Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tópicos en Relatividad General

Semana 4

Nombre: Alejandro Saavedra San Martín.
Profesor: Guillermo Rubilar Alegría.

Órbitas ligadas no-circulares

Si $h > 2\sqrt{3}$, $\tilde{V}(r_B) < k^2 < \tilde{V}(r_A)$ y $k < 1$, existen órbitas ligadas, cuyas coordenadas radiales varían entre $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$, con $\tilde{V}(r_{\text{mín}}) = \tilde{V}(r_{\text{máx}}) = k^2$, ver figura 1.

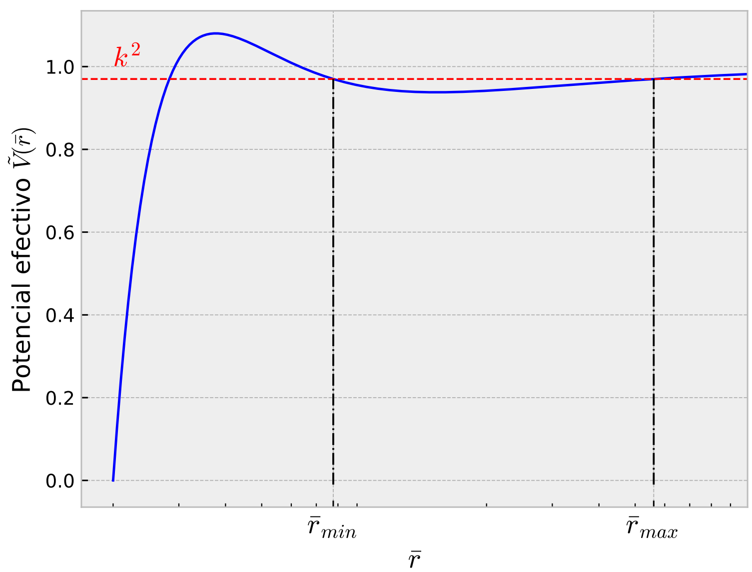

Figura 1: Potencial efectivo para órbitas ligadas.

Para analizar la forma de la trayectoria consideremos la coordenada radial en términos de la angular, $r = r(\varphi)$. Por regla de la cadena,

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau} = r'\dot{\varphi}, \tag{1}$$

donde $r' := dr/d\varphi$. Como $hmc = r^2 \sin\theta\dot{\varphi} = r^2\dot{\varphi}$,

$$hmc = r^2\frac{\dot{r}}{r'}. \tag{2}$$

Así,

$$\dot{r} = \frac{hmc}{r^2}r'. \tag{3}$$

Derivando con respecto a τ la ecuación (3), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\ddot{r} &= -\frac{2hmc}{r^3}r'\dot{r} + \frac{hmc}{r^2}r''\dot{\varphi} \\
&= -\frac{2hmc}{r^3}r'\left(\frac{hmc}{r^2}r'\right) + \frac{hmc}{r^2}r''\left(\frac{hmc}{r^2}\right) \\
&= -2h^2m^2c^2\frac{r'^{\,2}}{r^5} + h^2m^2c^2\frac{r''}{r^4} \\
&= \frac{h^2m^2c^2}{r^2}\left(-\frac{2}{r}r'^{\,2} + r''\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Al igual que en el caso newtoniano, definimos la variable auxiliar

$$u := \frac{1}{r}. \tag{5}$$

Derivando con respecto a φ:

$$u' = -\frac{r'}{r^2} = -u^2r'. \tag{6}$$

Así,

$$r' = -\frac{1}{u^2}u'. \tag{7}$$

Luego, la segunda derivada es

$$
\begin{aligned}
u'' &= \frac{d}{d\varphi}(-u^2r') \\
&= -2uu'r' - u^2r'' \\
&= -2uu'\left(-\frac{u'}{u^2}\right) - u^2r'' \\
&= 2\frac{u'^{\,2}}{u} - u^2r''.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Despejando r'':

$$r'' = \frac{2}{u^3}u'^{\,2} - \frac{1}{u^2}u''. \tag{9}$$

En el documento de la semana 3 encontramos que la dinámica de la coordenada r está determinada por la ecuación

$$\dot{r}^2 = k^2c^2 - c^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{h^2m^2}{r^2}\right). \tag{10}$$

