



RELATÓRIO DE MÁQUINAS DE FLUXO

CALIBRAÇÃO DE VOLUME

SOARES, GUILHERME C.

REISDORFER, JEAN C.

RODRIGUES, KEVIN V. G.

ZANDONAI, RAFAEL

MARTINS, VINICIUS D. T.

GUARAPUAVA

MARÇO/2021



1. INTRODUÇÃO

Sabe-se que os instrumentos de medição são essenciais para a indústria, auxiliando na obtenção das medidas necessárias para garantir a qualidade no processo. Por esse motivo, entende-se a necessidade de ter os instrumentos nas condições adequadas para o uso, para não prejudicar o processo na indústria, e uma das formas de garantir isso é por meio da calibração.

A calibração consiste na comparação dos valores obtidos no seu instrumento com um valor padrão conhecido, ou com um outro instrumento de medição que pode servir como parâmetro de referência. Se os valores adotados como verdadeiros não coincidirem com os valores registrados, uma calibração do instrumento é necessária, ou uma curva de calibração deverá ser feita para relacionar os valores obtidos com os que deveriam ser mensurados.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Para contextualizar, no laboratório de Máquinas de Fluxo da UTFPR-GP existe um tanque de acrílico com capacidade máxima de 50 l, que está localizado acima de um reservatório que serve como depósito para ocasiões em que o tanque precisa ser esvaziado ou enchido. Dentro deste tanque há uma barra com uma rolha na sua ponta, de forma que ela é puxada e o líquido que está dentro pode escorrer para o reservatório. Também existe um apoio para a barra dentro do tanque, o que acaba ocupando uma pequena parcela de volume, porém, para fins deste relatório, sua interferência será desconsiderada.

O tanque tem a sua escala do lado de fora, chegando no máximo aos já mencionados 50 l, com uma resolução de 0,5 l. Na verdade, quando se está realizando a medição, o nível da água é a medida primária, e este, relacionado com a área superficial, resulta na medida do volume em litros, através da relação $V = A \cdot h$.

O experimento consiste em utilizar o método das transferências sucessivas de fluido, de litro em litro, a partir de um balão volumétrico de 1,0 l. Essa medida é considerada verdadeira, pois a sua incerteza está na ordem de ml, muito menor que o valor do balão volumétrico cheio. Por esse motivo, e considerando que o enchimento e o despejo da água foram feitos cuidadosamente, não haverá incertezas associadas a esse procedimento.

O tanque foi enchido sucessivamente com o balão volumétrico, até a sua capacidade máxima. Logo depois de cada enchimento, espera-se até que o fluido fique em equilíbrio,



tenta-se evitar o erro por paralaxe e realiza-se uma medição na escala, sendo anotada para posterior análise.

O que seria uma atividade prática de calibração no laboratório de Máquinas de Fluxo, devido à pandemia da Covid-19, acabou por se tornar um relatório em que os dados de semestres anteriores foram utilizados como referência, com algumas pequenas alterações feitas nas medições e incertezas em consequência de correções, a fim de tornar os valores um pouco mais condizentes. A seguir, serão apresentados os dados já corrigidos.

y_i	x_i	w_{xi}
0	-0.2	0.2
1	1	0.1
2	2	0.1
3	3.1	0.1
4	4	0.1
5	5	0.05
6	6.1	0.2
7	7.3	0.1
8	8.2	0.1
9	9.25	0.05
10	10.3	0.1
11	11.3	0.1
12	12.4	0.05
13	13.45	0.05
14	14.48	0.05
15	15.1	0.1
16	16.5	0.1
17	17.5	0.1
18	18.5	0.1
19	19.6	0.1
20	20.62	0.05
21	21.7	0.1
22	22.7	0.1
23	23.7	0.1
24	24.8	0.1
25	25.9	0.15
26	26.9	0.1
27	28	0.1
28	29.1	0.1
29	30.1	0.1
30	31.1	0.1
31	32.1	0.1



32	33.2	0.1
33	34.2	0.1
34	35.3	0.1
35	36.3	0.1
36	37.4	0.1
37	38.5	0.1
38	39.4	0.1
39	40.5	0.1
40	41.5	0.1
41	42.5	0.1
42	43.5	0.1
43	44.5	0.1
44	45.5	0.1
45	46.6	0.1
46	47.6	0.1
47	48.7	0.1
48	49.7	0.1

O objetivo é conseguir realizar a calibração da escala de volume com relação aos valores reais do balão volumétrico que são utilizados. Como se tem várias medições para diferentes volumes, cada medição possui uma incerteza associada, deve-se utilizar o método Qui-Square Modificado para representar a curva que melhor se adapta aos pontos, levando em conta todas as incertezas. Neste relatório, foi proposto a criação de uma curva polinomial de grau 1 e grau 5, respectivamente $V_1(v)$ e $V_5(v)$.

Para o primeiro caso, vamos considerar o polinômio de grau 1, que pode ser dado genericamente pela equação:

$$V_1(v) = a + bv \pm w_0$$

$V_1(v)$ é o valor da curva calibrada em função dos antigos valores encontrados (v), a e b são constantes que podem ser determinadas pelo método Qui-Square Modificado e w_0 é a incerteza da curva calibrada. Pelo método, temos a seguinte relação:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{y_i - a - bv_i}{\sigma_i^2} \right)^2$$

Onde σ_i é a incerteza em cada volume medido, y_i é o volume verdadeiro que deveria ser mensurado e v_i é o valor medido na escala do tanque. Deriva-se esta equação e iguala a zero para conseguir encontrar as constantes a e b .



