

Semana 9

Nombre: Alejandro Saavedra San Martín.

Profesor: Guillermo Rubilar Alegría.

Agujeros Negros

Singularidades y radio de Schwarzschild

Estudiaremos la estructura de la solución de Schwarzschild en regiones cercanas al *radio de Schwarzschild*, donde el campo gravitacional es muy intenso. La geometría del espaciotiempo de Schwarzschild, en coordenadas de curvatura, es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (1)$$

Notemos que para $r \rightarrow 0$, $g_{00} \rightarrow -\infty$ y $g_{11} \rightarrow 0$, y para $r \rightarrow 2m^+$, $g_{00} \rightarrow 0$ y $g_{11} \rightarrow -\infty$, es decir, la métrica, en estas coordenadas, tiene un mal comportamiento cerca de $r = 0$ y $r = 2m$. Para comprobar si son singularidades de coordenadas o de curvatura, calculemos el siguiente escalar:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (2)$$

En el siguiente [notebook](#) se encuentra que las únicas componentes no nulas del tensor de Riemann con todos los índices contravariantes y covariantes, respectivamente, son

$$R^{0101} = -R^{0110} = \frac{2m}{r^3}, \quad (3)$$

$$R^{0202} = -R^{0220} = \frac{m}{r^4(2m-r)}, \quad (4)$$

$$R^{0303} = -R^{0330} = \frac{m}{r^4(2m-r)\sin^2(\theta)}, \quad (5)$$

$$R^{1001} = -R^{1010} = -\frac{2m}{r^3}, \quad (6)$$

$$R^{1212} = -R^{1221} = -\frac{m(2m-r)}{r^6}, \quad (7)$$

$$R^{1313} = -R^{1331} = -\frac{m(2m-r)}{r^6 \sin^2(\theta)}, \quad (8)$$

$$R^{2002} = -R^{2020} = -\frac{m}{r^4(2m-r)}, \quad (9)$$

$$R^{2112} = -R^{2121} = \frac{m(2m-r)}{r^6}, \quad (10)$$

$$R^{2323} = -R^{2332} = -\frac{2m}{r^7 \sin^2(\theta)}, \quad (11)$$

$$R^{3003} = -R^{3030} = -\frac{m}{r^4(2m-r)\sin^2(\theta)}, \quad (12)$$

$$R^{3113} = -R^{3131} = \frac{m(2m-r)}{r^6\sin^2(\theta)}, \quad (13)$$

$$R^{3223} = -R^{3232} = \frac{2m}{r^7\sin^2(\theta)}. \quad (14)$$

$$R_{0101} = -R_{0110} = \frac{2m}{r^3}, \quad (15)$$

$$R_{0202} = -R_{0220} = \frac{m(2m-r)}{r^2}, \quad (16)$$

$$R_{0303} = -R_{0330} = \frac{m(2m-r)\sin^2(\theta)}{r^2}, \quad (17)$$

$$R_{1001} = -R_{1010} = -\frac{2m}{r^3}, \quad (18)$$

$$R_{1212} = -R_{1221} = -\frac{m}{2m-r}, \quad (19)$$

$$R_{1313} = -R_{1331} = -\frac{m\sin^2(\theta)}{2m-r}, \quad (20)$$

$$R_{2002} = -R_{2020} = -\frac{m(2m-r)}{r^2}, \quad (21)$$

$$R_{2112} = -R_{2121} = \frac{m}{2m-r}, \quad (22)$$

$$R_{2323} = -R_{2332} = -2mr\sin^2(\theta), \quad (23)$$

$$R_{3003} = -R_{3030} = -\frac{m(2m-r)\sin^2(\theta)}{r^2}, \quad (24)$$

$$R_{3113} = -R_{3131} = \frac{m\sin^2(\theta)}{2m-r}, \quad (25)$$

$$R_{3223} = -R_{3232} = 2mr\sin^2(\theta). \quad (26)$$

Entonces,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = R_{0\nu\rho\sigma}R^{0\nu\rho\sigma} + R_{1\nu\rho\sigma}R^{1\nu\rho\sigma} + R_{2\nu\rho\sigma}R^{2\nu\rho\sigma} + R_{3\nu\rho\sigma}R^{3\nu\rho\sigma}. \quad (27)$$

