

Semana 13

Nombre: Alejandro Saavedra San Martín.

Profesor: Guillermo Rubilar Alegría.

1. Campos gravitacionales débiles y ondas gravitacionales

1.1. Generación de ondas gravitacionales

Recordemos que, en el gauge de Lorenz, las ecuaciones de Einstein linealizadas asumen la forma

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(0)}, \quad \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (1)$$

Las soluciones particulares corresponden a campos retardados asintóticamente nulos de la forma

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}^{(0)}(\vec{x}', t_{\text{ret}})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad (2)$$

donde $t_{\text{ret}} = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$ es el *tiempo retardado*.

Siguiendo el caso de ondas electromagnéticas, consideremos distancias muy grandes (en la zona lejana o zona de radiación, $r \gg \lambda$) y para fuentes pequeñas (de tamaño $L \ll \lambda$), ver figura 1a. Si $|\vec{x}| = r$, entonces para $\vec{x}'/r \ll 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}'| &= |r\hat{r} - \vec{x}'| \\ &= r \left| \hat{r} - \frac{\vec{x}'}{r} \right| \\ &= r \sqrt{\left(\hat{r} - \frac{\vec{x}'}{r} \right) \cdot \left(\hat{r} - \frac{\vec{x}'}{r} \right)} \\ &= r \sqrt{1 - 2\frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})} \\ &= r \left(1 - \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right) \\ &= r - \vec{x}' \cdot \hat{r} + \mathcal{O}(r^{-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Luego, tomando el recíproco, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &\approx \frac{1}{r - \vec{x}' \cdot \hat{r}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{r}} \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right) \\ &= \frac{1}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}). \end{aligned} \quad (4)$$

Reemplazando en la expresión del tiempo retardado, encontramos que, bajo estas aproximaciones,

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c} + \mathcal{O}(r^{-1}). \quad (5)$$

Para calcular la perturbación de la métrica incluyendo términos hasta orden $1/r$ es suficiente expandir $T_{\mu\nu}^{(0)}(\vec{x}', t_{\text{ret}})$ a orden cero en potencias de $1/r$, es decir,

$$T_{\mu\nu}^{(0)}(\vec{x}', t_{\text{ret}}) = T_{\mu\nu}^{(0)}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}\right) + \mathcal{O}(r^{-1}), \quad (6)$$

de modo que

$$\frac{T_{\mu\nu}^{(0)}(\vec{x}', t_{\text{ret}})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} T_{\mu\nu}^{(0)}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{r}}{c}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (7)$$

Como estamos interesados en distancias lejanas, $r \gg \vec{x}' \cdot \hat{r}$, así que

$$\frac{T_{\mu\nu}^{(0)}(\vec{x}', t_{\text{ret}})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \approx \frac{1}{r} T_{\mu\nu}^{(0)}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c}\right). \quad (8)$$

Reemplazando (8) en (2), obtenemos que

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \int T_{\mu\nu}^{(0)}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c}\right) d^3x' + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (9)$$

En otras palabras,

$$\bar{h}_{\text{rad}}^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \int T_{\mu\nu}^{(0)}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c}\right) d^3x'. \quad (10)$$

Además, en una región limitada del espacio, la onda puede aproximarse por una onda plana. En el gauge de Lorenz, toda la información de la onda está contenida en las componentes puramente espaciales \bar{h}_{ij} . Adicionalmente, podemos expresar la integral (retardada) $\int T_{(0)}^{ij} d^3x$ en términos de derivadas del momento cuadrupolar de la fuente. En efecto, usando la regla del producto, podemos escribir que

