Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tópicos en Relatividad General

Semana 11

Nombre: Alejandro Saavedra San Martín.
Profesor: Guillermo Rubilar Alegría.

1. Campos gravitacionales débiles y ondas gravitacionales

1.1. Transformaciones de gauge

La descomposición de la métrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

en coordenadas cuasi-inerciales, no es única. En efecto, como estamos usando un espaciotiempo de "fondo" plano, el formalismo es naturalmente covariante bajo transformaciones de Lorentz globales de coordenadas, es decir, bajo transformaciones $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ las componentes de la métrica son transformadas de forma tal que en el nuevo sistema coordenado una descomposición de la forma (1) es también válida, pero en general con perturbaciones $h_{\mu\nu}$ diferentes. Probemos ésto último, bajo transformaciones de Lorentz, tenemos que

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} g^{\lambda\rho} \\ &= \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\rho \left(\eta^{\lambda\rho} + h^{\lambda\rho}\right) \\ &= \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\rho \eta^{\lambda\rho} + \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\rho h^{\lambda\rho}. \end{aligned} \tag{2}$$

Pero, $\Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\rho \eta^{\lambda\rho} = \eta^{\mu\nu}$. Así,

$$g'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h'^{\mu\nu}, \tag{3}$$

donde $h'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\rho h^{\lambda\rho}$ es la perturbación de la métrica en las nuevas coordenadas x'^μ.

Adicionalmente, transformaciones de la forma

$$x^\mu(P) \to x'^\mu(P) = x^\mu(P) + \xi^\mu(x(P)), \quad |\xi^\mu| \ll 1 \tag{4}$$

(de las coordenadas usadas para etiquetar el evento P) conducen a nuevas descomposiciones de la métrica del tipo (1). En los cálculos siguientes omitiremos la escritura de P, pero es importante recordar que las transformaciones se efectúan en un punto de la variedad. Primero calculemos

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta^\mu_\alpha + \partial_\alpha \xi^\mu. \tag{5}$$

Usando el mismo método presente en el documento de la semana 10, podemos considerar que ξ^μ tiene una dependencia general con G, de modo que

$$\xi^\mu = \xi^\mu_{(1)} + \xi^\mu_{(2)} + \xi^\mu_{(3)} + \cdots . \tag{6}$$

Luego, la ecuación (5) nos queda

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \delta^{\mu}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\xi^{\mu}_{(1)} + \mathcal{O}(G^2). \tag{7}$$

Para el jacobiano inverso, consideremos primero la siguiente expansión en potencias de G:

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} = \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\right)_0 + \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\right)_1 + \mathcal{O}(G^2). \tag{8}$$

Entonces, usando que el jacobiano por su inversa da la identidad, obtenemos

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu}, \tag{9}$$

$$\left[\delta^{\mu}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\xi^{\mu}_{(1)} + \mathcal{O}(G^2)\right]\left[\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\right)_0 + \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\right)_1 + \mathcal{O}(G^2)\right] = \delta^{\mu}_{\nu}, \tag{10}$$

$$\delta^{\mu}_{\alpha}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\right)_0 + \left[\partial_{\alpha}\xi^{\mu}_{(1)}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\right)_0 + \delta^{\mu}_{\alpha}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\right)_1\right] + \mathcal{O}(G^2) = \delta^{\mu}_{\nu}, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right)_0 + \left[\partial_{\alpha}\xi^{\mu}_{(1)}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\right)_0 + \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right)_1\right] + \mathcal{O}(G^2) = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{12}$$

Igualando los términos de orden cero en G, tenemos que

$$\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right)_0 = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{13}$$

Ahora, igualando los términos de orden uno en G y usando la expresión encontrada para el término de orden cero, concluímos que

$$\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right)_1 = -\delta^{\alpha}_{\nu}\partial_{\alpha}\xi^{\mu}_{(1)} = -\partial_{\nu}\xi^{\mu}_{(1)}. \tag{14}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\alpha}_{\nu} - \partial_{\nu}\xi^{\alpha}_{(1)} + \mathcal{O}(G^2). \tag{15}$$

