A. Zee ; Ryder ; Bohm-Demmers-Joos (QED)
www.pv.infn.it/~piccinin/QFT/Notes.pdf

05-03-24

Introduzione

. Equazione MQ-rel ristretta = TEORIA dei CAMPI

. NO fdo di part singolo ⇝ $i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \mathcal{H}\psi(x,t)$ ⇝ non rispetta la rel.

↳ relaz. di dispersione E-p della R. ristr. $E^2 = p^2 + m^2 \implies$ KLEIN-GORDON

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi(x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \text{stati a } E \lessgtr 0 \\ J_\mu = \frac{i}{m}\left(\psi^* \partial_\mu \psi - \partial^\mu \psi^* \psi\right) \longrightarrow J^0 = \rho \\ \partial_t^2 \rightarrow \text{servono 2 cond. iniziali; incompat con MQ} \end{cases}$$

mi aspetto densità di P ⇝ non def positiva

Allora passiamo all'eq. di Dirac $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-i\,\bar{\alpha}\cdot\bar{\nabla} + \beta m\right)\psi$

$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \longleftarrow$ matrici di dim. 4×4

In realtà non risolve i problemi $\implies$ stati a $E<0$; inoltre l'op. momento angolare non commuta con $\mathcal{H}$ (questo viene ripristinato col dof di spin) ;

Quindi passiamo alla II quantizzazione ⇝ sono equazioni di campo classiche di cui promuovo i campi a operatori

. $\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2\phi^2\right) \xrightarrow{E.L.}$ equaz K.G

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\,\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

$$H = \int d^3x\, T^{00} = \frac{1}{2}\int \left[(\partial_t\phi)^2 + \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\phi) + m^2\phi^2\right] d^3x$$

↑ sono tutte quantità positive

Ora devo fare la QUANTIZZAZIONE : $\phi(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2m2\omega_k}} \left(a(k) e^{-ik\cdot x} + a^+(k) e^{ik\cdot x} \right)$

promossi a op

in componenti di Fourier

dove imponiamo poi $\begin{cases} [\varphi(t,x), \varphi(t,\bar{x})] = i\,\delta^3(x-\bar{x}) \\ [a_k, a^+_{k'}] = i\,\delta_{kk'} \end{cases}$

Definiamo $a(k)a^+(k) = N$ OPERAT. NUMERO

$H = \sum_k \omega_k (N(k) + 1/2)$ stessa forma dell'OA ①

sono associati ai diversi n° d'onda / momenti

$\Rightarrow$ N come op. numero di QUANTI con energia ω_k. È più manifesto se calcolo anche l'impulso

$p^i = \int d^3x \; T^{i0} = \sum_k k^i (N(k) + 1/2)$ ②

1+2 $\Rightarrow$ N come op. numero di QUANTI

$\Rightarrow$ legame fra campo quantizzato e interpretaz. del campo come collezione di particelle

Definiamo poi lo spazio di Hilbert con:

$|0\rangle \rightsquigarrow$ STATO di VUOTO (= prima erano oscillatori nel ground state)

$\hookrightarrow$ campi bosonici = no limitaz. sul n° di part. sui modi

Consideriamo poi la $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_{KG} \rightsquigarrow$ considero ϕ_1, ϕ_2 campi reali indip.

$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}$ $\qquad \varphi^* = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}}$

Con φ, φ^* indip. costruisco $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_{KG} = (\partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi^* - m^2 \varphi\varphi^*)$

Su questo $\mathcal{L}$ ho una **SIMMETRIA INTRINSECA**: se facessi una trasf. di fase GLOBALE:

$$\begin{cases} \varphi(x) \longrightarrow e^{-i\alpha}\varphi(x) \\ \varphi^*(x) \longrightarrow e^{+i\alpha}\varphi^*(x) \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{L}^{C}_{KG} \text{ è INVARIANTE} \Longrightarrow$$

Noether
↓
$\exists$ quantità conservata legata alla carica
↓
campo di quanti carichi

Quindi abbiamo anche $b, b^\dagger$:

$$\varphi(x) \propto a(k)e^{-ik\cdot x} + b^\dagger(k)e^{+ik\cdot x}$$

NB Risolvo: stati a $E<0$; cambio interpretaz di ρ ~ non densità di P, ma DENSITÀ di CARICA

Per il campo di Dirac: $\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x)$

Cambiamo le relaz. di (ANTI)COMMUTAZIONE:

$$\{\psi(x,t), \bar{\psi}(\bar{x},t)\} = i\delta^3(x-\bar{x})$$

↳ stati popolati da solo UN QUANTO con certi # quantici

↳ PRINCIPIO di ESCLUSIONE di PAULI

Qui avrò l'oscillatore di Fermi-Dirac

Anche qui avrò due operatori di creaz. e distruz. (2 op. numero)

↳ collez. di PARTICELLE e ANTIPART.

C'è un altro modo di quantizzare la teoria: <u>APPROCCIO A **PATH INTEGRAL**</u>

↳ metodo di quantiz. che non usa gli operatori; usiamo la $\mathcal{L}$ e integriamo su <u>tutti i cammini</u> ~ assumo tutti i possibili cammini classici, ognuno

con un peso dato dall'azione classica → Feynman. Facendo così recupero la MQ (la ricostruisco con questo principio di base)

Questo formalismo è lo stesso che si può usare in QFT, passando da $\begin{cases} t \to x \\ x(t) \to \varphi(x) \end{cases}$ ⇒ MQ come QFT in uno spazio a dim 0

- $\langle 0 | T[\phi(x_1) \dots \phi(x_m)] | 0 \rangle$ funz di Green a m punti
  ↳ stato di vuoto in QFT (stato fondam in MQ)

Funzionale generatore come strumento x le funz. di Green ⇝ questo approccio semplifico i conti una volta usciti dalla QED

Nel campo di Dirac, cosa uso? È basato sulle anticom, ma le var. dym. commutano sempre ⇝ fatto poi da Brezin con le VARIABILI di GRASSMAN (entità matematiche anticommutanti).

Passiamo poi alle INTERAZIONI: partiremo dal campo scalare $\propto \varphi^4(x)$

Il problema è che mai si possono calcolare le funz. di Green ⇒ NORMALIZ.

↳ correlazione funz. Green ⟷ matrice S

08-04-24 · lez 2

Metodo a path integral di Feynman

lo vedo prima in MQ su OA, poi in QFT

Vediamo la formulaz. di Feynman. Lavoriamo nello spazio delle configuraz. e specifichiamo la trattazione al caso dell'OA : $\mathcal{H}_{OA} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$

Studiamo l'ampiezza di transizione : $q \xrightarrow{0 \to t} q'$

autostato posizione

OPERAT. PRETTAMENTE QUANTISTICO ($\hbar = 1$)

$$\langle q', t \,|\, e^{-it\mathcal{H}} \,|\, q, 0\rangle = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \langle q'|m\rangle \underbrace{\langle m|e^{-it\mathcal{H}}|m\rangle}_{\propto\, \delta_{mm}} \langle m|q\rangle =$$

$e^{-i m \omega_0 t}|m\rangle$

proietto sugli a.st. di E ⤳ aggiungo $\mathbb{1} = \sum_m |m\rangle\langle m|$

$\mathcal{H}|m\rangle = m\omega_0|m\rangle$ (non considero pto zero)

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-im\omega_0 t} \underbrace{\langle q'|m\rangle}\,\underbrace{\langle m|q\rangle}_{\varphi_m^*(q)} = \circledast$$

autost di E in rappr. delle posiz $= \varphi_m(q')$ ⟶ note per OA: pol di Hermite

$$\varphi_m(q) = (-)^m\, \omega_0^{1/4}\, \pi^{-1/4}\, 2^{-m/2}\, m!^{-1/2}\, \omega_0^{-m/2}\, e^{\omega_0 q^2/2} \left(\frac{\partial}{\partial q}\right)^m e^{-\omega_0 q^2}$$

$$\circledast = \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}}\, e^{\frac{1}{2}\omega_0(q^2+q'^2)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}\left(\frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial q'}\right)^m \exp\left[-\omega_0(q^2+q'^2)\right]$$

sviluppo dell'exp.

$$= \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}}\, e^{\frac{1}{2}\omega_0(q^2+q'^2)} \cdot \exp\left\{\frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial q'}\right\} \exp\left\{-\omega_0(q^2+q'^2)\right\}$$

$$e^{-\omega_0 q^2} = \frac{1}{2}(\pi\omega_0)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\; e^{+i\kappa q - \kappa^2/4\omega_0}$$

$$= \frac{\pi^{-3/2}}{4}\,\omega_0^{-1/2}\, e^{(q'^2+q^2)\frac{\omega_0}{2}} \cdot \exp\left\{\frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial q'}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\; e^{+i\kappa q - \kappa^2/4\omega_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa'\; e^{+i\kappa' q' - \kappa'^2/4\omega_0}$$

porto dentro

$$= \text{''} \quad \text{''} \int d\kappa \int d\kappa' \exp\left\{\frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0}\kappa\kappa' + i\kappa q + i\kappa' q' - \frac{\kappa^2}{4\omega_0} - \frac{\kappa'^2}{4\omega_0}\right\}$$

$-X^T A X + b^T X$: con $x = \begin{pmatrix}\kappa\\ \kappa'\end{pmatrix}$, $b = i\begin{pmatrix}q\\ q'\end{pmatrix}$ $A = \frac{1}{4\omega_0}\begin{pmatrix}1 & \gamma\\ \gamma & 1\end{pmatrix}$, $\gamma = e^{-i\omega_0 t}$

↳ argomento dell'exp

$\Longrightarrow$ soluzione $= \sqrt{\det(2\pi A^{-1})}\; e^{\frac{1}{2}b^T A^{-1} b}$ ⤳ INTEGR. GAUSSIANO

$$= \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi(1-\gamma^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma^2}\left[\frac{1}{2}\omega_0(1+\gamma^2)(q^2+q'^2) - 2\omega_0\gamma q q'\right]\right\}$$

$2qq' = \frac{1}{2}(q+q')^2 - \frac{1}{2}(q-q')^2$: voglio qui la somma dei quadr

V. PP 26D.

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{\omega_0}{\pi(1-\gamma^2)}}\exp\left\{-\frac{\omega_0}{4}\left[\frac{1+\gamma}{1-\gamma}(q'-q)^2 + \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)(q'+q)^2\right]\right\}}_{A_M(t)}$$

↳ SOLO VAR. DINAMICHE CLASSICHE

$A_M(t)$ → fatto nello spazio di Minkowski

$$\Longrightarrow \boxed{A_H(t) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi(1-e^{-2i\omega_0 t})}}}$$

Definiamo poi $\boxed{\Theta_H = \frac{2}{i\omega_0}\,\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}$ $= \frac{2}{i\omega_0}\,\frac{1-e^{-i\omega_0 t}}{1+e^{-i\omega_0 t}}$ raccolgo $e^{-i\omega_0 t/2}$ sopra e sotto

$z = \omega_0 t/2$

$$= \frac{2}{i\omega_0}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = \frac{2}{\omega_0}\tan\left(\frac{1}{2}\omega_0 t\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\frac{\omega_0}{4}\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{i\Theta_H}{2\Theta_H^2} \\ -\frac{\omega_0}{4}\,\frac{1-\gamma}{1+\gamma} = -\frac{i\Theta_H^2\omega_0^2}{8} \end{cases}$$

lo inserisco qui

ricorda un'en. potenz.

dimens $[t]$

$$\Longrightarrow \langle q'|e^{-iT\mathcal{H}}|q\rangle = A_H(t)\exp\left\{i\Theta_H\left[\underbrace{\frac{1}{2}\frac{(q'-q)^2}{\Theta_H^2}}_{\doteq T} - \underbrace{\frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{q'+q}{2}\right)^2}_{\doteq V}\right]\right\} \qquad (R1)$$

AZIONE = tempo · lagrangiana

è come una VELOCITÀ MEDIA $\rightsquigarrow$ ENERGIA CINETICA (ho posto $m=1$) mediata nel t

ho solo $q, q', t, t_0 = 0 \Rightarrow$ stato iniziale e finale

Ho ritrovato l'exp. dell'AZIONE CLASSICA $\rightsquigarrow [\dots] = \mathcal{L} = T - V$

OSS Θ_H non è il tempo ordinario, è una funz. periodica. Se prendo tempi infinitesimi, come lo relaziono a τ?

