Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tópicos en Relatividad General

Semana 3

Nombre: Alejandro Saavedra San Martín.
Profesor: Guillermo Rubilar Alegría.

Concluímos que las geodésicas tipo tiempo en la geometría de Schwarzschild quedan completamente determinados resolviendo la siguiente ecuación para $r = r(\tau)$.

$$\dot{r}^2 = k^2c^2 - c^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{h^2m^2}{r^2}\right). \tag{1}$$

Si definimos el **potencial efectivo**

$$\tilde{V}(r) := \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{h^2m^2}{r^2}\right), \tag{2}$$

de modo que (1) puede reescribirse como

$$\frac{\dot{r}^2}{c^2} = k^2 - \tilde{V}(r). \tag{3}$$

Esta elección del potencial es motivada por la condición de conservación de la energía mecánica de un cuerpo no-relativista:

$$v^2 = \frac{2}{m}(E - V). \tag{4}$$

Al igual que en el problema de Keplerm, la relación (3) restringe los valores para la coordenada radial r, pues

$$\frac{\dot{r}^2}{c^2} = k^2 - \tilde{V}(r) \geq 0 \Rightarrow \tilde{V(r)} \leq k^2, \tag{5}$$

es decir, dado un valor de la constante de energía k, los valores permitidos de r son tales que la desigualdad (5) se verifica.

Determinemos los máximos y mínimos de este potencial. Para ello, calculemos la derivada de $\tilde{V}$ e igualemos la a cero:

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(r) &= \frac{2m}{r^2}\left(1 + \frac{h^2m^2}{r^2}\right) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(-\frac{2h^2m^2}{r^3}\right) && (6)\\
&= \frac{2m(r^2 + h^2m^2)}{r^4} - \frac{2h^2m^2(r - 2m)}{r^4} && (7)\\
&= \frac{2m}{r^4}\left(r^2 + h^2m^2 - h^2mr + 2h^2m^2\right) && (8)\\
&= \frac{2m}{r^4}\left(r^2 - h^2mr + 3h^2m^2\right) = 0. && (9)
\end{aligned}$$

Al resolver la ecuación cuadrática

$$r^2 - h^2 mr + 3h^2 m^2 = 0, \tag{10}$$

encontramos que

$$\begin{aligned} r &= \frac{h^2 m \pm \sqrt{h^4 m^2 - 12 h^2 m^2}}{2} &(11)\\ &= \frac{h^2 m \pm m h^2 \sqrt{1 - 12/h^2}}{2} &(12)\\ &= \frac{mh^2}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12}{h^2}}\right). &(13) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el potencial efectivo posee dos puntos extremos r_A y r_B de la forma

$$r_A = \frac{mh^2}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{12}{h^2}}\right), \quad r_B = \frac{mh^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{12}{h^2}}\right). \tag{14}$$

Notemos que estos puntos extremos existen sólo si

$$1 - \frac{12}{h^2} \geq 0 \Rightarrow h \geq \sqrt{12} = 2\sqrt{3}. \tag{15}$$

Además, si calculamos la segunda derivada:

$$\tilde{V}''(r) = 2m \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{h^2 m}{r^3} + \frac{3h^2 m^2}{r^4}\right] = 2m\left[-\frac{2}{r^3} + \frac{3h^2 m}{r^4} - \frac{12 h^2 m^2}{r^5}\right] \tag{16}$$

Al evaluar la segunda derivada en los extremos (ver código jupyter –), encontramos que

$$\begin{aligned} \tilde{V}''(r_A) &= \frac{32(-h^2 + h\sqrt{h^2 - 12} + 12)}{h^3 m^2 (-h + \sqrt{h^2 - 12})^5}, &(17)\\ \tilde{V}''(r_B) &= \frac{32(h^2 + h\sqrt{h^2 - 12} - 12)}{h^3 m^2 (h + \sqrt{h^2 - 12})^5}. &(18) \end{aligned}$$

Como $h > \sqrt{12}$, es claro de ver que

$$\begin{aligned} -h + \sqrt{h^2 - 12} &\leq 0, &(19)\\ h + \sqrt{h^2 - 12} &\geq 0. &(20) \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} h^2 \geq 12 &\Rightarrow 12h^2 \geq 144 &(21)\\ &\Rightarrow h^4 - 12h^2 \geq h^4 - 24h^2 + 144 &(22)\\ &\Rightarrow h^2(h^2 - 12) \geq (h^2 - 12)^2 &(23)\\ &\Rightarrow h\sqrt{h^2 - 12} \geq h^2 - 12 &(24)\\ &\Rightarrow -h^2 + h\sqrt{h^2 - 12} + 12 \geq 0, &(25) \end{aligned}$$

y

$$h^2 - 12 \geq 0 \wedge h\sqrt{h^2 - 12} \geq 0 \Rightarrow h^2 + h\sqrt{h^2 - 12} - 12 \geq 0. \tag{26}$$

Entonces, hemos verificado que $\tilde{V}''(r_A) \leq 0$ (r_A es un máximo local) y $\tilde{V}''(r_B) \geq 0$ (r_B es un mínimo local).

