Università di Catania

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Ettore Majorana"

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Alessandro Consoli
Sonia Facciolà
Joey Butchers

Appunti di Analisi I

Appunti di Analisi I

Anno Accademico 2024/2025

Indice

Appunti di Analisi I

Anno 2024/2025

Capitolo 1

Funzioni e Insiemi numerici

1.1 Introduzione

Presi due insiemi X e Y e f una funzione che associa ad ogni elemento di X ***uno e uno solo*** elemento di Y, la terna ordinata (X, Y, f) è detta funzione. Il primo insieme è detto ***dominio*** della funzione, il secondo ***codominio*** e l'insieme dei valori che la funzione assume è detto ***immagine*** della funzione. Per indicare la funzione si usa la notazione:

$$f : X \to Y \tag{1.1}$$

dove x indica il generico elemento di X e $f(x)$ il corrispondente elemento di Y. Se $f(x_0) = y_0$ si dice che y_0 è l'immagine di x_0 e si scrive $y_0 = f(x_0)$. ***Definizione di prolungamento***:

Definizione 1.1
di una funzione: siano X, Y, Z tre insiemi e $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni. Si dice che g è il prolungamento di f se:

$$g(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X \tag{1.2}$$

Definizione di funzione suriettiva:

Definizione 1.2
si dice suriettiva se ogni elemento del codominio Y ha almeno un elemento nel dominio X che lo mappa su di esso:

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \text{tale che} \quad f(x) = y \tag{1.3}$$

Definizione di funzione iniettiva:

Definizione 1.3
si dice iniettiva se ad ogni elemento del dominio X corrisponde un solo elemento del codominio Y:

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \text{tali che} \quad x_1 \neq x_2 \quad \text{allora} \quad f(x_1) \neq f(x_2) \tag{1.4}$$

Definizione 1.4
Diciamo che f ha una corrispondenza biunivoca tra X e Y se è sia suriettiva che iniettiva.

Esempio 1.1

- $f(x) = x^2$ è una funzione suriettiva ma non iniettiva.
- $f(x) = x^3$ è una funzione suriettiva e iniettiva.
- $f(x) = \sin(x)$ è una funzione suriettiva ma non iniettiva.
- $f(x) = \exp(x)$ è una funzione suriettiva e iniettiva(corrispondeza biunivoca).

1.2 Relazioni di equivalenza

Una relazione di equivalenza è una relazione binaria $\sim$ su un insieme X che soddisfa le seguenti proprietà:

Definizione 1.5

- ***Riflessiva***: $\forall x \in X,\ x \sim x$
- ***Simmetrica***: $\forall x, y \in X,\ x \sim y \implies y \sim x$
- ***Transitiva***: $\forall x, y, z \in X,\ x \sim y \land y \sim z \implies x \sim z$

Definizione di classe di equivalenza:

Definizione 1.6
sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme X e $x \in X$. La classe di equivalenza di x rispetto a $\sim$ è l'insieme:

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\} \tag{1.5}$$

Definizione di insieme quoziente:

Definizione 1.7
sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme X. L'insieme quoziente di X rispetto a $\sim$ è l'insieme:

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\} \tag{1.6}$$

Definizione di funzione di proiezione:

Definizione 1.8
sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme X. La funzione di proiezione è la funzione:

$$\pi : X \to X/\sim \quad \text{tale che} \quad \pi(x) = [x] \tag{1.7}$$

Definizione di funzione inversa:

Definizione 1.9
sia $f : X \to Y$ una funzione. Si dice che f è invertibile se è suriettiva e iniettiva. In tal caso diciamo che è invertibile e che la sua inversa è $f^{-1} : Y \to X$ tale che:

$$y = f^{-1}(x) \quad \forall x \in X \tag{1.8}$$

1.2.1 Funzioni Monotòne

Parlando di monotonia di una funzione nel suo insieme A possiamo distinguere 4 casi:

Definizione 1.10
Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è monotòna se $\forall x_1, x_2 \in A$ vale:

$$f \text{ è crescente in } A \text{ se } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \tag{1.9}$$
$$f \text{ è strettamente crescente in } A \text{ se } x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \tag{1.10}$$
$$f \text{ è decrescente in } A \text{ se } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \tag{1.11}$$
$$f \text{ è strettamente decrescente in } A \text{ se } x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \tag{1.12}$$
$$f \text{ è costante in } A \text{ se } x_1, x_2 \in A \implies f(x_1) = f(x_2) \tag{1.13}$$

