Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tópicos en Relatividad General

Semana 7

Nombre: Alejandro Saavedra San Martín.
Profesor: Guillermo Rubilar Alegría.

Ejercicio 1:

Considere un espaciotiempo estático esféricamente simétrico, de modo que, en coordenadas de curvatura, el elemento de línea se expresa en la forma

$$ds^2 = A(r)(c\,dt)^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad A > 0, B > 0. \tag{1}$$

(a) Considere un observador "en reposo", en el sentido que sus coordenadas espaciales (r, θ, φ) son siempre constantes. Además, debido a la simetría esférica, pueden elegirse sus coordenadas angulares como $\theta_{\text{obs}} = \pi/2$ y $\varphi_{\text{obs}} = 0$. Determine la expresión para la línea de mundo de este observador, parametrizada usando su tiempo propio, es decir, determine $x^\mu_{\text{obs}}(\tau_{\text{obs}})$, en términos de A, B y r.

Solución: Un dibujo esquemático de la situación física se encuentra en la figura 1a. Las coordenadas del observador son $x^\mu_{\text{obs}}(\tau_{\text{obs}}) = (ct_{\text{obs}}(\tau_{\text{obs}}), r, \pi/2, 0)$, con $r = \text{cte}$. Para encontrar $t_{\text{obs}}(\tau_{\text{obs}})$ debemos recordar la siguiente relación entre el tiempo propio y el elemento de línea:

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{2}$$

Evaluando los coeficientes de la métrica (1) y considerando que la única coordenada no constante es t, tenemos que

$$c^2 d\tau^2 = g_{tt} c^2 dt^2 = A(r) c^2 dt^2. \tag{3}$$

Despejando $dt/d\tau$, obtenemos

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{A(r)}}. \tag{4}$$

Integrando con respecto a τ:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{A(r)}} + C, \tag{5}$$

donde C es una constante de integración. Si asumimos que el observador se encuentra en el evento $x^\mu = (0, r, \pi/2, 0)$ para $\tau = 0$, se fija la constante C a cero. Entonces, renombrando las variables $t \to t_{\text{obs}}$ y $\tau \to \tau_{\text{obs}}$,

$$t_{\text{obs}}(\tau_{\text{obs}}) = \frac{\tau_{\text{obs}}}{\sqrt{A(r)}}. \tag{6}$$

Por lo tanto, la línea de mundo se encuentra parametrizada por

$$x^{\mu}_{\text{obs}}(\tau_{\text{obs}}) = \left(\frac{c\tau_{\text{obs}}}{\sqrt{A(r)}}, r, \frac{\pi}{2}, 0 \right). \tag{7}$$

(b) Considere ahora fotones (rayos de luz) confinados (usando, por ejemplo, fibra óptica) a moverse en una circunferencia (es decir, con coordenada radial constante), también con $\theta_{\text{fot}} = \pi/2$. Determine la expresión para la línea de mundo de estos fotones, parametrizada en términos del ángulo φ_{fot} a lo largo de su trayectoria. Asuma que para $\varphi_{\text{fot}} = 0$ el fotón pasa por el evento con coordenadas $x^{\mu}(0) = (0, r, \pi/2, 0)$ (que también está en la línea de mundo del observador).

Solución: Las coordenadas del fotón son $x^{\mu}_{\text{fot}}(\lambda) = (ct_{\text{fot}}(\lambda), r, \pi/2, \varphi_{\text{fot}}(\lambda))$. Elegimos parametrizar su línea de mundo por $\lambda = \varphi_{\text{fot}}$.