$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{y_i - a - bv_i}{\sigma_i^2} \right)$$
$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2 \sum_{i=0}^{N-1} x_i \left(\frac{y_i - a - bv_i}{\sigma_i^2} \right)$$

Essas condições podem ser reescritas de uma forma conveniente:

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right) \quad S_x = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)$$
$$S_y = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{y_i}{\sigma_i^2} \right) \quad S_{xx} = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right)$$
$$S_{xy} = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right)$$

Tornando-se:

$$aS + bS_x = S_y$$
$$aS_x + bS_{xx} = S_{xy}$$

A solução dessas duas equações em duas incógnitas é calculada como:

$$\Delta = SS_{xx} - (S_x)^2$$
$$a = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{\Delta}$$
$$b = \frac{SS_{xy} - S_x S_y}{\Delta}$$

E finalmente, basta colocar os valores encontrados na equação:

$$V_1(v) = a + bv \pm w_0$$

A incerteza da função de calibração, w_0 , é determinada pelos desvios em relação às medidas verdadeiras, de forma que:

$$w_0 = u_0 t(c, v)$$

Onde c é a confiabilidade (geralmente 95%), ν são os graus de liberdade dados por $\nu = n - 1$ e $t(c, \nu)$ é o coeficiente de Student. A incerteza padrão da amostra, u_0 , é dada por:

$$u_0 = (n - 1)^{-1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2}$$

Em que o desvio d_i para a n -ésima função de calibração é dado por $d_i = V_n(v_i) - y_i$.

Para o segundo caso, a seguinte função polinomial de 5º grau deve ser utilizada para a curva de calibração:

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

Utilizando o método Qui-Square em conjunto com a função polinomial:

$$\chi^2(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{y_i - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4 - a_5x^5}{\sigma_i} \right)^2$$

Derivando a equação Qui-Square em relação a todos os coeficientes do polinômio do 5º grau temos:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{y_i - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4 - a_5x^5}{\sigma_i^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=0}^{N-1} x \left(\frac{y_i - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4 - a_5x^5}{\sigma_i^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=0}^{N-1} x^2 \left(\frac{y_i - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4 - a_5x^5}{\sigma_i^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_3} = -2 \sum_{i=0}^{N-1} x^3 \left(\frac{y_i - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4 - a_5x^5}{\sigma_i^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_4} = -2 \sum_{i=0}^{N-1} x^4 \left(\frac{y_i - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4 - a_5x^5}{\sigma_i^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_5} = -2 \sum_{i=0}^{N-1} x^5 \left(\frac{y_i - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4 - a_5x^5}{\sigma_i^2} \right) = 0$$



Rearranjando os somatórios, e deixando todos os termos com sinal positivo temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_i}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_0}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_1 x}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_2 x^2}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_3 x^3}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_4 x^4}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_5 x^5}{\sigma_i^2} \\
 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_i x}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_0 x}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_1 x^2}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_2 x^3}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_3 x^4}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_4 x^5}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_5 x^6}{\sigma_i^2} \\
 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_i x^2}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_0 x^2}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_1 x^3}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_2 x^4}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_3 x^5}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_4 x^6}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_5 x^7}{\sigma_i^2} \\
 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_i x^3}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_0 x^3}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_1 x^4}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_2 x^5}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_3 x^6}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_4 x^7}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_5 x^8}{\sigma_i^2} \\
 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_i x^4}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_0 x^4}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_1 x^5}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_2 x^6}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_3 x^7}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_4 x^8}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_5 x^9}{\sigma_i^2} \\
 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_i x^5}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_0 x^5}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_1 x^6}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_2 x^7}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_3 x^8}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_4 x^9}{\sigma_i^2} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_5 x^{10}}{\sigma_i^2}
 \end{aligned}$$

Convém chamar alguns termos de coeficientes C_{nm} .

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_{11} = \frac{y_i}{\sigma_i^2} & C_{12} = \frac{1}{\sigma_i^2} & C_{13} = \frac{x^1}{\sigma_i^2} & C_{14} = \frac{x^2}{\sigma_i^2} & C_{15} = \frac{x^3}{\sigma_i^2} & C_{16} = \frac{x^4}{\sigma_i^2} & C_{17} = \frac{x^5}{\sigma_i^2} \\
 C_{21} = \frac{y_i x^1}{\sigma_i^2} & C_{22} = \frac{x^1}{\sigma_i^2} & C_{23} = \frac{x^2}{\sigma_i^2} & C_{24} = \frac{x^3}{\sigma_i^2} & C_{25} = \frac{x^4}{\sigma_i^2} & C_{26} = \frac{x^5}{\sigma_i^2} & C_{27} = \frac{x^6}{\sigma_i^2} \\
 C_{31} = \frac{y_i x^2}{\sigma_i^2} & C_{32} = \frac{x^2}{\sigma_i^2} & C_{33} = \frac{x^3}{\sigma_i^2} & C_{34} = \frac{x^4}{\sigma_i^2} & C_{35} = \frac{x^5}{\sigma_i^2} & C_{36} = \frac{x^6}{\sigma_i^2} & C_{37} = \frac{x^7}{\sigma_i^2} \\
 C_{41} = \frac{y_i x^3}{\sigma_i^2} & C_{42} = \frac{x^3}{\sigma_i^2} & C_{43} = \frac{x^4}{\sigma_i^2} & C_{44} = \frac{x^5}{\sigma_i^2} & C_{45} = \frac{x^6}{\sigma_i^2} & C_{46} = \frac{x^7}{\sigma_i^2} & C_{47} = \frac{x^8}{\sigma_i^2} \\
 C_{51} = \frac{y_i x^4}{\sigma_i^2} & C_{52} = \frac{x^4}{\sigma_i^2} & C_{53} = \frac{x^5}{\sigma_i^2} & C_{54} = \frac{x^6}{\sigma_i^2} & C_{55} = \frac{x^7}{\sigma_i^2} & C_{56} = \frac{x^8}{\sigma_i^2} & C_{57} = \frac{x^9}{\sigma_i^2} \\
 C_{61} = \frac{y_i x^5}{\sigma_i^2} & C_{62} = \frac{x^5}{\sigma_i^2} & C_{63} = \frac{x^6}{\sigma_i^2} & C_{64} = \frac{x^7}{\sigma_i^2} & C_{65} = \frac{x^8}{\sigma_i^2} & C_{66} = \frac{x^9}{\sigma_i^2} & C_{67} = \frac{x^{10}}{\sigma_i^2}
 \end{array}$$