Las componentes del tensor métrico en las nuevas coordenadas están dadas por

$$g'_{\mu\nu}(x'(P)) = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}(P)\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}(P)g_{\lambda\rho}(x(P)). \tag{16}$$

Usando (15), a primer orden, obtenemos

$$\begin{aligned}
g'_{\mu\nu}(x'(P)) &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}(P)\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}(P)g_{\lambda\rho}(x(P)) \\
&= \left(\delta^{\lambda}_{\mu} - \partial_{\mu}\xi^{\lambda}_{(1)}(P)\right)\left(\delta^{\rho}_{\nu} - \partial_{\nu}\xi^{\rho}_{(1)}(P)\right)\left(\eta_{\lambda\rho} + h^{(1)}_{\lambda\rho}\right) + \mathcal{O}(G^2) \\
&= \delta^{\lambda}_{\mu}\delta^{\rho}_{\nu}\eta_{\lambda\rho} + \delta^{\lambda}_{\mu}\delta^{\rho}_{\nu}h^{(1)}_{\lambda\rho} - \delta^{\lambda}_{\mu}\eta_{\lambda\rho}\partial_{\nu}\xi^{\rho}_{(1)}(P) - \delta^{\rho}_{\nu}\eta_{\lambda\rho}\partial_{\mu}\xi^{\lambda}_{(1)}(P) + \mathcal{O}(G^2) \\
&= \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\rho}\partial_{\nu}\xi^{\rho}_{(1)}(P) - \eta_{\lambda\nu}\partial_{\mu}\xi^{\lambda}_{(1)}(P) + \mathcal{O}(G^2) \\
&= \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\xi^{(1)}_{\mu}(P) - \partial_{\mu}\xi^{(1)}_{\nu}(P) + \mathcal{O}(G^2) \\
&=: \eta_{\mu\nu} + h'^{(1)}_{\mu\nu}(P) + \mathcal{O}(G^2).
\end{aligned} \tag{17}$$

Por lo tanto, en las coordenadas x'^{μ} las perturbaciones métricas de primer orden $h'^{(1)}_{\mu\nu}$ están dadas por

$$h'^{(1)}_{\mu\nu} = h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi^{(1)}_\mu(P) - \partial_\mu \xi^{(1)}_\nu(P), \quad \xi^{(1)}_\mu := \eta_{\mu\nu}\xi^\nu_{(1)}. \tag{18}$$

En conclusión, el cambio de coordenadas (4) transforma una métrica de la forma (1) a una métrica de la misma forma, pero con una pertubación $h'^{(1)}_{\mu\nu}$ distinta, pero relacionada a la original $h^{(1)}_{\mu\nu}$ por medio de (18).

1.1.1. Invarianza de gauge

La propiedad fundamental de las transformaciones de gauge (4) y (18) es que ellas dejan, a primer orden, el tensor de curvatura, y por consiguiente las ecuaciones linealizadas de Einstein, invariantes. En efecto, del documento de la semana 10 verificamos que

$$R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} = R^\rho_{(1)\mu\nu\lambda} + \mathcal{O}(G^2) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\nu h^\rho_{(1)\lambda} - \partial_\mu\partial_\lambda h^\rho_{(1)\nu} + \partial_\lambda\partial^\rho h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial^\rho h^{(1)}_{\mu\lambda}\right) + \mathcal{O}(G^2). \tag{19}$$

Entonces, al bajar todos los índices,

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} = g_{\rho\sigma}R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} = \left(\eta_{\rho\sigma} + g^{(1)}_{\rho\sigma} + \mathcal{O}(G^2)\right)\left(R^\rho_{(1)\mu\nu\lambda} + \mathcal{O}(G^2)\right). \tag{20}$$

