



Instituto Tecnológico de Costa Rica

Unidad Académica de Licenciatura en Ingeniería Física

IF3602 - Métodos Matemáticos para Física e Ingeniería 1

Comparación de simulaciones de procesos estocásticos Ornstein–Uhlenbeck con la solución analítica de Fokker–Planck aplicada a fluctuaciones de voltaje en circuitos RC

Estudiantes:

Chaves Rojas Sebastián		2023032734
Granados Gomez John Fred		2023179920
Navarro Mora Carlos Manuel		2023045127
Torres Venegas Alejandro		2024130386

Docente:

Gerardo Lacy Mora

Grupo 01

II Semestre 2025

20 de octubre del 2025

Índice

1. Selección del fenómeno físico o de ingeniería	1
2. Delimitación del problema	2
3. Objetivos	3
3.1. Objetivo general	3
3.2. Objetivos específicos	3
4. Marco teórico	4
4.1. Procesos estocásticos y ruido en sistemas físicos	4
4.1.1. Procesos de difusión estocástica	4
4.2. El proceso de Ornstein–Uhlenbeck	5
4.3. Ecuación de Fokker–Planck asociada a un proceso OU	5
4.4. Relevancia de los modelos escogidos	7
4.4.1. Relevancia de la ecuación de Fokker-Planck	7
4.4.2. Relevancia de los procesos Ornstein-Uhlenbeck	7
4.5. Aplicación a sistemas de circuitos eléctricos	8
4.6. Métodos matemáticos de relevancia	9
4.6.1. Métodos analíticos para la resolución de Fokker-Planck en un proceso OU	9
4.6.2. Métodos numéricos para la resolución de Fokker-Planck en un proceso Ornstein-Uhlenbeck	10
4.7. Análisis de gráficas	11
4.7.1. Método de Euler-Maruyama y KDE	11
4.7.2. Áreas coincidentes como herramienta comparativa	12
5. Demostración del método de resolución	13
5.1. Descripción del procedimiento computacional	14
5.2. Resultados numéricos obtenidos	14
5.3. Comparación entre el método analítico y el numérico	15
5.4. Presentación de resultados	16
A. Apéndices	18
A.1. Código utilizado para la simulación preliminar de proceso de Ornstein–Uhlenbeck	18
A.2. Derivación de la ecuación Fokker-Planck desde un proceso estocástico	19
Referencias	22

1. Selección del fenómeno físico o de ingeniería

El fenómeno físico abordado en este proyecto son las fluctuaciones de voltaje en un circuito RC debidas al ruido térmico, modeladas mediante el proceso estocástico de Ornstein–Uhlenbeck y comparadas con la solución analítica de la ecuación de Fokker–Planck.

En los sistemas eléctricos reales, el movimiento aleatorio de los electrones en los conductores genera pequeñas variaciones de tensión conocidas como ruido Johnson–Nyquist [1]. Aunque estas fluctuaciones suelen tener una amplitud muy pequeña, su comprensión resulta fundamental en la ingeniería moderna, ya que imponen límites a la sensibilidad de los sensores, la estabilidad de amplificadores y la precisión de dispositivos electrónicos. Además, el estudio del ruido térmico permite establecer parámetros de diseño que determinan la eficiencia y confiabilidad de los circuitos, especialmente en sistemas de comunicación, medición y control.

El estudio de estas variaciones puede realizarse mediante modelos deterministas, pero tales aproximaciones ignoran el carácter aleatorio del fenómeno. En cambio, el modelado estocástico permite describir las propiedades estadísticas de las fluctuaciones y predecir su comportamiento promedio [2].

En particular, el proceso de Ornstein–Uhlenbeck (OU) representa un caso lineal y gaussiano de proceso estocástico, ideal para describir variables que tienden a relajarse hacia un valor medio bajo la influencia de ruido blanco [3]. Este tipo de modelos tiene múltiples áreas de aplicación, por ejemplo en análisis de señales neuronales [4], en procesos de polimerización [5], además de utilizarse en conjunto con la ecuación de Fokker–Planck para imagenología paraxial de rayos X [6] y estimaciones del mercado de valores [7], [8].

En el contexto de un circuito RC (ver apartado 2), este modelo describe la evolución temporal del voltaje en el capacitor, que se ve amortiguada por la resistencia y perturbada por el ruido térmico. La constante de relajación del proceso, denotada por θ , está determinada por los parámetros del circuito como $\theta = 1/(RC)$, lo que refleja la velocidad con que el sistema retorna al equilibrio. Este paralelismo entre la dinámica eléctrica y la formulación estocástica permite vincular directamente la teoría matemática con un fenómeno físico medible y de interés práctico.

En la Figura 1 se muestra la evolución de un proceso de Ornstein–Uhlenbeck (ver código que la genera en el apéndice A.1). En la simulación, la variable dependiente del tiempo, $X(t)$, presenta un decaimiento que no tiende a un valor fijo, sino que fluctúa de manera estocástica alrededor de un valor medio.

