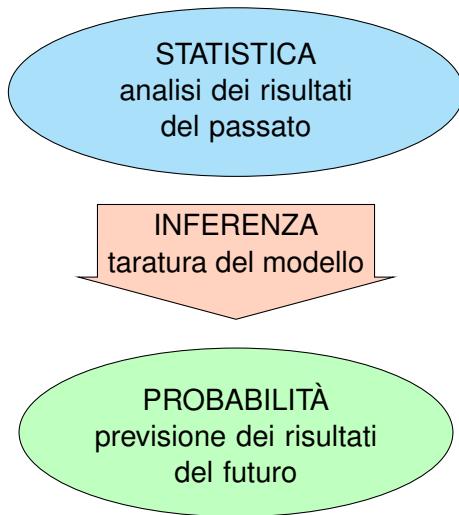


Inferenza statistica



Alessandro Toigo



- **Statistica descrittiva**
(riassumere molti dati attraverso poche caratteristiche essenziali)
- **Probabilità**
(costruire un modello che preveda il risultato di un esperimento)
- **Inferenza statistica**
(tarare i parametri del modello in base ai risultati dell'esperimento)
- **Regressione lineare**
(riconoscere relazioni tra dati di tipo diverso)







PRIMA
dell'esperimento



DOPO
l'esperimento



	PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	
	$X_2 =$ 	
	...	

	PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$  $X_2 =$  ...	
densità	$X_i \sim f_\theta$	



	PRIMA dell'esperimento	DOPO l'esperimento
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$  $X_2 =$  ...	
densità	$X_i \sim f_\theta$	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	} realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	{ $X_i \sim f_\theta$			
parametri	{ $\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$			

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	} realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$			



	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri

Vogliamo approssimare θ in base ai dati !

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$	\rightarrow	*	parametri
parametri	$\mu = 1.5$ $\sigma = 0.8$	\rightarrow	$\mu = 1.5$ $\sigma = 0.8$	

Vogliamo approssimare μ e σ in base ai dati !

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Una statistica è una variabile aleatoria !

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare
un parametro della densità delle X_i

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare
un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: \bar{X} si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

Stima puntuale

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare
un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: \bar{X} si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

Uno stimatore è una variabile aleatoria !

Stima puntuale

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare
un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: \bar{X} si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA = realizzazione di uno stimatore dopo l'esperimento aleatorio

Stima puntuale

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: \bar{X} si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA = realizzazione di uno stimatore dopo l'esperimento aleatorio

ESEMPIO: dopo $n = 3$ misure trovo $x_1 = 1.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 2.9$

Stima puntuale

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: \bar{X} si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

STIMA = realizzazione di uno stimatore dopo l'esperimento aleatorio

ESEMPIO: dopo $n = 3$ misure trovo $x_1 = 1.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 2.9$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1.2 + 0.6 + 2.9}{3} = 1.567 \quad \text{è una stima di } \mu$$

Stima puntuale

STATISTICA = qualsiasi funzione del campione aleatorio X_1, \dots, X_n

ESEMPIO: la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv h(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dove} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

STIMATORE = statistica usata per approssimare un parametro della densità delle X_i

ESEMPIO: \bar{X} si usa spesso come stimatore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$



STIMA = realizzazione di uno stimatore dopo l'esperimento aleatorio

ESEMPIO: dopo $n = 3$ misure trovo $x_1 = 1.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 2.9$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1.2 + 0.6 + 2.9}{3} = 1.567 \text{ è una stima di } \mu$$




Una stima è un numero !

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	\rightarrow	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima

θ non si può misurare, ma $\hat{\Theta}$ sì !

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 = $ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 = $ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	$X_3 = $ 	\rightarrow	$x_3 = 2.9$	
densità	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$	\rightarrow	*	
parametri	$\begin{cases} \mu = 1.5 \\ \sigma = 0.8 \end{cases}$	\rightarrow	$\begin{cases} \mu = 1.5 \\ \sigma = 0.8 \end{cases}$	parametri
stimatore	$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$	\rightarrow	$\bar{x} = \frac{1.2 + 0.6 + 2.9}{3}$	stima

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ
 \Rightarrow si vede a occhio

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ
 \Rightarrow si vede a occhio
- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \underbrace{\text{bias}(\hat{\theta}; \theta)}_{\text{distorsione}}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \Rightarrow 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \text{bias}(\hat{\theta}; \theta)$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} \text{ è } \textit{non-distorto} \text{ (o } \textit{corretto})$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \text{bias}(\hat{\theta}; \theta)$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\theta} \text{ è } \textit{non-distorto} \text{ (o } \textit{corretto})$$

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \text{bias}(\hat{\theta}; \theta)$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\theta} \text{ è } \textit{non-distorto} \text{ (o } \textit{corretto})$$

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

$$\Rightarrow \underbrace{\text{mse}(\hat{\theta}; \theta)}_{\substack{\text{errore} \\ \text{quadratico} \\ \text{medio}}} := \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \quad \text{deve esser piccolo}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \text{bias}(\hat{\theta}; \theta)$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\theta} \text{ è } \textit{non-distorto} \text{ (o } \textit{corretto})$$

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

$$\Rightarrow \underbrace{\text{mse}(\hat{\theta}; \theta)}_{\substack{\text{mean} \\ \text{square} \\ \text{error}}} := \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \quad \text{deve esser piccolo}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \Rightarrow 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \text{bias}(\hat{\theta}; \theta)$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} \text{ è } \textit{non-distorto} \text{ (o } \textit{corretto})$$

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

$$\Rightarrow \text{mse}(\hat{\theta}; \theta) := \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \quad \text{deve esser piccolo}$$

Se $\hat{\theta}_n = h_n(X_1, \dots, X_n)$, allora

$$\text{mse}(\hat{\theta}_n; \theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \hat{\theta}_n \text{ è } \textit{consistente in media quadratica}$$

Proprietà degli stimatori

Se $\hat{\theta}_n$ è un buono stimatore del parametro incognito θ :

- $\hat{\theta}_n$ non deve dipendere da θ

\Rightarrow si vede a occhio

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere centrata in θ

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}] \simeq \theta \Rightarrow 0 \simeq \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta =: \text{bias}(\hat{\theta}; \theta)$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta}_n \text{ è non-distorto (o corretto)}$$

- la densità di $\hat{\theta}$ deve essere dispersa il meno possibile

$$\Rightarrow \text{mse}(\hat{\theta}; \theta) := \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \quad \text{deve esser piccolo}$$

Se $\hat{\theta}_n = h_n(X_1, \dots, X_n)$, allora

$$\text{mse}(\hat{\theta}_n; \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Leftrightarrow \hat{\theta}_n \text{ è consistente in media quadratica}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

- 1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$
- 2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$
- 3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$ perché $\text{mse} \geq 0$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2 :$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2 - 2\theta\hat{\Theta} + \theta^2]$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2 :$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2 - 2\theta\hat{\Theta} + \theta^2] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2 :$

$$\begin{aligned}\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) &= \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2 - 2\theta\hat{\Theta} + \theta^2] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2 \\ &= \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - \mathbb{E}[\hat{\Theta}]^2 + \mathbb{E}[\hat{\Theta}]^2 - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2\end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2 :$

$$\begin{aligned} \text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) &= \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2 - 2\theta\hat{\Theta} + \theta^2] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2 \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - \mathbb{E}[\hat{\Theta}]^2}_{\text{var}[\hat{\Theta}]} + \underbrace{\mathbb{E}[\hat{\Theta}]^2 - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2}_{(\mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta)^2} \end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2 :$

$$\begin{aligned} \text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) &= \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2 - 2\theta\hat{\Theta} + \theta^2] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2 \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[\hat{\Theta}^2] - \mathbb{E}[\hat{\Theta}]^2}_{\text{var}[\hat{\Theta}]} + \underbrace{\mathbb{E}[\hat{\Theta}]^2 - 2\theta\mathbb{E}[\hat{\Theta}] + \theta^2}_{(\mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta)^2} \\ &= \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2 \end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

4 $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

4 $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \geq \mathbb{P}(|\hat{\Theta}_n - \theta| < \varepsilon)$$

$\mathbb{P}(E) \leq 1$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

$$① \text{ bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$$

$$② \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$$

$$③ \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$$

$$④ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$$

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \underset{\mathbb{E}[\hat{\Theta}_n] = \theta}{=} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right)$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

4 $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right)$$

$$\geq 1 - \frac{\text{var}[\hat{\Theta}_n]}{\varepsilon^2}$$

Chebyshev

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

$$① \text{ bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$$

$$② \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$$

$$③ \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$$

$$④ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$$

$$\begin{aligned} 1 &\geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right) \\ &\geq 1 - \frac{\text{var}[\hat{\Theta}_n]}{\varepsilon^2} \underset{\text{bias} = 0}{=} 1 - \frac{\text{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \quad \text{DISTORSIONE}$$

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$

$$① \text{ bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$$

$$② \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$$

$$③ \text{ mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$$

$$④ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta:$$

$$\begin{aligned} 1 &\geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \mathbb{E}[\hat{\Theta}_n]\right| < \varepsilon\right) \\ &\geq 1 - \frac{\text{var}[\hat{\Theta}_n]}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\text{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

4 $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\text{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta)}{\varepsilon^2}$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

4 $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\text{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

perché $\text{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

4 $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta :$

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\text{mse}(\hat{\Theta}_n; \theta)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Proprietà di bias e mse

$$\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta$$

DISTORSIONE

$$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\Theta} - \theta)^2]$$

ERRORE QUADRATICO MEDIO

1 $\text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) \in (-\infty, +\infty)$

2 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) \in [0, +\infty)$

3 $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = \text{var}[\hat{\Theta}] + \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta)^2$

4 $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Theta}_n \text{ non-distorto per ogni } n \\ \hat{\Theta}_n \text{ consistente in media quadratica} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

\hat{M}_n NO

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

\hat{M}_n NO

\hat{M}'_n SÌ

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3]$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_3] \quad \text{NO}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica ?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_3] \quad \text{NO}$$

$$\text{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \text{var}[\bar{X}_n] + \text{bias}(\bar{X}_n; \mu)^2$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_3] \quad \text{NO}$$

$$\text{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \text{var}[\bar{X}_n] + \text{bias}(\bar{X}_n; \mu)^2 = \frac{\text{var}[X_i]}{n}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\cancel{\hat{M}_n = \mu}$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_3] \quad \text{NO}$$

$$\text{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \text{var}[\bar{X}_n] + \text{bias}(\bar{X}_n; \mu)^2 = \frac{\text{var}[X_i]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

$$\hat{M}'_n \quad \text{SÌ}$$

$$\hat{M}''_n \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{SÌ}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_3] \quad \text{NO}$$

$$\text{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \text{var}[\bar{X}_n] + \text{bias}(\bar{X}_n; \mu)^2 = \frac{\text{var}[X_i]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{SÌ}$$

Esempi

Vogliamo stimare il parametro $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ usando gli stimatori

$$\hat{M}_n = \mu$$

$$\hat{M}'_n = X_3$$

$$\hat{M}''_n = \bar{X}_n$$

- Lo stimatore è indipendente da μ ?

$$\hat{M}_n \quad \text{NO}$$

\bar{X}_n è lo stimatore migliore di $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[\hat{M}_n] = \mu \quad \text{Sì}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}'_n] = \mu \quad \text{Sì}$$

$$\mathbb{E}[\hat{M}''_n] = \mu \quad \text{Sì}$$

- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(\hat{M}_n; \mu) = \mathbb{E}[(\mu - \mu)^2] = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{Sì}$$

$$\text{mse}(\hat{M}'_n; \mu) = \mathbb{E}[(X_3 - \mu)^2] = \text{var}[X_3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_3] \quad \text{NO}$$

$$\text{mse}(\hat{M}''_n; \mu) = \text{var}[\bar{X}_n] + \text{bias}(\bar{X}_n; \mu)^2 = \frac{\text{var}[X_i]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{Sì}$$

- **ERRORE STANDARD** = $\underbrace{\text{se}(\hat{\Theta}; \theta)}_{\substack{\text{standard} \\ \text{error}}} := \sqrt{\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta)}$

- ERRORE STANDARD = $\text{se}(\hat{\Theta}; \theta) := \sqrt{\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta)}$
- EFFICIENZA RELATIVA di $\hat{\Theta}$ contro $\hat{\Theta}' := \frac{\text{mse}(\hat{\Theta}'; \theta)}{\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta)}$

- ERRORE STANDARD = $\text{se}(\hat{\theta}; \theta) := \sqrt{\text{mse}(\hat{\theta}; \theta)}$
- EFFICIENZA RELATIVA di $\hat{\theta}$ contro $\hat{\theta}' := \frac{\text{mse}(\hat{\theta}'; \theta)}{\text{mse}(\hat{\theta}; \theta)}$

Se supera 1, lo stimatore $\hat{\theta}$ è meglio di $\hat{\theta}'$ in termini di mse

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ?

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? **Sì**

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto ?

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[S_n^2] = ???$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i^2] = \text{var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i^2] = \text{var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i^2] = \text{var}[X_i] + \mathbb{E}[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] = \text{var}[\bar{X}_n] + \mathbb{E}[\bar{X}_n]^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] = \text{var}[\bar{X}_n] + \mathbb{E}[\bar{X}_n]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z^2] = \text{var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] = \text{var}[\bar{X}_n] + \mathbb{E}[\bar{X}_n]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ n (\sigma^2 + \mu^2) - (\sigma^2 + n \mu^2) \right\} \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto ?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ n (\sigma^2 + \mu^2) - (\sigma^2 + n\mu^2) \right\} \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ n (\sigma^2 + \mu^2) - (\sigma^2 + n\mu^2) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} (n-1) \sigma^2 \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ n (\sigma^2 + \mu^2) - (\sigma^2 + n\mu^2) \right\} \\ &= \frac{1}{\cancel{n-1}} (\cancel{n-1}) \sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? **Sì**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum \mathbb{E}[X_i^2] - n \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ n (\sigma^2 + \mu^2) - (\sigma^2 + n\mu^2) \right\} \\ &= \frac{1}{\cancel{n-1}} (\cancel{n-1}) \sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(S_n^2; \sigma^2) = \text{var}[S_n^2] + \text{bias}(S_n^2; \sigma^2)^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(S_n^2; \sigma^2) = \text{var}[S_n^2] + \text{bias}(S_n^2; \sigma^2)^2$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\text{mse}(S_n^2; \sigma^2) = \text{var}[S_n^2] + \cancel{\text{bias}(S_n^2; \sigma^2)^2}$$

$$= \frac{1}{n} \mathbb{E}[(X_i - \mu)^4] - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)} \quad (\text{più complicato})$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica?

$$\begin{aligned} \text{mse}(S_n^2; \sigma^2) &= \text{var} \left[S_n^2 \right] + \cancel{\text{bias}(S_n^2; \sigma^2)^2} \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[(X_i - \mu)^4 \right] - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica? **Sì**

$$\begin{aligned} \text{mse}(\mathbf{S}_n^2; \sigma^2) &= \text{var} \left[S_n^2 \right] + \cancel{\text{bias}(\mathbf{S}_n^2; \sigma^2)^2} \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[(X_i - \mu)^4 \right] - \frac{\sigma^4(n-3)}{n(n-1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{0} \end{aligned}$$

Varianza campionaria

Vogliamo stimare $\sigma^2 := \text{var}[X_i]$ con la *varianza campionaria*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}_n^2 \right\}$$

- Lo stimatore è indipendente da σ^2 ? Sì
- Lo stimatore è non-distorto? Sì
- Lo stimatore è consistente in media quadratica? Sì

S_n^2 è un buono stimatore di σ^2

Funzioni di parametri

IPOSTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \end{array} \right.$

Funzioni di parametri

IOTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$

Funzioni di parametri

IPOSTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$

Qual è uno stimatore non distorto di θ ?

Funzioni di parametri

IPOTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore **approssimativamente non-distorto** di θ

Funzioni di parametri

IPOTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore **approssimativamente non-distorto** di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})]$$

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore **approssimativamente non-distorto** di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \underset{\substack{\text{metodo} \\ \text{delta}}}{\simeq} g(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}])$$

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore **approssimativamente non-distorto** di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]) \underset{\substack{\mathbb{E}[\hat{A}] = \alpha \\ \mathbb{E}[\hat{B}] = \beta}}{=} g(\alpha, \beta)$$

Funzioni di parametri

IPOTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore **approssimativamente non-distorto** di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore **approssimativamente non-distorto** di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

$$\Rightarrow \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \simeq 0$$

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

$$\Rightarrow \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \simeq 0$$

OSSERVAZIONE:

$$\theta = a\alpha + b\beta \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta} = a\hat{A} + b\hat{B} \text{ è esattamente non-distorto}$$

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \mathbb{E}[g(\hat{A}, \hat{B})] \simeq g(\mathbb{E}[\hat{A}], \mathbb{E}[\hat{B}]) = g(\alpha, \beta) = \theta$$

$$\Rightarrow \text{bias}(\hat{\Theta}; \theta) = \mathbb{E}[\hat{\Theta}] - \theta \simeq 0$$

OSSERVAZIONE:

$$\theta = a\alpha + b\beta \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta} = a\hat{A} + b\hat{B} \text{ è esattamente non-distorto}$$

E per stimare l'errore $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta)$?