Que dará o seguinte sistema de equações lineares:

$$C_{12}a_0 + C_{13}a_1 + C_{14}a_2 + C_{15}a_3 + C_{16}a_4 + C_{17}a_5 = C_{11}$$



$$\begin{aligned}C_{22}a_0 + C_{23}a_1 + C_{24}a_2 + C_{25}a_3 + C_{26}a_4 + C_{27}a_5 &= C_{21} \\C_{32}a_0 + C_{33}a_1 + C_{34}a_2 + C_{35}a_3 + C_{36}a_4 + C_{37}a_5 &= C_{31} \\C_{42}a_0 + C_{43}a_1 + C_{44}a_2 + C_{45}a_3 + C_{46}a_4 + C_{47}a_5 &= C_{41} \\C_{52}a_0 + C_{53}a_1 + C_{54}a_2 + C_{55}a_3 + C_{56}a_4 + C_{57}a_5 &= C_{51} \\C_{62}a_0 + C_{63}a_1 + C_{64}a_2 + C_{65}a_3 + C_{66}a_4 + C_{67}a_5 &= C_{61}\end{aligned}$$

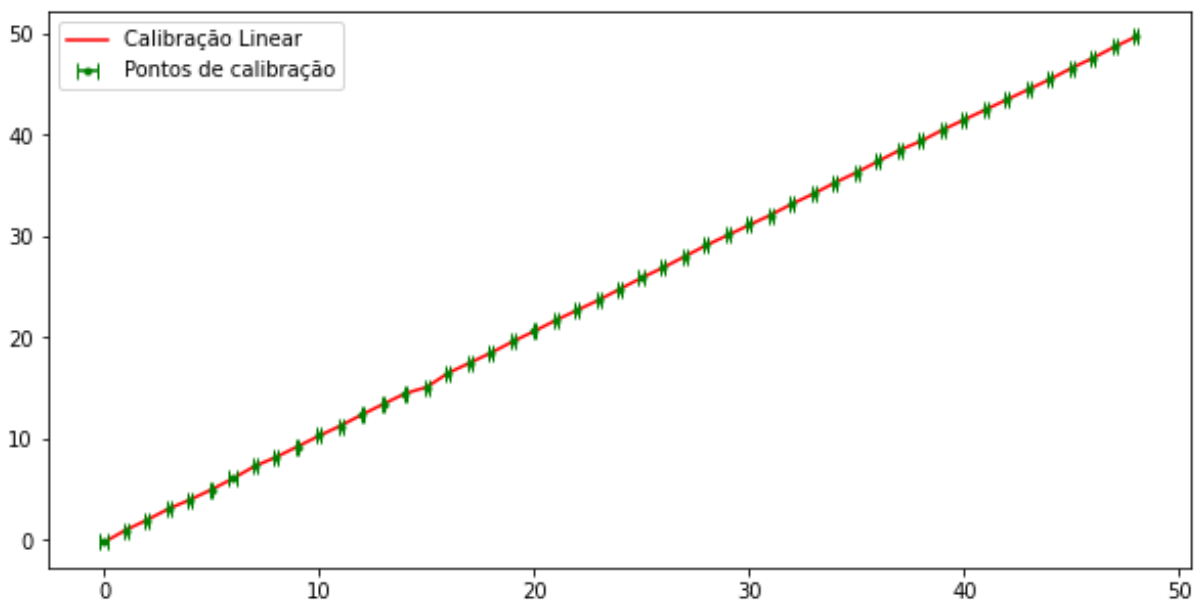
Todos esses coeficientes C_{nm} foram resolvidos numericamente, e depois o sistema foi resolvido no Python.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Realizando a modelagem dos dados corrigidos através do método Qui-Square para uma função de 1º grau, obteve-se os seguintes resultados para $V_1(v)$.