Usando la condición de curvas nulas para el fotón:

$$ds^2|_{\text{fot}} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = 0. \tag{8}$$

Evaluamos los coeficientes de la métrica (1) considerando que las únicas coordenadas no constantes son ct y φ,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} &= 0 && (9)\\ g_{tt} c^2 dt^2 + g_{rr} \cancelto{0}{dr^2} + g_{\theta\theta} \cancelto{0}{d\theta^2} + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 &= 0 && (10)\\ A(r) c^2 dt^2 - r^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) d\varphi^2 &= 0 && (11)\\ c^2 dt^2 &= \frac{r^2}{A(r)} d\varphi^2 && (12)\\ c\,\frac{dt}{d\varphi} &= \frac{r}{\sqrt{A(r)}}. && (13) \end{aligned}$$

Integrando con respecto a φ:

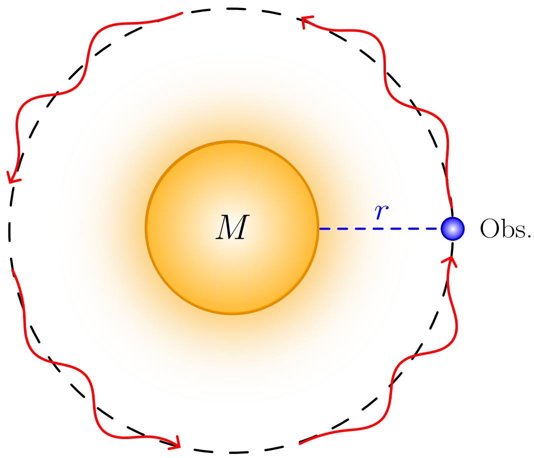
$$\begin{aligned} \int c \frac{dt}{d\varphi} d\varphi &= \int \frac{r}{\sqrt{A(r)}} d\varphi && (14)\\ ct &= \frac{r}{\sqrt{A(r)}} \varphi + D, && (15) \end{aligned}$$

donde D es una constante de integración. Si asumimos que el fotón pasa por el evento con coordenadas $x^{\mu}(0) = (0, r, \pi/2, 0)$, se fija la constante D a cero. Entonces, renombrando las variables $t \to t_{\text{fot}}$ y $\varphi \to \varphi_{\text{fot}}$, hemos encontrado que

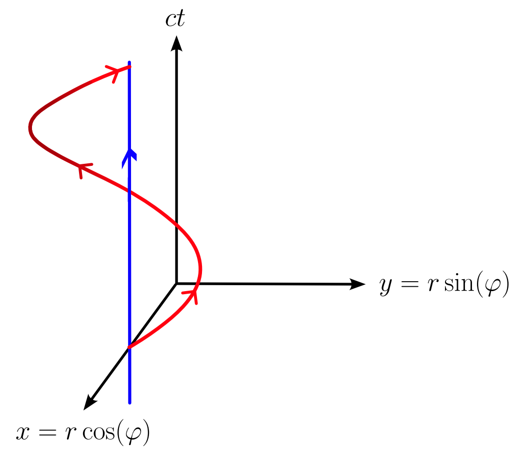
$$ct_{\text{fot}} = \frac{r}{\sqrt{A(r)}} \varphi_{\text{fot}}. \tag{16}$$

Por lo tanto, la línea de mundo se encuentra parametrizada por

$$x^{\mu}_{\text{fot}}(\varphi_{\text{fot}}) = \left(\frac{r}{\sqrt{A(r)}} \varphi_{\text{fot}}, r, \frac{\pi}{2}, \varphi_{\text{fot}} \right). \tag{17}$$



(a) Esquema de la situación física.



(b) Diagrama del espaciotiempo: línea de mundo del observador (en azul) y del fotón (en rojo).

En la figura 1b se ilustra en un diagrama del espaciotiempo las líneas de mundo del observador y del fotón.

(c) Determine las coordenadas del evento en el que la línea de mundo del rayo de luz vuelve a cruzarse con la línea de mundo del observador, luego de una revolución.