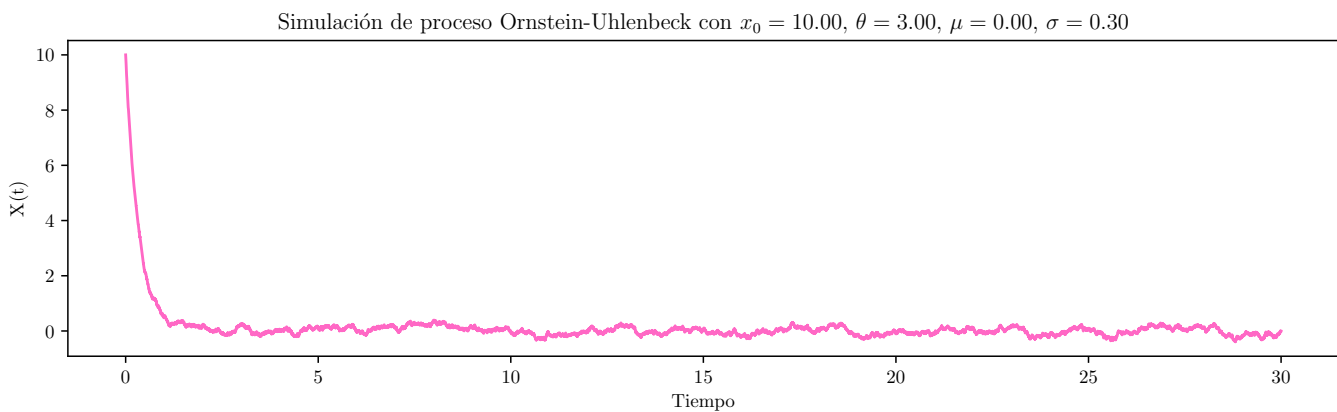


Figura 1: Simulación de un proceso Uhlenbeck. Imagen propia.

2. Delimitación del problema

La presente investigación se enfoca en el análisis del modelado estocástico de las fluctuaciones de voltaje en un nodo de un circuito RC debido al ruido térmico, también conocido como ruido Johnson–Nyquist. Este fenómeno físico surge del movimiento aleatorio de los electrones en la resistencia del circuito, generando pequeñas variaciones de voltaje que se superponen al valor medio impuesto por la fuente. Estas fluctuaciones son relevantes en ingeniería eléctrica, ya que limitan la precisión de sensores, afectan la estabilidad de amplificadores y condicionan el desempeño general de dispositivos electrónicos [1]. Por ello, es necesario caracterizar su comportamiento mediante herramientas de modelado estocástico, que permiten describir tanto la evolución temporal de la variable como su distribución de probabilidad.

El sistema considerado consiste en un circuito RC lineal (véase la Figura 2), compuesto por un resistor R y un capacitor C , conectados a una fuente de voltaje V_0 . Se asume que la tensión inicial del capacitor $V_C(0) = X_0$ es conocida, y que el análisis se realiza en un único nodo del circuito, sin considerar efectos espaciales, acoplamientos con otros elementos o no linealidades. La variable de interés es el voltaje $x(t)$ en el tiempo $t \in [0, T]$, donde T representa el tiempo máximo de observación.

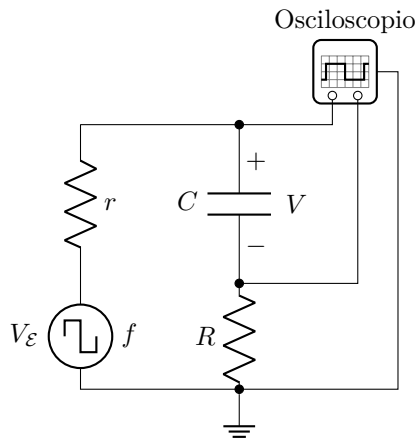


Figura 2: Circuito RC. Elaboración propia.

Dado que el voltaje presenta una tendencia a regresar al valor medio de la fuente mientras experimenta perturbaciones aleatorias, su dinámica se modela mediante un proceso de Ornstein–Uhlenbeck. La ecuación diferencial estocástica que describe la evolución de $x(t)$ es

$$dx(t) = \theta(\mu(t) - x(t)) dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

donde $\theta = 1/RC$ corresponde a la constante de relajación del circuito, μ representa el voltaje medio de la fuente, σ cuantifica la intensidad del ruido térmico y W_t es un proceso de Wiener que modela el ruido blanco gaussiano. El primer término de la ecuación representa la fuerza restauradora que tiende a revertir el voltaje hacia su valor medio, mientras que el segundo término introduce la variabilidad aleatoria debido al ruido.

Para caracterizar la distribución de probabilidad del voltaje, se utiliza la ecuación de Fokker–Planck asociada al proceso:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\theta(\mu - x)p(x, t)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

donde $p(x, t)$ representa la densidad de probabilidad de encontrar al sistema en el estado x en el tiempo t .

Se busca que al inicio toda la probabilidad se encuentre concentrada en el caso de voltaje ideal inicial, al considerar que no existe ruido térmico antes que cualquier calentamiento generado por el voltaje.

El estudio asume simplificaciones relevantes: el circuito se considera lineal, el ruido es aditivo y gaussiano, y se omiten efectos parasitarios, no linealidades e interacciones con otros componentes. Estas aproximaciones permiten centrar el análisis en la dinámica fundamental del voltaje bajo fluctuaciones térmicas. En este contexto, el proyecto tiene como propósito determinar la densidad de probabilidad del proceso de Ornstein–Uhlenbeck resolviendo la ecuación de Fokker–Planck mediante transformadas de Fourier y compararla con densidades empíricas obtenidas a partir de trayectorias simuladas mediante el método de Euler–Maruyama y estimadas con Kernel Density Estimation (KDE). Finalmente, la diferencia entre la densidad empírica y la analítica se analiza y cuantifica mediante la métrica $\%Overlap$, permitiendo evaluar con precisión la concordancia entre la simulación numérica y la descripción teórica del modelo.

Este enfoque no solo permite validar el modelo estocástico y sus aproximaciones numéricas, sino también ilustrar cómo los métodos de análisis probabilístico pueden aplicarse al estudio de fluctuaciones eléctricas reales, integrando conceptos de física estadística, modelado computacional y teoría de circuitos.

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

Analizar, mediante métodos matemáticos y simulaciones computacionales, el comportamiento de trayectorias del proceso estocástico Ornstein–Uhlenbeck aplicado a fluctuaciones de voltaje en circuitos RC, comparando la densidad empírica obtenida de simulaciones con la solución analítica de la ecuación de Fokker–Planck, y cuantificando la discrepancia mediante la métrica de áreas coincidentes ($\%Overlap$).

