Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tópicos en Relatividad General

Semana 5

Nombre: Alejandro Saavedra San Martín.
Profesor: Guillermo Rubilar Alegría.

Desvío de la luz

El cálculo es similar al hecho para geodésicas tipo tiempo. Sin embargo, para geodésicas tipo luz no podemos parametrizar la trayectoria con el tiempo propio, sino con un parámetro arbitrario λ. Así, la ecuación de la geodésica adopta la forma

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = f(\lambda)\frac{dx^\mu}{d\lambda}. \tag{1}$$

Usando los cálculos hechos en la semana 2, las ecuaciones de las geodésicas adoptan la forma

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\frac{d}{d\lambda}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = f\dot{t}, \tag{2}$$

$$\ddot{r} + \frac{mc^2(r-2m)}{r^3}\dot{t}^2 - \frac{m}{r(r-2m)}\dot{r}^2 - (r-2m)\left[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right] = f\dot{r}, \tag{3}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = f\dot{\theta}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d}{d\lambda}\left[r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right] = f\dot{\varphi}, \tag{5}$$

donde denotamos $\dot{()} := d()/d\lambda$ y se factorizó el lado izquierdo de las ecuaciones (2) y (5) al igual que en la semana 2 pero haciendo el cambio $\tau \to \lambda$.

El movimiento está confinado a un plano, que podemos elegir como el plano escuatorial, es decir, $\theta(\lambda) = \pi/2$. Claramente esta solución satisface la ecuación (4). Como nos centraremos en la trayectoria. elegimos como parámetro λ el ángulo φ. Con esto, $\dot{\varphi} = 1$ y podemos determinar f a partir de la ecuación (5):

$$\frac{1}{r^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\frac{d}{d\lambda}\left[r^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\dot{\varphi}\right] = f\dot{\varphi} \Rightarrow f = \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\varphi}[r^2] = \frac{2r}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{2}{r}\varphi', \tag{6}$$

donde hemos denotado $()' := d()/d\varphi$.

Introduciendo esta función f en (2), obtenemos

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\frac{d}{d\varphi}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)t'\right] - \frac{2}{r}t'\varphi' = 0. \tag{7}$$

Luego, si calculamos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\varphi}\ln\left[\frac{r^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)t'}\right] &= \frac{\left(1-\frac{2m}{r}\right)t'}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{r^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)t'}\right] \\
&= \frac{\left(1-\frac{2m}{r}\right)t'}{r^2}\left(\frac{2rr'}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)t'} - \frac{r^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2 t'^{\,2}}\frac{d}{d\varphi}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)t'\right]\right) \\
&= \frac{2r'}{r} - \frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)t'}\frac{d}{d\varphi}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)t'\right] \\
&= -\frac{1}{t'}\left(-\frac{2}{r}t'\varphi' + \frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\frac{d}{d\varphi}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)t'\right]\right). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Usando la ecuación (7), hemos encontrado que

$$\frac{d}{d\varphi}\ln\left[\frac{r^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)t'}\right] = 0. \qquad (9)$$

La ecuación anterior expresa el hecho que existe una cantidad conservada en el movimiento:

$$\frac{r^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)t'} =: \frac{c}{\alpha}. \qquad (10)$$

Por conveniencia posterior, hemos introducido la constante α, la cual debe tener dimensiones $[\alpha] = L^{-1}$, para que el lado derecho de la ecuación tenga dimensiones L^2T^{-1} (pues c es la rapidez de la luz).

Por otro lado, la ecuación radial faltante (3) se reduce a

$$r'' + \frac{mc^2(r-2m)}{r^3}t'^{\,2} - \frac{m}{r(r-2m)}r'^{\,2} - (r-2m)\left[\cancelto{0}{\dot\theta^2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cancelto{1}{\dot\varphi^2}\right] = \frac{2}{r}r'^{\,2} \qquad (11)$$

$$r'' + \frac{mc^2(r-2m)}{r^3}t'^{\,2} - \frac{m}{r(r-2m)}r'^{\,2} - (r-2m) = \frac{2r'^{\,2}}{r}. \qquad (12)$$