El término de orden uno en G es

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{\sigma\mu\nu\lambda} &= \frac{1}{2}\eta_{\rho\sigma}\left(\partial_\mu\partial_\nu h^\rho_{(1)\lambda} - \partial_\mu\partial_\lambda h^\rho_{(1)\nu} + \partial_\lambda\partial^\rho h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial^\rho h^{(1)}_{\mu\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\nu h^{(1)}_{\sigma\lambda} - \partial_\mu\partial_\lambda h^{(1)}_{\sigma\nu} + \partial_\lambda\partial_\sigma h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\sigma h^{(1)}_{\mu\lambda}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Si hacemos la transformación de coordenadas dada por (4) y usamos las ecuaciones (7) y (15) para las derivadas parciales en las nuevas coordenadas x' y de la perturbación de la métrica $h'_{\mu\nu}$ a primer orden, respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial'_\nu h'^{(1)}_{\sigma\lambda} &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\partial_\beta h'^{(1)}_{\sigma\lambda} \\ &= \left(\delta^\beta_\nu - \partial_\nu \xi^\beta_{(1)}\right)\partial_\beta\left(h^{(1)}_{\sigma\lambda} - \partial_\lambda\xi^{(1)}_\sigma(P) - \partial_\sigma\xi^{(1)}_\lambda(P)\right) \\ &= \delta^\beta_\nu\partial_\beta h^{(1)}_{\sigma\lambda} - \delta^\beta_\nu\partial_\beta\partial_\lambda\xi^{(1)}_\sigma(P) - \delta^\beta_\nu\partial_\beta\partial_\sigma\xi^{(1)}_\lambda(P) \\ &= \partial_\nu h^{(1)}_{\sigma\lambda} - \partial_\nu\partial_\lambda\xi^{(1)}_\sigma(P) - \partial_\nu\partial_\sigma\xi^{(1)}_\lambda(P). \end{aligned} \tag{22}$$

Derivando con respecto a x'^{μ}:

$$\begin{aligned} \partial'_\mu\partial'_\nu h'^{(1)}_{\sigma\lambda} &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\partial_\beta\partial'_\nu h'^{(1)}_{\sigma\lambda} \\ &= \left(\delta^\beta_\mu - \partial_\mu\xi^\beta_{(1)}\right)\partial_\beta\left(\partial_\nu h^{(1)}_{\sigma\lambda} - \partial_\nu\partial_\lambda\xi^{(1)}_\sigma(P) - \partial_\nu\partial_\sigma\xi^{(1)}_\lambda(P)\right) \\ &= \delta^\beta_\mu\partial_\beta\partial_\nu h^{(1)}_{\sigma\lambda} - \delta^\beta_\mu\partial_\beta\partial_\nu\partial_\lambda\xi'^{(1)}_\sigma(P) - \delta^\beta_\mu\partial_\beta\partial_\nu\partial_\sigma\xi^{(1)}_\lambda(P) \\ &= \partial_\mu\partial_\nu h^{(1)}_{\sigma\lambda} - \partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda\xi^{(1)}_\sigma(P) - \partial_\mu\partial_\nu\partial_\sigma\xi^{(1)}_\lambda(P). \end{aligned} \tag{23}$$

