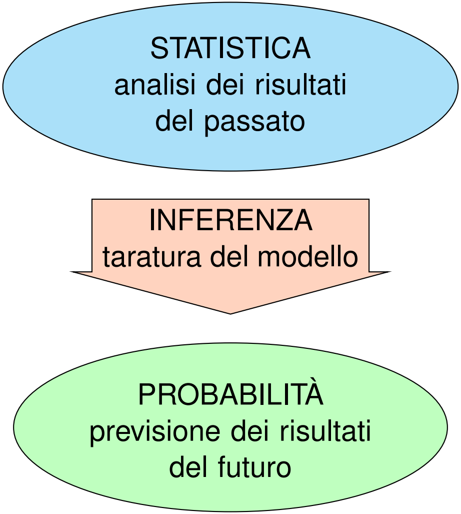
Probabilità

Alessandro Toigo

Programma

- Statistica descrittiva
  (riassumere molti dati attraverso poche caratteristiche essenziali)
- Probabilità
  (costruire un modello che preveda il risultato di un esperimento)
- Inferenza statistica
  (tarare i parametri del modello in base ai risultati dell'esperimento)
- Regressione lineare
  (riconoscere relazioni tra dati di tipo diverso)


STATISTICA
analisi dei risultati
del passato
INFERENZA
taratura del modello
PROBABILITÀ
previsione dei risultati
del futuro

Esperimenti aleatori

ESPERIMENTO ALEATORIO $=$ esito non scontato

ESEMPI:

- lancio di un dado
- lancio di tre monete
- sondaggio tra 100 studenti

Esperimenti aleatori

ESPERIMENTO ALEATORIO $=$ esito non scontato

ESEMPI:

- lancio di un dado
- lancio di tre monete
- sondaggio tra 100 studenti

EVENTO $=$ proposizione circa il risultato dell'esperimento

ESEMPI:

- $E =$ "uscirà 6"
- $F =$ "uscirà testa al 2$^{\text{o}}$ lancio"
- $G =$ "tutti e 100 gli intervistati saranno più bassi di 2 m"

Esperimenti aleatori

$\mathcal{E} =$ insieme di tutti i possibili eventi

L'insieme $\mathcal{E}$ è una logica booleana con le operazioni

$$\wedge = \text{AND} \qquad \vee = \text{OR} \qquad \overline{\cdot} = \text{NOT}$$

Esperimenti aleatori

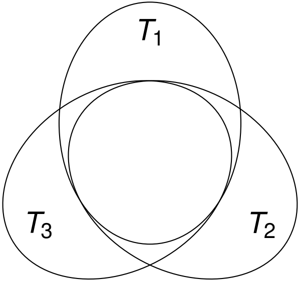
$\mathcal{E} =$ insieme di tutti i possibili eventi

L'insieme $\mathcal{E}$ è una logica booleana con le operazioni

$$\wedge = \text{AND} \qquad \vee = \text{OR} \qquad \overline{\cdot} = \text{NOT}$$

ESEMPIO: nel lancio di tre monete

$T_i =$ "uscirà testa all'i-esimo lancio" $\quad (i = 1, 2, 3)$



Esperimenti aleatori

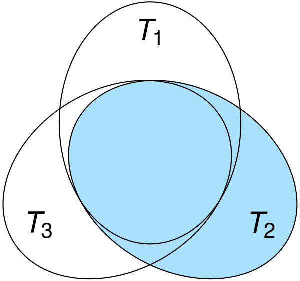
$\mathcal{E} =$ insieme di tutti i possibili eventi

L'insieme $\mathcal{E}$ è una logica booleana con le operazioni

$$\wedge = \text{AND} \qquad \vee = \text{OR} \qquad \overline{\cdot} = \text{NOT}$$

ESEMPIO: nel lancio di tre monete

$T_i =$ "uscirà testa all'i-esimo lancio" $\quad (i = 1, 2, 3)$



$=$ "uscirà testa al 2º lancio"

Esperimenti aleatori

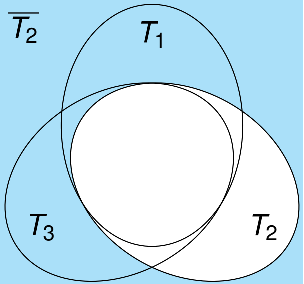
$\mathcal{E} =$ insieme di tutti i possibili eventi

L'insieme $\mathcal{E}$ è una logica booleana con le operazioni

$$\wedge = \text{AND} \qquad \vee = \text{OR} \qquad \overline{\cdot} = \text{NOT}$$

ESEMPIO: nel lancio di tre monete

$T_i =$ "uscirà testa all'i-esimo lancio" $\quad (i = 1, 2, 3)$



$=$ "uscirà croce al 2º lancio"

Esperimenti aleatori

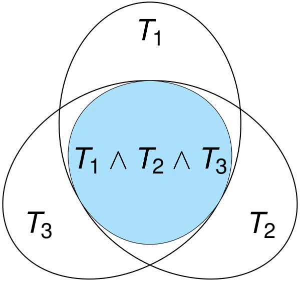
$\mathcal{E} =$ insieme di tutti i possibili eventi

L'insieme $\mathcal{E}$ è una logica booleana con le operazioni

$$\wedge = \text{AND} \qquad \vee = \text{OR} \qquad \overline{\cdot} = \text{NOT}$$

ESEMPIO: nel lancio di tre monete

$T_i =$ "uscirà testa all'i-esimo lancio" $\quad (i = 1, 2, 3)$



$=$ "uscirà sempre testa"

Esperimenti aleatori

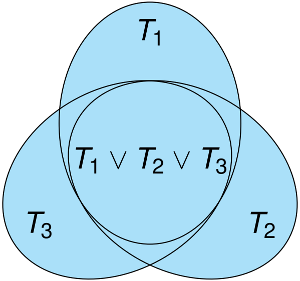
$\mathcal{E} =$ insieme di tutti i possibili eventi

L'insieme $\mathcal{E}$ è una logica booleana con le operazioni

$$\wedge = \text{AND} \qquad \vee = \text{OR} \qquad \overline{\cdot} = \text{NOT}$$

ESEMPIO: nel lancio di tre monete

$T_i =$ "uscirà testa all'i-esimo lancio" $\quad (i = 1, 2, 3)$



$=$ "almeno una volta uscirà testa"

Esperimenti aleatori

$\mathcal{E} =$ insieme di tutti i possibili eventi

L'insieme $\mathcal{E}$ è una logica booleana con le operazioni

$$\wedge = \text{AND} \qquad \vee = \text{OR} \qquad \overline{\cdot} = \text{NOT}$$

PROPRIETÀ:

$(E \wedge F) \wedge G = E \wedge (F \wedge G)$ e similmente con $\vee \leftrightarrow \wedge$

$\overline{E \wedge F} = \overline{E} \vee \overline{F}$ e similmente con $\vee \leftrightarrow \wedge$

$E \wedge (F \vee G) = (E \wedge F) \vee (E \wedge G)$ e similmente con $\vee \leftrightarrow \wedge$

Esperimenti aleatori

$\mathcal{E} =$ insieme di tutti i possibili eventi

L'insieme $\mathcal{E}$ è una logica booleana con le operazioni

$$\wedge = \text{AND} \qquad \vee = \text{OR} \qquad \overline{\cdot} = \text{NOT}$$

PROPRIETÀ:

$(E \wedge F) \wedge G = E \wedge (F \wedge G)$ e similmente con $\vee \leftrightarrow \wedge$

$\overline{E \wedge F} = \overline{E} \vee \overline{F}$ e similmente con $\vee \leftrightarrow \wedge$

$E \wedge (F \vee G) = (E \wedge F) \vee (E \wedge G)$ e similmente con $\vee \leftrightarrow \wedge$

Si definiscono inoltre

$$\Omega = \text{evento certo} \quad := E \vee \overline{E} \quad \forall E$$

$$\varnothing = \text{evento impossibile} \quad := E \wedge \overline{E} \quad \forall E$$

E ed F sono *incompatibili* quando $E \wedge F = \varnothing$

E *implica* F quando $E \wedge F = E$

Probabilità

Definizione

Una *probabilità* è una qualsiasi funzione $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ t.c.

1. $\mathbb{P}(E) \geq 0 \quad \forall E$ (positività)
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normalizzazione)
3. Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono a due a due incompatibili,

   $\mathbb{P}(E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_n) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \ldots + \mathbb{P}(E_n)$ (additività)

Probabilità

Definizione

Una *probabilità* è una qualsiasi funzione $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ t.c.

1. $\mathbb{P}(E) \geq 0 \quad \forall E$ (positività)
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normalizzazione)
3. Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono a due a due incompatibili,

   $\mathbb{P}(E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_n) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \ldots + \mathbb{P}(E_n)$ (additività)

Conseguenze

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$

(c) Se E implica F, allora $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$

Probabilità

Definizione

Una *probabilità* è una qualsiasi funzione $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ t.c.

1. $\mathbb{P}(E) \geq 0 \quad \forall E$ (positività)
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normalizzazione)
3. Se $E_1, E_2, \dots, E_n$ sono a due a due incompatibili,

   $\mathbb{P}(E_1 \vee E_2 \vee \dots \vee E_n) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \dots + \mathbb{P}(E_n)$ (additività)

ATTENZIONE:

$$\mathbb{P}(T_1 \vee T_2 \vee T_3) \neq \mathbb{P}(T_1) + \mathbb{P}(T_2) + \mathbb{P}(T_3) = 150\% > 1$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 \overset{(2)}{=} \mathbb{P}(\Omega)$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right)$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 \;=\; \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) \stackrel{(3)}{=} \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(E\right)$:

$$1 \;=\; \mathbb{P}\left(\Omega\right) \;=\mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) \;=\; \mathbb{P}\left(E\right) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(E\right)$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \overset{(1)}{\leq} \mathbb{P}(E)$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \leq \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right)$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 \;=\; \mathbb{P}(\Omega) \;=\mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) \;=\; \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \;\leq\; \mathbb{P}(E) \;= 1 - \underset{\substack{|\vee\,(1) \\ 0}}{\mathbb{P}\left(\overline{E}\right)} \;\leq 1$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \leq \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \leq 1$$

(c) Se E implica F, allora $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$:

$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left((E \wedge F) \vee (\overline{E} \wedge F)\right)$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 \;=\; \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) \;=\; \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \leq \; \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \; \leq 1$$

(c) Se E implica F, allora $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left((E \wedge F) \vee (\overline{E} \wedge F)\right)$$
$$\overset{(3)}{=} \mathbb{P}(E \wedge F) + \mathbb{P}\left(\overline{E} \wedge F\right) \qquad \text{perché } (E \wedge F) \wedge (\overline{E} \wedge F) = \varnothing$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \leq \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \leq 1$$

(c) Se E implica F, allora $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left((E \wedge F) \vee \left(\overline{E} \wedge F\right)\right)$$
$$= \mathbb{P}(E \wedge F) + \mathbb{P}\left(\overline{E} \wedge F\right)$$
$$= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E} \wedge F\right) \qquad \text{perché } E \wedge F = E$$

Probabilità

(a) $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(E \vee \overline{E}\right) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \qquad \text{perché } E \wedge \overline{E} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$:

$$0 \leq \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \leq 1$$

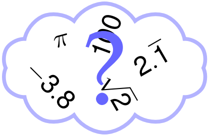
(c) Se E implica F, allora $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}\left((E \wedge F) \vee \left(\overline{E} \wedge F\right)\right) \\
&= \mathbb{P}(E \wedge F) + \mathbb{P}\left(\overline{E} \wedge F\right) \\
&= \mathbb{P}(E) + \underset{\substack{|\vee (1) \\ 0}}{\mathbb{P}\left(\overline{E} \wedge F\right)} \\
&\geq \mathbb{P}(E)
\end{aligned}$$

VARIABILE ALEATORIA (v.a.) $=$ risultato di una misura in un esperimento aleatorio

ESEMPI:

- $X =$ numero che uscirà nel lancio di un dado
- $Y =$ numero di teste nei tre lanci di moneta
- $Z =$ altezza del 10^{o} intervistato

$X =$ 

Non ha un valore definito finché non la misuro

VARIABILE ALEATORIA (v.a.) $=$ risultato di una misura in un esperimento aleatorio

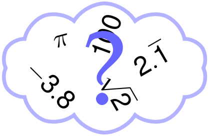
ESEMPI:

- X = numero che uscirà nel lancio di un dado
- Y = numero di teste nei tre lanci di moneta

} discrete

- Z = altezza del 10^{o} intervistato

} continua

$X =$ 

Non ha un valore definito finché non la misuro

VARIABILE ALEATORIA (v.a.) $=$ risultato di una misura in un esperimento aleatorio

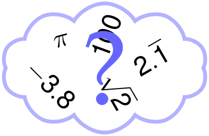
ESEMPI:

- $X =$ numero che uscirà nel lancio di un dado
- $Y =$ numero di teste nei tre lanci di moneta

} discrete

- $Z =$ altezza del 10^{o} intervistato

} continua

$X =$ 

Non ha un valore definito finché non la misuro

Le v.a. non sono eventi, ma si possono usare per creare eventi:

- $E :=$ "$X = 6$" $=$ "uscirà 6"
- $F :=$ "$Y = 3$" $=$ "uscirà sempre testa"
- $G :=$ "$Z > 1.80\,\mathrm{m}$" $=$ "il 10^{o} intervistato sarà più alto di $1.80\,\mathrm{m}$"

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}(\text{“}X \leq t\text{”})$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente:

$$s < t \quad \Rightarrow \quad \text{“}X \leq s\text{” implica “}X \leq t\text{”}$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \le t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente:

$$\begin{aligned} s < t \quad &\Rightarrow \quad \text{“}X \le s\text{” implica “}X \le t\text{”} \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{P}\,(\text{“}X \le s\text{”}) \le \mathbb{P}\,(\text{“}X \le t\text{”}) \end{aligned}$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente:

$$\begin{aligned} s < t \quad &\Rightarrow \quad \text{“}X \leq s\text{” implica “}X \leq t\text{”} \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq s\text{”}\right) \leq \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right) \\ &\Rightarrow \quad F_X(s) \leq F_X(t) \end{aligned}$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente:

$$\begin{aligned} s < t \quad &\Rightarrow \quad \text{“}X \leq s\text{” implica “}X \leq t\text{”} \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq s\text{”}\right) \leq \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right) \\ &\Rightarrow \quad F_X(s) \leq F_X(t) \end{aligned}$$

D'ora in poi, $\mathbb{P}\left(\text{“}\ldots\text{”}\right) = \mathbb{P}\left(\ldots\right)$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad$ e $\quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0:$

$$F_X(t) = \mathbb{P}\,(X \leq t)$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ e $F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X < +\infty)$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}\,(X \leq t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\,(X < +\infty) = \mathbb{P}\,(\Omega) = 1$$

e similmente per l'altro limite

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \leq t\right) = F_X(t) - F_X(s)$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \leq t\right) = F_X(t) - F_X(s)$:

  $F_X(t) = \mathbb{P}\left(X \leq t\right)$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\,(s < X \leq t) = F_X(t) - F_X(s)$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}\,(X \leq t) \; = \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq s\text{”} \vee \text{“}s < X \leq t\text{”})$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \leq t\right) = F_X(t) - F_X(s)$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}\left(X \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq s\text{”} \vee \text{“}s < X \leq t\text{”}\right)$$

$$\overset{(3)}{=} \mathbb{P}\left(X \leq s\right) + \mathbb{P}\left(s < X \leq t\right)$$

$$\text{perché “}X \leq s\text{”} \wedge \text{“}s < X \leq t\text{”} = \varnothing$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq t\text{”})$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1 \quad$ e $\quad F_X(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\,(s < X \leq t) = F_X(t) - F_X(s)$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}\,(X \leq t) \;= \mathbb{P}\,(\text{“}X \leq s\text{”} \vee \text{“}s < X \leq t\text{”})$$

$$= \;\mathbb{P}\,(X \leq s) + \mathbb{P}\,(s < X \leq t)$$

$$= F_X(s) + \mathbb{P}\,(s < X \leq t)$$

Funzione di ripartizione

La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1 \quad$ e $\quad F_X(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}(s < X \leq t) = F_X(t) - F_X(s)$:

$$\begin{aligned} F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) &= \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq s\text{”} \vee \text{“}s < X \leq t\text{”}\right) \\ &= \mathbb{P}(X \leq s) + \mathbb{P}(s < X \leq t) \\ &= F_X(s) + \mathbb{P}(s < X \leq t) \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{P}(s < X \leq t) = F_X(t) - F_X(s) \end{aligned}$$

Funzione di ripartizione

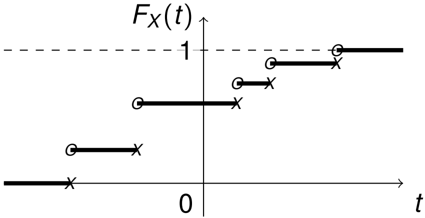
La *funzione di ripartizione* (f.d.r.) di una v.a. X è

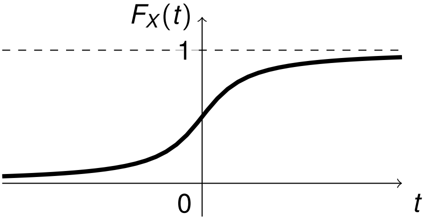
$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \qquad\qquad F_X(t) := \mathbb{P}\left(\text{“}X \leq t\text{”}\right)$$