Desarrollando término a término:

$$\begin{aligned} R_{0\nu\rho\sigma}R^{0\nu\rho\sigma} &= \cancel{R_{00\rho\sigma}R^{00\rho\sigma}} + R_{01\rho\sigma}R^{01\rho\sigma} + R_{02\rho\sigma}R^{02\rho\sigma} + R_{03\rho\sigma}R^{03\rho\sigma} \\ &= R_{0101}R^{0101} + R_{0110}R^{0110} + R_{0202}R^{0202} + R_{0220}R^{0220} + R_{0303}R^{0303} + R_{0330}R^{0330} \\ &= 2R_{0101}R^{0101} + 2R_{0202}R^{0202} + 2R_{0303}R^{0303} \\ &= 2\left(\frac{2m}{r^3}\right)^2 + 2\frac{m(2m-r)}{r^2}\frac{m}{r^4(2m-r)} + 2\frac{m(2m-r)\sin^2(\theta)}{r^2}\frac{m}{r^4(2m-r)\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{8m^2}{r^6} + \frac{2m^2}{r^6} + \frac{2m^2}{r^6} \\ &= \frac{12m^2}{r^6}. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
R_{1\nu\rho\sigma}R^{1\nu\rho\sigma} &= R_{10\rho\sigma}R^{10\rho\sigma} + \cancel{R_{11\rho\sigma}R^{11\rho\sigma}}^0 + R_{12\rho\sigma}R^{12\rho\sigma} + R_{13\rho\sigma}R^{13\rho\sigma} \\
&= R_{1001}R^{1001} + R_{1010}R^{1010} + R_{1212}R^{1212} + R_{1221}R^{1221} + R_{1313}R^{1313} + R_{1331}R^{1331} \\
&= 2R_{1001}R^{1001} + 2R_{1212}R^{1212} + 2R_{1313}R^{1313} \\
&= 2\left(\frac{2m}{r^3}\right)^2 + 2\frac{m}{2m-r}\frac{m(2m-r)}{r^6} + 2\frac{m\sin^2(\theta)}{2m-r}\frac{m(2m-r)}{r^6\sin^2(\theta)} \\
&= \frac{8m^2}{r^6} + \frac{2m^2}{r^6} + \frac{2m^2}{r^6} \\
&= \frac{12m^2}{r^6}.
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
R_{2\nu\rho\sigma}R^{2\nu\rho\sigma} &= R_{20\rho\sigma}R^{20\rho\sigma} + R_{21\rho\sigma}R^{21\rho\sigma} + \cancel{R_{22\rho\sigma}R^{22\rho\sigma}}^0 + R_{23\rho\sigma}R^{23\rho\sigma} \\
&= R_{2002}R^{2002} + R_{2020}R^{2020} + R_{2112}R^{2112} + R_{2121}R^{2121} + R_{2323}R^{2323} + R_{2332}R^{2332} \\
&= 2R_{2002}R^{2002} + 2R_{2112}R^{2112} + 2R_{2323}R^{2323} \\
&= 2\frac{m(2m-r)}{r^2}\frac{m}{r^4(2m-r)} + 2\frac{m}{2m-r}\frac{m(2m-r)}{r^6} + 2(2mr\sin^2(\theta))\frac{2m}{r^7\sin^2(\theta)} \\
&= \frac{2m^2}{r^6} + \frac{2m^2}{r^6} + \frac{8m^2}{r^6} \\
&= \frac{12m^2}{r^6}.
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
R_{3\nu\rho\sigma}R^{3\nu\rho\sigma} &= R_{30\rho\sigma}R^{30\rho\sigma} + R_{31\rho\sigma}R^{31\rho\sigma} + R_{32\rho\sigma}R^{32\rho\sigma} + \cancel{R_{33\rho\sigma}R^{33\rho\sigma}}^0 \\
&= R_{3003}R^{3003} + R_{3030}R^{3030} + R_{3113}R^{3113} + R_{3131}R^{3131} + R_{3223}R^{3223} + R_{3232}R^{3232} \\
&= 2R_{3003}R^{3003} + 2R_{3113}R^{3113} + 2R_{3223}R^{3223} \\
&= 2\frac{m(2m-r)\sin^2(\theta)}{r^2}\frac{m}{r^4(2m-r)\sin^2(\theta)} + 2\frac{m\sin^2(\theta)}{2m-r}\frac{m(2m-r)}{r^6\sin^2(\theta)} + 2(2mr\sin^2(\theta))\frac{2m}{r^7\sin^2(\theta)} \\
&= \frac{2m^2}{r^6} + \frac{2m^2}{r^6} + \frac{8m^2}{r^6} \\
&= \frac{12m^2}{r^6}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Reemplazando (28)-(31) en (27), obtenemos que