↳ periodo $2\pi/\omega_0$

Faccio sviluppo per t infinitesimo

$$A_H(\Delta t) \simeq \left(\frac{\omega_0}{\pi(1-1+2i\omega_0\Delta t)}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\Delta t}} \longrightarrow \text{COMPARE } t \text{ ORDINARIO!}$$

$$\Theta_H(\Delta t) = \frac{2}{\omega_0}\tan\left(\frac{1}{2}\omega_0\Delta t\right) \simeq \Delta t \quad \rightsquigarrow \text{tang. lineare attorno } 0$$

Quindi quando $\Delta t \to 0$:
$$\begin{cases} \frac{(q-q')^2}{\Theta_H^2} \longrightarrow \bar{v}^2 \\ \frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{q'+q}{2}\right)^2 \longrightarrow V \end{cases}$$

NB x pagina dopo: questo esponente NON è l'espansione serie dell'esponente in (R1)

$$\langle q'| e^{i\Delta t H} |q\rangle \xrightarrow{\Delta t\to 0} A_H(\Delta t)\, e^{\overbrace{i\Delta t L(q,\dot q)}^{=\text{ AZIONE CLASSICA}}}$$

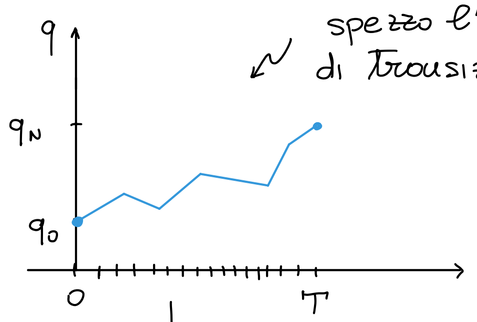
(LiH) ⇝ $L \doteq \frac{(q'-q)^2}{2\Delta t^2} - \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{q'+q}{2}\right)^2$

Sommiamo ora l'ampiezza di transiz. x tempi finiti ⇝ considero tutte le singole time slice

$$\langle q_N | e^{-iTH} | q_0\rangle = \langle q_N | e^{-i\sum_k \Delta t_k H} | q_0\rangle = (\star)$$

↳ T finito

spezzo l'ampiezza di transiz



↳ divido in N segmenti

Inseriamo delle completezze in ogni Δt

$$\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_k\, |q_k\rangle\langle q_k| \rightsquigarrow e^{-i\Delta t\mathcal{H}}\,\mathbb{1}\, e^{-i\Delta t H}\,\mathbb{1} \dots = e^{-iT\mathcal{H}}$$

↳ $\int dq_{k_1} dq_{k_2} \langle q_N | e^{-i\Delta t H} | q_{k_1}\rangle\langle q_{k_1}| e^{-i\Delta t H} | q_{k_2}\rangle\langle q_{k_2}| \dots$

↳ exp come prodotto di exp : $\prod_{i=1}^{N-1} \int dq_i$

$$(\star) = \left(A_H(\Delta t)\right)^N \prod_{i=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_i\, e^{i\Delta t \sum_{j=1}^{N-1} L(q_j,\dot q_j)}$$

→ sono su tutti i possibili cammini pesati diversamente

↳ PROBLEMA: diverge per $\Delta t \to 0$

⇝ $\prod_i \int dq_i = \int \mathcal{D}q$

Dato q_0, q_N: una realizzaz. ≡ un cammino classico (es ■) : uno di questi è quello della mecc. classica; in MQ sommo su ∞ cammini. Il cammino classico è quello che rende stazionaria l'azione, quindi è quello + probabile. Gli altri contribuiscono col loro peso: più sono distanti da quello classico, meno pesano.

- Solo variabili CLASSICHE
- Recupero dell'AZIONE classica
- Sommo su tutte le possibili CONFIG. CINEMATICHE

↳ sto fissando q_0 e q_N, mentre INTEGRO su tutte le posiz q_i intermedie. Il peso delle config è dato da iS con $S \simeq \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{L}(q_j,\dot q_j)$

↑ approssimo l'az classica

Riscriviamo ulteriormente l'ampiezza di transiz.

$$\underbrace{\langle q' | \psi(t)\rangle}_{=\psi(q',t)\ \text{fdo}} \doteq \langle q' | e^{-it\mathcal{H}} | \psi(0)\rangle = \int dq\, \underbrace{\langle q' | e^{-it\mathcal{H}} | q\rangle}_{\text{ampiezza transiz.}} \langle q | \psi(t=0)\rangle = \psi(q',t)$$

↑ completezza

rappr. (S)

↑ autostato

ossia l'equaz (S) é EQUIVALENTE alla conoscenza dell' ampiezza di transizione $\sim \langle q'| e^{itH} |q\rangle$ = PROPAGATORE

$\longrightarrow$ problema

i.e. resto nello stesso stato

$$\lim_{\Delta t\to 0} \langle q'| e^{-i\Delta t H}|q\rangle \simeq \lim_{\Delta t\to 0} \frac{e^{\frac{i}{2}\frac{(q'-q)^2}{\Delta t}}}{\sqrt{2\pi i \Delta t}} \neq \delta(q-q')$$

- voglio che $\langle q|q'\rangle \xrightarrow{\Delta t\to 0} \delta(q'-q)$

  però ho un exp della forma $\sim e^{\overbrace{i\,(q'-q)^2/2\Delta t}^{\text{OSCILLANTE}}}$, mentre x avere la rappr. della δ dovrei avere un meno (PP 29 D)

- $$\langle q'| e^{-2i\Delta t H}|q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq'' \,\langle q'| e^{-i\Delta t \mathcal{H}}|q''\rangle\langle q''| e^{-i\Delta t\mathcal{H}}|q\rangle$$

  completezza a $\Delta t \longrightarrow$ spezzo in 2 intervalli

  resto un termine in $e^{i\alpha q''^2}$ con $\alpha\in\mathbb{R}$ (OSCILLANTE)

V. PP 30 in alto (2.52) (2.53)

Questo si può risolvere se Δt ha una piccola componente immaginaria. Per fare questo trasf., usiamo $t \longrightarrow -i\tau$, ossia la ROTAZIONE di WICK, dove τ é il TEMPO EUCLIDEO. Alla fine, si esegue la trasf. inversa x recuperare t.

Allora scriviamo:

$$A_M(t) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi(1-e^{-2i\omega_0 t})}} \longrightarrow A_E \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi(1-\gamma_E^2)}} \qquad \text{con } \gamma_E = e^{-\omega_0\tau}$$

$$\gamma_M = e^{-i\omega_0 t}$$

$$\Theta_M = \frac{2}{i\omega_0}\,\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \longrightarrow \Theta_E = \frac{2}{i\omega_0}\,\frac{1-\gamma_E}{1+\gamma_E}$$

$T+V \sim$ quadratiche

somma di quantità quadratiche

$$\Rightarrow \langle q'| e^{-\tau\mathcal{H}}|q\rangle = (A_E(\tau))^N \exp\left\{-\Theta_E\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q'-q}{\Theta_E}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\omega_0^2\left(\frac{q'+q}{2}\right)^2\right]\right\}$$

PATH INTEGRAL

$$= (A_E(\Delta\tau))^N \underbrace{\int \mathcal{D}q}\; e^{-S_E(q)}$$

exp reale di segno DEFINITO

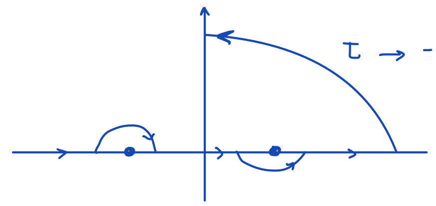
INTEGRALE FUNZIONALE $= \prod_{i=1}^{N} \int dq_i = \int \mathcal{D}q$

Questo risolve entrambi i problemi $\rightarrow$ V. PP 31, 32 D!!

È necessaria una trattazione matematica ⇝ questo integrale sembra DIVERGENTE (v. Mosel)

↓ è A il problema

NB ROTAZIONE di WICK: Se ho una funz. analitica con al più alcuni poli, posso spostare l'integraz. sull'asse immaginario ⇝ prescrizione di regolarizzazione ⇝ passo dallo spazio-tempo di Minkowski allo spazio euclideo 4dim. ⇝ equivalenza formale fra mecc. stat. e questa costruzione



→ approssimazione semiclassica

Abbiamo quindi introdotto l'azione euclidea ⇝ è un FUNZIONALE della posizione $S[q]$. L'azione associa quindi un valore ad ogni cammino, dipende da tutta la funz. Riscriviamo ora S_E:

$$S_E[q] = \underbrace{S_0[q]}_{\text{corrisp. al cammino classico}} + \underbrace{\cancel{\delta S[q]}}_{=0} + \frac{1}{2}\delta^2 S[q] + \dots$$

corrisp. al cammino classico; $= 0$ as x def, è quello che minimizza l'azione

ossia, espando l'azione in termini di FLUTTUAZIONI attorno al CAMMINO CLASSICO. Consideriamo termini fino al 2° ordine (questo permette di usare gli integ. gaussiani)

Perché posso farlo? Per le traiettorie lontane da q_c è possibile trovare altre traiettorie con fasi molto diverse che interferiscono in maniera distruttiva

NB $\delta^2 S \supset \dfrac{\delta^2 S}{\delta q\, \delta q'}\,,\ \dfrac{\delta^2 S}{\delta q''}$

NB Tempo euclideo = se definisco un q. vett, il P.S. ha segni tutti uguali come nel prodotto euclideo

→ v. PP 32, 33D!

12-03-24 · lez 3

eq 2.69-2.70

$$\langle q_N | e^{-iTH} | q_0 \rangle = [A(\Delta t)]^N \int \mathcal{D}q \, e^{iS/\hbar} \propto \int \mathcal{D}q \, e^{iS/\hbar}$$

TEMPO EUCLIDEO

Regolarizzazione: $t \to -i\tau$ (campo. immaginario non infinitesimo)

QFT $\longrightarrow$ mecc stat.

$$\langle q_N | e^{-TH} | q_0 \rangle = [A(\Delta \tau)]^N \int \mathcal{D}q \, e^{-S_E/\hbar}$$ PROPAGATORE

↳ MQ come generaliz della mecc classica

Calcolo delle funzioni di Green

Le funzioni di Green danno info sulla dinamica quantistica di un syst. Considero un intervallo $2T$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\langle n | e^{-2TH} | n \rangle}_{\text{val. asp}}$$ autostati dello H $\Rightarrow$ è la traccia. Valuto il limite.

$$\lim_{T \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \langle n | e^{-2TH} | n \rangle \overset{H|n\rangle = n\omega_0|n\rangle}{=} \lim_{T \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2T\omega_0 n} \overbrace{\langle n | n \rangle}^{=1} = \lim_{T \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(e^{-2T\omega_0})^n}_{\text{serie geometrica}} =$$

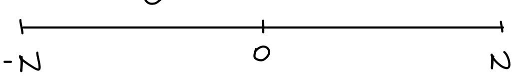
$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{1 - e^{-2T\omega_0}} = 1 = \bigstar$$

La traccia è indip. dalla rappresentaz (i.e. dalla base); allora uso la base degli AUTOSTATI di POSIZIONE (siamo nel continuo: $\Sigma \to \int$)

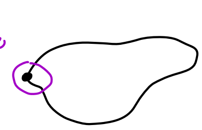
$$\bigstar = \lim_{T \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \underbrace{\langle q | e^{-2T\mathcal{H}} | q \rangle}_{} = 1$$

è per def il PROPAGATORE

Questo è il **PROPAGATORE** con stato iniziale e finale uguali $\Rightarrow$ sono **CAMMINI PERIODICI**. Voglio la rappr. a path integral dove $q_N = q_{-N}$ (questo vale per ///). C'è poi anche $\int dq$ overall $\Rightarrow$ integro sugli estremi del



... e su tutti questi punti



integro su tutti i cammini...

percorso:

$$\star = \lim_{T\to+\infty} \left[A_E(\Delta\tau)\right]^{2N} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_{-N+1} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dq_N \; e^{-S_E(q_{-N},\dots,q_N)} = 1$$

$\langle q | q_k \rangle = $ "S_k" ; $\mathbb{1} = \int dq_k \, |q_k\rangle\langle q_k|$

$$1 = \lim_{T\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \langle q | e^{-2TH} | q \rangle = \lim \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \langle q | e^{-\Delta T H} \mathbb{1} e^{-\Delta T H} \mathbb{1} \dots e^{-\Delta T H} | q \rangle$$

$$= \lim \int dq_{-N+1} \dots \int dq_N \, \langle q_N | e^{-\Delta T H} | q_{N-1} \rangle \dots \langle q_{-N+1} | e^{-\Delta T H} | q_{-N} \rangle$$

$$= \lim A_E^{2N}(\Delta\tau) \int dq_{-N+1} \dots \int dq_N \; e^{-S_E}$$

Una volta studiati i cammini periodici, consideriamo la

FUNZIONE di GREEN a m PUNTI $\boxed{G(\tau_1,\dots,\tau_m) \doteq \langle 0 | T[\hat{q}_H(\tau_1)\dots\hat{q}_H(\tau_m)] | 0 \rangle}$

stato fondam. ; descriz. Heisenberg

rappr. di Shrödinger

con $\hat{q}_H(\tau) \overset{d}{=} e^{\tau H} \, \hat{q}_S \, e^{-\tau H}$

↳ indip. da t

Specifichiamo per $m=2$. Iniziamo calcolando:

sopravvivrà solo lo stato di vuoto ($T \to +\infty$ e ho exp negativo) $\Rightarrow m = 0$

$$\lim_{T\to+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \langle m | e^{-TH} \hat{q}_H(\tau_1) \hat{q}_H(\tau_2) \underbrace{e^{-TH} | m \rangle}_{e^{-Tm\omega_0}} = \lim_{T\to+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-2Tm\omega_0} \langle m | \hat{q}_H(\tau_1) \hat{q}_H(\tau_2) | m \rangle$$

$$= \langle 0 | \hat{q}_H(\tau_1) \hat{q}_H(\tau_2) | 0 \rangle$$

(prima era la stessa cosa con uno solo q)

calcolato ora

$$\Rightarrow G^{(2)}(\tau_1,\tau_2) \overset{d}{=} \langle 0 | T[\hat{q}_H(\tau_1)\hat{q}_H(\tau_2)] | 0 \rangle =$$

base posiz.

$$= \lim_{T\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \langle q | e^{-TH} \underline{T[\hat{q}_H(\tau_1)\hat{q}_H(\tau_2)]} e^{-TH} | q \rangle$$

sopra ho usato $|m\rangle$

limite della Tr in termini di a. stato della posiz.

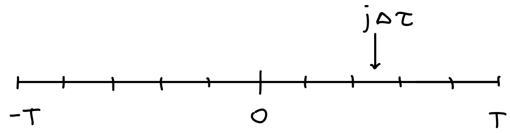
lo posso scrivere come somma di $\theta(\pm\tau_1 \mp \tau_2)$

$$= \theta(\tau_1-\tau_2) \lim_{T\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \langle q | e^{-TH} \hat{q}_H(\tau_1) \hat{q}_H(\tau_2) e^{-TH} | q \rangle +$$

$$+ \theta(\tau_2-\tau_1) \lim_{T\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \underline{\langle q | e^{-TH} \hat{q}_H(\tau_2) \hat{q}_H(\tau_1) e^{-TH} | q \rangle}$$

le riscrivo in termini di PATH INTEGRAL

Inizio a decomporre $2T = 2N\Delta\tau$ con



$\tau_{1,2} = j\,\Delta\tau \;,\quad j \in [-N, N]$.