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = e(\alpha, \beta, \text{var}[\hat{A}], \text{var}[\hat{B}])$ con e funzione opportuna

Funzioni di parametri

$$\text{IPOTESI: } \left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$$

$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = e(\alpha, \beta, \text{var}[\hat{A}], \text{var}[\hat{B}])$ con e funzione opportuna

$$\text{IPOTESI ULTERIORI: } \left\{ \begin{array}{l} - S_A^2 \text{ stimatore non-distorto di } \text{var}[\hat{A}] \\ - S_B^2 \text{ stimatore non-distorto di } \text{var}[\hat{B}] \end{array} \right.$$

Funzioni di parametri

IOTESI: $\left\{ \begin{array}{l} - \alpha, \beta, \theta \text{ parametri con } \theta = g(\alpha, \beta) \\ - \hat{A} \text{ stimatore non-distorto di } \alpha \\ - \hat{B} \text{ stimatore non-distorto di } \beta \end{array} \right.$

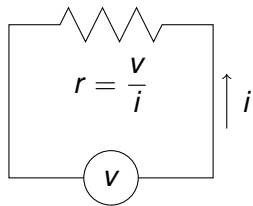
$\hat{\Theta} := g(\hat{A}, \hat{B})$ è uno stimatore approssimativamente non-distorto di θ

$\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta) = e(\alpha, \beta, \text{var}[\hat{A}], \text{var}[\hat{B}])$ con e funzione opportuna

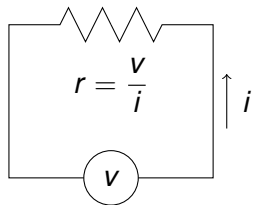
IOTESI ULTERIORI: $\left\{ \begin{array}{l} - S_A^2 \text{ stimatore non-distorto di } \text{var}[\hat{A}] \\ - S_B^2 \text{ stimatore non-distorto di } \text{var}[\hat{B}] \end{array} \right.$

\Rightarrow stesso motivo di prima $\widehat{\text{MSE}} := e(\hat{A}, \hat{B}, S_A^2, S_B^2)$ stimatore approssimativamente non-distorto di $\text{mse}(\hat{\Theta}; \theta)$

ESEMPIO



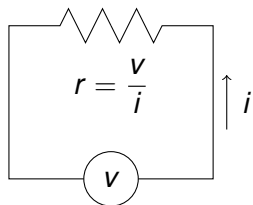
ESEMPIO



$$r = \frac{v}{i}$$

$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$



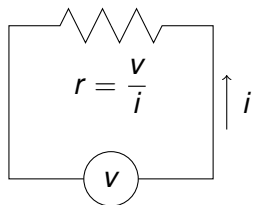
$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

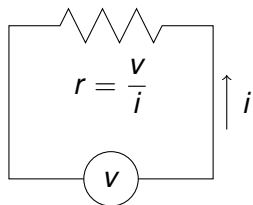
no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

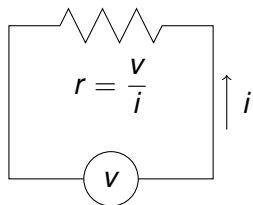
$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i]$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

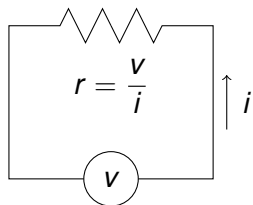
$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

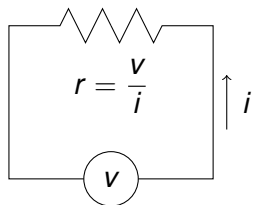
$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \quad \Rightarrow \quad \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

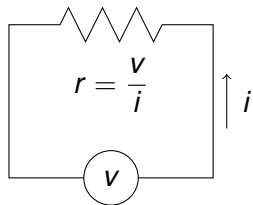
no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

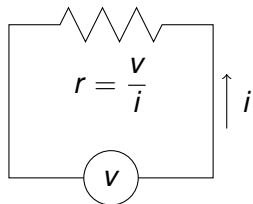
- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore **approx.** non-distorto di r

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

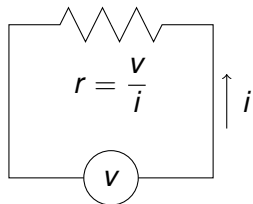
$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r , perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] = \mathbb{E}\left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}}\right]$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

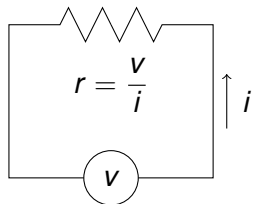
$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r , perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] = \mathbb{E}\left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}}\right] \underset{\substack{\simeq \\ \text{metodo} \\ \text{delta}}}{=} \frac{\mathbb{E}[\bar{V}]}{\mathbb{E}[\bar{I}]}$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

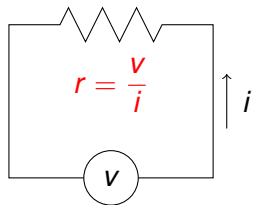
$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r , perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] = \mathbb{E}\left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}}\right] \underset{\text{metodo delta}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\bar{V}]}{\mathbb{E}[\bar{I}]} = \frac{v}{i}$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

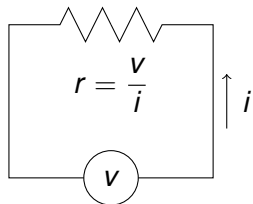
$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore approx. non-distorto di r , perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] = \mathbb{E}\left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}}\right] \underset{\text{metodo delta}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\bar{V}]}{\mathbb{E}[\bar{I}]} = \frac{v}{i} = r$$

ESEMPIO



$m = 5$ misure di tensione V_1, \dots, V_5 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[V_i] = v$

$n = 3$ misure di corrente I_1, I_2, I_3 i.i.d.

no errore sistematico $\Rightarrow \mathbb{E}[I_j] = i$

- $\bar{V} = \frac{1}{5}(V_1 + \dots + V_5)$ è uno stimatore non-distorto di v , perché

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = \mathbb{E}[V_i] = v \Rightarrow \text{bias}(\bar{V}; v) = 0$$

- $\bar{I} = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$ è uno stimatore non-distorto di i (idem)

- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ è uno stimatore **approx. non-distorto** di r , perché

$$\mathbb{E}[\hat{R}] = \mathbb{E}\left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}}\right] \underset{\text{metodo delta}}{\simeq} \frac{\mathbb{E}[\bar{V}]}{\mathbb{E}[\bar{I}]} = \frac{v}{i} = r$$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\text{mse}(\bar{V}; \nu) = \text{var}[\bar{V}] + \text{bias}(\bar{V}; \nu)^2$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\text{mse}(\bar{V}; v) = \text{var}[\bar{V}] + \cancel{\text{bias}(\bar{V}; v)^2} = \text{var}[\bar{V}]$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\text{mse}(\bar{V}; v) = \text{var}[\bar{V}] + \cancel{\text{bias}(\bar{V}; v)^2} = \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\text{mse}(\bar{V}; v) = \text{var}[\bar{V}] + \cancel{\text{bias}(\bar{V}; v)^2} = \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m}$
 $\Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_V := \frac{S_V^2}{m}$ è uno stimatore non-distorto di $\text{mse}(\bar{V}; v)$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\text{mse}(\bar{V}; v) = \text{var}[\bar{V}] + \cancel{\text{bias}(\bar{V}; v)^2} = \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m}$
 $\Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_V := \frac{S_V^2}{m}$ è uno stimatore non-distorto di $\text{mse}(\bar{V}; v)$
- $\text{mse}(\bar{I}; i) = \dots = \frac{\sigma_I^2}{n}$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$

- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ **non-distorto** di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$

• $\text{mse}(\bar{V}; v) = \text{var}[\bar{V}] + \cancel{\text{bias}(\bar{V}; v)^2} = \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m}$

$\Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_V := \frac{S_V^2}{m}$ è uno stimatore non-distorto di $\text{mse}(\bar{V}; v)$

• $\text{mse}(\bar{I}; i) = \dots\dots\dots = \frac{\sigma_I^2}{n}$

$\Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_I := \frac{S_I^2}{n}$ è uno stimatore non-distorto di $\text{mse}(\bar{I}; i)$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
 - $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
 - $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \underbrace{\text{bias}(\hat{R}; r)^2}_{\simeq 0}$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i}$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \underbrace{\text{bias}(\hat{R}; r)^2}_{\simeq 0} \simeq \text{var}[\hat{R}]$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})]$
 $\underset{\substack{\text{metodo} \\ \text{delta}}}{\simeq} [\partial_1 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{V}] + [\partial_2 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{I}]$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})]$
 $\simeq [\partial_1 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{V}] + [\partial_2 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{I}]$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y} \quad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = -\frac{x}{y^2}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})]$
 $\simeq [\partial_1 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{V}] + [\partial_2 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{I}]$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y} \quad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = v \quad \mathbb{E}[\bar{I}] = i$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- $\text{mse}(\hat{R}; r) = \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})]$
 $\simeq [\partial_1 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{V}] + [\partial_2 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{I}]$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y} \quad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = v \quad \mathbb{E}[\bar{I}] = i \quad \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m} \quad \text{var}[\bar{I}] = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$

$$\begin{aligned} \bullet \text{mse}(\hat{R}; r) &= \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})] \\ &\simeq [\partial_1 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{V}] + [\partial_2 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{I}] \\ &= \left[\frac{1}{i}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2}\right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} \end{aligned}$$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y} \quad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = v \quad \mathbb{E}[\bar{I}] = i \quad \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m} \quad \text{var}[\bar{I}] = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$

$$\begin{aligned} \bullet \text{mse}(\hat{R}; r) &= \text{var}[\hat{R}] + \text{bias}(\hat{R}; r)^2 \simeq \text{var}[\hat{R}] = \text{var}[g(\bar{V}, \bar{I})] \\ &\simeq [\partial_1 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{V}] + [\partial_2 g(\mathbb{E}[\bar{V}], \mathbb{E}[\bar{I}])]^2 \text{var}[\bar{I}] \\ &= \left[\frac{1}{i} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} \end{aligned}$$

$$\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y} \quad \partial_2 g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\mathbb{E}[\bar{V}] = v \quad \mathbb{E}[\bar{I}] = i \quad \text{var}[\bar{V}] = \frac{\sigma_V^2}{m} \quad \text{var}[\bar{I}] = \frac{\sigma_I^2}{n}$$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- \bar{V} non-distorto di v
- \bar{I} non-distorto di i

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
 - $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
 - $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
 - \bar{V} non-distorto di v
 - \bar{I} non-distorto di i
- $\text{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n}$

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
 - $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
 - $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
 - \bar{V} non-distorto di v
 - \bar{I} non-distorto di i
- $\text{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2)$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- \bar{V} non-distorto di v
- \bar{I} non-distorto di i

$$\bullet \text{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{i} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{i^2} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2)$$

$\Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_R := e(\bar{V}, \bar{I}, S_V^2, S_I^2)$ è uno stimatore approx.
non-distorto di $\text{mse}(\hat{R}; r)$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- \bar{V} non-distorto di v
- \bar{I} non-distorto di i

$$\bullet \text{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{\bar{i}} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{\bar{i}^2} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_R &:= e(\bar{V}, \bar{I}, S_V^2, S_I^2) \\ &= \left[\frac{1}{\bar{I}} \right]^2 \cdot \frac{S_V^2}{m} + \left[-\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2} \right]^2 \cdot \frac{S_I^2}{n} \end{aligned}$$

ESEMPIO

Per stimare gli mse, ricordiamo gli stimatori

- $S_V^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (V_i - \bar{V})^2$ non-distorto di $\sigma_V^2 = \text{var}[V_i]$
- $S_I^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (I_j - \bar{I})^2$ non-distorto di $\sigma_I^2 = \text{var}[I_j]$
- $\hat{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = g(\bar{V}, \bar{I})$ approx. non-distorto di $r = \frac{v}{i} = g(v, i)$
- \bar{V} non-distorto di v
- \bar{I} non-distorto di i

$$\bullet \text{mse}(\hat{R}; r) \simeq \left[\frac{1}{\bar{I}} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_V^2}{m} + \left[-\frac{v}{\bar{I}^2} \right]^2 \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} = e(v, i, \sigma_V^2, \sigma_I^2)$$

$$\Rightarrow \widehat{\text{MSE}}_R := e(\bar{V}, \bar{I}, S_V^2, S_I^2)$$

$$= \frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_V^2}{m} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_I^2}{n}$$

Dopo le misure:

$$\begin{array}{lll} v_1 = 3.4 & v_2 = 3.3 & v_3 = 2.7 \\ v_4 = 3.3 & v_5 = 2.9 & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases}$$

Dopo le misure:

$$\begin{array}{lll} v_1 = 3.4 & v_2 = 3.3 & v_3 = 2.7 \\ v_4 = 3.3 & v_5 = 2.9 & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_i^2 = 0.123 \end{cases}$$

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{aligned}
 v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 &\Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases} \\
 v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 & \\
 i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 &\Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_i^2 = 0.123 \end{cases}
 \end{aligned}$$

parametro	stimatore	
v	\bar{V}	
i	\bar{I}	
r	$\frac{\bar{V}}{\bar{I}}$	
$\text{mse}(\bar{V}; v)$	$\frac{S_v^2}{m}$	
$\text{mse}(\bar{I}; i)$	$\frac{S_i^2}{n}$	
$\text{mse}(\hat{R}; r)$	$\underbrace{\frac{1}{\bar{I}^2} \cdot \frac{S_v^2}{m} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{I}^4} \cdot \frac{S_i^2}{n}}_{\text{prima dell'esperimento}}$	

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{aligned}
 v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \\
 v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_i^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	\bar{V}	3.12
i	\bar{I}	1.83
r	$\frac{\bar{V}}{\bar{I}}$	
$\text{mse}(\bar{V}; v)$	$\frac{S_v^2}{m}$	
$\text{mse}(\bar{I}; i)$	$\frac{S_i^2}{n}$	
$\text{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{\hat{r}^2} \cdot \frac{S_v^2}{m} + \frac{\bar{V}^2}{\hat{I}^4} \cdot \frac{S_i^2}{n}$	
prima dell'esperimento		dopo l'esperimento

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{aligned}
 v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \\
 v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_i^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	\bar{V}	3.12
i	\bar{i}	1.83
r	$\frac{\bar{V}}{\bar{i}}$	$\frac{3.12}{1.83} = 1.70$
$\text{mse}(\bar{V}; v)$	$\frac{S_v^2}{m}$	
$\text{mse}(\bar{i}; i)$	$\frac{S_i^2}{n}$	
$\text{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{f^2} \cdot \frac{S_v^2}{m} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{i}^4} \cdot \frac{S_i^2}{n}$	
prima dell'esperimento		dopo l'esperimento

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{array}{l} v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 \\ v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases}$$

$$i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_i^2 = 0.123 \end{cases}$$

parametro	stimatore	stima
v	\bar{V}	3.12
i	\bar{i}	1.83
r	$\frac{\bar{V}}{\bar{i}}$	$\frac{3.12}{1.83} = 1.70$
$\text{mse}(\bar{V}; v)$	$\frac{S_v^2}{m}$	$\frac{0.092}{5} = 0.018$
$\text{mse}(\bar{i}; i)$	$\frac{S_i^2}{n}$	$\frac{0.123}{3} = 0.041$
$\text{mse}(\hat{R}; r)$	$\frac{1}{f^2} \cdot \frac{S_v^2}{m} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{i}^4} \cdot \frac{S_i^2}{n}$	

prima dell'esperimento
dopo l'esperimento

ESEMPIO

Dopo le misure:

$$\begin{aligned}
 v_1 = 3.4 \quad v_2 = 3.3 \quad v_3 = 2.7 &\Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = 3.12 \\ s_v^2 = 0.092 \end{cases} \\
 v_4 = 3.3 \quad v_5 = 2.9 & \\
 i_1 = 1.8 \quad i_2 = 1.5 \quad i_3 = 2.2 &\Rightarrow \begin{cases} \bar{i} = 1.83 \\ s_i^2 = 0.123 \end{cases}
 \end{aligned}$$

parametro	stimatore	stima
v	\bar{V}	3.12
i	\bar{i}	1.83
r	$\frac{\bar{V}}{\bar{i}}$	$\frac{3.12}{1.83} = 1.70$
$\text{mse}(\bar{V}; v)$	$\frac{S_v^2}{m}$	$\frac{0.092}{5} = 0.018$
$\text{mse}(\bar{i}; i)$	$\frac{S_i^2}{n}$	$\frac{0.123}{3} = 0.041$
$\text{mse}(\hat{R}; r)$	$\underbrace{\frac{1}{\bar{i}^2} \cdot \frac{S_v^2}{m} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{i}^4} \cdot \frac{S_i^2}{n}}_{\text{prima dell'esperimento}}$	$\underbrace{\frac{1}{1.83^2} \cdot \frac{0.092}{5} + \frac{3.12^2}{1.83^4} \cdot \frac{0.123}{3}}_{\text{dopo l'esperimento}} = 0.041$

PROBLEMA: anche se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore di θ , può capitare che

$$\mathbb{P}(\hat{\theta} = \theta) = 0$$

PROBLEMA: anche se $\hat{\theta}$ è un buono stimatore di θ , può capitare che

$$\mathbb{P}(\hat{\theta} = \theta) = 0$$

SOLUZIONE: costruire un intervallo in cui siamo (relativamente) sicuri di trovare il parametro θ

Definizione

Siano $L = \ell(X_1, \dots, X_n)$ e $U = u(X_1, \dots, X_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}(L < \theta < U) = \gamma \quad (\text{con } \gamma \in (0, 1) \text{ fissato})$$

Definizione

Siano $L = \ell(X_1, \dots, X_n)$ e $U = u(X_1, \dots, X_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}(L < \theta < U) = \gamma \quad (\text{con } \gamma \in (0, 1) \text{ fissato})$$

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si dice che

$$(\ell(x_1, \dots, x_n), u(x_1, \dots, x_n))$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

Definizione

Siano $L = \ell(X_1, \dots, X_n)$ e $U = u(X_1, \dots, X_n)$ due statistiche tali che

$$\mathbb{P}(L < \theta < U) = \gamma \quad (\text{con } \gamma \in (0, 1) \text{ fissato})$$



Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si dice che

$$(\ell(x_1, \dots, x_n), u(x_1, \dots, x_n))$$



è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

TIPICAMENTE: $\gamma = 90\%$ o 95% o 99%



Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 =$ 	\rightarrow	$x_1 = 1.2$	realizzazioni (dati)
	$X_2 =$ 	\rightarrow	$x_2 = 0.6$	
	\dots	\rightarrow	\dots	
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	\rightarrow	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 = $  $X_2 = $  \dots	\rightarrow \rightarrow \rightarrow	$x_1 = 1.2$ $x_2 = 0.6$ \dots	realizzazioni (dati)
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	\rightarrow	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta$ $< u(X_1, X_2, \dots)) = \gamma$			

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 = $  $X_2 = $  \dots	\rightarrow	$x_1 = 1.2$ $x_2 = 0.6$ \dots	realizzazioni (dati)
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	\rightarrow	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta$ $< u(X_1, X_2, \dots)) = \gamma$	\rightarrow	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta$ $< u(1.2, 0.6, \dots)$	IC

Definizione (*IC unilateri*)

Sia $L = \ell(X_1, \dots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}(\theta > L) = \gamma \quad (\text{con } \gamma \in (0, 1) \text{ fissato})$$

Definizione (*IC unilateri*)

Sia $L = \ell(X_1, \dots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}(\theta > L) = \gamma \quad (\text{con } \gamma \in (0, 1) \text{ fissato})$$

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si dice che

$$(\ell(x_1, \dots, x_n), +\infty)$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ (*$IC_\theta(\gamma)$*)