Reemplazando (23) en (21), pero para $R'^{(1)}_{\sigma\mu\nu\lambda}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
R'^{(1)}_{\sigma\mu\nu\lambda} &= \frac{1}{2}\left(\partial'_\mu\partial'_\nu h'^{(1)}_{\sigma\lambda} - \partial'_\mu\partial'_\lambda h'^{(1)}_{\sigma\nu} + \partial'_\lambda\partial'_\sigma h'^{(1)}_{\mu\nu} - \partial'_\nu\partial'_\sigma h'^{(1)}_{\mu\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\partial_\nu h^{(1)}_{\sigma\lambda} - \partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda\xi^{(1)}_\sigma(P) - \partial_\mu\partial_\nu\partial_\sigma\xi^{(1)}_\lambda(P) \\
&\quad - \partial_\mu\partial_\lambda h^{(1)}_{\sigma\nu} + \partial_\mu\partial_\lambda\partial_\nu\xi^{(1)}_\sigma(P) + \partial_\mu\partial_\lambda\partial_\sigma\xi^{(1)}_\nu(P) \\
&\quad + \partial_\lambda\partial_\sigma h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\lambda\partial_\sigma\partial_\nu\xi^{(1)}_\mu(P) - \partial_\lambda\partial_\sigma\partial_\mu\xi^{(1)}_\nu(P) \\
&\quad - \partial_\nu\partial_\mu h^{(1)}_{\sigma\lambda} + \partial_\nu\partial_\sigma\partial_\lambda\xi^{(1)}_\mu(P) + \partial_\nu\partial_\sigma\partial_\mu\xi^{(1)}_\lambda(P)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\partial_\nu h^{(1)}_{\sigma\lambda} {\color{red}- \partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda\xi^{(1)}_\sigma(P)} {\color{blue}- \partial_\mu\partial_\nu\partial_\sigma\xi^{(1)}_\lambda(P)} \\
&\quad - \partial_\mu\partial_\lambda h^{(1)}_{\sigma\nu} {\color{red}+ \partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda\xi^{(1)}_\sigma(P)} {\color{orange}+ \partial_\mu\partial_\lambda\partial_\sigma\xi^{(1)}_\nu(P)} \\
&\quad + \partial_\lambda\partial_\sigma h^{(1)}_{\mu\nu} {\color{green}- \partial_\lambda\partial_\sigma\partial_\nu\xi^{(1)}_\mu(P)} {\color{orange}- \partial_\mu\partial_\lambda\partial_\sigma\xi^{(1)}_\nu(P)} \\
&\quad - \partial_\nu\partial_\mu h^{(1)}_{\sigma\lambda} {\color{green}+ \partial_\lambda\partial_\sigma\partial_\nu\xi^{(1)}_\mu(P)} {\color{blue}+ \partial_\mu\partial_\nu\partial_\sigma\xi^{(1)}_\lambda(P)}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\nu h^{(1)}_{\sigma\lambda} - \partial_\mu\partial_\lambda h^{(1)}_{\sigma\nu} + \partial_\lambda\partial_\sigma h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\sigma h^{(1)}_{\mu\lambda}\right). \qquad (24)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que

$$R'^{(1)}_{\sigma\mu\nu\lambda} = R^{(1)}_{\sigma\mu\nu\lambda}. \qquad (25)$$

Por otro lado, el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor de Einstien, en las nuevas coordenadas, están dados por

$$\begin{aligned}
R'_{\mu\nu} &= R^\rho_{\mu\rho\nu} \\
&= g'^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu} \\
&= \eta^{\rho\sigma} R'^{(1)}_{\sigma\mu\rho\nu} + \mathcal{O}(G^2), \qquad (26) \\
R' &= g'^{\mu\nu} R'_{\mu\nu} \\
&= \eta^{\mu\nu} R'^{(1)}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(G^2), \qquad (27) \\
G'_{\mu\nu} &= R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g'_{\mu\nu} R' \\
&= R'^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} R'^{(1)} + +\mathcal{O}(G^2). \qquad (28)
\end{aligned}$$

Usando la ecuación (25), se demuestra, a primer orden, que el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor de Einstien son invariantes:

$$R'^{(1)}_{\mu\nu} = \eta^{\rho\sigma} R'^{(1)}_{\sigma\mu\rho\nu} = \eta^{\rho\sigma} R^{(1)}_{\sigma\mu\rho\nu} = R^{(1)}_{\mu\nu}, \qquad (29)$$

$$R'^{(1)} = \eta^{\mu\nu} R'^{(1)}_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} R^{(1)}_{\mu\nu} = R^{(1)}, \qquad (30)$$

$$G'^{(1)}_{\mu\nu} = R'^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} R'^{(1)} = R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} R^{(1)} = G^{(1)}_{\mu\nu}. \qquad (31)$$

1.1.2. Gauge de Lorenz

Como el lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein linealizadas,

$$\Box\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\lambda\partial^\rho\bar{h}^{(1)}_{\lambda\rho} - \partial_\mu\partial^\lambda\bar{h}^{(1)}_{\lambda\nu} - \partial_\nu\partial^\lambda\bar{h}^{(1)}_{\lambda\mu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T^{(0)}_{\mu\nu}, \tag{32}$$

es invariante bajo la transformación (4), podemos usar esta libertad de gauge para seleccionar sistemas de coordenadas en los que las pertubaciones $\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}$ sean particularmente simples.