• $\underline{\tau_1 > \tau_2}$ (studio la prima θ)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \langle q| \, e^{TH} \, \hat{q}_H(\tau_1) \, \hat{q}_H(\tau_2) \, e^{-TH} \, |q\rangle$$

$\hat{q}_H(\tau_J) = e^{\tau_J H} \, \hat{q}_s \, e^{-\tau_J H}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \langle q| \, e^{TH} \left(e^{\tau_1 H} \, \hat{q}_s \, e^{-\tau_1 H} \right)\left(e^{\tau_2 H} \, \hat{q}_s \, e^{-\tau_2 H} \right) e^{-TH} \, |q\rangle$$

$\tau_1 = i\,\Delta\tau$
$\tau_2 = J\,\Delta\tau$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dq \, \langle q| \, e^{-(N-i)\Delta\tau H} \, \hat{q}_s \, e^{-(i-J)\Delta\tau H} \, \hat{q}_s \, e^{-(N+J)\Delta\tau H} \, |q\rangle$$

completezza sui pti del reticolo + $\hat{q}_s |q_1\rangle\langle q_1| = \underset{\text{a.v.e}}{q_1} \langle q_1|$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_N \int_{-\infty}^{+\infty} dq_i \int_{-\infty}^{+\infty} dq_J \, \langle q_N| e^{-(N-i)\Delta\tau H} |q_i\rangle q_i \, \langle q_i| e^{-(i-J)\Delta\tau H} |q_J\rangle q_J \, \langle q_J| e^{-(N+J)\Delta\tau H} |q_N\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_{-N+1} \cdots \int dq_N \; q_i q_J \; e^{-\Delta\tau L_E(q_{N-1}, \dot{q}_{N-1})} \cdots e^{-\Delta\tau L_E(q_{-N}, \dot{q}_{-N})} \left[A_E(\Delta\tau) \right]^{2N}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_{-N+1} \cdots \int dq_N \; \underbrace{q_i q_J} \; e^{-S_E(q_N, \dots, q_{-N+1})}$$

sono scalari, commutano

qui ho traccia di τ_1, τ_2; se avessi posto $\tau_1 < \tau_2$, non sarebbe cambiato nulla

$$\Longrightarrow \; G^{(2)}(\tau_1, \tau_2) = \lim_{T \to +\infty} \left[A_E(\Delta\tau) \right]^{2N} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_{-N+1} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dq_N \; q_i q_J \; e^{-S_E}$$

ossia una rappres. a path integral della funz. di Green su tutto il reticolo. Voglio ora risolverlo su tempi infinitesimi, tuttavia A_E non permette di prendere il limite per $\Delta\tau \to 0$. Risolviamolo ora dividendo per 1 scritto nella forma ⋆ :

$$G^{(2)}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\lim_{T \to +\infty} \cancel{\left[A_E(\Delta\tau) \right]^{2N}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_{-N+1} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dq_N \; q_i q_J \; e^{-S_E}}{\lim_{T \to +\infty} \cancel{\left[A_E(\Delta\tau) \right]^{2N}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_{-N+1} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dq_N \; e^{-S_E}}$$

scrivo il rapp. dei limiti come limite dei rapp. $\Longrightarrow$ semplifico

$$\boxed{G^{(2)}(\tau_1,\tau_2) = \frac{\int \mathcal{D}q\; q_i q_J\, e^{-S_E[q]}}{\int \mathcal{D}q\, e^{-S_E[q]}}}$$

cfr $\langle q_N | e^{-TH} | q_0 \rangle = \int \mathcal{D}q\, e^{-S_E}$

↳ è un fattore di normaliz ⇝ gioca il ruolo di FUNZ. di PARTIZ. in mecc. stat.

↳ è un OGGETTO QUANTISTICO che coinvolge solo QUANT. CLASSICHE

$$\Longrightarrow G^{(m)}(\tau_1,..,\tau_m) = \frac{\int \mathcal{D}q\; q_1 \dots q_m\, e^{-S[q]}}{\int \mathcal{D}q\, e^{-S[q]}}$$

è modo di calcolare le funz di Green
↓
poi avrò funz. generatore

→ Equivalenza fra τ e t_M (Pierre Ramond, Zinn-Justen)

$G_M^{(2)}(t) \stackrel{d}{=} \langle 0 | T[\hat{q}_H(t)\hat{q}_H(0)] | 0 \rangle$

↳ primo punto messo a ∅ ⇝ funz della differenza

$= \Theta(t) \langle 0 | \underbrace{\hat{q}_H(t)}_{e^{itH}\hat{q}_S e^{-itH}} \hat{q}_H(0) | 0 \rangle + \Theta(-t) \langle 0 | \hat{q}_H(0)\, \hat{q}_H(t) | 0 \rangle$

lo troscuro un attimo ⭑

completezza

era già a $t=0$

GROUND STATE

$= \sum_{m_{0,1,2,3,4}=0}^{+\infty} \langle 0 | m_0 \rangle \langle m_0 | e^{itH} | m_1 \rangle \langle m_1 | \hat{q}_S | m_2 \rangle \langle m_2 | e^{-itH} | m_3 \rangle \langle m_3 | \hat{q}_S | m_4 \rangle \langle m_4 | 0 \rangle$ (a.val)

$= \sum_{m_n} e^{i(m_1-m_3)\omega_0 t} \underbrace{\overbrace{\langle 0 | m_0 \rangle}^{\delta_{0,m_0}} \overbrace{\langle m_0 | m_1 \rangle}^{\delta_{m_0 m_1}}}_{m_0=m_1=0} \langle m_1 | \hat{q}_S | m_2 \rangle \overbrace{\langle m_2 | m_3 \rangle}^{\delta_{m_2 m_3}} \langle m_3 | \hat{q}_S | m_4 \rangle \overbrace{\langle m_4 | 0 \rangle}^{\delta_{m_4,0}}$

$m_2 = m_3 \equiv m$

$= \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-im\omega_0 t} \langle 0 | \hat{q}_S | m \rangle \langle m | \hat{q}_S | 0 \rangle$

$\hat{q}_S \stackrel{OA}{=} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}(a+a^\dagger)$ con $a|0\rangle = 0$, $\langle 0 | a^\dagger = 0$

$= \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-im\omega_0 t} \langle 1 | m \rangle \langle m | 1 \rangle \frac{1}{2\omega_0} = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0}$

⭑ Lo rifaccio e ottengo $e^{+i\omega_0 t}/2\omega_0$

$$\Longrightarrow G_M^{(2)}(t) = \frac{1}{2\omega_0}\left\{ \Theta(t) e^{-i\omega_0 t} + \Theta(-t) e^{i\omega_0 t} \right\}$$

Confrontiamo ora la funz. di Green euclidea e di Minkowski: ripetendo lo stesso procedimento per G_E, otteniamo

$$G_E^{(2)}(\tau) = \frac{1}{2\omega_0}\left\{\theta(\tau)e^{-\omega_0\tau} + \theta(-\tau)e^{\omega_0\tau}\right\}$$

Ricerchiamo quindi un PROLUNGAMENTO ANALITICO, ossia vogliamo mostrare che uno è uguale all'altro in un opportuno argomento $\sim \pi/2 - \varepsilon$

Utilizziamo le trasformate di Fourier:

$$\hat{G}_M(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} G_M(t)\, dt$$

$$G_M(t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\,\hat{G}_M(\omega)\, d\omega$$

rappres. integrale di θ
$\hookrightarrow$ lo vedo col teo residui

$$\hat{\theta}(\omega) = i/\omega + i\varepsilon$$

$$\theta(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\varepsilon}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\,\hat{\theta}(\omega)\, d\omega$$

$\hookrightarrow$ antitrasformata

$\exp(i(-\omega-\omega_0)(-t))\,\theta(-t)$

$$\Rightarrow \hat{G}_M(\omega) = \frac{1}{2\omega_0}\int\left\{\theta(t)\, e^{i(\omega-\omega_0)t} + \theta(-t)\, e^{i(\omega+\omega_0)t}\right\} dt$$

$$= \frac{1}{2\omega_0}\left(\frac{i}{\omega-\omega_0+i\varepsilon} + \frac{i}{-\omega-\omega_0+i\varepsilon}\right)$$

lo vedo come trasf. F di θ con $\bar{\omega} = \omega \pm \omega_0$

Facendo l'antitrasformata:

$$G_M(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega_0}\,\frac{i(\cancel{-\omega}-\omega_0+i\varepsilon+\cancel{\omega}-\omega_0+i\varepsilon)}{(\omega-\omega_0+i\varepsilon)(-\omega-\omega_0+i\varepsilon)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega_0}\,\frac{2i(\overbrace{i\varepsilon-\omega_0}^{\sim -\omega_0})}{(\omega-\omega_0+i\varepsilon)(-\omega-\omega_0+i\varepsilon)} \simeq \frac{i}{2\pi}\int d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega-\omega_0+i\varepsilon)(+\omega+\omega_0-i\varepsilon)}$$

posso farlo, non ho nessun polo

Quindi questa funzione ha 2 POLI: $\omega = \pm\omega_0 \mp i\varepsilon$

Ripetendo questi passaggi per la versione euclidea: $\star$

$$\hat{G}_E(\omega_E) = \frac{1}{\omega_E^2+\omega_0^2} \longrightarrow G_E(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega_E\,\frac{e^{-i\omega_E\tau}}{(\omega_E+i\omega_0)(\omega_E-i\omega_0)}$$

Questa funz ha 2 POLI IMMAGINARI: $\omega = \pm i\omega_0$

Mostriamo ora come sono legate G_H e G_E:

• $\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - \omega_0^2\right) G_E(\tau) = -\delta(\tau)$

↳ prolungam. analitico nel piano $\mathbb{C}$ fra i due oggetti

$$-\cancel{(\omega_E^2+\omega_0^2)}\,\frac{1}{2\pi}\int d\omega_E \,\frac{e^{-i\omega_E\tau}}{\cancel{(\omega_E+i\omega_0)(\omega_E-i\omega_0)}} = -\frac{1}{2\pi}\int d\omega_E\, e^{-i\omega_E\tau} \stackrel{d}{=} -\delta(\tau)$$

• $\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)G_H(t) = -i\,\delta(t)$

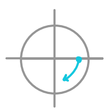
$$\cancel{(-\omega^2+\omega_0^2)}\,\frac{i}{2\pi}\int d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{\cancel{(\omega-\omega_0+i\varepsilon)(+\omega+\omega_0-i\varepsilon)}} = -\frac{i}{2\pi}\int d\omega\, e^{-i\omega t} \stackrel{d}{=} -i\,\delta(t)$$

Dobbiamo ora trovare la relazione fra $\hat G_H$ e $\hat G_E$. Poniamo

$$\omega_E = \omega e^{-i(\pi/2-\varepsilon)} = \omega\left\{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right) - i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right\} = \omega(\varepsilon-i)$$

$\cos\pi/2\cos\varepsilon + \sin\pi/2\sin\varepsilon \sim \varepsilon$

$\sin\pi/2\cos\varepsilon - \cos\pi/2\sin\varepsilon = \cos\varepsilon \sim 1$



• $$\hat G_E\left(\omega e^{-i(\pi/2-\varepsilon)}\right) = \frac{1}{\omega_E^2+\omega_0^2} = \frac{1}{(\omega_E-i\omega_0)(\omega_E+i\omega_0)} \simeq \frac{1}{[\omega(\varepsilon-i)-i\omega_0][\omega(\varepsilon-i)+i\omega_0]}$$

$$= \frac{1}{[-i(\omega_0+\omega)+\omega\varepsilon][-i(\omega-\omega_0)+\omega\varepsilon]} = \frac{1}{[-i(\omega_0+\omega)-\omega_0\varepsilon][-i(\omega-\omega_0)+\omega_0\varepsilon]}$$

$-\omega_0$ $\quad$ $\omega\varepsilon \to \pm\omega_0\varepsilon$ $\quad$ $+ = -i^2$

zero per $\omega=\omega_0$ ⇒ ε agisce solo quando $\omega=\omega_0$ (cioè VICINO AL SUO POLO) altrimenti va a zero

$$= \frac{1}{[-i(\omega_0+\omega)+i^2\omega_0\varepsilon][-i(\omega-\omega_0)-i^2\omega_0\varepsilon]} = \frac{1}{(-i)[\omega_0+\omega-i\omega_0\varepsilon](-i)[\omega-\omega_0+i\omega_0\varepsilon]}$$

lo metto al numeratore

$$= \frac{-1}{[\omega-\omega_0+i\omega_0\varepsilon][\omega+\omega_0-i\omega_0\varepsilon]} = +i\,\hat G_H(\omega) \longleftarrow$$

Trascuro questo ω_0, tanto è infinitesimo (conta ε)

★ $\frac{1}{2\omega_0}\left\{\frac{i}{\omega_E+i\omega_0} - \frac{i}{\omega_E-i\omega_0}\right\} = \frac{1}{\omega_E^2+\omega_0^2}$

$iG_H(\omega) = \frac{i}{2\omega_0}\left(\frac{i}{\omega-\omega_0+i\varepsilon} + \frac{i}{-\omega-\omega_0+i\varepsilon}\right) = \simeq \frac{i(-\cancel{2\omega_0})i}{\cancel{(1)}(\omega^2-\omega_0^2)\cancel{2\omega_0}}$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat G_H(\omega) = -i\,\hat G_E\left(\omega e^{-i(\pi/2-\varepsilon)}\right) = -i\,\hat G_E\left(\omega(\varepsilon-i)\right)}$$

Quindi: valuto G_E, calcolo $\hat G_E$, passo da $\hat G_E$ a $\hat G_H$ e antitrasformo per G_H.

