Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Semana 2

Nombre: Alejandro Saavedra San Martín.
Profesor: Guillermo Rubilar Alegría.

La métrica de Schwarzschild exterior, en las coordenadas de curvatura $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$, toma la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right], \quad r > 2m. \tag{1}$$

Las componentes no nulas de los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma^0{}_{01} = \frac{m}{r(r-2m)}, \quad \Gamma^1{}_{00} = \frac{(r-2m)m}{r^3}, \quad \Gamma^1{}_{11} = -\frac{m}{r(r-2m)}, \tag{2}$$

$$\Gamma^1{}_{22} = -(r-2m), \quad \Gamma^1{}_{33} = -(r-2m)\sin^2\theta, \quad \Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{r}, \tag{3}$$

$$\Gamma^2{}_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^3{}_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3{}_{23} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{4}$$

Ver código (–)

1. Geodésicas tipo tiempo

Si parametrizamos las geodésicas usando el tiempo propio τ (parámetro afín), $x^\mu = x^\mu(\tau)$, la ecuación de la geodésica toma la forma:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \tag{5}$$

Para la componente $\mu = 0$, la ecuación nos queda

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} + \Gamma^0{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} + \Gamma^0{}_{01}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma^0{}_{10}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} + 2\Gamma^0{}_{01}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau} = 0 \tag{8}$$

$$c\ddot{t} + \frac{2m}{r(r-2m)}c\dot{t}\dot{r} = 0 \tag{9}$$

$$\ddot{t} + \frac{2m}{r(r-2m)}\dot{t}\dot{r} = 0, \tag{10}$$

donde hemos denotado $\dot{f} := df/d\tau$.

Para la componente $\mu = 1$, la ecuación nos queda

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1{}_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^1{}_{11}\left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^1{}_{22}\left(\frac{dx^2}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^1{}_{33}\left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{12}$$

$$\ddot{r} + \frac{(r-2m)m}{r^3}c^2\dot{t}^2 - \frac{m}{r(r-2m)}\dot{r}^2 - (r-2m)\dot{\theta}^2 - (r-2m)\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 = 0 \tag{13}$$

$$\ddot{r} + \frac{mc^2(r-2m)}{r^3}\dot{t}^2 - \frac{m}{r(r-2m)}\dot{r}^2 - (r-2m)\left[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right] = 0. \tag{14}$$

Para la componente $\mu = 2$, la ecuación nos queda

$$\frac{d^2x^2}{d\tau^2} + \Gamma^2{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{d^2x^2}{d\tau^2} + \Gamma^2{}_{12}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^2}{d\tau} + \Gamma^2{}_{21}\frac{dx^2}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma^2{}_{33}\left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{16}$$

$$\frac{d^2x^2}{d\tau^2} + 2\Gamma^2{}_{12}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^2}{d\tau} + \Gamma^2{}_{33}\left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{17}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0. \tag{18}$$

Para la componente $\mu = 3$, la ecuación nos queda

$$\frac{d^2x^3}{d\tau^2} + \Gamma^3{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{d^2x^3}{d\tau^2} + \Gamma^3{}_{13}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau} + \Gamma^3{}_{31}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma^3{}_{23}\frac{dx^2}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau} + \Gamma^3{}_{32}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^2}{d\tau} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{d^2x^3}{d\tau^2} + 2\Gamma^3{}_{13}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau} + 2\Gamma^3{}_{23}\frac{dx^2}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau} = 0 \tag{21}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0. \tag{22}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de las geodésicas adoptan la siguiente forma explícita:

$$\ddot{t} + \frac{2m}{r(r-2m)}\dot{t}\dot{r} = 0, \tag{23}$$

$$\ddot{r} + \frac{mc^2(r-2m)}{r^3}\dot{t}^2 - \frac{m}{r(r-2m)}\dot{r}^2 - (r-2m)\left[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right] = 0, \tag{24}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0, \tag{25}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0. \tag{26}$$

Notemos que

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\frac{d}{d\tau}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = \frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)\ddot{t}+\frac{2m}{r^2}\dot{t}\dot{r}\right] \tag{27}$$

$$= \ddot{t}+\frac{2m}{r\left(r-2m\right)}\dot{t}\dot{r}, \tag{28}$$

$$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d}{d\tau}\left[r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right] = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[r^2\sin^2\theta\ddot{\varphi}+2r\sin^2\theta\dot{r}\dot{\varphi}+2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\right] \tag{29}$$

$$= \ddot{\varphi}+\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi}+2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\theta}\dot{\varphi}. \tag{30}$$

Luego, las ecuaciones (23) y (26) pueden reescribirse como

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\frac{d}{d\tau}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0, \tag{31}$$

$$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d}{d\tau}\left[r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right] = 0. \tag{32}$$

En esta forma, es claro que ambas ecuaciones implican la existencia de dos constantes del movimiento, las cuales pueden obtenerse a partir de los vectores de Killing: $\xi_t = (1,0,0,0)$ y $\xi_\varphi = (0,0,0,1)$, escrito en coordenadas $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$. En efecto, si $x^\mu(\tau)$ es la forma paramétrica de una geodésica, donde el parámetro afín escogido es el tiempo propio τ y ξ^μ un vector de Killing, la cantidad

$$Q = g_{\mu\nu}\xi^\mu\dot{x}^\nu \tag{33}$$

es constante a lo largo de la curva geodésica.