Solución: Después de una revolución, la línea de mundo del rayo del luz vuelve a cruzarse con la línea de mundo del observador cuando $\varphi_{\text{fot}} = 2\pi$. Por tanto, las coordenadas de este evento son

$$x^\mu = \left(\frac{2\pi r}{\sqrt{A(r)}}, r, \frac{\pi}{2}, 2\pi \right). \tag{18}$$

(d) Determine el tiempo propio, τ_{vuelo}, que el observador mide entre la "salida" y la "llegada" del fotón, luego de una revolución.

Solución: Después de una revolución las líneas de mundo del fotón y del observador se intersectan en el evento de coordenadas dadas por (18). Por lo tanto, para que coincidan (7) y (17), tiene que cumplirse

$$\frac{2\pi r}{\sqrt{A(r)}} = \frac{c\tau_{\text{vuelo}}}{\sqrt{A(r)}}. \tag{19}$$

Despejando τ_{vuelo}, encontramos que

$$\tau_{\text{vuelo}} = \frac{2\pi r}{c}. \tag{20}$$

Notemos que el resultado es independiente de la métrica (1).

(e) El tiempo (propio) determinado en el punto anterior es una cantidad directamente medible: el "tiempo de vuelo del fotón moviéndose en movimiento circular medido por un observador estático". A partir de este valor, llame $d := c\tau_{\text{vuelo}}$ "distancia recorrida por el fotón moviéndose en movimiento circular, con respecto a un observador estático" o, alternativamente, "perímetro de la circunferencia, con respecto a un observador estático", y determine su valor, en términos de A, B y r.

Solución: Si definimos la "distancia recorrida" por el fotón como $d := c\tau_{\text{vuelo}}$, obtenemos que

$$d = 2\pi r, \tag{21}$$

lo cual coincide con nuestro entendimiento clásico de perímetro de circunferencia.

(f) Considere, como caso particular, el espaciotiempo de Schwarzschild. Rehaga los cálculos anteriores, pero ahora en *coordenadas isotrópicas*. Compare los resultados obtenidos para d. Comente.

Solución: Si consideremos el espaciotiempo de Schwarzschild:

$$A(r) = 1 - \frac{2m}{r}, \quad B(r) = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}. \tag{22}$$

La líneas de mundo del observador y del fotón se encuentran parametrizadas, respectivamente, por

$$x^\mu_{\text{obs}}(\tau_{\text{obs}}) = \left(\frac{c\tau_{\text{obs}}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}, r, \frac{\pi}{2}, 0 \right), \tag{23}$$

$$x^\mu_{\text{fot}}(\varphi_{\text{fot}}) = \left(\frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \varphi_{\text{fot}}, r, \frac{\pi}{2}, \varphi_{\text{fot}} \right). \tag{24}$$

El tiempo de vuelo y la distancia recorrida tienen los mismo valores (20) y (21), respectivamente, porque el resultado es independiente de los coeficientes métricos $A(r)$ y $B(r)$.

Por otro lado, el elemento de línea, en *coordenadas isotrópicas* $x^\mu = (ct, \rho, \theta, \varphi)$, está dado por

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad \rho > \frac{m}{2}. \tag{25}$$

Las coordenadas del observador son $x^\mu_{\text{obs}}(\tau_{\text{obs}}) = (ct_{\text{obs}}(\tau_{\text{obs}}), \rho, \pi/2, 0)$, con $\rho = \text{cte}$. Para encontrar $t_{\text{obs}}(\tau_{\text{obs}})$ debemos recordar la siguiente relación entre el tiempo propio y el elemento de línea:

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{26}$$

Evaluando los coeficientes de la métrica (25) y considerando que la única coordenada no constante es t, tenemos que

$$c^2 d\tau^2 = g_{tt} c^2 dt^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} c^2 dt^2. \tag{27}$$

Despejando $dt/d\tau$:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)}. \tag{28}$$