3.2. Objetivos específicos

- Examinar los conceptos fundamentales de procesos estocásticos, la ecuación de Fokker–Planck y su relación con el proceso Ornstein–Uhlenbeck, incluyendo la interpretación de los parámetros θ y σ en el contexto de circuitos RC.
- Determinar la densidad de probabilidad del proceso Ornstein–Uhlenbeck resolviendo la ecuación de Fokker–Planck mediante transformadas de Fourier y comparando con densidades empíricas construidas a partir de trayectorias simuladas con Euler–Maruyama y Kernel Density Estimation.
- Analizar y cuantificar la diferencia entre la densidad empírica obtenida de las simulaciones y la densidad analítica mediante la métrica $\%Overlap$, destacando la utilidad de este resultado para caracterizar las fluctuaciones de voltaje en circuitos RC.

4. Marco teórico

4.1. Procesos estocásticos y ruido en sistemas físicos

En física e ingeniería, el ruido se entiende como fluctuaciones aleatorias que afectan las variables de un sistema, como el voltaje o la corriente en un circuito eléctrico. Estas fluctuaciones pueden originarse por fenómenos físicos intrínsecos, como el movimiento térmico de electrones (ruido térmico o Johnson–Nyquist [1]), o por interacciones estocásticas con el entorno [2].

El ruido no solo introduce incertidumbre en las mediciones, sino que también puede afectar la estabilidad y eficiencia de sistemas electrónicos, mecánicos o de control [9]. Por ello, comprender su comportamiento es esencial para diseñar sistemas robustos y desarrollar métodos de filtrado o estimación de señales.

Desde un punto de vista matemático, el ruido puede modelarse mediante procesos estocásticos, que son funciones aleatorias del tiempo. A diferencia de los sistemas deterministas, donde la evolución futura está completamente determinada por las condiciones iniciales, un proceso estocástico incluye componentes aleatorios que generan múltiples trayectorias posibles a partir de la misma condición inicial.

4.1.1. Procesos de difusión estocástica

Un proceso de difusión estocástica describe cómo la probabilidad de que una variable física tome ciertos valores se redistribuye en el tiempo bajo la influencia del ruido. Este comportamiento es análogo a la difusión de calor o partículas en un medio, ya que la interacción aleatoria de muchas entidades produce un patrón macroscópico que puede caracterizarse mediante densidades de probabilidad.

Para modelar este comportamiento se emplean dos enfoques complementarios:

- **Ecuaciones diferenciales estocásticas:** describen la evolución de cada trayectoria individual de la variable afectada por ruido, su formulación es dependiente del tipo de proceso.
- **Ecuación de Fokker–Planck:** describe la evolución temporal de la densidad de probabilidad $p(x, t)$ de la variable de manera general, como se muestra en la ecuación (4):

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)p(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x, t)p(x, t)] \quad (3)$$

la densidad de probabilidad $p(x, t)$ puede interpretarse como la probabilidad de encontrar la variable en el valor x en el tiempo t ; su integral sobre un intervalo específico da la probabilidad de que la variable se encuentre dentro de ese rango.

En esta ecuación, $A(x, t)$ representa la deriva del sistema, es decir, la tendencia de la variable a evolucionar hacia ciertos valores promedio, y $B(x, t)$ la intensidad de la difusión, que cuantifica la magnitud del ruido que dispersa la variable [10]. Las funciones $A(x, t)$ y $B(x, t)$ dependen del tipo de proceso estocástico que se esté simulando, por lo que la ecuación de Fokker–Planck es una descripción general adaptable a diferentes sistemas físicos o ingenieriles.

4.2. El proceso de Ornstein–Uhlenbeck

Los procesos estocásticos y de difusión descritos en la sección anterior permiten modelar fenómenos físicos en los que el ruido desempeña un papel fundamental. Sin embargo, en muchos sistemas, las variables no solo se ven afectadas por fluctuaciones aleatorias, sino que también presentan una tendencia a regresar a un valor medio. Este tipo de comportamiento es característico de sistemas con fuerzas restauradoras, como un resorte con fricción bajo excitación aleatoria, o el voltaje de una fuente eléctrica real que oscila alrededor de un valor nominal debido a perturbaciones térmicas y externas [11].

El proceso de Ornstein–Uhlenbeck (OU) constituye un modelo estocástico fundamental para describir este tipo de dinámica. Se trata de un proceso Gaussiano y Markoviano, donde la variable aleatoria $x(t)$ tiende a revertir a un valor medio μ , mientras experimenta fluctuaciones aleatorias representadas por un ruido blanco gaussiano [12]. En este sentido, el proceso Ornstein–Uhlenbeck combina la aleatoriedad del ruido con un término determinista de restauración, caracterizando con precisión fenómenos físicos cuya variable no diverge indefinidamente, sino que permanece fluctuando alrededor de un equilibrio estable.

Matemáticamente, el proceso se describe mediante la ecuación diferencial estocástica, como se mostró en la ecuación (1):

$$dx(t) = \theta (\mu - x(t)) dt + \sigma dW_t,$$

donde $x(t)$ es la variable estocástica dependiente del tiempo, $\theta > 0$ es la constante de relajación que determina la rapidez con que la variable vuelve a la media, μ es la media estacionaria, $\sigma > 0$ representa la intensidad del ruido y W_t es un proceso de Wiener, o movimiento browniano estándar, que modela el ruido blanco gaussiano.

El primer término, $\theta (\mu - x(t)) dt$, describe la fuerza restauradora que tiende a revertir la variable hacia la media, mientras que el segundo término, σdW_t , introduce las fluctuaciones aleatorias. La interacción entre ambos términos determina la dispersión de las trayectorias, el tiempo de correlación y la estructura estadística del sistema.