↳ lo calcolo con argomento $\omega e^{-i(\pi/2-\varepsilon)}$

15-03-24

Funzione di Green per OA forzato

É l'ultimo modo x calcolare le funz. di Green (G data dalla quant. canonica e rappr a path integral $\int \mathcal{D}q\, q(t_1)\dots q(t_m)\, e^{iS[q]/\hbar} / \mathcal{D}q\, e^{-iS[q]/\hbar}$)

time-ordering

Quando studio un syst, introduco una pert esterna ⇝ studio la dyn interna studiando la reaz del syst. Considero un OA FORZATO con $q_0 = q_0(t)$ punto di riposo funz. del tempo fissato esternamente

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k\,(q - q_0(t))^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k q^2}_{\text{OA libero}} - \cancel{\frac{1}{2}k q_0^2} + \underbrace{k q q_0(t)}_{\text{termine di INTERAZ. lineare in } q}$$

Termine non coinvolto nella dyn ($q_0(t)$ nota)

$$\Rightarrow S = \int dt' \left\{ L(q,\dot{q}) + F(t')\,q(t') \right\}$$

con $F = kq_0$ ha le dim di forza ↗ FORZA ESTERNA

. $\mathcal{U}(t, t_i) = e^{-i/\hbar H(t - t_i)}$ evoluz. temporale

. $\langle x | e^{-i/\hbar H(t - t_i)} | x_i \rangle = \langle x, t \,|\, x_i, t \rangle$ PROIEZIONE dello STATO INIZ. sul FINALE

lo vedo spezzando l'exp

lo rivedremo nella MATRICE S

autost. dell'op. posiz. in descriz di Heisenberg: $\hat{x}_H |x\rangle = x|x\rangle$ con $\hat{x}_H(t) = e^{i/\hbar \hat{H}t}\, \hat{x}_S\, e^{-i/\hbar \hat{H}t}$

↳ cambia con t

$\Rightarrow |x, t\rangle_H = e^{i/\hbar \hat{H}t} |x\rangle_S$ (uso questo)

. $\langle q(t_f) | q(t_i) \rangle_F$ ampiezza transiz in presenza di forza esterna

↳ ho cambiato autost → è sempre Heisenb.

$$\Rightarrow \frac{\langle q(t_f) | q(t_i) \rangle_F}{\langle q(t_f) | q(t_i) \rangle}$$ la normalizzo al caso di assenza di F

$$\Rightarrow Z[F] = \frac{\langle q(t_f) | q(t_i) \rangle_F}{\langle q(t_f) | q(t_i) \rangle} = \frac{\int \mathcal{D}q\, e^{i/\hbar \int_{t_i}^{t_f} dt' \{ L(q,\dot{q}) + Fq \}}}{\int \mathcal{D}q\, e^{i/\hbar \int_{t_i}^{t_f} dt'\, L(q,\dot{q})}}$$ ← FUNZIONALE GENERATORE

TERMINE FORZANTE

con $Z[0] = 1$ (azzero la F al num ⇝ assenza di forza ext)

Deriviamo rispetto a F ⇝ chiariamo il concetto di **derivata funzionale**.

- $$\frac{\delta G}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{G[f(x)+\varepsilon\delta(x-y)] - G[f(x)]}{\varepsilon}$$

funzionale di tutte le f; cambia di una quantità arbitrariam. piccola in un punto

es $\quad G[f] = \int dy\, f(y)\varphi(y) \quad$ con $\varphi(y)$ nota

Calcoliamo la derivata funzionale:

$$\frac{\delta G}{\delta f} \stackrel{d}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int dy\, f(y)\phi(y) + \varepsilon\delta(x-y)\,\phi(y) - \int dy\, f(y)\phi(y) \right\} \frac{1}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\cancel{\varepsilon}} \int dy\, \cancel{\varepsilon}\, \phi(y)\,\delta(x-y) = \int dy\, \phi(y)\,\delta(x-y) = \underline{\phi(x)}$$

generalizzo le derivate

quindi la derivata è il termine moltiplicativo di $f(y)$

- Si dimostra valgano tutte le regole di derivaz. ordinarie; ad esempio

$$\frac{\delta}{\delta f}\left(e^{G[f]}\right) = e^{G[f]}\frac{\delta G}{\delta f}$$

Inoltre posso sempre scrivere: $f(x) = \int dy\, \delta(y-x) f(y) \implies \dfrac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y)$

generalizzo: $\dfrac{dx_i}{dx_j} = \delta_{ij}$

- È possibile scrivere degli <u>sviluppi in serie</u>:

$$F[f+\varepsilon] = F[f] + \int dx\, \frac{\delta F}{\delta\varepsilon(x)}\varepsilon(x) + \frac{1}{2}\int dx \int dy\, \frac{\delta^2 F}{\delta\varepsilon(x)\delta\varepsilon(y)}\varepsilon(x)\varepsilon(y) + \dots$$

Un esempio di funzionale già noto è l'azione $S[q] = \int dt\, L(q,\dot{q})$ e applichiamo il concetto di der funzionale con le equaz. E.L.

Calcoliamo ora le derivate del funzionale Z

$$\frac{\delta Z[F]}{\delta F(t_1)} = \frac{\int \mathcal{D}q\, \frac{i}{\hbar} q(t_1)\, e^{i/\hbar \int_{t_i}^{t_f} dt'\, L(q,\dot{q}) + F(t')q(t')}}{\int \mathcal{D}q\, e^{i/\hbar \int_{t_i}^{t_f} dt'\, L(q,\dot{q})}} \quad ☆$$

uso la rappr a path integral; la der entra nell'integrale

IDEA: scrivere G come derivata di Z[F] valutata in F = 0

$$\frac{\delta^2 Z[F]}{\delta F(t_1)\,\delta F(t_2)} \overset{\hbar=1}{=} (i)^2 \frac{\int \mathcal{D}q\, \frac{i}{\hbar} q(t_1) q(t_2)\, e^{i/\hbar \int_{t_i}^{t_f} dt'\, L(q,\dot q) + F(t')q(t')}}{\int \mathcal{D}q\, e^{i/\hbar \int_{t_i}^{t_f} dt'\, L(q,\dot q)}}$$

☆ NB $Z[f] = \frac{\langle q(t_f) | q(t_i)\rangle_F}{\langle q(t_f) | q(t_i)\rangle}$

↳ è MOLTO SIMILE a $G^{(2)}$; ho però t_i, t_f anziché $\pm\infty$ nell'integraz.

(Seguendo il Mosel) vediamo se risulta possibile fare il procedimento inverso: partiamo da $\langle q(t_f) | q(t_i)\rangle$ ampiezza di transiz. in rappresentaz. di Heisenberg (non sto pensando alla rappr. a path integral in presenza di F). ↳ per questo non compare l'hamilt.

Adesso faccio una RETICOLAZIONE di (t_i, t_f)

t_i t_f

e su ognuno inserisco una completezza, usando gli operatori di proiezione:

autost. di posiz, rappr. Heisenberg

$$\langle q(t_f) | q(t_i)\rangle = \int dq_1 \dots dq_{m-1} \langle q(t_f) | q(t_{m-1})\rangle\langle q(t_{m-1})| \dots | q(t_1)\rangle\langle q(t_1) | q(t_i)\rangle$$

↳ completezze ∀ intervallino

moltiplico a DX e SX per $q(t_1)$

OPERAT. AUTOSTATO

$|q(t_1)\rangle q(t_1) = \hat q(t_1) | q(t_1)\rangle$

$$\langle q(t_f) | q(t_i)\rangle q(t_1) = \int dq_1 \dots dq_{m-1} \langle q(t_f) | q(t_{m-1})\rangle\langle q(t_{m-1})| \dots | q(t_1)\rangle\langle q(t_1) | q(t_i)\rangle\, \underline{q(t_1)}$$

$$\langle q(t_f) | q(t_i)\rangle q(t_1) = \int dq_1 \dots dq_{m-1} \langle q(t_f) | q(t_{m-1})\rangle \dots \underline{\langle q(t_1) | \hat q(t_1) | q(t_i)\rangle}$$

VARIABILE DINAMICA

Se moltiplicassi per $q(t_1)q(t_2)$ potrei fare lo stesso ragionamento → comparirebbero ordinate se seguisse l'ordine della reticolazione:

$$\int dq_1 \dots dq_m \langle q(t_f) | q(t_m)\rangle\langle q(t_m)| \dots \langle q(t_1) | q(t_i)\rangle q(t_\alpha) q(t_\beta) =$$

$$= \langle q(t_f) | \hat q(t_\alpha) \hat q(t_\beta) | q(t_i)\rangle$$

⟹ affinché compaiono nell'ordine corretto, aggiungo l'operatore di

Time ordering: $\langle q(t_f)| T[\hat{q}(t_\alpha)\hat{q}(t_\beta)]|q(t_i)\rangle$

inserisco delle compl. con autost. di H

$$\langle q(t_f)| T[\hat{q}(t_\alpha)\hat{q}(t_\beta)]|q(t_i)\rangle = \sum_{n,m=0}^{+\infty} \underbrace{\langle q(t_f)}_{\text{riscrivo con } S.}|n\rangle\langle n| T[\dots]|m\rangle\langle m|q(t_i)\rangle$$

$$= \sum_{n,m} \langle q_s| \underline{e^{-i/\hbar H t_f}}|n\rangle\langle n|\dots|m\rangle\langle m| e^{i/\hbar H t_i}|q_s\rangle$$

↳ uso a.val. $e^{-i/\hbar \omega_n t_f}$

$$= \sum_{n,m} e^{-i/\hbar \omega_n t_f} e^{i/\hbar \omega_m t_i} \langle q_s|n\rangle\langle n| T[\hat{q}(t_1)\dots\hat{q}(t_m)]|m\rangle\overbrace{\langle m|q_s\rangle}^{}$$

AUTO FUNZ. RAPPR. delle POSIZIONI

$$= \sum_{n,m} e^{-i/\hbar \omega_n t_f} e^{i/\hbar \omega_m t_i} \varphi_n(q_f)\varphi^*_m(q_i)\langle n| T[\dots]|m\rangle$$

Si può poi dimostrare che la seguente sostituzione è equivalente all'aggiunta di una comp. immaginaria in t: $i\omega_k = ik\omega_0 + k\varepsilon$ e l'a.val. è quindi $\omega_n = n\omega_0 - in\varepsilon$, ossia posso prendere come hamiltoniana: $\hat{H} = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}(\omega_0^2 - i\varepsilon)q^2$

$$\Longrightarrow \langle q(t_f)| T[\hat{q}(t_1)\dots\hat{q}(t_m)]|q(t_i)\rangle =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{+\infty} e^{-i/\hbar n\omega_0 t_f} e^{-n\varepsilon t_f} \varphi_n(q_f)\varphi^*_m(q_i) e^{+i/\hbar m\omega_0 t_i} e^{m\varepsilon t_i}\langle n| T[\hat{q}_1\dots\hat{q}_m]|m\rangle$$

Facendo poi andare $t_i \to -\infty$, $t_f \to +\infty$, gli unici stati che sopravvivono sono per $n,m=0$ (exp negativi), ossia il solo stato fondam. Tutto il resto va a zero:

$$\langle q(t_f)| T[\hat{q}(t_1)\dots\hat{q}(t_m)]|q(t_i)\rangle = \varphi_0(q_f)\varphi_0^*(q_i)\overbrace{\langle 0| T[\hat{q}(t_1)\dots\hat{q}(t_m)]|0\rangle}^{\doteq\, G^{(m)}}$$

Normalizzandola con le fdo dello stato fondam, ottengo proprio la funz. di Green:

$$\langle 0| T[\hat{q}(t_1)\dots\hat{q}(t_m)]|0\rangle = \frac{\langle q(t_f)| T[\hat{q}(t_1)\dots\hat{q}(t_m)]|q(t_i)\rangle}{\varphi_0(q_f)\varphi_0^*(q_i)} =$$

$\langle q(t_f)|q(t_i)\rangle = \varphi_0(q_f)\varphi_0^*(q_i)\langle 0|0\rangle$

$$\langle 0|T[\hat q(t_1)\,..\,\hat q(t_m)]|0\rangle \overset{\star_1}{=} \frac{\langle q(t_f)|\,T[\hat q(t_1)\,..\,\hat q(t_m)]\,|q(t_i)\rangle}{\langle q(t_f)|q(t_i)\rangle} = G^{(m)}$$

Richiamando $\underline{\star}$ con $Z[F] = \dfrac{\langle q(t_f)|q(t_i)\rangle_F}{\langle q(t_f)|q(t_i)\rangle}$:

$$\frac{\delta^2 Z[F]}{\delta F(t_1)\,\delta F(t_2)} \overset{\hbar=1}{=} (i)^2 \frac{\int \mathcal{D}q \,\frac{i}{\hbar}\, q(t_1)\, q(t_2)\, e^{i/\hbar \int_{t_i}^{t_f} dt' \, L(q,\dot q) + F(t')q(t')}}{\int \mathcal{D}q\, e^{i/\hbar \int_{t_i}^{t_f} dt'\, L(q,\dot q)}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\delta^m Z[F]}{\delta F(t_1)\,..\,\delta F(t_m)}\right|_{F=0} = (i)^m \frac{\int \mathcal{D}q\, \frac{i}{\hbar}\, q(t_1)\cdots q(t_n)\, e^{i/\hbar\int_{t_i}^{t_f} dt'\, L(q,\dot q) + F(t')q(t')}}{\int \mathcal{D}q\, e^{i/\hbar \int_{t_i}^{t_f} dt'\, L(q,\dot q)}}$$ (dim. sopra)

(def path integral) $= (i)^m\, G^{(m)} \overset{d}{=} (i)^m \langle 0|T[\hat q_1\,..\,\hat q_m]|0\rangle$

$\star_1$ (dimostrato ora) $= (i)^m \dfrac{\langle q(t_f)|\,T[\hat q(t_1)\,..\,\hat q(t_m)]\,|q(t_i)\rangle}{\langle q(t_f)|q(t_i)\rangle}$

$$\Rightarrow \langle 0|T[\hat q_1\,..\,\hat q_m]|0\rangle = \left(\frac{1}{i}\right)^m \left.\frac{\delta^m Z[F]}{\delta F(t_1)\,..\,\delta F(t_m)}\right|_{F=0}$$

Quindi ho $\underline{\text{3 MODI}}$ per valutare la funz. di Green:

1. val. asp. sullo stato fond. del time ordering
2. rappresentaz a path integral ⇝ INTEG. FUNZIONALE
3. derivata funzionale del FUNZIONALE GENERATORE (funzion. della F esterna) ⇝ noto Z della teoria, posso calcolare tutto ⇒ il funz generatore **contiene tutta la dyn. del sistema** ⇝ concetto equivalente della funz di partizione in MECC. STAT.