Impondremos el **gauge de Lorenz**, definido por

$$\partial^\nu\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} \overset{!}{=} 0. \tag{33}$$

Este gauge siempre puede ser impuesto. Supongamos que tenemos un campo $\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}$ que no satisface el gauge de Lorenz. Entonces, podemos realizar una transformación de gauge (18) tal que

$$\begin{aligned}
\bar{h}'^{(1)}_{\mu\nu} &= h'^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h'^{(1)} \\
&= h'^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}h'^{(1)}_{\rho\sigma} \\
&= h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi^{(1)}_\nu - \partial_\nu\xi^{(1)}_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\left(h^{(1)}_{\rho\sigma} - \partial_\rho\xi^{(1)}_\sigma - \partial_\rho\xi^{(1)}_\sigma\right) \\
&= h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi^{(1)}_\nu - \partial_\nu\xi^{(1)}_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(h^{(1)} - \partial_\rho\xi^\rho_{(1)} - \partial_\rho\xi^\sigma_{(1)}\right) \\
&= \left(h^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(1)}\right) - \partial_\mu\xi^{(1)}_\nu - \partial_\nu\xi^{(1)}_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\xi^\rho_{(1)} \\
&= \bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi^{(1)}_\nu - \partial_\nu\xi^{(1)}_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\xi^\rho_{(1)}.
\end{aligned} \tag{34}$$

De este modo, podemos imponer que

$$\begin{aligned}
\partial'^\nu\bar{h}'^{(1)}_{\mu\nu} &= \eta^{\nu\sigma}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma}\partial_\beta\bar{h}'^{(1)}_{\mu\nu} \\
&= \eta^{\nu\sigma}\left(\delta^\beta_\nu - \partial_\nu\xi^\beta_{(1)}\right)\partial_\beta\bar{h}'^{(1)}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(G^2) \\
&= \eta^{\nu\sigma}\delta^\beta_\nu\partial_\beta\bar{h}'^{(1)}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(G^2) \\
&\approx \partial_\nu\bar{h}'^{(1)}_{\mu\nu} \\
&= \partial^\nu\left(\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi^{(1)}_\nu - \partial_\nu\xi^{(1)}_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\xi^\rho_{(1)}\right) \\
&= \partial_\nu\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} - \partial^\nu\partial_\mu\xi^{(1)}_\nu - \partial^\nu\partial_\nu\xi^{(1)}_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial^\nu\partial_\rho\xi^\rho_{(1)} \\
&= \partial_\nu\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu\xi^\nu_{(1)} - \Box\xi^{(1)}_\mu + \partial_\mu\partial_\rho\xi^\rho_{(1)} \\
&= \partial_\nu\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} - \Box\xi^{(1)}_\mu \\
&\overset{!}{=} 0,
\end{aligned} \tag{35}$$

es decir, se necesita un campo $\xi^{(1)}_\mu$ tal que

$$\Box\xi^{(1)}_\mu = \partial^\nu\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}. \tag{36}$$

Esta condición siempre puede ser satisfecha, ya que la ecuación de onda siempre tiene soluciones, dadas las condiciones de borde adecuadas.