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48m^2}{r^6}, \tag{32}$$

lo que prueba que $r = 0$ (el origen del sistema coordenada usado) representa una singularidad de la geometría, donde la curvatura diverge. Sin embargo, en $r = 2m$ no diverge. De hecho ninguno de los invariantes diverge en $r = 2m$, por ejemplo, el escalar de curvatura $R = 0$. Por lo tanto, la esfera definida por $r = 2m$ no es una singularidad de curvatura.

Del documento de la semana 6, tenemos que la dilatación temporal gravitacional está dada por

$$\frac{\Delta\tau_r}{\Delta\tau_e} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2m}{r_r}}{1 - \frac{2m}{r_e}}}. \quad (33)$$

Notemos que en $r_e = 2m$, el cociente diverge. Ésta es la razón de porqué se dice que la superficie esférica en $r = 2m$ es una superficie infinitamente desplazada al rojo por efecto de la dilatación temporal gravitacional o una superficie de redshift infinito.

Diagrama Espacio-Temporal en Coordenadas de Schwarzschild

Consideremos en particular curvas (geodésicas) radiales tipo luz, es decir, para las cuales θ y φ son constantes y $ds^2 = 0$. Esta última condición se reduce a

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} = 0. \quad (34)$$

Despejando dt/dr :

$$c^2 dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} \quad (35)$$

$$c dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2}} \quad (36)$$

$$c \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{\left|1 - \frac{2m}{r}\right|}. \quad (37)$$

Consideremos

$$\int \frac{dr}{\left|1 - \frac{2m}{r}\right|} = \int \frac{r}{|r - 2m|} dr. \quad (38)$$

Para $r > 2m$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{r}{|r - 2m|} dr &= \int \frac{r}{r - 2m} dr \\ &= \int 1 + \frac{2m}{r - 2m} dr \\ &= r + 2m \ln(r - 2m) + C. \end{aligned} \quad (39)$$

Por otro lado, si $r < 2m$, se tiene que

$$\int \frac{r}{|r - 2m|} dr = - \int \frac{r}{r - 2m} dr = -r - 2m \ln|r - 2m| + C. \quad (40)$$

Entonces, si integramos entre a y b , encontramos que

$$\int_a^b \frac{dr}{\left|1 - \frac{2m}{r}\right|} = \pm \left[b - a + 2m \ln \left(\frac{b - 2m}{a - 2m} \right) \right], \quad a < b, \quad (41)$$

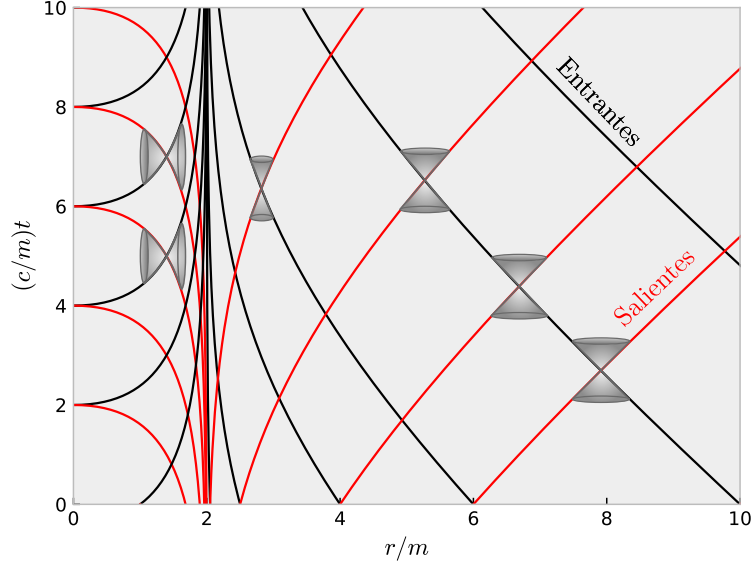


Figura 1: Curvas nulas radiales en coordenadas de curvatura.

donde el signo positivo y negativo corresponde a los casos en que $a, b > 2m$ y $a, b < 2m$, respectivamente. El logaritmo natural fue escrito sin valor absoluto, pues si $a, b > 2m$ o $a, b < 2m$, el cociente siempre es positivo. De esta forma podemos integrar con respecto a r la ecuación (37).