La descripción del proceso OU, combinada con las herramientas de difusión estocástica de la sección anterior, permite derivar la ecuación de Fokker–Planck, que gobierna la evolución temporal de la densidad de probabilidad asociada al sistema.

4.3. Ecuación de Fokker–Planck asociada a un proceso OU

El OU describe la evolución de una variable estocástica $x(t)$ que tiende a revertir hacia un valor medio μ mientras experimenta fluctuaciones [13]. Cada trayectoria de $x(t)$ está gobernada por la ecuación diferencial estocástica, pero para analizar el comportamiento global del sistema es conveniente estudiar la densidad de probabilidad $p(x, t)$, que indica la probabilidad de que la variable tome un valor x en el tiempo t .

La evolución temporal de $p(x, t)$ está gobernada por la ecuación de Fokker–Planck asociada al OU, como :

$$\frac{\partial p(y, t)}{\partial t} = -\theta \frac{\partial}{\partial x} [(\mu - x)p(y, t)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4)$$

donde el primer término representa la deriva, la tendencia determinista de la variable hacia el valor medio μ , mientras que el segundo término corresponde a la difusión, reflejando la dispersión generada por el ruido aleatorio.

La demostración de esta ecuación de Fokker-Planck (EFP) para un proceso OU, según [14], se encuentra en el apéndice A.2.

Para resolver la ecuación de Fokker-Planck es necesario especificar:

- **Condición inicial:** se define la distribución de probabilidad al tiempo $t = 0$, que normalmente corresponde a un estado conocido de la variable:

$$p(x, 0) = \delta(x - x_0), \quad (5)$$

donde δ es la delta de Dirac y x_0 es el valor inicial de la variable estocástica. Esta condición asegura que el proceso comienza en un estado definido.

- **Condiciones de frontera:** para evitar que la probabilidad “escape” del dominio considerado, se suelen aplicar condiciones de frontera de tipo absorbente o de no flujo (Neumann):

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (6)$$

Estas condiciones aseguran que la densidad de probabilidad se mantenga normalizada y física en todo momento.

A partir de la ecuación de Fokker-Planck se obtiene la varianza estacionaria del proceso:

$$\text{Var}[x] = \frac{\sigma^2}{2\theta}, \quad (7)$$

asimismo, se puede inferir la distribución de equilibrio de la variable x . Se sabe que el proceso OU es lineal y está sujeto a ruido gaussiano, entonces cualquier combinación lineal de incrementos sigue una distribución normal [15]. En particular, en equilibrio, la distribución debe ser gaussiana, caracterizada únicamente por su media μ y su varianza $\text{Var}[x]$.

Dado que una gaussiana con media μ y varianza σ_x^2 se expresa como:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (8)$$

solo es necesario reemplazar σ_x^2 por la varianza estacionaria $\frac{\sigma^2}{2\theta}$ para obtener la distribución estacionaria del proceso:

$$p_{\text{st}}(x) = \sqrt{\frac{\theta}{\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{\theta(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right]. \quad (9)$$

En otras palabras, la media μ y la varianza $\text{Var}[x]$ determinan completamente la forma de la distribución estacionaria, que es una gaussiana centrada en μ con un “ancho” controlado por la relación entre la intensidad del ruido σ y la fuerza restauradora θ , proporcionando una interpretación física directa, pues la varianza define la extensión de la nube de valores de x en equilibrio, mientras que la media indica el valor alrededor del cual la variable tiende a fluctuar.

4.4. Relevancia de los modelos escogidos

4.4.1. Relevancia de la ecuación de Fokker-Planck

La ecuación de Fokker–Planck constituye el marco fundamental para describir la evolución temporal de distribuciones de probabilidad asociadas a procesos estocásticos con deriva y difusión. Su formulación permite conectar las dinámicas microscópicas aleatorias con el comportamiento macroscópico promedio de sistemas fuera del equilibrio. A continuación, se destacan algunas de sus aplicaciones más relevantes en distintos ámbitos de la física e ingeniería.

1. Transporte colisional en plasmas: modela la relajación por colisiones y la difusión en el espacio de velocidades (operador tipo Rosenbluth), piedra angular en física de plasmas de fusión y astrofísica [16].
2. Cinética de reacciones y escape de Kramers: predice tasas de escape sobreamortiguadas y subamortiguadas sobre barreras de potencial en medios disipativos, base de la teoría moderna de velocidades de reacción en fisicoquímica y nanomecánica [17].
3. Magnetización y conmutación térmica en nanopartículas magnéticas: la Fokker–Planck en la esfera de orientaciones del momento magnético describe la relajación superparamagnética y los tiempos de inversión tipo Néel–Brown en partículas monodominio [18].
4. Transporte de rayos cósmicos en la heliosfera: la ecuación de Parker es una Fokker–Planck efectiva que incorpora difusión, convección por viento solar, deriva y cambios adiabáticos de energía para modelar la modulación solar de los espectros [19].
5. Termodinámica: modela un gas de partículas de Langevin en interacción [20] y se puede usar para caracterizar variedades metriplécticas en sistemas Hamiltonianos [21].

4.4.2. Relevancia de los procesos Ornstein-Uhlenbeck

Los procesos de Ornstein–Uhlenbeck constituyen un modelo fundamental para la descripción de fluctuaciones lineales con memoria finita. A continuación, se destacan algunas de sus aplicaciones más relevantes en sistemas físicos e ingenieriles.