Definizione (*IC unilateri*)

Sia $U = u(X_1, \dots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}(\theta < U) = \gamma \quad (\text{con } \gamma \in (0, 1) \text{ fissato})$$

Definizione (*IC unilateri*)

Sia $U = u(X_1, \dots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}(\theta < U) = \gamma \quad (\text{con } \gamma \in (0, 1) \text{ fissato})$$

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si dice che

$$(-\infty, u(x_1, \dots, x_n))$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ (*$IC_\theta(\gamma)$*)

Definizione (*IC* unilateri)

Sia $U = u(X_1, \dots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}(\theta < U) = \gamma \quad (\text{con } \gamma \in (0, 1) \text{ fissato})$$

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si dice che

$$(-\infty, u(x_1, \dots, x_n))$$

è un *intervallo di confidenza* di livello γ per il parametro θ ($IC_\theta(\gamma)$)

SPESSE: $L = \hat{\theta} - E$, $U = \hat{\theta} + E$ con

- $\hat{\theta}$ = stimatore di θ
- E = errore (costante o aleatorio)

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: $z_\gamma =$ quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: $z_\gamma =$ quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo verificare che

$$\mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \gamma$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) &= \\ &= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) &= \\ &= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ \Rightarrow $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
riprod. di N

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \\&= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\&= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\xRightarrow{\text{riprod. di } N}$ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \\&= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\&= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\xRightarrow{\text{riprod. di } N}$ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \\&= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\&= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \\&= \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right]\end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\xRightarrow{\text{riprod. di } N}$ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \\&= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\&= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \\&= \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right] = \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \frac{1+\gamma}{2}\right]\end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\xRightarrow{\text{riprod. di } N}$ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \\&= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\&= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \\&= \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right] = \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \frac{1+\gamma}{2}\right] = \gamma\end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\xRightarrow{\text{riprod. di } N}$ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \\ &= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \\ &= \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \Phi\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right] = \frac{1+\gamma}{2} - \left[1 - \frac{1+\gamma}{2}\right] = \gamma \end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: $z_\gamma =$ quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\xRightarrow{\text{riprod. di } N}$ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \dots \\ &= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \dots = \gamma\end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: $z_\gamma =$ quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\xRightarrow{\text{riprod. di } N}$ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \dots \\ &= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \dots = \gamma\end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione normale

SIMBOLO: $z_\gamma =$ quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ \Rightarrow $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
riprod. di N

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \dots \\ &= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \dots = \gamma \end{aligned}$$

STATISTICA PIVOT

IC per il valore atteso di un campione **numeroso**

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con **n grande** $\xRightarrow{\text{TLC}} \bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$ **approssimato**

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \dots \\ &= \mathbb{P}\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) \approx \dots \approx \gamma \end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left. \begin{aligned} &\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \\ &\left(\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right) \\ &\left(-\infty, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned} \right\} \text{ sono } IC_\mu(\gamma)$$

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left. \begin{aligned} &\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \\ &\left(\bar{X} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right) \\ &\left(-\infty, \bar{X} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned} \right\} \text{ sono } IC_\mu(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \bar{X} - e, \quad U = \bar{X} + e$ con

- \bar{X} stimatore di μ
- $e = z_{\dots} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ errore costante

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left. \begin{aligned} &\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \\ &\left(\bar{X} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right) \\ &\left(-\infty, \bar{X} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned} \right\} \text{ sono } IC_\mu(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \bar{X} - e, \quad U = \bar{X} + e$ con

- \bar{X} stimatore di μ
- $e = z_{\dots} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ errore costante $\rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$ (più misure)

IC per il valore atteso di un campione a varianza nota

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0, 1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left. \begin{aligned} &\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \\ &\left(\bar{X} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right) \\ &\left(-\infty, \bar{X} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned} \right\} \text{ sono } IC_\mu(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \bar{X} - e, \quad U = \bar{X} + e$ con

- \bar{X} stimatore di μ
- $e = z_{\dots} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ errore costante $\rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$ (più misure)
o $\sigma \rightarrow 0$ (più precisione)

IC per il valore atteso di un campione **a varianza nota**

SIMBOLO: z_γ = quantile di ordine γ di $N(0,1)$

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande o $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(\bar{X} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

$$\left(-\infty, \bar{X} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Ma se non so quanto vale σ ?

OSSERVAZIONE: $L = \bar{X} - e$, $U = \bar{X} + e$ con

- \bar{X} stimatore di μ

- $e = z_{\dots} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ errore costante $\rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$ (più misure)
o $\sigma \rightarrow 0$ (più precisione)

IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n - 1)$).

IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n - 1)$).

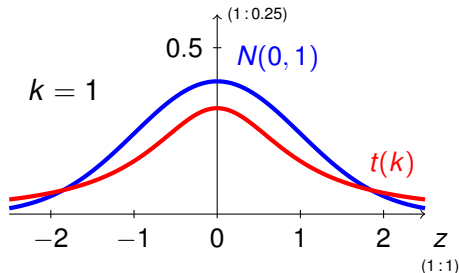
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n - 1)$).



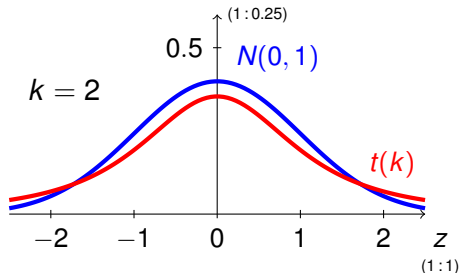
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n - 1)$).



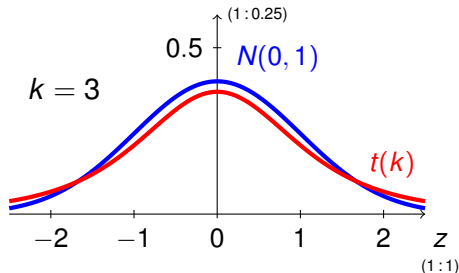
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n - 1)$).



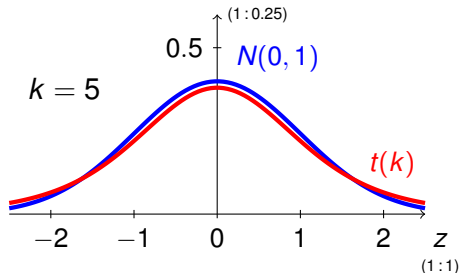
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n - 1)$).



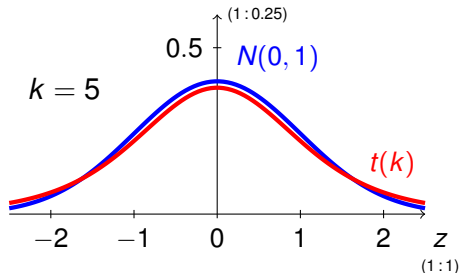
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n - 1)$).



- $t(k)$ è simmetrica

IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n - 1)$).

Tavola dei quantili della distribuzione T(n)								
n	Valore della funzione di ripartizione							
	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.655
2	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.925
3	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.840
4	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.604
5	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.032
6	0.7176	0.9087	1.1342	1.4398	1.9432	2.4478	3.1427	3.707

- $t(k)$ è simmetrica
- i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati

$$t_{0.85}(3) = 1.2498$$

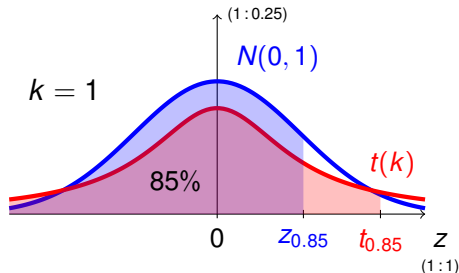
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n - 1)$).



- $t(k)$ è simmetrica
 - i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati
 - $t_\gamma(k) > z_\gamma$
 - $t_\gamma(k) \downarrow z_\gamma$ per $k \rightarrow \infty$
- } se $\gamma > 50\%$

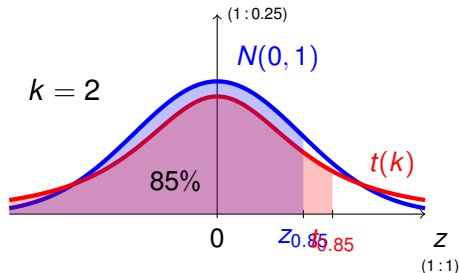
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n - 1)$).



- $t(k)$ è simmetrica
 - i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati
 - $t_\gamma(k) > z_\gamma$
 - $t_\gamma(k) \downarrow z_\gamma$ per $k \rightarrow \infty$
- } se $\gamma > 50\%$

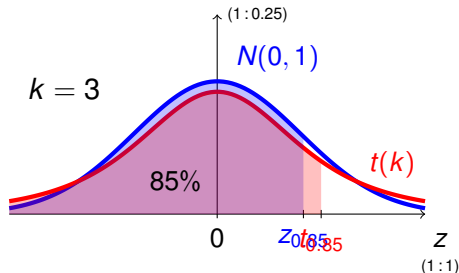
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n - 1)$).



- $t(k)$ è simmetrica
 - i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati
 - $t_\gamma(k) > z_\gamma$
 - $t_\gamma(k) \downarrow z_\gamma$ per $k \rightarrow \infty$
- } se $\gamma > 50\%$

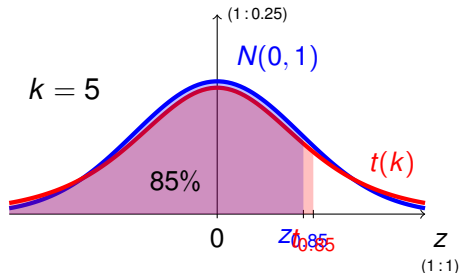
IC per il valore atteso di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n}$$

ha densità *t di Student* con $n - 1$ gradi di libertà ($t(n - 1)$).



- $t(k)$ è simmetrica
 - i quantili $t_\gamma(k)$ sono tabulati
 - $t_\gamma(k) > z_\gamma$
 - $t_\gamma(k) \downarrow z_\gamma$ per $k \rightarrow \infty$
- } se $\gamma > 50\%$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\bar{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\bar{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bar{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right) &= \dots \\ &= \mathbb{P} \left(-t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) < \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}}_{\sim t(n-1)} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) = \dots = \gamma \end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\bar{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bar{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right) &= \dots \\ &= \mathbb{P} \left(-t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) < \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}}_{\sim t(n-1)} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) = \dots = \gamma \end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\bar{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bar{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right) &= \dots \\ &= \mathbb{P} \left(-t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) < \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}}_{\sim t(n-1)} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) = \dots = \gamma \end{aligned}$$

STATISTICA PIVOT

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left. \begin{aligned} &\left(\bar{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \\ &\left(\bar{x} - t_{\gamma}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, +\infty \right) \\ &\left(-\infty, \bar{x} + t_{\gamma}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned} \right\} \text{ sono } IC_{\mu}(\gamma)$$

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left. \begin{aligned} &\left(\bar{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \\ &\left(\bar{X} - t_{\gamma}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, +\infty \right) \\ &\left(-\infty, \bar{X} + t_{\gamma}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned} \right\} \text{ sono } IC_{\mu}(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \bar{X} - E, \quad U = \bar{X} + E$ con

- \bar{X} stimatore di μ
- $E = t_{\dots}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$ errore aleatorio

IC per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI:
$$\left. \begin{aligned} &\left(\bar{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \\ &\left(\bar{X} - t_{\gamma}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, +\infty \right) \\ &\left(-\infty, \bar{X} + t_{\gamma}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned} \right\} \text{ sono } IC_{\mu}(\gamma)$$

OSSERVAZIONE: $L = \bar{X} - E, \quad U = \bar{X} + E$ con

- \bar{X} stimatore di μ
- $E = t_{\dots}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$ errore aleatorio non riducibile a priori

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) &= \dots \\ &= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

STATISTICA PIVOT

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) &= \dots \\ &= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sigma}{S}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) &= \dots \\ &= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sigma}{S} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0, 1) \end{array} \right.$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) &= \dots \\ &= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sigma}{S} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0, 1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) &= \dots \\ &= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\sigma}{S}}_{\simeq 1} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) &= \dots \\ &= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\sigma}{S}}_{\simeq 1} \approx N(0,1) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)$$

$$\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\sigma}{S}}_{\simeq 1} \approx N(0,1) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) = \dots = \gamma$$

$$\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\sigma}{S}}_{\simeq 1} \approx N(0,1) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI: $\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P} \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = \dots$$

$$= \mathbb{P} \left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) = \dots = \gamma$$

$$\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \underbrace{\frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\approx N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\sigma}{S}}_{\simeq 1} \approx N(0,1) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{TLC}}{\approx} N(0,1) \\ S_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 \end{cases}$$

IC per il valore atteso di un campione numeroso

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim$ qualsiasi e n grande

TESI:
$$\left. \begin{aligned} &\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \\ &\left(\bar{x} - z_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}}, +\infty \right) \\ &\left(-\infty, \bar{x} + z_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned} \right\} \text{ sono } IC_{\mu}(\gamma)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i]$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_{\mu}(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right)$ perché $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot \bar{x}^2 \right)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}_{=\bar{x}} - n \cdot \bar{x}^2 \right)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}_{=\bar{x}} - n \cdot \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} (n \cdot \bar{x} - n \cdot \bar{x}^2)$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} (n \cdot \bar{x} - n \cdot \bar{x}^2) \\ &= \frac{n}{n-1} \bar{x} (1 - \bar{x}) \end{aligned}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} (n \cdot \bar{x} - n \cdot \bar{x}^2) \\ &= \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\simeq 1} \bar{x}(1-\bar{x}) \end{aligned}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} (n \cdot \bar{x} - n \cdot \bar{x}^2) \\ &= \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\simeq 1} \bar{x}(1-\bar{x}) \simeq \bar{x}(1-\bar{x}) \end{aligned}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \text{ è un } IC_{\mu}(\gamma) = IC_q(\gamma)$$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} (n \cdot \bar{x} - n \cdot \bar{x}^2) \\ &= \frac{n}{n-1} \bar{x}(1-\bar{x}) \simeq \bar{x}(1-\bar{x}) \end{aligned}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} (n \cdot \bar{x} - n \cdot \bar{x}^2) \\ &= \frac{n}{n-1} \bar{x}(1-\bar{x}) \simeq \bar{x}(1-\bar{x}) \Rightarrow s \simeq \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})} \end{aligned}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ è un $IC_\mu(\gamma) = IC_q(\gamma)$

con $\mu = \mathbb{E}[X_i] = q$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} (n \cdot \bar{x} - n \cdot \bar{x}^2) \\ &= \frac{n}{n-1} \bar{x}(1-\bar{x}) \simeq \bar{x}(1-\bar{x}) \Rightarrow s \simeq \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})} \end{aligned}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \bar{X} - E, \quad U = \bar{X} + E$ con

- $\bar{X} =$ **frequenza empirica** (stimatore di q)

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \bar{X} - E, \quad U = \bar{X} + E$ con

- \bar{X} = frequenza empirica (stimatore di q)
- $E = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$ errore aleatorio

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

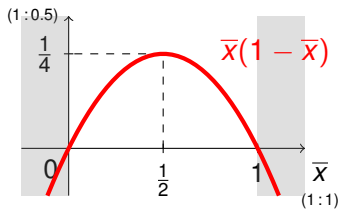
IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \bar{X} - E$, $U = \bar{X} + E$ con

- \bar{X} = frequenza empirica (stimatore di q)

- $E = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$ errore aleatorio



$$\bar{x} \in [0, 1] \Rightarrow \bar{x}(1-\bar{x}) \leq \frac{1}{4}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

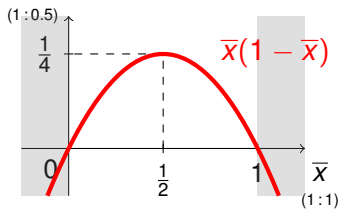
IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \bar{X} - E$, $U = \bar{X} + E$ con

- \bar{X} = frequenza empirica (stimatore di q)

- $E = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{1}{4n}}$



$$\bar{x} \in [0, 1] \Rightarrow \bar{x}(1 - \bar{x}) \leq \frac{1}{4}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

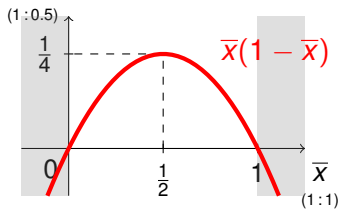
IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \bar{X} - E$, $U = \bar{X} + E$ con

- \bar{X} = frequenza empirica (stimatore di q)

- $E = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{n}} = z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}}$



$$\bar{x} \in [0, 1] \Rightarrow \bar{x}(1 - \bar{x}) \leq \frac{1}{4}$$

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI: $\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$ è un $IC_q(\gamma)$

OSSERVAZIONE: $L = \bar{X} - E, \quad U = \bar{X} + E$ con

- \bar{X} = frequenza empirica (stimatore di q)
- $E \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ riducibile a priori

IC per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$ e n grande

TESI:
$$\left. \begin{aligned} &\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right) \\ &\left(\bar{x} - z_{\gamma} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, 1 \right) \\ &\left(0, \bar{x} + z_{\gamma} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right) \end{aligned} \right\} \text{ sono } IC_q(\gamma)$$

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).

