FORMULARIO MDP

Alessandro Pioggia

19 novembre 2021

Indice

0.1 Combinatoria - Lezione 1

0.1.1 Cos'è la cardinalità di un insieme? Cos'è una corrispondenza biunivoca tra insiemi? Cosa significa insieme numerabile?

Supponendo di avere un insieme A con n elementi, n è la cardinalità. Supponendo di avere due insiemi A e B, definiamo una funzione $f(A) : B$, se è sia suriettiva che iniettiva i due insiemi sono in corrispondenza biunivoca(ovvero è possibile associare a ciascun elemento di un insieme uno ed uno solo elemento dell'altro). Un insieme viene detto numerabile se i suoi elementi sono in numero finito o se possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali. Se riesco ad elencare un insieme tramite un elenco infinito è numerabile e viceversa.

0.1.2 Esempio di insieme numerabile e non numerabile

Esempio di insiemi numerabili:

- $P = \{0, 2, 4, 6, ...\} \leftrightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ con $f(x) = 2y$
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ..\} \leftrightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ con $f(z) = 2z - 1$ se $z \geq 0$, $f(z) = -2z$ se $z \leq 0$

Esempio di insiemi non numerabili:

- L'insieme $\mathbb{R}$
- $A = \{$ Sequenze binarie di lunghezza infinita $\}$

0.1.3 Che cos'è il prodotto cartesiano?

Dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano rappresentato da $A \times B$ non è altro che l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ (Dunque (a, b) != (b, a)). Formalmente : $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

0.1.4 Quanti sottoinsiemi ha un insieme con n elementi?

Ne ha 2^n, il risultato lo si ottiene conoscendo l'insieme delle parti(si indica con $p(A)$) e le sue proprietà. L'insieme delle parti è appunto il numero di sottoinsiemi di un dato insieme, per giungere alla risposta occorre sfruttare una logica(supponendo di considerare un insieme A con cardinalità n). Vogliamo dimostrare che : se $|A| = n$, allora $|p(A)| = 2^n$, dunque ragioniamo in questi termini :

- fra $p(A)$ e $\{0,1\}^n$ c'è una corrispondenza biunivoca.
- dal principio di uguaglianza abbiamo che, dal momento che esiste una corr. biunivoca, $|p(A)| = |\{0,1\}^n|$
- dal principio della moltiplicazione otteniamo che $|\{0,1\}^n| = |\{0,1\}|^n = 2^n$

0.1.5 Che cos'è una lista?

Gli elementi di una potenza cartesiana si dicono liste o sequenze in A e hanno cardinalità n. Esempio :
A^3 ha una lunghezza delle sequenze o liste pari a 3

0.1.6 Parla dei prodotti condizionati

$S \subseteq A \times B$, S è un prodotto condizionato $\leftrightarrow$ posso scegliere la prima coordinata di un elemento di S in n modi e la seconda coordinata, una volta fissata la prima, in m.
Se $S \subseteq A \times B$ è un prodotto condizionato di tipo (n, m) allora $|S| = n \cdot m$.
Dimostrazione :

- dividiamo S in n sottoinsiemi disgiunti tali che : $\{S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n\}$
- $S_i = \{$ tutti gli elementi di S con prima coordinata $a_i \in A\}$
- per definizione abbiamo dunque che $|S_i| = m$
- dal momento che i sottoinsiemi considerati sono disgiunti(dal momento che rispettano le condizioni del prodotto condizionato), otteniamo che $S = \{S_1 + S_2 + ... + S_n\}$
- $|S| = \{|S_1| + |S_2| + ... + |S_n|\} = \{m + m + ... + m\} = m \cdot n$

0.1.7 Che cosa sono le disposizioni?

Una disposizione di lunghezza k su un insieme di cardinalità n, è una sequenza in cui all'interno non ci sono valori ripetuti. Formalmente : $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ con $a_i \neq a_j$ e $j = i + 1$ è una disposizione di lunghezza k.
Una disposizione lunga k su un insieme di n elementi è esprimibile come prodotto condizionato di tipo : $(n, n-1, n-2, ..., n-k)$, questo perchè una volta che seleziono la prima coordinata, se la seconda deve essere distinta ho n-1 scelte e così via...

Dalla proprietà dei prodotti condizionati dimostrata in precedenza abbiamo che |disposizioni| = $(n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot ... \cdot n - k)$. Se ho k = n → |disposizioni| = n!, vengono chiamate permutazioni.

0.1.8 Definisci le combinazioni, illustra inoltre la correlazione che c'è fra esse e le disposizioni, di conseguenza mostra come contare il numero di combinazioni

Considerando un insieme A con $\{1, ..., n\}$ elementi, le combinazioni di A sono tutti i suoi sottoinsiemi di cardinalità k. Per contare il numero di combinazioni lunghe k di un insieme con n elementi è possibile sfruttare la correlazione che c'è fra disposizioni e combinazioni. Per ogni combinazione lunga k esistono esattamente k! disposizioni, infatti se mettiamo a funzione disposizioni e combinazioni otteniamo una funzione suriettiva(disposizioni → combinazioni). A questo proposito deduciamo che : $|combinazioni| = \frac{n_{(k)}}{k!}$.

0.1.9 Come possiamo contare con precisione il numero di anagrammi di una parola?

Possiamo sfruttare le combinazione di tipo (a, b, c), con |a| + |b| + |c| = n. Gli anagrammi di tipo (a, b, c) sono le sequenze ordinate in cui appare lo 0 a volte, l'1 b volte, il 2 c volte. Inoltre è possibile mettere in biezione le combinazioni di tipo (a, b, c) con le sequenze ternarie ordinate di sottoinsiemi(s_1, s_2, s_3), in cui $|s_1|$ = a, $|s_2|$ = b, $|s_3|$ = c.(In s_1 inserisco gli indice posizionali degli 0 che appaiono, di conseguenza lo faccio anche con s_2 e s_3). Inoltre abbiamo che $s_1 \cup s_2 \cup s_3 = \{0, ..., n\}$