Usando (3), (5) y (7), encontramos que

$$\frac{h^2m^2\cancel{c^2}}{r^4}r'^{\,2} = k^2\cancel{c^2} - \cancel{c^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{h^2m^2}{r^2}\right) \tag{11}$$

$$h^2m^2u^4\left(-\frac{1}{u^2}u'\right) = k^2 - (1 - 2mu)(1 + h^2m^2u^2). \tag{12}$$

Entonces,

$$h^2m^2u'^{\,2} - k^2 + (1-2mu)(1+h^2m^2u^2) = 0. \tag{13}$$

Derivando con respecto a φ la ecuación (13):

$$2h^2m^2u'u'' - 2mu'(1+h^2m^2u^2) + (1-2mu)(2h^2m^2uu') = 0 \tag{14}$$
$$2h^2m^2u'u'' - 2mu' - 2h^2m^3u^2u' + 2h^2m^2uu' - 4h^2m^3u^2u' = 0 \tag{15}$$
$$h^2m^2u'u'' - mu' - 3h^2m^3u^2u' + h^2m^2uu' = 0 \tag{16}$$
$$h^2m^2u'u'' + h^2m^2uu' = mu' + 3h^2m^3u^2u' \tag{17}$$
$$u'u'' + uu' = \frac{1}{h^2m}u' + 3mu^2u'. \tag{18}$$

Ahora, si no consideramos órbitas circulares, ésto es r no constante con $u' \neq 0$, obtenemos que

$$u'' + u = \frac{1}{h^2m} + 3mu^2. \tag{19}$$

Si definimos la variable adimensional

$$w := h^2mu. \tag{20}$$

La ecuación (19) puede escribirse como

$$\frac{1}{h^2m}w'' + \frac{1}{h^2m}w = \frac{1}{h^2m} + \frac{3m}{m^2h^4}w^2 \tag{21}$$
$$w'' + w = 1 + \frac{3}{h^2}w^2. \tag{22}$$

Finalmente, si $\epsilon := 3/h^2$, entonces

$$w'' + w = 1 + \epsilon w^2. \tag{23}$$

El parámetro ϵ es pequeño (mucho menor que 1). En efecto, como $hmc = r^2\dot{\varphi}$,

$$\epsilon = \frac{3m^2c^2}{r^4\dot{\varphi}^2} \approx \frac{3m^2c^2}{r^2v_\varphi^2}, \tag{24}$$

donde $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ es la velocidad tangencial. Si consideremos que los cuerpos están orbitando en campos débiles, por ejemplo en el sistema solar, de la mecánica newtoniana:

$$G\frac{\bar{m}M}{r^2} = \bar{m}\frac{v_\varphi^2}{r} \Rightarrow v_\varphi^2 \approx \frac{GM}{r} = \frac{mc^2}{r}, \tag{25}$$

con $\bar{m}$ la masa del cuerpo orbitando. Luego,

$$\epsilon \approx 3\frac{m^2}{r^2}\frac{c^2}{v_\varphi^2} \approx 3\frac{m^2c^2}{r^2}\frac{r}{mc^2} = \frac{3m}{r} \ll 1. \tag{26}$$

En particular para Mercurio, se tienen los siguientes datos: [1]

$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg\, s^2}\right], \quad c = 299792458 \left[\frac{m}{s}\right], \quad M_\odot = 1.988 \times 10^{30}\,[kg], \tag{27}$$

$$r = 57.909 \times 10^9\,[m]. \tag{28}$$

Reemplazando los datos en (26):

$$\epsilon \approx \frac{3GM}{c^2 r} = \frac{3(6.67430 \times 10^{-11})(1.988 \times 10^{30})}{(299792458)^2(57.909 \times 10^9)} = 7.65 \times 10^{-8} \approx 10^{-7}. \tag{29}$$