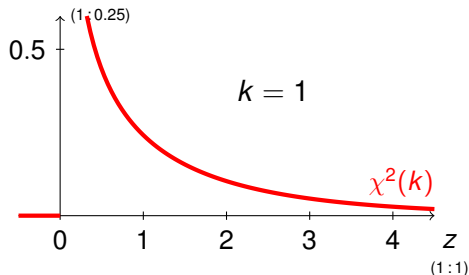
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



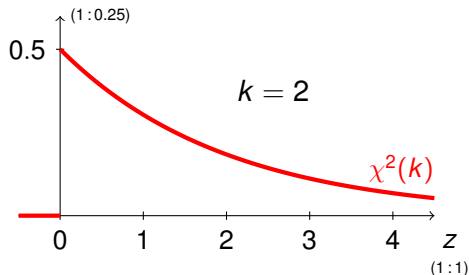
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



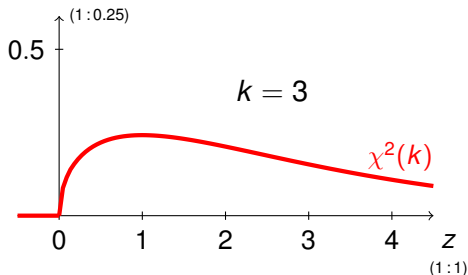
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



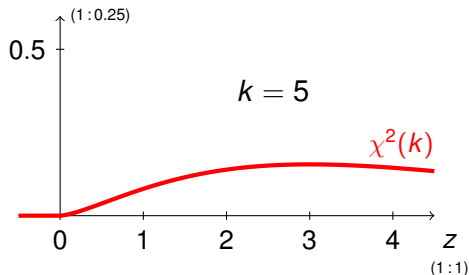
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



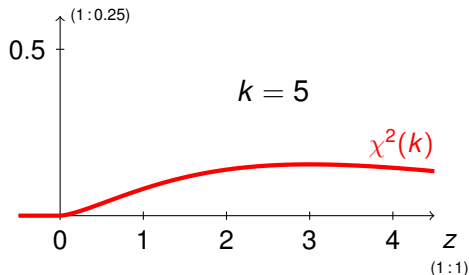
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



• $\text{supp } \chi^2(k) = [0, +\infty)$

IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).

n	0.0005	0.001	0.005	0.01	...	99	0.995	0.999	0.9995
1	3.929E-07	1.570E-06	3.927E-05	1.571E-056349	7.8794	10.8274	12.1153
2	9.997E-04	2.001E-03	0.0100	0.02002104	10.5965	13.8150	15.2014
3	0.0153	0.0243	0.0717	0.113449	12.8381	16.2660	17.7311
4	0.0639	0.0908	0.2070	0.252767	14.8602	18.4662	19.9977
5	0.1581	0.2102	0.4118	0.550863	16.7496	20.5147	22.1057
6	0.2994	0.3810	0.6757	0.878119	18.5475	22.4575	24.1016
7	0.4849	0.5985	0.9893	1.234753	20.2777	24.3213	26.0179
8	0.7104	0.8571	1.3444	1.640902	21.9549	26.1239	27.8674
9	0.9218	1.1510	1.7340	2.186628	23.5893	27.8771	29.8892

- $\text{supp } \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati

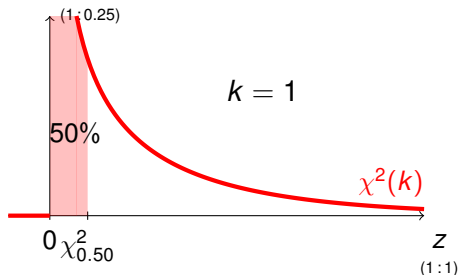
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\text{supp } \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_{\gamma}(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_{\gamma}(k) \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$

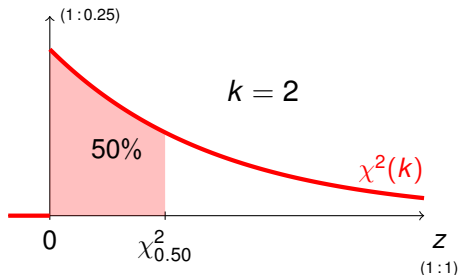
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\text{supp } \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_\gamma(k) \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$

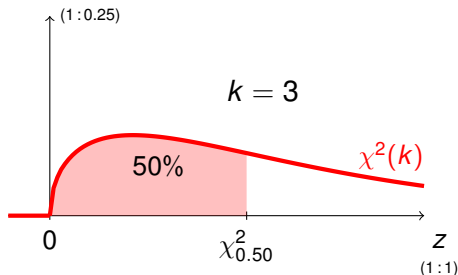
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\text{supp } \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_\gamma(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_\gamma(k) \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$

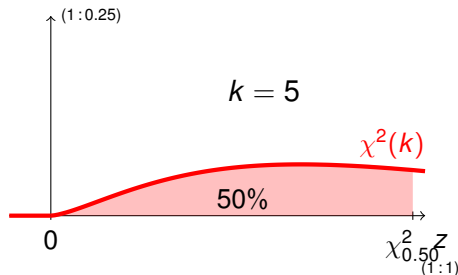
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\text{supp } \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_{\gamma}(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_{\gamma}(k) \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$

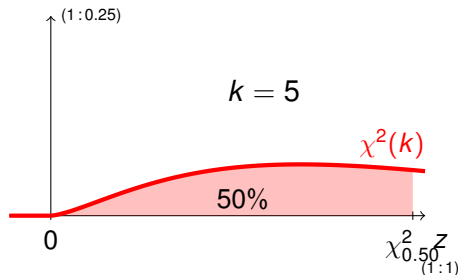
IC per la varianza di un campione normale

Teorema (non dimostrato)

Se X_1, \dots, X_n sono i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora la statistica

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ha densità *chi quadro* con $n-1$ gradi di libertà ($\chi^2(n-1)$).



- $\text{supp } \chi^2(k) = [0, +\infty)$
- i quantili $\chi^2_{\gamma}(k)$ sono tabulati
- $\chi^2_{\gamma}(k) \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$
- $\chi^2_{\gamma}(k) \simeq \frac{(z_{\gamma} + \sqrt{2k-1})^2}{2}$
se k è grande

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\frac{(n-1) s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1) s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo verificare che

$$\mathbb{P} \left(\frac{(n-1) S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1) S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) = \gamma$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) &= \\ &= \mathbb{P} \left(\frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}{(n-1)S^2} > \frac{1}{\sigma^2} > \frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}{(n-1)S^2} \right) \end{aligned}$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) &= \\ &= \mathbb{P} \left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) \end{aligned}$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\frac{(n-1) s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1) s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{(n-1) S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1) S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) &= \\ &= \mathbb{P} \left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1) S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) \end{aligned}$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) &= \\ &= \mathbb{P} \left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) \\ &= F_{\chi^2(n-1)} \left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) - F_{\chi^2(n-1)} \left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) \end{aligned}$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) &= \\ &= \mathbb{P} \left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) \\ &= F_{\chi^2(n-1)} \left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) - F_{\chi^2(n-1)} \left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2} \end{aligned}$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) &= \\ &= \mathbb{P} \left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) \\ &= F_{\chi^2(n-1)} \left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) - F_{\chi^2(n-1)} \left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2} \\ &= \gamma \end{aligned}$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) = \\ &= \mathbb{P} \left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) \\ &= F_{\chi^2(n-1)} \left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right) - F_{\chi^2(n-1)} \left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2} \\ &= \gamma \end{aligned}$$

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right)$ è un $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) &= \dots \\ &= \mathbb{P} \left(\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2(n-1)} > \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \right) \\ &= \dots = \gamma \end{aligned}$$

STATISTICA PIVOT

IC per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

TESI: $\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) \\ \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\gamma}(n-1)}, +\infty \right) \\ \left(0, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\gamma}(n-1)} \right) \end{array} \right\}$ sono $IC_{\sigma^2}(\gamma)$

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim f_{\theta}$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una **sua** moneta

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all}'i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all}'i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

AFFERMAZIONE 0: l'amico è **onesto**

AFFERMAZIONE 1: l'amico è un **baro**

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all' } i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

AFFERMAZIONE 0: l'amico è **onesto** $\Leftrightarrow q = 1/2$

AFFERMAZIONE 1: l'amico è un **baro** $\Leftrightarrow q < 1/2$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

AFFERMAZIONE 0: i neutrini **rispettano** la relatività

AFFERMAZIONE 1: i neutrini **violano** la relatività

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

AFFERMAZIONE 0: i neutrini **rispettano** la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

AFFERMAZIONE 1: i neutrini **violano** la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE = affermazioni su θ

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE = affermazioni su θ

H_0 = **IPOTESI NULLA**: ipotesi di default, vera fino a prova contraria

Verifica d'ipotesi

IOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IOTESI STATISTICHE = affermazioni su θ

H_0 = IOTESI NULLA: ipotesi di default, vera fino a prova contraria

H_1 = **IOTESI ALTERNATIVA**: vera solo se c'è evidenza a suo favore

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE = affermazioni su θ

H_0 = IPOTESI NULLA: ipotesi di default, vera fino a prova contraria

H_1 = IPOTESI ALTERNATIVA: vera solo se c'è evidenza a suo favore

H_0 e H_1 NON sono intercambiabili !

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all}'i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

AFFERMAZIONE 0:	l'amico è onesto	$\Leftrightarrow q = 1/2$	} ipotesi statistiche
AFFERMAZIONE 1:	l'amico è un baro	$\Leftrightarrow q < 1/2$	

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all' } i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

AFFERMAZIONE 0: l'amico è onesto $\Leftrightarrow q = 1/2$ **DEFAULT**

AFFERMAZIONE 1: l'amico è un baro $\Leftrightarrow q < 1/2$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all' } i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

H_0 : l'amico è onesto $\Leftrightarrow q = 1/2$ **DEFAULT**

H_1 : l'amico è un baro $\Leftrightarrow q < 1/2$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

AFFERMAZIONE 0: i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

AFFERMAZIONE 1: i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

} ipotesi
statistiche

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

AFFERMAZIONE 0: i neutrini rispettano la relatività **DEFAULT**
 $\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8$ m/s

AFFERMAZIONE 1: i neutrini violano la relatività
 $\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8$ m/s

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività **DEFAULT**
 $\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8$ m/s

H_1 : i neutrini violano la relatività
 $\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8$ m/s

Verifica d'ipotesi

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim f_\theta$

OBIETTIVO: Decidere tra due affermazioni opposte sul parametro θ

IPOTESI STATISTICHE = affermazioni su θ

H_0 = IPOTESI NULLA: ipotesi di default, vera fino a prova contraria

H_1 = IPOTESI ALTERNATIVA: vera solo se c'è evidenza a suo favore

TEST D'IPOTESI = regola per scegliere tra H_0 e H_1

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all}'i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \dots + X_{10} \leq 1$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Test d'ipotesi

Per costruire un test:

- si sceglie una *statistica test* $T_0 = t(X_1, \dots, X_n)$

Test d'ipotesi

Per costruire un test:

- si sceglie una *statistica test* $T_0 = t(X_1, \dots, X_n)$
- si fissa una *regione di rifiuto* (o *critica*) $RC \subset \mathbb{R}$
(tipicamente: $(-\infty, c)$ o $(c, +\infty)$ o $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$)

Test d'ipotesi

Per costruire un test:

- si sceglie una *statistica test* $T_0 = t(X_1, \dots, X_n)$
- si fissa una *regione di rifiuto* (o *critica*) $RC \subset \mathbb{R}$
(tipicamente: $(-\infty, c)$ o $(c, +\infty)$ o $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$)
- si stabilisce la *regola del test*:
“rifiuto H_0 se trovo $T_0 \in RC$ ”

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all'i-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow accuso l'amico) se trovo

$$\underbrace{Y := X_1 + X_2 + \dots + X_{10}}_{\text{statistica test}} \leq 1$$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all' } i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \text{ l'amico è onesto } \Leftrightarrow q = 1/2$$

$$H_1 : \text{ l'amico è un baro } \Leftrightarrow q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow accuso l'amico) se trovo

$$\underbrace{Y := X_1 + X_2 + \dots + X_{10}}_{\text{statistica test}} \underbrace{\leq 1}_{\text{regione critica}}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\underbrace{\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_5}{5}}_{\text{statistica test}} \geq 3.2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\underbrace{\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_5}{5}}_{\text{statistica test}} \geq \underbrace{3.2 \cdot 10^8 \text{ m/s}}_{\text{regione critica}}$$

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0		
rifiuto H_0		

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0		

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0		OK!

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO = errore molto più grave

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO = errore molto più grave

⇒ voglio fissare a priori la probabilità di commetterlo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO = errore molto più grave

⇒ voglio fissare a priori la probabilità di commetterlo

SIGNIFICATIVITÀ = probabilità di errore di I tipo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO = errore molto più grave

⇒ voglio fissare a priori la probabilità di commetterlo

SIGNIFICATIVITÀ = probabilità di errore di I tipo

$$= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{"rifiuterò } H_0 \text{"})$$

\mathbb{P} calcolata coi parametri
che soddisfano H_0

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO = errore molto più grave

⇒ voglio fissare a priori la probabilità di commetterlo

SIGNIFICATIVITÀ = probabilità di errore di I tipo

$$= \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{"rifiuterò } H_0 \text{"})$$

TIPICAMENTE: significatività = 5% o 2.5% o 1%

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all}'i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \text{l'amico è onesto} \Leftrightarrow q = 1/2$$

$$H_1 : \text{l'amico è un baro} \Leftrightarrow q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \dots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO = accusare l'amico quando in realtà è onesto

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all}'i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \text{l'amico è onesto} \Leftrightarrow q = 1/2$$

$$H_1 : \text{l'amico è un baro} \Leftrightarrow q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \dots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO = accusare l'amico quando in realtà è onesto

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{q=1/2}(Y \leq 1)$$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all}'i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \dots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO = accusare l'amico quando in realtà è onesto

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{q=\frac{1}{2}}(Y \leq 1) = \sum_{k=0}^1 \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-k}$$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all}'i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \dots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO = accusare l'amico quando in realtà è onesto

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{q=\frac{1}{2}}(Y \leq 1) = \sum_{k=0}^1 \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-k} \simeq 1\%$$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all}'i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \text{l'amico è onesto} \Leftrightarrow q = 1/2$$

$$H_1 : \text{l'amico è un baro} \Leftrightarrow q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \dots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO = accusare l'amico quando in realtà è onesto

SIGNIFICATIVITÀ = $\mathbb{P}_{q=\frac{1}{2}}(Y \leq 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-k} \simeq 1\%$ **Va bene !**

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

ERRORE DI I TIPO = rigettare la relatività quando in realtà è vera

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

ERRORE DI I TIPO = rigettare la relatività quando in realtà è vera

$$\text{SIGN.} = \mathbb{P}_{\mu=3}(\bar{X} \geq 3.2)$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

ERRORE DI I TIPO = rigettare la relatività quando in realtà è vera

$$\text{SIGN.} = \mathbb{P}_{\mu=3}(\bar{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{3.2-3}{\frac{0.4}{\sqrt{5}}}\right)$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

ERRORE DI I TIPO = rigettare la relatività quando in realtà è vera

$$\text{SIGN.} = \mathbb{P}_{\mu=3}(\bar{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{3.2-3}{\frac{0.4}{\sqrt{5}}}\right) = 1 - \Phi(1.12)$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

ERRORE DI I TIPO = rigettare la relatività quando in realtà è vera

$$\text{SIGN.} = \mathbb{P}_{\mu=3}(\bar{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{3.2-3}{\frac{0.4}{\sqrt{5}}}\right) = 1 - \Phi(1.12) \simeq \mathbf{13\%}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

ERRORE DI I TIPO = rigettare la relatività quando in realtà è vera

$$\text{SIGN.} = \mathbb{P}_{\mu=3}(\bar{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}(\text{Troppo grande!}) = 1 - \Phi(1.12) \simeq 13\%$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

ESEMPIO: Dei fisici misurano la velocità dei neutrini

X_i = velocità misurata per l' i -esimo neutrino

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.4 \cdot 10^8$ m/s nota

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_5}{5} \geq 3.2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

ERRORE DI I TIPO

Però è una buona idea...

$$\text{SIGN.} = \mathbb{P}_{\mu=3}(\bar{X} \geq 3.2) = \mathbb{P}_{\mu=3}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{3.2-3}{\frac{0.4}{\sqrt{5}}}\right) = 1 - \Phi(1.12) \simeq 13\%$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

“rifiuto H_0 se trovo $\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ”

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo verificare che

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”}) = \alpha$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

“rifiuto H_0 se trovo $\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ”

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”}) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”}) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: $\underbrace{X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. con } X_i \sim N(\mu, \sigma^2)}_{\text{La regola}}$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

“rifiuto H_0 se trova $\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ”

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

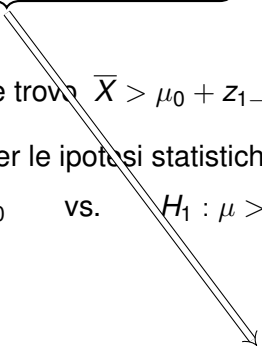
$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0\text{”}) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$


$$\bar{X} \sim N \left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

“rifiuto H_0 se trovo $\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ”

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”}) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”}) =$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} \right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) \end{aligned}$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”}) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha} \right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”}) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha} \right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

$$= \alpha$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se trovo } \bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ”}$$

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“ rifiuterò } H_0 \text{ ”}) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu=\mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha} \right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

$$= \alpha$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

“rifiuto H_0 se trovo $\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ”

è un test di significatività α per le ipotesi statistiche

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: La regola

“rifiuto H_0 se trovo $\bar{X} > \underbrace{\mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\text{è un test di significatività } \alpha \text{ per le ipotesi statistiche}} \text{”}$

$H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$

più comodo

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

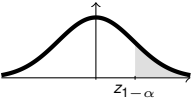
TESI: Posto $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

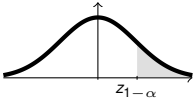
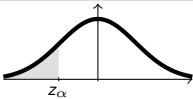
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	

 $= \alpha$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

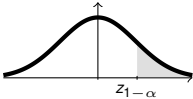
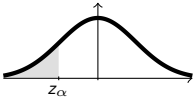
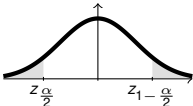
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < z_\alpha$	

 = α

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

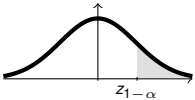
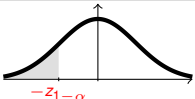
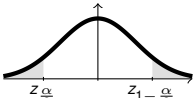
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < z_\alpha$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}}$ oppure $Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

 = α

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

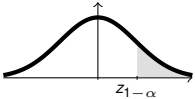
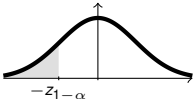

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}}$ oppure $Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

 = α

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

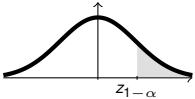
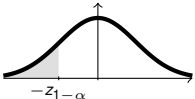
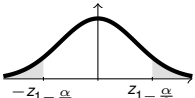
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

 = α

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

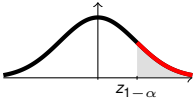
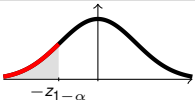
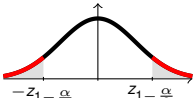
 = α

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

H_1 fissa la forma di $RC_\alpha \dots$

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

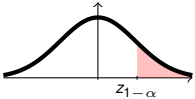
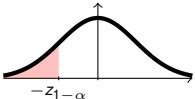
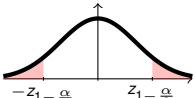
 = α

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato



... mentre α fissa la sua ampiezza

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, questi sono test di significatività α :



H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

 = α



Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 = $  $X_2 = $  \dots	\rightarrow	$x_1 = 1.2$ $x_2 = 0.6$ \dots	realizzazioni (dati)
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	\rightarrow	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta$ $< u(X_1, X_2, \dots)) = \gamma$	\rightarrow	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta$ $< u(1.2, 0.6, \dots)$	IC

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 = $  $X_2 = $  \dots	\rightarrow \rightarrow \rightarrow	$x_1 = 1.2$ $x_2 = 0.6$ \dots	realizzazioni (dati)
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	\rightarrow	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta$ $< u(X_1, X_2, \dots)) = \gamma$	\rightarrow	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta$ $< u(1.2, 0.6, \dots)$	IC
significatività	$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(T_0 \in RC)$			

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 = $  $X_2 = $  \dots	\rightarrow	$x_1 = 1.2$ $x_2 = 0.6$ \dots	realizzazioni (dati)
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	\rightarrow	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta$ $< u(X_1, X_2, \dots)) = \gamma$	\rightarrow	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta$ $< u(1.2, 0.6, \dots)$	IC
significatività	$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(T_0 \in RC)$	\rightarrow	?	