De la condición $g_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu = 0$, tenemos que

$$g_{00}c^2\dot t^2 + g_{11}\dot r^2 + g_{22}\dot\theta^2 + g_{33}\dot\varphi^2 = 0 \qquad (13)$$

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\dot t^2 - \frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\dot r^2 - r^2\cancelto{0}{\dot\theta^2} - r^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cancelto{1}{\dot\varphi^2} = 0 \qquad (14)$$

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 - \frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r^2 = 0. \qquad (15)$$

Si despejamos t' de la ecuación (10),

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2\alpha}{c\left(1-\frac{2m}{r}\right)}. \qquad (16)$$

Ahora, si reemplazamos (16) en (15), podremos expresar $dr/d\varphi$ en términos de r y la constante de movimiento α:

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\left(\frac{r^2\alpha}{c\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\right)^2-\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r^2=0 \tag{17}$$

$$\frac{\alpha^2r^4}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}-\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r^2=0 \tag{18}$$

$$\alpha^2r^4-r'^{\,2}-r^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)=0. \tag{19}$$

Reordenando los términos, hemos encontrado una ecuación para la trayectoria $r=r(\varphi)$ de primer orden,

$$r'^{\,2}+r^2-2mr-\alpha^2r^4=0. \tag{20}$$

Si definimos $u:=1/r$, al derivar con respecto a φ:

$$\frac{du}{d\varphi}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\Rightarrow\frac{dr}{d\varphi}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}. \tag{21}$$

Así, la ecuación (20) nos queda

$$\frac{1}{u^4}u'^{\,2}+\frac{1}{u^2}-\frac{2m}{u}-\frac{\alpha^2}{u^4}=0 \tag{22}$$

$$u'^{\,2}+u^2-2mu^3-\alpha^2=0. \tag{23}$$

Reordenando los términos,

$$u'^{\,2}+u^2=\alpha^2+2mu^3. \tag{24}$$

Derivando esta ecuación,

$$2u'u''+2uu'=6mu^2u', \tag{25}$$

llegamos a una ecuación de segundo orden en las derivadas de u:

$$u''+u=3mu^2. \tag{26}$$

La ecuación (26), la cual es consecuencia de la ecuación (24) (para $u'\neq 0$) es equivalente a la ecuación para la dinámica radial (12). En efecto, como $u=1/r$, tenemos que

$$u'=-\frac{r'}{r^2}, \tag{27}$$

$$u''=-\frac{r''}{r^2}+\frac{2r'^{\,2}}{r^3}. \tag{28}$$

Reemplazando en (24),

$$-\frac{r''}{r^2}+\frac{2r'^{\,2}}{r^3}+\frac{1}{r}=\frac{3m}{r^2} \tag{29}$$

$$-r''+\frac{2r'^{\,2}}{r}+r=3m \tag{30}$$

$$r''-r+3m=\frac{2r'^{\,2}}{r} \tag{31}$$

$$r''+m-(r-2m)=\frac{2r'^{\,2}}{r} \tag{32}$$

$$r''+m\left(\frac{r^2-2mr}{r^2-2mr}\right)-(r-2m)=\frac{2r'^{\,2}}{r} \tag{33}$$

$$r''+m\frac{r^2-2mr}{r(r-2m)}-(r-2m)=\frac{2r'^{\,2}}{r}. \tag{34}$$

Usando la ecuación (20):

$$r^2-2mr=\alpha^2r^4-r'^{\,2}. \tag{35}$$

Reemplazando (35) en (34), tenemos que

$$r''+m\frac{(\alpha^2r^4-r'^{\,2})}{r(r-2m)}-(r-2m)=\frac{2r'^{\,2}}{r} \tag{36}$$

$$r''+\frac{mr^3}{r-2m}\alpha^2-\frac{m}{r(r-2m)}r'^{\,2}-(r-2m)=\frac{2r'^{\,2}}{r}. \tag{37}$$