$$V_1(v) = 0.1095915745277127 + 0.9621554324636283 v \pm 0.162885283818977$$

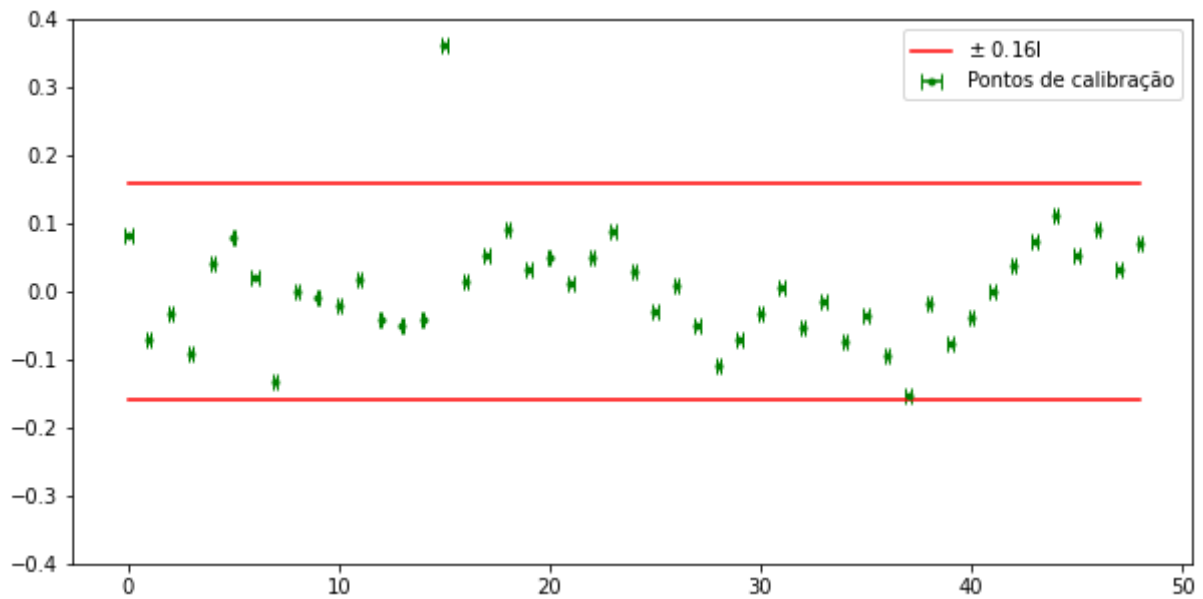
Figura 1 – Modelagem de dados X^2 por equação de grau 1