Para el Killing temporal:

$$Q = g_{00}\xi_t^0\dot{x}^0 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}. \tag{34}$$

Para el Killing en la variable φ:

$$Q = g_{33}\xi_\varphi^3\dot{x}^3 = -r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}. \tag{35}$$

Por simplicidad introduciremos dos cosntantes adimensionales, k y h, definidas por

$$k := \left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}, \quad hmc := r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}. \tag{36}$$

Estas cantidades coinciden con las definiciones newtonianas de energía y momentum angular por unidad de masa del cuerpo orbitando. Es claro de ver que la expresión para $\mathcal{L} := hmc$ coincide con la componente z del momento angular, para el caso de la energía es necesdario elaborar un poco más. Escribamos el tiempo propio por

$$c^2d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} - r^2d\Omega^2 \tag{37}$$

y al tomar el límite de campo débil $r \gg 2m$,

$$\frac{1}{1-\frac{2m}{r}} \approx 1. \tag{38}$$

Así,

$$c^2 d\tau^2 \approx -\frac{2m}{r}c^2dt^2 + c^2dt^2 - d\vec{x}\cdot d\vec{x} = -\frac{2m}{r}c^2dt^2 + \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{39}$$

De la teoría de Relatividad Especial sabemos que

$$\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2dt^2. \tag{40}$$

Entonces,

$$c^2d\tau^2 \approx \left(1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 \Rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \approx \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{2m}{r}}. \tag{41}$$

Evaluando la raíz cuadrada, encontramos que, para $r \gg 2m$,

$$\dot{t} \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{2m}{r}}} \tag{42}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3}\frac{m}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{4m^2}{r^2}\right) \tag{43}$$

$$= \gamma + \frac{m}{\gamma^3 r} + \mathcal{O}\left(\frac{4m^2}{r^2}\right), \tag{44}$$

donde $\gamma = 1/(1-v^2/c^2)$.

Si ahora consideramos el límite no relativista, $v \ll c$,

$$\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}. \tag{45}$$

Por lo tanto, en los límite de campo débil y no relativista,

$$k = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t} \tag{46}$$

$$\approx \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\gamma + \frac{m}{\gamma^3 r}\right) \tag{47}$$

$$= \gamma + \frac{m}{\gamma^3 r} - \frac{2m}{r}\gamma - \cancelto{0}{\frac{2m^2}{\gamma^3 r^2}} \tag{48}$$

$$\approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{m}{(1+\frac{v^2}{2c^2})^3 r} - \frac{2m}{r} - \cancelto{0}{\frac{2m}{r}\frac{v^2}{2c^2}} \tag{49}$$

$$= 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{m}{r}\left(\frac{1}{(1+\frac{v^2}{2c^2})^3}\right) - \frac{2m}{r} - \cancelto{0}{\frac{2m}{r}\frac{v^2}{2c^2}} \tag{50}$$

$$\approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{m}{r}\left(1 - 3\frac{v^2}{2c^2}\right) - \frac{2m}{r} - \cancelto{0}{\frac{2m}{r}\frac{v^2}{2c^2}} \tag{51}$$

$$\approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{m}{r} - \frac{2m}{r} \tag{52}$$

$$= 1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{m}{r}. \tag{53}$$

Recordando que $m = GM/c^2$,

$$k \approx \frac{1}{M'c^2}\left(M'c^2 + \frac{1}{2}M'v^2 - \frac{GMM'}{r}\right), \tag{54}$$

donde M' es la masa de una partícula orbitando en la geodésica. Verificando así que en los límites mencionados k se aproxima a la energía de la partícula por unidad de masa de su energía en reposo, pues en la ecuación (54) tenemos la suma de la energía en reposo, la energía cinética y de la energía potencial gravitatoria (newtoniana).