Pero, de la ecuación (16):

$$\alpha=\frac{c(r-2m)t'}{r^3}. \tag{38}$$

Reemplazando (38) en (37):

$$r''+\frac{mr^3}{r-2m}\left(\frac{c(r-2m)t'}{r^3}\right)^2-\frac{m}{r(r-2m)}r'^{\,2}-(r-2m)=\frac{2r'^{\,2}}{r} \tag{39}$$

$$r''+\frac{mc^2(r-2m)}{r^3}t'^{\,2}-\frac{m}{r(r-2m)}r'^{\,2}-(r-2m)=\frac{2r'^{\,2}}{r} \tag{40}$$

Probando así la equivalencia entre la ecuación (12) y (26). Además, al ser (26) consecuencia de (24) y (24) de (20). Hemos probado que la ecuación (20) implica la condición (12).

El término introducido por la teoría de Relatividad General es $3mu^2$. Si tomamos el límite $m\to 0$, obtenemos la ecuación para el caso newtoniano:

$$u''+u=0, \tag{41}$$

cuyas soluciones son líneas rectas. En efecto, la solución general de (41) es la de un oscilador armónico libre de frecuencia $\omega_0=1$:

$$u_0(\varphi)=\frac{1}{D}\sin(\varphi-\varphi_0), \tag{42}$$

donde D es una constante de integración con dimensiones de longitud y φ_0 otra constante pero angular. Entonces, la trayectoria en coordenadas cartesianas viene dada por

$$x = r\cos\varphi = D\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi - \varphi_0)}, \tag{43}$$

$$y = r\sin\varphi = D\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\varphi - \varphi_0)}. \tag{44}$$

Encontremos la ecuación de la curva en coordenadas cartesianas, es decir, relacionemos x e y por medio de una ecuación. Primero, desarrollemos

$$\frac{D}{\cos(\varphi_0)} + (\tan(\varphi_0))x. \tag{45}$$

Reemplazando (43) en (45):

$$\begin{aligned}\frac{D}{\cos(\varphi_0)} + \tan(\varphi_0)x &= \frac{D}{\cos(\varphi_0)} + \tan(\varphi_0)\frac{D\cos(\varphi)}{\sin(\varphi - \varphi_0)}\\ &= D\left[\frac{1}{\cos(\varphi_0)} + \frac{\sin(\varphi_0)\cos(\varphi)}{\cos(\varphi_0)(\sin(\varphi)\cos(\varphi_0) - \cos(\varphi)\sin(\varphi_0))}\right]\\ &= D\frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi_0) - \cos(\varphi)\sin(\varphi_0) + \sin(\varphi_0)\cos(\varphi)}{\cos(\varphi_0)(\sin(\varphi)\cos(\varphi_0) - \cos(\varphi)\sin(\varphi_0))}\\ &= D\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\varphi)\cos(\varphi_0) - \cos(\varphi)\sin(\varphi_0)}\\ &= D\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\varphi - \varphi_0)}.\end{aligned} \tag{46}$$

Comparando con (44), hemos encontrado que las soluciones de (41) son líneas rectas dadas por

$$y = \frac{D}{\cos(\varphi_0)} + \tan(\varphi_0)x. \tag{47}$$

En particular, la solución (47) es una línea recta en el plano xy de pendiente $\tan(\varphi_0)$ y coeficiente de posición $D/\cos(\varphi_0)$, es decir, la recta intersecta el eje y en el punto $(0, D/\cos(\varphi_0))$. Es fácil de ver de la figura 1 que la constante D es la distancia mínima de la recta al origen y φ_0 el ángulo que forma la recta y el eje x.

Similarmente para el caso de geodésicas tipo tiempo, determinemos una solución perturbativa de (24). Para ello, definamos la variable adimensional $w(\varphi) := Du(\varphi)$, luego reemplacemos en (24):