Fonte: Autoria própria

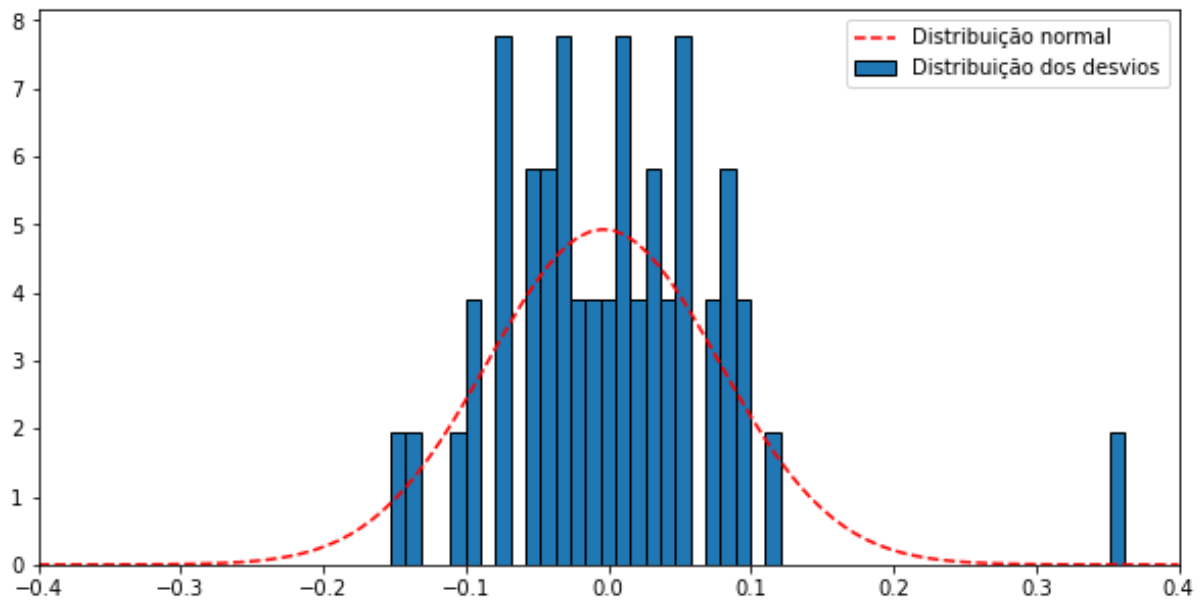


Figura 2 – Plotagem dos desvios $\{d_i\}$ em função de v_i



Fonte: Autoria própria

Figura 3 – Histograma da distribuição dos desvios $\{d_i\}$



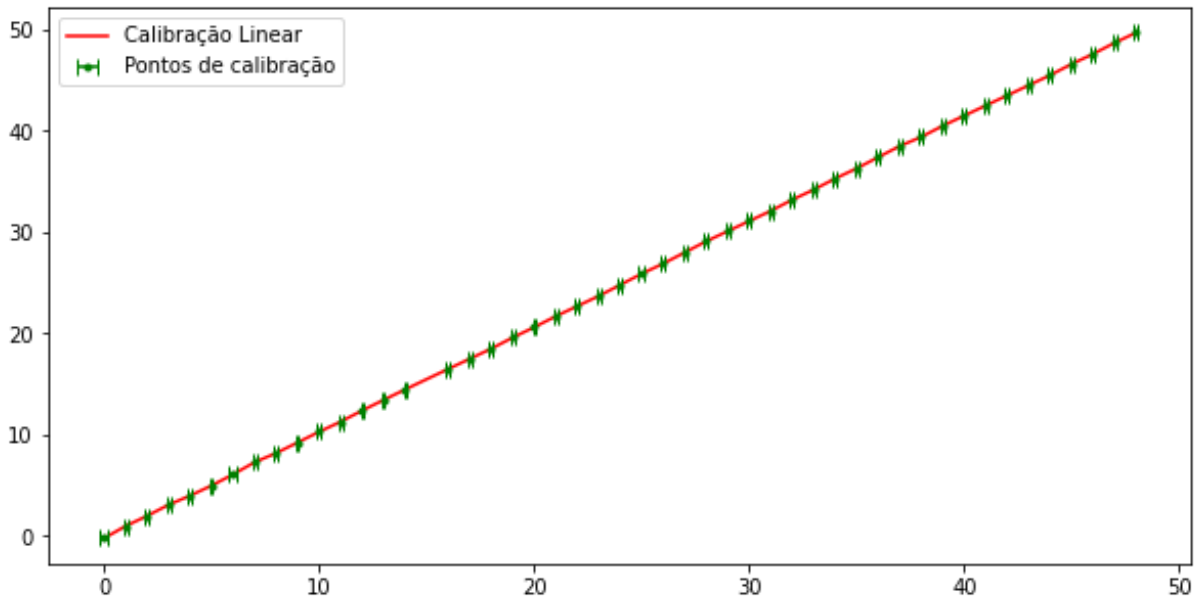
Fonte: Autoria própria



Após a aplicação de um teste Q, a medida 15 foi considerada como *outlier* e, portanto, foi removida. Assim, foi refeita a modelagem da função polinomial de 1º grau sem utilizar esta medição, obtendo-se os seguintes resultados.

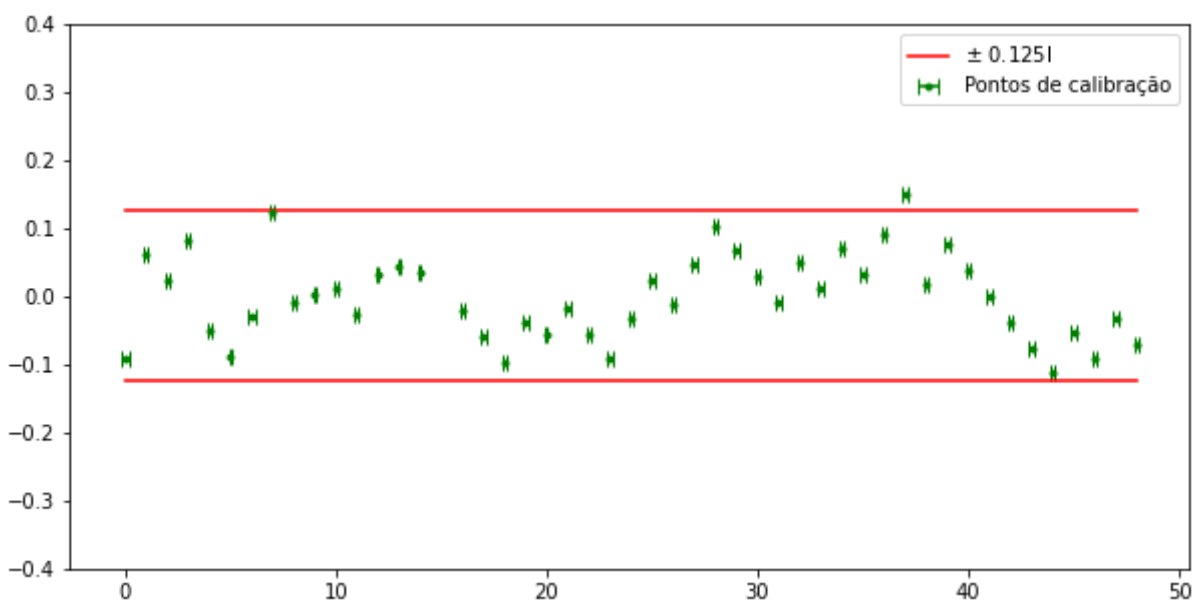
$$V_1(v) = 0.09948172834110212 + 0.9623574936066308 v \pm 0.125161435200905$$

Figura 4 – Modelagem de dados X^2 retirando-se o *outlier*



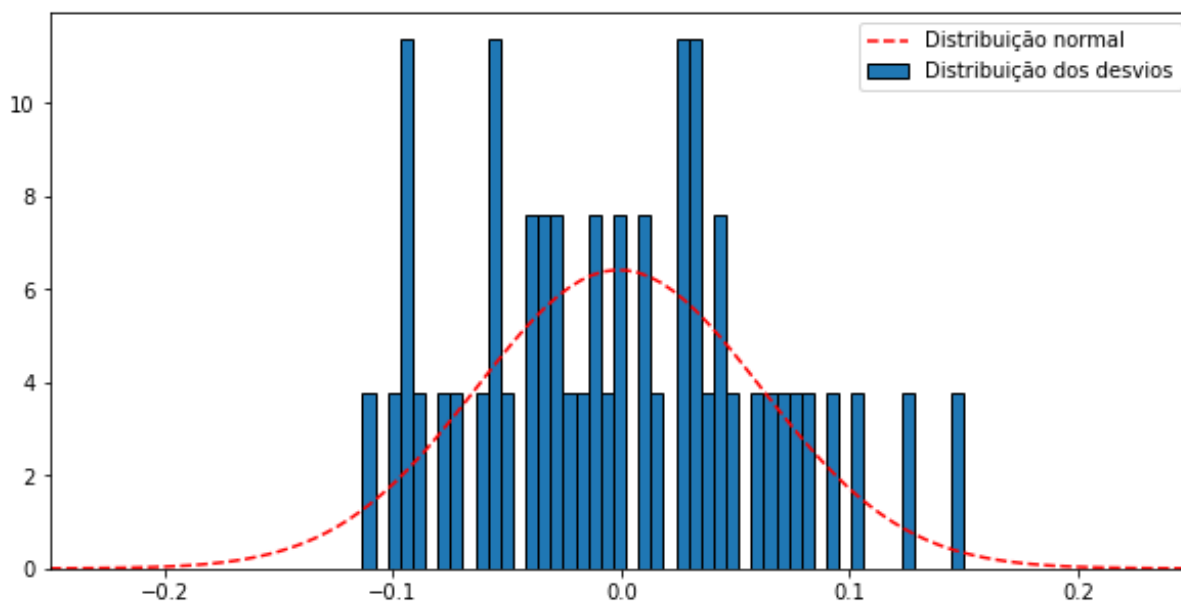
Fonte: Autoria própria

Figura 5 – Plotagem dos desvios $\{d_i\}$ em função de v_i , retirando-se o *outlier*