1. Dinámica browniana y oscilador armónico amortiguado: el proceso OU describe la evolución de la velocidad de partículas brownianas bajo fricción y ruido térmico, y la relajación en trampas armónicas [22].
2. Turbulencia lagrangiana y dispersión de trazadores: modelos lagrangianos basados en OU reproducen autocorrelaciones y escalas de tiempo de velocidad/aceleración para predecir la dispersión turbulenta [23].
3. Modelos estocásticos de clima: la hipótesis de Hasselmann conduce a una dinámica OU efectiva de variables climáticas lentas forzadas por “ruido meteorológico” rápido [24].
4. Calibración de pinzas ópticas y microrreología: la posición de una microesfera atrapada en un potencial armónico viscoso sigue un OU estacionario, útil para estimar constantes de trampa y fricción [25].
5. Dinámica estocástica en circuitos eléctricos no ideales: El modelo Gauss–Markov de primer orden (OU) se aplica para representar fluctuaciones y ruido coloreado en resistencias, inductancias y capacitancias no ideales, permitiendo analizar la respuesta transitoria y la estabilidad frente a perturbaciones estocásticas [26].

4.5. Aplicación a sistemas de circuitos eléctricos

El OU se puede aplicar de manera directa al modelado de señales en sistemas eléctricos, especialmente en aquellos donde las variables, como el voltaje o la corriente, presentan fluctuaciones aleatorias alrededor de un valor medio debido a fenómenos de ruido. Un ejemplo clásico es un circuito RC simple, compuesto por una resistencia R y un capacitor C , conectado a una fuente de voltaje. En la práctica, ningún resistor es ideal, y siempre existe un componente aleatorio de tensión debido al ruido térmico de los electrones, conocido como ruido Johnson–Nyquist [27]. Este ruido genera pequeñas fluctuaciones en la tensión del capacitor, incluso cuando la fuente intenta mantener un voltaje constante.

En ausencia de ruido, la tensión $V_C(t)$ del capacitor satisface la ecuación diferencial:

$$RC \frac{dV_C}{dt} = V_0 - V_C, \quad (10)$$

donde V_0 es la tensión de la fuente. Esta ecuación muestra que la velocidad de cambio de la tensión depende de la diferencia entre el valor instantáneo V_C y el valor hacia el que tiende la tensión V_0 . Reordenando, se obtiene:

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{RC} (V_0 - V_C). \quad (11)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (1), se puede identificar la correspondencia entre los términos: la variable $x(t)$ se asocia con la tensión $V_C(t)$, el valor medio de μ con la tensión de la fuente V_0 , y la constante de relajación $\theta = 1/(RC)$ [26]. Esta relación surge porque ambos describen un proceso en el que la variable tiende a regresar a un valor promedio: en el circuito, la tensión del capacitor se aproxima a V_0 , mientras que en el proceso OU, la variable estocástica se aproxima a μ .

Cuando se incorpora el ruido térmico de la resistencia, la ecuación queda:

$$dV_C(t) = \frac{1}{RC} (V_0 - V_C(t)) dt + \sigma dW_t. \quad (12)$$

De esta forma, la constante $\theta = \frac{1}{RC}$ indica la rapidez con la que la tensión del capacitor se ajusta hacia el valor de la fuente en ausencia de ruido, mientras que σ cuantifica la magnitud de las fluctuaciones aleatorias.

Este modelo permite analizar la distribución de probabilidad de la tensión en el capacitor, conociendo los valores de voltaje, capacitancia, resistencia y la potencia de ruido [28]. En equilibrio, la distribución es gaussiana, centrada en V_0 , con varianza $\frac{\sigma^2}{2\theta}$. Esto proporciona información sobre la dispersión de la tensión y es útil para estimar niveles de ruido, confiabilidad y desempeño del circuito.

Se asume que la tensión inicial del capacitor es conocida, es decir, $V_C(0) = V_{\text{inicial}}$. Dado que no existe dependencia espacial, no se aplican condiciones de frontera tradicionales de ecuaciones en derivadas parciales; sin embargo, es fundamental que la densidad de probabilidad de V_C esté normalizada, de manera que la integral de $p(V_C, t)$ sobre todos los valores posibles sea igual a 1.

4.6. Métodos matemáticos de relevancia

4.6.1. Métodos analíticos para la resolución de Fokker-Planck en un proceso OU

Separación de variables

El método de separación de variables consiste en proponer una solución del tipo

$$P(x, t) = X(x)T(t).$$

Sustituyendo en la ecuación (4) y dividiendo ambos lados por $X(x)T(t)$, se obtiene

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \theta \frac{1}{X(x)} \frac{d}{dx}(xX(x)) + D \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\lambda$$

donde λ es una constante de separación que da lugar a los valores propios del problema. Esto da lugar a dos ecuaciones ordinarias:

$$\frac{dT}{dt} + \lambda T = 0, \quad \Rightarrow \quad T(t) = T_0 e^{-\lambda t}$$

y

$$D \frac{d^2 X}{dx^2} + \theta \frac{d}{dx}(xX) + \lambda X = 0.$$

La resolución de esta última es análoga a la del oscilador armónico cuántico y provee funciones propias que forman una base ortogonal para la expansión de la solución general $P(x, t)$. Este método es clásico para resolver la Fokker-Planck lineal y permite abordar problemas con condiciones iniciales y de frontera específicas [29].

Transformadas de Fourier

El método de transformadas de Fourier se aplica al dominio espacial para convertir la ecuación diferencial parcial en una ecuación ordinaria para la transformada de P :

$$\hat{P}(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, t) e^{-ikx} dx.$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación (4) y usando propiedades de derivadas, se obtiene la ecuación para $\hat{P}(k, t)$:

$$\frac{\partial \hat{P}(k, t)}{\partial t} = -\theta k \frac{\partial \hat{P}(k, t)}{\partial k} - D k^2 \hat{P}(k, t).$$

La solución de esta ecuación puede encontrarse mediante el método de características y es

$$\hat{P}(k, t) = \hat{P}(k e^{-\theta t}, 0) \exp\left(-\frac{D}{2\theta} k^2 (1 - e^{-2\theta t})\right),$$

que, al invertir la transformada de Fourier, produce la solución en el espacio original. Esta solución explícita describe la propagación de la densidad $P(x, t)$ y su difusión bajo el proceso OU [29].