Esempio 1.2

- $f(x) = x^2$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$
- $f(x) = x^3$ è crescente in $\mathbb{R}$
- $f(x) = \sin(x)$ è crescente in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- $f(x) = e^x$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$

Capitolo 2

Campo Complesso

2.1 Numeri Complessi

Visto che $\mathbb{R}$ ***non è algebricamente chiuso***(vale a dire che non tutti i polinomi hanno radici in $\mathbb{R}$).È possibile estendere il campo dei numeri reali in modo da includere le radici di tutti i polinomi. Questo campo è il campo dei numeri complessi, indicato con $\mathbb{C}$.

2.2 Definizione

Per definire un campo, vanno a loro volta definite 2 oparazioni e soddisfatte 9 proprioetà.

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \rightarrow$ operazione di $\mathbb{R}$ già nota.
- $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
- elemento neutro 0 = (1,0)
- inverso? $\rightarrow$ prendiamo $(a, b) \neq (0, 0) \rightarrow \exists(x, y) : (a, b)(x, y) = (1, 0) \rightarrow (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \rightarrow ax - by = 1 \wedge ay + bx = 0 \rightarrow x = \frac{a}{a^2+b^2} \wedge y = \frac{-b}{a^2+b^2}$

Capitolo 3

Limiti di Funzioni

3.1 Limiti di Funzioni

Il concetto di limite è la base per lo studio delle qualita qualitative delle funzioni matematiche. In questo capitolo si studierà il concetto di limite di una funzione in un punto, che porterà il concetto di continuità di una funzione in un punto.

3.1.1 intervalli limitati

abbiamo 4 tipi di intervalli limitati:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

3.1.2 intervalli illimitati

abbiamo 5 tipi di intervalli illimitati:

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

3.1.3 Teorema del Confronto

Esempio 3.1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} \tag{3.1}$$

Visto che i valori del $sin(x)$ sono compresi tra -1 e 1 per $\forall x \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \tag{3.2}$$

Per il teorema del confronto, se:

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{3.3}$$

allora:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \tag{3.4}$$

Capitolo 4

Funzioni Continue

4.1 Funzioni Continue

Per definire una funzione continua e parlare quindi continuità di una funzione dobbiamo definire delle condizioni che la funzione dovrà rispettare per essere definita continua in un punto: partendo da questo preambolo:

$$f(x) : X \to Y \quad x_0 \in X \tag{4.1}$$

le condizioni sono:

$$1)\exists f(x_0) \qquad 2)\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \qquad 3) f(x_0) = l \tag{4.2}$$

Capitolo 5

Successioni

5.1 Successioni Monotòne

Definizione 5.1
Una successione $\{a_n\}$ si dice ***monotòna crescente*** se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq a_{n+1}$, ovvero se i termini della successione sono in ordine crescente.

Definizione 5.2
Analogamente si dice ***monotòna decrescente*** se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \geq a_{n+1}$, ovvero se i termini della successione sono in ordine decrescente.

Quando cerchiamo di capire se la nostra successione di termine generale a_n è monotòna crescente o decrescente una delle possibilità è quella di studiare la funzione associata alla successione.

Definizione 5.3
Sia $\{a_n\}$ una successione di termini reali e sia $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una funzione reale. Se $\psi(x) = a_x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora la successione $\{a_n\}$ è monotòna crescente se e solo se la funzione ψ è crescente.

Si applica un ragionamento analogo per le successioni monotòne decrescenti. Per calcolare la monotònia di una (funzione)successione possiamo anche utilizzare il concetto di derivata. Quindi al fine di studiare la monotònia di una successione possiamo:

- Studiare la successione direttamente.
- Studiare la funzione associata alla successione.
- Studiare la derivata della funzione associata alla successione.

Esempio 5.1

Studiamo la monotònia della successione $\{a_n\}$ definita da $a_n = n^2$.

- Studiamo la successione direttamente: $a_n = n^2$ è una successione crescente.
- Studiamo la funzione associata alla successione: $\psi(x) = x^2$ è una funzione crescente.
- Studiamo la derivata della funzione associata alla successione: $\psi'(x) = 2x$ è una funzione crescente.

studiando il segno della derivata delle $\psi'(x)$ possiamo concludere che la successione $\{a_n\}$ è crescente. Perchè la disequaizone $2x > 0$ è verificata per ogni $x > 0$.