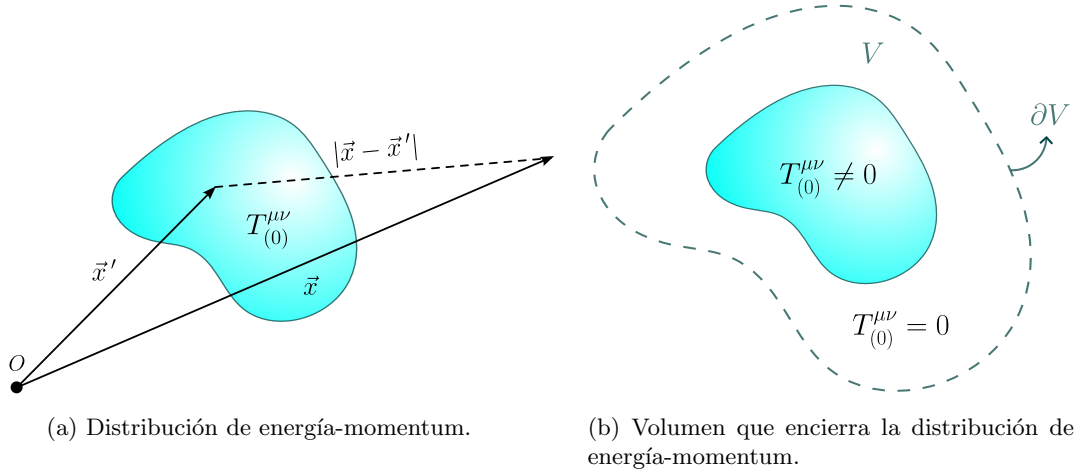
$$\begin{aligned} \int_V \partial_k \left(T_{(0)}^{ik} x^j \right) d^3x &= \int_V \left(\partial_k T_{(0)}^{ik} \right) x^j d^3x + \int_V T_{(0)}^{ik} \delta_k^j d^3x \\ &= \int_V \left(\partial_k T_{(0)}^{ik} \right) x^j d^3x + \int_V T_{(0)}^{ij} d^3x. \end{aligned} \quad (11)$$

Al escribir las ecuaciones de Einstein linealizadas, obtuvimos que $\partial_\nu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0$, entonces para $\mu = i$,

$$\partial_0 T_{(0)}^{i0} = -\partial_k T_{(0)}^{ik}. \quad (12)$$

Reemplazando (12) en (11), encontramos que

$$\begin{aligned} \int_V \partial_k \left(T_{(0)}^{ik} x^j \right) d^3x &= - \int_V \left(\partial_0 T_{(0)}^{i0} \right) x^j d^3x + \int_V T_{(0)}^{ij} d^3x \\ &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_V T_{(0)}^{i0} x^j d^3x + \int_V T_{(0)}^{ij} d^3x. \end{aligned} \quad (13)$$



Pero, usando el teorema de Gauss y suponiendo que el volumen de integración encierra por completo la distribución de energía-momentum que genera el campo gravitacional (distribución compacta), ver figura 1b, $T_{(0)}^{\mu\nu}$ se anula en el borde. Así,

$$\int_V \partial_k (T_{(0)}^{ik} x^j) d^3x = \int_{\partial V} T_{(0)}^{ik} x^j dS_k = 0. \quad (14)$$

Por lo tanto, al comparar (13) y (14), se obtiene que

$$\int_V T_{(0)}^{ij} d^3x = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int T_{(0)}^{i0} x^j d^3x. \quad (15)$$

Como T^{ij} es simétrico, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_V T_{(0)}^{ij} d^3x &= \frac{1}{2} \int_V (T_{(0)}^{ij} + T_{(0)}^{ji}) d^3x \\ &= \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_V (T_{(0)}^{i0} x^j + T_{(0)}^{j0} x^i) d^3x. \end{aligned} \quad (16)$$

Efectuamos ahora un análisis similar con la expresión $\int \partial_k (T_{(0)}^{0k} x^i x^j) d^3x$, que también es nula, pues, por el teorema de Gauss, se puede transformar en una integral de superficie en el borde de V fuera de la región con fuentes. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \partial_k (T_{(0)}^{0k} x^i x^j) d^3x \\ &= \int_V \partial_k (T_{(0)}^{0k}) x^i x^j d^3x + \int_V T_{(0)}^{0k} \delta_k^i x^j d^3x + \int_V T_{(0)}^{0k} x^i \delta_k^j d^3x \\ &= \int_V \partial_k (T_{(0)}^{0k}) x^i x^j d^3x + \int_V (T_{(0)}^{0i} x^j + T_{(0)}^{0j} x^i) d^3x. \end{aligned} \quad (17)$$