Consideremos ahora que disponemos de un campo $h^{(1)}_{\mu\nu}$ que satisface el gauge de Lorenz. Entonces existe aún una libertad residual, definida por aquellas transformaciones de gauge generadas por un vector $\xi^{(1)}_\mu$ que sea armónico, es decir, que satisfaga la ecuación de onda homogénea:

$$\Box\xi^{(1)}_\mu = 0. \tag{37}$$

En el gauge de Lorenz, las ecuaciones de Einstein linealizadas asumen la forma de una *ecuación de onda inhomogénea*. Usando (32) y (33), encontramos que

$$\Box\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T^{(0)}_{\mu\nu}, \quad \partial^\nu\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} = 0. \tag{38}$$

Por lo tanto, en el gauge de Lorenz, la perturbación de primer orden $\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}$ de la métrica satisface la ecuación de onda inhomogénea. En una región sin materia $\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}$ satisface la ecuación de onda homogénea, lo que implica que pueden existir soluciones propagantes, **cuya velocidad de propagación es la velocidad de la luz**.

Las soluciones particulares correspondientes a campos retardados asintóticamente nulos son entonces de la forma

$$\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4}\int \frac{T^{(0)}_{\mu\nu}(\vec{x}\,', t - |\vec{x} - \vec{x}\,'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}d^3x', \tag{39}$$

o simplemente,

$$\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4}\int \frac{T^{(0)}_{\mu\nu}(\vec{x}\,', t_{\rm ret})}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}d^3x', \tag{40}$$

donde $t_{\rm ret} = t - |\vec{x} - \vec{x}\,'|/c$ es el *tiempo restardado*. La métrica, incluyendo contribuciones hasta primer orden, puede ser obtenida entonces como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}^{(1)}. \tag{41}$$

1.1.3. Gauge adicionales en el vacío

En regiones libres de fuentes, es decir, donde $T^{(0)}_{\mu\nu} = 0$, es posible elegir coordenadas tales que, adicionalmente a la condición de Lorenz (33), se satisfaga

$$h^{(1)} = 0, \quad h^{(1)}_{0i} = 0. \tag{42}$$

En efecto, de (18) se sigue que la transformación de la traza $h^{(1)}$ es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
h'_{(1)} &= \eta^{\mu\nu}\left(h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\nu\xi^{(1)}_\mu(P) - \partial_\mu\xi^{(1)}_\nu(P)\right) \\
&= \eta^{\mu\nu}h^{(1)}_{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\partial_\nu\xi^{(1)}_\mu(P) - \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\xi^{(1)}_\nu(P) \\
&= h_{(1)} - \partial_\nu\xi^\nu_{(1)} - \partial_\mu\xi^\mu_{(1)} \\
&= h_{(1)} - 2\partial_\mu\xi^\mu_{(1)}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Por lo tanto, si $h'_{(1)} \stackrel{!}{=} 0$, entonces

$$2\partial_\mu \xi^\mu_{(1)} = h_{(1)}. \tag{44}$$

Similarmente, al considerar las componentes $\mu = 0$ y $\nu = i$, con $i = 1, 2, 3$, en (18), tenemos que

$$h'^{(1)}_{0i} = h^{(1)}_{0i} - \partial_i \xi^{(1)}_0 - \partial_0 \xi^{(1)}_i. \tag{45}$$

Luego, si imponemos $h'^{(1)}_{0i} = 0$, encontramos la siguiente ecuación diferencial:

$$\partial_0 \xi^{(1)}_i + \partial_i \xi^{(1)}_0 = h^{(1)}_{0i}. \tag{46}$$

Las ecuaciones (44) y (46) forman un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales parciales de primer orden para los cuatros campos $\xi^\mu_{(1)}$. Si aplicamos el operador de onda sobre (44) y (46), obtenemos que

$$2\Box\partial_\mu \xi^\mu_{(1)} = \Box h_{(1)} \quad \Rightarrow \quad 2\partial_\mu \Box \xi^\mu_{(1)} = \Box h_{(1)} \tag{47}$$

y

$$\Box\partial_0 \xi^{(1)}_i + \Box\partial_i \xi^{(1)}_0 = \Box h^{(1)}_{0i} \quad \Rightarrow \quad \partial_0 \Box \xi^{(1)}_i + \partial_i \Box \xi^{(1)}_0 = \Box h^{(1)}_{0i} \tag{48}$$

A partir de estas condiciones, estas transformaciones adicionales preservan el gauge de Lorenz, es decir, se satisface (37), si necesariamente

$$\Box h_{(1)} = 0 \quad \text{y} \quad \Box h^{(1)}_{0i} = 0. \tag{49}$$

Estas condiciones necesarias son satisfechas, de acuerdo a la ecuación de campo (36), en regiones libres de fuentes.