$$u'' + u = 3mu^2 \tag{48}$$

$$\frac{1}{D}w'' + \frac{1}{D}w = \frac{3m}{D^2}w^2 \tag{49}$$

$$w'' + w = \frac{3m}{D}w^2. \tag{50}$$

Si definimos la constante

$$\epsilon := \frac{3m}{D}, \tag{51}$$

la ecuación (50) nos queda

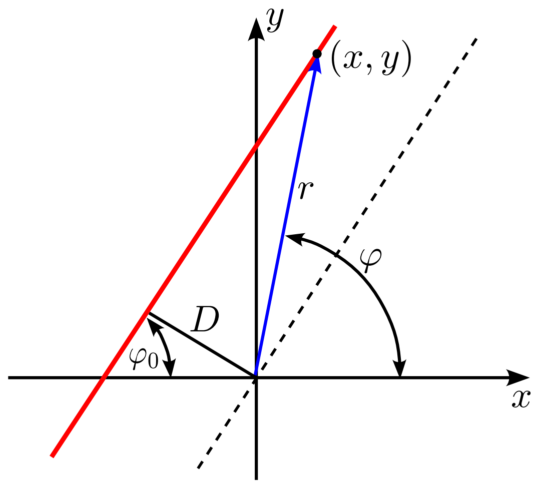

Figura 1: Solución newtoniana para el movimiento del rayo de luz. Recuperado del apunte del profesor Guillermo Rubilar.

$$w'' + w = \epsilon w^2. \tag{52}$$

El parámetro ϵ es pequeño (mucho menor que 1), ya que suponemos que el rayo de luz pasa suficientemente lejos del centro de fuerzas de modo que $D \gg m$. Por lo tanto, ocuparemos ϵ como parámetro perturbativo.

Usando el método perturbativo, postulamos la siguiente expansión para la solución de (52):

$$w = w_0(\varphi) + \epsilon w_1(\varphi) + \epsilon^2 w_2(\varphi) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \tag{53}$$

donde w_0 es la solución no perturbada de

$$w_0'' + w_0 = 0, \tag{54}$$

la cual corresponde a la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de un oscilador armónico libre con solución

$$w_0(\varphi) = \sin(\varphi - \varphi_0). \tag{55}$$

Reemplazando la solución perturbada en (52), obtenemos

$$\begin{aligned} w'' + w &= \epsilon w^2 && (56)\\ w_0'' + \epsilon w_1'' + w_0 + \epsilon w_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= \epsilon \left(w_0 + \epsilon w_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right)^2 && (57)\\ (w_0'' + w_0) + \epsilon(w_1'' + w_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= \epsilon w_0^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) && (58)\\ 0 + \epsilon(w_1'' + w_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= \epsilon w_0^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2). && (59)\end{aligned}$$

Igualando los términos de primer orden en ϵ, w_1 es solución de la EDO

$$\begin{aligned} w_1'' + w_1 &= w_0^2 \\ &= \sin^2(\varphi - \varphi_0) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos[2(\varphi - \varphi_0)] \end{aligned} \tag{60}$$

donde se usó la identidad $\sin^2\varphi \equiv (1-\cos(2\varphi))/2$.

La solución general de esta ecuación es de la forma [1]

$$w_1(\varphi) = A + B\cos(\varphi-\varphi_0+\beta) + C\cos^2(\varphi-\varphi_0). \tag{61}$$

Reemplazando en la ecuación (60):

$$w_1'' + w_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos[2(\varphi-\varphi_0)] \tag{62}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left[A + B\cos(\varphi-\varphi_0+\beta) + C\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos[2(\varphi-\varphi_0)]\right)\right] + w_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos[2(\varphi-\varphi_0)] \tag{63}$$

$$-B\cos(\varphi-\varphi_0+\beta) - 2C\cos[2(\varphi-\varphi_0)] + w_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos[2(\varphi-\varphi_0)] \tag{64}$$

$$-2C\cos[2(\varphi-\varphi_0)] + A + \frac{C}{2} + \frac{C}{2}\cos[2(\varphi-\varphi_0)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos[2(\varphi-\varphi_0)] \tag{65}$$

$$\left(A+\frac{C}{2}\right) - \frac{3}{2}C\cos[2(\varphi-\varphi_0)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos[2(\varphi-\varphi_0)]. \tag{66}$$

Como las funciones $\cos[n(\varphi-\varphi_0)]$, $n = 0,1,2,\ldots$ son linealmente independientes,

$$A + \frac{C}{2} = \frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{2}C = -\frac{1}{2}. \tag{67}$$