Distribución gaussiana de probabilidad

La solución fundamental de la ecuación de Fokker-Planck para el OU es una distribución normal con media y varianza que dependen del tiempo, dada por

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left[-\frac{(x - m(t))^2}{2\sigma^2(t)} \right]$$

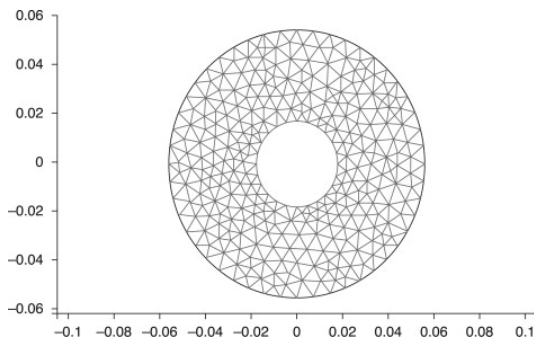
donde

$$m(t) = x_0 e^{-\theta t}, \quad \sigma^2(t) = \frac{D}{\theta} (1 - e^{-2\theta t}).$$

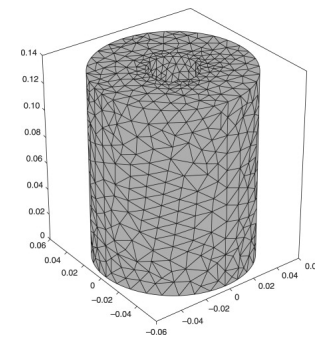
Esta forma refleja la característica de flujo de probabilidad hacia el origen con difusión constante, propia del proceso OU, lo que implica que el proceso es un movimiento browniano con fricción lineal. Esta solución se obtiene resolviendo directamente la ecuación diferencial o usando los métodos anteriores [30].

4.6.2. Métodos numéricos para la resolución de Fokker-Planck en un proceso Ornstein-Uhlenbeck

El método de elemento finito es uno de los más utilizados para la resolución numérica de la ecuación FP [31]. Este consiste en discretizar el sistema en varios nodos, donde se aplican las condiciones de restricción del problema. Esto facilita enormemente el análisis, pues en vez de tratar con un sistema continuo se analizan solamente una cantidad finita de puntos. Las formas en que se discretiza el cuerpo¹ depende de su geometría. Generalmente, se busca utilizar figuras simples, e.g. líneas, triángulos, rectángulos, tetraedros, para facilitar el costo computacional, como se aprecia en la figura 3 (formas más regulares, como el cuadrado tienden a tener mejor rendimiento, aunque no se suelen adaptar bien a muchas geometrías) [32].



(a) Discretización de un sistema bidimensional.



(b) Discretización de un sistema tridimensional.

Figura 3: Discretización de un sistema por el método de elemento finito. Extraídos de [33].

Otro método muy comúnmente utilizado para la resolución de ecuaciones diferenciales es el de diferencias finitas [31]. En este se transforma el dominio en una malla y la simulación se realiza para variaciones temporales y espaciales. Este proceso convierte una ecuación diferencial parcial u ordinaria en un sistema de condiciones lineales, las cuales se pueden resolver matricialmente. Las computadoras modernas pueden realizar esta clase de álgebra lineal muy eficientemente, lo cual, además de su relativa simplicidad de implementación, ha llevado al uso generalizado de este método [34].

¹generalmente se habla de un cuerpo físico, e.g. viga o parte mecánica, pero de forma más general el concepto de discretización aplica igualmente para cualquier objeto abstracto.

En la práctica, la implementación computacional de estos métodos requiere el uso de entornos de cálculo especializados. En el caso del método de diferencias finitas, programas como MATLAB o Python (NumPy/SciPy) permiten construir mallas regulares y resolver los sistemas lineales resultantes de la discretización temporal y espacial mediante rutinas de álgebra lineal optimizadas. La ecuación de Fokker–Planck asociada al proceso de Ornstein–Uhlenbeck suele resolverse en este contexto utilizando esquemas explícitos o implícitos para obtener la evolución temporal de la función de densidad de probabilidad [31].

Por otra parte, el método de elemento finito se beneficia de plataformas de simulación más avanzadas, como COMSOL Multiphysics, ANSYS, FreeFEM o FEniCS, que permiten definir geometrías arbitrarias, generar mallas adaptativas y aplicar condiciones de frontera con gran precisión. Estos entornos automatizan gran parte del proceso de ensamblaje de matrices y resolución del sistema algebraico, haciendo posible abordar geometrías complejas o configuraciones multidimensionales del proceso estocástico. Además, su integración con lenguajes de programación facilita el análisis paramétrico y la visualización de resultados, aspectos esenciales en la validación numérica de la ecuación de Fokker–Planck para sistemas del tipo Ornstein–Uhlenbeck [32], [35].

Ambos métodos han sido utilizados extensivamente en la literatura (ver, e.g., [36]–[50]).

4.7. Análisis de gráficas

Como fue mencionado anteriormente, el proyecto se centrará en la comparación del resultado analítico obtenido mediante transformadas de Fourier para la distribución de la densidad de probabilidad con simulaciones realizadas numéricamente. A continuación, se desarrolla el procedimiento para la obtención de gráficas y métricas de comparación.

