Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tópicos en Relatividad General

Semana 1

Nombre: Alejandro Saavedra San Martín.
Profesor: Guillermo Rubilar Alegría.

La métrica de Schwarzschild exterior, en las coordenadas de curvatura $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$, toma la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right], \quad r > 2m. \tag{1}$$

Buscamos escribir el ds^2 en un sistema coordenado isótropo en el que la sección espacial ($t = \text{cte}$) sea proporcional a la usual distancia euclideana:

$$ds^2 = \tilde{A}(c^2 dt^2) - \tilde{B} d\ell^2_{R^3}, \tag{2}$$

donde $d\ell^2_{R^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2$ en coordenadas cuasi-cartesianas, o $d\ell^2_{R^3} = d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ en coordenadas cuasi-esféricas. Entonces, las coordenadas isotrópicas, $x^\mu = (ct, \rho, \theta, \varphi)$, que buscamos deben ser tales que el elemento de línea adopte la forma

$$ds^2 = \tilde{A}(\rho) c^2 dt^2 - \tilde{B}(\rho) \left[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right]. \tag{3}$$

Como ds^2 es un escalar bajo transformaciones generales de coordenadas (TGC's), comparando (3) con (1), encontramos las siguientes condiciones:

$$\tilde{A}(\rho) = 1 - \frac{2m}{r}, \tag{4}$$

$$\tilde{B}(\rho) d\rho^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2, \tag{5}$$

$$\tilde{B}(\rho)\rho^2 = r^2. \tag{6}$$

Note que la condición (6) que debe cumplirse para $d\theta^2$ es la misma para $d\varphi^2$.

Resolvamos el sistema de ecuaciones (4)-(6) considerando como incógnitas las funciones $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\rho = \rho(r)$. De la ecuación (6),

$$\tilde{B}(\rho) = \frac{r^2}{\rho^2}. \tag{7}$$

Reemplazando en (5), encontramos una ecuación diferencial para $\rho(r)$ que resulta ser separable:

$$\frac{r^2}{\rho^2} d\rho^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2. \tag{8}$$

Si suponemos que $d\rho/dr > 0$ y $r > 2m$, podemos reescribir (8) como

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{\sqrt{r(r - 2m)}}. \tag{9}$$

Integrando a ambos lados de la ecuación (9):

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \ln(\rho) = \int \frac{dr}{\sqrt{r(r-2m)}}. \tag{10}$$

Para resolver la integral en r, usemos la sustitución trigonométrica

$$r - m = m \sec\theta \Rightarrow dr = m \sec\theta \tan\theta d\theta, \tag{11}$$

válida para $0 < \theta < \pi/2$ [1]. Entonces, usando la identidad trigonométrica $\tan^2\theta + 1 \equiv \sec^2\theta$, encontramos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{dr}{\sqrt{r(r-2m)}} &= \int \frac{m\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{m^2\sec^2\theta - m^2}} \\
&= \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}} d\theta \\
&= \int \sec\theta \, d\theta \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\
&= \ln\left|\frac{r-m}{m} + \frac{\sqrt{r^2-2mr}}{m}\right| + C \\
&= \ln\left(r - m + \sqrt{r^2 - 2mr}\right) + D,
\end{aligned} \tag{12}$$

donde $D = C - \ln(m)$ es una constante de integración. Por lo tanto, comparando las ecuaciones (10) y (12), obtenemos

$$\ln(\rho) = \ln\left(r - m + \sqrt{r^2-2mr}\right) + D \Rightarrow \rho = e^D\left(r - m + \sqrt{r^2-2mr}\right). \tag{13}$$

Despejando la coordenada r en términos de ρ:

$$(\rho + e^D m) - e^D r = e^D\sqrt{r^2-2mr} \tag{14}$$

$$[(\rho + e^D m) - e^D r]^2 = e^{2D}(\sqrt{r^2-2mr})^2 \tag{15}$$

$$(\rho + e^D m)^2 - 2e^D r(\rho + e^D m) + \cancel{e^{2D} r^2} = e^{2D}(\cancel{r^2} - 2mr) \tag{16}$$

$$(\rho + e^D m)^2 = 2e^D r(\rho + \cancel{e^D m}) - \cancel{2mre^{2D}} \tag{17}$$

$$(\rho + e^D m)^2 = 2e^D r\rho \tag{18}$$

$$\frac{(\rho + e^D m)^2}{2e^D\rho} = r \tag{19}$$

$$\left(\frac{1}{2e^D}\right)\rho\left[1 + \frac{m}{2\rho}\left(2e^D\right)\right]^2 = r. \tag{20}$$

Si denotamos la constante $\beta = 1/(2e^D)$, hemos encontrado la transformación de coordenadas entre ρ y r:

$$r = \beta\rho\left(1 + \frac{m}{2\beta\rho}\right)^2. \tag{21}$$

[1]De esta forma se recupera el dominio $r > 2m$.