19-03-24 - lez 5

APPROCCIO FUNZIONALE allo quantiz. dei campi (non interag. $\Rightarrow$ ho al più potenza 2 del campo in $\mathcal{L}$ $\Rightarrow$ eq moto lineari nei campi)

Quantizzazione funzionale del campo scalare libero

Vogliamo ora passare alla teoria di campo : $\underbrace{t}_{\text{parametro}} \to x_\mu$; $\underbrace{q(t)}_{\text{var dinamica}} \to \varphi(x)$

$$(\Box\varphi + m^2\varphi) = 0$$

$$G^{(m)} = \langle 0 | T[\hat{\varphi}_H(x_1) \dots \hat{\varphi}_H(x_m)] | 0 \rangle$$

$\to$ visto in MQ in 1D, ora ho una reticolaz. in 4D

$$= \frac{\int \mathcal{D}\varphi \; \varphi(x_1)\dots\varphi(x_m)\, e^{iS[\varphi]}}{\int \mathcal{D}\varphi\, e^{iS[\varphi]}}$$

$\to$ rappr. a path integral in 4D

$$= \frac{1}{(i)^m} \frac{\delta^m}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_m)} Z[J]$$

corrente esterna al posto della F in 1D

con $$\boxed{Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \; e^{iS[\varphi] + i\int d^4x\, J(x)\varphi(x)}}{\int \mathcal{D}\varphi \; e^{iS[\varphi]}}} \quad (*)$$

DEF GENERALE, S può contenere l'interaz; $J \overset{d}{=}$ CORRENTE EXT. FISSATA

TERMINE di INTERAZ SUI CAMPI

Noi vedremo la teoria libera. In generale: $S_0[\varphi] + S_I[\varphi] = S[\varphi]$

Perché è importante considerare anche la teoria libera? Da $(*)$:

$$\int \mathcal{D}\varphi \; e^{iS_0[\varphi]} \; e^{iS_I[\varphi]} \; e^{i\int d^4x\, J(x)\varphi(x)}$$

$\searrow$ voglio portare S_I fuori dall'integr.

Avendo un termine polinomiale nei campi in S_I, posso portare fuori dall'integraz il termine di interaz, usando $S_I[\delta^m/\delta J^m] \Rightarrow$ è indip da φ, lo faccio agire sull'integrale (dip. lineare da J $\Rightarrow$ derivando tiro fuori φ m volte):

INTERAZ POLINOMIALE

$$\int \mathcal{D}\varphi \; e^{iS_0[\varphi]} \; e^{iS_I[\varphi]} \; e^{i\int d^4x\, J(x)\varphi(x)} = e^{iS_I[\delta/\delta J]} \underbrace{\int e^{iS_0[\varphi]} \; e^{i\int d^4x\, J(x)\varphi(x)}}_{\text{TEORIA LIBERA}}$$

↳ il suo studio è fondam. x la teo. interagente

Specifichiamo al campo bosonico:

$$S_0[\varphi] \overset{d}{=} \int d^4x \; \mathcal{L}[\varphi] \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\int d^4x \left\{ \partial^\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) - (m^2 - i\varepsilon)\varphi^2(x) \right\}$$

campo scalare $\mathbb{R}$

Iniziamo dunque lo studio della TEORIA LIBERA

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \; e^{iS_0[\varphi] + i\int d^4x\, J(x)\varphi(x)}}{\int \mathcal{D}\varphi \; e^{iS_0[\varphi]}} \qquad (Z_1)$$

Eseguiamo un cambio di variabile (trasloz funzionale):

$\varphi(x) = \varphi'(x) + \bar{\varphi}(x)$ con $\bar{\varphi}(x)$ funzione nota.

Inoltre lo jacobiano della trasformazione è 1: $\mathcal{D}\varphi = \mathcal{D}\varphi'$

$$S_0[\varphi] = \frac{1}{2}\int d^4x \left\{ \underline{\partial^\mu(\varphi'(x)} + \bar{\varphi}(x))\, \underline{\partial_\mu(\varphi'(x)} + \bar{\varphi}(x)) \underline{- (m^2 - i\varepsilon)(\varphi'(x)} + \bar{\varphi}(x))^2 \right\}$$

$$= \underline{S_0[\varphi']} + \frac{1}{2}\int d^4x \left\{ \partial_\mu\bar{\varphi}\,\partial^\mu\bar{\varphi} - (m^2 - i\varepsilon)\bar{\varphi}^2(x) \right\} + \frac{1}{2}\int d^4x \Big[\underline{\partial_\mu\varphi'\partial^\mu\bar{\varphi}} + \overbrace{\partial_\mu\bar{\varphi}\,\partial^\mu\varphi'}^{\text{si sommano}} - 2(m^2 - i\varepsilon)\varphi'(x)\bar{\varphi}(x) \Big]$$

$$\partial_\mu\varphi'\partial^\mu\bar{\varphi} \overset{L}{=} \cancel{\partial_\mu(\varphi'\partial^\mu\bar{\varphi})} - \varphi'\Box\bar{\varphi} = -\varphi'\Box\bar{\varphi}$$

$= 0$, è una quadridiv. integrata su tutto lo sp. tempo

$$= \underline{S_0[\varphi']} + \frac{1}{2}\int d^4x \left\{ \partial_\mu\bar{\varphi}\,\partial^\mu\bar{\varphi} - (m^2 - i\varepsilon)\bar{\varphi}^2(x) \right\} - \int d^4x \Big[\varphi'\Box\bar{\varphi} + (m^2 - i\varepsilon)\varphi'\bar{\varphi} \Big]$$

Questa espressione appare all'exp di (Z_1):

ho una semplificaz

$$e^{iS_0[\varphi] + i\int d^4x\, J(x)\varphi(x)} =$$

$$= e^{iS_0[\varphi']}\, \underbrace{e^{i/2\int d^4x\, (\partial_\mu\bar{\varphi}\partial^\mu\bar{\varphi} - (m^2 - i\varepsilon)\bar{\varphi}^2)}}_{\text{dipende solo da } \bar{\varphi}}\, e^{-i\int d^4x\, \{\varphi' \overbrace{(\Box + m^2 - i\varepsilon)\bar{\varphi}}^{= J(x)}\}}\, e^{i\int d^4x\, J(x)\{\varphi'(x) + \bar{\varphi}(x)\}}$$

SORG. ESTERNA *1

Scegliamo poi $\bar{\varphi}(x)$: $(\Box + m^2 - i\varepsilon)\bar{\varphi}(x) = J(x) \implies$

$$= e^{iS_0[\varphi']}\, e^{i/2\int d^4x\, (\partial_\mu\bar{\varphi}\partial^\mu\bar{\varphi} - (m^2 - i\varepsilon)\bar{\varphi}^2)}\, e^{i\int d^4x\, J(x)\bar{\varphi}(x)}$$

$\partial_\mu\bar{\varphi}\partial^\mu\bar{\varphi} = -\bar{\varphi}\Box\bar{\varphi}$

$$= e^{iS_0[\varphi']}\, e^{-i/2\int d^4x\, \{\bar{\varphi}\Box\bar{\varphi} + (m^2 - i\varepsilon)\bar{\varphi}^2\}}\, e^{i\int d^4x\, J(x)\bar{\varphi}(x)}$$

$\bar{\varphi}(\Box + m^2 - i\varepsilon)\bar{\varphi} = \bar{\varphi}J$

$= e^{iS_0[\varphi']} e^{i/2 \int d^4x \, J(x) \bar{\varphi}(x)}$ ⭑2 ⇝ in Z, il secondo exp uscirà dall'integ in $\int \mathcal{D}\varphi'$

⭑1 Risolvendo col metodo delle funz di Green:

$$(\Box + m^2 + i\varepsilon)\Delta_F(x-x') = -\delta(x) \; ; \quad \bar{\varphi}(x) = -\int dx' \, \Delta_F(x-x') J(x')$$

PROPAG. = funz di Green per K.G.

Allora cambiando $\mathcal{D}\varphi \to \mathcal{D}\varphi'$ in (Z) otteniamo, sostituendo ⭑2:

$$Z_0[J] = \frac{e^{i/2\int d^4x\, J(x)\bar{\varphi}(x)} \int \mathcal{D}\varphi' \; e^{iS_0[\varphi']}}{\int \mathcal{D}\varphi' \; e^{iS_0[\varphi']}} = e^{i/2 \int d^4x\, J(x)\bar{\varphi}(x)}$$

integ. ORDINARIO sullo spaziotempo, con $\bar{\varphi}(x)$ NOTO

$$= e^{i/2 \int d^4x\, d^4x'\, J(x)\Delta_F(x-x') J(x')}$$

- $J(x)$ CORRENTE ESTERNA fra due pti x, x' collegati dal propagatore. È come una pert esterna (come F per OA) ⇝ rappresenta i modi possibili per andare da x a x' i.e. tutti i POSSIBILI CAMMINI
- Sono passato da un integ funzionale a uno ordinario

$Z_0[J]$ funzionale generatrice Z delle funz di Green

↳ se la derivo due volte ottengo il propagatore Δ_F, che è infatti la funz G. a due punti per il campo scalare

Tutto questo nello spazio delle configurazioni ⇝ vado in quello dei momenti

$$\begin{cases} \Delta_F(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^4} \displaystyle\int d^4p \; e^{-ip\cdot x} \Delta_F(p^2) & \text{(antitrasf.)} \\[2ex] \delta^4(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^4} \displaystyle\int d^4p \; e^{-ip\cdot x} \end{cases}$$

$$(\Box + m^2 - i\varepsilon)\underbrace{\Delta_F}_{} = \underbrace{-\delta(x)}_{}$$

le riscrivo con Fourier

$$\frac{1}{\cancel{(2\pi)^4}}\left(\underline{\Box}+m^2-i\varepsilon\right)\int d^4p\ \underbrace{e^{-ip\cdot x}}_{=-p^2e^{-ipx}}\hat{\Delta}_F(p^2) = -\frac{1}{\cancel{(2\pi)^4}}\int d^4p\ e^{-ip\cdot x}$$

$$\left(-p^2+m^2-i\varepsilon\right)\int d^4p\ e^{-ip\cdot x}\hat{\Delta}_F(p^2) \overset{!}{=} -\int d^4p\ e^{-ip\cdot x}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\Delta}_F(p^2) = \frac{1}{p^2-m^2+i\varepsilon}}$$

<u>TRASF. FOURIER del PROPAGATORE</u>

OSS $\bar{E}$ stato fatto tutto con t <u>Minkowskiano</u>. Mostriamo il link con quello euclideo : $t = -i\tau$

- $(\bar{x},\tau) \longrightarrow (x_E, -i\tau)$ lo spazio non cambia
- $d^4x = d^3x\, dt \longrightarrow -i\, d^3x_E\, d\tau \overset{d}{=} -i\, d^4x_E$
- $ds = dt^2 - \sum_{i=1}^{3}(dx_i)^2 \longrightarrow -(d\tau)^2 - \sum_{i=1}^{3}(dx_{E,i})^2 = -ds_E^2$ ha tutti +
- $\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi = (\partial_t\varphi)^2 - (\bar{\nabla}\varphi)^2 = -(\partial_\tau\varphi)^2 - (\bar{\nabla}\varphi)^2 = -\partial_\mu^E\varphi\,\partial_\mu^E\varphi$

euclideo: non ho + indici contro/covar.

↳ estendendo : $\Box\varphi \longrightarrow \Box_E\varphi$

$$Z[J] \rightsquigarrow \int \mathcal{D}\varphi\ e^{i/2\int \overbrace{d^4x}^{-i d^4x_E}\ \overbrace{\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi}^{-\partial_\mu^E\varphi\partial_\mu^E\varphi} - (m^2-i\varepsilon)\varphi^2 + i\int \overbrace{dx}^{-i d^4x_E} J(x)\varphi(x)}$$

$$Z_E[J] \rightsquigarrow \int \mathcal{D}_E\varphi\ e^{-1/2\int d^4x_E\,(\partial_\mu^E\varphi\,\partial_\mu^E\varphi) + (m^2-i\varepsilon)\varphi^2 + \int d^4x_E\, J(x)\varphi(x)}$$

↳ meno male, exp è un campo $\mathbb{R}$

→ <u>invarianza traslazionale e conservazione di p</u>

$$G_E(x_1,..,x_m) \xrightarrow[\text{uno stesso q.vett}]{\text{traslo tutti i pti di}} G_E(x_1+a,..\,x_m+a) = \frac{\int\mathcal{D}\varphi\, e^{iS[\varphi(x)]}\varphi(x_1+a)..\varphi(x_m+a)}{\int\mathcal{D}\varphi\ e^{iS[\varphi(x)]}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{inv. trasl}\\ \text{azione}}}{=} \frac{\int\mathcal{D}\varphi\, e^{iS[\varphi(x+a)]}\varphi(x_1+a)..\varphi(x_m+a)}{\int\mathcal{D}\varphi\ e^{iS[\varphi(x+a)]}} \underset{\substack{\downarrow\\ \text{misura invariante}\\ \text{nello sp. tempo}}}{=} \frac{\int\mathcal{D}\varphi(x+a)\, e^{iS[\varphi(x+a)]}\varphi(x_1+a)..\varphi(x_m+a)}{\int\mathcal{D}\varphi\ e^{iS[\varphi(x+a)]}}$$

shifto indietro

$$= \frac{\int\mathcal{D}\varphi\, e^{iS[\varphi(x)]}\varphi(x_1)\dots\varphi(x_m)}{\int\mathcal{D}\varphi\ e^{iS[\varphi(x)]}} = G_E(x_1,..,x_m) \Longrightarrow G \text{ è INVARIANTE SOTTO TRASL.}$$