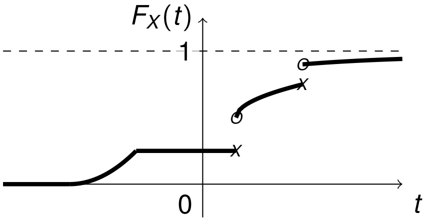
PROPRIETÀ:

- F_X è una funzione non-decrescente
- $F_X(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{e} \quad F_X(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$
- Se $s < t$, allora $\mathbb{P}\left(s < X \leq t\right) = F_X(t) - F_X(s)$
- F_X è continua da destra con limite da sinistra

ESEMPI:







Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}\,(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

La funzione f_X è la *densità* di X, e soddisfa

- $f_X(z) \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ (positività)

  perché $\mathbb{P}(s \leq X \leq t) \geq 0$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$ con $s < t$

Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}\,(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

La funzione f_X è la *densità* di X, e soddisfa

- $f_X(z) \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ (positività)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\,\mathrm{d}z = 1$ (normalizzazione)

  perché $\mathbb{P}\,(-\infty < X < +\infty) = 1$

Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

La funzione f_X è la *densità* di X, e soddisfa

- $f_X(z) \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ (positività)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\, \mathrm{d}z = 1$ (normalizzazione)

ATTENZIONE: per una v.a. assolutamente continua

$$\mathbb{P}(X = t) = 0 \qquad \mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}(X \leq t) \qquad \text{ecc.}$$

Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione

Una v.a. X si dice *assolutamente continua* (a.c.) se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

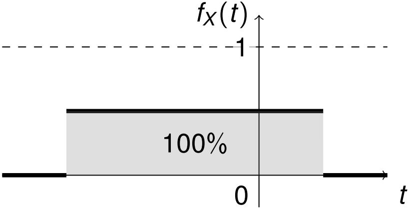
$$\mathbb{P}\,(s \leq X \leq t) = \int_s^t f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \forall s, t \in \mathbb{R},\ s < t$$

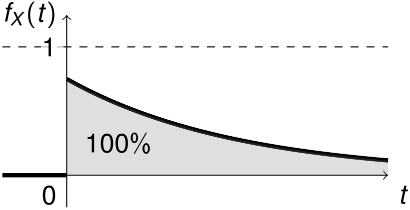
Legame densità - f.d.r. per una v.a. assolutamente continua:

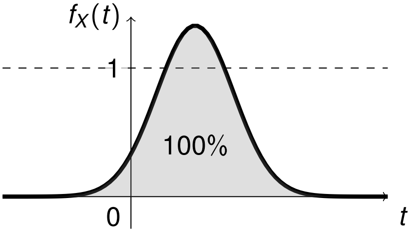
$$F_X(t) = \mathbb{P}\,(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \quad f_X(t) = \frac{\mathrm{d}\,F_X(t)}{\mathrm{d}t}$$

ESEMPI:

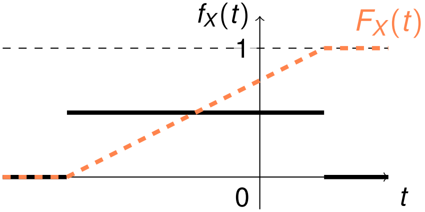


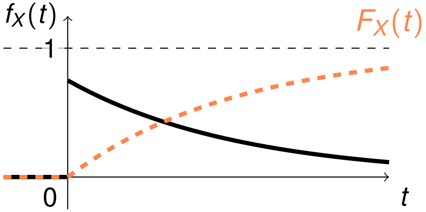


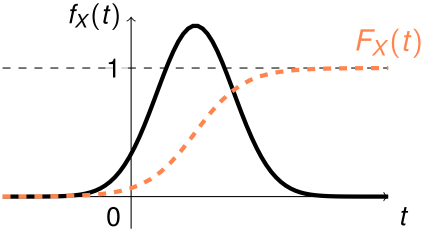


Variabili aleatorie assolutamente continue

ESEMPI:







Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $a < b$ fissati

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

dove la *funzione indicatrice* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è

$$\mathbb{1}_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

dove la *funzione indicatrice* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è

$$\mathbb{1}_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

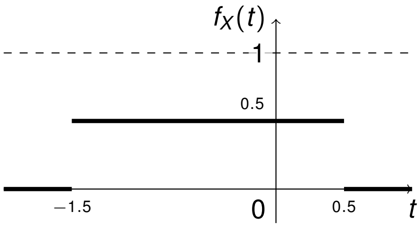
La densità f_X si chiama *uniforme continua* di parametri a, b e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(a,b)$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

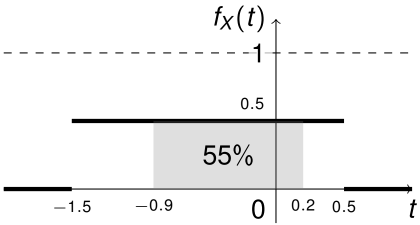
ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5,\ b = 0.5$:



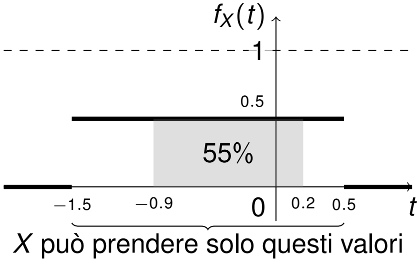
$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

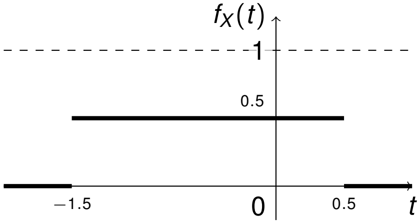
$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5, \; b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \leq X \leq 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

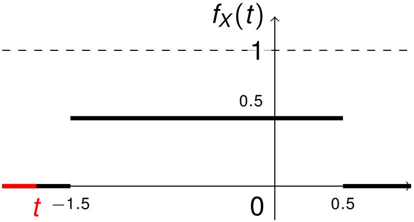
$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5,\ b = 0.5:$



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

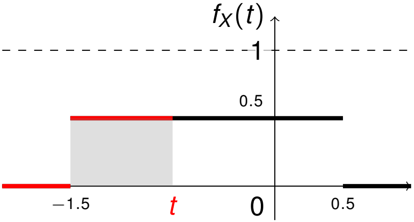
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}z = 0 & \text{se } t < -1.5 \\ & \\ & \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

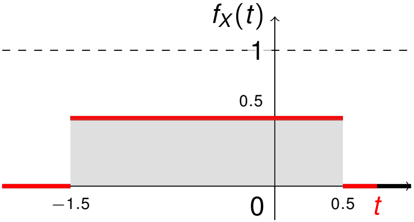
$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}z = 0 & \text{se } t < -1.5 \\ \int_{-\infty}^{-1.5} 0\,\mathrm{d}z + \int_{-1.5}^{t} 0.5\,\mathrm{d}z = 0.5(t+1.5) & \text{se } -1.5 \le t \le 0.5 \\ & \end{cases}$$

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5,\ b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

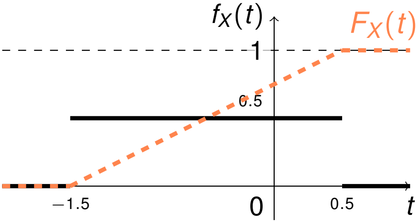
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}z = 0 & \text{se } t < -1.5 \\ \int_{-\infty}^{-1.5} 0\,\mathrm{d}z + \int_{-1.5}^{t} 0.5\,\mathrm{d}z = 0.5(t+1.5) & \text{se } -1.5 \le t \le 0.5 \\ \int_{-\infty}^{-1.5} 0\,\mathrm{d}z + \int_{-1.5}^{0.5} 0.5\,\mathrm{d}z + \int_{0.5}^{t} 0\,\mathrm{d}z = 1 & \text{se } t > 0.5 \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) = \int_{-0.9}^{0.2} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-0.9}^{0.2} 0.5\,\mathrm{d}t = 0.55$$

$\operatorname{supp} f_X$ è il *supporto* della v.a. X

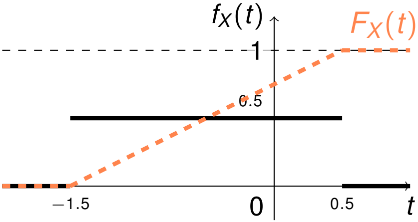
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1.5 \\ 0.5(t+1.5) & \text{se } -1.5 \le t \le 0.5 \\ 1 & \text{se } t > 0.5 \end{cases}$$

Densità uniforme continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t) \qquad \text{con } a < b \text{ fissati}$$

ESEMPIO: se $a = -1.5$, $b = 0.5$:



$$\mathbb{P}(-0.9 \le X \le 0.2) =$$
$$= F_X(0.2) - F_X(-0.9)$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1.5 \\ 0.5(t+1.5) & \text{se } -1.5 \le t \le 0.5 \\ 1 & \text{se } t > 0.5 \end{cases}$$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se conosco la densità X, qual è quella di Y?

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(g(X) \in (-\infty, t])$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(g(X) \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}\left(X \in g^{-1}((-\infty, t])\right)$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(g(X) \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}\left(X \in g^{-1}((-\infty, t])\right)$$
$$= \int_{g^{-1}((-\infty,t])} f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Funzioni di una v.a.

Se X è una v.a. e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, posso considerare la nuova v.a.

$$Y = g(X)$$

ESEMPI:

- $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad Y = X^2$
- $g(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad \Rightarrow \quad Y = \mathbb{1}_{[0,3]}(X)$
- $g(x) = 1.8 \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 1.8 \cdot X + 32$

Se X è a.c. e conosco la densità X, posso ricavare

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(g(X) \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}\left(X \in g^{-1}((-\infty, t])\right) = \int_{g^{-1}((-\infty,t])} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t}$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati}$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati}$$

(i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$

Funzioni di una v.a.

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati}$$

- (i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t)$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

- (i) $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \qquad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$
$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t}$$

Funzioni di una v.a.

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}\,(Y \le t) = \mathbb{P}\,(aX + b \le t) = \mathbb{P}\left(X \le \frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \qquad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\qquad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

- (i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$
$$= F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

- (ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$
$$= F'_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Funzioni di una v.a.

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$

$$= \quad F'_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \quad f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a > 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(aX + b \le t) = \mathbb{P}\left(X \le \frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\quad F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$

$$= \quad F_X'\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \quad f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a < 0$$

(i) $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X \geq \frac{t-b}{a}\right)$$
$$= 1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(ii) $$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]$$
$$= -F_X'\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$
$$= -f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

Funzioni di una v.a.

ESEMPIO:

$$Y = aX + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati e con } a \neq 0$$

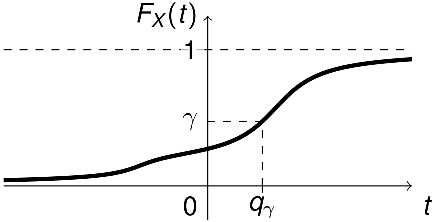
In conclusione,

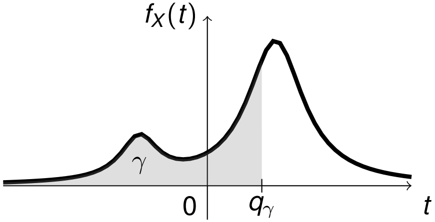
$$f_Y(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} - & \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ - & \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine* γ (della densità) di X

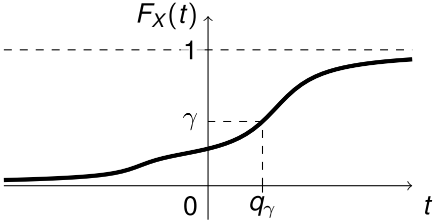


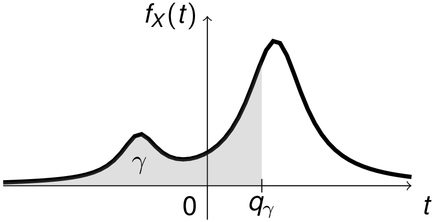


Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} \text{-} \quad \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ \text{-} \quad \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine γ* (della densità) di X





Se $\gamma = 0.5$, ottengo la *mediana* di X ecc.

Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} \text{-} \quad \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ \text{-} \quad \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine* γ (della densità) di X

PROPRIETÀ:

- Se $Y = aX + b$, allora $q_\gamma^Y = \begin{cases} a\, q_\gamma^X + b & \text{se } a > 0 \\ a\, q_{1-\gamma}^X + b & \text{se } a < 0 \end{cases}$

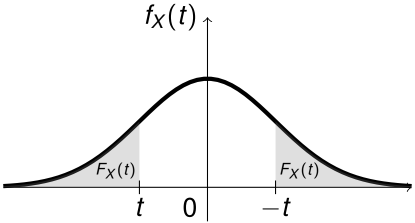
Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} \text{-} \quad \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ \text{-} \quad \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine* γ (della densità) di X

PROPRIETÀ:

- Se $Y = aX + b$, allora $q_\gamma^Y = \begin{cases} a\,q_\gamma^X + b & \text{se } a > 0 \\ a\,q_{1-\gamma}^X + b & \text{se } a < 0 \end{cases}$
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse delle y ($\Leftrightarrow$ $f_X = f_{-X}$), allora
    - $F_X(t) = 1 - F_X(-t)$



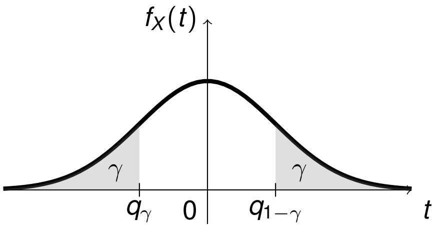
Quantili di una v.a.

Se: $\begin{cases} - \ \gamma \in (0,1) \text{ è fissato} \\ - \ \text{esiste un unico } q_\gamma \in \mathbb{R} \text{ tale che } F_X(q_\gamma) = \gamma \end{cases}$

allora: $q_\gamma = F_X^{-1}(\gamma)$ è il *quantile di ordine* γ (della densità) di X

PROPRIETÀ:

- Se $Y = aX + b$, allora $q_\gamma^Y = \begin{cases} a\, q_\gamma^X + b & \text{se } a > 0 \\ a\, q_{1-\gamma}^X + b & \text{se } a < 0 \end{cases}$
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse delle y ($\Leftrightarrow$ $f_X = f_{-X}$), allora
  - $F_X(t) = 1 - F_X(-t)$
  - $-q_\gamma = q_{1-\gamma}$



Valore atteso

Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

Valore atteso

Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

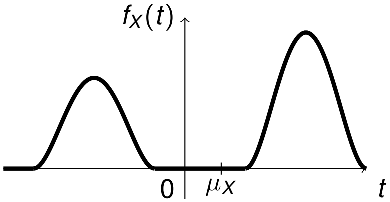
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



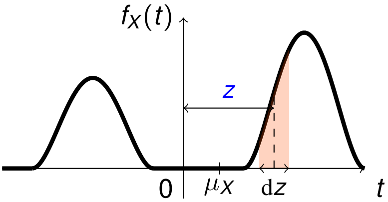
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z \, f_X(z) \, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

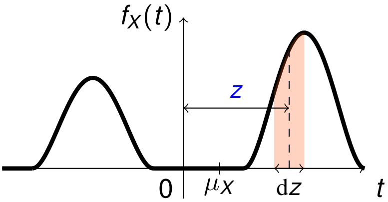
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

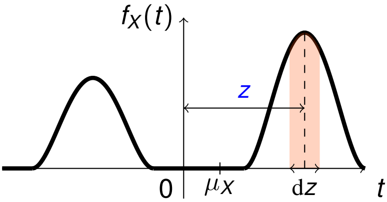
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Definizione

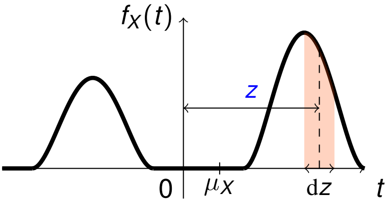
Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

(A volte si scrive anche $\mu_X = \mathbb{E}[X]$)

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

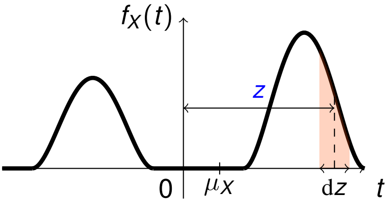
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X



Valore atteso

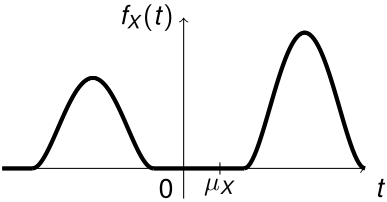
Definizione

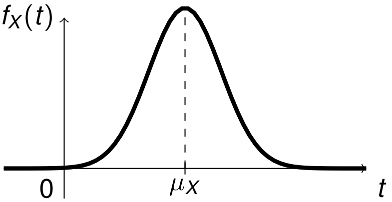
Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse $x = x_0$, allora $\mu_X = x_0$