1.2. Similitud con Electrodinámica

El potencial escalar ϕ y el potencial vectorial $\vec{A}$ (electromagnéticos) son campos definidos de forma tal que los campos eléctrico y magnético satisfagan automáticamente las ecuaciones de Maxwell homogéneas:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{50}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{51}$$

Los potenciales no son funciones definidas unívocamente dada una configuración de campo electromagnético. De hecho, si realizamos la transformación de gauge:

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi, \tag{52}$$

donde $\chi = \chi(\vec{x}, t)$ es una función arbitraria del espaciotiempo, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\vec{E}\,' &= -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}\,'}{\partial t} \\
&= -\vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{A} - \vec{\nabla}\chi\right] \\
&= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi \\
&= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
&= \vec{E}, \qquad (53)\\
\vec{B}\,' &= \vec{\nabla} \times \vec{A}\,' \\
&= \vec{\nabla} \times \left(\vec{A} - \vec{\nabla}\chi\right) \\
&= \vec{\nabla} \times \vec{A} - \cancelto{0}{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\chi)} \\
&= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
&= \vec{B}. \qquad (54)
\end{aligned}
$$

En la formulación relativista, los potenciales electromagnéticos son componentes de un 4-potencial electromagnético, definido por

$$A_\mu := \left(\frac{\phi}{c}, -\vec{A}\right), \qquad (55)$$

el cual es el análogo a la perturbación de primer orden $h^{(1)}_{\mu\nu}$ de la métrica.

En términos de este 4-potencial, podemos definir el **tensor electromagnético** por

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \qquad (56)$$

Las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas se encuentran condensadas en la siguiente ecuación tensorial:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \qquad (57)$$

donde $J^\mu = (c\rho, J^i)$ es la 4-densidad de corriente, la cual es la fuente de los campos electromagnéticos como el tensor de energía-momentum para el campo gravitacional.

En este caso, la transformación de gauge adopta la forma

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi, \qquad (58)$$

similar a la transformación de gauge (56) para $h^{(1)}_{\mu\nu}$.

Bajo esta transformación, el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$ permanece invariante. En efecto,

$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\
&= \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu\chi) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu\chi) \\
&= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\
&= F_{\mu\nu}. \qquad (59)
\end{aligned}
$$

Si reemplazamos (56) en (57), encontramos que

$$\partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu\right) - \partial_\mu \left(\partial^\nu A^\mu\right) = \mu_0 J^\nu, \tag{60}$$

$$\Box A^\nu - \partial^\nu \left(\partial_\mu A^\mu\right) = \mu_0 J^\nu. \tag{61}$$

Su análogo gravitacional son las ecuaciones de Einstein linealizadas (32).

Aquí, podemos imponer el gauge de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu \stackrel{!}{=} 0, \tag{62}$$

el cual puede siempre imponerse. En efecto, consideremos un 4-potencial A^μ que no satisface el gauge de Lorenz, si efectuamos una transformación de gauge (58) y tomamos la cuadri-divergencia:

$$\begin{aligned}\partial_\mu A'^\mu &= \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \chi \\ &= \partial_\mu A^\mu + \Box \chi.\end{aligned} \tag{63}$$

Si imponemos que este nuevo 4-potencial satisface el gauge de Lorenz, la función de χ debe verificar que

$$\Box \chi = -\partial_\mu A^\mu, \tag{64}$$

ésto es, χ debe ser solución de la ecuación de onda inhomogénea. Esta condición es similar a (36).

Si el 4-potencial satisface el gauge de Lorenz, la ecuación diferencial que éste debe satisfacer se reduce a la ecuación de onda inhomogénea

$$\Box A^\nu = \mu_0 J^\nu. \tag{65}$$