Por lo tanto, ocuparemos ϵ como parámetro perturbativo.
Usando el método perturbativo, postulamos la siguiente expansión para la solución de (23):

$$w = w_0(\varphi) + \epsilon w_1(\varphi) + \epsilon^2 w_2(\varphi) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \tag{30}$$

donde w_0 es la solución no perturbada de

$$w_0'' + w_0 = 1, \tag{31}$$

la cual corresponde a la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de un oscilador armónico con término forzante constante, cuya solución es [2]

$$w_0(\varphi) = 1 + e\cos(\varphi). \tag{32}$$

Reemplazando la solución perturbada en (23), obtenemos

$$w'' + w = 1 + \epsilon w^2 \tag{33}$$

$$w_0'' + \epsilon w_1'' + w_0 + \epsilon w_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 + \epsilon\left(w_0 + \epsilon w_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right)^2 \tag{34}$$

$$(w_0'' + w_0) + \epsilon(w_1'' + w_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 + \epsilon w_0^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{35}$$

$$1 + \epsilon(w_1'' + w_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 + \epsilon w_0^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{36}$$

Igualando los términos de primer orden en ϵ, w_1 es solución de la EDO

$$\begin{aligned} w_1'' + w_1 &= w_0^2 \\ &= (1 + e\cos\varphi)^2 \\ &= 1 + 2e\cos\varphi + e^2\cos^2\varphi \\ &= 1 + 2e\cos\varphi + e^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\varphi)\right) \\ &= \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2e\cos\varphi + \frac{e^2}{2}\cos(2\varphi), \end{aligned} \tag{37}$$

donde se usó la identidad $\cos^2\varphi \equiv (1 + \cos(2\varphi))/2$.

[1] Datos sacados de https://physics.nist.gov/cuu/Constants/ y https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html

[2] En general la solución debe tener una fase inicial $1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)$, pero se elige el sistema coordenado tal que $\varphi_0 = 0$.

Reconocemos la EDO de un oscilador forzado con términos forzantes: constante, resonante y periódico no resonante. Por lo tanto, su solución general está dada por

$$w_1 = A + B\varphi \sin\varphi + C\cos(2\varphi). \tag{38}$$

Reemplazando en la ecuación (37):

$$w_1'' + w_1 = \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2e\cos\varphi + \frac{e^2}{2}\cos(2\varphi) \tag{39}$$

$$-B\varphi\sin(\varphi) + 2B\cos(\varphi) - 4C\cos(2\varphi) + A + B\varphi\sin\varphi + C\cos(2\varphi) = \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2e\cos\varphi + \frac{e^2}{2}\cos(2\varphi) \tag{40}$$

$$A + 2B\cos(\varphi) - 3C\cos(2\varphi) = \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2e\cos\varphi + \frac{e^2}{2}\cos(2\varphi). \tag{41}$$

Como las funciones $\cos(n\varphi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ son linealmente independientes,

$$A = 1 + \frac{e^2}{2}, \quad B = e, \quad C = -\frac{e^2}{6}. \tag{42}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación (19) a primer orden en ϵ toma la forma:

$$u(\varphi) = \frac{1}{mh^2}\left[1 + e\cos\varphi + \epsilon\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + e\varphi\sin\varphi - \frac{e^2}{6}\cos(2\varphi)\right]\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{43}$$

Usando las expansiones en serie de Taylor para el coseno y seno:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \tag{44}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots. \tag{45}$$

Entonces,

$$\cos(\epsilon\varphi) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{46}$$

$$\sin(\epsilon\varphi) = \epsilon\varphi + \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{47}$$

De esta forma podemos escribir

$$\begin{aligned}
\cos\varphi + \epsilon\varphi\sin\varphi &= 1\cdot\cos\varphi + \epsilon\varphi\sin\varphi \\
&= \cos(\epsilon\varphi)\cos\varphi + \sin(\epsilon\varphi)\sin\varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \cos(\epsilon\varphi - \varphi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \cos[(1-\epsilon)\varphi] + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{48}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\epsilon\cos(2\varphi) &= \epsilon\cos(2\varphi - 2\epsilon\varphi + 2\epsilon\varphi) \\
&= \epsilon\cos(2(1-\epsilon)\varphi + 2\epsilon\varphi) \\
&= \epsilon\{\cos[2(1-\epsilon)\varphi]\cos(2\epsilon\varphi) - \sin[2(1-\epsilon)\varphi]\sin(2\epsilon\varphi)\} \\
&= \epsilon\{\cos[2(1-\epsilon)\varphi](1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) - \sin[2(1-\epsilon)\varphi](2\epsilon\varphi + \mathcal{O}(\epsilon^3))\} \\
&= \epsilon\cos[2(1-\epsilon)\varphi] + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{49}$$

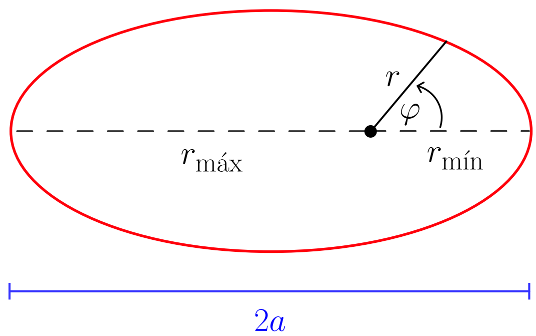

Figura 2: Órbita elíptica.