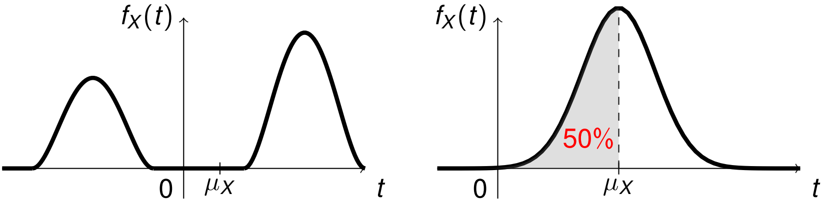
Definizione

Il *valore atteso* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{(A volte si scrive anche } \mu_X = \mathbb{E}[X]\text{)}$$

PROPRIETÀ:

- μ_X è il baricentro della densità di X
- Se f_X è simmetrica rispetto all'asse $x = x_0$, allora $\mu_X = x_0 = q^X_{0.5}$



Valore atteso

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, come si calcola

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = ???$$

Valore atteso

Secondo la definizione,

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_{g(X)}(z)\,\mathrm{d}z$$

ma in pratica il passaggio $f_X \;\rightarrow\; f_{g(X)}$ è laborioso

Valore atteso

Secondo la definizione,

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_{g(X)}(z)\,\mathrm{d}z$$

ma in pratica il passaggio $f_X \quad \rightarrow \quad f_{g(X)}$ è laborioso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

  $$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

  Infatti, con $g(z) = az + b$:

  $$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (az + b)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

Infatti, con $g(z) = az + b$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[aX + b\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (az + b)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\, \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

Infatti, con $g(z) = az + b$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[aX + b\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (az + b)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \\ &= a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z}_{\mathbb{E}[X]} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\, \mathrm{d}z}_{1} \end{aligned}$$

Valore atteso

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ (continuazione):

- Se $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b \qquad \text{(linearità di } \mathbb{E}\text{)}$$

Infatti, con $g(z) = az + b$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[aX + b\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (az + b)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\, \mathrm{d}z + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\, \mathrm{d}z \\ &= a\,\mathbb{E}\left[X\right] + b\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\,[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\,[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\,[X] \geq 0$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\,[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\,[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\,[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}\,[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\mathrm{var}\,[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2)\, f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2) \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} z \, f_X(z) \, \mathrm{d}z + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2) \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z}_{\mathbb{E}[X^2]} - 2\mu_X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z \, f_X(z) \, \mathrm{d}z}_{\mathbb{E}[X]} + \mu_X^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) \, \mathrm{d}z}_{1}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left[X\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2) \, f_X(z) \, \mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} z \, f_X(z) \, \mathrm{d}z + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) \, \mathrm{d}z \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu_X \cdot \mu_X + \mu_X^2 \cdot 1\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 2\mu_X z + \mu_X^2)\, f_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_X(z)\,\mathrm{d}z + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu_X \cdot \mu_X + \mu_X^2 \cdot 1\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\,[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\,[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\,[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}\,[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\,[aX + b] = a^2\,\mathrm{var}\,[X]$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\operatorname{var}[aX + b] = a^2 \operatorname{var}[X]$:

$$\operatorname{var}[aX + b] = \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\right\}^2\right]$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\,[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\,[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\,[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}\,[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\,[aX + b] = a^2\,\mathrm{var}\,[X]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{var}\,[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}\,[aX + b]\right\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - (a\,\mathbb{E}\,[X] + b)\right\}^2\right] \qquad \text{linearità di } \mathbb{E} \end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}[aX + b] = a^2\,\mathrm{var}[X]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\right\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + \cancel{b}) - (a\mathbb{E}[X] + \cancel{b})\right\}^2\right]\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}\left[X\right] \geq 0$
- $\mathrm{var}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}\left[aX + b\right] = a^2 \, \mathrm{var}\left[X\right]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left[aX + b\right] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}\left[aX + b\right]\right\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + \cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}\left[X\right] + \cancel{b})\right\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\{a\,(X - \mathbb{E}\left[X\right])\right\}^2\right]
\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\operatorname{var}[aX + b] = a^2 \operatorname{var}[X]$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\right\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + \cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}[X] + \cancel{b})\right\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[a^2\left\{(X - \mathbb{E}[X])\right\}^2\right]
\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}[aX + b] = a^2\, \mathrm{var}[X]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}[aX + b] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + b) - \mathbb{E}[aX + b]\right\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\{(aX + \cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}[X] + \cancel{b})\right\}^2\right] \\
&= a^2\, \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \qquad \text{linearità di } \mathbb{E}
\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\mathrm{var}[X] \geq 0$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\mathrm{var}[aX + b] = a^2 \,\mathrm{var}[X]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[aX+b] &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX+b) - \mathbb{E}[aX+b]\right\}^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{(aX+\cancel{b}) - (a\,\mathbb{E}[X]+\cancel{b})\right\}^2\right] \\ &= a^2\,\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = a^2\,\mathrm{var}[X]\end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

PROPRIETÀ:

- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\operatorname{var}[aX + b] = a^2 \operatorname{var}[X]$
- Per la *deviazione standard* $\operatorname{sd}[X] = \sqrt{\operatorname{var}[X]}$ si ha

$$\operatorname{sd}[aX + b] = |a| \operatorname{sd}[X]$$

Varianza

Definizione

La *varianza* di una v.a. assolutamente continua X è il numero reale

$$\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, dz$$

PROPRIETÀ:

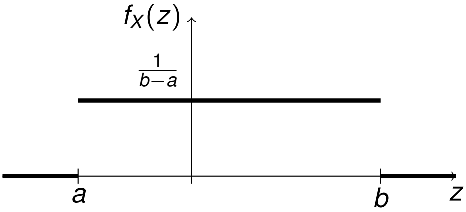
- $\operatorname{var}[X] \geq 0$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2$
- $\operatorname{var}[aX + b] = a^2 \operatorname{var}[X]$
- Per la *deviazione standard* $\operatorname{sd}[X] = \sqrt{\operatorname{var}[X]}$ si ha

$$\operatorname{sd}[aX + b] = |a| \operatorname{sd}[X]$$

(A volte si scrive anche $\sigma_X = \operatorname{sd}[X]$)

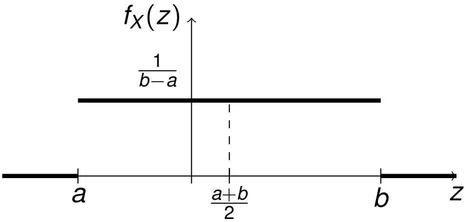
Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Valore atteso e varianza della densità uniforme

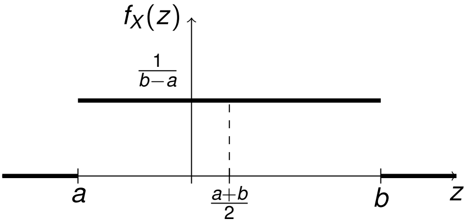
$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

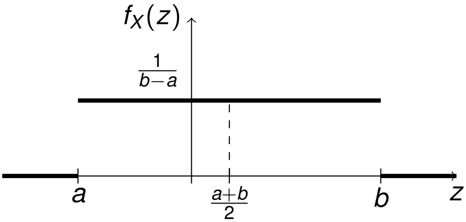
$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

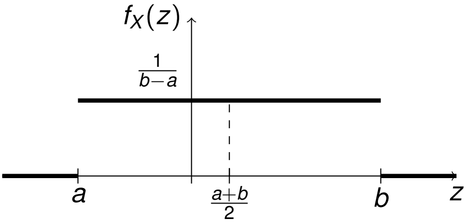


- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\text{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ dove

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, f_X(z) \, \mathrm{d}z$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

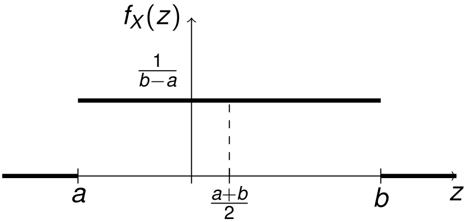


- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ dove

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}z$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



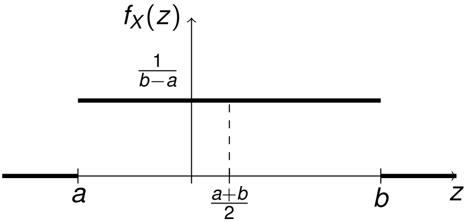
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ dove

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=a}^{z=b}$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



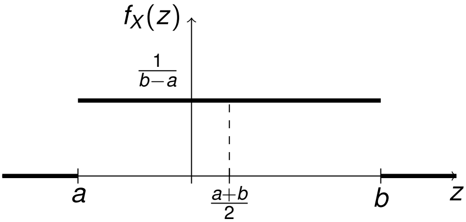
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ dove

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=a}^{z=b} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



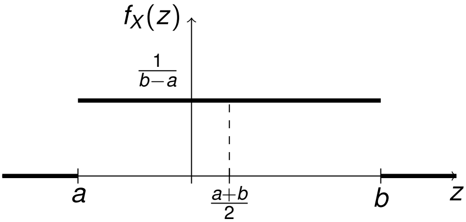
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b z^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=a}^{z=b} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Valore atteso e varianza della densità uniforme

$$f_X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } z \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ perché f_X è simmetrica rispetto a $z = \dfrac{a+b}{2}$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO: Se $\varepsilon = k\,\sigma_X$:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq k\,\sigma_X\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k\,\sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

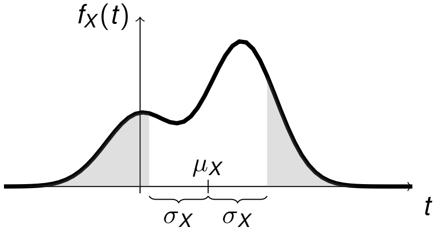
Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO: Se $\varepsilon = k\,\sigma_X$:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq k\,\sigma_X\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k\,\sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



$k = 1$:

$$\leq \frac{1}{1^2} = 100\%$$

Disuguaglianza di Chebyshev

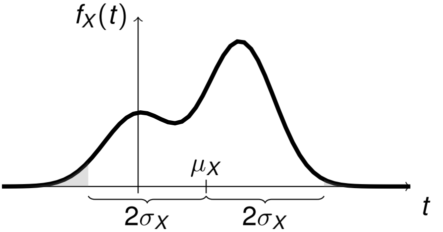
Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO: Se $\varepsilon = k\,\sigma_X$:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq k\,\sigma_X\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k\,\sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



$k = 2$:

$$\leq \frac{1}{2^2} = 25\%$$

Disuguaglianza di Chebyshev

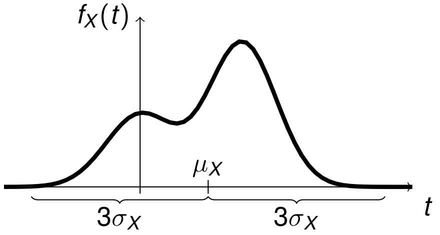
Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO: Se $\varepsilon = k\,\sigma_X$:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq k\,\sigma_X\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{(k\,\sigma_X)^2} = \frac{1}{k^2}$$



$k = 3$:

$$\leq \frac{1}{3^2} = 11.1\%$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}\left[X\right]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}\left[X\right]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\, \mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X| \geq \varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2 f_X(z)}_{\geq 0}\, \mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X| < \varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2 f_X(z)}_{\geq 0}\, \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2\, f_X(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2}_{\geq\varepsilon^2} f_X(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\;\mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z-\mu_X)^2 f_X(z)\;\mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} \underbrace{(z-\mu_X)^2}_{\geq\varepsilon^2} f_X(z)\,\mathrm{d}z \geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} \varepsilon^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} \underbrace{(z - \mu_X)^2}_{\geq\varepsilon^2} f_X(z)\,\mathrm{d}z \geq \varepsilon^2 \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} f_X(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X|<\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \geq \varepsilon^2 \int_{|z-\mu_X|\geq\varepsilon} f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \varepsilon^2\, \mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

Teorema (disuguaglianza di Chebyshev per variabili aleatorie)

Per qualsiasi v.a. X vale la disuguaglianza

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\varepsilon^2} \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z-\mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z + \int_{|z-\mu_X| < \varepsilon} (z - \mu_X)^2 f_X(z)\ \mathrm{d}z \\
&\geq \int_{|z-\mu_X| \geq \varepsilon} (z - \mu_X)^2\, f_X(z)\,\mathrm{d}z \geq \varepsilon^2 \int_{|z-\mu_X| \geq \varepsilon} f_X(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \varepsilon^2\, \mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq \varepsilon\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2} \geq \mathbb{P}\left(|X - \mu_X| \geq \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

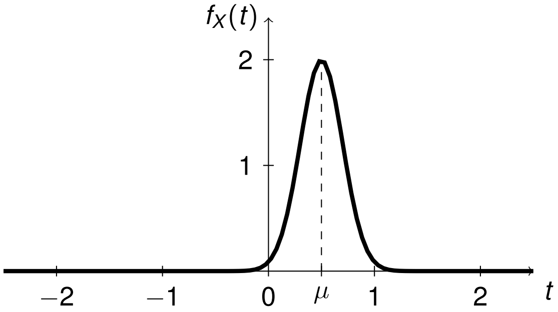
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



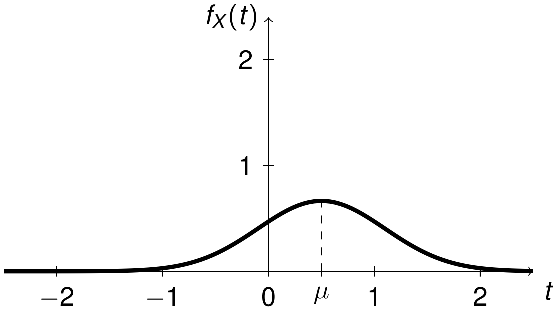
$\mu = 0.5$
$\sigma = 0.2$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



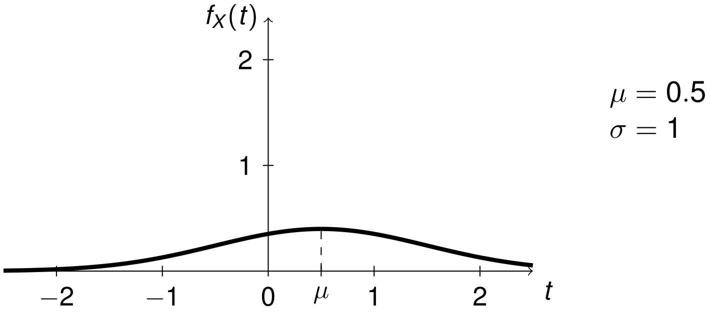
$\mu = 0.5$
$\sigma = 0.6$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

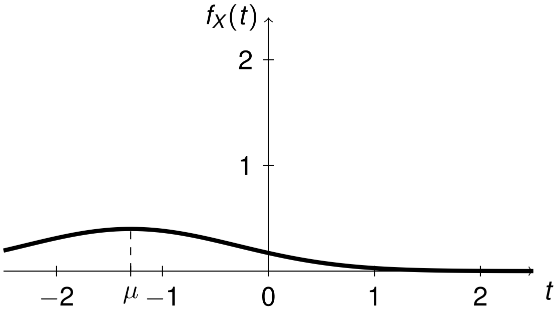


Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



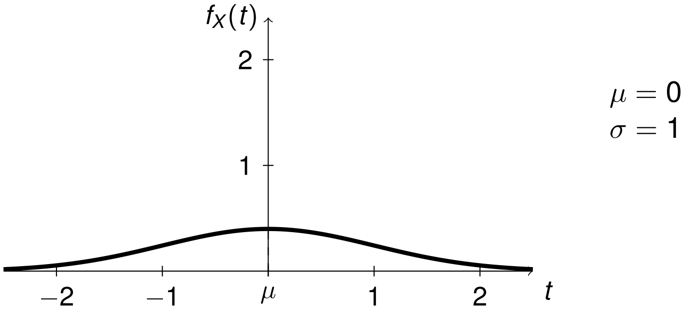
$\mu = -1.3$
$\sigma = 1$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

è la densità *gaussiana* (o *normale*) di parametri μ e σ^2 :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



$N(0, 1)$ è la densità *normale standard*

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$ (per la simmetria)

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a} - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a} - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{|a|\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t - \quad a\mu - b}{a\,\sigma}\right)^2\right]$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{|a|\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-(a\mu+b)}{|a|\sigma}\right)^2\right]$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b, (|a|\,\sigma)^2\right)$:

$$f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{|a|\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-(a\mu+b)}{|a|\sigma}\right)^2\right]$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q_{0.5}^X = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma_X^2 = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\,(|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione)

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione) :

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \frac{-\mu}{\sigma}$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione) :

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \frac{-\mu}{\sigma} \sim N\left(\frac{1}{\sigma}\mu + \frac{-\mu}{\sigma}\,,\, \left(\left|\frac{1}{\sigma}\right|\,\sigma\right)^2\right)$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\ (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione):

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \frac{-\mu}{\sigma} \sim N\left(\frac{1}{\sigma}\mu + \frac{-\mu}{\sigma}\,,\ \left(\left|\frac{1}{\sigma}\right|\sigma\right)^2\right) = N(0,1)$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione)
- La f.d.r. di $N(0,1)$ si indica con Φ e si trova tabulata

Tavola della funzione di ripartizione della distribuzione N(0,1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524

$$\Phi(0.36) =$$
$$= \Phi(0.3+0.06)$$
$$= 0.64058$$

Densità gaussiana

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0 \text{ fissati}$$

PROPRIETÀ:

- $\mu_X = q^X_{0.5} = \mu$ (per la simmetria)
- $\sigma^2_X = \sigma^2$ (col calcolo)
- $aX + b \sim N\left(a\mu + b\,,\, (|a|\,\sigma)^2\right)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (standardizzazione)
- La f.d.r. di $N(0,1)$ si indica con Φ e si trova tabulata

Tavola della funzione di ripartizione della distribuzione N(0,1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524

$$\Phi(0.36) =$$
$$= \Phi(0.3 + 0.06)$$
$$= 0.64058$$
$$q_{0.64058} = 0.36$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\ 0 \qquad < \quad X \qquad < \quad 5.1 \qquad \right)$$

ESEMPIO:

$$X \sim N(\underbrace{3.2}_{\mu},\ 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(0 - 3.2 \quad < \quad X - \mu \quad < \quad 5.1 - 3.2 \right)$$

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\,,\,\underbrace{7.6}_{\sigma^2})$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\
&= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)
\end{aligned}$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\;,\;\,7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327

$$\Phi(0.689) =$$

$$= \Phi(0.6+0.09)$$

$$= 0.75490$$

ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2\ ,\ 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}} \right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1 - 3.2}{\sqrt{7.6}} \right) - \Phi\left(\frac{0 - 3.2}{\sqrt{7.6}} \right)$$

$$= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)$$

$$= 0.75490$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774

$$\Phi(-1.161) =$$

$$= 1 - \Phi(1.161)$$

$$= 1 - 0.87698$$

ESEMPIO:

$$X \sim N(3.2\ ,\ 7.6)$$

Voglio calcolare

$$\mathbb{P}(0 < X < 5.1) = \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right)$$

$$= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161)$$

$$= 0.75490 - (1 - 0.87698)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774

$$\Phi(-1.161) =$$

$$= 1 - \Phi(1.161)$$

$$= 1 - 0.87698$$

Densità gaussiana

ESEMPIO:

$$X \sim N(\,3.2\ ,\ 7.6\,)$$

Voglio calcolare

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\,(0 < X < 5.1) &= \mathbb{P}\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{5.1-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-3.2}{\sqrt{7.6}}\right) \\
&= \Phi(0.689) - \Phi(-1.161) \\
&= 0.75490 - (1 - 0.87698) \\
&= 0.63188 = 63.188\%
\end{aligned}$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

S è un insieme discreto quando tutti i suoi punti sono isolati

$\Rightarrow$ S è finito o al più numerabile

Variabili aleatorie discrete

Definizione

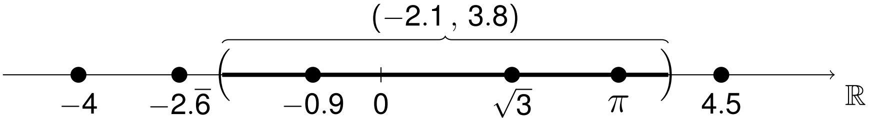
Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

S è un insieme discreto quando tutti i suoi punti sono isolati

$\Rightarrow$ S è finito o al più numerabile

ESEMPIO: $S = \{-4,\ -2.\overline{6},\ -0.9,\ \sqrt{3},\ \pi,\ 4.5\}$ $\qquad I = (-2.1\,,\,3.8)$



Si richiede $\mathbb{P}(X \in (-2.1\,,\,3.8)) = \mathbb{P}\left(X \in \{-0.9,\ \sqrt{3},\ \pi\}\right)$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$:

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S)$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$:

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R})$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$:

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R} \cap S) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S)$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}(\text{“}X = k_1\text{”} \vee \ldots \vee \text{“}X = k_n\text{”})$$

con $I \cap S = \{k_1, \ldots, k_n\}$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}(\text{“}X = k_1\text{”} \vee \ldots \vee \text{“}X = k_n\text{”})$$

$$\overset{(3)}{=} \mathbb{P}(X = k_1) + \ldots + \mathbb{P}(X = k_n) \qquad \text{con } I \cap S = \{k_1, \ldots, k_n\}$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) = \mathbb{P}(\text{“}X = k_1\text{”} \vee \ldots \vee \text{“}X = k_n\text{”})$$

$$= \mathbb{P}(X = k_1) + \ldots + \mathbb{P}(X = k_n) \qquad \text{con } I \cap S = \{k_1, \ldots, k_n\}$$

$$= \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0, 1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0, 1]$ per ogni $k \in S$ (positività)

  perché $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0,1]$ per ogni $k \in S$ (positività)
- $\sum_{k \in S} p_X(k) = 1$ (normalizzazione)

  perché $\mathbb{P}(X \in S) = 1$

Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una v.a. X si dice *discreta* se esiste un insieme discreto $S \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap S) \qquad \text{per ogni } I \subseteq \mathbb{R}$$

- S è il *supporto* di X, e soddisfa $\mathbb{P}(X \in S) = 1$
- la *densità discreta* (o *funzione di massa di probabilità*) di X è

$$p_X : S \to [0,1] \qquad\qquad p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

- $\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{k \in I \cap S} p_X(k)$ per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$
- $p_X(k) \in [0,1]$ per ogni $k \in S$ (positività)
- $\sum_{k \in S} p_X(k) = 1$ (normalizzazione)

$\left.\begin{array}{l}\text{(positività)}\\ \text{(normalizzazione)}\end{array}\right\}$ proprietà fondamentali

ESEMPIO:

$X =$ numero che uscirà nel lancio di un dado

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to [0, 1]$$

Variabili aleatorie discrete

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to [0, 1]$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} p_X(k) = \mathbb{P}\left(X = k\right) = \mathbb{P}\left(\text{“uscirà } k\text{”}\right) \\ \text{tutti i } k \in S \text{ sono equiprobabili} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$p_X(k) = p_X(k') \quad \forall k, k' \in S$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{array}{c} p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\text{“uscirà } k\text{”}) \\ \text{tutti i } k \in S \text{ sono equiprobabili} \end{array}}_{\begin{array}{c}\Downarrow \\ p_X(k) = p_X(k') \quad \forall k, k' \in S\end{array}} \qquad \sum_{k \in S} p_X(k) = 1}$$

$$\Downarrow$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to [0, 1] \\ p_X(k) = \dfrac{1}{6} \quad \forall k \in S \end{array}$$

p_X si chiama densità *uniforme discreta* su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

Variabili aleatorie discrete

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

p_X si chiama densità *uniforme discreta* su $\{1,2,3,4,5,6\}$ e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1,2,3,4,5,6\})$$

$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = ???$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to [0, 1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

p_X si chiama densità *uniforme discreta* su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

$$\mathbb{P}(2.3 \leq X < 5) = \sum_{k \in \{3,4\}} p_X(k)$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$

p_X si chiama densità *uniforme discreta* su $\{1,2,3,4,5,6\}$ e si scrive

$$X \sim \mathcal{U}(\{1,2,3,4,5,6\})$$

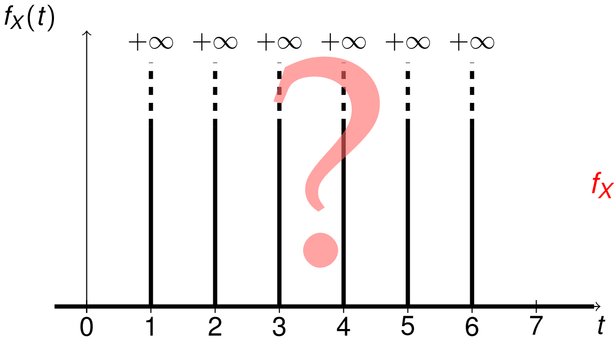
$$\mathbb{P}\,(2.3 \leq X < 5) = \sum_{k \in \{3,4\}} p_X(k) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$



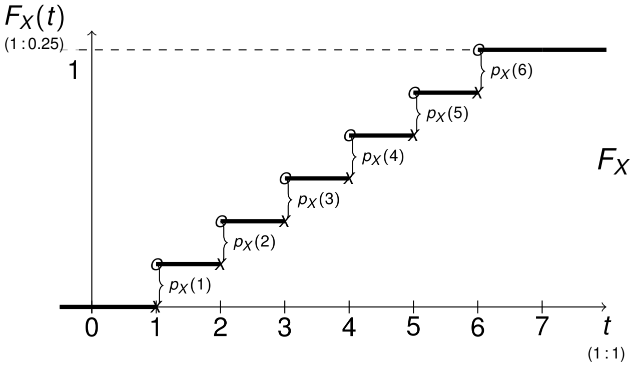
f_X non esiste!!!

ESEMPIO:

$$X = \text{numero che uscirà nel lancio di un dado}$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{1,2,3,4,5,6\} \to [0,1]$$

$$p_X(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in S$$



$$F_X(t) = \sum_{\substack{k \le t \\ k \in S}} p_X(k)$$

Variabili aleatorie discrete

X assolutamente continua		X discreta
$\displaystyle\int_I \dots f_X(z)\,\mathrm{d}z$	$\longrightarrow$	$\displaystyle\sum_{k \in I \cap S} \dots p_X(k)$

Variabili aleatorie discrete

X assolutamente continua		X discreta
$\displaystyle\int_I \dots f_X(z)\,\mathrm{d}z$	$\longrightarrow$	$\displaystyle\sum_{k\in I\cap S} \dots p_X(k)$

Definizioni

Il *valore atteso* e la *varianza* di una v.a. discreta X sono i numeri reali

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\in S} k\, p_X(k) \qquad \mathrm{var}[X] = \sum_{k\in S} (k - \mathbb{E}[X])^2\, p_X(k)$$

Variabili aleatorie discrete

X assolutamente continua		X discreta
$\displaystyle\int_I \dots f_X(z)\,\mathrm{d}z$	$\longrightarrow$	$\displaystyle\sum_{k\in I\cap S} \dots p_X(k)$

Definizioni

Il *valore atteso* e la *varianza* di una v.a. discreta X sono i numeri reali

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\in S} k\, p_X(k) \qquad \operatorname{var}[X] = \sum_{k\in S} (k - \mathbb{E}[X])^2\, p_X(k)$$

Teorema (non dimostrato)

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{k\in S} g(k)\, p_X(k)$$

Valgono le stesse proprietà e gli stessi risultati del caso continuo

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{c\} \to [0, 1]$$

Variabili aleatorie costanti

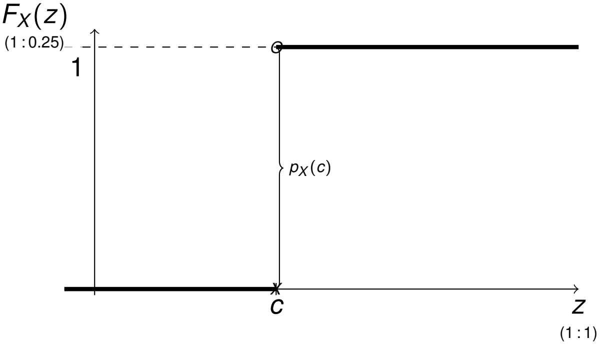
$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ & p_X(c) = 1 \end{aligned}$$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$



Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ & p_X(c) = 1 \end{aligned}$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k \, p_X(k)$

Variabili aleatorie costanti

$$X = c \qquad \text{qualunque sia il risultato dell'esperimento}$$

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k\, p_X(k) = c \cdot p_X(c)$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & p_X : \{c\} \to [0, 1] \\ & p_X(c) = 1 \end{aligned}$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k \, p_X(k) = c \cdot p_X(c)$

  $= c \cdot 1 = c$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0,1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\mathrm{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 \, p_X(k)$

Variabili aleatorie costanti

$$X = c \qquad \text{qualunque sia il risultato dell'esperimento}$$

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0,1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\operatorname{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 p_X(k) = (c - c)^2 \cdot p_X(c)$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0,1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\operatorname{var}[X] = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}[X])^2 \, p_X(k) = (c - c)^2 \cdot p_X(c)$

  $= (c - c)^2 \cdot 1 = 0$

Variabili aleatorie costanti

$X = c$ qualunque sia il risultato dell'esperimento

$$S = \{c\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{c\} \to [0,1] \\ p_X(c) = 1 \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = c$
- $\mathrm{var}[X] = 0$

$$\mathrm{var}[X] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ è una costante}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & p_X : \{0,1\} \to [0,1] \\ & p_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \\ & p_X(1) = \mathbb{P}(X=1) \end{aligned}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & p_X : \{0, 1\} \to [0, 1] \\ & p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) \\ & p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) \end{aligned}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{0,1\} \to [0,1] \\ \left.\begin{array}{l} p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{array}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E) \end{array}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{array}{l} p_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{array}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

p_X si chiama densità *bernoulliana di parametro q* e si scrive

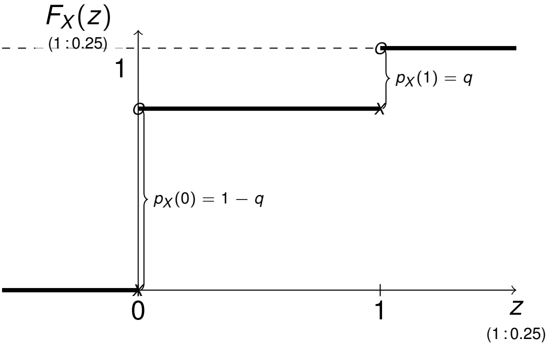
$$X \sim B(1,q)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$



Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{array}{l} p_X(0) = \mathbb{P}\left(X = 0\right) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) = \mathbb{P}\left(X = 1\right) = \mathbb{P}\left(E\right) = q \end{array}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}\left(E\right)$$

- $\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{k \in S} k \, p_X(k)$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{array}{l} p_X(0) = \mathbb{P}\left(X = 0\right) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) = \mathbb{P}\left(X = 1\right) = \mathbb{P}\left(E\right) = q \end{array}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}\left(E\right)$$

- $\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{k \in S} k\, p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1)$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k\, p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1)$$
  $$= 0 \cdot (1 - q) + 1 \cdot q$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k \in S} k\, p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) \\ &= 0 \cdot (1-q) + 1 \cdot q \\ &= q \end{aligned}$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{array}{l} p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{array}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2$ perché $X^2 = X$ $\begin{pmatrix} 1^2 = 1 \\ 0^2 = 0 \end{pmatrix}$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_X : \{0,1\} \to [0,1] \\ \left.\begin{array}{l} p_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{array}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E) \end{array}$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2$

  $= q - q^2$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0, 1\} \to [0, 1]$$

$$\left.\begin{array}{l} p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{array}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2$

$$= q - q^2$$

$$= q(1 - q)$$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1-q \\ p_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = q \end{aligned}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = q(1-q)$

Variabili aleatorie bernoulliane

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se succederà l'evento } E \\ 0 & \text{se succederà l'evento } \overline{E} \end{cases}$$

$$S = \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad p_X : \{0,1\} \to [0,1]$$

$$\left.\begin{array}{l} p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - q \\ p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = q \end{array}\right\} \text{con } q := \mathbb{P}(E)$$

- $\mathbb{E}[X] = q$
- $\mathrm{var}[X] = q(1-q)$

Vettori aleatori

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4° studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17° studente

$Y_4 =$ peso del 4° studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17° studente

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4º studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17º studente

$Y_4 =$ peso del 4º studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17º studente

Tra loro le variabili alatorie si possono sommare, moltiplicare ecc. :

$$X + Y \qquad XY \qquad \ldots$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X, Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)**):**

$$\mathrm{var}[X+Y] = \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - \mathbb{E}[X+Y]\}^2\right]$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$$\mathrm{var}[X+Y] = \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - \mathbb{E}[X+Y]\}^2\right]$$

$$\overset{\text{(I)}}{=} \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])\}^2\right]$$

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)**):**

$$\operatorname{var}[X+Y] = \mathbb{E}\left[\{(X+Y) - \mathbb{E}[X+Y]\}^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\{(X-\mathbb{E}[X]) + (Y-\mathbb{E}[Y])\}^2\right]$$

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)**):**

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}[X+Y] &= \mathbb{E}\left[\{(X+Y)-\mathbb{E}[X+Y]\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\{(X-\mathbb{E}[X])+(Y-\mathbb{E}[Y])\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2+(Y-\mathbb{E}[Y])^2+2(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right]
\end{aligned}$$

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\mathrm{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}[X+Y] &= \mathbb{E}\left[\{(X+Y)-\mathbb{E}[X+Y]\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\{(X-\mathbb{E}[X])+(Y-\mathbb{E}[Y])\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2+(Y-\mathbb{E}[Y])^2+2\,(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right] \\
&\overset{(I)}{=} \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]+\mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}[Y])^2\right]+2\,\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right]
\end{aligned}
$$

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

DIMOSTRAZIONE (solo di (II)):

$$\operatorname{var}[X+Y] =$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]}_{\operatorname{var}[X]} + \underbrace{\mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}[Y])^2\right]}_{\operatorname{var}[Y]} + \underbrace{2\,\mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\Big]}_{\operatorname{cov}[X,Y]}$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

Per n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i] + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right]$$

Vettori aleatori

Teorema

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. $\operatorname{var}[X+Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X,Y]$

   dove la *covarianza* di X e Y è

   $\operatorname{cov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

Per n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i] + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right]$$

Come mi sbarazzo di $\operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right]$?

