FORMULARIO MDP

Alessandro Pioggia

7 novembre 2021

Indice

Sommario

Piacere so' Francesco.

Capitolo 1

Combinatoria

1.1 Combinatoria di base

1.1.1 Disposizioni

$|Disposizioni| = n_{(k)} = n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k-1)$

1.1.2 Permutazioni

$|Permutazioni| = n!$

1.1.3 Combinazioni

$|Combinazioni| = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)}$

1.1.4 Anagrammi

$|Anagrammi| = \binom{n}{a\ b\ c} = \dfrac{n!}{a!b!c!}$

1.1.5 Formula di Stifel

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

1.1.6 Numeri di fibonacci

$\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}} \binom{n-1-k}{k}$

1.1.7 Principio di inclusione-esclusione

$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{0 \neq I \notin \{1,2,...,n\}} (-1)^{|I|-1} \cdot \prod_{i \in I} A_i$

Caso complementare

$|(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)^C| = \sum_{I \in \{1,2,...,n\}} (-1)^| I| \cdot \prod_{i \in I} A_i$

1.2 Combinatoria avanzata

1.2.1 Funzioni iniettive

Sia $f : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., n\}$ una funzione iniettiva (m $\leq$ n)

$|funzioni\ iniettive| = n_m$

1.2.2 Funzioni suriettive

Sia $f : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., n\}$ una funzione suriettiva

$|funzioni\ suriettive| = \sum_{k=0}^{n} () \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot (n-k)^m)$

1.2.3 Scombussolamenti

$|scombussolamenti| = \sum_{i=2}^{n} (-1)^i \cdot n_{n-i}$

1.2.4 Numeri di Bell

$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot B_{n-k}$

1.2.5 Numeri di Stirling

$S_{n,k}$ = numero di partizioni di { 1, 2, ..., n} in k blocchi
$S_{n,k} = k \cdot S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1}$

Capitolo 2

Statistica

2.1 Media

2.1.1 Campionaria

$\bar{x} = \bar{x_n} = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$

2.1.2 Ponderata

$\bar{x_w} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_n x_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$

2.2 Varianza

2.2.1 Definizione

$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

2.2.2 Formula

$\sigma_x^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2$

2.3 Covarianza

$\sqrt{Varianza}$

Capitolo 3

Probabilità

3.1 Spazi di probabilità

3.1.1 Probabilità uniforme

- P(A) $= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{Casi\ possibili}{Casi\ totali}$

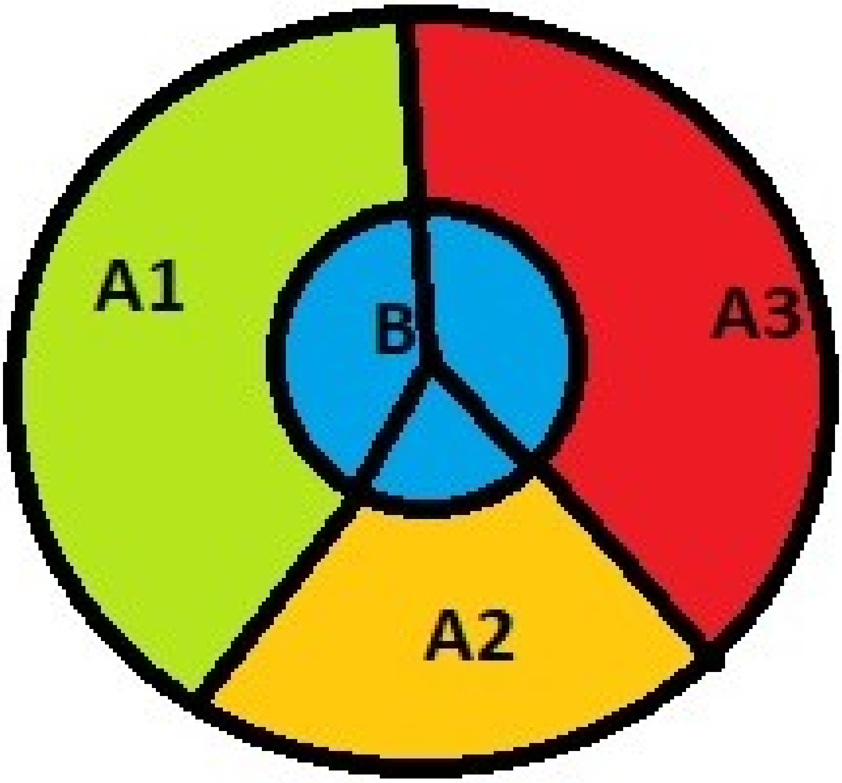
3.1.2 Probabilità condizionale

- $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ (dipendenza)
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (indipendenza)
- $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$
- $P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (valido se c'è indipendenza)

3.1.3 Formula di bayes

- $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$

3.1.4 Probabilità totali



$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$

$= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$

3.2 Variabili aleatorie discrete

3.2.1 Densità discreta astratta

Una funzione $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
è una densità discreta astratta se e solo se:

- $p(h) \neq 0$;
- $p(h) \geqslant 0 \quad \forall \quad h \in \mathbb{R}$;
- $\sum\limits_{h \in \mathbb{R}} p(h) = 1$;

3.2.2 Distribuzioni discrete

Densità uniforme ($d_x(k)$)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n} & k = 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Densità di Bernoulli($p_x(k)$)

$$\begin{cases} P(A) & k = 1 \\ 1 - P(A) & k = 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Densità binomiale ($p_x(k)$)

$$\begin{cases} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} & k = 0, ..., n \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Densità ipergeometrica (si considera a = successo)

$$\begin{cases} \dfrac{\binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}} & k = max(n-b), ..., min(n, b) \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Densità geometrica modificata (cons. una sequenza con k - 1 insuccessi + 1 successo)

$$\begin{cases} (1-p)^{k-1} \cdot p & k = 1, 2, 3, ... \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Densità geometrica standard (cons. una sequenza con k insuccessi prima di arrivare al successo)

$$\begin{cases} (1-p)^{k} \cdot p & k = 1, 2, 3, ... \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Densità di Poisson

$$\begin{cases} e^{-\phi} \cdot \dfrac{\phi^k}{k!} & k = 1, 2, 3, .. \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

3.3 Variabili discrete multidimensionali

3.3.1 Funzione di ripartizione

Sia $F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora la sua funzione di ripartizione è la seguente :

- $F_x = P(x \leq t)$

3.3.2 Funzione di ripartizione del max

Siano S, T due variabili aleatorie indipendenti e $Z = max(S, T)$, Allora:

- $F_Z(t) = F_S(t) \cdot F_T(t)$

3.3.3 Funzione di ripartizione del min

Siano S, T due variabili aleatorie indipendenti e W = min(S, T), Allora:

- $(1 - F_x(k)) = (1 - F_S(t)) \cdot (1 - F_T(t))$

3.4 Valore atteso e varianza

3.4.1 Valore atteso

Definizione

- $E[x] = \sum_{h \in \mathbb{R}} d_x(h) \cdot h;$

Proprietà valore atteso

- $E[x + y] = E[x] + E[y]$
- $E[x \cdot y] = E[x] \cdot E[y]$ (valido $\leftrightarrow$ x e y indipendenti)

3.4.2 Varianza e covarianza

Definizione varianza

- $Var(x) = E[(x - E[x])^2]$

Definizione covarianza

- $Cov(x, y) = E[x] \cdot E[y]$

Proprietà varianza

- $Var(x) = E[x^2] - E[x]^2$
- $Var(x + y) = var(x) + var(y)$

Proprietà covarianza

- siano x, y indipendenti $\rightarrow Cov(x, y) = 0$

3.5 Variabili aleatorie continue

3.5.1 Densità continua

x v.a continua, la sua densità è una funzione:

$f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c :

$$\int_a^b f_x(s)\, ds = P(a \leq x \leq b)$$

3.5.2 Densità e funzione di ripartizione astratta

Densità continua astratta

- $f(s) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds = 1$

Funzione di ripartizione astratta

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c :

- $\lim_{-\infty} F(t) = 0$ e $\lim_{+\infty} F(t) = 1$
- F debolmente crescente

3.5.3 Valore atteso

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(s)\, s\ ds$$

Proprietà

- $E[ax + bx] = aE[x] + bE[y]$
- $E[x \cdot y] = E[x] \cdot E[y]$
- $E[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s) f_x(s)$ (se ϕ:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

3.5.4 Varianza

$Var(x) = E[x^2] - E[x]^2$

Proprietà

- $Var(aX) = a^2 \cdot Var(X)$
- $Var(x + y) = Var(x) + Var(y)$

3.5.5 Variabili uniformi continue

$X\tilde{}U([a, b])$

- $F_x(s) = \frac{s - a}{b - a}$
- $f_x(s) = \frac{1}{b - a}$
- $E[x] = \frac{a + b}{2}$
- $Var(x) = \frac{(b - a)^2}{12}$

3.5.6 Variabili esponenziali

$X\tilde{}Exp(a)$

- $F_x(s) = 1 - e^{as}$
- $f_x(s) = a \cdot e^{-as}$
- $E[x] = \frac{1}{a}$
- $Var(x) = \frac{1}{a^2}$

3.5.7 Variabili normali(gaussiane)

Standard : $\zeta_0 \tilde{} N(0,1)$

Generiche : $\zeta \tilde{} N(\mu, \sigma^2)$

Proprietà

- $\zeta = \mu + \sigma \cdot \zeta_0$
- $F_{\zeta_0}(s) = \phi(s)$ (utilizziamo la tabella normale standard)
- $\phi(-s) = 1 - \phi(s)$
- $E[\zeta] = \mu + \sigma \cdot E[\zeta_0]$
- $s \geq 4 \rightarrow \phi(s) = 0$
- $Var(\zeta) = Var(\mu + \sigma \cdot \zeta_0) = Var(\sigma\zeta_0) = \sigma Var(\zeta_0) = \sigma^2$