Luego, podemos expresar la solución de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
u(\varphi) &= \frac{1}{mh^2}\left[1 + e\cos\varphi + \epsilon\left(1+\frac{e^2}{2}\right) + e\epsilon\varphi\sin\varphi - \frac{e^2}{6}\epsilon\cos(2\varphi)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2)\\
&= \frac{1}{mh^2}\left[1 + \epsilon\left(1+\frac{e^2}{2}\right) + e(\cos\varphi + \epsilon\varphi\sin\varphi) - \frac{e^2}{6}\epsilon\cos(2\varphi)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2)\\
&= \frac{1}{mh^2}\left[1 + \epsilon\left(1+\frac{e^2}{2}\right) + e\cos[(1-\epsilon)\varphi] - \frac{e^2}{6}\epsilon\cos[2(1-\epsilon)\varphi]\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \qquad (50)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución a primer orden en ϵ puede escribirse como

$$u(\varphi) = \frac{1}{mh^2}\left[1 + \epsilon\left(1+\frac{e^2}{2}\right) + e\cos[(1-\epsilon)\varphi] - \frac{e^2}{6}\epsilon\cos[2(1-\epsilon)\varphi]\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \qquad (51)$$

Avance del perihelio de Mercurio

La solución (51) nos dice que, a primer orden en ϵ, el periodo angular de la órbita no es 2π, sino $2\pi/(1-\epsilon) > 2\pi$. Esto significa que la órbita retornará a una misma distancia dada del centro de fuerzas sólo luego de realizar algo más que una rotación completa en torno al centro de fuerzas, en un ángulo de $2\pi/(1-\epsilon)$. Así, el corrimiento angular de la órbita está dado por

$$\begin{aligned}
(\Delta\varphi)_{\text{rel}} &= \frac{2\pi}{1-\epsilon} - 2\pi\\
&= 2\pi\left(1+\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right) - 2\pi\\
&= 2\pi\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\\
&= \frac{6\pi}{h^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \qquad (52)
\end{aligned}$$

Podemos expresar ϵ en términos del semieje mayor y la excentricidad de la órbita, ver figura 2, tal que

$$a := \frac{r_{\text{mín}} + r_{\text{máx}}}{2} = \frac{u_{\text{máx}}^{-1} + u_{\text{mín}}^{-1}}{2}. \qquad (53)$$

Para determinar los extremos locales de u, calculemos la primera derivada:

$$
\begin{aligned}
u'(\varphi) &= \frac{1}{mh^2}\left[-e(1-\epsilon)\sin[(1-\epsilon)\varphi] + \frac{e^2\epsilon(1-\epsilon)}{3}\sin[2(1-\epsilon)\varphi]\right] \\
&= \frac{1}{mh^2}\left[-e(1-\epsilon)\sin[(1-\epsilon)\varphi] + \frac{2e^2\epsilon(1-\epsilon)}{3}\sin[(1-\epsilon)\varphi]\cos[(1-\epsilon)\varphi]\right] \\
&= \frac{e(1-\epsilon)}{mh^2}\sin[(1-\epsilon)\varphi]\left[-1+\frac{2e\epsilon}{3}\cos[(1-\epsilon)\varphi]\right]. \qquad (54)
\end{aligned}
$$

Como $\epsilon \ll 1$, el término resaltado en rojo siempre es estrictamente negativo, entonces la derivada se anula en todo los φ tales que

$$
\sin[(1-\epsilon)\varphi] = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{k\pi}{1-\epsilon}, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (55)
$$