4.7.1. Método de Euler-Maruyama y KDE

El método de Euler-Maruyama constituye una aproximación numérica para obtener soluciones iterativas y gráficas de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck mediante la discretización de su ecuación diferencial ordinaria. De esta manera, para un proceso de Ornstein-Uhlenbeck se obtiene la siguiente ecuación iterativa:

$$X_{n+1} = X_n + \theta (\mu - X_n) \Delta t + \sigma \Delta W \quad (13)$$

donde X_i corresponde al valor de la variable X en la i -ésima iteración, dependiente del valor anterior, los coeficientes θ , σ y μ , la diferencia de iteración o paso, y ΔW es el incremento del proceso de Wiener. Este último, en este caso, puede ser modelado como:

$$\Delta W = \sqrt{\Delta t} \mathcal{N}(0, 1), \quad (14)$$

donde $\mathcal{N}(0, 1)$ corresponde a una variable aleatoria con distribución normal estándar, es decir, con media cero y varianza unitaria [51]. Este método permite obtener una gráfica representativa de una trayectoria de comportamiento aleatorio del voltaje de la fuente real, como se muestra en la figura 4.

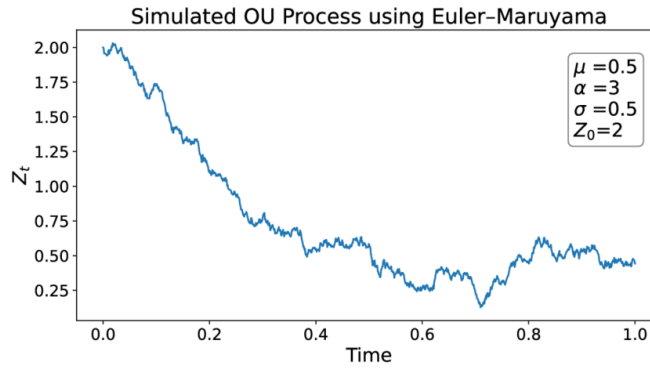


Figura 4: Proceso OU simulado por medio de Euler-Maruyama. Extraído de [52].

Luego, se puede obtener una gráfica de densidad de probabilidad estimada utilizando el procedimiento de Kernel Density Estimation (KDE). Este es un método computacional que, a partir de un conjunto finito de muestras generadas mediante la simulación, construye una aproximación suave y continua de la función de densidad de probabilidad subyacente. Para ello, se centra una función núcleo (generalmente gaussiana) en cada muestra y se suman todas las contribuciones, obteniendo así una estimación no paramétrica de la densidad [53]. Así, se obtiene una gráfica de densidad de probabilidad que se puede comparar con la solución obtenida mediante el método analítico para evaluar el comportamiento de una o varias trayectorias ponderadas.

4.7.2. Áreas coincidentes como herramienta comparativa

Para evaluar la concordancia y similitud entre la densidad de probabilidad estimada a partir de simulaciones y la densidad analítica obtenida de la ecuación de Fokker-Planck, se usa una métrica que mide cuanto de área común o coincidente entre las curvas de ambas densidades: el porcentaje de superposición *%overlap*. Esta métrica cuantifica el área coincidente debajo de las densidades de probabilidad, integrando sobre una curva que se construye considerando los puntos más bajos presentes en un plano que muestren ambas gráficas, o bien, la unión de las curvas tal que la resultante sea la curva con valores más pequeños:

$$\%overlap = \int_{\forall x} \min[f(x), g(x)] dx, \quad (15)$$

donde $\forall x$ representa que se integra sobre todas las entradas graficadas, además se trata de un porcentaje, puesto que la curva mínima será; como mucho, igual a la densidad de probabilidad que debe estar normalizada. Claramente es posible aproximar dicha integral por medio de una serie $\sum_i^N \min[f(x_i), g(x_i)] \Delta x$. Este método se puede aplicar de forma iterativa y computacional para proporcionar una medida cuantitativa de qué tan cerca se encuentran la densidad simulada y la analítica. Mientras más cercano se encuentre de 1, más similitud entre la simulación y la densidad real, además el porcentaje es también el porcentaje de concordancia del modelo, y por tanto $1 - \%overlap$ da la discrepancia del mismo.

5. Demostración del método de resolución

En esta sección se describen los parámetros utilizados para resolver de manera numérica y computacional el proceso estocástico asociado al voltaje en el capacitor del circuito RC analizado en la teoría. El punto de partida es la ecuación de Langevin (describe trayectorias individuales) obtenida previamente (véase Sección 4.5), la cual modela la dinámica estocástica del voltaje en el capacitor:

$$dV_C(t) = \theta(V_\varepsilon - V_C(t)) dt + \sigma dW_t, \quad \theta = \frac{1}{RC}.$$

Esta ecuación representa un proceso de Ornstein–Uhlenbeck cuyo comportamiento combina un componente determinista de relajación exponencial junto con un término difusivo que modela el ruido térmico. Para resolverla numéricamente se desarrolló una interfaz gráfica (GUI) implementada en `Python`, la cual permite que el usuario modifique parámetros físicos del circuito y parámetros numéricos del método de integración. El código se encuentra en este [repositorio de GitHub](#).

Descripción técnica de la GUI y de los parámetros de entrada

La GUI fue diseñada para:

- Permitir la simulación interactiva de trayectorias del proceso OU;
- Calcular automáticamente promedios, densidades empíricas y métricas de comparación;
- Visualizar los resultados en tiempo real mediante gráficos generados con *matplotlib*;
- Facilitar la validación del modelo teórico mediante métodos computacionales.

Cada uno de los parámetros ingresados corresponde a un elemento clave del modelo. Los parámetros utilizados en esta simulación preliminar se muestran en la Tabla 1.

Parámetro	Valor
Voltaje de la fuente V_ε	15 V
Voltaje inicial V_0	0 V
Resistencia R	2000 Ω
Capacitancia C	1000 μF
Intensidad del ruido σ	1,0
Paso temporal Δt	0,01 s
Tiempo total de simulación T	100 s
Número de trayectorias simuladas	20

Tabla 1: Parámetros utilizados para la simulación numérica del proceso OU.