Approfondimento 5.1

riconsiderando la funzione come una successione possiamo facilmete verificare anche la successione visto che i termini x della funzione sono numeri naturali, Quindi viene verificata anche per tutte le n della a_n Saltando il primo termine $n = 0$.

Esempio 5.2

Studiamo la monotònia della successione $\{a_n\}$ definita da $a_n = \frac{1}{n}$.

- Studiamo la successione direttamente: $a_n = \frac{1}{n}$ è una successione decrescente.
- Studiamo la funzione associata alla successione: $\psi(x) = \frac{1}{x}$ è una funzione decrescente.
- Studiamo la derivata della funzione associata alla successione: $\psi'(x) = -\frac{1}{x^2}$ è una funzione decrescente.

Capitolo 6

Serie

6.1 Serie Numeriche

Questo capitolo tratta delle serie numeriche, ovvero di somme infinite di numeri reali.

Definizione 6.1
Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. La somma parziale di ordine n è definita come:

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$$

si dice serie una successione di somme parziali, ovvero:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Se esiste il limite della successione delle somme parziali, ovvero:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S$$

allora si dice che la serie converge e si scrive:

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_n$$

altrimenti si dice che la serie diverge. Se la serie converge, si dice che la somma della serie è S, Allora la successione $\{a_n\}$ tende a zero, Quindi la successione delle somme parziali è limitata. Quand'è che una serie converge?

6.1.1 Condizioni Affinchè una Serie Converga

- Se la serie converge, allora la successione $\{a_n\}$ tende a zero.

- Se la serie converge, allora la successione delle somme parziali è limitata.

Per verificare queste condizioni la prima cosa da notare anche ad occhio è se la successione $\{a_n\}$ tende a zero. Se non tende a zero, la serie ***non può convergere*** perchè sarebbe come sommare infiniti numeri diversi da zero. Quando $\{a_n\}$ tende a zero, la serie può comunque non convergere, quindi è condizione necessaria ma non sufficente.

Approfondimento 6.1
Se la serie di termine generale a_k e b_k sono regolari e se:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \tag{6.1}$$

ha significato nella retta estesa $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ allora:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \tag{6.2}$$

Approfondimento 6.2
se la serie di termine generale a_k è regolare, anche la serie di termine generale $c \cdot a_k$ è regolare per ogni $c \in \mathbb{R}$ e si ha:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \tag{6.3}$$

Definizione 6.2
Se le due serie convergono, allora la serie della somma dei termini converge e la somma della serie è la somma delle somme delle due serie. Se la serie converge, allora la serie moltiplicata per un numero reale converge e la somma della serie è il numero reale moltiplicato per la somma della serie.

6.1.2 La Serie Geomentrica

Definizione 6.3
Una serie geometrica è una serie della forma:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots \tag{6.4}$$

La serie geometrica converge se e solo se $|x| < 1$ e in tal caso la somma della serie è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

perche facendo il limite si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1 \end{cases} \tag{6.5}$$

Esempio 6.1: Serie Geometrica

Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Questa è una serie geometrica con $x = 1/2$, quindi converge perchè $|1/2| < 1$ e la somma della serie è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

6.1.3 La Serie Armonica

Definizione 6.4

La serie armonica è una serie della forma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

La serie armonica diverge, ovvero non converge, infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

Esempio 6.2: Serie Armonica

Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Questa è una serie armonica, quindi diverge.

DIMOSTRAZIONE CON INTEGRALE DA METTERE DOPO AVERLI CAPITI

6.2 Criteri di Convergenza

6.2.1 Criterio del Confronto

Definizione 6.5

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty \to \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$.

Quindi se confrontiamo una serie a_n con una serie b_n e la serie b_n converge, allora anche la serie a_n converge. Se la serie b_n diverge, allora anche la serie a_n diverge. Per utilizzare il criterio del confronto è necessario trovare una serie b_n che sia più semplice da trattare rispetto alla serie a_n. Per farlo possiamo usare i limiti quindi:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \tag{6.6}$$

- se $0 < l < +\infty$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere(in genere si sceglie una serie b_n convergente per "ingabbiare" la prima).
- se $l = 0$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge $\to \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- se $l = +\infty$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge $\to \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Approfondimento 6.3

se la serie b_n diverge si possono fare due cose:

- se a_n è "infinito di ordine superiore" rispetto alla serie b_n allora se il limite tende a zero allora la serie a_n diverge.
- se a_n è "infinito di ordine inferiore" rispetto alla serie b_n allora se il limite tende a zero allora la serie a_n converge.

quindi per $l = 0$ si ha che la serie a_n diverge e, per $l = +\infty$ si ha che la serie a_n converge.