La derivada de u es positiva para $-\pi/(1-\epsilon) < \varphi < 0$ (u es creciente), negativa para $0 < \varphi < \pi/(1-\epsilon)$ y positiva en $\pi/(1-\epsilon) < \varphi < 2\pi/(1-\epsilon)$. Usando el criterio de la primera derivada para extremos locales,

$$
\begin{aligned}
u_{\text{máx}} &= u(0) \\
&= \frac{1}{mh^2}\left[1+\epsilon\left(1+\frac{e^2}{2}\right)+e-\frac{\epsilon e^2}{6}\right]+\mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \frac{1}{mh^2}\left[1+e+\epsilon\left(1+\frac{e^2}{3}\right)\right]+\mathcal{O}(\epsilon^2), \qquad (56) \\
u_{\text{mín}} &= u\left(\frac{\pi}{1-\epsilon}\right) \\
&= \frac{1}{mh^2}\left[1+\epsilon\left(1+\frac{e^2}{2}\right)-e+\frac{\epsilon e^2}{6}\right]+\mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \frac{1}{mh^2}\left[1-e+\epsilon\left(1+\frac{2e^2}{3}\right)\right]+\mathcal{O}(\epsilon^2). \qquad (57)
\end{aligned}
$$

Reemplanzando (56) y (57) en (53):

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{u_{\text{máx}}+u_{\text{mín}}}{2u_{\text{máx}}u_{\text{mín}}} \\
&= \frac{\frac{1}{mh^2}\left[2+\epsilon\left(2+e^2\right)\right]+\mathcal{O}(\epsilon^2)}{\frac{2}{m^2h^4}\left[(1+e)(1-e)+\epsilon(1+e)\left(1+\frac{2e^2}{3}\right)+\epsilon(1-e)\left(1+\frac{e^2}{3}\right)\right]+\mathcal{O}(\epsilon^2)} \\
&= mh^2\frac{2+\mathcal{O}(\epsilon)}{2(1-e^2)+\mathcal{O}(\epsilon)} \\
&= mh^2\frac{2+\mathcal{O}(\epsilon)}{2(1-e^2)}\frac{1}{1+\frac{\mathcal{O}(\epsilon)}{2(1-e^2)}} \\
&= mh^2\frac{2+\mathcal{O}(\epsilon)}{2(1-e^2)}\left(1-\mathcal{O}(\epsilon)\right) \\
&= \frac{mh^2}{1-e^2}+\mathcal{O}(\epsilon). \qquad (58)
\end{aligned}
$$

Note que hemos expresado el semieje mayor a orden cero en ϵ porque lo calculamos de forma newtoniana (suponiendo que la órbita es una elipse).

Por lo tanto, a primer orden,

$$(\Delta\varphi)_{\text{rel}} \approx \frac{6\pi m}{a(1-e^2)}. \tag{59}$$

Pero, $m = GM/c^2$. Entonces, en términos de la masa del cuerpo central:

$$(\Delta\varphi)_{\text{rel}} \approx \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}. \tag{60}$$

Usando los mismos datos en (27), teniendo en consideración que la excentricidad de Mercurio es

$$e = 0.2056, \tag{61}$$

la predicción relativista para el corrimiento del perihelio de Mercurio es

$$(\Delta\varphi)_{\text{rel}} \approx \frac{6\pi(6.67430\times10^{-11})(1.988\times10^{30})}{(57.909\times10^{9})(299792458)^2(1-0.2056^2)}\,\frac{\text{rad}}{\text{rev}} \approx 5.018\times10^{-7}\ \text{rad/rev}. \tag{62}$$

Como $1^\circ = 3600$" (segundos de arco), tenemos que

$$\frac{\pi}{180}\ \text{rad} = 3600\text{"} \Rightarrow 1\ \text{rad} = \left(\frac{648000}{\pi}\right)^{\text{"}} \tag{63}$$

Así,

$$(\Delta\varphi)_{\text{rel}} \approx (5.018\times10^{-7})\left(\frac{648000}{\pi}\right)\text{"/rev} \approx 0.104\text{"/rev}. \tag{64}$$

El periodo orbital de Mercurio es $T \approx 87.97$ días, si dividimos esta cantidad por 36500, obtenemos que el periodo orbital es de $T \approx 2.41\times10^{-3}$ siglos. Por lo tanto, el corrimiento del perihelio de Mercurio es

$$(\Delta\varphi)_{\text{rel}} \approx 43.15\text{"/siglo}. \tag{65}$$