Università di Catania

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Ettore Majorana"

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Alessandro Consoli

Sonia Facciolà

Joey Butchers

Appunti di Analisi I

Appunti di Analisi I

Anno Accademico 2024/2025

Indice

Appunti di Analisi I

Alessandro Consoli, Sonia Facciolà e Joey Butchers

Anno 2024/2025

Capitolo 1

Funzioni e Insiemi numerici

1.1 introduzione

Presi due insiemi X e Y e f una funzione che associa ad ogni elemento di X ***uno e uno solo*** elemento di Y, la terna ordinata (X, Y, f) è detta funzione. Il primo insieme è detto ***dominio*** della funzione, il secondo ***codominio*** e l'insieme dei valori che la funzione assume è detto ***immagine*** della funzione. Per indicare la funzione si usa la notazione:

$$f : X \to Y \tag{1.1}$$

dove x indica il generico elemento di X e $f(x)$ il corrispondente elemento di Y. Se $f(x_0) = y_0$ si dice che y_0 è l'immagine di x_0 e si scrive $y_0 = f(x_0)$.

Definizione di prolungamento: di una funzione: siano X, Y, Z tre insiemi e $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni. Si dice che g è il prolungamento di f se:

$$g(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X \tag{1.2}$$

Definizione di funzione inversa: sia $f : X \to Y$ una funzione. Si dice che f è invertibile se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che:

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in X \tag{1.3}$$

Definizione di funzione suriettiva: si dice suriettiva se ogni elemento del codominio Y ha almeno un elemento nel dominio X che lo mappa su di esso:

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \text{tale che} \quad f(x) = y \tag{1.4}$$

Definizione di funzione iniettiva: si dice iniettiva se ad ogni elemento del dominio X corrisponde un solo elemento del codominio Y:

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \text{tali che} \quad x_1 \neq x_2 \quad \text{allora} \quad f(x_1) \neq f(x_2) \tag{1.5}$$

Diciamo che f ha una corrispondenza biunivoca tra X e Y se è sia suriettiva che iniettiva.

1.1.1 Esempi di funzioni

- $f(x) = x^2$ è una funzione suriettiva ma non iniettiva.
- $f(x) = x^3$ è una funzione suriettiva e iniettiva.
- $f(x) = \sin(x)$ è una funzione suriettiva ma non iniettiva.
- $f(x) = \cos(x)$ è una funzione suriettiva ma non iniettiva.
- $f(x) = \tan(x)$ è una funzione suriettiva ma non iniettiva.
- $f(x) = \log(x)$ è una funzione suriettiva ma non iniettiva.
- $f(x) = \exp(x)$ è una funzione suriettiva e iniettiva.

1.2 Relazioni di equivalenza

Una relazione di equivalenza è una relazione binaria $\sim$ su un insieme X che soddisfa le seguenti proprietà:

- ***Riflessiva***: $\forall x \in X,\ x \sim x$
- ***Simmetrica***: $\forall x, y \in X,\ x \sim y \implies y \sim x$
- ***Transitiva***: $\forall x, y, z \in X,\ x \sim y \land y \sim z \implies x \sim z$

Definizione di classe di equivalenza: sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme X e $x \in X$. La classe di equivalenza di x rispetto a $\sim$ è l'insieme:

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\} \tag{1.6}$$

Definizione di insieme quoziente: sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme X. L'insieme quoziente di X rispetto a $\sim$ è l'insieme:

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\} \tag{1.7}$$

Definizione di funzione di proiezione: sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme X. La funzione di proiezione è la funzione:

$$\pi : X \to X/\sim \quad \text{tale che} \quad \pi(x) = [x] \tag{1.8}$$

Capitolo 2

Campo Complesso

2.1 Campo Complesso

Capitolo 3

Limiti di Funzioni

3.1 Limiti di Funzioni

Il concetto di limite è la base per lo studio delle qualita qualitative delle funzioni matematiche. In questo capitolo si studierà il concetto di limite di una funzione in un punto, che porterà il concetto di continuità di una funzione in un punto.

3.1.1 intervalli limitati

abbiamo 4 tipi di intervalli limitati:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

3.1.2 intervalli illimitati

abbiamo 5 tipi di intervalli illimitati:

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

3.1.3 Teorema del Confronto

Esempio di teorema del Confronto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} \tag{3.1}$$

Visto che i valori del $sin(x)$ sono compresi tra -1 e 1 per $\forall x \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \tag{3.2}$$

Per il teorema del confronto, se:

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{3.3}$$

allora:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \tag{3.4}$$

Capitolo 4

Funzioni Continue

4.1 Funzioni Continue

Per definire una funzione continua e parlare quindi continuità di una funzione dobbiamo definire delle condizioni che la funzione dovrà rispettare per essere definita continua in un punto: partendo da questo preambolo:

$$f(x) : X \to Y \quad x_0 \in X \tag{4.1}$$

le condizioni sono:

$$1)\exists f(x_0) \qquad 2)\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \qquad 3)f(x_0) = l \tag{4.2}$$

Capitolo 5

Successioni ricorsive

5.1 Successioni ricorsive