Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tópicos en Relatividad General

Semana 6

Nombre: Alejandro Saavedra San Martín.
Profesor: Guillermo Rubilar Alegría.

Redshift Gravitacional

Consideremos dos observadores en “reposo” en el espaciotiempo de Schwarzschild. Desde un emisor “escapan” fotones del centro de fuerzas de manera radial, ver figura 1a. En este caso, debido a la simetría esférica, podemos considerar que los fotones se mueven en trayectorias con $\theta = \pi/2$ y $\varphi = 0$.

Usando la condición para curvas nulas del fotón: $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$, obtenemos que

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} = 0. \tag{1}$$

Por lo tanto, despejando c^2dt^2 y sacando raíz cuadrada,

$$c\, dt = \pm \frac{dr}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}. \tag{2}$$

Los signos positivo y negativo corresponden a fotones “escapando desde” y “cayendo hacia” el centro de fuerzas, respectivamente. Para el primero caso, tenemos que

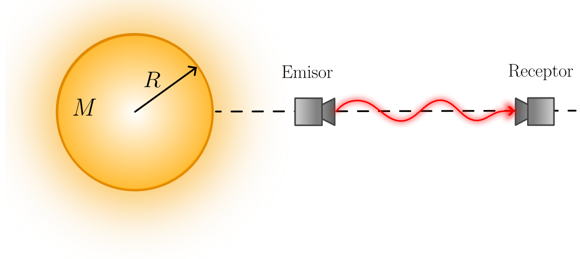
$$c(t - t_0) = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\left(1 - \frac{2m}{r'}\right)} = \int_{r_0}^{r} \frac{r'}{r' - 2m}\, dr', \tag{3}$$

donde $x^\mu_{\rm i} = (ct_0, r_0, \pi/2, 0)$ son las coordenadas iniciales del fotón y $x^\mu_{\rm f} = (ct, r, \pi/2, 0)$ las finales.

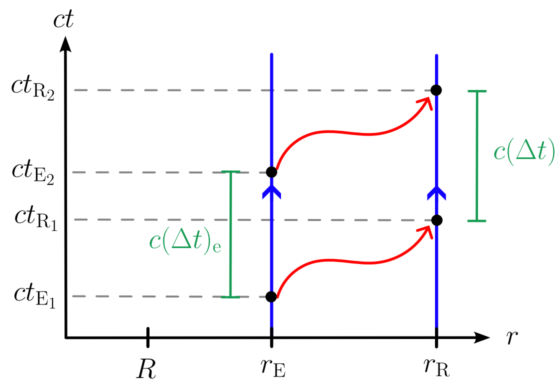
Si hacemos el cambio de variable $u = r' - 2m$ tal que $du = dr'$, entonces

$$\begin{aligned} c(t - t_0) &= \int_{r_0-2m}^{r-2m} \frac{u + 2m}{u} du \\ &= \int_{r_0-2m}^{r-2m} 1 + \frac{2m}{u}\, du \\ &= (u + 2m \ln|u|)\big|_{r_0-2m}^{r-2m} \\ &= r - r_0 + 2m \ln\left|\frac{r - 2m}{r_0 - 2m}\right| \\ &= r - r_0 + 2m \ln\left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

el valor absoluto se retiró, pues $r, r_0 > 2m$. Por lo tanto,



(a) Esquema de la situación física.



(b) Diagrama del espaciotiempo.

$$ct = ct_0 + r - r_0 + 2m \ln\left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m}\right). \tag{5}$$

Esta relación define en forma explícita la ecuación de la trayectoria, exacta en el espaciotiempo de Schwarzschild, $r = r(t)$, del fotón escapando radialmente.