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\qquad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

$X, \ Y$ indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio	$Y =$ risultato del secondo lancio

$X + Y =$ somma dei due risultati

$X, \ X + Y$ NON indipendenti

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$X + Y =$ somma dei due risultati

$X, \; Y, \; X + Y$ NON indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4$^{\rm o}$ studente $X_{17} =$ altezza del 17$^{\rm o}$ studente

$Y_4 =$ peso del 4$^{\rm o}$ studente $Y_{17} =$ peso del 17$^{\rm o}$ studente

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4º studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17º studente

$Y_4 =$ peso del 4º studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17º studente

$X_4, \; X_{17}$ indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$\boxed{X_4 = \text{altezza del } 4^{\text{o}} \text{ studente}}$ $\quad X_{17} =$ altezza del 17^{o} studente

$Y_4 =$ peso del 4^{o} studente $\quad \boxed{Y_{17} = \text{peso del } 17^{\text{o}} \text{ studente}}$

$X_4, \; Y_{17}$ indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{ somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4º studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17º studente

$Y_4 =$ peso del 4º studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17º studente

$X_4, \; Y_4$ NON indipendenti

Indipendenza

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$X =$ risultato del primo lancio $\quad Y =$ risultato del secondo lancio

$$X + Y = \text{somma dei due risultati}$$

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$X_4 =$ altezza del 4° studente $\quad X_{17} =$ altezza del 17° studente

$Y_4 =$ peso del 4° studente $\quad Y_{17} =$ peso del 17° studente

$X_4, \; Y_4, \; X_{17}, \; Y_{17}$ NON indipendenti

Indipendenza

Definizione (per 2 variabili aleatorie)

Le v.a. X, Y si dicono *indipendenti* se

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{“}X \in I\text{”} \wedge \text{“}Y \in J\text{”}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(X \in I\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y \in J\right)\end{aligned}$$

per ogni possibile scelta di $I, J \subseteq \mathbb{R}$

Indipendenza

Definizione (per n variabili aleatorie)

Le v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si dicono *indipendenti* se

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{“}X_1 \in I_1\text{”} \wedge \text{“}X_2 \in I_2\text{”} \wedge \ldots \wedge \text{“}X_n \in I_n\text{”}) &= \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in I_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in I_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \in I_n)\end{aligned}$$

per ogni possibile scelta di $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$

Indipendenza

Definizione (per n variabili aleatorie)

Le v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si dicono *indipendenti* se

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{“}X_1 \in I_1\text{”} \wedge \text{“}X_2 \in I_2\text{”} \wedge \ldots \wedge \text{“}X_n \in I_n\text{”}\right) &= \\ &= \mathbb{P}\left(X_1 \in I_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_2 \in I_2\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(X_n \in I_n\right)\end{aligned}$$

per ogni possibile scelta di $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}\left[X_i\right]$$

Indipendenza

Definizione (per n variabili aleatorie)

Le v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si dicono *indipendenti* se

$$\mathbb{P}\left(\text{“}X_1 \in I_1\text{”} \wedge \text{“}X_2 \in I_2\text{”} \wedge \ldots \wedge \text{“}X_n \in I_n\text{”}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(X_1 \in I_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_2 \in I_2\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(X_n \in I_n\right)$$

per ogni possibile scelta di $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left[X_i\right]$$

ATTENZIONE: Non vale il viceversa

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$ linearità di $\mathbb{E}$

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$ linearità di $\mathbb{E}$
- $\mathrm{var}[X - Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[-Y]$ indipendendenza di X, Y

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\mathrm{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$ linearità di $\mathbb{E}$
- $\mathrm{var}[X - Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[-Y]$ indipendendenza di X, Y

  $= \mathrm{var}[X] + (-1)^2 \mathrm{var}[Y]$ quadraticità di var

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$. In particolare,

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}\left[X - Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] - \mathbb{E}\left[Y\right]$ — linearità di $\mathbb{E}$
- $\operatorname{var}\left[X - Y\right] = \operatorname{var}\left[X\right] + \operatorname{var}\left[-Y\right]$ — indipendendenza di X, Y
  $= \operatorname{var}\left[X\right] + (-1)^2 \operatorname{var}\left[Y\right]$ — quadraticità di var
  $= \operatorname{var}\left[X\right] + \operatorname{var}\left[Y\right]$

Indipendenza

Teorema (non dimostrato)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora $\operatorname{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0$ quando $i \neq j$.
In particolare,

$$\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}\left[X_i\right]$$

ESEMPIO: Se X e Y sono indipendenti,

- $\mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$ linearità di $\mathbb{E}$
- $\operatorname{var}[X - Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[-Y]$ indipendendenza di X, Y

  $= \operatorname{var}[X] + (-1)^2 \operatorname{var}[Y]$ quadraticità di var

  $= \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y]$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

3. le prove non si influenzano tra loro

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

3. le prove non si influenzano tra loro

$$Y = \text{numero di successi nelle } n \text{ prove}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

3. le prove non si influenzano tra loro

$$Y = \text{numero di successi nelle } n \text{ prove}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \;\; \text{per ogni } i = 1, \dots, n$$

3. le prove non si influenzano tra loro

$$Y = \text{numero di successi nelle } n \text{ prove}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \ \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n$$

3. le prove non si influenzano tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{ sono indipendenti}$$

$$Y = \text{numero di successi nelle } n \text{ prove}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \;\; \text{per ogni } i = 1, \ldots, n$$

3. le prove non si influenzano tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \;\; \text{sono indipendenti}$$

$$\begin{aligned} Y &= \text{numero di successi nelle } n \text{ prove} \\ &= X_1 + X_2 + \ldots + X_n \end{aligned}$$

Prove di Bernoulli

Progettiamo di fare n prove t.c.:

1. ogni prova può avere solo due esiti (successo o insuccesso)

$$\Rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. tutte le prove hanno la stessa probabilità di successo q

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \ \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n$$

3. le prove non si influenzano tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{ sono indipendenti}$$

> $X_1, \ldots, X_n$ sono
> (i.) ndipendenti e
> (i.) denticamente
> (d.) istribuite

$$\begin{aligned} Y &= \text{numero di successi nelle } n \text{ prove} \\ &= X_1 + X_2 + \ldots + X_n \end{aligned}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = ???$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$ linearità di $\mathbb{E}$

  $= \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{q} + \underbrace{\mathbb{E}[X_2]}_{q} + \ldots + \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{q} \qquad X_i \sim B(1, q) \quad \text{per ogni } i$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{q} + \underbrace{\mathbb{E}[X_2]}_{q} + \ldots + \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{q} \\ &= nq \end{aligned}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = ???$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$ indipendenza delle X_i

  $= \mathrm{var}[X_1] + \mathrm{var}[X_2] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

$$= \underbrace{\mathrm{var}[X_1]}_{q(1-q)} + \underbrace{\mathrm{var}[X_2]}_{q(1-q)} + \ldots + \underbrace{\mathrm{var}[X_n]}_{q(1-q)} \qquad X_i \sim B(1, q) \quad \text{per ogni } i$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]$

$$= \underbrace{\mathrm{var}[X_1]}_{q(1-q)} + \underbrace{\mathrm{var}[X_2]}_{q(1-q)} + \ldots + \underbrace{\mathrm{var}[X_n]}_{q(1-q)}$$

$$= nq(1-q)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = nq(1-q)$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}\left[Y\right] = nq$
- $\mathrm{var}\left[Y\right] = nq(1-q)$
- $p_Y(k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) q^k (1-q)^{n-k}$ per ogni $k \in S = \{0,\, 1,\, 2, \ldots,\, n\}$

dove $\underbrace{\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\text{coefficiente binomiale di } n \text{ su } k}$

p_Y è la densità *binomiale* di parametri n e q:

$$Y \sim B(n,\, q)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$
- $\mathrm{var}[Y] = nq(1-q)$
- $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ per ogni $k \in S = \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n\}$

dove $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \#\{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \mid \#I = k\}$

Per esempio, con $n = 3$ e $k = 2$:

$$\{I \subseteq \{1,2,3\} \mid \#I = 2\} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

$$\Rightarrow \quad \binom{3}{2} = \# \quad " \quad " \quad " \quad = 3$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\underbrace{\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”}}_{\text{successo nelle prove } I}$$

Per esempio, con $I = \{1, 3\}$:

$$\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \ = \ \text{“}X_1 = 1\text{”} \wedge \text{“}X_3 = 1\text{”}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\underbrace{\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right)}_{\text{successo solo nelle prove } I}$$

Per esempio, con $I = \{1, 3\}$ e $n = 3 \quad \Rightarrow \quad I^c = \{2\}$:

$$\bigwedge_{i \in I^c} \text{“}X_i = 0\text{”} = \text{“}X_2 = 0\text{”}$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\underbrace{\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \# I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right]}_{\text{esattamente } k \text{ successi}}$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}\,(Y = k) \;=\; \mathbb{P}\underbrace{\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)}_{\text{esattamente } k \text{ successi}}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}\left(Y = k\right) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}\left(X_i = 1\right) \right) \times \left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}\left(X_j = 0\right) \right) \qquad \text{indipendenza}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left(\prod_{i \in I} \underbrace{\mathbb{P}(X_i = 1)}_{q} \right) \times \left(\prod_{j \in I^c} \underbrace{\mathbb{P}(X_j = 0)}_{1-q} \right)$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \underbrace{\left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = 1) \right)}_{q^k} \times \underbrace{\left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}(X_j = 0) \right)}_{(1-q)^{n-k}}$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = 1) \right)}_{q^k} \times \underbrace{\left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}(X_j = 0) \right)}_{(1-q)^{n-k}}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = 1) \right) \times \left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}(X_j = 0) \right)$$

$$= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$$

Prove di Bernoulli

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{con} \quad X_1, \ldots, X_n \ \text{i.i.d.} \quad \text{e} \quad X_i \sim B(1, q)$$

DIMOSTRAZIONE di $p_Y(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ **:**

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left[\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \mathbb{P}\left(\left(\bigwedge_{i \in I} \text{“}X_i = 1\text{”} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I^c} \text{“}X_j = 0\text{”} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{t.c. } \#I = k}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = 1) \right) \times \left(\prod_{j \in I^c} \mathbb{P}(X_j = 0) \right)$$

$$= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$$

Densità di Poisson

$$\overbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}^{\text{1 anno}}$$

$Y =$ numero di terremoti in un anno

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}}$$

Densità di Poisson

$$\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{1^{\text{o}}\text{ semestre}}\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{2^{\text{o}}\text{ semestre}}}^{\text{1 anno}}$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo semestre, $\quad i = 1, 2$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + X_2$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]$$

Densità di Poisson

$$\overbrace{\underbrace{\rule{6cm}{0.4pt}}_{1^{\text{o}}\ \text{semestre}}\underbrace{\rule{6cm}{0.4pt}}_{2^{\text{o}}\ \text{semestre}}}^{1\ \text{anno}}$$

X_i = numero di terremoti nell'i-esimo semestre, $\quad i = 1, 2$

Y = numero di terremoti in un anno $= X_1 + X_2$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$\Rightarrow \quad X_1, X_2 \qquad$ sono i.i.d.

Densità di Poisson

$$\overbrace{\underbrace{\rule{6cm}{1pt}}_{1^{\text{o}}\text{ semestre}}\underbrace{\rule{6cm}{1pt}}_{2^{\text{o}}\text{ semestre}}}^{1\text{ anno}}$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo semestre, $\quad i = 1, 2$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + X_2$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]}_{\text{tutti uguali}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{2}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$\Rightarrow \quad X_1, X_2 \qquad$ sono i.i.d.

Densità di Poisson

$$\overbrace{\underbrace{\rule{5cm}{0.4pt}}_{1^{\text{o}}\text{ quadrimestre}}\underbrace{\rule{5cm}{0.4pt}}_{2^{\text{o}}\text{ quadrimestre}}\underbrace{\rule{5cm}{0.4pt}}_{3^{\text{o}}\text{ quadrimestre}}}^{1\text{ anno}}$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo quadrimestre, $\quad i = 1, 2, 3$

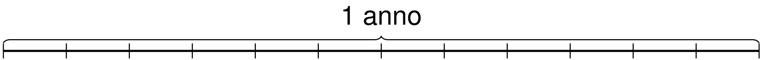
$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + X_2 + X_3$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3]}_{\text{tutti uguali}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{3}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, X_2, X_3 \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson



$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo mese, $\quad i = 1, \ldots, 12$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_{12}$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_{12}]}_{\text{tutti uguali}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{12}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_{12} \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson

1 anno

X_i = numero di terremoti nell'i-esima settimana, $\quad i = 1, \ldots, 52$

Y = numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_{52}$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_{52}]}_{\text{tutti uguali}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{52}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_{52} \quad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson

1 anno

X_i = numero di terremoti nell'i-esimo giorno, $\quad i = 1, \ldots, 365$

Y = numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_{365}$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = 3.72}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_{365}]}_{\text{tutti uguali}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{3.72}{365}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_{365} \quad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson

$$\overbrace{|\,|\,|\,|\,|\,|\,\cdots\,|\,|\,|\,|\,|\,|}^{\text{1 anno}}$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo istante, $\quad i = 1, \ldots, n$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_n$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = \quad \lambda}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]}_{\text{tutti uguali}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}[X_i] = \frac{\lambda}{n}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \qquad \text{sono i.i.d.}$$

Densità di Poisson

$$\overbrace{\hspace{10cm}}^{1 \text{ anno}}$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo istante, $\quad i = 1, \dots, n$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \dots + X_n$

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y] = \lambda}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n]}_{\text{tutti uguali}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = \frac{\lambda}{n}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

  $\Rightarrow \quad X_1, \dots, X_n \qquad$ sono i.i.d.

- n grande $\quad \Rightarrow \quad$ le X_i possono prendere solo valori $\{0, 1\}$

  $\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{E}[X_i] = \frac{\lambda}{n} \quad$ piccolo

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Uparrow$$

$X_i =$ numero di terremoti nell'i-esimo istante, $\quad i = 1, \ldots, n$

$Y =$ numero di terremoti in un anno $= X_1 + \ldots + X_n$

$$\underbrace{\mathbb{E}\,[Y] = \quad \lambda}_{\text{fissato}} = \underbrace{\mathbb{E}\,[X_1] + \ldots + \mathbb{E}\,[X_n]}_{\text{tutti uguali}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}\,[X_i] = \frac{\lambda}{n}$$

- periodi diversi hanno andamento simile senza influenzarsi tra loro

$$\Rightarrow \quad X_1, \ldots, X_n \qquad \text{sono i.i.d.}$$

- n grande $\quad \Rightarrow \quad$ le X_i possono prendere solo valori $\{0, 1\}$

$$\Rightarrow \quad X_i \sim B(1, q) \quad \text{con} \quad q = \mathbb{E}\,[X_i] = \frac{\lambda}{n} \quad \text{piccolo}$$

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Y ha (circa!) densità *di Poisson* (o *poissoniana*) di parametro λ

$$Y \approx \mathcal{P}(\lambda)$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$p_Y(k) \;=\; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$p_Y(k) \;=\; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \end{aligned}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\, q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \end{aligned}$$

$$\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$p_Y(k) \;=\; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}}\frac{n!}{n^k\,(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n^k + O(n^{k-1})}{n^k}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} p_Y(k) \; &= \; \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \; = \; \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \; \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}}\underbrace{\frac{n!}{n^k\,(n-k)!}}_{\to 1} \end{aligned}$$

$$\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n^k + O(n^{k-1})}{n^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}
p_Y(k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}}\underbrace{\frac{n!}{n^k\,(n-k)!}}_{\to 1} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq$ perché $Y \sim B(n, q)$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n, q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}[Y] = nq \underset{\substack{n\to\infty \\ q\to 0 \\ nq=\lambda}}{\longrightarrow} \lambda$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\,[Y] = \lambda$
- $\mathrm{var}\,[Y] = nq(1-q)$ perché $Y \sim B(n, q)$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\left[Y\right] = \lambda$
- $\operatorname{var}\left[Y\right] = nq(1-q) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ q\to 0 \\ nq=\lambda}]{} \lambda \cdot 1$

Densità di Poisson

$$Y \sim B(n\,,\,q) \quad \text{con} \quad n \to \infty, \quad q \to 0, \quad nq = \lambda \approx 1$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con} \quad k \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbb{E}\,[Y] = \lambda$
- $\mathrm{var}\,[Y] = \lambda$

Riproducibilità

Qual è la densità di $X + Y$ se conosco la densità di X e quella di Y?

Riproducibilità

Teorema

Se $X \sim B(m, q)$ e $Y \sim B(n, q)$ (con lo stesso parametro q) sono indipendenti, allora $X + Y \sim B(m + n, q)$

Riproducibilità

Teorema

Se $X \sim B(m, q)$ e $Y \sim B(n, q)$ (con lo stesso parametro q) sono indipendenti, allora $X + Y \sim B(m + n, q)$

DIMOSTRAZIONE:

$X + Y =$ numero di successi in $m + n$ prove indipendenti e tutte con la stessa probabilità di successo q

$\sim B(m + n, q)$

Riproducibilità

Teorema

Se $X \sim B(m, q)$ e $Y \sim B(n, q)$ (con lo stesso parametro q) sono indipendenti, allora $X + Y \sim B(m + n, q)$

Teorema

Se $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sono indipendenti, allora $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Riproducibilità

Teorema

Se $X \sim B(m, q)$ e $Y \sim B(n, q)$ (con lo stesso parametro q) sono indipendenti, allora $X + Y \sim B(m + n, q)$

Teorema

Se $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sono indipendenti, allora $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Teorema (non dimostrato)

Se $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ sono indipendenti, allora

$$X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y,\ \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

Metodo delta

Come si calcola $\mathbb{E}[g(X)]$ o $\mathbb{E}[g(X, Y)]$?

