Università di Catania

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Ettore Majorana"

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Alessandro Consoli
Sonia Facciolà
Joey Butchers

Appunti di Analisi I

Appunti di Analisi I

Anno Accademico 2024/2025

Indice

Appunti di Analisi I

Alessandro Consoli, Sonia Facciolà e Joey Butchers

Anno 2024/2025

Capitolo 1

Funzioni e Insiemi numerici

1.1 Introduzione

Presi due insiemi X e Y e f una funzione che associa ad ogni elemento di X ***uno e uno solo*** elemento di Y, la terna ordinata (X, Y, f) è detta funzione. Il primo insieme è detto ***dominio*** della funzione, il secondo ***codominio*** e l'insieme dei valori che la funzione assume è detto ***immagine*** della funzione. Per indicare la funzione si usa la notazione:

$$f : X \to Y \tag{1.1}$$

dove x indica il generico elemento di X e $f(x)$ il corrispondente elemento di Y. Se $f(x_0) = y_0$ si dice che y_0 è l'immagine di x_0 e si scrive $y_0 = f(x_0)$.

Definizione di prolungamento:

Definizione 1.1
di una funzione: siano X, Y, Z tre insiemi e $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni. Si dice che g è il prolungamento di f se:

$$g(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X \tag{1.2}$$

Definizione di funzione suriettiva:

Definizione 1.2
si dice suriettiva se ogni elemento del codominio Y ha almeno un elemento nel dominio X che lo mappa su di esso:

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \text{tale che} \quad f(x) = y \tag{1.3}$$

Definizione di funzione iniettiva:

Definizione 1.3
si dice iniettiva se ad ogni elemento del dominio X corrisponde un solo elemento del codominio Y:

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \text{tali che} \quad x_1 \neq x_2 \quad \text{allora} \quad f(x_1) \neq f(x_2) \tag{1.4}$$

Definizione 1.4
Diciamo che f ha una corrispondenza biunivoca tra X e Y se è sia suriettiva che iniettiva.

Esempio 1.1

- $f(x) = x^2$ è una funzione suriettiva ma non iniettiva.
- $f(x) = x^3$ è una funzione suriettiva e iniettiva.
- $f(x) = \sin(x)$ è una funzione suriettiva ma non iniettiva.
- $f(x) = \exp(x)$ è una funzione suriettiva e iniettiva(corrispondeza biunivoca).

1.2 Relazioni di equivalenza

Una relazione di equivalenza è una relazione binaria $\sim$ su un insieme X che soddisfa le seguenti proprietà:

Definizione 1.5

- ***Riflessiva***: $\forall x \in X,\ x \sim x$
- ***Simmetrica***: $\forall x, y \in X,\ x \sim y \implies y \sim x$
- ***Transitiva***: $\forall x, y, z \in X,\ x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$

Definizione di classe di equivalenza:

Definizione 1.6
sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme X e $x \in X$. La classe di equivalenza di x rispetto a $\sim$ è l'insieme:

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\} \tag{1.5}$$

Definizione di insieme quoziente:

Definizione 1.7
sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme X. L'insieme quoziente di X rispetto a $\sim$ è l'insieme:

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\} \tag{1.6}$$

Definizione di funzione di proiezione:

Definizione 1.8
sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme X. La funzione di proiezione è la funzione:

$$\pi : X \to X/\sim \quad \text{tale che} \quad \pi(x) = [x] \tag{1.7}$$

Definizione di funzione inversa:

Definizione 1.9
sia $f : X \to Y$ una funzione. Si dice che f è invertibile se è suriettiva e iniettiva. In tal caso diciamo che è invertibile e che la sua inversa è $f^{-1} : Y \to X$ tale che:

$$y = f^{-1}(x) \quad \forall x \in X \tag{1.8}$$

1.2.1 Funzioni Monotòne

Parlando di monotonia di una funzione nel suo insieme A possiamo distinguere 4 casi:

Definizione 1.10
Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è monotòna se $\forall x_1, x_2 \in A$ vale:

$$f \text{ è crescente in } A \text{ se } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \tag{1.9}$$
$$f \text{ è strettamente crescente in } A \text{ se } x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \tag{1.10}$$
$$f \text{ è decrescente in } A \text{ se } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \tag{1.11}$$
$$f \text{ è strettamente decrescente in } A \text{ se } x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \tag{1.12}$$
$$f \text{ è costante in } A \text{ se } x_1, x_2 \in A \implies f(x_1) = f(x_2) \tag{1.13}$$

Esempio 1.2

- $f(x) = x^2$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$
- $f(x) = x^3$ è crescente in $\mathbb{R}$
- $f(x) = \sin(x)$ è crescente in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- $f(x) = e^x$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$

Capitolo 2

Campo Complesso

2.1 Numeri Complessi

Visto che $\mathbb{R}$ ***non è algebricamente chiuso***(vale a dire che non tutti i polinomi hanno radici in $\mathbb{R}$).È possibile estendere il campo dei numeri reali in modo da includere le radici di tutti i polinomi. Questo campo è il campo dei numeri complessi, indicato con $\mathbb{C}$.

2.2 Definizione

Per definire un campo, vanno a loro volta definite 2 oparazioni e soddisfatte 9 proprioetà.