Un dibujo esquemático de la situación física está ilustrado en la figura 1a y el diagrama del espacio-tiempo en la figura 1b. Si el emisor ubicado en $r = r_{\mathrm{E}}$ emite un fotón en la coordenada temporal t_{E_1}, la ecuación de la trayectoria que sigue el fotón (en el diagrama del espaciotiempo) se obtiene al reemplazar $r_0 = r_{\mathrm{E}}$ y $t_0 = t_{\mathrm{E}_1}$ en (5):

$$ct = ct_{\mathrm{E}_1} + r - r_{\mathrm{E}} + 2m \ln\left(\frac{r - 2m}{r_{\mathrm{E}} - 2m}\right). \tag{6}$$

Si se emite otro fotón en la coordenada temporal t_{E_2}, la ecuación de la trayectoria es

$$ct = ct_{\mathrm{E}_2} + r - r_{\mathrm{E}} + 2m \ln\left(\frac{r - 2m}{r_{\mathrm{E}} - 2m}\right). \tag{7}$$

Si $c(\Delta t)_{\mathrm{e}} = ct_{\mathrm{E}_2} - ct_{\mathrm{E}_1}$, entonces (7) nos queda

$$ct = ct_{\mathrm{E}_1} + c(\Delta t)_{\mathrm{e}} + r - r_{\mathrm{E}} + 2m \ln\left(\frac{r - 2m}{r_{\mathrm{E}} - 2m}\right). \tag{8}$$

El primer fotón llega al receptor ($r = r_{\mathrm{R}}$) en la coordenada temporal t_{R_1} y el segundo fotón en la coordenada temporal t_{R_2}. Reemplazando estos datos en (6) y (8), respectivamente,

$$ct_{\mathrm{R}_1} = ct_{\mathrm{E}_1} + r_{\mathrm{R}} - r_{\mathrm{E}} + 2m \ln\left(\frac{r_{\mathrm{R}} - 2m}{r_{\mathrm{E}} - 2m}\right), \tag{9}$$

$$ct_{\mathrm{R}_2} = ct_{\mathrm{E}_1} + c(\Delta t)_{\mathrm{e}} + r_{\mathrm{R}} - r_{\mathrm{E}} + 2m \ln\left(\frac{r_{\mathrm{R}} - 2m}{r_{\mathrm{E}} - 2m}\right). \tag{10}$$

Si $c(\Delta t)_{\mathrm{r}} = ct_{\mathrm{R}_2} - ct_{\mathrm{R}_1}$, entonces

$$(\Delta t)_{\mathrm{r}} = (\Delta t)_{\mathrm{e}}. \tag{11}$$

Este es un resultado general, válido para todo espaciotiempo estacionario. Por ejemplo, si consideramos el elemento de línea

$$ds^2 = A(r)c^2dt^2 - B(r)dr^2 - r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \tag{12}$$

donde $A(r)$ y $B(r)$ son funciones de la coordenada radial r.

Usando la condición $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$ y fijando $\theta = \pi/2$ y $\varphi = 0$, obtenemos que

$$A(r)c^2dt^2 - B(r)dr^2 = 0. \tag{13}$$

Luego,

$$c\,dt = \pm\sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}}dr, \tag{14}$$

siempre que $B/A > 0$. Si consideramos el caso con $+$ y que las coordenadas iniciales del fotón son $x^\mu_{\mathrm{i}} = (ct_0, r_0, \pi/2, 0)$ y finales $x^\mu_{\mathrm{f}} = (ct, r, \pi/2, 0)$, la ecuación de la trayectoria nos queda

$$ct = ct_0 + \int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{B(r')}{A(r')}}dr'. \tag{15}$$

Bajo la misma situación física de dos fotones emitidos en $r = r_{\mathrm{E}}$ a diferentes coordenadas temporales, t_{E_1} y t_{E_2}, y recibidos en $r = r_{\mathrm{R}}$ en coordenadas temporales t_{R_1} y t_{R_2}, respectivamente, obtenemos que

$$ct_{\mathrm{R}_1} = ct_{\mathrm{E}_1} + \int_{r_{\mathrm{E}}}^{r_{\mathrm{R}}}\sqrt{\frac{B(r')}{A(r')}}dr', \tag{16}$$

$$ct_{\mathrm{R}_2} = ct_{\mathrm{E}_1} + c(\Delta t)_{\mathrm{e}} + \int_{r_{\mathrm{E}}}^{r_{\mathrm{R}}}\sqrt{\frac{B(r')}{A(r')}}dr'. \tag{17}$$

Por lo tanto,

$$c(\Delta t)_{\mathrm{r}} = ct_{\mathrm{R}_2} - ct_{\mathrm{R}_1} = c(\Delta t)_{\mathrm{e}}. \tag{18}$$