Metodo delta

Come si calcola $\mathbb{E}\left[g(X)\right]$ o $\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right]$?

- Se X è continua, sappiamo che

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

  Ma l'integrale potrebbe essere difficile!

Metodo delta

Come si calcola $\mathbb{E}[g(X)]$ o $\mathbb{E}[g(X, Y)]$?

- Se X è continua, sappiamo che

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, f_X(z)\, \mathrm{d}z$$

Ma l'integrale potrebbe essere difficile!

- Se $g(X, Y) = X + Y$, sappiamo che

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

Ma $g(X, Y)$ potrebbe essere una funzione più complicata!

Metodo delta

Teorema

- In prima approssimazione,

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)\right] \simeq g(\mu_X, \mu_Y)$$

Metodo delta

Teorema

- In prima approssimazione,
$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)\right] \simeq g(\mu_X,\mu_Y)$$
- In prima approssimazione, se X e Y sono indipendenti,
$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left[g(X,Y)\right] \;\simeq\; & \left[\partial_1 g\left(\mu_X,\mu_Y\right)\right]^2 \operatorname{var}\left[X\right] \; + \\ & + \; \left[\partial_2 g\left(\mu_X,\mu_Y\right)\right]^2 \operatorname{var}\left[Y\right]\end{aligned}$$

dove

$$\partial_1 g\left(\mu_X,\mu_Y\right) = \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)} \qquad \partial_2 g\left(\mu_X,\mu_Y\right) = \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)}$$

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) = g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y) + \\ + \dots$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y) + \cancel{+\ldots}$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(X - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(Y - \mu_Y)$$

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

$$\mathbb{E}\,[g(X, Y)] \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \qquad \text{linearità di } \mathbb{E}$$

$$+ \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)\,\mathbb{E}\,[X - \mu_X] + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)\,\mathbb{E}\,[Y - \mu_Y]$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

$$\mathbb{E}\,[g(X, Y)] \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \qquad \text{linearità di } \mathbb{E}$$

$$+\,\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\mathbb{E}\,[X - \mu_X]}_{=\mu_X - \mu_X} + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\mathbb{E}\,[Y - \mu_Y]}_{=\mu_Y - \mu_Y}$$

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

$$\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] \simeq g(\mu_X, \mu_Y) +$$

$$+\,\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\left[X - \mu_X\right]}}_{=\mu_X - \mu_X} + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\left[Y - \mu_Y\right]}}_{=\mu_Y - \mu_Y}$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] &\simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \\ &\quad + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\left[X - \mu_X\right]}}_{=\mu_X - \mu_X} + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)\underbrace{\cancel{\mathbb{E}\left[Y - \mu_Y\right]}}_{=\mu_Y - \mu_Y} \\ &= g(\mu_X, \mu_Y) \end{aligned}$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}}(Y - \mu_Y)$$

Per calcolare $\mathrm{var}\,[g(X, Y)]$, uso la formula

$\mathrm{var}\,[aX + bY + c] = a^2\mathrm{var}\,[X] + b^2\mathrm{var}\,[Y]$ se X e Y sono indipendenti

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=c} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=a}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=b}(Y - \mu_Y)$$

Per calcolare $\mathrm{var}\,[g(X, Y)]$, uso la formula

$\mathrm{var}\,[aX + bY + c] = a^2 \mathrm{var}\,[X] + b^2 \mathrm{var}\,[Y]$ se X e Y sono indipendenti

$$\mathrm{var}\,[g(X, Y)] \simeq$$

$$\simeq [\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2\, \mathrm{var}\,[X - \mu_X] + [\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2\, \mathrm{var}\,[Y - \mu_Y]$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x, y) \simeq g(\mu_X, \mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)(x - \mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)(y - \mu_Y)$$

$$g(X, Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=c} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=a}(X - \mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)}_{\text{costante}=b}(Y - \mu_Y)$$

Per calcolare $\mathrm{var}\,[g(X, Y)]$, uso la formula

$\mathrm{var}\,[aX + bY + c] = a^2 \mathrm{var}\,[X] + b^2 \mathrm{var}\,[Y]$ se X e Y sono indipendenti

$$\mathrm{var}\,[g(X, Y)] \simeq$$

$$\simeq [\partial_1 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2 \underbrace{\mathrm{var}\,[X - \mu_X]}_{=\mathrm{var}[X]} + [\partial_2 g\,(\mu_X, \mu_Y)]^2 \underbrace{\mathrm{var}\,[Y - \mu_Y]}_{=\mathrm{var}[Y]}$$

Metodo delta

DIMOSTRAZIONE:

Sviluppo g in serie di Taylor intorno a (μ_X, μ_Y):

$$g(x,y) \simeq g(\mu_X,\mu_Y) + \partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)(x-\mu_X) + \partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)(y-\mu_Y)$$

$$g(X,Y) \simeq \underbrace{g(\mu_X,\mu_Y)}_{\text{costante}=c} + \underbrace{\partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)}_{\text{costante}=a}(X-\mu_X) + \underbrace{\partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)}_{\text{costante}=b}(Y-\mu_Y)$$

Per calcolare $\mathrm{var}\,[g(X,Y)]$, uso la formula

$\mathrm{var}\,[aX+bY+c] = a^2\mathrm{var}\,[X] + b^2\mathrm{var}\,[Y]$ se X e Y sono indipendenti

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\,[g(X,Y)] &\simeq \\ &\simeq [\partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)]^2\,\underbrace{\mathrm{var}\,[X-\mu_X]}_{=\mathrm{var}[X]} + [\partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)]^2\,\underbrace{\mathrm{var}\,[Y-\mu_Y]}_{=\mathrm{var}[Y]} \\ &= [\partial_1 g\,(\mu_X,\mu_Y)]^2\,\mathrm{var}\,[X] + [\partial_2 g\,(\mu_X,\mu_Y)]^2\,\mathrm{var}\,[Y]\end{aligned}$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$$\left.\begin{array}{l} X = \text{numero che uscirà sul primo dado} \\ Y = \text{numero che uscirà sul secondo dado} \end{array}\right\} \; X, Y \text{ è un campione aleatorio}$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

ESEMPI:

- Nel lancio di due dadi:

$$\left.\begin{aligned} X &= \text{numero che uscirà sul primo dado} \\ Y &= \text{numero che uscirà sul secondo dado} \end{aligned}\right\} \quad X, Y \text{ è un campione aleatorio}$$

- Nel lancio di tre monete:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se uscirà testa all'}i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

X_1, X_2, X_3 è un campione aleatorio

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

ESEMPI:

- Nel sondaggio fra 100 studenti:

$$X_i = \text{altezza dell'}i\text{-esimo intervistato}$$

  $X_1, \ldots, X_{100}$ è un campione aleatorio

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

La media campionaria di un campione aleatorio
è una variabile aleatoria

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = ???$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i\right] \qquad \text{linearità di } \mathbb{E}$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{n}\cdot n\mu$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \mu = \mu$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}\mu = \mu$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \; = \text{ media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}\left[X_i\right]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = ???$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \operatorname{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right] = \operatorname{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \qquad \text{quadraticità di var}$$

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] \qquad \text{indipendenza delle } X_i$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2$$

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) :

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n\sigma^2$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{ media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \operatorname{var}\left[X_i\right]$ (uguale per tutte le i) :

$$\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right] = \operatorname{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}\left[X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \mathrm{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{\sigma^2}{n}$

$$\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \mathrm{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

- Posto $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$
- Posto $\sigma^2 = \operatorname{var}[X_i]$ (uguale per tutte le i) : $\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{\sigma^2}{n}$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i :

$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N$ riproducibilità di N

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i :

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N \qquad\qquad X \sim N \;\Rightarrow\; aX + b \sim N$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \qquad\right) \qquad\qquad \mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu$$

Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{ media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

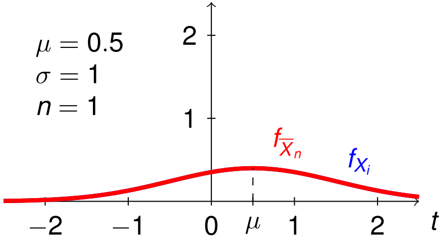
$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



Campioni aleatori

Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

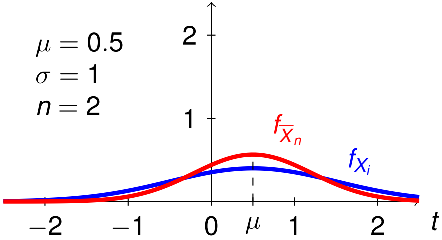
$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

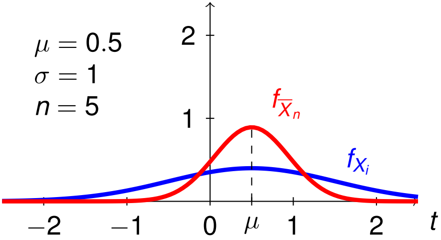
$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

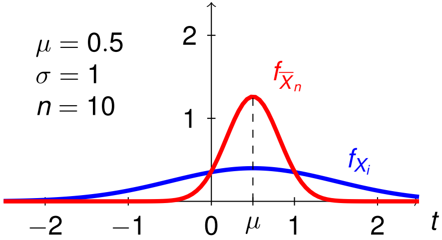
ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$\mu = 0.5$
$\sigma = 1$
$n = 10$



Definizione

Un *campione aleatorio* di numerosità n è una successione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)

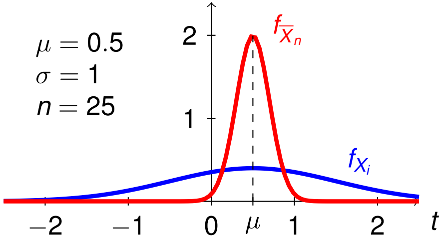
$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{media campionaria}$$

ESEMPIO:

Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ per ogni i:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

La media campionaria *tende in probabilità* al valore atteso delle X_i:

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \dots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

La media campionaria *tende in probabilità* al valore atteso delle X_i:

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$$

μ non si può misurare, ma $\overline{X}_n$ sì !

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \underset{\mathbb{P}(E)\,\leq\,1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right)$$

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \dots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \underset{\mathbb{P}(E) \leq 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right)$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} 1 \underset{\mathbb{P}(E)\,\leq\,1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) &\underset{\substack{\mathbb{P}(E)\,= \\ =\,1\,-\,\mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \\ &\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n]\,=\,\mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right) \end{aligned}$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$
\begin{aligned}
1 \underset{\mathbb{P}(E) \leq 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) &\underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\underset{\text{Chebyshev}}{\geq} 1 - \frac{\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right]}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \underset{\mathbb{P}(E)\leq 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\underset{\text{Chebyshev}}{\geq} 1 - \frac{\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right]}{\varepsilon^2}$$

$$\underset{\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]}{=} 1 - \frac{(\sigma^2/n)}{\varepsilon^2}$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \underset{\mathbb{P}(E)\leq 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\underset{\text{Chebyshev}}{\geq} 1 - \frac{\operatorname{var}\left[\overline{X}_n\right]}{\varepsilon^2}$$

$$\underset{\sigma^2 := \operatorname{var}[X_i]}{=} 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \underset{\mathbb{P}(E)\leq 1}{\geq} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \underset{\substack{\mathbb{P}(E) = \\ = 1 - \mathbb{P}(\overline{E})}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\underset{\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\underset{\text{Chebyshev}}{\geq} 1 - \frac{\mathrm{var}\left[\overline{X}_n\right]}{\varepsilon^2}$$

$$\underset{\sigma^2 := \mathrm{var}[X_i]}{=} 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \dots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \quad {\color{red}\geq} \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad {\color{red}\geq} \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}$$

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 1$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$1 \quad \geq \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \quad \equiv \quad p$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \quad \equiv \quad p$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(n, p) = \frac{\sigma}{\sqrt{n(1-p)}}$$

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

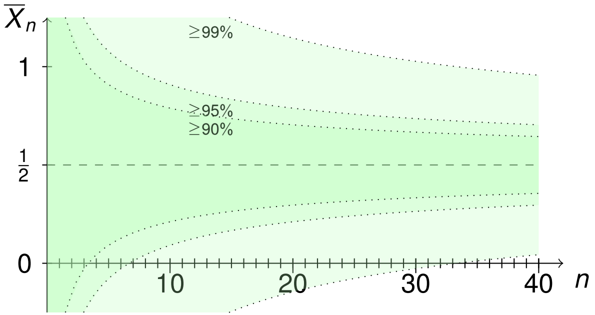
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO:

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}$$

con Chebyshev



Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

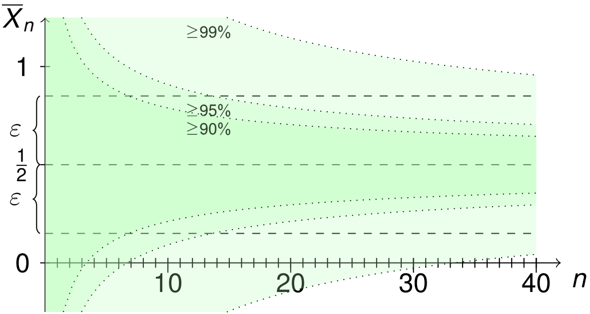
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO:

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}$$

con Chebyshev



Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

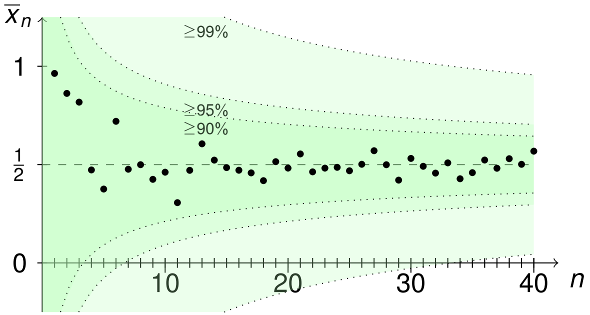
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO:

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$\Rightarrow \quad \mu = \dfrac{1}{2}$

con Chebyshev



$\overline{x}_n$ = *realizzazione* di $\overline{X}_n$ dopo l'esperimento

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

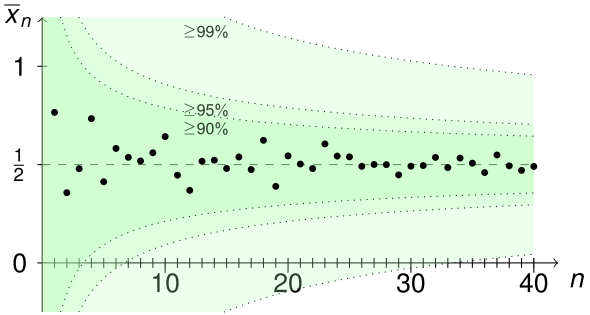
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO:

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}$$

con Chebyshev



$\overline{x}_n$ = *realizzazione* di $\overline{X}_n$ dopo l'esperimento

Legge dei grandi numeri

Teorema (Legge (debole) dei Grandi Numeri)

Sia $X_1, X_2, \ldots$ un campione aleatorio con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Allora:

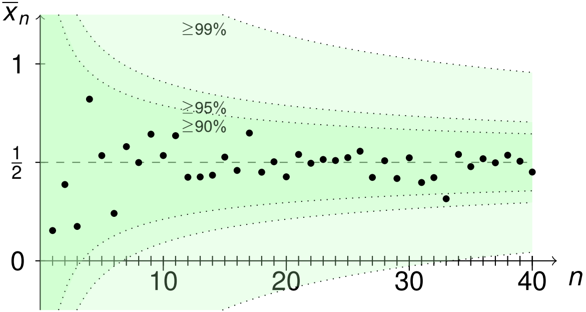
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

ESEMPIO:

$X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}$

con Chebyshev



$\overline{x}_n =$ *realizzazione* di $\overline{X}_n$ dopo l'esperimento

Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}}$$

Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica (dei successi)}$$

Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

Legge dei grandi numeri e prove di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se avrò successo all'}i\text{-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{ frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q =$ probabilità di successo in una prova

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q)$ con $q = \mathbb{P}(a \leq Z_i \leq b)$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1,q)$ con $q = \mathbb{P}(a \le Z_i \le b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \text{frequenza empirica}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots \quad$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{P}(a \leq Z_i \leq b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \mathrm{FR}([a, b])$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots \quad$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{P}(a \leq Z_i \leq b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \mathrm{FR}([a, b])$$

$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{FR}([a, b]) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$$

La frequenza empirica converge alla probabilità teorica !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se troverò } Z_i \text{ nella classe } [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \ldots \quad$ i.i.d.
- $X_i \sim B(1, q) \quad$ con $\quad q = \mathbb{P}(a \le Z_i \le b) = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{num. di successi}}{\text{num. di prove}} =: \mathrm{FR}([a, b])$$

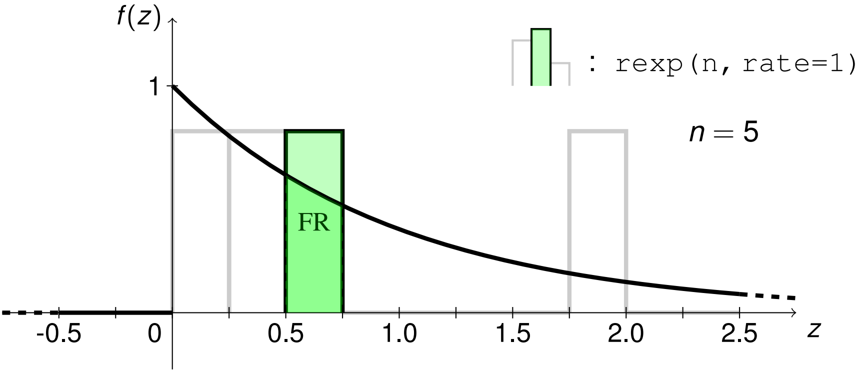
$$\mathbb{E}[X_i] = q \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{FR}([a, b]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$$

La frequenza relativa converge all'area sottesa dalla densità !

Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

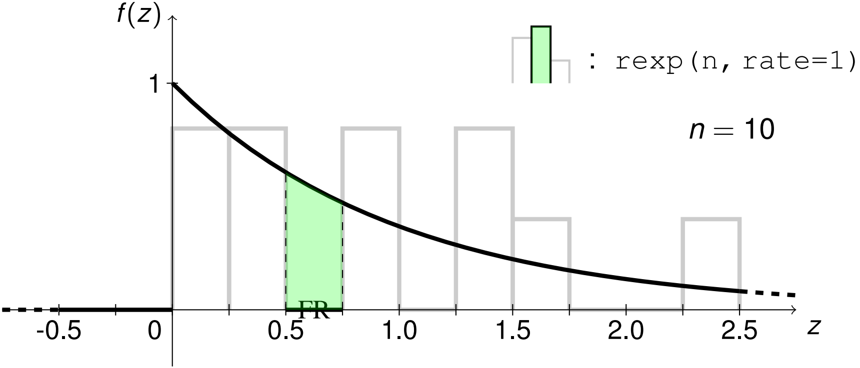
$$f(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

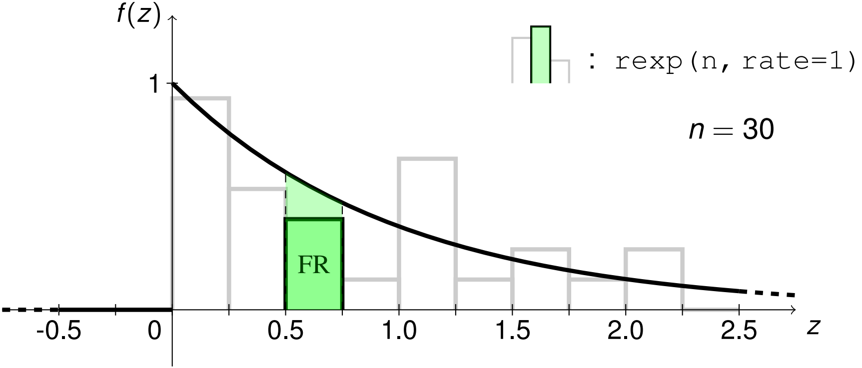
$$f(z) = \begin{cases} e^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

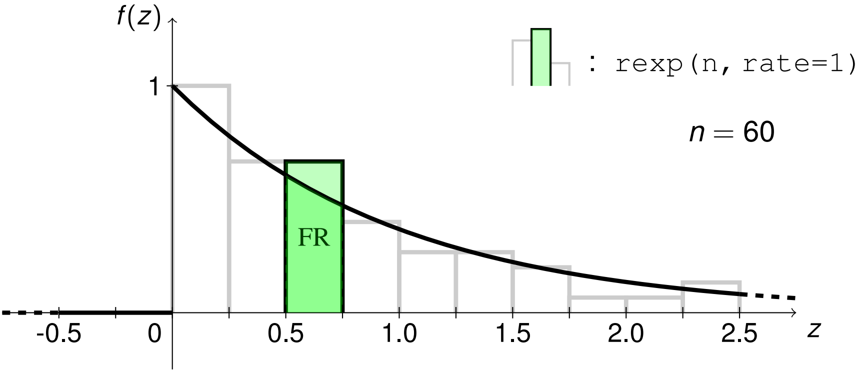
$$f(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

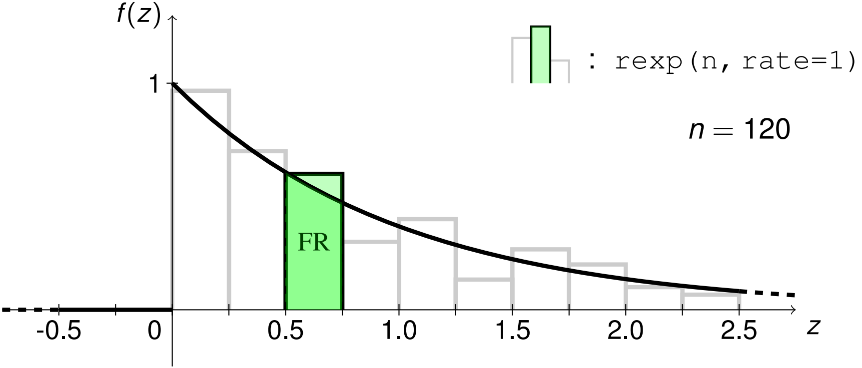
$$f(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



Legge dei grandi numeri e istogrammi

$$Z_1, Z_2, \ldots \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad Z_i \sim f$$

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$



Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

- Se $n = 1$: $\overline{X}_n = X_1 \sim f$ (ovviamente!)

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

- Se $n = 1$: $\overline{X}_n = X_1 \sim f$ (ovviamente!)
- Se $n > 1$ è piccolo: non lo so

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

- Se $n = 1$: $\overline{X}_n = X_1 \sim f$ (ovviamente!)
- Se $n > 1$ è piccolo: non lo so
- Se $n > 1$ è grande: esiste il famoso…

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim f$, qual è la densità di $\overline{X}_n$?

- Se $n = 1$: $\overline{X}_n = X_1 \sim f$ (ovviamente!)
- Se $n > 1$ è piccolo: non lo so
- Se $n > 1$ è grande: esiste il famoso…

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$

$\approx$: 'ha circa densità'

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è `grande'}$$

OSSERVAZIONI:

- Tipicamente, ‘grande’ = ‘maggiore di 30’

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$

OSSERVAZIONI:

- Tipicamente, ‘grande’ $=$ ‘maggiore di 30’
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, già sapevamo che $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$

OSSERVAZIONI:

- Tipicamente, 'grande' $=$ 'maggiore di 30'
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, già sapevamo che $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- Il TLC vale qualunque sia la densità delle X_i

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$

OSSERVAZIONI:

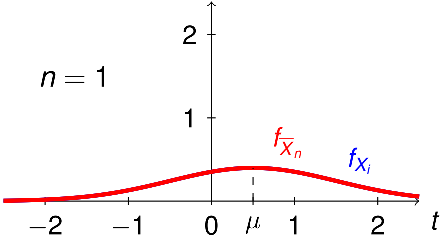
- Tipicamente, 'grande' $=$ 'maggiore di 30'
- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, già sapevamo che $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- Il TLC vale qualunque sia la densità delle X_i
- Il TLC non dice nulla sulla densità delle X_i

Teorema del limite centrale

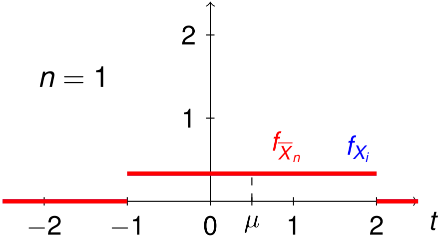
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$

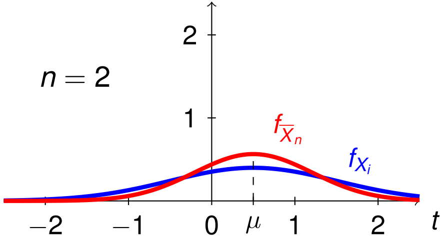


$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

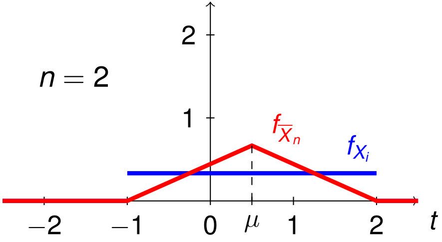
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



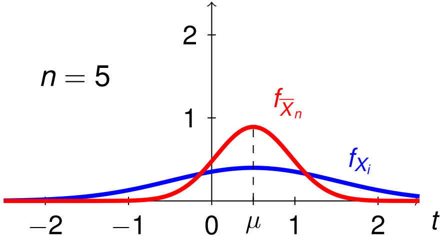
$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

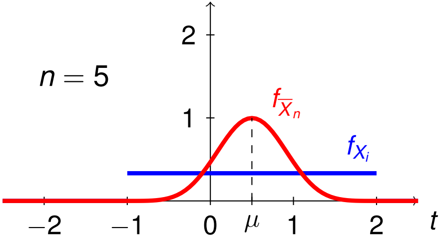
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



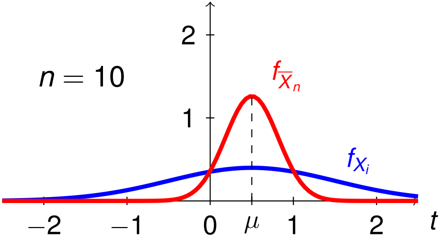
$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

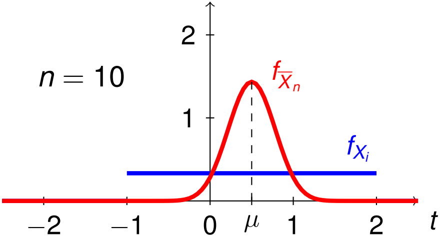
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$

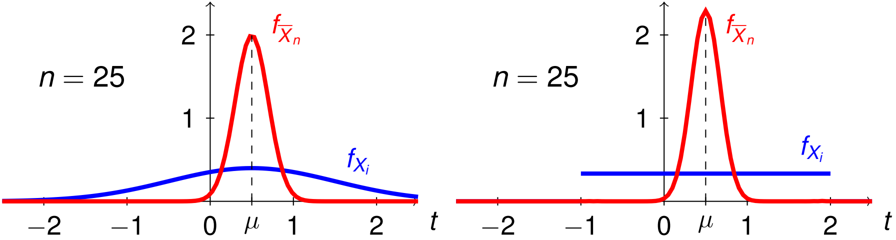


$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$



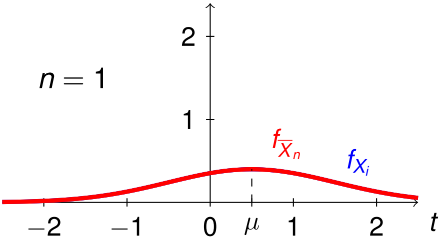
$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$ $\qquad$ $X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

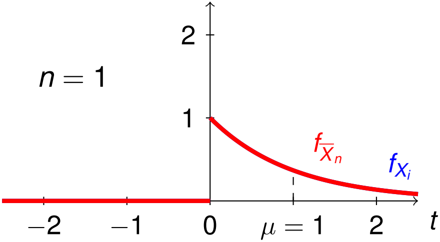
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$

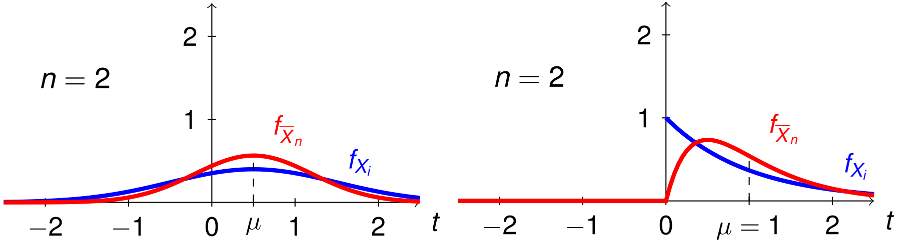


$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$



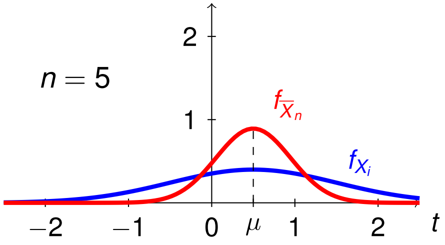
$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$ $\qquad$ $X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

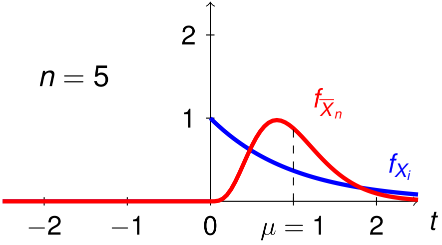
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



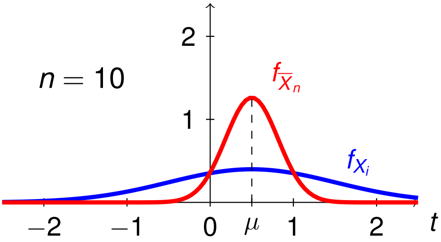
$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

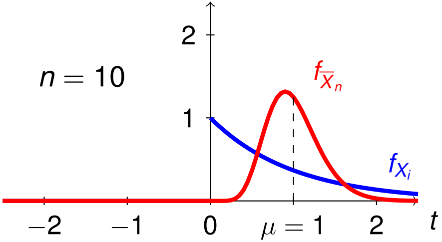
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



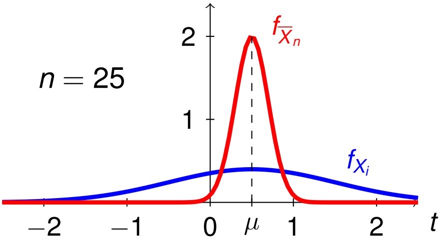
$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

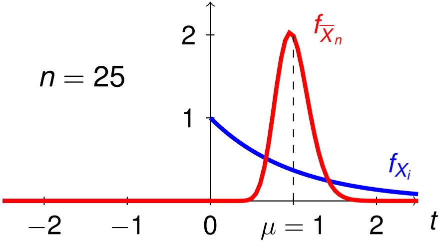
Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è 'grande'}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



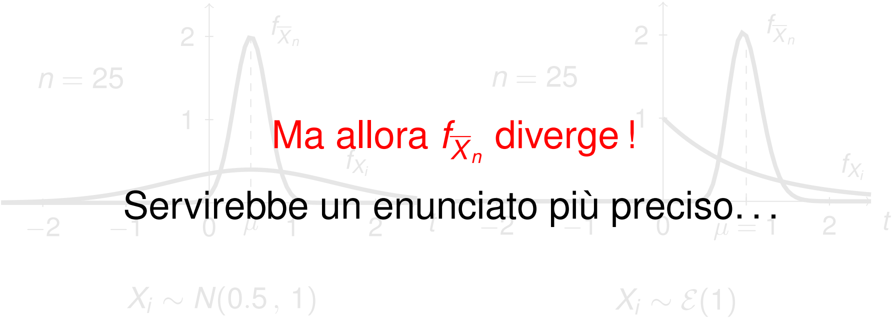
$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione informale)

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\overline{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{se } n \text{ è ‘grande’}$$



Ma allora $f_{\overline{X}_n}$ diverge !