La constante β está relacionada con la escala elegida para la coordenadas radial ρ. Sin perder generalidad, podemos elegir esta constante de modo que asintóticamente se aproxime a la usual coordenada radial esférica en un espacio plano. Esto requiere que $\beta = 1$. Así, la transformación de coordenadas queda

$$r = \rho \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2. \tag{22}$$

Considerando $\rho = \rho(r)$ y derivando implícitamente con respecto a r, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d}{dr}\left[\rho\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2\right] \\ &= \frac{d\rho}{dr}\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2 + 2\rho\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)\left(-\frac{m}{2\rho^2}\right)\frac{d\rho}{dr} \\ &= \frac{d\rho}{dr}\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)\left[\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right) - \frac{m}{\rho}\right] \\ &= \frac{d\rho}{dr}\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right) \\ &= \frac{d\rho}{dr}\left(1 - \frac{m^2}{4\rho^2}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Luego,

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\left(1 - \frac{m^2}{4\rho^2}\right)}. \tag{24}$$

Recordemos que para escribir la ecuación (9) hemos supuesto que $d\rho/dr > 0$. Entonces, debe cumplirse que

$$1 - \frac{m^2}{4\rho^2} > 0 \Leftrightarrow \rho > \frac{m}{2}. \tag{25}$$

Por lo tanto, la transformación entre las coordenadas ρ y r, con $r > 2m$, es

$$r = \rho\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2, \quad \rho > \frac{m}{2}. \tag{26}$$

Si reemplazamos (26) en (7), obtenemos el coeficiente métrico

$$\tilde{B}(\rho) = \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4. \tag{27}$$

Por último, al reemplazar (26) en (4), obtenemos el coeficiente métrico restante:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(\rho) &= 1 - \frac{2m/\rho}{\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^2} \\
&= \frac{\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^2 - \frac{2m}{\rho}}{\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^2} \\
&= \frac{\left(1-\frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^2},
\end{aligned} \tag{28}$$

es decir,

$$\tilde{A}(\rho) = \frac{\left(1-\frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^2}. \tag{29}$$

Resumiendo, el elemento de línea de la solución de Schwarzschild exterior en coordenadas isotrópicas tiene la forma:

$$ds^2 = \frac{\left(1-\frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^2} c^2 dt^2 - \left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^4 \left[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right], \quad \rho > \frac{m}{2}. \tag{30}$$

En coordenadas cuasi-cartesianas, bajo la transformación de coordenadas

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \tag{31}$$

$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \tag{32}$$

$$z = \rho \cos\theta, \tag{33}$$

el elemento de línea también puede ser escrito como

$$ds^2 = \frac{\left(1-\frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^2} c^2 dt^2 - \left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^4 \left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right], \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{34}$$

En efecto, calculando los diferenciales de la transformación de coordenadas (31)-(33):

$$
\begin{aligned}
dx^2 &= (\sin\theta\cos\varphi\, d\rho^2 + \rho\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - \rho\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi)^2 \\
&= \sin^2\theta\cos^2\varphi\, d\rho^2 + \rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\, d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\, d\varphi^2 + 2\rho\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\, d\rho\theta \\
&\quad - 2\rho\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\, d\rho d\varphi - 2\rho^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\, d\theta d\varphi, \qquad (35) \\
dy^2 &= (\sin\theta\sin\varphi\, d\rho^2 + \rho\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + \rho\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi)^2 \\
&= \sin^2\theta\sin^2\varphi\, d\rho^2 + \rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\, d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\, d\varphi^2 + 2\rho\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\, d\rho d\theta \\
&\quad + 2\rho\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\, d\rho d\varphi + 2\rho^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\, d\theta d\varphi, \qquad (36) \\
dz^2 &= (\cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta)^2 \\
&= \cos^2\theta\, d\rho^2 - 2\rho\sin\theta\cos\theta\, d\rho d\theta + \rho^2\sin^2\theta\, d\theta^2. \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Entonces, al calcular el elemento de línea $d\ell^2_{R^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2$, en coordenadas esféricas, los términos en colores de las ecuaciones (36)-(37) se pueden agrupar, mientras que los términos restantes de cancelan mutuamente. Por lo tanto,

$$
d\ell^2_{R^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta d\varphi^2. \qquad (38)
$$

Al igual que la métrica (1), las métricas (30) y (34) también satisfacen las ecuaciones de Einstein en el vacío. Para mayores detalles puede consultar en el siguiente Notebook.