Concluyendo, si $h > 2\sqrt{3}$ el potencial tiene entonces un máximo en $r = r_A$ y un mínimo en $r = r_B$. Si $h = 2\sqrt{3}$ ambos puntos convergen en un punto de inflexión, $r_A = r_B$, y si $h < 2\sqrt{3}$ no existen extremos locales, ver figura 1.

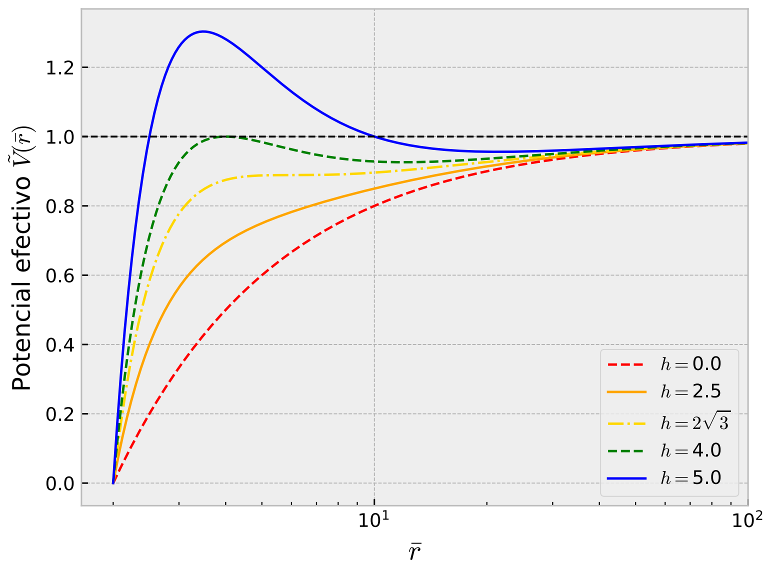

Figura 1: Potencial efectivo en escala logarítmica en la coordenada radial adimensional $\bar{r} = r/m$.

Notemos que el potencial es cero en $r = 2m$, a diferencia del problema de Kepler.

Órbitas circulares

Si $h > 2\sqrt{3}$ y $k^2 = \tilde{V}(r_B)$, tenemos órbitas circulares estables (porque la segunda derivada del potencial es positiva). Determinemos las constantes de movimiento $h = h_c$ y $k = k_c$ apropiadas para tener un movimiento circular con $r = r_c$ conocido. Usando la ecuación (14), dada para r_B, despejemos h_c

$$r_c = \frac{mh_c^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{12}{h_c^2}}\right) \tag{27}$$
$$r_c = \frac{mh_c^2}{2}\left(1 + \frac{1}{h_c}\sqrt{h_c^2 - 12}\right) \tag{28}$$
$$r_c = \frac{mh_c}{2}(h_c + \sqrt{h_c^2 - 12}) \tag{29}$$
$$r_c - \frac{mh_c^2}{2} = \frac{mh_c}{2}\sqrt{h_c^2 - 12} \tag{30}$$
$$r_c^2 - mh_c^2 r_c + \cancelto{0}{\frac{m^2h_c^4}{4}} = \frac{m^2h_c^2}{4}(\cancelto{0}{h_c^2} - 12) \tag{31}$$
$$r_c^2 - mh_c^2 r_c = -3m^2h_c^2 \tag{32}$$
$$h_c^2(mr_c - 3m^2) = r_c^2. \tag{33}$$

Por lo tanto,

$$h_c = \frac{r_c}{\sqrt{m(r_c - 3m)}}. \tag{34}$$

Por otro lado, sabemos que

$$k_c^2 = \tilde{V}(r_c) = \left(1 - \frac{2m}{r_c}\right)\left(1 + \frac{h_c^2 m^2}{r_c^2}\right). \tag{35}$$