Integrando con respecto a τ:

$$t = \frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)} \tau + C, \tag{29}$$

donde C es una constante de integración. Si asumimos que el observador se encuentra en el evento $x^\mu = (0, \rho, \pi/2, 0)$ para $\tau = 0$, se fija la constante C a cero. Entonces, renombrando las variables $t \to t_{\text{obs}}$ y $\tau \to \tau_{\text{obs}}$,

$$t_{\text{obs}}(\tau_{\text{obs}}) = \frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)} \tau_{\text{obs}}. \tag{30}$$

Por lo tanto, la línea de mundo del observador se encuentra parametrizada por

$$x^\mu_{\text{obs}}(\tau_{\text{obs}}) = \left(\frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)} c\tau_{\text{obs}}, \rho, \frac{\pi}{2}, 0 \right). \tag{31}$$

Las coordenadas del fotón son $x^\mu_{\text{fot}}(\lambda) = (ct_{\text{fot}}(\lambda), \rho, \pi/2, \varphi_{\text{fot}}(\lambda))$. Elegimos parametrizar su línea de mundo por $\lambda = \varphi_{\text{fot}}$.

Usando la condición de curvas nulas para el fotón:

$$ds^2|_{\text{fot}} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0. \tag{32}$$

Evaluamos los coeficientes de la métrica (25) considerando que las únicas coordenadas no constantes son ct y φ,

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \tag{33}$$

$$g_{tt} c^2 dt^2 + g_{\rho\rho} \cancelto{0}{d\rho^2} + g_{\theta\theta} \cancelto{0}{d\theta^2} + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 \rho^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) d\varphi^2 = 0 \tag{35}$$

$$c^2 dt^2 = \frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^6}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2} \rho^2\, d\varphi^2 \tag{36}$$

$$c\frac{dt}{d\varphi} = \frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^3}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)} \rho. \tag{37}$$

Integrando con respecto a φ:

$$\int c\frac{dt}{d\varphi} d\varphi = \int \frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^3}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)} \rho d\varphi \tag{38}$$

$$ct = \frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^3}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)} \rho\varphi + D, \tag{39}$$

donde D es una constante de integración. Si asumimos que el fotón pasa por el evento con coordenadas $x^\mu(0) = (0, \rho, \pi/2, 0)$, se fija la constante D a cero. Entonces, renombrando las variables $t \to t_{\text{fot}}$ y $\varphi \to \varphi_{\text{fot}}$, hemos encontrado que

$$ct_{\text{fot}} = \frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^3}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)} \rho \varphi_{\text{fot}}. \tag{40}$$

Por lo tanto, la línea de mundo se encuentra parametrizada por

$$x^\mu_{\text{fot}}(\varphi_{\text{fot}}) = \left(\frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^3}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)} \rho \varphi_{\text{fot}}, \rho, \frac{\pi}{2}, \varphi_{\text{fot}} \right). \tag{41}$$

Después de una revolución, la línea de mundo del rayo del luz vuelve a cruzarse con la línea de mundo del observador cuando $\varphi_{\text{fot}} = 2\pi$. Por tanto, las coordenadas de este evento son

$$x^\mu = \left(\frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^3}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)} 2\pi\rho, \rho, \frac{\pi}{2}, 2\pi \right). \tag{42}$$

Por lo tanto, para que coincidan (31) y (41), se debe cumplir que

$$\frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^3}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)} 2\pi\rho = \frac{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)}{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)} c\tau_{\text{vuelo}} \tag{43}$$

Despejando τ_{vuelo}, encontramos que

$$\tau_{\text{vuelo}} = \frac{2\pi\rho}{c} \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2. \tag{44}$$

Luego, la "distancia recorrida"por el fotón es

$$d = c\tau_{\text{vuelo}} = 2\pi\rho \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2, \tag{45}$$

la cual es distinta que la "distancia.$^{\text{en}}$ coordenadas de curvatura.

Como el tiempo propio es un escalar, podemos igualar las ecuaciones (20) y (44), obteniendo

$$r = \rho \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2, \tag{46}$$

la cual corresponde a la transformación entre las coordenadas r y ρ vistas en el documento de la semana 1.