Usando (12), cambiando el índice espacial i por el temporal 0, la ecuación (17) nos queda

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_V \partial_0 (T_{(0)}^{00}) x^i x^j d^3x + \int_V (T_{(0)}^{0i} x^j + T_{(0)}^{0j} x^i) d^3x \\ &= - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_V T_{(0)}^{00} x^i x^j d^3x + \int_V (T_{(0)}^{0i} x^j + T_{(0)}^{0j} x^i) d^3x. \end{aligned} \quad (18)$$

Por lo tanto,

$$\int_V \left(T_{(0)}^{0i} x^j + T_{(0)}^{0j} x^i \right) d^3x = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_V T_{(0)}^{00} x^i x^j d^3x. \quad (19)$$

De esta forma, usando (16) y (19) encontramos que

$$\int_V T_{(0)}^{ij} d^3x = \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_V T_{(0)}^{00} x^i x^j d^3x. \quad (20)$$

Reemplazando (20) en (22), podemos escribir que

$$\bar{h}_{\text{rad}}^{ij}(\vec{x}, t) = -\frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{c^2} \int_V T_{(0)}^{00}(x') x'^i x'^j d^3x' \right]_{\text{ret}}. \quad (21)$$

Como $T_{(0)}^{00}/c^2 = \rho(\vec{x}, t)$ es la densidad de masa de la fuente (a primer orden), se acostumbra a escribir

$$\bar{h}_{\text{rad}}^{ij}(\vec{x}, t) = -\frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \left[\ddot{M}^{ij} \right]_{\text{ret}}, \quad (22)$$

donde

$$M^{ij}(t) := \int_V \rho(\vec{x}, t) x^i x^j d^3x, \quad (23)$$

es el tensor momento de inercia (con traza) de la fuente.

1.2. Ejemplo:

Consideremos dos cuerpos, cada uno de masa M , con una separación $2R$ que rotan en un movimiento no-relativista con velocidad angular ω en torno al centro de masa del sistema. Si inicialmente los cuerpos se encontraban en $\vec{x}_1(t=0) = (0, 0, 0)$ y $\vec{x}_2(t=0) = (-R, 0, 0)$, las posiciones de las masas están dada por

$$\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), 0), \quad (24)$$

$$\vec{x}_2 = (x_2, y_2, z_2) = (R \cos(\omega t + \pi), R \sin(\omega t + \pi), 0) = -\vec{x}_1. \quad (25)$$

En este caso, donde la distribución de masa no es continua, tenemos que

$$\int \rho x^i x^j dV \rightarrow \sum m x^i x^j. \quad (26)$$

Las únicas componentes no nulas del momento cuadrupolar gravitacional son:

$$\begin{aligned} M^{xx} &= m_1 x_1 x_1 + m_2 x_2 x_2 \\ &= MR^2 \cos^2(\omega t) + MR^2 \cos^2(\omega t) \\ &= 2MR^2 \cos^2(\omega t) \\ &= MR^2 [1 + \cos(2\omega t)], \\ M^{xy} &= m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 \\ &= 2MR^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (27)$$

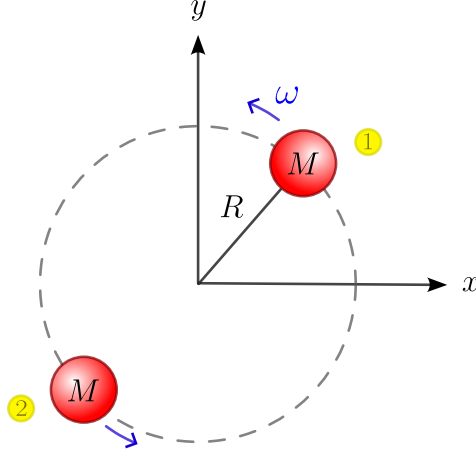


Figura 2: Sistema binario de dos masas M rotando en un círculo de radio R y rapidez angular ω .

