TS8 Filtros Digitales

2) Filtro digital a partir de filtro analógico Pasa bajos Butterworth de 2° orden, con $F_c = 1KHz. \Rightarrow W_0 = 2\pi F_c$

a) $F_s = 100KHz \Rightarrow K = 2\cdot F_s$

$H(z) = H(s)\big|_{s=K\cdot\frac{z-1}{z+1}}$ donde $H(s) = \dfrac{W_0^2}{s^2 + s\frac{W_0}{Q} + W_0^2}$

Con $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} = (2\cdot \cos 45°)^{-1}$

$$H(z) = \frac{W_0^2}{K^2\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + K\cdot\frac{z-1}{z+1}\sqrt{2}\,W_0 + W_0^2}$$

$$H(z) = \frac{(z+1)^2\,W_0^2}{K^2(z^2-2z+1) + K(z^2-1)\sqrt{2}\,W_0 + W_0^2(z+1)^2}$$

$$H(z) = \frac{W_0^2\,z^2 + 2W_0^2 z + W_0^2}{(K^2+\sqrt{2}KW_0+W_0^2)\,z^2 + (W_0^2\cdot 2 - 2K^2)\,z + K^2 + W_0^2 - \sqrt{2}KW_0}$$

$K = 200.000\ Hz$

$W_0 = 2\pi\cdot 1000\ Hz$

$$\boxed{H(z) = \frac{W_0^2 + 2W_0^2 z^{-1} + W_0^2 z^{-2}}{(K^2+\sqrt{2}KW_0+W_0^2) + (W_0^2 2 - 2K^2)\,z^{-1} + (K^2+W_0^2-\sqrt{2}KW_0)\,z^{-2}}}$$

NOTA: Sacando factor común W_0^2 de num y den (y cancelando luego $\frac{W_0^2}{W_0^2}$) es lo mismo a que si hubiese trabajado con $W_0 = 1$ (normalizada) y $K' = \frac{K}{W_0}$ (K normalizada)

Dan los mismos coeficientes

$\therefore F_s : \Omega = \omega_{digital}$ Los polos y ceros están fijos por los coeficientes, si varío "externamente" la F_s, mi K' (normalizado) es fijo (coeficientes fijos en memoria) $\Rightarrow K' = \frac{2F_s}{W_0}$ Cambia ∴ También cambia

c) Filtro digital a partir de filtro analógico pasa altos Butterworth de 2º orden, con $F_c = 6\,KHz$, $F_s = 100\,KHz$ y luego $f_s = 10\,KHz$.

Teniendo el Butter de 2º orden pasabajos:

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}\,p + 1}$$

(normalizada la frec. del pasa altos $\Omega_w = 2\pi \cdot F_c = W_c$)

$p = \frac{1}{s} \Rightarrow$ Pasa altos:

$$H(s) = \frac{1}{\frac{1}{s^2} + \sqrt{2}\,\frac{1}{s} + 1} = \frac{s^2}{1 + \sqrt{2}\,s + s^2}$$

Con $\Omega_w = 2\pi \cdot F_c$

Digitalizo el filtro:

$$H(z) = H(s)\Big|_{s = K \cdot \frac{z-1}{z+1}} = \frac{K^2 \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}}{K^2 \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + \sqrt{2} \cdot K \cdot \frac{z-1}{z+1} + 1}$$

(Con K normalizada: $K = \frac{2 \cdot F_s}{W_c}$)

$$H(z) = \frac{K^2\,(z-1)^2}{K^2 (z-1)^2 + \sqrt{2}K(z-1)(z+1) + (z+1)^2} = \frac{K^2 z^2 - 2K^2 \cdot z + K^2}{K^2 z^2 - 2K^2 z + K^2 + \sqrt{2}Kz^2 - \sqrt{2}K + z^2 + 2z + 1}$$

$$H(z) = \frac{K^2 - 2K^2 z + K^2 z^{-2}}{(K^2 + \sqrt{2}K + 1) + (2 - 2K^2)\,z^{-1} + (K^2 - \sqrt{2}K + 1)\,z^{-2}}$$

Podría sacar factor común a_0, pero las funciones de scipy no lo requieren.

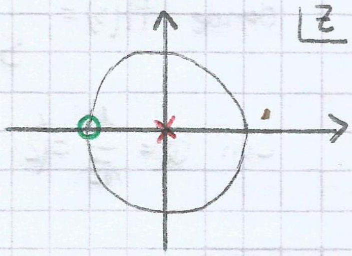
3) $H(z)$, Singularidades en Z, $|H(\Omega)|$ y $\angle H(\Omega)$

a) Filtro Media Móvil:

I) $h_1(k) = (1, 1) \Longrightarrow b_0 = 1$; $b_1 = 1$ (Filtro FIR por $h(k)$ acotada)

$\therefore \boxed{H(z) = 1 + z^{-1}}$

$H(z) = \dfrac{z+1}{z} \Longrightarrow$



Coef. Simétricos:

$$|H(\Omega)| = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} b_i \cdot \cos\left[\left(\tfrac{n}{2} - i\right)\Omega\right] \quad \text{con } n = 1 \text{ (orden 1)}$$

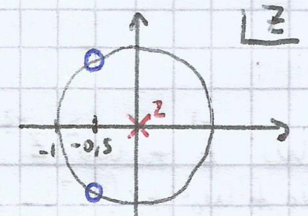
$\therefore |H(\Omega)| = 2 \cdot b_0 \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) = \boxed{2 \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$