Vediamolo nello spazio dei momenti ⇝ trasf. di Fourier

$$\hat G(p_i(x_i+a)) = \int dx_1 .. dx_m\, e^{i p_1\cdot(x_1+a)} \dots e^{i p_m\cdot(x_m+a)}\, G(x_1+a,..,x_m+a)$$

$\leftarrow$ n termini così

$$= \int dx_1 \dots dx_m\, e^{i p_k\cdot x_k}\, e^{i(p_1+\dots+p_m)a}\, G(x_1,..,x_m)$$

$\updownarrow$ visto sopra

TRASF. FOURIER

$$\overset{!}{=} e^{i(p_1+..p_m)\cdot a} \int dx_1 \dots dx_m\, e^{i p_1 x_1} \dots e^{i p_m x_m}\, G(x_1,..,x_m) = e^{i(p_1+..p_m)\cdot a}\, \hat G(p_1..,p_m)$$

$$\Rightarrow e^{i(p_1+..p_m)a} \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i = 0 \quad \text{perché } a \text{ è arbitrario}$$

posso traslare indietro (sto imponendo invarianza)

quadrimom. esterno della funz di Green

$\Rightarrow$ CONSERVAZ. QUADRIMOM. TOTALE ⇝ legato all'inv. traslazionale

x esplicitare questa conservazione

Convenzionalmente, estraggo una δ da questa espressione:

$$\hat G(p_1,..,p_m) = (2\pi)^4\, \delta^4(p_1+\dots+p_m)\, \tilde{\hat G}(p_1,..,p_m)$$

21-03-24

→ applicazione: calcolo di $G^{(m)}$

calcolo della teoria scalare fatto sopra

$$G(x_1,..,x_m) = \frac{1}{(i)^m} \frac{\delta^m Z[J]}{\delta J(x_1)..\delta J(x_m)} \quad \text{con} \quad Z = e^{-i/2 \int dx dx' J(x)\Delta_F(x-x')J(x')}$$

NOTAZ: $Z \doteq e^{-JJ}$

- $$G^{(2)}(x_1,x_2) = -\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0}$$

$$\frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} = e^{-JJ}\left(-\frac{i}{2}\right) 2 \int dx\, J(x)\Delta_F(x-x_1)$$

ho due $J(x)$ all'exp.

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} = e^{-JJ}(-i)\Big\{\underbrace{(-i)\int dy\, J(y)\Delta_F(y-x_2)}_{\text{derivato di } e^{-JJ}} \int dx\, J(x)\Delta_F(x-x_1) + \overbrace{\Delta_F(x_2-x_1)}^{\delta\int dx\dots}\Big\}$$

$$(J=0) = -i\,\Delta_F(x_2-x_1) \quad \text{PROPAGATORE di FEYNMAN} \Rightarrow G^{(2)} = i\,\Delta_F(x_2-x_1)$$

OSS alla fine vedremo che G dipende solo da $x-x'$ ⇒ rende conto dell'invar. trasl.

- $G^3(x_1,x_2,x_3)$

Proseguo con la derivazione:

$$= e^{-\mathcal{J}}[\mathcal{J}]^3 + e^{-\mathcal{J}}(-i)\Delta_F(x_3-x_2)\left[(-i)\int dx\, J(x)\Delta_F(x-x_1)\right] +$$

contribuisce a G^4 solo la der. dell'integ.

$$+ e^{-\mathcal{J}}\left[(-i)\int dy\, J(y)\Delta_F(y-x_3)\right](-i)\Delta_F(x_2-x_1)$$

$$- e^{-\mathcal{J}}(-i)\Delta_F(x_3-x_1)\left[(-i)\int dy\, J(y)\Delta_F(y-x_2)\right] \overset{J=0}{=} 0$$

abbiamo solo termini quadratici $\rightarrow \nexists$ funz G dispari

con $\mathcal{J} = (-i)\int dy\, J(y)\Delta_F(y-x_i)$ con $i=1,2,3$ $\Longrightarrow$ prodotto di 3 integ, uno $\forall i$

- $G^4(x_1,x_2,x_3,x_4)$

ho 3 termini così ⇝ hanno J a vista, si annullano

$$= e^{-\mathcal{J}}[\mathcal{J}]^4 + e^{-\mathcal{J}}(-i)\Delta_F(x_4-x_1)\left[(-i)\int dy\, J(y)\Delta_F(y-x_k)\right]^3 + \underset{\dots}{0} +$$

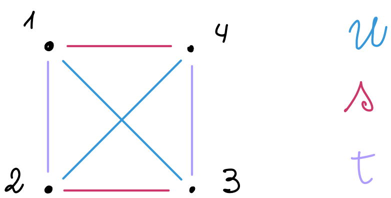
$k=1,2,3$

$$+ e^{-\mathcal{J}}(-i)\Delta_F(x_3-x_2)(-i)\Delta_F(x_4-x_1) + e^{-\mathcal{J}}(-i)\Delta_F(x_4-x_3)(-i)\Delta_F(x_2-x_1) +$$

$$+ e^{-\mathcal{J}}(-i)\Delta_F(x_3-x_1)(-i)\Delta_F(x_4-x_2) \overset{J=0}{=}$$

$$= \underline{\Delta_F(x_3-x_2)\Delta_F(x_4-x_1)} + \underline{\Delta_F(x_4-x_3)\Delta_F(x_2-x_1)} + \underline{\Delta_F(x_3-x_1)(x_4-x_2)}$$

ossia rappresento il prodotto fra propagatori fra coppie di punti (è uno termine libero)



Sono le contrazioni di Wick (legato a variabile di Mandelstam)

Questo posso farlo per un n° arbitrario di punti

Quantizzazione funzionale del campo fermionico libero

Brezin: strumento matematico = VARIABILI di GRASSMAN. Sono algebre con generatori anticom. $\{\theta_i,\theta_j\}=0 \Rightarrow \theta_i^2=0$ implementa l'esclusione di Pauli.

$$f(\{p_i\}) = p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i\theta_i + \sum_{j>i} p_{ij}\theta_i\theta_j + \dots \longrightarrow$$

finito, ho n generatori e non posso avere termini con $\theta_i\,\theta_k \dots \theta_k \dots$ perché si annullano

↳ SVILUPPO IN POTENZE DEI GENERATORI

cfr quant. canonica

OSS nella quant. funz. i campi sono FUNZIONI CLASSICHE, non operatori ⇝ lavoro con c-numeri ⇝ x i fermioni mi aspetto c-numeri anticomm. $\Rightarrow$ VARIABILI di GRASSMAN

- I generatori sono indip: $\partial\theta_i/\partial\theta_j = \delta_{ij}$
- Derivate: $(n=2)$ $\dfrac{\partial f}{\partial\theta_1} = p_1 + p_{12}\theta_2 \qquad (1)$

  ↳ porto θ_1 a sx per derivare (è la def)

- Proviamo poi: $\theta_1 f(p) = p_0\theta_1 + p_2\,\theta_1\theta_2 \qquad (3)$ $\leftarrow \theta_i^2=0$

  e deriviamo: $\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\theta_1 f(p)\right) = p_0 + p_2\,\theta_2 \qquad (2)$

  sommo 2 e 4

- Moltiplico $(1)\cdot\theta_1$: $\theta_1\dfrac{\partial f}{\partial\theta_1} = p_1\theta_1 + p_{12}\theta_1\theta_2 \quad (4)$

$$\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_1} + \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\theta_1 f(p)\right) = f(p) \Rightarrow \boxed{\left\{\theta_1, \frac{\partial}{\partial\theta_1}\right\} = 1 \ , \ \left\{\theta_i, \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right\} = \delta_{ij}}$$

- Derivo (2): $\dfrac{\partial}{\partial\theta_2}\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\theta_1 f(p)\right) = p_2$
- Invece: $\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\dfrac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\theta_1 f(p)\right) = -p_2$ (anticom di θ_1,θ_2 in (3))

e sommando: $\left\{\dfrac{\partial}{\partial\theta_i}, \dfrac{\partial}{\partial\theta_j}\right\} = 0$

PROBLEMA

$\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\dfrac{\partial}{\partial\theta_1} = -\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}$

QUI $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial\theta_1} = -\dfrac{\partial f}{\partial\theta_1} = 0$

Operatore inverso: $\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\right)^{-1} f \overset{!}{=} f$

Derivo di nuovo: $\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\right)^{-1} f = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial\theta_1} f = 0$ ASSURDO

$\Rightarrow \nexists$ operatore inverso della derivata!

Ci pone dei problemi nella def di integrale ⇝ come definiamo queste operazioni lineari? Dobbiamo richiedere la linearità: poniamo

$$\int d\theta\ 1 = 0 \quad e \quad \int d\theta\ \theta = 1$$

⇝ garantisce le proprietà dell'integraz. ⇝ definisco io ad hoc l'integr

↳ è come fosse una derivata rispetto θ

Da qua: $\int d\theta_1 \int d\theta_2\, \theta_1\theta_2 = -\int d\theta_1\, \theta_1 \int d\theta_2\, \theta_2 = -1$

antiecom.

es $e^{-\theta_1\theta_2} = 1 - \theta_1\theta_2$ (dalla def.)

$\Rightarrow \int d\theta_1 \int d\theta_2\; e^{-\theta_1\theta_2} = \int d\theta_1 \int d\theta_2\, (1-\theta_1\theta_2) = +1$

es $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ integr. gaussiano 1D (con $\mathrm{Re}\, a > 0$)

$\int d^m x\; e^{-x^T A x} = \pi^{m/2} \frac{1}{\sqrt{\det A}}$ " in mD

$\Rightarrow I_N = \int d\theta_1 .. d\theta_N\; e^{-\theta^T M \theta}$ con M antisym.

- $\underline{N=2}$ $\rightarrow$ $\theta^T M \theta = \left(\theta_1 \;\; \theta_2\right) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = m_{12}\theta_1\theta_2 + m_{21}\theta_2\theta_1$

$= (m_{12} - m_{21})\theta_1\theta_2 \overset{A.SY.}{=} 2m_{12}\theta_1\theta_2$

$\Rightarrow I_2 = \int d\theta_1\theta_2\; e^{-2m\theta_1\theta_2} = 2m_{12} \overset{\text{vero} \times A.SYM}{=} 2\sqrt{\det M}$

- $\underline{N=3}$ $\rightarrow$ ripeto lo stesso ragionamento

$e^{-\theta^T M\theta} = 1 - \theta^T M \theta + \frac{(\theta^T M \theta)^2}{2}$

- $\theta^T M \theta = \left(\theta_1 \;\; \theta_2 \;\; \theta_3\right) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots \\ m_{21} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ ho solo termini con 2 var di grassmann per volta

$\Rightarrow \int d\theta_i\, d\theta_j\, d\theta_k\;\; \theta_j\theta_k \;\; \& \int d\theta_i\; 1 = 0 \Rightarrow$ CONTRIBUTO NULLO

- $(\theta^T M \theta)^2$ = ho 4 grassmann, almeno uno sarà ripetuto $\Rightarrow$ anche questo contributo è nullo

• <u>N = 4</u> sopravvivono solo i termini con 4 grass. diversi

$$\theta^T M \theta = 8 \sqrt{\det M}\ \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 \longrightarrow \text{integrato è} \propto 8\sqrt{\det M}$$

$$\Longrightarrow I_4 = 4\sqrt{\det M}$$

<u>Quindi</u> $I_N = \begin{cases} 2^{N/2}\sqrt{\det M} & N \text{ pari} \\ 0 & N \text{ dispari} \end{cases}$

↳ importante × quantizzaz. delle teorie non abeliane

Introduco i <u>**FUNZIONALI di GRASSMAN**</u>: $\{\theta(x), \theta(y)\}$ ↗ serve × definire l'integ. funzion.

$$F[\theta(x)] = f_0 + \int d^4x\, f_1(x)\theta(x) + \int d^4x\, d^4y\, f_2(x,y)\theta(x)\theta(y)$$ ↗ f_i sono funz. ordinarie

$$\frac{\delta}{\delta\theta(x)}\left\{\theta(x_1)\,..\,\theta(x_n)\right\} = \delta^4(x-x_1)\,\theta(x_2)\theta(x_3)\cdot\ldots \underset{\uparrow\ \text{anticomm}}{-} \delta^4(x-x_2)\,\theta(x_1)\theta(x_3)\cdot\ldots + \ldots$$

↓ estudo quanto visto × le variab.

$$\frac{\delta\theta(x)}{\delta\theta(y)} = \delta^4(x-y)$$

$$\left\{\theta(x), \frac{\delta}{\delta\theta(y)}\right\} = \delta^4(x-y)$$

$$\int D\theta(x)\ 1 = 0 \quad ; \quad \int D\theta(x)\,\theta(x) = 1$$

Definiamo il funz. generatore per campo di Dirac

resta l'interpr. di (anti)part.

$$Z[J] \propto \int D\varphi(x)\, e^{iS[\varphi]}\, e^{i\int d^4x\, J(x)\varphi(x)}$$

$$Z[\eta(x),\bar\eta(x)] \propto \int \underset{\downarrow}{D\psi(x)}\, \underset{\downarrow}{D\bar\psi(x)}\, e^{i\int d^4x\ \underbrace{\bar\psi(x)\overbrace{(i\not\partial - m)}^{\doteq D}\psi(x)}_{\text{azione classica}} + \bar\eta(x)\psi(x) + \bar\psi(x)\eta(x)}$$

visti come indip.