Si $r > 2m$ el signo $+$ en (37) corresponde a fotones alejándose del centro de simetría y el signo $-$ a fotones acercándose a éste. En este caso, integrando de t_0 a t en la coordenada temporal y de r_0 a r en la coordenada radial, obtenemos

$$c(t - t_0) = r - r_0 + 2m \ln \left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right), \quad (42)$$

para fotones salientes, y

$$c(t - t_0) = r_0 - r - 2m \ln \left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right), \quad (43)$$

para fotones entrantes, que pasan por el evento con coordenadas (ct_0, r_0) , respectivamente. En la figura 1 se pueden observar curvas nulas radiales en coordenadas de curvatura salientes y entrantes.

Observando la figura 1 o la ecuación (37), podemos concluir que muy lejos del centro de fuerzas $r \gg 2m$, recobramos

$$\frac{dr}{dt} = \pm c, \quad (44)$$

tal como en un espaciotiempo plano. Por otro lado, cuando r se aproxima a $2m$ (por “la derecha”), tenemos

$$\frac{dt}{dr} \rightarrow \pm \infty, \quad (45)$$

y los conos de luz se “cierran”, ya que las líneas tienden a ser paralelas al eje t . Esto tendrá como consecuencia que al acercarse a $r = 2m$ la coordenada temporal de la trayectoria del fotón aumentará indefinidamente.

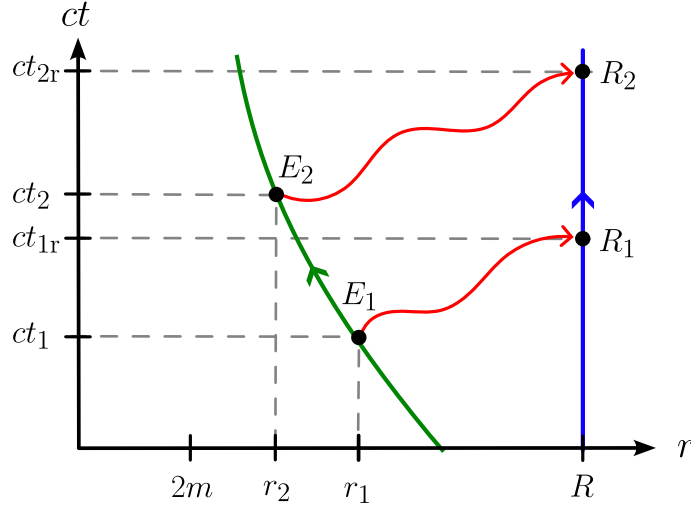


Figura 2: Caída de un fotón.

Para describir cómo se “ve” la caída del fotón desde lejos, consideremos un observador en reposo en $r = R > 2m$, un fotón cayendo hacia la singularidad, y dos eventos E_1 y E_2 en su línea de mundo, con coordenadas $(ct, r) = (ct_1, r_1)$ y $(ct, r) = (ct_2, r_2)$, respectivamente, con $r_2 < r_1 < R$, ver figura 2. De acuerdo a la ecuación (43), las coordenadas de estos eventos están relacionadas por medio de

$$\begin{aligned} c(t_2 - t_1) &= r_1 - r_2 - 2m \ln \left(\frac{r_2 - 2m}{r_1 - 2m} \right) \\ &= r_1 - r_2 + 2m \ln \left(\frac{r_1 - 2m}{r_2 - 2m} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Consideremos que cuando el fotón pasa por el evento E_1 una señal luminosa (otro fotón) es enviado hacia el observador. Este nuevo fotón viaja desde el evento E_1 hasta el evento de recepción R_1 , con coordenadas $(ct, r) = (ct_{1r}, R)$. Como estos eventos pertenecen a la línea de mundo de un fotón alejándose de la singularidad, usamos (42) para encontrar la relación entre sus coordenadas:

$$c(t_{1r} - t_1) = R - r_1 + 2m \ln \left(\frac{R - 2m}{r_1 - 2m} \right). \quad (47)$$