Así, hemos encontrado que $A = C = 1/3$, mientras que las constante B y β pueden adoptar valores arbitrarios. Eligimos $B = \beta = 0$. Entonces,

$$w(\varphi) = \sin(\varphi-\varphi_0) + \epsilon\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^2(\varphi-\varphi_0)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{68}$$

Pero, $w(\varphi) = Du(\varphi)$ y $\epsilon = 3m/D$. Por lo tanto, nuestra solución a primer orden adopta la forma:

$$u(\varphi) = \frac{1}{D}\left[\sin(\varphi-\varphi_0) + \frac{m}{D}\left[1+\cos^2(\varphi-\varphi_0)\right]\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{69}$$

En el siguiente notebook se encuentra un gráfico de la solución (69) para diferentes valores de ϵ considerando el campo gravitacional producto del Sol.

Para calcular el ángulo de desvío de la luz δ, necesitamos los ángulos δ_1 y δ_2 en que la trayectoria se desvía de la recta no perturbada, para $t \to -\infty$ y $t \to +\infty$, respectivamente, ver figura 2. Estos ángulos corresponden a un ángulo inicial $\varphi_{\rm i} = \varphi_0 + \pi + \delta_1$ y final $\varphi_{\rm f} = \varphi_0 - \delta_2$, y pueden ser determinados por la condición que en cada caso $r \to \infty$ o, equivalentemente $u = 0$.

[1] La solución está sobredeterminada, pues al ser la EDO de un oscilador armónico con término forzante constante y otro periódico no resonante, la solución es $w_1(\varphi) = A + B\cos[2(\varphi-\varphi_0)]$.

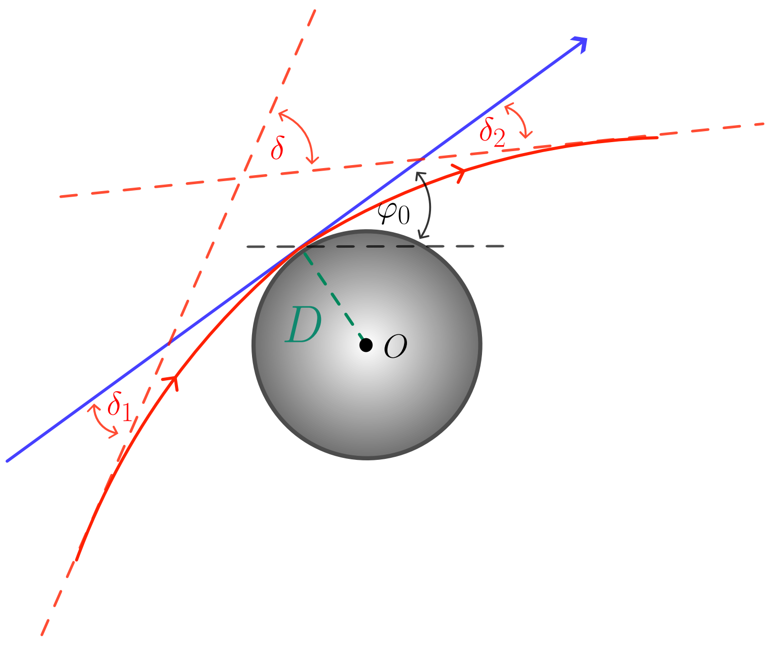

Figura 2: Desvío de un haz de luz (curva sólida en rojo) y el haz de luz no perturbado (curva sólida en azul) debido a la curvatura del espacio-tiempo ocasionada por un cuerpo esférico.