Fonte: Autoria própria

Figura 6 – Histograma da distribuição dos desvios $\{d_i\}$, retirando-se o outlier

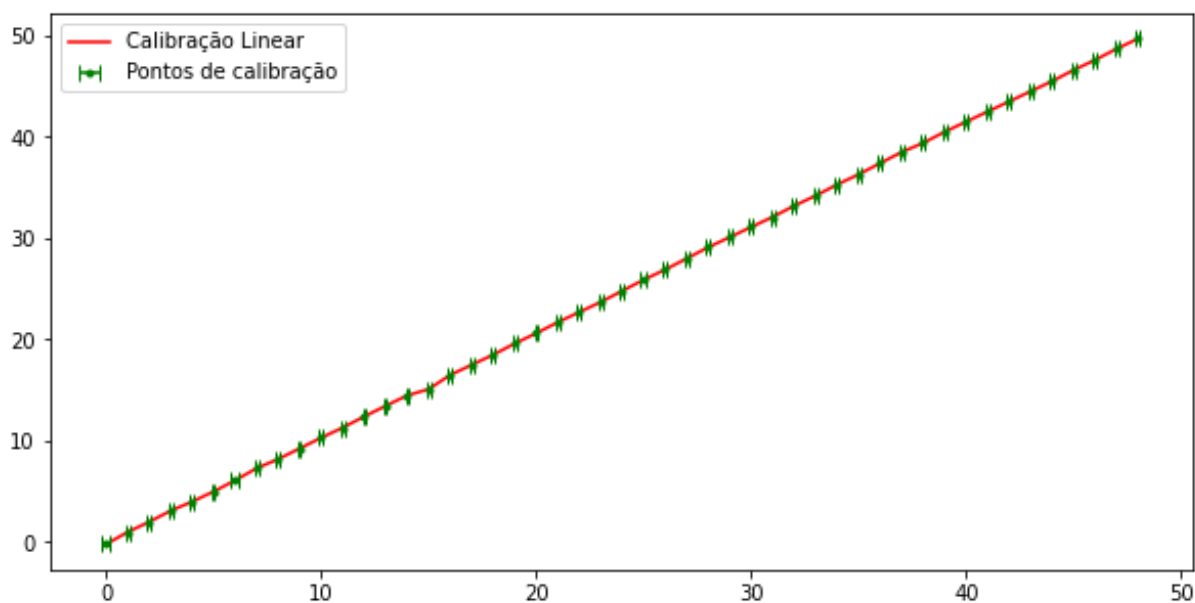


Fonte: Autoria própria

Em seguida, foi realizada a modelagem dos dados por Qui-Square para uma curva polinomial de 5º grau. A função $V_5(v)$ obtida está mostrada a seguir.

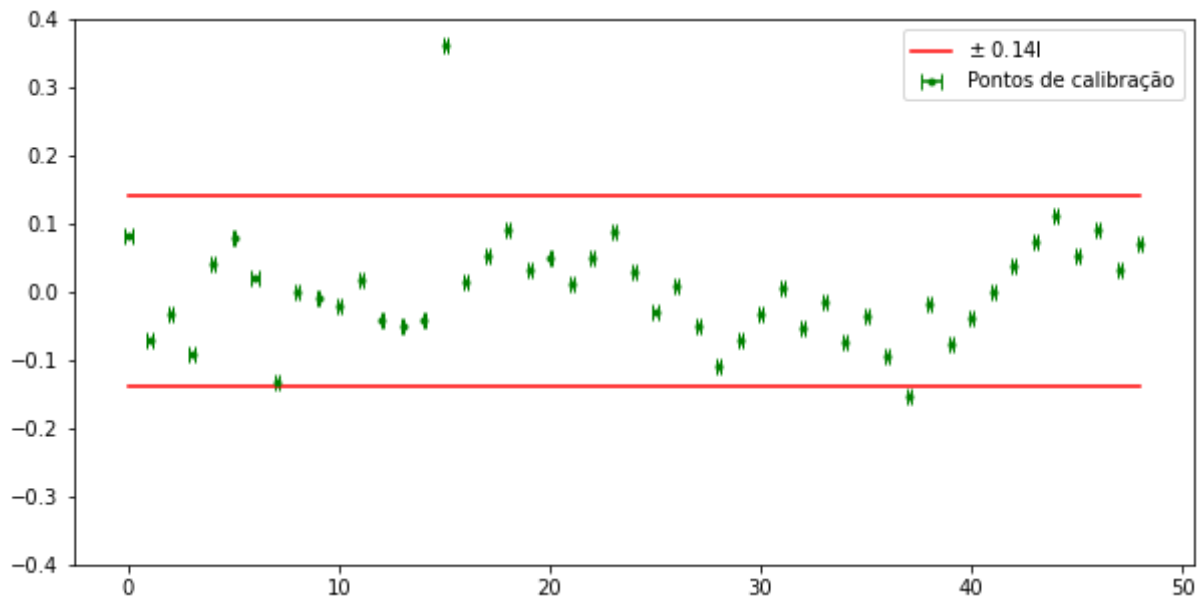
$$\begin{aligned} V_5(v) = & 0.156211242946783 + 0.936344755152607 v + 0.00319183503256224 v^2 \\ & - 0.000148171561584265 v^3 + 2.78411414557943e - 6 v^4 \\ & - 1.75871627311047e - 8 v^5 \pm 0.145182219562927 \end{aligned}$$