Similarmente, si en el evento E_2 se emite una segunda señal luminosa hasta el observador, de modo que éste la recibe en el evento R_2 con coordenadas $(ct, r) = (ct_{2r}, R)$, entonces

$$c(t_{2r} - t_2) = R - r_2 + 2m \ln \left(\frac{R - 2m}{r_2 - 2m} \right). \quad (48)$$

El intervalo de coordenada temporal entre la recepción de las dos señales por el observador en reposo en la posición $r = R$ está dado por $(\Delta t)_r = t_{2r} - t_{1r}$. Si a la ecuación (48) le restamos la ecuación (47), obtenemos que

$$c(t_{2r} - t_{1r}) - c(t_2 - t_1) = r_1 - r_2 + 2m \ln \left(\frac{R - 2m}{r_2 - 2m} \frac{r_1 - 2m}{R - 2m} \right) \quad (49)$$

$$c(\Delta t)_r = c(t_2 - t_1) + r_1 - r_2 + 2m \ln \left(\frac{r_1 - 2m}{r_2 - 2m} \right). \quad (50)$$

Usando la ecuación (46), encontramos

$$c(\Delta t)_r = 2 \left[r_1 - r_2 + 2m \ln \left(\frac{r_1 - 2m}{r_2 - 2m} \right) \right]. \quad (51)$$

Por otro lado, el tiempo (propio) medido por el observador en $r = R$ entre las dos señales es

$$(\Delta \tau)_r = \sqrt{g_{00}}(\Delta t)_r = (\Delta t)_r \sqrt{1 - \frac{2m}{R}}. \quad (52)$$

Para un observador en el infinito, tendremos $(\Delta \tau)_r = (\Delta t)_r$. Como consecuencia, desde el punto de vista de un observador externo (en $r = R$, o en el infinito) el fotón requiere un tiempo infinito en llegar a $r = 2m$, es decir, el observador nunca registra que el fotón cruza el horizonte, sino que lo observa acercarse cada vez más lentamente.

Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Consideremos nuevas coordenadas $\bar{x}^\mu = (c\bar{t}, r, \theta, \varphi)$ tales que

$$\bar{t}(t, r) := t + \frac{2m}{c} \ln |r - 2m|, \quad (53)$$

conocida como la **coordenada de Eddington-Finkelstein retardada**.

La trayectoria de un fotón entrante puede re-escribirse como

$$[ct + 2m \ln(r - 2m)] - [ct_0 + 2m \ln(r_0 - 2m)] = r_0 - r. \quad (54)$$

Usando la transformación de coordenadas (53), encontramos que la trayectoria del fotón entrante en estas nuevas coordenadas es

$$c(\bar{t} - \bar{t}_0) = r_0 - r, \quad (55)$$

que en el plano $(c\bar{t}, r)$ corresponde precisamente una línea recta con pendiente -1 (45 grados respecto al eje r).

Determinemos el diferencial de (53):

$$\begin{aligned} d\bar{t} &= dt + \frac{2m}{c} \frac{1}{|r - 2m|} \frac{d}{dr}(|r - 2m|) dr \\ &= dt + \frac{2m}{c} \frac{1}{|r - 2m|} \frac{|r - 2m|}{r - 2m} dr \\ &= dt + \frac{2m}{c} \frac{dr}{r - 2m}. \end{aligned} \quad (56)$$

Reemplazando en la métrica (1), obtenemos que

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \left(d\bar{t} - \frac{2m}{c} \frac{dr}{r - 2m}\right)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \\ &= c^2 \frac{(r - 2m)}{r} \left(d\bar{t}^2 - \frac{4m}{c} \frac{d\bar{t} dr}{r - 2m} + \frac{4m^2}{c^2} \frac{dr^2}{(r - 2m)^2}\right) - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} c d\bar{t} dr + \left[\frac{4m^2}{r(r-2m)} - \frac{r}{r-2m}\right] dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \\
&= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} c d\bar{t} dr + \left[\frac{4m^2 - r^2}{r(r-2m)}\right] dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \\
&= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} c d\bar{t} dr - \left[\frac{r+2m}{r}\right] dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \\
&= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} c d\bar{t} dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \tag{57}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en términos de las nuevas coordenadas \bar{x}^μ , el elemento de línea adopta la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} c d\bar{t} dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \tag{58}$$