Entonces, reemplazando (34) en (35), obtenemos

$$k_c^2 = \left(1 - \frac{2m}{r_c}\right)\left(1 + \frac{r_c^2 m^2}{m(r_c - 3m)r_c^2}\right) \tag{36}$$
$$= \left(1 - \frac{2m}{r_c}\right)\left(1 + \frac{m}{r_c - 3m}\right) \tag{37}$$
$$= \left(1 - \frac{2m}{r_c}\right)\left(1 + \frac{m}{r_c\left(1 - \frac{3m}{r_c}\right)}\right) \tag{38}$$
$$= \left(1 - \frac{2m}{r_c}\right)\left(\frac{r_c - 3m + m}{r_c\left(1 - \frac{3m}{r_c}\right)}\right) \tag{39}$$
$$= \frac{\left(1 - \frac{2m}{r_c}\right)^2}{\left(1 - \frac{3m}{r_c}\right)}. \tag{40}$$

Por lo tanto,

$$k_c = \frac{\left(1 - \frac{2m}{r_c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{3m}{r_c}}}. \tag{41}$$

En el documento de la semana 2, encontramos que la constante de movimiento k queda expresada por

$$k = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}. \tag{42}$$

Luego, reemplazando (41),

$$\frac{\left(1 - \frac{2m}{r_c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{3m}{r_c}}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}_c, \tag{43}$$

lo que implica que

$$\dot{t}_c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3m}{r_c}}}. \tag{44}$$

Por otro lado, $hmc = r^2 \sin^2\theta\dot{\varphi} = r^2\dot{\varphi}$ (recordando que $\theta = \pi/2$). Así, reemplazando (34),

$$\begin{aligned}
h_c mc &= r_c^2 \dot{\varphi}_c && (45)\\
\dot{\varphi}_c &= \frac{mc}{r_c^2}\frac{r_c}{\sqrt{m(r_c - 3m)}} && (46)\\
&= \frac{c}{r_c}\sqrt{\frac{m^2}{m(r_c - 3m)}} && (47)\\
&= \frac{c}{r_c}\sqrt{\frac{m}{r_c - 3m}}. && (48)
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\dot{\varphi}_c = \frac{c}{r_c}\sqrt{\frac{m}{r_c - 3m}}. \tag{49}$$

Dado que $\dot{t}_c$ y $\dot{\varphi}_c$ son constante, podemos integrar las ecuaciones de movimiento, obteniendo

$$x^\mu(\tau) = \left(c\dot{t}_c\tau, r_c, \frac{\pi}{2}, \dot{\varphi}_c\tau\right). \tag{50}$$

La menor órbita circular estable (innermost stable circular orbit. ISCO), se obtiene, de acuerdo a (14), en el límite $h \to 2\sqrt{3}$. En este caso,

$$r_c = \lim_{h \to 2\sqrt{3}} \frac{mh^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{12}{h^2}}\right) = \frac{m(2\sqrt{3})^2}{2} = 6m, \tag{51}$$

$$k_{\mathrm{ISCO}} = \lim_{h \to 2\sqrt{3}} k_c = \frac{\left(1 - \frac{2m}{6m}\right)}{\sqrt{1 - \frac{3m}{6m}}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tag{52}$$

$$\dot{t}_{\mathrm{ISCO}} = \lim_{h \to 2\sqrt{3}} \dot{t}_c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3m}{6m}}} = \sqrt{2}, \tag{53}$$

$$\dot{\varphi}_{\mathrm{ISCO}} = \lim_{h \to 2\sqrt{3}} \dot{\varphi}_c = \frac{c}{6m}\sqrt{\frac{m}{6m - 3m}} = \frac{c}{6m\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}\frac{c}{m}. \tag{54}$$

En resumen,

$$r_c = 6m, \quad k_{\mathrm{ISCO}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \dot{t}_{\mathrm{ISCO}} = \sqrt{2}, \quad \dot{\varphi}_{\mathrm{ISCO}} = \frac{\sqrt{3}}{18}\frac{c}{m}. \tag{55}$$

En el caso newtoniano existen órbitas circulares para cada valor de $r > 0$, en cambio la teoría gravitacional de Einstein predice un límite para la existencia de órbitas circulares estables, para $r_c \geq 6m$.

Notemos que las expresiones calculadas para h_c, k_c, etc, están bien definidas para $r_c > 3m$, esto se debe a que para $3m < r < 6m$, pueden existir órbitas circulares pero inestables. Por otro lado, para $2m < r < 3m$ no pueden existir órbitas circulares.

En el siguiente notebook encontrará el código del gráfico del potencial y animaciones con de órbitas circulares estables e inestables.