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$\textcolor{red}{p\text{-value}} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

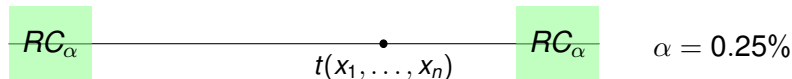
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



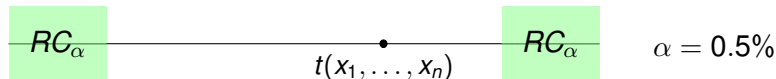
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



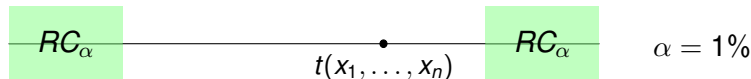
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



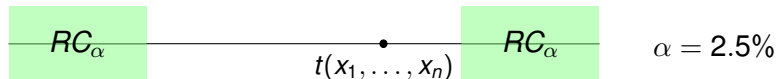
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



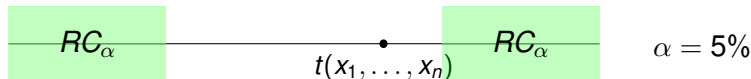
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



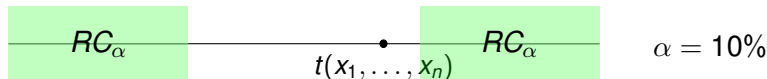
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



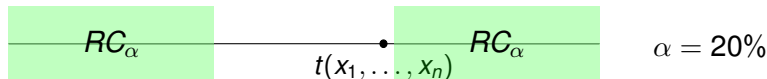
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



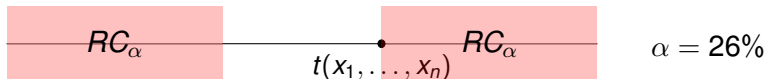
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



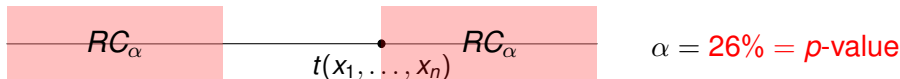
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$\textcolor{red}{p\text{-value}} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



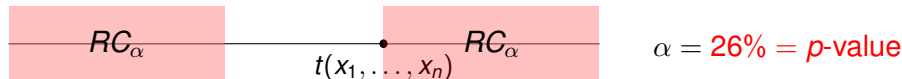
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$\textcolor{red}{p\text{-value}} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe il 26%

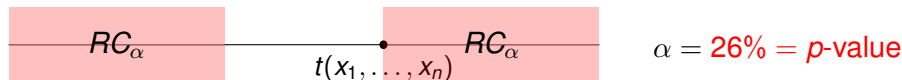
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$\textcolor{red}{p\text{-value}} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe il 26%

\Rightarrow **nessuna evidenza contro H_0**

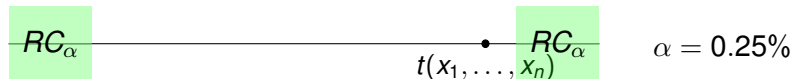
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



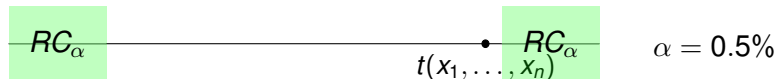
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



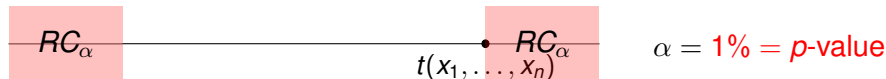
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$\textcolor{red}{p\text{-value}} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



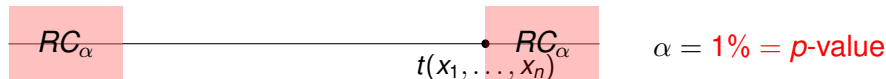
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1%

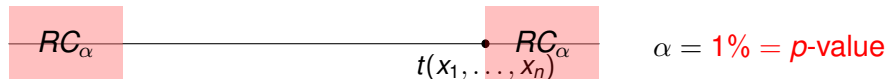
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$\textcolor{red}{p\text{-value}} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1% :

- o sono stato molto sfortunato

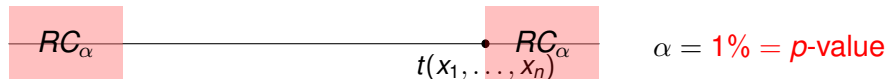
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$\textcolor{red}{p\text{-value}} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1% :

- o sono stato molto sfortunato
- o H_0 non è vera

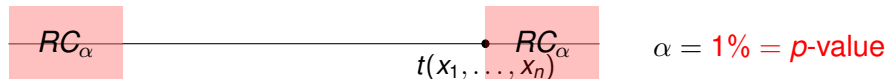
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1% :

- o sono stato molto sfortunato
- o H_0 non è vera

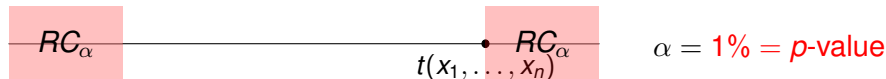
Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



Se H_0 fosse vera, la probabilità di trovare questi dati sarebbe l'1%

\Rightarrow forte evidenza contro H_0

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”

Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$

p -value alto ($> 5\%$) \Rightarrow non rifiuto H_0 (conclusione **debole**)

Definizione

Supponiamo che questa regola sia un test di significatività α :

“rifiuto H_0 se trovo $t(X_1, \dots, X_n) \in RC_\alpha$ ”



Allora, se x_1, \dots, x_n sono le realizzazioni di X_1, \dots, X_n , si definisce

$$p\text{-value} = \min\{\alpha \mid t(x_1, \dots, x_n) \in RC_\alpha\}$$



p -value alto ($> 5\%$) \Rightarrow non rifiuto H_0 (conclusione debole)

p -value basso ($\leq 5\%$) \Rightarrow accetto H_1 (conclusione **forte**)

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 = $  $X_2 = $  ...	\rightarrow	$x_1 = 1.2$ $x_2 = 0.6$...	realizzazioni (dati)
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	\rightarrow	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta$ $< u(X_1, X_2, \dots)) = \gamma$	\rightarrow	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta$ $< u(1.2, 0.6, \dots)$	IC
significatività	$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(T_0 \in RC)$	\rightarrow	?	

Inferenza statistica

	PRIMA dell'esperimento		DOPO l'esperimento	
variabili aleatorie i.i.d.	$X_1 = $  $X_2 = $  \dots	\rightarrow	$x_1 = 1.2$ $x_2 = 0.6$ \dots	realizzazioni (dati)
densità	$X_i \sim f_\theta$	\rightarrow	*	
parametri	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	\rightarrow	$\theta \in \mathbb{R}$ oppure $\theta \in \mathbb{R}^k$	parametri
stimatore	$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots)$	\rightarrow	$\hat{\theta} = h(1.2, 0.6, \dots)$	stima
probabilità	$\mathbb{P}(\ell(X_1, X_2, \dots) < \theta$ $< u(X_1, X_2, \dots)) = \gamma$	\rightarrow	$\ell(1.2, 0.6, \dots) < \theta$ $< u(1.2, 0.6, \dots)$	IC
significatività	$\mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(T_0 \in RC)$	\rightarrow	minimo α t.c. $t(1.2, 0.6, \dots) \in RC_\alpha$	p-value

p -value di uno Z -test

	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z-test

	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$Z_0 \equiv z_{1-\alpha}$
	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$Z_0 \equiv z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \Phi(Z_0) \equiv \Phi(z_{1-\alpha})$
	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$Z_0 \equiv z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \Phi(Z_0) \equiv \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$
	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

H_1	rifiuto H_0 se	p -value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$Z_0 \equiv z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \Phi(Z_0) \equiv \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ $\Leftrightarrow \alpha = 1 - \Phi(Z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z-test

	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$Z_0 \equiv z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \Phi(Z_0) \equiv \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ $\Leftrightarrow \alpha = 1 - \Phi(Z_0)$
	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$
	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

H_1	rifiuto H_0 se	p -value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \Phi(z_0) \equiv \Phi(-z_{1-\alpha})$
$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z-test

H_1	rifiuto H_0 se	p -value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \Phi(z_0) \equiv \Phi(-z_{1-\alpha}) = \Phi(z_\alpha)$
$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

H_1	rifiuto H_0 se	p -value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$\begin{aligned} Z_0 &\equiv -Z_{1-\alpha} \\ \Leftrightarrow \Phi(Z_0) &\equiv \Phi(-z_{1-\alpha}) = \Phi(z_\alpha) \\ &= \alpha \end{aligned}$
$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z-test

	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$Z_0 \equiv -z_{1-\alpha}$ $\Leftrightarrow \Phi(z_0) \equiv \Phi(-z_{1-\alpha}) = \Phi(z_\alpha)$ $= \alpha$
	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

H_1	rifiuto H_0 se	p -value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

H_1	rifiuto H_0 se	p -value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$ z_0 \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$ z_0 \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\Leftrightarrow \Phi(z_0) \equiv \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}})$

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$ z_0 \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\Leftrightarrow \Phi(z_0) \equiv \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$ z_0 \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\Leftrightarrow \Phi(z_0) \equiv \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\Leftrightarrow \alpha = 2[1 - \Phi(z_0)]$

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z-test

	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$ z_0 \equiv z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\Leftrightarrow \Phi(z_0) \equiv \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\Leftrightarrow \alpha = 2[1 - \Phi(z_0)]$

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

p -value di uno Z -test

H_1	rifiuto H_0 se	p -value
$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p\text{-value} = \Phi(z_0)$
$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$p\text{-value} = 2[1 - \Phi(z_0)]$

z_0 = realizzazione di Z_0 dopo l'esperimento

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

...

...

...

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

...

...

...

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

...

...

...

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività


$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

 $\sigma = 0.4 \cdot 10^8 \text{ nota}$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

... ..

H_0 : i neutrini rispettano la relatività


$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > z_{1-\alpha}$$


 $n = 5$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

...

...

...

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > z_{1-\alpha} \quad \text{significatività} = 5\%$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

...

...

...

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > z_{0.95} \leftarrow \text{significatività} = 5\%$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

...

...

...

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \leftarrow \text{significatività} = 5\%$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \quad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure:

$$x_1 = 3.4 \quad x_2 = 3.3 \quad x_3 = 2.7$$

$$x_4 = 3.3 \quad x_5 = 2.9 \quad (\dots \cdot 10^8)$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \quad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 3.4 & x_2 = 3.3 & x_3 = 2.7 \\ x_4 = 3.3 & x_5 = 2.9 & (\dots \cdot 10^8) \end{array} \Rightarrow z_0 = 0.671$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

...

...

...

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \quad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 3.4 & x_2 = 3.3 & x_3 = 2.7 \\ x_4 = 3.3 & x_5 = 2.9 & (\dots \cdot 10^8) \end{array} \Rightarrow Z_0 = 0.671$$

$z_0 \not> 1.645 \Rightarrow$ non posso rifiutare H_0 al 5%

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \quad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 3.4 & x_2 = 3.3 & x_3 = 2.7 \\ x_4 = 3.3 & x_5 = 2.9 & (\dots \cdot 10^8) \end{array} \Rightarrow z_0 = 0.671$$

$z_0 \not> 1.645 \Rightarrow$ non posso rifiutare H_0 al 5%

$$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0)$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \quad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 3.4 & x_2 = 3.3 & x_3 = 2.7 \\ x_4 = 3.3 & x_5 = 2.9 & (\dots \cdot 10^8) \end{array} \Rightarrow Z_0 = \mathbf{0.671}$$

$z_0 \not> 1.645 \Rightarrow$ non posso rifiutare H_0 al 5%

$$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(\mathbf{0.671}) = 25.1\%$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \quad \text{significatività} = 5\%$$

Dopo le misure:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 3.4 & x_2 = 3.3 & x_3 = 2.7 \\ x_4 = 3.3 & x_5 = 2.9 & (\dots \cdot 10^8) \end{array} \Rightarrow z_0 = 0.671$$

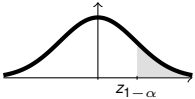
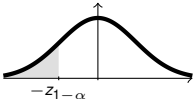
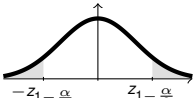
$z_0 \not> 1.645 \Rightarrow$ non posso rifiutare H_0 al 5%

$p\text{-value} = 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(0.671) = 25.1\% \Rightarrow$ nessuna evidenza
contro H_0

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

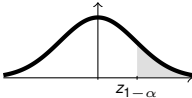
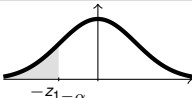
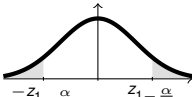
 = α

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto 2 (ipotesi **semplice**) significatività α :

H_0 determina univocamente \mathbb{P}
(ipotesi **semplice**)

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

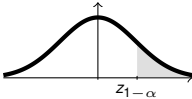
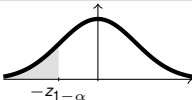
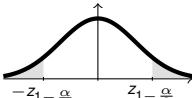
 = α

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto 2 (ipotesi composta) significatività α :

Ma se non la determinasse?
(ipotesi **composta**)

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se H_0 è vera, $Z_0 \sim \dots$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

 = α

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ
(con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ
(con H_0 composta) $:=$ massima probabilità di errore di I tipo
 $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“ rifiuterò } H_0 \text{ ”})$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ $:=$ massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ = ???

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ := massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{"rifiuterò } H_0 \text{"})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{"}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ := massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

quella di
 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ipotesi nulla composta

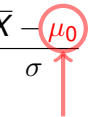
SIGNIFICATIVITÀ := massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$


quella di Z_0

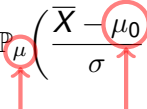
Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ := massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$


non sono la stessa cosa

$\Rightarrow \bar{X}$ va ancora standardizzata

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ := massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{"rifiuterò } H_0 \text{"})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{"}$$

$$\begin{aligned} \text{SIGNIFICATIVITÀ} &= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right) \\ &= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right) \end{aligned}$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ := massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\begin{aligned} \text{SIGNIFICATIVITÀ} &= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right) \\ &= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) \end{aligned}$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ := massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ $\quad :=$ massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $\quad = \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \left[1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) \right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ := massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{"rifiuterò } H_0 \text{"})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{"}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \left[1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \underbrace{\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}}_{\text{crescente in } \mu} \right) \right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ $:=$ massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \left[1 - \Phi \left(\underbrace{z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}}_{\text{decescente in } \mu} \right) \right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ := massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{"rifiuterò } H_0 \text{"})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{"}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \left[1 - \underbrace{\Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)}_{\text{decescente in } \mu} \right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ := massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \left[\underbrace{1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)}_{\text{crescente in } \mu} \right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ := massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \left[\underbrace{1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)}_{\text{crescente in } \mu} \right] \quad \text{il max è preso in } \mu = \mu_0$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ $\quad :=$ massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $\quad = \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \left[1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) \right]$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ $\quad :=$ massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $\quad = \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= \cancel{\max_{\mu \leq \mu_0}} \left[1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) \right] = 1 - \Phi(z_{1-\alpha})$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ $\quad :=$ massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $\quad = \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= \cancel{\max_{\mu \leq \mu_0}} \left[1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) \right] = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = \alpha$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ $:=$ massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \max_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_{\mu} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= \cancel{\max_{\mu \leq \mu_0}} \left[1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) \right] = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = \alpha$$

Ipotesi nulla composta

SIGNIFICATIVITÀ $:=$ massima probabilità di errore di I tipo
(con H_0 composta) $= \max_{H_0 \text{ vera}} \mathbb{P}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

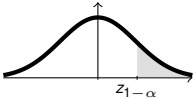
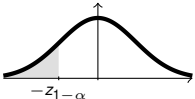
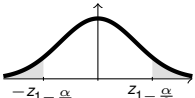
$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

SIGNIFICATIVITÀ $= \alpha \quad \Rightarrow \quad$ tutto come prima

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\mu = \mu_0$, $Z_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

 = α

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO = errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ = probabilità di errore di I tipo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO = errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ = probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO = errore meno grave

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO = errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ = probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO = errore meno grave

⇒ tollero anche una grossa probabilità di commetterlo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO = errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ = probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO = errore meno grave

⇒ tollero anche una grossa probabilità di commetterlo

POTENZA = probabilità di non commettere errore di II tipo

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO = errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ = probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO = errore meno grave

⇒ tollero anche una grossa probabilità di commetterlo

POTENZA = probabilità di non commettere errore di II tipo

$$= \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{"rifiuterò } H_0 \text{"})$$

Tipi d'errore

	H_0 vera	H_0 falsa
accetto H_0	OK!	errore di II tipo
rifiuto H_0	errore di I tipo	OK!

ERRORE DI I TIPO = errore molto più grave

SIGNIFICATIVITÀ = probabilità di errore di I tipo

ERRORE DI II TIPO = errore meno grave

⇒ tollero anche una grossa probabilità di commetterlo

POTENZA = probabilità di non commettere errore di II tipo

= $\mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{"rifiuterò } H_0 \text{"})$ può essere molto piccola

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all}'i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \dots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO = accusare l'amico quando in realtà è onesto

ERRORE DI II TIPO = non accusare l'amico quando in realtà bara

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all}'i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \dots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO = accusare l'amico quando in realtà è onesto

ERRORE DI II TIPO = non accusare l'amico quando in realtà bara

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{q < \frac{1}{2}}(Y \leq 1)$$

Esempio: l'amico è un baro?