Para encontrar una relación similar a (55), pero para fotones salientes, escribamos

$$c(t - t_0) = r - r_0 + 2m \ln \left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right) \tag{59}$$

$$ct - ct_0 + 2m \ln \left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right) = r - r_0 + 2m \ln \left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right) + 2m \ln \left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right) \tag{60}$$

$$[ct + 2m \ln(r - 2m)] - [ct_0 + 2m \ln(r_0 - 2m)] = r - r_0 + 4m \ln \left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right). \tag{61}$$

Usando la transformación de coordenadas (53), encontramos que la trayectoria del fotón saliente en estas nuevas coordenadas es

$$c(\bar{t} - \bar{t}_0) = r - r_0 + 4m \ln \left| \frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right|. \tag{62}$$

En la figura 3 se pueden observar curvas nulas radiales en coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes y entrantes. Note que la superficie $r = 2m$ sólo permite cruzar a partículas cayendo hacia la singularidad central, sin posibilidad de salir (el cono de luz futuro se inclina hacia la región para $r < 2m$). Las líneas de mundo entrantes cruzan desde la región externa hacia la interna sin problemas (no como en el caso usando coordenadas de Schwarzschild).

Partículas cayendo radialmente

Consideremos la trayectoria de una partícula cayendo libremente en un movimiento radial hacia la singularidad. La trayectoria es entonces una geodésica radial tipo tiempo. De acuerdo a lo discutido en el documento de la semana 2, la trayectoria tiene como constantes de movimiento a k y h dadas por

$$k = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}, \quad hmc = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \tag{63}$$

con $h = 0$, pues como la partícula cae libremente $\dot{\varphi}(0) = 0$. Nos centraremos en las trayectorias correspondientes a partículas que caen “desde el reposo en el infinito”, es decir, tal que $\dot{r} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

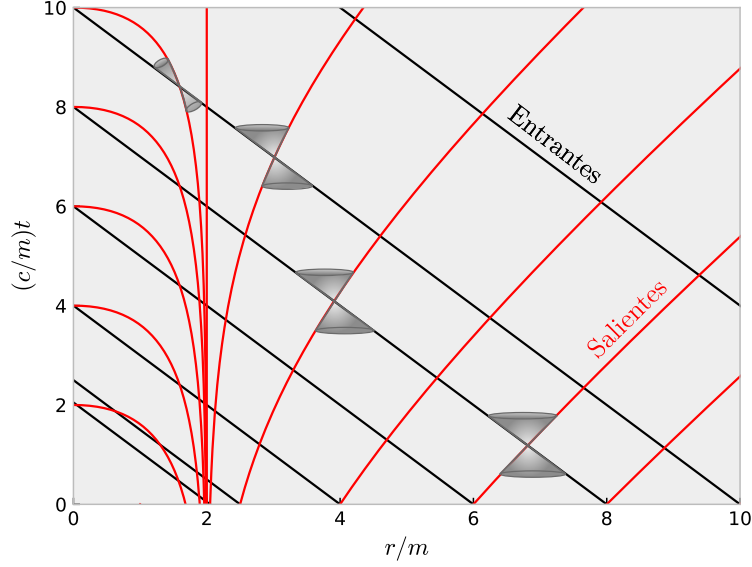


Figura 3: Curvas nulas radiales en coordenadas de Eddington-Finkelstein.