Figura 7 – Modelagem de dados X^2 por equação de grau 5



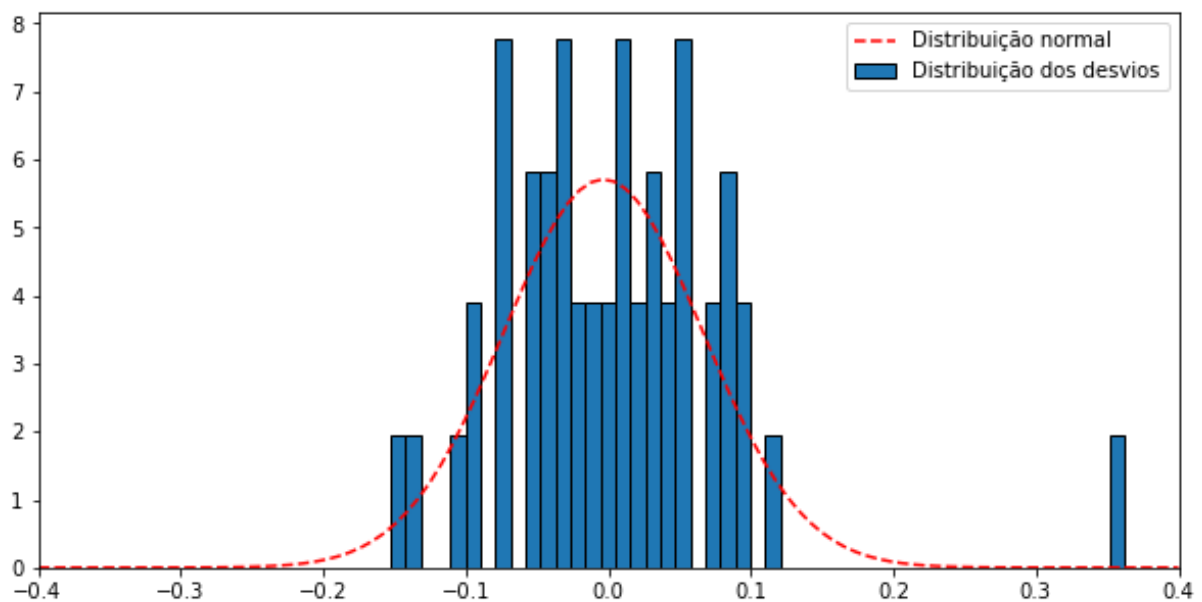
Fonte: Autoria própria

Figura 8 – Plotagem dos desvios $\{d_i\}$ em função de v_i



Fonte: Autoria própria

Figura 9 – Histograma da distribuição dos desvios $\{d_i\}$

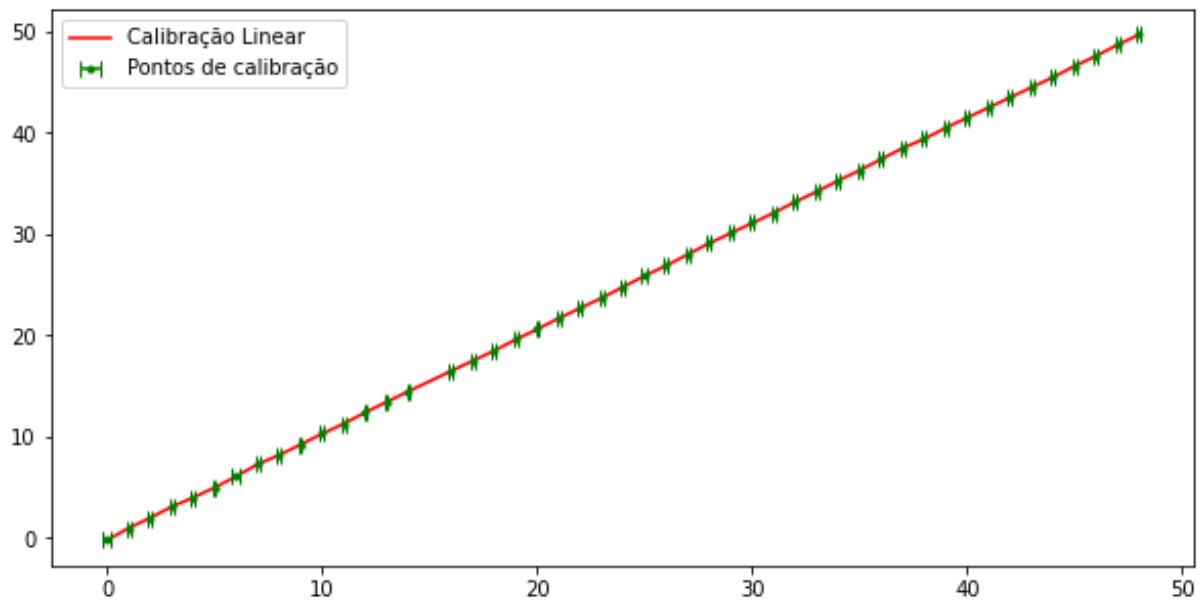


Fonte: Autoria própria

Aplicando um teste Q novamente, a medida 15 foi acusada como *outlier* e removida para realizar uma nova modelagem. Dessa forma, a função polinomial de grau 5 resultou em:

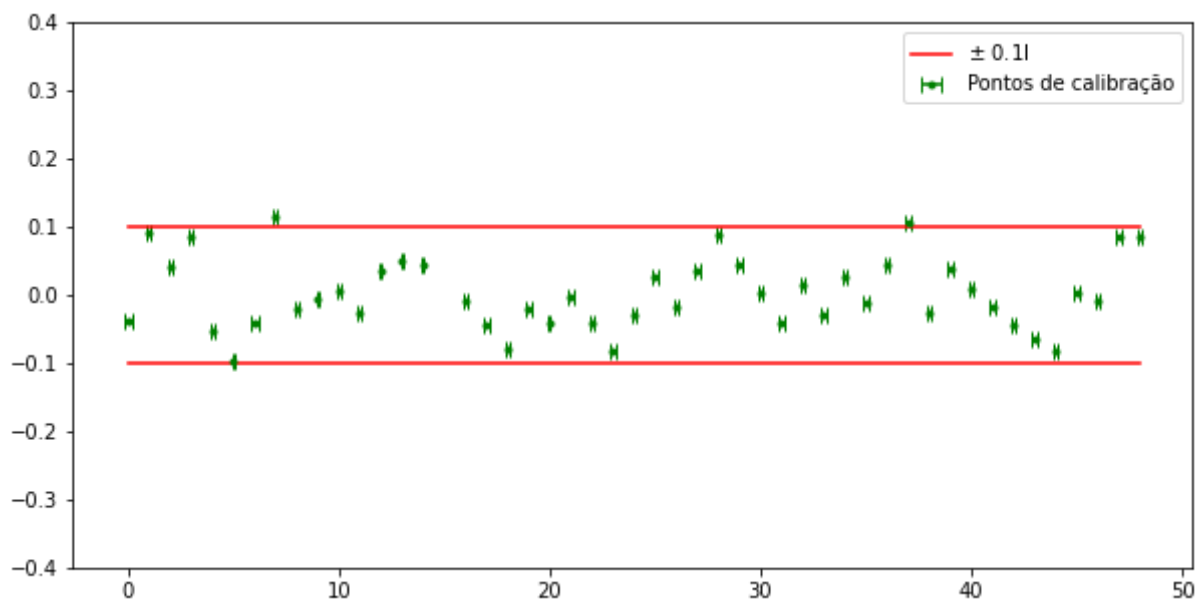
$$V_5(v) = 0.148155974981042 + 0.941239905683787 v + 0.00243424651035500 v^2 - 0.000102663044692837 v^3 + 1.63382239751815e - 6 v^4 - 7.32676641700420e - 9 v^5 \pm 0.103491218206950$$

Figura 10 – Modelagem de dados X^2 por equação de grau 5, retirando-se o outlier



Fonte: Autoria própria

Figura 11 – Plotagem dos desvios $\{d_i\}$ em função de v_i , retirando-se o outlier

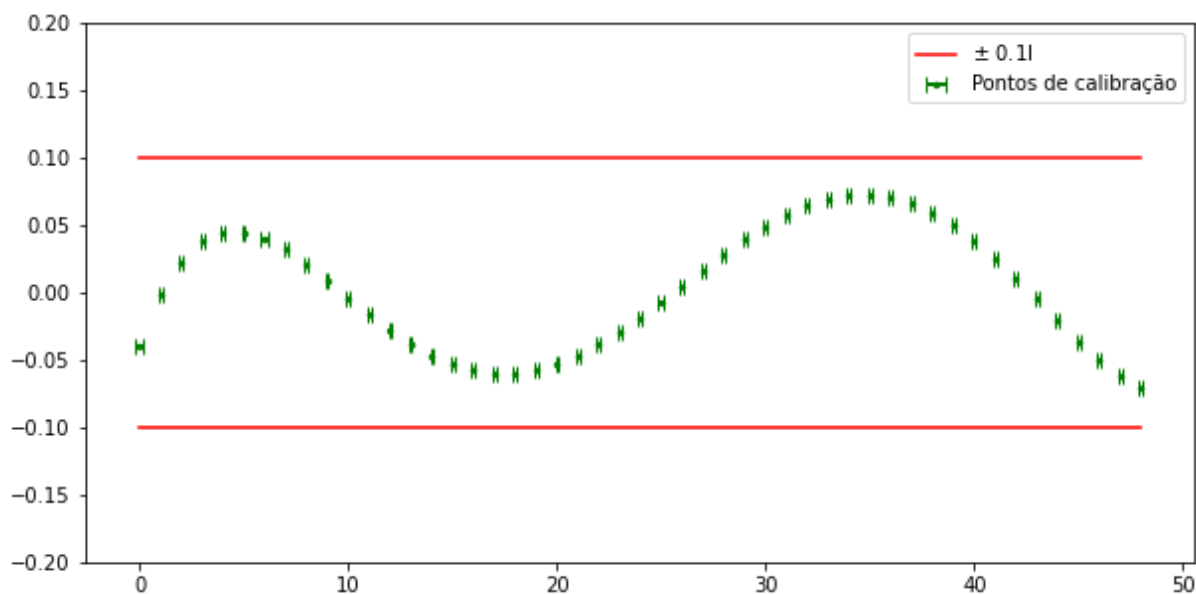


Fonte: Autoria própria

Por fim, foi realizada a comparação entre a função polinomial de grau 1 e a função polinomial de grau 5 para o mesmo experimento, ou seja, $V_1(v) - V_5(v)$, mostrando o efeito dos termos quadrático e quártico na forma da função.



Figura 12 – Diferença entre $V_1(v)$ e $V_5(v)$



Fonte: Autoria própria

4. REFERÊNCIAS

NAAKTGEBOREN, C. **Laboratório de Calibração de Volume**. Disponível em: <<https://moodle.utfpr.edu.br/mod/forum/discuss.php?d=76917>>. Acesso em: 22 mar. 2021.