Ejercicio 2:

Considere un objeto orbitando una masa esféricamente simétrica, en una órbita geodésica circular ($r = R = \text{cte}$), un observador comóvil y dos observadores "en reposo", todos ubicados en el mismo plano de la órbita, tal como se describen más abajo. Modele el problema usando la métrica de Schwarzschild en coordenadas de curvatura:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \quad r > 2m. \tag{47}$$

(a) Determine el tiempo T_{com}, que mide un observador viajando (es decir, comóvil) con el cuerpo que orbita, en una revolución, en función de la coordenada radial R de la órbita.

Solución: Sabemos del documento de la semana 3 que una geodésica circular estable con coordenada radial r_{c}, parametrizada por el tiempo propio, está dada por

$$x^\mu(\tau) = \left(\frac{c\tau}{\sqrt{1 - \frac{3m}{r_{\text{c}}}}}, r_{\text{c}}, \frac{\pi}{2}, \frac{c\tau}{r_{\text{c}}}\sqrt{\frac{m}{r_{\text{c}} - 3m}}\right). \tag{48}$$

En nuestro caso, $r_{\text{c}} = R$. El tiempo $\tau = T_{\text{com}}$ que mide un observador viajando con el cuerpo que orbita, en una revolución, se obtiene cuando la coordenada angular $\varphi = 2\pi$, ésto es,

$$\frac{cT_{\text{com}}}{R}\sqrt{\frac{m}{R - 3m}} = 2\pi. \tag{49}$$

Despejando T_{com}, encontramos que

$$T_{\text{com}} = \frac{2\pi R}{c}\sqrt{\frac{R - 3m}{m}}. \tag{50}$$

Si consideremos el límite de campo débil: $R \gg m$,

$$T_{\text{com}} \approx \frac{2\pi R}{c}\sqrt{\frac{R}{m}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}, \tag{51}$$

donde se reemplazó $m = GM/c^2$. Este resultado coincide con el caso newtoniano. En efecto, para un cuerpo de masa $\bar{m}$ que describe un movimiento circular de radio R producto de la fuerza de atracción gravitatoria, por la segunda ley de Newton,

$$\frac{GM\bar{m}}{R^2} = \bar{m}a_{\text{cen}} = \bar{m}R\omega^2, \tag{52}$$

con $a_{\text{cen}} = R\omega^2$ la aceleración centrípeta. Recordando que $\omega = 2\pi/T$, tenemos que

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}. \tag{53}$$

(b) Determine ahora el tiempo T_{rep}, que mide un observador "en reposo" e igualmente distanciado del centro de fuerzas que el objeto orbitando (es decir, con la misma coordenada radial) en una revolución.

Solución: Las coordenadas del observador “en reposo”son $x^\mu_{\text{rep}} = (ct, R, \pi/2, 0)$. Usando la relación entre el tiempo propio y el elemento de línea:

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{54}$$

Evaluando los coeficientes de la métrica (47) y considerando que la única coordenada no constante es t, tenemos que

$$c^2 d\tau^2 = g_{tt} c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{2m}{R}\right) c^2 dt^2. \tag{55}$$

Despejando $dt/d\tau$:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}}. \tag{56}$$

Integrando con respecto a τ:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}} + D, \tag{57}$$

donde D es una constante de integración. Si asumimos que el observador en reposo para por el evento de coordenadas $x^\mu = (0, R, \pi/2, 0)$ para $\tau = 0$, se fija la constante D a cero. Por tanto, renombrando las variables $t \to t_{\text{rep}}$ y $\tau \to \tau_{\text{rep}}$,

$$t_{\text{rep}} = \frac{\tau_{\text{rep}}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}}. \tag{58}$$