Recordemos que la dinámica radial estaba dada por la ecuación

$$\dot{r}^2 = k^2 c^2 - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{h^2 m^2}{r^2}\right). \quad (64)$$

Evalutando para $r \rightarrow \infty$, obtenemos que

$$0 = k^2 c^2 - c^2 \Rightarrow k^2 = 1. \quad (65)$$

Usando la primera ecuación de (63), para las trayectorias “orientadas hacia el futuro”, $k = 1$. Con todo ésto, la ecuación (64) nos queda

$$\dot{r}^2 = k^2 c^2 - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{h^2 m^2}{r^2}\right) \quad (66)$$

$$\dot{r}^2 = c^2 - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (67)$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2mc^2}{r}. \quad (68)$$

Como estamos considerando una partícula acercándose a la singularidad central, al tomar la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación (68), nos quedamos con el resultado con el signo negativo, ésto es,

$$\frac{dr}{d\tau} = -c\sqrt{\frac{2m}{r}}. \quad (69)$$

Integrando la expresión (69):

$$c \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' = - \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{r'}{2m}} dr' \quad (70)$$

$$c(\tau - \tau_0) = - \frac{2}{3\sqrt{2m}} r' \Big|_{r_0}^r \quad (71)$$

$$c(\tau - \tau_0) = \frac{2}{3\sqrt{2m}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2} \right), \quad (72)$$

donde τ_0 es el tiempo propio registrado en el instante en que éste pasa por $r = r_0$. Como consecuencia, el intervalo de tiempo propio desde que la partícula cruza $r = r_0$ y que llega a la singularidad central es finito

$$c(\tau|_{r=0} - \tau_0) = \frac{2}{3\sqrt{2m}} r_0^{3/2}. \quad (73)$$

En particular, el tiempo propio requerido para caer desde el horizonte ($r_0 = 2m$) hasta la singularidad central es

$$\Delta\tau = \frac{2}{3c\sqrt{2m}} (2m)^{3/2} = \frac{2}{3c} \sqrt{\frac{8m^3}{2m}} = \frac{4m}{3c}. \quad (74)$$

Para analizar cómo varía la coordenada t en este proceso, calculemos

$$c \frac{dt}{dr} = c \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = c \frac{\dot{t}}{\dot{r}}. \quad (75)$$

Reemplazando (63) (para $k = 1$) y (69) en (75):

$$c \frac{dt}{dr} = - \frac{c}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \frac{1}{c} \sqrt{\frac{r}{2m}} = - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \sqrt{\frac{r}{2m}}. \quad (76)$$

Si calculamos la integral, ver el [notebook](#), obtenemos que

$$\int \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \sqrt{\frac{r}{2m}} dr = \frac{2}{3\sqrt{2m}} \left(r^{3/2} + 6m\sqrt{r} \right) + 2m \ln \left(\frac{\sqrt{r} - \sqrt{2m}}{\sqrt{r} + \sqrt{2m}} \right) + C, \quad (77)$$

donde C es una constante de integración. Entonces, integrando la ecuación (76), con respecto a r

$$c \int_{t_0}^t dt' = - \int_{r_0}^r \frac{1}{1 - \frac{2m}{r'}} \sqrt{\frac{r'}{2m}} dr' \quad (78)$$

$$c(t - t_0) = \left[- \frac{2}{3\sqrt{2m}} \left(r'^{3/2} + 6m\sqrt{r'} \right) - 2m \ln \left(\frac{\sqrt{r'} - \sqrt{2m}}{\sqrt{r'} + \sqrt{2m}} \right) \right]_{r_0}^r \quad (79)$$

$$c(t - t_0) = - \frac{2}{3\sqrt{2m}} \left(r^{3/2} + 6m\sqrt{r} - r_0^{3/2} - 6m\sqrt{r_0} \right) - 2m \ln \left(\frac{\sqrt{r} - \sqrt{2m}}{\sqrt{r} + \sqrt{2m}} \right) + 2m \ln \left(\frac{\sqrt{r_0} - \sqrt{2m}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{2m}} \right) \quad (80)$$

$$c(t - t_0) = - \frac{2}{3\sqrt{2m}} \left(r^{3/2} - r_0^{3/2} + 6m\sqrt{r} - 6m\sqrt{r_0} \right) + 2m \ln \left[\frac{(\sqrt{r} + \sqrt{2m})(\sqrt{r_0} - \sqrt{2m})}{(\sqrt{r} - \sqrt{2m})(\sqrt{r_0} + \sqrt{2m})} \right]. \quad (81)$$

Vemos de esta expresión que la coordenada temporal de la trayectoria de la partícula crece indefinidamente a medida que ésta se acerca al horizonte.