HOJA Nº

FECHA

2) Filtro digital a partir de Filtro analógico Pasa bajos Butterworth de 2° orden, con $F_c = 1KHz. \Rightarrow W_0 = 2\pi F_c$

a) $F_s = 100KHz \Rightarrow K = 2 \cdot F_s$

$$H(z) = H(s)\Big|_{S = K \cdot \frac{z-1}{z+1}} \qquad \text{donde } H(s) = \frac{W_0^2}{S^2 + S \cdot \frac{W_0}{Q} + W_0^2}$$

$$\text{con } Q = \frac{1}{\sqrt{2}} = (2 \cdot \cos 45°)^{-1}$$

$$H(z) = \frac{W_0^2}{K^2 \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + K \cdot \frac{z-1}{z+1} \sqrt{2}\, W_0 + W_0^2}$$

$$H(z) = \frac{(z+1)^2\, W_0^2}{K^2(z^2 - 2z + 1) + K(z^2-1)\sqrt{2}\, W_0 + W_0^2 (z+1)^2}$$

$$H(z) = \frac{W_0^2 \cdot z^2 + 2 W_0^2 z + W_0^2}{(K^2 + \sqrt{2} K W_0 + W_0^2) z^2 + (W_0^2 \cdot 2 - 2K^2) z + K^2 + W_0^2 - \sqrt{2} K W_0}$$

$K = 200.000$ Hz

$W_0 = 2\pi \cdot 1000$ Hz

$$H(z) = \frac{W_0^2 + 2 W_0^2 z^{-1} + W_0^2 z^{-2}}{(K^2 + \sqrt{2} K W_0 + W_0^2) + (W_0^2 2 - 2K^2) z^{-1} + (K^2 + W_0^2 - \sqrt{2} K W_0)\, z^{-2}}$$

NOTA: Sacando factor común W_0^2 de num y den (y cancelando luego $\frac{W_0^2}{W_0^2}$) es lo mismo a que si hubiese trabajado con $W_0 = 1$ (normalizada) y $K' = \frac{K}{W_0}$ (K normalizada)

Dan los mismos coeficientes

$\therefore F_s \cdot \Omega = \omega_{digital}$ Los polos y ceros están fijos por los coeficientes, si varío externamente la F_s, mi K' (normalizado) es fijo (coeficientes fijos en memoria) $\Rightarrow K' = \frac{2 F_s}{W_0}$ → cambia

$\therefore$ También cambia

NOTA

HOJA Nº

FECHA

c) Filtro digital a partir de filtro analógico pasa altos Butterworth de 2° orden, con $F_c = 6\,KHz$, $F_s = 100\,KHz$ y luego $f_s = 10\,KHz$.

Teniendo el Butter de 2° orden pasabajos:

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}\,p + 1}$$ (normalizada la frec. del pasa altos $\Omega_w = 2\pi \cdot F_c = \omega_c$)

$p = \frac{1}{s} \Rightarrow$ Pasa altos:

$$H(s) = \frac{1}{\frac{1}{s^2} + \sqrt{2}\,\frac{1}{s} + 1} = \boxed{\frac{s^2}{1 + \sqrt{2}\,s + s^2}}$$ Con $\Omega_w = 2\pi \cdot f_c$

Digitalizo el Filtro:

$$H(z) = H(s)\Big|_{s = K \cdot \frac{z-1}{z+1}} = \frac{K^2 \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}}{K^2 \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + \sqrt{2} \cdot K \cdot \frac{z-1}{z+1} + 1}$$ (Con K normalizada: $K = \frac{2 \cdot f_s}{\omega_c}$)

$$H(z) = \frac{K^2\,(z-1)^2}{K^2 (z-1)^2 + \sqrt{2}K (z-1)(z+1) + (z+1)^2} = \frac{K^2 z^2 - 2K^2 \cdot z + K^2}{K^2 z^2 - 2K^2 z + K^2 + \sqrt{2}K z^2 - \sqrt{2}K + z^2 + 2z + 1}$$

$$\boxed{H(z) = \frac{K^2 - 2K^2 z^{-1} + K^2 z^{-2}}{(K^2 + \sqrt{2}K + 1) + (2 - 2K^2)\, z^{-1} + (K^2 - \sqrt{2}K + 1)\, z^{-2}}}$$

Podría sacar factor común a_0, pero las funciones de scipy no lo requieren.

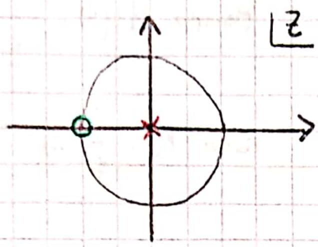
3) $H(z)$, Singularidades en Z, $|H(\Omega)|$ y $\angle H(\Omega)$

a) Filtro Media Móvil:

I) $h_1(k) = (1,1) \Rightarrow b_0 = 1 \; ; \; b_1 = 1$ (Filtro FIR por $h(k)$ acotada)

$\therefore \boxed{H(z) = 1 + z^{-1}}$

$H(z) = \dfrac{z+1}{z} \Longrightarrow$



Coef. Simétricos:

$|H(\Omega)| = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} b_i \cdot \cos\left[\left(\frac{n}{2} - i\right)\Omega\right]$ con $n = 1$ (orden 1)

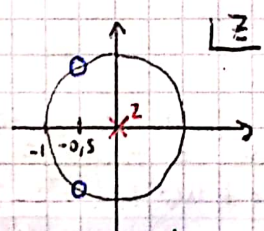
$\therefore |H(\Omega)| = 2 \cdot b_0 \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) = \boxed{2 \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$

$\boxed{\angle H(\Omega) = -\frac{\Omega}{2}}$ $\left(-\frac{n}{2}\Omega\right)$

$\therefore$ II) $h_2(k) = 1,1,1 \Rightarrow b_0 = b_1 = b_2 = 1$

$\boxed{H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}}$

$H(z) = \dfrac{z^2 + z + 1}{z^2} \Longrightarrow$



$|H(\Omega)| = \left|e^{-j\Omega}\left(e^{j\Omega} + e^{0} + e^{-j\Omega}\right)\right|$

$|H(\Omega)| = \left|e^{-j\Omega}\left(2 \cdot \cos(\Omega) + 1\right)\right|$

$|H(\Omega)| = 2 \cdot 1 \cdot \sum_{i=0}^{1} \cos\left[(1-i)\Omega\right] = \boxed{2 \cdot \cos(\Omega) + 1}$ $\quad \boxed{\angle H(\Omega) = -\Omega} = -\frac{n}{2}\Omega$

- Para que la salida sea la media aritmética, los coeficientes deben ser igual a $\frac{1}{n+1}$ (n orden del Filtro) $\Longrightarrow Y(k) = \frac{1}{n+1}\left(x(k) + x(k-1) + \dots + x(k-n)\right)$

- En el segundo sistema: $|H(\Omega)| = 0$ cuando $2 \cdot \cos(\Omega) = -1 \Rightarrow \boxed{\Omega = \pi \cdot \frac{2}{3}}$

$\Omega = \dfrac{\omega}{F_s} \Longrightarrow F_s = \dfrac{\cancel{2} \cdot \cancel{\pi} \cdot 50\,Hz}{\cancel{\pi} \cdot \frac{\cancel{2}}{3}} \Longrightarrow \boxed{F_s = 150\,Hz}$

NOTA