$\boxed{\angle H(\Omega) = -\frac{\Omega}{2}}$ $\left(-\frac{n}{2}\Omega\right)$

II) $h_2(k) = 1, 1, 1 \Longrightarrow b_0 = b_1 = b_2 = 1$

$\boxed{H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}}$

$H(z) = \dfrac{z^2 + z + 1}{z^2} \Longrightarrow$



$|H(\Omega)| = \left|e^{-j\Omega}\left(e^{j\Omega} + e^{0} + e^{-j\Omega}\right)\right|$

$|H(\Omega)| = \left|e^{-j\Omega}\left(2 \cdot \cos(\Omega) + 1\right)\right|$

$|H(\Omega)| = 2 \cdot 1 \cdot \sum_{i=0}^{1} \cos\left[(1-i)\Omega\right] = \boxed{2 \cdot \cos(\Omega) + 1}$ $\quad \boxed{\angle H(\Omega) = -\Omega} = -\frac{n}{2}\Omega$

- Para que la salida sea la media aritmética, los Coeficientes deben ser igual a $\dfrac{1}{n+1}$ (n orden del Filtro) $\Longrightarrow Y(k) = \dfrac{1}{n+1}\left(x(k) + x(k-1) + \cdots + x(k-n)\right)$

- En el segundo sistema: $|H(\Omega)| = 0$ cuando $2 \cdot \cos(\Omega) = -1 \Longrightarrow \boxed{\Omega = \pi \cdot \frac{2}{3}}$

$\Omega = \dfrac{\omega}{F_s} \Longrightarrow F_s = \dfrac{2 \cancel{\pi} \cdot 50\,Hz}{\cancel{\pi} \cdot \frac{2}{3}} \Longrightarrow \boxed{F_s = 150\,Hz}$

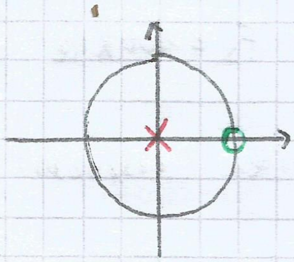
NOTA

b) Filtro diferenciador:

I) $h_1(K) = (1, -1) \Rightarrow b_0 = 1, \quad b_1 = -1$

$$\boxed{H(z) = 1 - z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \Longrightarrow$$



$$\boxed{|H(\Omega)| = 2 \cdot \mathrm{Sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

$$\boxed{\angle H(\Omega) = -\frac{\Omega}{2} + \frac{\pi}{2}} \Longrightarrow \tau = \frac{d\angle H(\Omega)}{d\Omega} = \boxed{\frac{1}{2}}$$ media muestra de retardo (indeseable)

Comportamiento de derivador ideal: $H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \simeq \boxed{j\Omega}$

Comportamiento de este diferenciador: $H_1(\Omega) = e^{j0} - e^{-j\Omega}$

$$H_1(\Omega) = e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot 2j \cdot \mathrm{Sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right) = 2 \cdot \mathrm{Sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Omega}{2}\right)}$$

Comparando módulos: $$\frac{\left| |H(\Omega)^{ideal}| - |H_1(\Omega)| \right|}{|H(\Omega)^{ideal}|} = 0{,}05 \quad (5\%)$$

$$\frac{|\Omega - 2 \cdot \mathrm{Sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)|}{\Omega} = 0{,}05$$

$$|\Omega - 2 \cdot \mathrm{Sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)| = 0{,}05 \cdot \Omega$$

$$\left(\begin{array}{l} \Omega \geq 2 \cdot \mathrm{Sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \\ \text{Si } 0 \leq \Omega \leq \pi \end{array}\right) \Longrightarrow \Omega - 2 \cdot \mathrm{Sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right) = 0{,}05\Omega$$

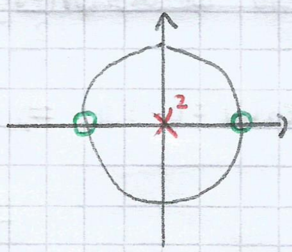
$$0{,}95\Omega = 2 \cdot \mathrm{Sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$0{,}475\Omega = \mathrm{Sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \Longrightarrow \boxed{\Omega = 1{,}10382}$$

II) $h_2(K) = (1, 0, -1) \Rightarrow b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -1$

$$\boxed{H(z) = 1 - z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2} \Longrightarrow$$



$$H(\Omega) = e^{j0} - e^{-j2\Omega}$$

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega}\left(e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}\right) = e^{-j\Omega} \cdot 2j\,\mathrm{Sen}(\Omega) \Longrightarrow \begin{cases} |H(\Omega)| = 2 \cdot \mathrm{Sen}(\Omega) \\ \angle H(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \Omega \Rightarrow \boxed{\tau = 1} \text{ Retardo de 1 muestra} \end{cases}$$

- Comparación con derivador ideal de $H_2(z)$: Como se observará en el Jupyter notebook la curva de $|H_2(\Omega)|$ se ajusta mejor a la recta $2\cdot\Omega$ (derivador ideal escalado) por lo que la comparo con dicha recta en lugar de Ω:

$$\frac{|2\Omega - 2\operatorname{sen}(\Omega)|}{2\cdot\Omega} = 0{,}05 \Rightarrow \Omega - \operatorname{sen}(\Omega) = 0{,}05\,\Omega \Rightarrow 0{,}95\,\Omega = \operatorname{sen}(\Omega)$$

$$\therefore \ \Omega = 0{,}551911$$