↳ devo sviluppare questo integrale funzionale (η, ψ sono grassman)

Posso spezzare l'esponenziale perché è tutto bilineare nelle grassman:

procediamo poi <u>come i bosoni</u> ⇝ shift dei campi

28-03-24

OP di DIRAC: $(i\not\partial - m)$ — accoppiamento

$$Z_0[\eta,\bar\eta] = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar\psi \; e^{i\int d^4x \, \bar\psi(x) D\psi(x) + \underbrace{\bar\eta(x)\psi(x) + \bar\psi(x)\eta(x)}_{\text{accoppiamento}}}$$

$\hookrightarrow \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar\psi \; e^{i\int d^4x\, \bar\psi(x) D\psi(x)}$

Devo risolvere questo integ. funzionale $\rightsquigarrow$ SHIFT della var di integraz:

$$\begin{cases} \psi(x) = \psi'(x) + \psi_0(x) \\ \bar\psi(x) = \bar\psi'(x) + \bar\psi_0(x) \end{cases}$$ e li inserisco nel funz generatore

$\hookrightarrow$ $\psi_0, \bar\psi_0$ indip. dalla var di integraz: $\mathcal{D}\psi = \mathcal{D}\psi'$; $\mathcal{D}\bar\psi = \mathcal{D}\bar\psi'$

$$Z_0 = \mathcal{N}_0 \int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar\psi' \exp\left\{ i \int d^4x \, (\bar\psi' + \bar\psi_0) D (\psi' + \psi_0) + \bar\eta(\psi' + \psi_0) + (\bar\psi' + \bar\psi_0)\eta \right\}$$

$\hookrightarrow \bar\psi' D\psi' + \bar\eta\psi' + \bar\psi'\eta + \bar\psi_0 D\psi' + \bar\psi' D\psi_0 + \bar\psi_0 D\psi_0 + \bar\eta\psi_0 + \bar\psi_0\eta$

$\hookrightarrow$ S_0 libera, senza corrente — termini misti — lo porto fuori dall'integ.

- termini misti: $\bar\psi_0 D\psi' = \bar\psi_0 \, i\gamma^\mu \partial_\mu \psi' - \bar\psi_0 m \psi' = -i(\partial_\mu \bar\psi_0)\gamma^\mu \psi' - m\bar\psi_0\psi'$

integro x parti (campi 0 al bordo) $\Rightarrow -i(\partial_\mu\bar\psi_0)\gamma^\mu\psi'$

- imponiamo $\boxed{D\psi_0 = -\eta}$ * (rimuovo l'arbitrarietà di ψ_0)

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_0 = -\eta \xrightarrow{h.c.} -i\partial_\mu \psi_0^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - m\psi_0^\dagger = -\eta^\dagger \quad \Big) \cdot \gamma_0$$

$\hookrightarrow \gamma_0^2 = \mathbb{1}$

$$-i\partial_\mu \underbrace{\psi_0^\dagger\gamma_0}_{=\bar\psi_0} \underbrace{\gamma_0\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0}_{=\gamma^\mu} - m\psi_0^\dagger\gamma_0 = -\underbrace{\eta^\dagger\gamma_0}_{=\bar\eta}$$

$$-i\partial_\mu \bar\psi_0\gamma^\mu - m\bar\psi_0 = -\bar\eta$$

- $\;= \underbrace{\bar\psi_0 D}_{\overset{*}{=} -\bar\eta}\psi' + \bar\psi' \underbrace{D\psi_0}_{\overset{*}{=} -\eta} + \bar\eta\psi' + \bar\psi'\eta = 0$

$\hookrightarrow$ annullo i TERMINI MISTI con *

esce dall'integ

$$\Rightarrow Z_0 = \mathcal{N}_0 \exp\left\{ i\int d^4x \left(\bar\psi_0 D\psi_0 + \bar\eta\psi_0 + \bar\psi_0\eta \right) \right\} \underbrace{\int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar\psi' \; e^{i\int d^4x\, \bar\psi' D\psi'}}_{= 1/\mathcal{N}_0 \text{ per def di } \mathcal{N}_0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{Z_0 = \exp\left\{ i\int d^4x \left(\bar\psi_0 D \psi_0 + \bar\eta \psi_0 + \bar\psi_0 \eta \right) \right\} = e^{i\int d^4x\, \bar\eta \psi_0}}$$

Ricordiamo: $\overset{*}{-}\cancel{\bar\psi_0 \eta} + \bar\eta\psi_0 + \cancel{\bar\psi_0\eta}$ perché $D\psi_0 \overset{*}{=} -\eta$

Usiamo la funz di Green: metodo della funz di Green

$$\psi_0(x) = -\int dx'\, S_F(x-x')\,\eta(x') \qquad \text{con} \qquad D S_F(x) = \delta^4(x)$$

$$\Longrightarrow \boxed{Z_0[\eta,\bar\eta] = \exp\left\{ -i\int d^4x\, d^4x'\ \bar\eta(x)\, S_F(x-x')\,\eta(x) \right\}}$$

Abbiamo quindi risolto l'integr. funzionale

OSS $S_F(x) = (i\partial\!\!\!/ + m)\Delta_F(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^4}\displaystyle\int d^4p\ e^{-ipx}\,\dfrac{p\!\!\!/ + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$ — legame col prop. scalare

$$\underbrace{(i\partial\!\!\!/ - m)}_{=D} S_F(x) = -(\Box + m^2)\Delta_F(x) = \delta^4(x)$$

OSS (v PP 63D) — cfr. con caso scalare

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi\ \exp\left\{ i\int d^4x\ \mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi) + J(x)\varphi(x) \right\}$$

$$= \exp\left\{ -\frac{i}{2}\int dx\,dy\ J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y) \right\}$$

stessa struttura

anche qua ho propagatore $\rightsquigarrow$ $(\Box + m^2)\Delta_F(x) = -\delta^4(x)$

- Quindi è come se il PROPAGATORE S_F fosse l'**inverso** di $D = i\partial\!\!\!/ - m$ (li applico in successione e ho la δ^4)

PROBLEMA dell'e.m.: propag. γ non definito a causa di gauge inv.

- Vediamo che se rappresenta la stessa struttura:

φ (OP. KLEIN GORDON) φ : $\varphi\, \frac{1}{2}(\Box + m^2)\varphi$

$\bar\psi$ (OP DIRAC) ψ : $\bar\psi\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi$

<u>OSS</u> PROPAGATORE ottenuto come l'INVERSO dell'operat. QUADRATICO nei campi che compare in Z

- $S_F(x-y)$ NON È SYM. per scambio $x \leftrightarrow y$ (Δ_F sì).

$\longrightarrow$ x il calcolo delle funz Green: v. 74-75D

Quantizzazione del campo vettoriale libero

In elettrodyn, la massa del fotone è nulla ($\Leftarrow$ gauge unfinito).
È possibile sviluppare una $m_\gamma \neq 0$ con FLUTTUAZIONI QUANTISTICHE?
$\hookrightarrow$ i.e. una massa dinamica. In teoria no, ma se fosse così dovrei osservare una deviaz da $1/r^2$

MS come generalizzaz dell'elettrodinamica cambiando i gruppi di trasformaz.
Invarianza sotto gauge locale $\Rightarrow$ esce il fotone $\times$ l'interaz.
Come introduco la massa in un campo? Ora conosciamo l'Higgs.
Un primo tentativo è stato introdurre M in un campo vett. = EQUAZ di PROCA. Partiamo da Maxwell:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu & \text{(sorgenti)} \\ \partial^\sigma F^{\mu\nu} - \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0 & \text{(vincoli indip da sorgenti)} \end{cases}$$

Dalla prima vediamo la CONSERVAZ della carica elettrica

$$\underbrace{\partial_\nu (\partial_\mu}_{\text{sym}} \underbrace{F^{\mu\nu}}_{\text{antisym}}) = \partial_\nu J^\nu = 0 \quad \Rightarrow \exists \text{ corrente conservata}$$

Introduciamo $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ — equaz gauge-indip.

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = J^\nu \\ A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x) \Rightarrow \Box A^\nu = \Box A^\nu \end{cases}$$

$\downarrow$ $F^{\mu\nu}$ gauge-inv ; A^μ non gauge-inv.

$\downarrow$ verifico la consistenza

$$\Rightarrow \Box(A^\nu + \partial^\nu \Lambda) - \partial^\nu \partial_\mu (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) = J^\nu$$

$$\Box A^\nu + \cancel{\partial^\nu \Box \Lambda} - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu - \cancel{\partial^\nu \Box \Lambda} = J^\nu \Rightarrow \Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = J^\nu$$

cioè l'equaz è indip. dal gauge

$$\Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \qquad \text{mi dà Maxwell come E-L}$$

Per il KG invece: $\Box\varphi + m^2\varphi = 0$

Proca unisce queste due info; assumiamo $P^{\mu\nu}$ analogo di $F^{\mu\nu}$ per questo **campo massivo a spin 1**, con W^μ anziché A^μ (ESEMPIO di PROCA):

$$\boxed{\partial_\mu P^{\mu\nu} + m^2 W^\nu = J^\nu} \longrightarrow \Box W^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu W^\mu) + m^2 W^\nu = J^\nu$$

derivo

$$\underbrace{\partial_\nu(\Box W^\nu) - \Box(\partial_\mu W^\mu)}_{=0} + m^2 \partial_\nu W^\nu = \partial_\nu J^\nu$$

prima $\partial_\nu J^\nu = 0 \quad \forall A^\mu$

Quindi se voglio J^ν conservato: $0 = \partial_\nu J^\nu = m^2 \partial_\nu W^\nu \Longrightarrow \partial_\nu W^\nu = 0$

cioè sto fissando il gauge: il termine di massa rompe la gauge inv.

Com $_{m\to 0}$: ritrovo e.m? Qui ho 3 dof polarizz. mentre il fotone ne ha 2 $\Rightarrow$ non posso far sparire un dof al limite (Veltman)

Passiamo alla QUANTIZZAZIONE; nel caso scalare e fermionico abbiamo ottenuto il propagatore **invertendo l'oper. quadratico nel campo** nel funzionale generatore; ad esempio

$$\boxed{\int d\varphi \; e^{-\frac{1}{2}\varphi K \varphi + J\varphi} = e^{\frac{1}{2} J K^{-1} J}}$$

Questo crea però un problema per il campo e.m a causa della gauge-invarianza

l'ho visto del campo scalare

$$\int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left\{ -\frac{i}{2}\int dx \; \varphi \underline{(\Box + m^2 - i\varepsilon)} \varphi + i \int dx \; J(x)\varphi(x) \right\}$$

cosa succede qui con e.m.?

Introduco la <u>Forma di Fermi dell'azione</u>:

$$S_0[A_\mu] = -\int dx \, \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$S = \int d^4x \, \mathcal{L}$

$$= -\int d^4x \; \frac{1}{4} \left\{ \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu \right\}$$

$$= -\int d^4x \ \frac{1}{2}\left\{ \underbrace{-\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu}_{= \partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu) - A_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu} + \underbrace{\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu}_{= \partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A^\nu) - A_\nu \Box A^\nu} \right\}$$

↓ i termini di div. integrano a 0

$$= -\int d^4x \ \frac{1}{2}\left\{ A_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu - A_\nu \Box A^\nu \right\} \quad \downarrow A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^4x \left\{ -A_\nu \left(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\mu \right\} = \frac{1}{2}\int d^4x \left\{ A_\nu \underbrace{\left(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu \partial^\nu \right)}_{\doteq K^{\mu\nu}} A_\mu \right\} \quad (*)$$

Ho scritto la $\mathcal{L}$ esplicitando gli A_μ [cfr $\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi$]

Se faccio l'int. funz di questo termine, ottengo l'inverso di $K^{\mu\nu}$:

$K_{\mu\nu} D^{\nu\lambda}(x) = \delta_\mu^\lambda \delta^4(x)$ con $D^{\nu\lambda}$ che mi aspetto essere legato al propag

Passiamo allo spazio dei momenti:

- $g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu \longrightarrow \hat{K}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} k^2 + k_\mu k_\nu$
  ↳ momento che fluisce nel propag
- $D^{\nu\lambda}(x) \longrightarrow \hat{D}^{\nu\lambda} = A g^{\nu\lambda} + B k^\nu k^\lambda$
  ↳ combinaz dei tensori che ho

$\Rightarrow \hat{K}_{\mu\nu} \hat{D}^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$ ⇝ lo impongo e provo a cercare il propag (mi aspetto D)

dim

$$(-g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu)(A g^{\nu\lambda} + B k^\nu k^\lambda) \overset{!}{=} \delta_\mu^\lambda$$

$$= -A k^2 \delta_\mu^\lambda - \cancel{B k^2 k_\mu k^\lambda} + A k_\mu k^\lambda + \cancel{B k^2 k_\mu k^\lambda}$$

$$\overset{!}{=} A\left(-k^2 \delta_\mu^\lambda + k_\mu k^\lambda\right) = \delta_\mu^\lambda \qquad \underline{\text{NON HA SOLUZIONE}}$$

Non funziona il metodo di risoluz del campo scalare e fermionico, non riesco a trovare l'inverso dell'analogo di $(\Box + m^2 - i\varepsilon)$

È possibile dimostrarlo + rigorosamente facendo tutti i passaggi → arr remo a questi problemi comunque. Posso anche non passare allo spazio dei momenti e osservare che l'operat. $g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu$ ha autoval 0 e quindi non è invertibile. Questo è conseguenza dell'inv. di gauge: c'è una sym interna che dà dei problemi

1. L'integ funzionale considera le infinite config possibili per legare due punti. L'inv. gauge crea classi di equivalenza fra questi cammini $\Rightarrow$ aver conteggio dei cammini

2. Come trovo il propagatore? Devo rimuovere questa sym. / degen. imponendo la condiz di Lorentz $\partial^\mu A_\mu = 0 \Rightarrow$ in (*) ho cancellazione di $\partial_\nu\partial_\mu A^\mu \Rightarrow -A_\nu(g^{\mu\nu}\Box - \cancel{\partial^\nu\partial^\mu})A_\mu = -A_\nu K^{\mu\nu}A_\mu \Rightarrow \boxed{K^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\Box}$

$A_\nu(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu)A_\mu$

Questo ha un inverso: $D^{\nu\lambda} = -g^{\nu\lambda}/k^2 \Rightarrow$ rimuovo i termini longitudin.