Es importante recordar que lo único medible es el tiempo propio, entonces el resultado $c(\Delta t)_{\mathrm{r}} = c(\Delta t)_{\mathrm{e}}$ no significa que los fotones son recibidos en el mismo intervalo que se emitieron. Recordemos que

$$c\,d\tau = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}. \tag{19}$$

Así, los tiempos propios asociados a observadores “en reposo” en el punto de emisión y recepción, es decir, cuyas líneas de mundo tienen coordenada radial constante r_{E} y r_{R}, respecitvamente, quedan determinados por

$$c\,d\tau = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}c\,dt, \tag{20}$$

de modo que

$$\Delta\tau_{\mathrm{e}} = \sqrt{1 - \frac{2m}{r_{\mathrm{E}}}}(\Delta t)_{\mathrm{e}}, \quad \Delta\tau_{\mathrm{r}} = \sqrt{1 - \frac{2m}{r_{\mathrm{R}}}}(\Delta t)_{\mathrm{r}}. \tag{21}$$

Con estos ingredientes, obtenemos

$$\frac{\Delta\tau_{\rm r}}{\Delta\tau_{\rm e}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2m}{r_{\rm R}}}{1-\frac{2m}{r_{\rm E}}}}. \tag{22}$$

En el límite de campo débil: $r_{\rm E}, r_{\rm R} \gg 2m$, se tiene que

$$\frac{1}{1-\frac{2m}{r_{\rm E}}} = 1 + \frac{2m}{r_{\rm E}} + \mathcal{O}\left(\frac{4m^2}{r_{\rm E}^2}\right). \tag{23}$$

Luego, a primer orden en $2m/r_{\rm E}$ y $2m/r_{\rm R}$,

$$\begin{aligned}\frac{1-\frac{2m}{r_{\rm R}}}{1-\frac{2m}{r_{\rm E}}} &= \left(1-\frac{2m}{r_{\rm R}}\right)\left(1+\frac{2m}{r_{\rm E}}+\mathcal{O}\left(\frac{4m^2}{r_{\rm E}^2}\right)\right)\\ &\approx 1+\frac{2m}{r_{\rm E}}-\frac{2m}{r_{\rm R}}.\end{aligned} \tag{24}$$

Reemplazando en (22) y expandiendo en serie de Taylor:

$$\frac{\Delta\tau_{\rm r}}{\Delta\tau_{\rm e}} \approx \sqrt{1+\frac{2m}{r_{\rm E}}-\frac{2m}{r_{\rm R}}} \approx 1+\frac{m}{r_{\rm E}}-\frac{m}{r_{\rm R}}. \tag{25}$$

Si $\Delta\tau_{\rm e}$ corresponde al periodo de emisión $P_{\rm e}$ de una onda y $\Delta\tau_{\rm r}$ corresponde al periodo de recepción $P_{\rm r}$, tenemos que

$$\frac{\Delta\tau_{\rm r}}{\Delta\tau_{\rm e}} = \frac{P_{\rm e}}{P_{\rm r}} = \frac{\nu_{\rm r}}{\nu_{\rm e}} = \frac{\lambda_{\rm r}}{\lambda_{\rm e}}. \tag{26}$$

Como el redshift está dado por

$$z = \frac{\lambda_{\rm r}-\lambda_{\rm e}}{\lambda_{\rm e}} = \frac{\lambda_{\rm r}}{\lambda_{\rm e}} - 1, \tag{27}$$

encontramos, en Relatividad General, que

$$z = \sqrt{\frac{1-\frac{2m}{r_{\rm R}}}{1-\frac{2m}{r_{\rm E}}}} - 1 \tag{28}$$

y en el límite de campo débil,

$$z \approx \frac{m}{r_{\rm E}} - \frac{m}{r_{\rm R}} = \frac{GM}{c^2 r_{\rm E}} - \frac{GM}{c^2 r_{\rm R}} = \frac{\Delta\phi}{c^2}, \tag{29}$$

donde $\phi(r) = -GM/r$. Resultado que coincide con lo visto para el redshift gravitacional no relativista (Newton + principio de equivalencia fuerte).