ESEMPIO: Un amico propone di puntare testa con una sua moneta

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa all}'i\text{-esimo lancio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim B(1, q)$

$$H_0 : \text{l'amico è onesto} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1/2$$

$$H_1 : \text{l'amico è un baro} \quad \Leftrightarrow \quad q < 1/2$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow accuso l'amico) se trovo

$$Y := X_1 + X_2 + \dots + X_{10} \leq 1$$

ERRORE DI I TIPO = accusare l'amico quando in realtà è onesto

ERRORE DI II TIPO = non accusare l'amico quando in realtà bara

POTENZA = $\mathbb{P}_{q < \frac{1}{2}}(Y \leq 1)$ dipende da q

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

...

...

...

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \quad \text{significatività} = 5\%$$

ERRORE DI I TIPO = rigettare la relatività quando in realtà è vera

ERR. DI II TIPO = non rigettare la relatività quando in realtà è falsa

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

...

...

...

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \quad \text{significatività} = 5\%$$

ERRORE DI I TIPO = rigettare la relatività quando in realtà è vera

ERR. DI II TIPO = non rigettare la relatività quando in realtà è falsa

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{\mu > 3} (Z_0 > 1.645)$$

Esempio: i neutrini sono più veloci della luce?

...

H_0 : i neutrini rispettano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} =: \mu_0$$

H_1 : i neutrini violano la relatività

$$\Leftrightarrow \mu > 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

REGOLA: rifiuto H_0 (\Leftrightarrow rigetto la teoria della relatività) se trovo

$$Z_0 := \frac{\bar{X} - 3 \cdot 10^8}{0.4 \cdot 10^8} \sqrt{5} > 1.645 \quad \text{significatività} = 5\%$$

ERRORE DI I TIPO = rigettare la relatività quando in realtà è vera

ERR. DI II TIPO = non rigettare la relatività quando in realtà è falsa

POTENZA = $\mathbb{P}_{\mu > 3}(Z_0 > 1.645)$ dipende da μ

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

POTENZA = ???

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

quella di
 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Potenza di uno Z-test

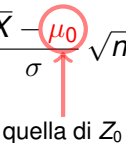
ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$


quella di Z_0

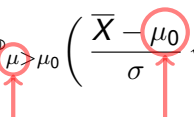
Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$


non sono la stessa cosa

$\Rightarrow \bar{X}$ va ancora standardizzata

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= 1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= 1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) = \Phi \left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} - z_{1-\alpha} \right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu > \mu_0} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right)$$

$$= 1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) = \Phi \left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} - z_{1-\alpha} \right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi \left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} - z_{1-\alpha} \right)$$

Potenza di uno Z-test

ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} - z_{1-\alpha}\right) \quad \text{dipende da } \mu$$

Potenza di uno Z-test

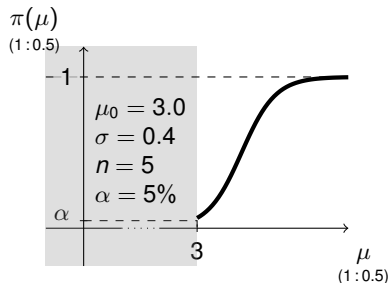
ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} - z_{1-\alpha}\right) \quad \text{aumenta se:}$$

- aumenta μ (non controllabile)



Potenza di uno Z-test

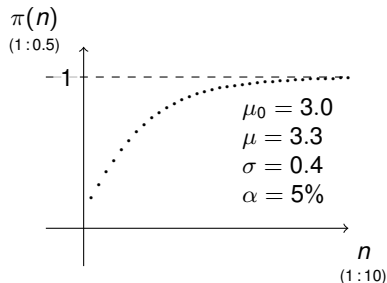
ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

“rifiuto H_0 se $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$ ”

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\frac{\overbrace{\mu - \mu_0}^{\geq 0}}{\sigma} \sqrt{n} - z_{1-\alpha}\right) \quad \text{aumenta se:}$$

- aumenta μ (non controllabile)
- **aumenta n (più misure)**



Potenza di uno Z-test

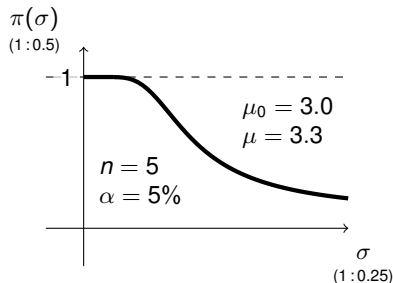
ESEMPIO: nello Z-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

“rifiuto H_0 se $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$ ”

$$\text{POTENZA} = \Phi\left(\frac{\overbrace{\mu - \mu_0}^{\geq 0}}{\sigma} \sqrt{n} - z_{1-\alpha}\right) \quad \text{aumenta se:}$$

- aumenta μ (non controllabile)
- aumenta n (più misure)
- **diminuisce σ (più precisione)**



Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta):

$$\bar{X} \underset{\substack{\text{riprod.} \\ \text{di } N}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta):

$$\begin{aligned}\bar{X} &\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} &\sim N(0, 1)\end{aligned}$$

Z-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta):

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \sim N(0, 1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

... ..

Z-test per il valore atteso di un campione **numeroso**

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con **n grande**, μ_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta):

$$\bar{X} \underset{\text{TLC}}{\approx} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \approx N(0, 1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0, 1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

... ..

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE (ripetuta):

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \approx N(0, 1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0, 1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

... ..

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE:

$$\bar{X}_{\text{TLC}} \approx N\left(q, \frac{q(1-q)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \approx N(0, 1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0, 1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

... ..

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE:

$$\bar{X} \approx N\left(q, \frac{q(1-q)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}} \sqrt{n} \approx N(0, 1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0, 1) \text{ se } \mu = \mu_0$$

... ..

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

DIMOSTRAZIONE:

$$\bar{X} \approx N\left(q, \frac{q(1-q)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - q}{\sqrt{q(1-q)}} \sqrt{n} \approx N(0, 1)$$

$$\Rightarrow Z_0 \approx N(0, 1) \text{ se } q = q_0$$

... ..

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

TESI: Se $Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n}$, sono test di significatività $\simeq \alpha$:

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$q = q_0$ oppure $q \leq q_0$	$q > q_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
$q = q_0$ oppure $q \geq q_0$	$q < q_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
$q = q_0$	$q \neq q_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

E la potenza ?

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

POTENZA = ???

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}"$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{"rifiuterò } H_0 \text{"})$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}"$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{"rifiuterò } H_0")$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

quella di
 $X_i \sim B(1, q)$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

quella di Z_0

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

non sono la stessa cosa

$\Rightarrow \bar{X}$ va ancora standardizzata

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - \cancel{q_0}}{\sqrt{\cancel{q_0(1 - q_0)}}} \sqrt{\cancel{n}} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - \cancel{q_0}}{\sqrt{\cancel{q_0(1 - q_0)}}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\bar{X} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\bar{X} - q > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 - q \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q}{\sqrt{q(1 - q)}} > \frac{z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOSTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n} > \frac{z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\underbrace{\frac{\bar{X} - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n}}_{\approx N(0,1)} > \frac{z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n} > \frac{z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n} \right)$$

$$= 1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{q(1 - q)}} + \frac{q_0 - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n} > \frac{z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n} \right)$$

$$= 1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{q(1 - q)}} + \frac{q_0 - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n} \right)$$

Z-test per la frequenza di un campione bernoulliano

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con n grande, $X_i \sim B(1, q)$, q_0 fissato

$$H_0 : q = q_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : q > q_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q_0}{\sqrt{q_0(1 - q_0)}} \sqrt{n} > z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 \right)$$

$$= \mathbb{P}_{q > q_0} \left(\frac{\bar{X} - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n} > \frac{z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{n}} + q_0 - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n} \right)$$

$$= 1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{q_0(1 - q_0)}{q(1 - q)}} + \frac{q_0 - q}{\sqrt{q(1 - q)}} \sqrt{n} \right) \quad \text{dipende da } n, q$$

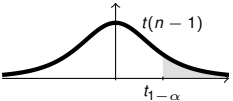
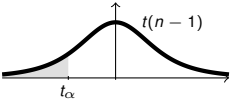
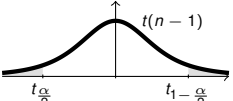
T-test per il valore atteso di un campione normale

E se non conosciamo σ^2 ?

T-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $T_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

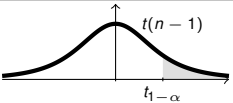
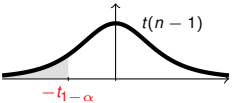
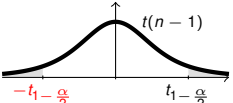
H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\mu = \mu_0$, $T_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T_0 > t_{1-\alpha}(n-1)$	
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T_0 < t_{\alpha}(n-1)$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T_0 < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ oppure $T_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	

 = α

T-test per il valore atteso di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $T_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\mu = \mu_0$, $T_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T_0 > t_{1-\alpha}(n-1)$	
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T_0 < -t_{1-\alpha}(n-1)$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ T_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	

 = α

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T -test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) ”$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T -test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) ”$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p -value ?

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T -test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) ”$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p -value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T -test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)”$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p -value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{”}$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

Tavola dei quantili della distribuzione T(n)								
n	Valore della funzione di ripartizione							
	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.655
2	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.925
3	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.840
4	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.604
5	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.032
6	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.707

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T-test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)”$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p-value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow 0.85 < 1 - \frac{\alpha}{2} < 0.9$$

Tavola dei quantili della distribuzione T(n)								
n	Valore della funzione di ripartizione							
	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.655
2	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.925
3	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.840
4	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.604
5	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.032
6	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.707

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T -test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)”$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p -value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow 0.85 < 1 - \frac{\alpha}{2} < 0.9$$

$$\Rightarrow 0.2 < \alpha < 0.3$$

T-test per il valore atteso di un campione normale

PROBLEMA: nel T -test con

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{“ rifiuto } H_0 \text{ se } |T_0| := \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) ”$$

dopo $n = 4$ misure abbiamo trovato

$$t_0 = -1.4783$$

Qual è il p -value ?

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione

$$|-1.4783| \equiv t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

$$\Rightarrow 1.4783 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(3)$$

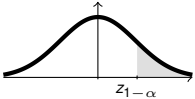
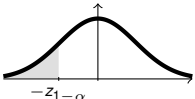
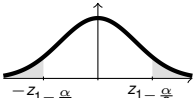
$$\Rightarrow 0.85 < 1 - \frac{\alpha}{2} < 0.9$$

$$\Rightarrow 0.2 < \textcolor{red}{p\text{-value}} < 0.3$$

T-test per il valore atteso di un campione **numeroso**

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con **n grande**, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fissato

TESI: Posto $T_0 := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\mu = \mu_0$, $T_0 \sim \dots$
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T_0 > \mathbf{z}_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$ oppure $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T_0 < -\mathbf{z}_{1-\alpha}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ T_0 > \mathbf{z}_{1-\frac{\alpha}{2}}$	

 = α

χ^2 -test per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma_0 > 0$ fissato

TESI: Posto $X_0^2 := \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\sigma = \sigma_0$, $X_0^2 \sim \dots$
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \leq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$X_0^2 > \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \geq \sigma_0$	$\sigma < \sigma_0$	$X_0^2 < \chi_{\alpha}^2(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$X_0^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ oppure $X_0^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$	

 = α

χ^2 -test per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma_0 > 0$ fissato

TESI: Posto $\chi_0^2 := \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	se $\sigma = \sigma_0$, $\chi_0^2 \sim \dots$
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \leq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$\chi_0^2 > \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \geq \sigma_0$	$\sigma < \sigma_0$	$\chi_0^2 < \chi_{\alpha}^2(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$\chi_0^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ oppure $\chi_0^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$	

 = α

χ^2 -test per la varianza di un campione normale

IPOTESI: X_1, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma_0 > 0$ fissato

TESI: Posto $\chi_0^2 := \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2}$, questi sono test di significatività α :

H_0	H_1	accetto H_0 se	se $\sigma = \sigma_0$, $\chi_0^2 \sim \dots$
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \leq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$\chi_0^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$ oppure $\sigma \geq \sigma_0$	$\sigma < \sigma_0$	$\chi_0^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$	
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \leq \chi_0^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$	

 = α

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

IPOTESI:

$$\left. \begin{array}{l} X_1, \dots, X_m \text{ i.i.d. con } X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \dots, Y_n \text{ i.i.d. con } Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array} \right\} \text{ indipendenti}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

IPOTESI:
$$\left. \begin{array}{l} X_1, \dots, X_m \text{ i.i.d. con } X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \dots, Y_n \text{ i.i.d. con } Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array} \right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{X}_m \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{m}\right) \\ \bar{Y}_n \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n}\right) \end{array} \right\} \text{ indipendenti}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

IPOTESI:
$$\left. \begin{array}{l} X_1, \dots, X_m \text{ i.i.d. con } X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \dots, Y_n \text{ i.i.d. con } Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array} \right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{X}_m \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{m}\right) \\ \bar{Y}_n \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n}\right) \end{array} \right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_m - \bar{Y}_n \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

IPOTESI:
$$\left. \begin{array}{l} X_1, \dots, X_m \text{ i.i.d. con } X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y_1, \dots, Y_n \text{ i.i.d. con } Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array} \right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{X}_m \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{m}\right) \\ \bar{Y}_n \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n}\right) \end{array} \right\} \text{ indipendenti}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_m - \bar{Y}_n \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Userò la statistica test

$$Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Userò la statistica test

$$Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0, 1) \quad \text{se e solo se } \mu_X - \mu_Y = \delta_0$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Userò la statistica test

$$Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0, 1) \quad \text{se e solo se } \mu_X - \mu_Y = \delta_0$$

e la regola

“Rifiuto H_0 se $Z_0 > z_{1-\alpha}$ ”

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

ESEMPIO: Se $\delta_0 = 0$,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

Userò la statistica test

$$Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0, 1) \quad \text{se e solo se } \mu_X - \mu_Y = \delta_0$$

e la regola

“Rifiuto H_0 se $Z_0 > z_{1-\alpha}$ ”

Questo è un test di significatività α !

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{"Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{"}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}} (\text{"rifiuterò } H_0 \text{"})$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{"Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{"}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{"rifiuterò } H_0 \text{"})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{"Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{"}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}} (\text{"rifiuterò } H_0 \text{"})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0} \left(\underbrace{\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}}_{\sim N(0,1)} > z_{1-\alpha} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha})$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha)$$

$$= \alpha$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{SIGNIFICATIVITÀ} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ vera}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y = \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha})$$

$$= \alpha$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}} (\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}}(\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}} (\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}} (\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0} \left(\underbrace{\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}}_{N(0,1)} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right)$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}} (\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right) \\ &= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right) \\ &= 1 - \Phi \left(z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right) \end{aligned}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}} (\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right) \\ &= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right) \\ &= \Phi \left(-z_{1-\alpha} + \frac{(\mu_X - \mu_Y) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right) \end{aligned}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

$$\text{“Rifiuto } H_0 \text{ se } Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \text{”}$$

$$\text{POTENZA} = \mathbb{P}_{H_0 \text{ falsa}} (\text{“rifiuterò } H_0 \text{”})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_X - \mu_Y > \delta_0} \left(\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha} + \frac{\delta_0 - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right)$$

$$= \Phi \left(-z_{1-\alpha} + \frac{(\mu_X - \mu_Y) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \right) \quad \text{crescente in } m, n!$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$ oppure $\mu_X - \mu_Y \leq \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y > \delta_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi(z_0)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$ oppure $\mu_X - \mu_Y \geq \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y < \delta_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$\Phi(z_0)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y \neq \delta_0$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2 [1 - \Phi(z_0)]$

$$Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se	p -value
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi(z_0)$
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \geq \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$	$\Phi(z_0)$
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$ Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2 [1 - \Phi(z_0)]$

$$Z_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

senza conoscere il valore di σ_X e σ_Y !

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

OBIETTIVO: Fissato $\delta_0 \in \mathbb{R}$, fare un test per le ipotesi

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

senza conoscere il valore di σ_X e σ_Y !

Teorema (non dimostrato)

Se i due **campioni normali** precedenti hanno $\sigma_X = \sigma_Y$, allora

$$\frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \sim t(m+n-2)$$

dove S_p^2 è la **varianza pooled**

$$S_p^2 := \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, con in più l'ipotesi $\sigma_X = \sigma_Y$, questi sono tutti test di livello α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$ oppure $\mu_X - \mu_Y \leq \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y > \delta_0$	$T_0 > t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$ oppure $\mu_X - \mu_Y \geq \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y < \delta_0$	$T_0 < -t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X - \mu_Y = \delta_0$	$\mu_X - \mu_Y \neq \delta_0$	$ T_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$

$$T_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - \delta_0}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, con in più l'ipotesi $\sigma_X = \sigma_Y$, questi sono tutti test di livello α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$T_0 > t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \geq \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$	$T_0 < -t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$ T_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$

$$T_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, con in più l'ipotesi $\sigma_X = \sigma_Y$, questi sono tutti test di livello α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$T_0 > t_{1-\alpha}(m+n-2)$
$\mu_X = \mu_Y$ oppure $\mu_X \geq \mu_Y$	$T_0 \sim ???$ quando $\mu_X - \mu_Y \neq \delta_0$ \Rightarrow la potenza non si sa calcolare	$ T_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$ T_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$

$$T_0 := \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}}$$

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Ma come si fa a capire se $\sigma_X = \sigma_Y$?

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Ma come si fa a capire se $\sigma_X = \sigma_Y$?

Servirebbe un test per le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X \neq \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X = \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X = \sigma_Y$ \Rightarrow sarebbe meglio)

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Ma come si fa a capire se $\sigma_X = \sigma_Y$?

Servirebbe un test per le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X \neq \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X = \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X = \sigma_Y \Rightarrow$ sarebbe meglio)

o almeno per

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X \neq \sigma_Y$)

Test differenza medie x pop. normali indipendenti

Ma come si fa a capire se $\sigma_X = \sigma_Y$?

Servirebbe un test per le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X \neq \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X = \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X = \sigma_Y \Rightarrow$ sarebbe meglio)

o almeno per

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

(evidenza forte per $\sigma_X \neq \sigma_Y$)

Purtroppo si sa fare solo questo!