Al igual que en el caso newtoniano (problema de Kepler), la órbita está contenida en un plano. Por la simetría del problema podemos elegir el plano ecuatorial: $\theta(0) = \pi/2$ y $\dot{\theta}(0) = 0$, entonces la ecuación (25) implica que $\ddot{\theta}(0) = 0$. Por tanto, para todo τ,

$$\theta(\tau) = \frac{\pi}{2}. \tag{55}$$

Nos queda por resolver la ecuación radial (23), para ello usemo la identidad

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv c^2. \tag{56}$$

Expandiendo esta identidad, encontramos

$$\begin{align}
g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} &= c^2 \tag{57}\\
g_{00}c^2\dot{t}^2 + g_{11}\dot{r}^2 + g_{22}\dot{\theta}^2 + g_{33}\dot{\varphi}^2 &= c^2 \tag{58}\\
\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \frac{1}{(1-\frac{2m}{r})}\dot{r}^2 - r^2\cancelto{0}{\dot{\theta}^2} - r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 &= c^2 \tag{59}\\
\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{(1-\frac{2m}{r})} - r^2\dot{\varphi}^2 &= c^2. \tag{60}
\end{align}$$

Usando (36) y (55), podemos escribir (23) como

$$\begin{align}
\ddot{r} + \frac{mc^2(r-2m)}{r^3}\dot{t}^2 - \frac{m}{r(r-2m)}\dot{r}^2 - (r-2m)\left[\cancelto{0}{\dot{\theta}^2} + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right] &= 0 \tag{61}\\
\ddot{r} + \frac{mc^2(r-2m)}{r^3}\frac{k^2}{(1-\frac{2m}{r})^2} - \frac{m}{r(r-2m)}\dot{r}^2 - (r-2m)\frac{h^2m^2c^2}{r^4} &= 0 \tag{62}\\
\ddot{r} + \frac{mc^2(r-2m)}{r^3}\frac{r^2k^2}{(r-2m)^2} - \frac{m}{r(r-2m)}\dot{r}^2 - h^2m^2c^2\frac{(r-2m)}{r^4} &= 0 \tag{63}\\
\ddot{r} + \frac{mc^2k^2}{r(r-2m)} - \frac{m}{r(r-2m)}\dot{r}^2 - h^2m^2c^2\frac{(r-2m)}{r^4} &= 0 \tag{64}
\end{align}$$

Por otro lado, podemos escribir (60) como

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\dot{t}^2-\frac{\dot{r}^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}-r^2\dot{\varphi}^2=c^2 \tag{65}$$

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{c^2k^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}-\frac{\dot{r}^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}-r^2\frac{h^2m^2c^2}{r^4\sin^4(\pi/2)}=c^2 \tag{66}$$

$$\frac{c^2k^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}-\frac{\dot{r}^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}-\frac{h^2m^2c^2}{r^2}=c^2 \tag{67}$$

$$\frac{\dot{r}^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}=\frac{k^2c^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}-c^2\left(1+\frac{h^2m^2}{r^2}\right) \tag{68}$$

$$\dot{r}^2=k^2c^2-c^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1+\frac{h^2m^2}{r^2}\right). \tag{69}$$

En resumen, la dinámica de la coordenada radial está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{r}+\frac{mc^2k^2}{r(r-2m)}-\frac{m}{r(r-2m)}\dot{r}^2-h^2m^2c^2\frac{(r-2m)}{r^4}=0, \tag{70}$$

$$\dot{r}^2=k^2c^2-c^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1+\frac{h^2m^2}{r^2}\right). \tag{71}$$

Sin embargo, la ecuación (71) implica la condición (70). En efecto, derivando con respecto a τ la ecuación (71), tenemos que

$$2\dot{r}\ddot{r}=-\frac{2mc^2}{r^2}\dot{r}\left(1+\frac{h^2m^2}{r^2}\right)-c^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(-\frac{2h^2m^2}{r^3}\dot{r}\right) \tag{72}$$

$$\ddot{r}=-\frac{mc^2}{r^2}\left(1+\frac{h^2m^2}{r^2}\right)+h^2m^2c^2\frac{(r-2m)}{r^4}. \tag{73}$$

De la misma ecuación (71) se tiene que

$$-c^2\left(1+\frac{h^2m^2}{r^2}\right)=\frac{\dot{r}^2-k^2c^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}. \tag{74}$$

Reemplazando en (73):

$$\ddot{r}=-\frac{m}{r^2}\frac{\dot{r}^2-k^2c^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}+^2m^2c^2\frac{(r-2m)}{r^4} \tag{75}$$

$$\ddot{r}=-\frac{mc^2k^2}{r(r-2m)}+\frac{m}{r(r-2m)}\dot{r}^2+h^2m^2c^2\frac{(r-2m)}{r^4}. \tag{76}$$

Por lo tanto, sólo es necesario resolver la ecuación (71).

2. Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana

Consideremos el lagrangiano efectivo

$$L=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{77}$$