$$= MR^2 \sin(2\omega t), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} M^{yy} &= m_1 y_1 y_1 + m_2 y_2 y_2 \\ &= MR^2 \sin^2(\omega t) + MR^2 \sin^2(\omega t) \\ &= 2MR^2 \sin^2(\omega t) \\ &= MR^2 [1 - \cos(2\omega t)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Pero, $M^{xz} = M^{yz} = M^{zz} = 0$, ya que el movimiento es en el plano xy .
Derivando con respecto al tiempo dos veces,

$$\ddot{M}^{xx} = -4MR^2\omega^2 \cos(2\omega t), \quad (30)$$

$$\ddot{M}^{xy} = -4MR^2\omega^2 \sin(2\omega t), \quad (31)$$

$$\ddot{M}^{yy} = 4MR^2\omega^2 \cos(2\omega t). \quad (32)$$

En representación matricial,

$$\ddot{M}^{ij} = -4MR^2\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Con esto, (22) implica que

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\text{rad}}^{ij}(\vec{x}, t) &= -\frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \left[-4MR^2\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(2\omega t_{\text{ret}}) & \sin(2\omega t_{\text{ret}}) & 0 \\ \sin(2\omega t_{\text{ret}}) & -\cos(2\omega t_{\text{ret}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{t_{\text{ret}}=t-r/c} \\ &= \frac{8GMR^2\omega^2}{c^4 r} \begin{pmatrix} \cos[2\omega(t-r/c)] & \sin[2\omega(t-r/c)] & 0 \\ \sin[2\omega(t-r/c)] & -\cos[2\omega(t-r/c)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8GMR^2\omega^2}{c^4r} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[2\omega(t-r/c)] + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sin[2\omega(t-r/c)] \right] \\
&= \frac{8GMR^2\omega^2}{c^4r} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[2\omega(t-r/c)] + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[2\omega(t-r/c) - \pi/2] \right] \\
&= \frac{8GMR^2\omega^2}{c^4r} \Re \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i[2\omega(t-\frac{r}{c})]} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i[2\omega(t-\frac{r}{c})-\frac{\pi}{2}]} \right]. \tag{34}
\end{aligned}$$

Vemos de aquí que un observador ubicado en un punto sobre el eje z detectará una onda gravitacional de frecuencia angular 2ω , que satisface automáticamente el gauge TT, y que es una combinación lineal de las polarizaciones $+$ y \times , con una diferencia de fase de $\pi/2$. Este estado es análogo al de una onda electromagnética con polarización circular.

El orden de magnitud de la amplitud de la onda es dada por

$$h \simeq \frac{8GMR^2\omega^2}{c^4r} = 8 \left(\frac{GM}{c^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2 = 8 \left(\frac{m}{r} \right) \left(\frac{v}{c} \right)^2, \tag{35}$$

donde $v = \omega R$ es la rapidez de un objeto en un movimiento circular de radio R con frecuencia angular ω .

Por ejemplo, el pulsar binario PSR 1913+16 consta de dos estrellas de neutrones de masa $M \approx 1.4M_\odot$, con periodo orbital $T \approx 8 \text{ h} \approx 3 \times 10^4 \text{ s}$, velocidades orbitales $v \simeq 10^2 \text{ km/s}$, a una distancia $r \approx 2 \times 10^4 \text{ ly} \approx 10^{20} \text{ m}$.

Para calcular h , se necesitan los siguientes datos: ¹

$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \right], \quad c = 299792458 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \quad M_\odot = 1.988 \times 10^{30} [\text{kg}]. \tag{36}$$

Así, obtenemos que

$$m = \frac{(6.67430 \times 10^{-11}) \cdot 1.4 \cdot (1.988 \times 10^{30})}{(299792458)^2} [\text{km}] \approx 2.067 [\text{km}], \tag{37}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{10^5}{299792458} \approx 3 \times 10^{-4}. \tag{38}$$

Por lo tanto, la amplitud de la onda gravitacional es

$$h \simeq 8 \cdot \left(\frac{2.067 \times 10^3}{10^{20}} \right) (3 \times 10^{-4})^2 \approx 1.4 \times 10^{-23}, \tag{39}$$

a una frecuencia del orden de $1/T \sim 10^{-4} [\text{Hz}]$.

¹Datos sacados de <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/>