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Teorema (non dimostrato)

Se i due **campioni normali** precedenti hanno $\sigma_X = \sigma_Y$, allora

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

ha **densità di Fisher** con $m - 1$ e $n - 1$ gradi di libertà ($f(m - 1, n - 1)$)

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Teorema (non dimostrato)

Se i due campioni normali precedenti hanno $\sigma_X = \sigma_Y$, allora

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

ha *densità di Fisher* con $m - 1$ e $n - 1$ gradi di libertà ($f(m - 1, n - 1)$)



Un test di significatività α per le ipotesi

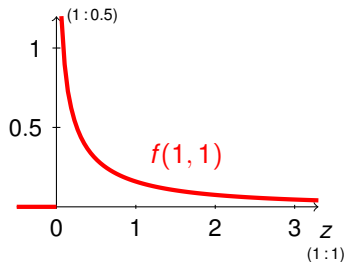
$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1 \right) \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} > 1 \right)$$

è dato dalla regola

“Rifiuto H_0 se $F_0 > f_{1-\alpha}(m - 1, n - 1)$ ”

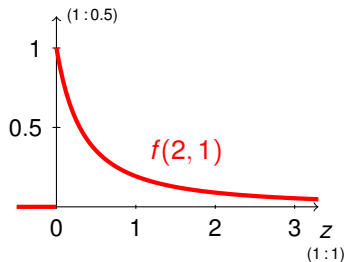
Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:



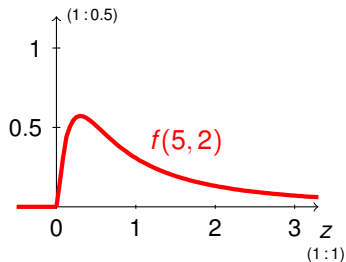
Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:



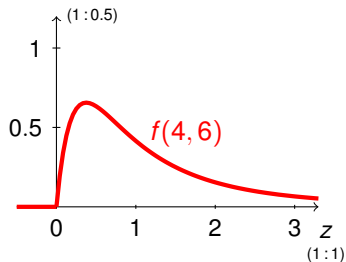
Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:



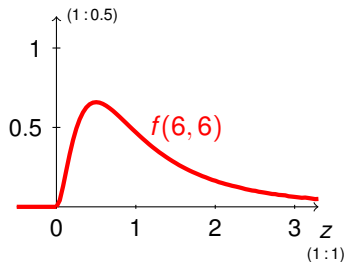
Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:



Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

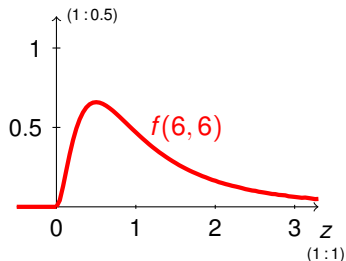
Proprietà della densità di Fisher:



Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:

- $\text{supp } f(h, k) = [0, +\infty)$



Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:

- $\text{supp } f(h, k) = [0, +\infty)$

- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati:

$$f_{0.975}(3, 7) = 5.890$$

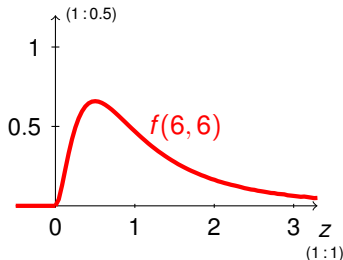
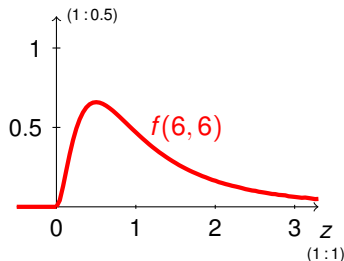


Tavola dei quantili **0.975** della distribuzione $F(m,n)$

	n																											
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28	30			
1	647.8	38.506	17.443	12.218	10.007	8.813	8.073	7.571	7.209	6.937	6.724	6.554	6.414	6.298	6.200	6.115	6.042	5.978	5.922	5.871	5.786	5.717	5.659	5.610	5.568			
2	799.5	39.000	16.044	10.649	8.434	7.260	6.512	6.059	5.715	5.456	5.256	5.096	4.965	4.857	4.765	4.687	4.619	4.560	4.508	4.461	4.383	4.319	4.265	4.221	4.186			
3	864.2	39.166	15.439	9.979	7.764	6.595	5.890	5.416	5.078	4.826	4.630	4.474	4.347	4.242	4.153	4.077	4.011	3.954	3.903	3.859	3.783	3.721	3.670	3.626	3.590			
4	899.6	39.248	15.101	9.604	7.388	6.227	5.523	5.053	4.718	4.468	4.275	4.121	3.996	3.892	3.804	3.729	3.665	3.608	3.559	3.515	3.440	3.379	3.329	3.286	3.250			
5	921.8	39.298	14.885	9.364	7.146	5.988	5.285	4.817	4.484	4.236	4.044	3.891	3.767	3.663	3.576	3.502	3.438	3.382	3.333	3.289	3.215	3.155	3.105	3.063	3.027			
6	937.1	39.331	14.735	9.197	6.978	5.820	5.119	4.652	4.320	4.072	3.881	3.728	3.604	3.501	3.415	3.341	3.277	3.221	3.172	3.128	3.055	2.995	2.945	2.903	2.867			
7	948.2	39.358	14.624	9.074	6.853	5.695	4.995	4.529	4.197	3.950	3.759	3.607	3.483	3.380	3.293	3.219	3.156	3.100	3.051	2.997	2.934	2.874	2.824	2.782	2.746			

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

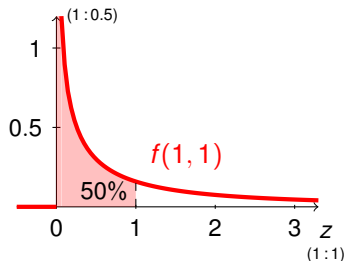
Proprietà della densità di Fisher:



- $\text{supp } f(h, k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $$\begin{cases} f_{\alpha}(h, k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_{\alpha}(h, k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

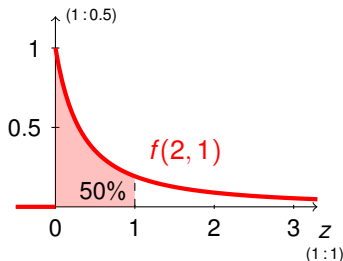
Proprietà della densità di Fisher:



- $\text{supp } f(h, k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $$\begin{cases} f_{\alpha}(h, k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_{\alpha}(h, k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

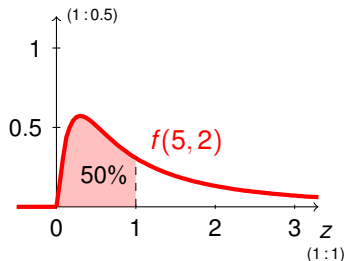
Proprietà della densità di Fisher:



- $\text{supp } f(h, k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $$\begin{cases} f_{\alpha}(h, k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_{\alpha}(h, k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

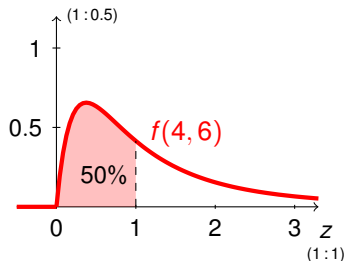
Proprietà della densità di Fisher:



- $\text{supp } f(h, k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $$\begin{cases} f_{\alpha}(h, k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_{\alpha}(h, k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

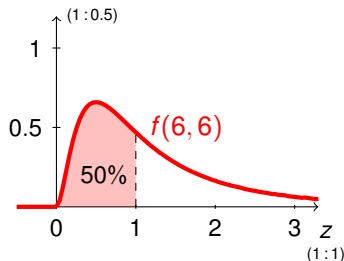
Proprietà della densità di Fisher:



- $\text{supp } f(h, k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $$\begin{cases} f_{\alpha}(h, k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_{\alpha}(h, k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

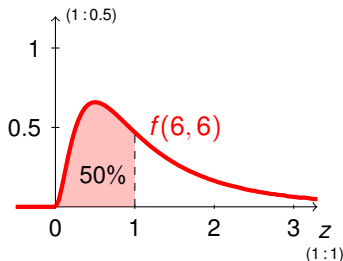
Proprietà della densità di Fisher:



- $\text{supp } f(h, k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $$\begin{cases} f_{\alpha}(h, k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_{\alpha}(h, k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Proprietà della densità di Fisher:



- $\text{supp } f(h, k) = [0, +\infty)$
- i quantili con $\alpha \geq 90\%$ sono tabulati
- $$\begin{cases} f_\alpha(h, k) > 1 & \text{se } \alpha > 50\% \\ 0 < f_\alpha(h, k) < 1 & \text{se } \alpha < 50\% \end{cases}$$
- i quantili con $\alpha \leq 10\%$ si ricavano da

$$f_\alpha(h, k) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(k, h)}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) :

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)} \right)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)}\right) \\ = \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1, m-1)\right)\end{aligned}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) :

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1, m-1) \right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} < f_{1-\alpha}(n-1, m-1) \right)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) :

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1, m-1) \right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\underbrace{\frac{S_Y^2}{S_X^2}}_{f(n-1, m-1)} < f_{1-\alpha}(n-1, m-1) \right)$$

$$= 1 - (1 - \alpha)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) :

$$\mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1, m-1) \right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\underbrace{\frac{S_Y^2}{S_X^2}}_{f(n-1, m-1)} < f_{1-\alpha}(n-1, m-1) \right)$$

$$= 1 - (1 - \alpha)$$

$$= \alpha$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\underbrace{\frac{S_X^2}{S_Y^2}}_{f(m-1, n-1)} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)} \right) \\ &= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1, m-1) \right) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\underbrace{\frac{S_Y^2}{S_X^2}}_{f(n-1, m-1)} < f_{1-\alpha}(n-1, m-1) \right) \\ &= 1 - (1 - \alpha) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

DIMOSTRAZIONE (della relazione di reciproco) :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\underbrace{\frac{S_X^2}{S_Y^2}}_{f(m-1, n-1)} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)} \right) \\ &= \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} \geq f_{1-\alpha}(n-1, m-1) \right) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\sigma_X=\sigma_Y} \left(\underbrace{\frac{S_Y^2}{S_X^2}}_{f(n-1, m-1)} < f_{1-\alpha}(n-1, m-1) \right) \\ &= 1 - (1 - \alpha) \\ &= \alpha \\ \Rightarrow \quad & f_{\alpha}(m-1, n-1) \equiv \frac{1}{f_{1-\alpha}(n-1, m-1)} \end{aligned}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \leq \sigma_Y$	$\sigma_X > \sigma_Y$	$F_0 > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \geq \sigma_Y$	$\sigma_X < \sigma_Y$	$F_0 < f_{\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$	$\sigma_X \neq \sigma_Y$	$F_0 < f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$ oppure $F_0 > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α :

H_0	H_1	rifiuto H_0 se
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \leq \sigma_Y$	$\sigma_X > \sigma_Y$	$F_0 > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$ Vanno controllate entrambe! $\sigma_X \leq \sigma_Y$		$F_0 < f_{\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$	$\sigma_X \neq \sigma_Y$	$F_0 < f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$ oppure $F_0 > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

Per i due campioni normali precedenti, questi sono tutti test di livello α :

H_0	H_1	accetto H_0 se
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \leq \sigma_Y$	$\sigma_X > \sigma_Y$	$F_0 \leq f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$ oppure $\sigma_X \geq \sigma_Y$	$\sigma_X < \sigma_Y$	$F_0 \geq f_{\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_X = \sigma_Y$	$\sigma_X \neq \sigma_Y$	$f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) \leq F_0 \leq f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$

$$F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)”$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1) \text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1) \text{"}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$$

$$\Rightarrow 0.9 < 1 - \alpha$$

... la dei quantili 0.9 della distribuzio

m					...	n						
	1	2	3	4		15	16	17	18	19	20	...
1	39.86	8.526	5.538	4.5	...	3.073	3.048	3.026	3.007	2.990	2.975	2.961
2	49.50	9.000	5.462	4.3	...	2.695	2.668	2.645	2.624	2.606	2.589	2.573
3	53.59	9.162	5.391	4.1	...	2.490	2.462	2.437	2.416	2.397	2.380	2.364
4	55.83	9.243	5.343	4.1	...	2.361	2.333	2.308	2.286	2.266	2.249	2.233
5	57.24	9.293	5.309	4.0	...	2.273	2.244	2.218	2.196	2.176	2.158	2.142

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$$

$$\Rightarrow 0.9 < 1 - \alpha < 0.95$$

... la dei quantili **0.95** della distribuzi

m					...	n							
	1	2	3	4		15	16	17	18	19	20	...	
1	161.45	18.513	10.128	7.71	...	10	4.543	4.494	4.451	4.414	4.381	4.351	4.322
2	199.50	19.000	9.552	6.9	...	19	3.682	3.634	3.592	3.555	3.522	3.493	3.465
3	215.71	19.164	9.277	6.5	...	14	3.287	3.239	3.197	3.160	3.127	3.098	3.070
4	224.58	19.247	9.117	6.3	...	2	3.056	3.007	2.965	2.928	2.895	2.866	2.838
5	230.16	19.296	9.013	6.2	...	18	2.901	2.852	2.810	2.773	2.740	2.711	2.683
6	233.00	19.320	8.944	6.1	...	8	2.700	2.744	2.790	2.834	2.878	2.920	2.960

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)”$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$$

$$\Rightarrow 0.9 < 1 - \alpha < 0.95$$

$$\Rightarrow 0.05 < \alpha < 0.1$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X > \sigma_Y$$

$$\text{“rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)\text{”}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 2.903$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$2.903 \equiv f_{1-\alpha}(3, 17)$$

$$\Rightarrow 0.9 < 1 - \alpha < 0.95$$

$$\Rightarrow 0.05 < \textcolor{red}{p\text{-value}} < 0.1$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1) \text{"}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1) \text{"}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1) \text{"}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1) \text{"}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

$$\Rightarrow 47.619 = f_{1-\alpha}(17, 3)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1) \text{"}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

$$\Rightarrow 47.619 = f_{1-\alpha}(17, 3)$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha > 0.995$$