Reemplazando $\varphi = \varphi_{\mathrm{i}}$ en la condición $u(\varphi_{\mathrm{i}}) = 0$, a primer orden en δ_1:[2]

$$\begin{aligned} 0 &= u(\varphi_{\mathrm{i}}) \\ &= \frac{1}{D}\left[\sin(\varphi_0 + \pi + \delta_1 - \varphi_0) + \frac{m}{D}\left[1 + \cos^2(\varphi_0 + \pi + \delta_1 - \varphi_0)\right]\right] \\ &= \frac{1}{D}\left[\sin(\pi + \delta_1) + \frac{m}{D}\left[1 + \cos^2(\pi + \delta_1)\right]\right] \\ &= \frac{1}{D}\left[-\sin(\delta_1) + \frac{m}{D}\left[1 + (-\cos(\delta_1))^2\right]\right] \\ &= \frac{1}{D}\left[-\delta_1 + \mathcal{O}(\delta_1^2) + \frac{m}{D}\left[1 + (1 + \mathcal{O}(\delta_1^2))^2\right]\right] \\ &= \frac{1}{D}\left[-\delta_1 + \frac{2m}{D} + \mathcal{O}(\delta_1^2)\right], \end{aligned} \tag{70}$$

donde en la penúltima línea se usó las expansiones en serie de Taylor para el coseno y seno:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \tag{71}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots. \tag{72}$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\delta_1 = \frac{2m}{D}. \tag{73}$$

[2] El ángulo δ_1 está relacionado al parámetro ϵ, pues si varía $\epsilon = 3m/D$, el cual depende de la distancia mínima del rayo de luz al cuerpo esférico de masa M, el rayo de luz puede desviarse en mayor o menor medida.

Similarmente, para $\varphi_\mathrm{f} = \varphi_0 - \delta_2$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 &= u(\varphi_\mathrm{f}) \\
&= \frac{1}{D}\left[\sin(\varphi_0 - \delta_2 - \varphi_0) + \frac{m}{D}\left[1 + \cos^2(\varphi_0 - \delta_2 - \varphi_0)\right]\right] \\
&= \frac{1}{D}\left[\sin(-\delta_2) + \frac{m}{D}\left[1 + \cos^2(-\delta_2)\right]\right] \\
&= \frac{1}{D}\left[-\sin(\delta_2) + \frac{m}{D}\left[1 + \cos^2(\delta_2)\right]\right] \\
&= \frac{1}{D}\left[-\delta_2 + \mathcal{O}(\delta_2^2) + \frac{m}{D}\left[1 + (1 + \mathcal{O}(\delta_2^2))^2\right]\right] \\
&= \frac{1}{D}\left[-\delta_2 + \frac{2m}{D} + \mathcal{O}(\delta_2^2)\right],
\end{aligned} \tag{74}
$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\delta_2 = \frac{2m}{D}. \tag{75}$$

De la figura 2 se observa que $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Así, el ángulo de desvío está dado por

$$\delta \approx \frac{4m}{D}, \tag{76}$$

o, en términos de la masa central M,

$$\delta \approx \frac{4GM}{c^2 D}. \tag{77}$$

En el caso de rayos de luz pasando muy cerca de la superficie del Sol, $D \approx R_\odot$,

$$\delta_\odot \approx \frac{4GM_\odot}{c^2 R_\odot}. \tag{78}$$

Para calcular $\delta_\odot$, se necesitan los siguientes datos: [3]

$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg\, s^2}\right], \quad c = 299792458 \left[\frac{m}{s}\right], \quad M_\odot = 1.988 \times 10^{30}\,[kg], \tag{79}$$

$$R_\odot = 6.957 \times 10^8\ [m]. \tag{80}$$

Entonces, reemplazando los datos obtenemos

$$\delta_\odot \approx \frac{4(6.67430 \times 10^{-11})(1.988 \times 10^{30})}{(299792458)^2(6.957 \times 10^8)}\ \mathrm{rad} \approx 8.488 \times 10^6\ \mathrm{rad}. \tag{81}$$

Como $1^\circ = 3600$” (segundos de arco), tenemos que

$$\frac{\pi}{180}\ \mathrm{rad} = 3600\text{”} \Rightarrow 1\ \mathrm{rad} = \left(\frac{648000}{\pi}\right)^{\text{”}} \tag{82}$$

Por lo tanto, la predicción de Relatividad General para un haz de luz que pasa cerca de la superficie del Sol es que su ángulo de desvío es

[3] Datos sacados de https://physics.nist.gov/cuu/Constants/

$$\delta_{\odot} \approx (8.488 \times 10^{6}) \left(\frac{648000}{\pi} \right)^{"} \approx 1.75". \tag{83}$$