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \rightarrow$ operazione di $\mathbb{R}$ già nota.
- $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
- elemento neutro 0 = (1,0)
- inverso? $\rightarrow$ prendiamo $(a, b) \neq (0, 0) \rightarrow \exists (x, y) : (a, b)(x, y) = (1, 0) \rightarrow (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \rightarrow ax - by = 1 \wedge ay + bx = 0 \rightarrow x = \frac{a}{a^2+b^2} \wedge y = \frac{-b}{a^2+b^2}$

Capitolo 3

Limiti di Funzioni

3.1 Limiti di Funzioni

Il concetto di limite è la base per lo studio delle qualita qualitative delle funzioni matematiche. In questo capitolo si studierà il concetto di limite di una funzione in un punto, che porterà il concetto di continuità di una funzione in un punto.

3.1.1 intervalli limitati

abbiamo 4 tipi di intervalli limitati:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

3.1.2 intervalli illimitati

abbiamo 5 tipi di intervalli illimitati:

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

3.1.3 Teorema del Confronto

Esempio 3.1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} \tag{3.1}$$

Visto che i valori del $sin(x)$ sono compresi tra -1 e 1 per $\forall x \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \tag{3.2}$$

Per il teorema del confronto, se:

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{3.3}$$

allora:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \tag{3.4}$$

Capitolo 4

Funzioni Continue

4.1 Funzioni Continue

Per definire una funzione continua e parlare quindi continuità di una funzione dobbiamo definire delle condizioni che la funzione dovrà rispettare per essere definita continua in un punto: partendo da questo preambolo:

$$f(x) : X \to Y \quad x_0 \in X \tag{4.1}$$

le condizioni sono:

$$1)\exists f(x_0) \qquad 2)\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \qquad 3) f(x_0) = l \tag{4.2}$$

Capitolo 5

Successioni ricorsive

5.1 Successioni definite per ricorrenza

Quando abbiamo delle successioni definite per ricorrenza, dobbiamo trovare un modo per calcolare i termini successivi. Per fare ciò, possiamo usare il metodo di induzione.
Esempio 1
Consideriamo la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_n = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$$

Capitolo 6

Serie

6.1 Serie Numeriche

Questo capitolo tratta delle serie numeriche, ovvero di somme infinite di numeri reali.

Definizione 6.1
Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. La somma parziale di ordine n è definita come:

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$$

si dice serie una successione di somme parziali, ovvero:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Se esiste il limite della successione delle somme parziali, ovvero:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S$$

allora si dice che la serie converge e si scrive:

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_n$$

altrimenti si dice che la serie diverge. Se la serie converge, si dice che la somma della serie è S, Allora la successione $\{a_n\}$ tende a zero, Quindi la successione delle somme parziali è limitata. Quand'è che una serie converge?

6.1.1 Criteri di Convergenza

- Se la serie converge, allora la successione $\{a_n\}$ tende a zero.

- Se la serie converge, allora la successione delle somme parziali è limitata.

Per verificare queste condizioni la prima cosa da notare anche ad occhio è se la successione $\{a_n\}$ tende a zero. Se non tende a zero, la serie ***non può convergere*** perchè sarebbe come sommare infiniti numeri diversi da zero. Quando $\{a_n\}$ tende a zero, la serie può comunque non convergere, quindi è condizione necessaria ma non sufficente.

6.1.2 La serie geomentrica

Definizione 6.2
Una serie geometrica è una serie della forma:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots \tag{6.1}$$

La serie geometrica converge se e solo se $|x| < 1$ e in tal caso la somma della serie è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

perche facendo il limite si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1 \end{cases} \tag{6.2}$$

Esempio 6.1: Serie Geometrica
Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Questa è una serie geometrica con $x = 1/2$, quindi converge perchè $|1/2| < 1$ e la somma della serie è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

6.1.3 Criterio del Confronto

6.1.4 Criterio del Rapporto

Definizione 6.3

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo esista il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Allora: se $l < 1$ la serie converge, se $l > 1$ la serie diverge, se $l = 1$ il criterio non ci da alcuna indicazione sul carattere della serie.

Spesso se questo criterio non ci da indicazione sul carattere della serie allora neanche il criterio della radice.

Esempio 6.2: Criterio del Rapporto

Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Applichiamo il criterio del rapporto: in questo caso si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \tag{6.3}$$

Quindi per il criterio del rapporto $0 < 1$ quindi la serie converge.

6.1.5 Criterio della Radice

Definizione 6.4

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo esista il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Allora: se $l < 1$ la serie converge, se $l > 1$ la serie diverge, se $l = 1$ il criterio non ci da alcuna indicazione sul carattere della serie.

Spesso se questo criterio non ci da indicazione sul carattere della serie allora neanche il criterio del rapporto

Esempio 6.3: Criterio della Radice

Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Applichiamo il criterio della radice: in questo caso si ha che:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{1/n^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{6.4}$$

Quindi per il criterio della radice $0 < 1$ quindi la serie converge.

6.1.6 Criterio di Cauchy

Definizione 6.5

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq m \geq n_0$ si ha:

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon$$

Esempio 6.4: Criterio di Cauchy

Studiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Applichiamo il criterio di Cauchy: in questo caso si ha che:

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| = \left| \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon \tag{6.5}$$

Quindi per il criterio di Cauchy la serie converge.