							... quantili 0.995 della distribuzi						
m	1	2	3	4	5	6	...	16	17	18	19	20	21
1	16212	198.5	55.55	31.332	22.785	18.4	...	10.576	10.384	10.218	10.073	9.944	9.821
2	19997	199.0	49.80	26.284	18.314	14.1	...	7.514	7.354	7.215	7.093	6.987	6.892
3	21614	199.0	47.47	24.360	16.650	12.6	...	6.593	6.438	6.298	6.176	6.070	5.975
4	22788	199.4	45.91	22.967	15.458	11.5	...	5.854	5.698	5.566	5.444	5.338	5.243
5	23632	199.4	44.08	20.438	13.146	9.8	...	5.320	5.163	5.030	4.907	4.801	4.706
6	24684	199.4	43.01	20.371	13.086	9.7	...	4.875	4.717	4.584	4.461	4.355	4.260
7	24728	199.4	42.94	20.311	13.033	9.7	...	4.834	4.676	4.543	4.420	4.314	4.219
8	24766	199.4	42.88	20.258	12.985	9.6	...	4.797	4.639	4.506	4.383	4.277	4.182
9	24800	199.4	42.83	20.214	12.940	9.6	...	4.764	4.606	4.473	4.350	4.244	4.149
10	24830	199.4	42.78	20.176	12.900	9.5	...	4.734	4.576	4.443	4.320	4.214	4.119
11	24857	199.4	42.74	20.142	12.864	9.5	...	4.707	4.549	4.416	4.293	4.187	4.092
12	24881	199.4	42.70	20.112	12.832	9.5	...	4.682	4.524	4.391	4.268	4.162	4.067
13	24902	199.4	42.67	20.085	12.803	9.4	...	4.659	4.499	4.366	4.243	4.137	4.042
14	24920	199.4	42.64	20.061	12.777	9.4	...	4.637	4.477	4.344	4.221	4.115	4.020
15	24936	199.4	42.62	20.040	12.754	9.4	...	4.616	4.456	4.323	4.200	4.094	4.000
16	24950	199.4	42.60	20.021	12.733	9.4	...	4.596	4.436	4.303	4.180	4.074	3.980
17	24962	199.4	42.59	20.011	12.723	9.4	...	4.577	4.417	4.284	4.161	4.055	3.961
18	24972	199.4	42.58	20.001	12.713	9.4	...	4.559	4.399	4.266	4.143	4.037	3.943
19	24981	199.4	42.57	19.991	12.703	9.4	...	4.542	4.382	4.249	4.126	4.020	3.926
20	24988	199.4	42.56	19.981	12.693	9.4	...	4.526	4.366	4.233	4.110	4.004	3.910
21	24994	199.4	42.55	19.971	12.683	9.4	...	4.511	4.351	4.218	4.095	3.989	3.895
22	24999	199.4	42.54	19.961	12.673	9.4	...	4.497	4.337	4.204	4.081	3.975	3.881
23	25003	199.4	42.53	19.951	12.663	9.4	...	4.484	4.324	4.191	4.068	3.962	3.868
24	25007	199.4	42.52	19.941	12.653	9.4	...	4.472	4.312	4.179	4.056	3.950	3.856
25	25010	199.4	42.51	19.931	12.643	9.4	...	4.461	4.301	4.168	4.045	3.939	3.845
26	25013	199.4	42.50	19.921	12.633	9.4	...	4.451	4.291	4.158	4.035	3.929	3.835
27	25016	199.4	42.50	19.911	12.623	9.4	...	4.442	4.282	4.149	4.026	3.920	3.826
28	25018	199.4	42.50	19.901	12.613	9.4	...	4.434	4.274	4.141	4.018	3.912	3.818
29	25020	199.4	42.50	19.891	12.603	9.4	...	4.426	4.266	4.133	4.010	3.904	3.810
30	25022	199.4	42.50	19.881	12.593	9.4	...	4.419	4.259	4.126	3.999	3.893	3.799
31	25024	199.4	42.50	19.871	12.583	9.4	...	4.412	4.252	4.119	3.992	3.886	3.792
32	25025	199.4	42.50	19.861	12.573	9.4	...	4.406	4.246	4.113	3.986	3.880	3.786
33	25026	199.4	42.50	19.851	12.563	9.4	...	4.400	4.240	4.107	3.980	3.874	3.780
34	25027	199.4	42.50	19.841	12.553	9.4	...	4.395	4.235	4.102	3.975	3.869	3.775
35	25028	199.4	42.50	19.831	12.543	9.4	...	4.390	4.230	4.097	3.970	3.864	3.770
36	25029	199.4	42.50	19.821	12.533	9.4	...	4.385	4.225	4.092	3.965	3.859	3.765
37	25030	199.4	42.50	19.811	12.523	9.4	...	4.381	4.221	4.088	3.961	3.855	3.761
38	25031	199.4	42.50	19.801	12.513	9.4	...	4.377	4.217	4.084	3.957	3.851	3.757
39	25032	199.4	42.50	19.791	12.503	9.4	...	4.373	4.213	4.080	3.953	3.847	3.753
40	25033	199.4	42.50	19.781	12.493	9.4	...	4.369	4.209	4.076	3.949	3.843	3.749
41	25034	199.4	42.50	19.771	12.483	9.4	...	4.365	4.205	4.072	3.945	3.839	3.745
42	25035	199.4	42.50	19.761	12.473	9.4	...	4.362	4.202	4.069	3.942	3.836	3.742
43	25036	199.4	42.50	19.751	12.463	9.4	...	4.358	4.198	4.065	3.938	3.832	3.738
44	25037	199.4	42.50	19.741	12.453	9.4	...	4.355	4.195	4.062	3.935	3.829	3.735
45	25038	199.4	42.50	19.731	12.443	9.4	...	4.351	4.191	4.058	3.931	3.825	3.731
46	25039	199.4	42.50	19.721	12.433	9.4	...	4.348	4.188	4.055	3.928	3.822	3.728
47	25040	199.4	42.50	19.711	12.423	9.4	...	4.344	4.184	4.051	3.924	3.818	3.724
48	25041	199.4	42.50	19.701	12.413	9.4	...	4.341	4.181	4.048	3.921	3.815	3.721
49	25042	199.4	42.50	19.691	12.403	9.4	...	4.338	4.178	4.045	3.918	3.812	3.718
50	25043	199.4	42.50	19.681	12.393	9.4	...	4.334	4.174	4.041	3.914	3.808	3.714
51	25044	199.4	42.50	19.671	12.383	9.4	...	4.331	4.171	4.038	3.911	3.805	3.711
52	25045	199.4	42.50	19.661	12.373	9.4	...	4.328	4.168	4.035	3.908	3.802	3.708
53	25046	199.4	42.50	19.651	12.363	9.4	...	4.325	4.165	4.032	3.905	3.799	3.705
54	25047	199.4	42.50	19.641	12.353	9.4	...	4.322	4.162	4.029	3.902	3.796	3.702
55	25048	199.4	42.50	19.631	12.343	9.4	...	4.319	4.159	4.026	3.899	3.793	3.699
56	25049	199.4	42.50	19.621	12.333	9.4	...	4.316	4.156	4.023	3.896	3.790	3.696
57	25050	199.4	42.50	19.611	12.323	9.4	...	4.313	4.153	4.020	3.893	3.787	3.693
58	25051	199.4	42.50	19.601	12.313	9.4	...	4.310	4.150	4.017	3.890	3.784	3.690
59	25052	199.4	42.50	19.591	12.303	9.4	...	4.307	4.147	4.014	3.887	3.781	3.687
60	25053	199.4	42.50	19.581	12.293	9.4	...	4.304	4.144	4.011	3.884	3.778	3.684
61	25054	199.4	42.50	19.571	12.283	9.4	...	4.301	4.141	4.008	3.881	3.775	3.681
62	25055	199.4	42.50	19.561	12.273	9.4	...	4.298	4.138	4.005	3.878	3.772	3.678
63	25056	199.4	42.50	19.551	12.263	9.4	...	4.295	4.135	4.002	3.875	3.769	3.675
64	25057	199.4	42.50	19.541	12.253	9.4	...	4.292	4.132	3.999	3.872	3.766	3.672
65	25058	199.4	42.50	19.531	12.243	9.4	...	4.289	4.129	3.996	3.869	3.763	3.669
66	25059	199.4	42.50	19.521	12.233	9.4	...	4.286	4.126	3.993	3.866	3.760	3.666
67	25060	199.4	42.50	19.511	12.223	9.4	...	4.283	4.123	3.990	3.863	3.757	3.663
68	25061	199.4	42.50	19.501	12.213	9.4	...	4.280	4.120	3.987	3.860	3.754	3.660
69	25062	199.4	42.50	19.491	12.203	9.4	...	4.277	4.117	3.984	3.857	3.751	3.657
70	25063	199.4	42.50	19.481	12.193	9.4	...	4.274	4.114	3.981	3.854	3.748	3.654
71	25064	199.4	42.50	19.471	12.183	9.4	...	4.271	4.111	3.978	3.851	3.745	3.651
72	25065	199.4	42.50	19.461	12.173	9.4	...	4.268	4.108	3.975	3.848	3.742	3.648
73	25066	199.4	42.50	19.451	12.163	9.4	...	4.265	4.105	3.972	3.845	3.739	3.645
74	25067	199.4	42.50	19.441	12.153	9.4	...	4.262	4.102	3.969	3.842	3.736	3.642
75	25068	199.4	42.50	19.431	12.143	9.4	...	4.259	4.100	3.966	3.839	3.733	3.639
76	25069	199.4	42.50	19.421	12.133	9.4	...	4.256	4.097	3.963	3.836	3.730	3.636
77	25070	199.4	42.50	19.411	12.123	9.4	...	4.253	4.094	3.960	3.833	3.727	3.633
78	25071	199.4	42.50	19.401	12.113	9.4	...	4.250	4.091	3.957	3.830	3.724	3.630
79	25072	199.4	42.50	19.391	12.103	9.4	...	4.247	4.088	3.954	3.827	3.721	3.627
80	25073	199.4	42.50	19.381	12.093	9.4	...	4.244	4.085	3.951	3.824	3.718	3.624
81	25074	199.4	42.50	19.371	12.083	9.4	...	4.241	4.082	3.948	3.821	3.715	3.621
82	25075	199.4	42.50	19.361	12.073	9.4	...	4.238	4.079	3.945	3.818	3.712	3.618
83	25076	199.4	42.50	19.351	12.063	9.4	...	4.235	4.076	3.942	3.815	3.709	3.615
84	25077	199.4	42.50	19.341	12.053	9.4	...	4.232	4.073	3.939	3.812	3.706	3.612
85	25078	199.4	42.50	19.331	12.043	9.4	...	4.229	4.070	3.936	3.809	3.703	3.609
86	25079	199.4	42.50	19.321	12.033	9.4	...	4.226	4.067	3.933	3.806	3.700	3.606
87	25080	199.4	42.50	19.311	12.023	9.4	...	4.223	4.064	3.930	3.803	3.697	3.603
88	25081	199.4	42.50	19.301	12.013	9.4	...	4.220	4.061	3.927	3.799	3.693	3.599
89	25082	199.4	42.50	19.291	12.003	9.4	...	4.217	4.058	3.924	3.796	3.690	3.596
90	25083	199.4	42.50	19.281	11.993	9.4	...	4.214	4.055	3.921	3.793	3.687	3.593</

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1) \text{"}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

$$\Rightarrow 47.619 = f_{1-\alpha}(17, 3)$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha > 0.995$$

$$\Rightarrow \alpha < 0.005$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X < \sigma_Y$$

$$\text{"rifiuto } H_0 \text{ se } F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_\alpha(m-1, n-1) \text{"}$$

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = 0.021$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

$$0.021 \equiv f_\alpha(3, 17)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.021} = \frac{1}{f_\alpha(3, 17)}$$

$$\Rightarrow 47.619 = f_{1-\alpha}(17, 3)$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha > 0.995$$

$$\Rightarrow \textcolor{red}{p\text{-value}} < 0.005$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

“**accetto** H_0 se $f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) < F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$ ”

se dopo $m = 4$ misure X_i e $n = 18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = \dots$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

“accetto H_0 se $f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) < F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$ ”

se dopo $m=4$ misure X_i e $n=18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = \dots$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

• se $f_0 < 1$,

$$f_0 \equiv f_{\frac{\alpha}{2}}(3, 17)$$

Test rapporto varianze x pop. normali indipendenti

PROBLEMA: Calcolare il p -value dell' F -test con

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

“accetto H_0 se $f_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) < F_0 := \frac{S_X^2}{S_Y^2} < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$ ”

se dopo $m=4$ misure X_i e $n=18$ misure Y_j abbiamo trovato

$$f_0 = \dots$$

SOLUZIONE: Devo risolvere in α l'equazione:

• se $f_0 < 1$,

$$f_0 \equiv f_{\frac{\alpha}{2}}(3, 17)$$

• se $f_0 > 1$,

$$f_0 \equiv f_{1-\frac{\alpha}{2}}(3, 17)$$

Test differenza medie x pop. numerose indipendenti

IPOTESI: X_1, \dots, X_m i.i.d. con m grande $\left. \begin{array}{l} \\ Y_1, \dots, Y_n \text{ i.i.d. con } n \text{ grande} \end{array} \right\}$ indipendenti

Test differenza medie x pop. numerose indipendenti

IPOTESI: $\left. \begin{array}{l} X_1, \dots, X_m \text{ i.i.d. con } m \text{ grande} \\ Y_1, \dots, Y_n \text{ i.i.d. con } n \text{ grande} \end{array} \right\} \text{ indipendenti}$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}} \approx N(0, 1)$$

Test differenza medie x pop. numerose indipendenti

IPOSTESI: $\left. \begin{array}{l} X_1, \dots, X_m \text{ i.i.d. con } m \text{ grande} \\ Y_1, \dots, Y_n \text{ i.i.d. con } n \text{ grande} \end{array} \right\} \text{ indipendenti}$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}} \approx N(0, 1)$$

\Rightarrow Z-test per $\mu_X - \mu_Y$ **approssimati**

Test diff. frequenze x pop. bernoulliane indipendenti

IPOTESI:

$$\left. \begin{array}{l} X_1, \dots, X_m \text{ i.i.d. con } m \text{ grande, } X_i \sim B(1, q_X) \\ Y_1, \dots, Y_n \text{ i.i.d. con } n \text{ grande, } Y_j \sim B(1, q_Y) \end{array} \right\} \text{ indep.}$$

Test diff. frequenze x pop. bernoulliane indipendenti

IPOTESI:
$$\left. \begin{array}{l} X_1, \dots, X_m \text{ i.i.d. con } m \text{ grande, } X_i \sim B(1, q_X) \\ Y_1, \dots, Y_n \text{ i.i.d. con } n \text{ grande, } Y_j \sim B(1, q_Y) \end{array} \right\} \text{ indep.}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (q_X - q_Y)}{\sqrt{\hat{P}(1 - \hat{P}) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}} \approx N(0, 1) \quad \text{con} \quad \hat{P} = \frac{m\bar{X}_m + n\bar{Y}_n}{m + n}$$

Test diff. frequenze x pop. bernoulliane indipendenti

IPOTESI:
$$\left. \begin{array}{l} X_1, \dots, X_m \text{ i.i.d. con } m \text{ grande, } X_i \sim B(1, q_X) \\ Y_1, \dots, Y_n \text{ i.i.d. con } n \text{ grande, } Y_j \sim B(1, q_Y) \end{array} \right\} \text{ indep.}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (q_X - q_Y)}{\sqrt{\hat{P}(1 - \hat{P}) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}} \approx N(0, 1) \quad \text{con} \quad \hat{P} = \frac{m\bar{X}_m + n\bar{Y}_n}{m + n}$$

\Rightarrow Z-test per $q_X - q_Y$ **approssimati**

Test diff. frequenze x pop. bernoulliane indipendenti

IPOSTESI:
$$\left. \begin{array}{l} X_1, \dots, X_m \text{ i.i.d. con } m \text{ grande, } X_i \sim B(1, q_X) \\ Y_1, \dots, Y_n \text{ i.i.d. con } n \text{ grande, } Y_j \sim B(1, q_Y) \end{array} \right\} \text{ indep.}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n - (q_X - q_Y)}{\sqrt{\hat{P}(1 - \hat{P}) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}} \approx N(0, 1) \quad \text{con} \quad \hat{P} = \frac{m\bar{X}_m + n\bar{Y}_n}{m + n}$$

\Rightarrow Z-test per $q_X - q_Y$ approssimati

In alternativa: Z-test per campioni numerosi,
ma convergenza a $N(0, 1)$ più lenta

Inferenza non parametrica

Supponiamo che

X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim f$, f densità incognita

Inferenza non parametrica

Supponiamo che

X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim f$, f densità incognita

Vogliamo fare inferenza **su tutta f** (e non solo su un suo parametro)

Inferenza non parametrica

Supponiamo che

X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. con $X_i \sim f$, f densità incognita

Vogliamo fare inferenza **su tutta f** (e non solo su un suo parametro)

Ci sono due modi:

- metodi grafici
- test non parametrici

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow \quad q_{\gamma}^X = \sigma z_{\gamma} + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$
$$\Rightarrow \quad q_{\gamma}^X = \sigma z_{\gamma} + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile): Se inoltre

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \\ \Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile): Se inoltre

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} (X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$
$$\Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile): Se inoltre

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} (X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

convergono in probabilità a q_γ^X

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile): Se inoltre

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

dalle tavole

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} (X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

convergono in probabilità a q_γ^X

Normal qq-plot

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$
$$\Rightarrow q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile): Se inoltre

$$X_1, X_2, \dots, X_n \text{ i.i.d. con } X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} (X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma + 1)}) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

convergono in probabilità a q_γ^X

dall'esperimento

OSSERVAZIONE I: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{con} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \\ \Rightarrow \quad q_\gamma^X = \sigma z_\gamma + \mu \quad \text{per ogni } \gamma$$

OSSERVAZIONE II (più difficile): Se inoltre

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad \text{i.i.d.} \quad \text{con} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

allora i *quantili empirici*

$$\hat{Q}_\gamma^X := \begin{cases} X_{(\lfloor n\gamma \rfloor + 1)} & \text{se } n\gamma \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} (X_{(n\gamma)} + X_{(n\gamma+1)}) & \text{se } n\gamma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

convergono in probabilità a q_γ^X

$$\Rightarrow \quad \hat{q}_\gamma^X \text{ e } z_\gamma \text{ si devono allineare !}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^X$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^X = \frac{1}{2}(x_{(k)} + x_{(k+1)})$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^X = \frac{1}{2}(x_{(k)} + x_{(k+1)}) \quad \text{complicato!}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^X = \frac{1}{2}(x_{(k)} + x_{(k+1)}) \quad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^X$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^X = \frac{1}{2}(x_{(k)} + x_{(k+1)}) \quad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^X = x_{(k)}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^X = \frac{1}{2}(x_{(k)} + x_{(k+1)}) \quad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^X = x_{(k)} \quad \text{più semplice...}$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^X = \frac{1}{2}(x_{(k)} + x_{(k+1)}) \quad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^X = x_{(k)} \quad \text{più semplice...}$$

NORMAL QQ-PLOT = grafico dei punti

$$\left(z_{\frac{k-0.5}{n}}, \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^X \right) \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, n$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^X = \frac{1}{2}(x_{(k)} + x_{(k+1)}) \quad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_{\gamma}^X = \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^X = x_{(k)} \quad \text{più semplice...}$$

NORMAL QQ-PLOT = grafico dei punti

$$\left(z_{\frac{k-0.5}{n}}, \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^X \right) = \left(z_{\frac{k-0.5}{n}}, x_{(k)} \right) \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, n$$

Normal qq-plot

Se $\gamma = \frac{k}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_\gamma^X = \hat{q}_{\frac{k}{n}}^X = \frac{1}{2}(x_{(k)} + x_{(k+1)}) \quad \text{complicato!}$$

Se invece $\gamma = \frac{k-0.5}{n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{q}_\gamma^X = \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^X = x_{(k)} \quad \text{più semplice...}$$

NORMAL QQ-PLOT = grafico dei punti

$$\left(z_{\frac{k-0.5}{n}}, \hat{q}_{\frac{k-0.5}{n}}^X \right) = \left(z_{\frac{k-0.5}{n}}, x_{(k)} \right) \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, n$$

punti quasi allineati \Rightarrow è verosimile che $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Test di Shapiro-Wilks

Si può fare (con R) un test per le ipotesi

H_0 : le X_i hanno densità normale vs. H_1 : H_0 è falsa

Test di Shapiro-Wilks

Si può fare (con R) un test per le ipotesi

H_0 : le X_i hanno densità normale vs. H_1 : H_0 è falsa

p -value alto \Rightarrow non possiamo escludere X_i normali

Test di Shapiro-Wilks

Si può fare (con R) un test per le ipotesi

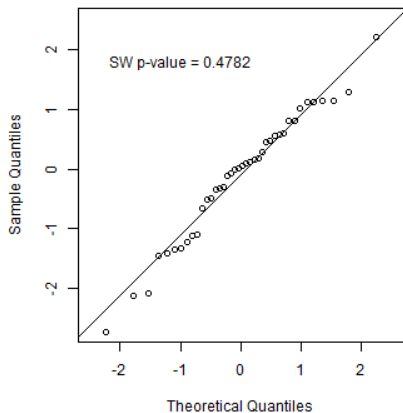
H_0 : le X_i hanno densità normale vs. H_1 : H_0 è falsa

p -value alto \Rightarrow non possiamo escludere X_i normali

p -value basso \Rightarrow normalità delle X_i poco verosimile

Test di Shapiro-Wilks

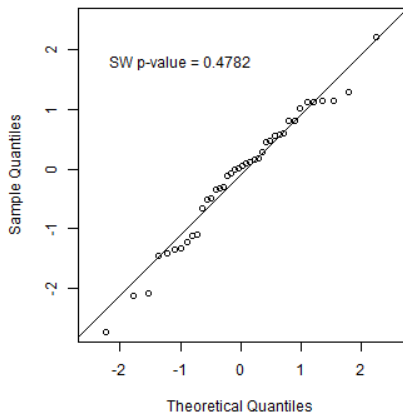
Normal Q-Q Plot



Non posso rifiutare la gaussianità

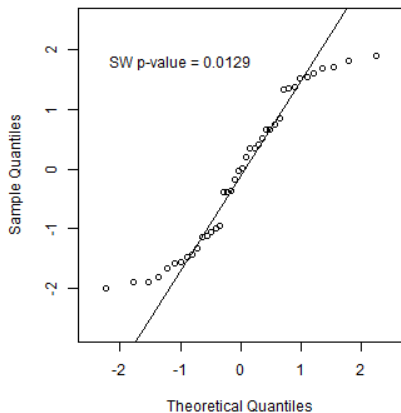
Test di Shapiro-Wilks

Normal Q-Q Plot



Non posso rifiutare la gaussianità

Normal Q-Q Plot



Devo rifiutare la gaussianità