Approfondimento 6.4

se $l = 0$ diamo che la serie a_n converge perchè la serie b_n è "infinito di ordine superiore" rispetto alla serie a_n, quindi se il limite tende a zero, visto che la serie b_n converge, allora anche la serie a_n converge(perchè è "più piccola" della b_n). Con lo stesso regionamento possiamo spiegare perchè se il limite fa $l = +\infty$ allora la serie a_n diverge.

Esempio 6.3: Criterio del Confronto

Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Questa è una serie armonica, quindi diverge. Ma possiamo confrontarla con la serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{6.7}$$

Quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ diverge.

6.2.2 Criterio del Rapporto

Definizione 6.6

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo esista il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Allora: se $l < 1$ la serie converge, se $l > 1$ la serie diverge, se $l = 1$ il criterio non ci da alcuna indicazione sul carattere della serie.

Spesso se questo criterio non ci da indicazione sul carattere della serie allora neanche il criterio della radice.

Esempio 6.4: Criterio del Rapporto

Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Applichiamo il criterio del rapporto: in questo caso si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \tag{6.8}$$

Quindi per il criterio del rapporto $0 < 1$ quindi la serie converge.

6.2.3 Criterio della Radice

Definizione 6.7

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo esista il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Allora: se $l < 1$ la serie converge, se $l > 1$ la serie diverge, se $l = 1$ il criterio non ci da alcuna indicazione sul carattere della serie.

Spesso se questo criterio non ci da indicazione sul carattere della serie allora neanche il criterio del rapporto

Esempio 6.5: Criterio della Radice

Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Applichiamo il criterio della radice: in questo caso si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{6.9}$$

Quindi per il criterio della radice $0 < 1$ quindi la serie converge.

6.2.4 Criterio di Cauchy

Definizione 6.8

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq m \geq n_0$ si ha:

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon$$

Esempio 6.6: Criterio di Cauchy

Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Applichiamo il criterio di Cauchy: in questo caso si ha che:

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| = \left| \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon \tag{6.10}$$

Quindi per il criterio di Cauchy la serie converge.

6.3 Serie Alternate

Definizione 6.9
Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ si dice serie alternata.

Approfondimento 6.5
Una serie alternata è una serie in cui i termini sono alternativamente positivi e negativi.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \tag{6.11}$$

6.3.1 Criterio di Leibniz

Il criterio di Leibniz è un criterio di convergenza per le serie alternate, ovvero serie in cui i termini sono alternativamente positivi e negativi. Questo criterio ci dice che se i termini della serie sono decrescenti e il loro limite tende a zero allora la serie converge.

Definizione 6.10: Criterio di Leibniz
Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tali che:

- $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- $\{a_n\}$ sia decrescente.
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Allora la serie alternata $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge.

Esempio 6.7: Criterio di Leibniz
Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

Applichiamo il criterio di Leibniz: in questo caso si ha che:

- $a_n = \frac{1}{n}$ è decrescente.
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Quindi per il criterio di Leibniz la serie converge.

Approfondimento 6.6

in questo caso possiamo verificare $\frac{1}{n}$ è decrescente perchè oltre a verificarlo ad occhio possiamo calcolare la derivata della funzione associata e vedere che è negativa.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \tag{6.12}$$

6.4 Convergenza Assoluta

Definizione 6.11

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

Approfondimento 6.7

Se una serie converge assolutamente, allora converge anche la serie stessa.

Esempio 6.8: Convergenza Assoluta

Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Questa è una serie alternata, quindi converge per il criterio di Leibniz. Ma se prendiamo il valore assoluto dei termini:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Questa è una serie armonica, quindi diverge. Quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge ma non converge assolutamente.

Approfondimento 6.8

togliamo n a esponente perchè senza il segno meno dell'uno risulta comunque uno(1^n).

Approfondimento 6.9

Se una serie converge assolutamente, allora converge anche la serie stessa. Ma se una serie converge, non è detto che converga anche assolutamente.

6.5 Esercizi Svolti Sulle Serie

Esempio 6.9

Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^5}$$

Applichiamo il criterio della radice: in questo caso si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^5}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^{5/n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^{5/n}} = 0 \tag{6.13}$$