Por lo tanto, la línea de mundo del observador en reposo se encuentra parametrizada por

$$x^\mu_{\text{rep}}(\tau_{\text{rep}}) = \left(\frac{c\tau_{\text{rep}}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}}, R, \frac{\pi}{2}, 0 \right). \tag{59}$$

Después de una revolución, las líneas de mundo del observador orbitando y en reposo se intersectan, coincidiendo sus coordenadas temporales. Reemplazando τ por T_{com} en (48), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{cT_{\text{com}}}{\sqrt{1 - \frac{3m}{R}}} &= \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{3m}{R}}} \frac{2\pi R}{c} \sqrt{\frac{R - 3m}{m}} \\ &= \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{R-3m}{R}}} \sqrt{\frac{R - 3m}{m}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{m}}. \end{aligned} \tag{60}$$

Entonces, igualando la coordenada temporal del observador orbitando y del observador en reposo:

$$\frac{cT_{\rm com}}{\sqrt{1-\frac{3m}{R}}} = \frac{cT_{\rm rep}}{\sqrt{1-\frac{2m}{R}}} \tag{61}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{R^3}{m}} = \frac{cT_{\rm rep}}{\sqrt{1-\frac{2m}{R}}} \tag{62}$$

$$T_{\rm rep} = \frac{2\pi}{c}\sqrt{1-\frac{2m}{R}}\sqrt{\frac{R^3}{m}} \tag{63}$$

$$T_{\rm rep} = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{R^3}{m}-2R^2}. \tag{64}$$

Reordenando la última expresión, tenemos que el tiempo que mide un observador en reposo es

$$T_{\rm rep} = \frac{2\pi R}{c}\sqrt{\frac{R-2m}{m}}. \tag{65}$$

(c) Finalmente, determine el tiempo T_∞ que mide un observador "en reposo"muy lejano ("en el infinito"), es decir, con $r = \text{cte}$, pero $r \gg 2m$, correspondiente a cuando él "ve"que el objeto orbitando finaliza una revolución completa.

Solución: Si consideremos que los observadores están alineados, podemos usar la expresión calculada para el redshift gravitacional en el documento de la semana 6, a saber,

$$\frac{\Delta\tau_{\rm r}}{\Delta\tau_{\rm e}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2m}{r_{\rm R}}}{1-\frac{2m}{r_{\rm E}}}}. \tag{66}$$

En nuestro caso, $r_{\rm R} \gg 2m$, $r_{\rm E} = R$, $\Delta\tau_{\rm r} = T_\infty$ y $\Delta\tau_{\rm e} = T_{\rm rep}$. Por tanto,

$$\frac{T_\infty}{T_{\rm rep}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{R}}}. \tag{67}$$

Reemplazando (65) en (67), tenemos que

$$\begin{aligned} T_\infty &= \frac{T_{\rm rep}}{\sqrt{1-\frac{2m}{R}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{R}}}\left(\frac{2\pi R}{c}\sqrt{\frac{R-2m}{m}}\right) \\ &= \frac{2\pi R}{c}\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R-2m}}\frac{\sqrt{R-2m}}{\sqrt{m}} \\ &= \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{R^3}{m}}. \end{aligned} \tag{68}$$

Por lo tanto, el tiempo que mide un observador en reposo en el infinito es

$$T_\infty = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{R^3}{m}}. \tag{69}$$

(d) Los tres tiempo calculados anteriores corresponden a la noción clásica de "periodo orbital". Compare sus resultados y discuta sus diferencias.

Solución: Los tiempos calculados son:

$$T_{\text{com}} = \frac{2\pi R}{c}\sqrt{\frac{R-3m}{m}}, \tag{70}$$

$$T_{\text{rep}} = \frac{2\pi R}{c}\sqrt{\frac{R-2m}{m}}, \tag{71}$$

$$T_\infty = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{R^3}{m}}. \tag{72}$$

A pesar de haber sido calculados con la misma noción clásica de "periodo orbital", sus valores son distintos. Solo el último coincide con el periodo orbital newtoniano (53).