↳ $K^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\Box \xrightarrow{\text{TRASF}} -g^{\mu\nu}k^2$ ↳ solo nello SPAZIO DEI MOMENTI

↳ $K^{\mu\nu}D_{\nu\lambda} = (-g^{\mu\nu}k^2)(-g_{\nu\lambda}/k^2) = \delta^\mu_\lambda$

Quindi devo restringere le config possibili a quelle GAUGE NON-EQUIVAL. (quelle per cui non vale $A_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda$)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \Box A^\nu - \partial^\mu\partial^\nu A_\mu \overset{\partial^\mu A_\mu \overset{!}{=} 0}{=} \Box A^\nu \overset{\text{MAXWELL}}{=} 0 \Rightarrow \text{equaz. onde}$$

↳ GAUGE FIXING

03-04-24 - lez 8

$$\begin{cases} S_0[A_\mu] = \frac{1}{2}\int dx\, \overbrace{A_\nu(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu)A_\mu}^{\mathcal{L}_0} & \text{(azione classica)} \\ \text{Gauge di Lorentz}: \partial^\mu A_\mu = 0 \end{cases}$$

↳ aggiungiamo "a mano" il termine di fixing → trovo L equivalente a quella iniziale solo nel gauge di Lorentz

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \underbrace{- \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2}$$ ↗ $\mathcal{L}$ che ho nell'int. di S al gauge di Lorentz

GAUGE FIXING ⇝ R_ξ = classe di trasf di gauge lineari

Rifacendo lo stesso procedimento: ↙ uso Leibniz

$$S_0 = \frac{1}{2}\int dx \; A^\mu \left[g_{\mu\nu} \underset{\uparrow\,-k^2}{\Box} + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \underset{\uparrow\,-k_\mu k_\nu}{\partial_\mu \partial_\nu} \right] A^\nu$$ ← risultano dalle derivaz

$$S_0 = \frac{1}{2}\int dx \; A^\mu \left[-k^2 g_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) k_\mu k_\nu \right] A^\nu$$ TERMINE QUADRATICO in A^μ

↳ è quello che si inverte x avere il propog.

Ricavo il propagatore trovando l'inverso

$$\left[-k^2 g_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) k_\mu k_\nu \right] \underline{\left(A g^{\nu\lambda} + B k^\nu k^\lambda \right)} \overset{!}{=} \delta^\lambda_\mu$$ ⇝ è il propagatore

↳ del γ ⇝ non è detto sia $k^2 = m^2 = 0$ ⇝ γ VIRTUALE

γ REALE ⇒ non devo avere dipendenza da ξ; x i virtuali la propogaz. può essere gauge dipendente

$$\underline{-k^2 A \delta^\lambda_\mu} - \cancel{B k^2 k_\mu k^\lambda} - \underline{A\left(\frac{1}{\xi} - 1\right) k_\mu k^\lambda} - B\left(\frac{1}{\xi} - \cancel{1}\right) \underline{k^2 k_\mu k^\lambda} = \underline{\delta^\lambda_\mu}$$

$$-k^2 A \delta^\lambda_\mu - \left\{ A\left(\frac{1}{\xi} - 1\right) + \frac{B}{\xi} k^2 \right\} k_\mu k^\lambda = \delta^\lambda_\mu$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -1/k^2 \\ A\left(1/\xi - 1\right) = -\dfrac{B k^2}{\xi} \end{cases} \longrightarrow +\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{\xi} - 1\right) = \frac{B k^2}{\xi} \longrightarrow \frac{1-\xi}{\cancel{\xi}} = \frac{B}{\cancel{\xi}} k^4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -1/k^2 \\ B = \dfrac{1-\xi}{k^4} \end{cases}$$

Quindi il propagatore è:

$$D^{\nu\lambda} = -\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left\{ g^{\nu\lambda} - (1-\xi)\frac{k^\nu k^\lambda}{k^2} \right\}$$

Per $\xi = 1$: GAUGE di T-HOFT-FEYNMAN

Per $\xi = 0$: a livello di densità di $\mathcal{L}$ è al div: GAUGE di LANDAU ⇝ è quello fisico: solo comp. trasverse del fotone: $g^{\nu\lambda} - \frac{k^\nu k^\lambda}{k^2}$ COMBINAZ TRASVERSALE. Infatti contraendo col suo momento, ho zero:

$$k_\lambda \left\{ g^{\nu\lambda} - \frac{k^\nu k^\lambda}{k^2} \right\} = k^\nu - \frac{k^\nu k^2}{k^2} = 0 \rightsquigarrow$$ tensore trasverso

Nel funzionale generatore: $\int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left\{ i \int d^4x \, \varphi \, (\text{PROPAG}) \varphi \right\} \Rightarrow$ sommo-molo per il campo vett. massless

cioè $K_{\mu\nu}$ invertito

$\rightsquigarrow \int d^4x \, (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{G.F})$

$$Z_0[J_\mu] \overset{*}{=} \int \prod_{\mu=1}^{4} \mathcal{D}A_\mu \, \exp\left\{ i \int d^4x \, A^\mu (D^{-1})_{\mu\nu} A^\nu + J^\mu A_\mu \right\}$$

$\mathcal{L}_{GF}$ selezionano solo certe config di campo, i.e. solo quelle gauge-inequivalenti. Nella versione euclidea

$$\mathcal{L}_{GF}^{E} \rightsquigarrow e^{-\frac{1}{2\xi}\int (\partial_\mu A^\mu)^2 \, dx_E} \rightsquigarrow$$ soppresso esponenzialmente

Questo funziona solo per QED; se allarghiamo i gruppi di sym (TEORIE di YANG-MILLS / di GAUGE NON ABEL.) $\rightsquigarrow J^\mu$ non conservato $\rightsquigarrow$ non basta mettere un G.F $\Rightarrow$ FADDEEV-POPOV: sto sommando su troppi campi in * prato a fattorizzare l'integrale facendo un cambio coord $\rightsquigarrow$ viene una struttura simile, ma compare nell'integr. $\sqrt{\det M}$ $\Rightarrow$ non posso più uscire l'integr. gaussiano; introduco i CAMPI GHOST di GRASSM. (scrivo il det. con quelli) x ricondurmi a integ gaussiani

Rifacendo questo costr in QED, $\det M$ è indip da A_μ $\Rightarrow$ esce dall'integ funzionale e rientra nella normalizz $\mathcal{N}$.

Le interazioni - campo scalare

Capire quali sono i problemi oltre il tree-level. Col Z posso descrivere anche il regime non perturbativo: $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ con $\mathcal{L}_I$ pert. o no.

<u>Problema</u>: calcolo di Z con il termine $\mathcal{L}_I$ ⇝ ho 2 metodi

1. **Regime non pert.** (in realtà funziona sempre)

$$Z[\{J\}] = \int \mathcal{D}\varphi \dots \quad e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I}$$

classe di corr. esterne — campi in gioco

↳ lo risolvo direttamente con metodi numerici (lattice QCD) assumendo uno reticolaz. dello spazio-tempo: vado a discretizzare $\int \mathcal{D}\varphi$ assumendo uno spaziatura "infinitesima" ⇝ STABILITÀ delle soluzioni quando passo $\longrightarrow 0$ ("AB INITIO")

2. **Perturbativo**: $\mathcal{L}_I$ ha cost. di accoppiamento usato come param. di espansione ($\alpha_{QED} = 1/137$) ↳ anche in QCD ad alte energie

Anche in QED, e (cost. accop.) dipende dall'energia: ad alte energie non è + perturbativa = POLO di LANDAU (non sono raggiungibili)

Quindi noi studieremo QED oltre il tree-level in <u>modo perturbativo</u>

S_I polinomiale in φ ⇝ posso toglierlo da $\mathcal{D}\varphi$

$$\int \mathcal{D}\varphi \; e^{iS_0 + i\int d^4x J\varphi + S_I} = e^{iS_I\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)} \int \mathcal{D}\varphi \; e^{iS_0 + i\int d^4x J\varphi}$$

↓ esplicito λ accoppiam. $e^{i\lambda S_I}$ e sviluppo

↳ $1 + i\lambda S_I$ — non guadagno molto aggiungendo λ^2

Vedremo due teorie interagenti:

1. <u>TEORIA SCALARE</u>: la + semplice; ESEMPIO AUTOINTERAG: $\lambda\varphi^4$

In generale lo scalare mi fa aggiungere $-c\varphi^m$ in $\mathcal{L}$; mentre per m pari ho qualcosa di sensato, per $m=3$ ad esempio non è BOUNDED FROM BELOW è però legata all'inter QED (è inter. a 3 campi)

2. QED: indici di Dirac: $\bar{\psi} \not{A} \psi$ (3 campi)

→ campo scalare reale

Un campo scalare reale non ha corrispond. fisica diretta, è una parte della $\mathcal{L}_{HIGGS}$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi - (m^2 - i\varepsilon)\varphi^2\right) - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4(x) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

$$Z[J] \stackrel{d}{=} \mathcal{N}\int \mathcal{D}\varphi\, \exp\left\{ i\int d^4x \left(\mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4(x) + J(x)\varphi(x)\right)\right\}$$

↓ sostituisco al campo lo derivato

↳ $1/\int \mathcal{D}\varphi\, \exp\{i\int d^4x\, \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I\} = \mathcal{N}'\mathcal{N}_0$

↳ = è il num. con $J=0$

$$= \mathcal{N}\exp\left\{\int d^4x\, -\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4\right\} \underbrace{Z_0(J)}$$

↳ $\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4$ = derivo 4 volte

$$= \exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\} = e^{JJ}$$

parte libera già calcolata

1/2 se ne va, ho due J da derivare

↳ calcolo Z_0 della teoria libera ed espando l'exp in serie per valutare Z

$$\cdot\ \frac{\delta}{\delta J(x)} Z_0[J] = (-i)\int d^4y'\, \Delta_F(x-y')J(y')\, e^{JJ}$$

$$\cdot\ \frac{\delta^2}{\delta J(x)\delta J(x)} Z_0 = (-i)\left\{\Delta_F(x-x)\, e^{JJ} + \int d^4y'\Delta_F(x-y')J(y')(-i)\int d^4y''\Delta_F(x-y'')J(y'')\; e^{JJ}\right\}$$

$$\cdot\ \frac{\delta^3}{\delta J^3} Z_0 = (-i)\Delta_F(x-x)(-i)\int d^4y'\Delta_F(x-y')J(y')e^{JJ} + 2(-i)^2\Delta_F(x-x)\int d^4y'\,\Delta_F(x-y')J(y')\,e^{JJ} +$$

$$+ (-i)^3\left\{\int d^4y'\,\Delta_F(x-y')J(y')\right\}^{3*} e^{JJ}$$

* notazione = integrale ripetuto 3 volte

$$\cdot\ \frac{\delta^4}{\delta J^4} Z_0 = \left((-i)\Delta_F(x-x)\right)^2 e^{JJ} + (-i)^2\Delta_F(x-x)(-i)\left\{\int d^4y'\,\Delta_F(x-y')J(y')\right\}^2 e^{JJ} +$$

$$+ 2(-i)^2 \Delta_F^2(x-x)\, e^{\mathcal{J}} + 2(-i)^3 \Delta_F(x-x)\left\{\int d^4y'\, \Delta_F(x-y')J(y')\right\}^2 e^{\mathcal{J}} +$$

$$+ (-i)^3\, 3\Delta_F(x-x)\left\{\int d^4y'\, \Delta_F(x-y')J(y')\right\}^2 e^{\mathcal{J}} + (-i)^4\left\{\int d^4y'\, \Delta_F(x-y')J(y')\right\}^4 e^{\mathcal{J}}$$

Allora, scriviamo $Z[J]$ espandendo l'esponenziale:

$$Z[J] \simeq \frac{Z_0 - \frac{\lambda}{4!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4 Z_0(J)}{\left(Z_0 - \frac{\lambda}{4!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4 Z_0(J)\right)_{J=0}}$$

CALCOLO PERTURBATIVO del FUNZ. GENERATORE

$$= \frac{Z_0}{\mathcal{N}}\left\{1 - \frac{\lambda}{4!}\int d^4x \left[3(-i)^2\Delta_F^2(x-x) + 6(-i)^3\Delta_F(x-x)\left(\int d^4y'\,\Delta_F(x-y')J(y')\right)^2 + (-i)^4\left(\int d^4y'\,\Delta_F(x-y')J(y')\right)^4\right]\right\}$$

$\hookrightarrow$ $Z_0 = e^{\mathcal{J}}$; $\mathcal{J} = \int d^4y'\,\Delta(x-y')J(y')$

Inoltre $Z_0(J=0) \stackrel{!}{=} 1$

$$= Z_0[J]\; \frac{\left\{1 - \frac{\lambda}{4!}\int d^4x \left[-3\Delta_F^2(x-x) + 6(-i)^3\Delta_F(x-x)\mathcal{J}^2 + (-i)^4\mathcal{J}^4\right]\right\}}{1 + \frac{3}{4!}\lambda\int d^4x\, \Delta_F^2(x-x)}$$

$\hookrightarrow$ al den ho $Z_0[J=0]=1$ e ho annullato il termine $\mathcal{J}$ con J a vista

Da questo funzionale posso calcolare per derivazione la funz di Green (faccio quella a 2 punti)

$$G(y_1,y_2) = \frac{1}{i^2}\; \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(y_1)\delta J(y_2)}\bigg|_{J=0} = (\star)$$

Notiamo che la posizione $J=0$ annulla in automatico la $\delta^2/\delta J^2$ sul termine a J^4 (evito di calcolarlo)

$= -i\Delta_F(y_1-y_2)$ in $J=0$

$$(\star)\;\; \frac{1}{i^2}\cdot \frac{\cancel{\left[1 + 3\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, \Delta_F^2(x-x)\right]}\, \delta^2 Z_0/\delta J^2}{\cancel{1 + 3\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, \Delta_F^2(x-x)}}\Bigg|_{J=0} - \frac{1}{i^2}\, 6\frac{\lambda}{4!}(-i)^3(2)\frac{\int d^4x\, \Delta(x-x)\Delta(x-y_1)\Delta(x-y_2)}{1 + \frac{3}{4!}\lambda\int d^4x\, \Delta_F^2(x-x)}$$

ho già annullato le derivate con J a visto e sostituito $\delta_J^2 Z_0\big|_{J=0}$

~~m~~ scende derivando $\mathcal{J}^2$