Servirebbe un enunciato più preciso…

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z \right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

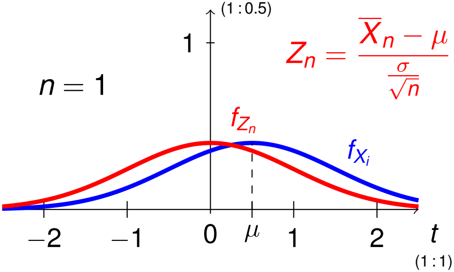
standardizzazione di $\overline{X}_n$

Teorema del limite centrale

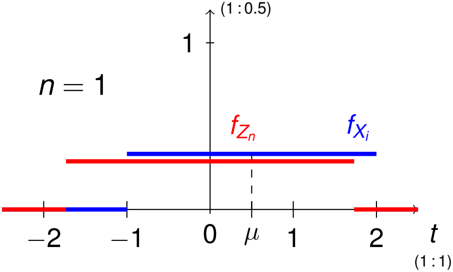
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$

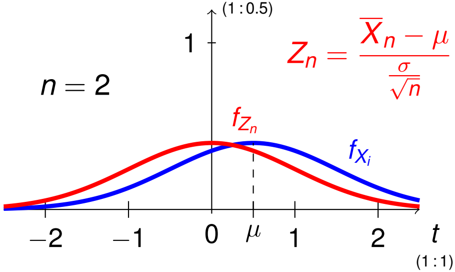


$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

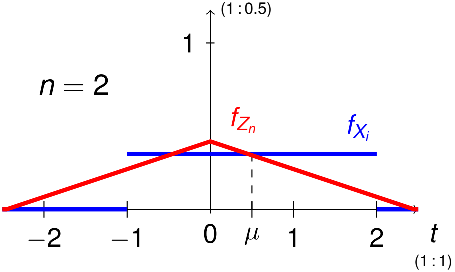
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



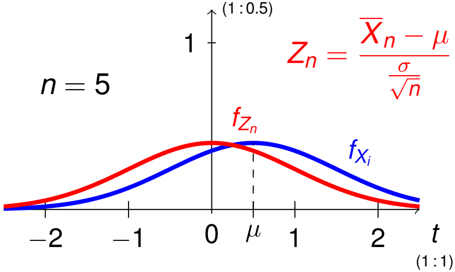
$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

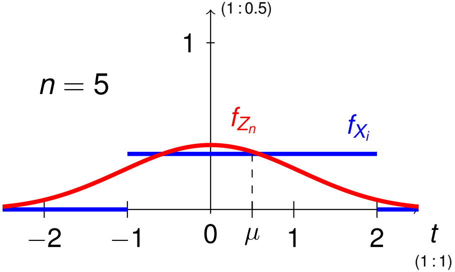
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



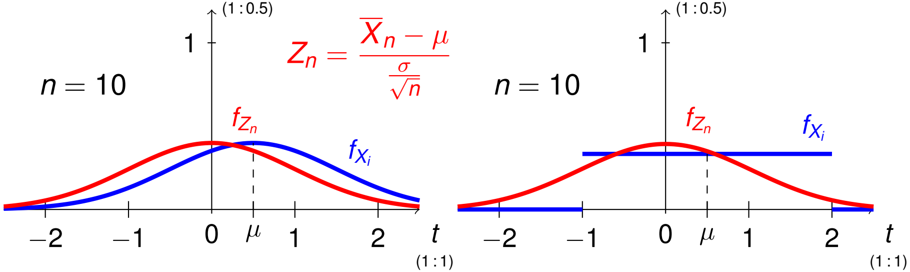
$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z \right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



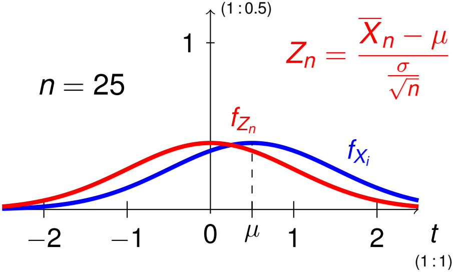
$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$ $\qquad$ $X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

Teorema del limite centrale

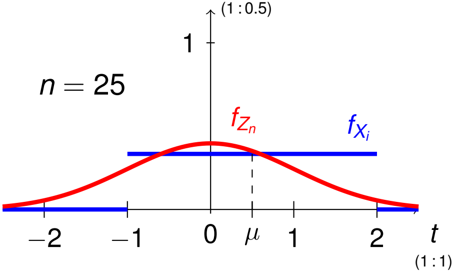
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z \right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$

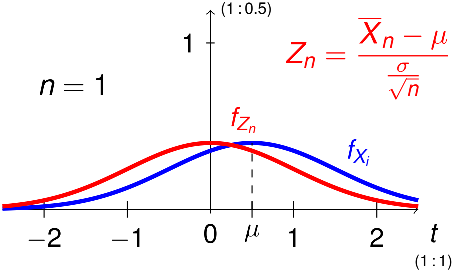


$X_i \sim \mathcal{U}(-1\,,\,2)$

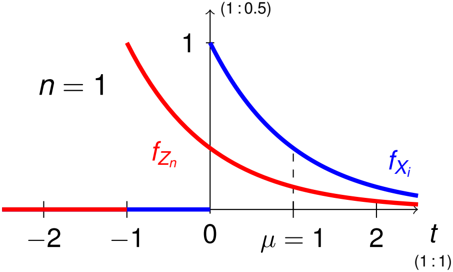
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



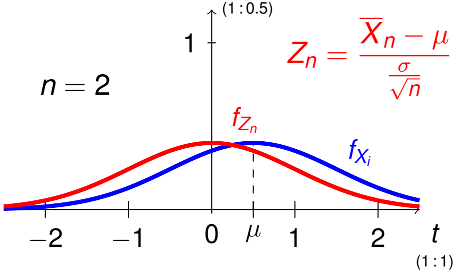
$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

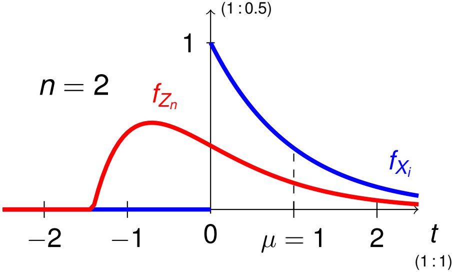
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z \right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



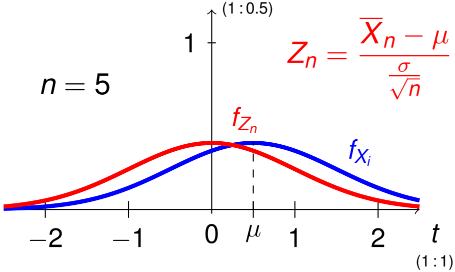
$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

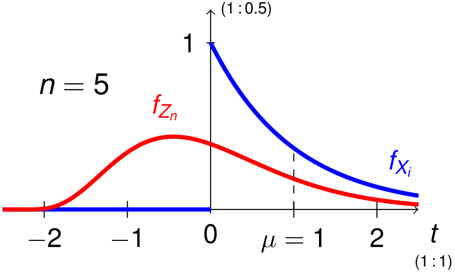
Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$



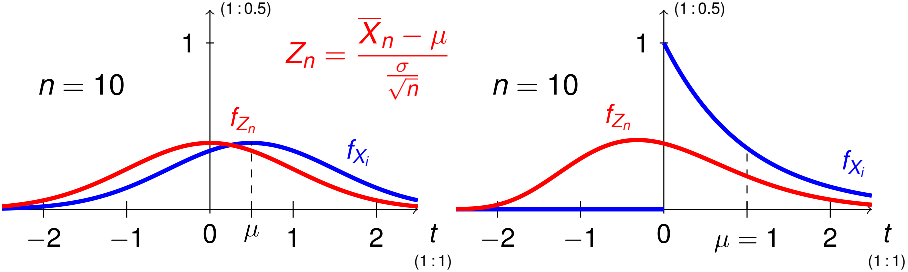
$X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



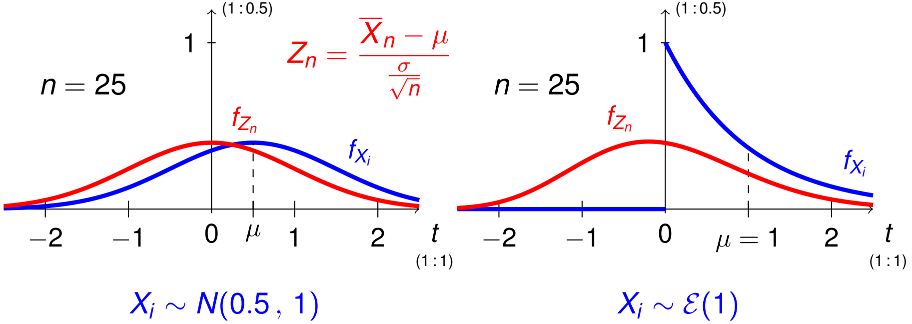
$X_i \sim N(0.5\,,\,1)$ $\qquad$ $X_i \sim \mathcal{E}(1)$

Teorema del limite centrale

Teorema del Limite Centrale (versione formale)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\operatorname{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$



Teorema del limite centrale

Qual è la densità di $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ quando n è grande ?

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[X_1 + \ldots + X_n\right] = \mathbb{E}\left[X_1\right] + \ldots + \mathbb{E}\left[X_n\right]$ linearità di $\mathbb{E}$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{\mu} + \ldots + \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{\mu}$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{\mu} + \ldots + \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{\mu} = n\,\mu$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\mu$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\mu$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$ indipendenza delle X_i

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\mu$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \underbrace{\mathrm{var}[X_1]}_{\sigma^2} + \ldots + \underbrace{\mathrm{var}[X_n]}_{\sigma^2}$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\mu$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \underbrace{\mathrm{var}[X_1]}_{\sigma^2} + \ldots + \underbrace{\mathrm{var}[X_n]}_{\sigma^2} = n\sigma^2$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\mu$$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $$\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\sigma^2$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad \underbrace{X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N}$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\mu$

- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = n\,\sigma^2$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\ n\,\sigma^2\right)}$$

Teorema del limite centrale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. e n è grande, allora per il TLC

$$\overline{X}_n \approx N \quad \Rightarrow \quad \underbrace{X_1 + \ldots + X_n = n\overline{X}_n \approx N}$$

perché

$$Z \sim N \quad \Rightarrow \quad aZ + b \sim N$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mu$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\mu$
- $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$

  $\Rightarrow \quad \mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = n\sigma^2$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\mu,\, n\sigma^2\right)}$$

Teorema del Limite Centrale (versione equivalente)

Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}[X_i] = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora

$$X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q)$$

$$X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\; n\,\sigma^2\right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\; n\,\sigma^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\; n\,\sigma^2\big)$$

Quali sono i parametri della gaussiana ?

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{aligned} X_1 + \ldots + X_n &\sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n &\approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)$$

- $\mu = \mathbb{E}\,[X_i] = q$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)$$

- $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q$
- $\sigma^2 = \mathrm{var}\left[X_i\right] = q(1-q)$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{aligned} & X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ & X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\, n\,\sigma^2\big)}$$

$$\Downarrow$$

- $\mu = \mathbb{E}\,[X_i] = q$
- $\sigma^2 = \mathrm{var}\,[X_i] = q(1-q)$

$$\left.\begin{aligned} & \mu = \mathbb{E}\,[X_i] = q \\ & \sigma^2 = \mathrm{var}\,[X_i] = q(1-q) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{B(n,\, q) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big)}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

Se $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$, allora, se n è grande,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,\, q) \\ X_1 + \ldots + X_n \approx N\left(n\,\mu,\; n\,\sigma^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{B(n,\, q) \simeq N\big(n\,\mu,\; n\,\sigma^2\big)}$$

$$\Downarrow$$

- $\mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q$
- $\sigma^2 = \operatorname{var}\left[X_i\right] = q(1-q)$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = \mathbb{E}\left[X_i\right] = q \\ \sigma^2 = \operatorname{var}\left[X_i\right] = q(1-q) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B(n,\, q) \simeq N\big(n\,q,\; n\,q(1-q)\big)}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale (versione formale)

Se $Y_n \sim B(n, q)$ per ogni n, allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_n - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}} \leq z\right) = \Phi(z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo esatto:

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \sum_{k=0}^{19} p_{Y_{30}}(k)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo esatto:

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \sum_{k=0}^{19} p_{Y_{30}}(k)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo esatto:

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \sum_{k=0}^{19} p_{Y_{30}}(k) = \sum_{k=0}^{19} \binom{30}{k} 0.5^k (1 - 0.5)^{30-k}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo esatto:

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \sum_{k=0}^{19} p_{Y_{30}}(k) = \sum_{k=0}^{19} \binom{30}{k} 0.5^k (1-0.5)^{30-k} = ???$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)\big)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}\,(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\; Y_{30} \qquad < \qquad 20 \qquad \right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\ 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\ 0.5) \simeq N\big(n\,q,\ n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\ 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\quad Y_{30} - n\,q \quad < \quad 20 - 30 \cdot 0.5 \quad \right)$$

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}\,(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right)$$

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\ 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\ 0.5) \simeq N\big(n\,q,\ n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\ 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\Bigg)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\; n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\; 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 \;-\; 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\Bigg)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right) = \Phi(1.826)$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\Bigg)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZIONE: Definisco la v.a.

$$Y_{30} = \text{num. di teste nei 30 lanci} \sim B(30,\, 0.5)$$

Col calcolo approssimato:

$$B(30,\, 0.5) \simeq N\big(n\,q,\, n\,q(1-q)\big) = N\big(30 \cdot 0.5,\, 30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)\big)$$

$$\color{red}{\mathbb{P}\,(Y_{30} < 20)} = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}} \right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)}} \right) = \Phi(1.826) = \color{red}{96.638\%}$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Col calco

$B(30, 0$ … $0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{Y_{30} - n\,q}{\sqrt{n\,q(1-q)}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Col calco

$B(30, 0$ $0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}(Y_{30} \leq 19.5)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{20 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Col calco

$B(30, ($ ... $- 0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}(Y_{30} \leq 19.5)$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{19.5 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.826) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$“Y < 20” = “Y \leq 19” = “Y \leq 19.5”$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

Col calco

$B(30,$ ... $0.5))$

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}(Y_{30} \leq 19.5)$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{19.5 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.643) = 96.638\%$$

Approssimazione gaussiana della binomiale

ESEMPIO: Se lancio 30 volte una moneta equilibrata, qual è la probabilità di fare testa meno di 20 volte?

SOLUZI

Col calco

$B(30, 0$ … $- 0.5))$

Correzione di continuità

Per approssimare una v.a. discreta Y con una assolutamente continua, è meglio usare le identità

$$\text{“}Y < 20\text{”} = \text{“}Y \leq 19\text{”} = \text{“}Y \leq 19.5\text{”}$$

dove *qui* mettere $\leq$ o $<$ non fa differenza

$$\mathbb{P}(Y_{30} < 20) = \mathbb{P}(Y_{30} \leq 19.5)$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{19.5 - 30 \cdot 0.5}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}}\right) = \Phi(1.643) = 94.950\%$$

Approssimazione gaussiana vs. poissoniana

$$B(n,q) \simeq \begin{cases} N\big(n\,q,\; n\,q(1-q)\big) \quad \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ n\,q \geq 5 \\ n(1-q) \geq 5 \end{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

Approssimazione gaussiana vs. poissoniana

$$B(n,q) \;\simeq\; \begin{cases} N\big(n\,q,\; n\,q(1-q)\big) & \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ n\,q \geq 5 \\ n(1-q) \geq 5 \end{cases} \\[2ex] \mathcal{P}(n\,q) & \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ q \leq 0.01 \\ n\,q \simeq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Approssimazione gaussiana vs. poissoniana

$$B(n,q) \simeq \begin{cases} N\big(n\,q,\; n\,q(1-q)\big) & \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ n\,q \geq 5 \\ n(1-q) \geq 5 \end{cases} \\ \\ \mathcal{P}(n\,q) & \text{se} \quad \begin{cases} n \geq 20 \\ q \leq 0.01 \\ n\,q \simeq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(\lambda) \simeq N(\lambda,\, \lambda) \quad \text{se} \quad \lambda \geq 5$$

TLC e gaussianità delle misure

Se misuriamo un lato del tavolo, il risultato sarà la v.a.

$$L = \ell + X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

dove:

$\ell =$ lunghezza *vera* del lato (<u>costante deterministica</u>)

$X_1 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del tavolo (<u>v.a.</u>)

$X_2 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del metro (<u>v.a.</u>)

$X_3 =$ errore dovuto all'imprecisione dello sperimentatore (<u>v.a.</u>)

. . . .

TLC e gaussianità delle misure

Se misuriamo un lato del tavolo, il risultato sarà la v.a.

$$L = \ell + X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

dove:

$\ell =$ lunghezza *vera* del lato (costante deterministica)

$X_1 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del tavolo (v.a.)

$X_2 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del metro (v.a.)

$X_3 =$ errore dovuto all'imprecisione dello sperimentatore (v.a.)

$\ldots\ldots\ldots$

IPOTESI: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e n è grande

TLC e gaussianità delle misure

Se misuriamo un lato del tavolo, il risultato sarà la v.a.

$$L = \ell + \underbrace{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}_{E}$$

dove:

$\ell =$ lunghezza *vera* del lato (<u>costante deterministica</u>)

$X_1 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del tavolo (<u>v.a.</u>)

$X_2 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del metro (<u>v.a.</u>)

$X_3 =$ errore dovuto all'imprecisione dello sperimentatore (<u>v.a.</u>)

. . . .

IPOTESI: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e n è grande

CONSEGUENZA: $E := X_1 + X_2 + \ldots + X_n \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0, \sigma_E^2)$

con $\sigma_E^2 = n \operatorname{var}[X_i]$

TLC e gaussianità delle misure

Se misuriamo un lato del tavolo, il risultato sarà la v.a.

$$L = \ell + X_1 + X_2 + \ldots + X_n \; = \ell + E \approx N(\ell, \sigma_E^2)$$

dove:

$\ell =$ lunghezza *vera* del lato (<u>costante deterministica</u>)

$X_1 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del tavolo (<u>v.a.</u>)

$X_2 =$ errore dovuto alla dilatazione termica del metro (<u>v.a.</u>)

$X_3 =$ errore dovuto all'imprecisione dello sperimentatore (<u>v.a.</u>)

$\ldots\ldots\ldots$

IPOTESI: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e n è grande

CONSEGUENZA: $E := X_1 + X_2 + \ldots + X_n \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0, \sigma_E^2)$

con $\sigma_E^2 = n \operatorname{var}[X_i]$

Cose da non fare MAI

- Credere che il TLC renda le X_i gaussiane quando n è grande:

  È assurdo !

  È $\overline{X}_n$ che diventa gaussiana. La densità delle X_i non può cambiare né se $n = 1$ né se $n = 10$ né se $n = 1\,000\,000$

Cose da non fare MAI

- Credere che il TLC renda le X_i gaussiane quando n è grande:

  È assurdo !

  È $\overline{X}_n$ che diventa gaussiana. La densità delle X_i non può cambiare né se $n = 1$ né se $n = 10$ né se $n = 1\,000\,000$

- Credere che $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ sia la stessa cosa di $n\,X_1$:

  Non ha senso !

  Se lancio un dado $n = 2$ volte ed esce $x_1 = 4$ al primo lancio e $x_2 = 1$ al secondo, la somma dei due lanci non può essere $n\,x_1 = 8$, ma è piuttosto $x_1 + x_2 = 5$.