Para estos valores, el parámetro de relajación es:

$$\theta = \frac{1}{RC} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ s}^{-1}, \quad \tau = RC = 2 \text{ s},$$

y la solución analítica de la media es:

$$m(t) = 15(1 - e^{-0,5t}),$$

mientras que la distribución estacionaria prevista es:

$$V_C(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{N}(15, 1).$$

5.1. Descripción del procedimiento computacional

El código implementa el método de Euler–Maruyama, el cual discretiza la ecuación estocástica según:

$$V_{n+1} = V_n + \theta(V_\varepsilon - V_n)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

con $\Delta t = 0,01$ y $T = 100$ s, el número total de pasos es:

$$N = \frac{T}{\Delta t} = 10\,000,$$

por lo que al generar 20 trayectorias se obtienen 200 000 puntos utilizados en la estimación de densidades.

El programa realiza:

1. la simulación simultánea de 20 trayectorias independientes;
2. el cálculo de la media temporal muestral:

$$\bar{V}(t) = \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} V_k(t);$$

3. la estimación de la densidad empírica mediante KDE;
4. la comparación con la densidad analítica $\mathcal{N}(15, 1)$;
5. el cálculo del error en %Overlap.

De forma complementaria, se reportan algunos resultados numéricos directos; algunas medias en tiempos relevantes:

$$m(1) = 15(1 - e^{-0,5}) = 5,90 \text{ V}, \quad m(2) = 9,47 \text{ V}, \quad m(5) = 13,77 \text{ V}.$$

Así, como la varianza teórica en el tiempo final, como $e^{-100} \approx 0$, $\text{Var} = \frac{\sigma^2}{2\theta} \cdot 1 = \frac{1^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}$,

$$\text{Var}(V_C(100)) = 1.$$

5.2. Resultados numéricos obtenidos

En la Figura 5 se presenta la media de las 20 trayectorias simuladas (resaltada en azul), junto con todas las corridas individuales (en gris con menor opacidad).

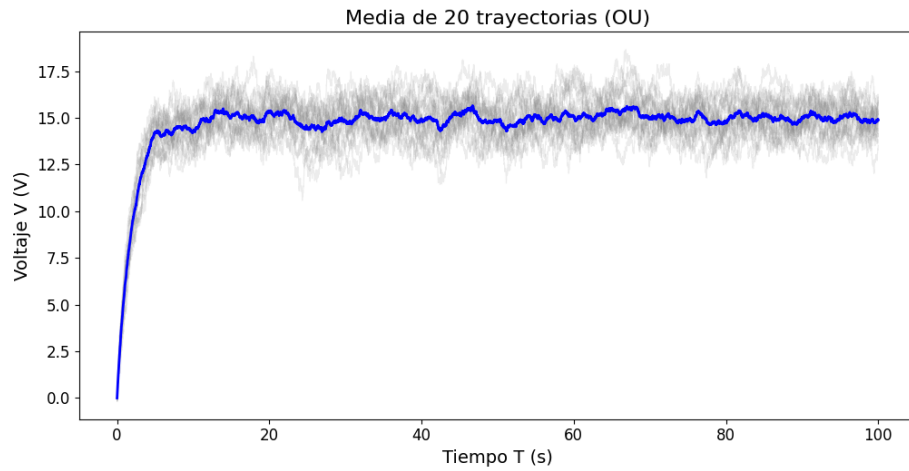


Figura 5: Media de 20 trayectorias simuladas del proceso OU. Imagen de autoría propia.

En la Figura 6 se compara la densidad empírica estimada mediante KDE con la densidad analítica estacionaria. El software reporta un solapamiento del 95,486 %, lo cual indica una excelente concordancia entre los métodos.

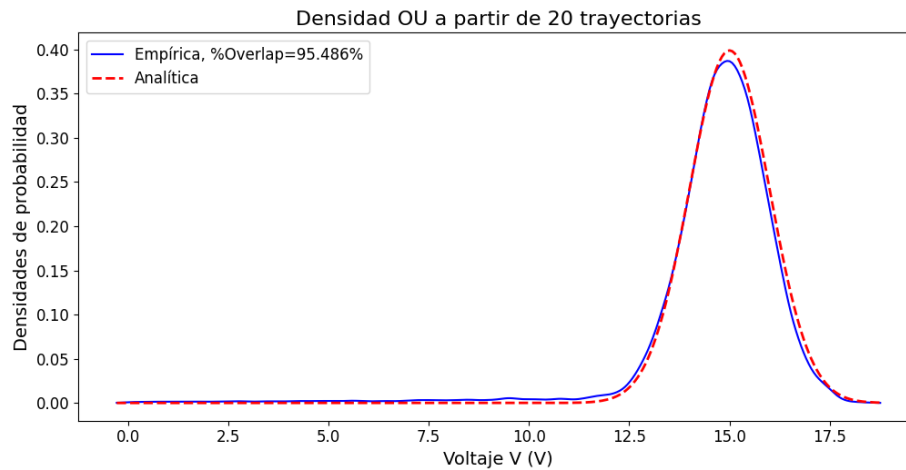


Figura 6: Comparación entre la densidad empírica (KDE) y la densidad analítica estacionaria del proceso OU. Imagen de autoría propia.

5.3. Comparación entre el método analítico y el numérico

Las discrepancias observadas entre la curva KDE y la densidad teórica se explican por:

1. **Número finito de trayectorias:** al promediar únicamente 20 realizaciones, la KDE presenta fluctuaciones naturales.
2. **Efectos transitorios:** la densidad empírica incluye muestras desde $t = 0$, donde el voltaje aún no ha alcanzado el régimen estacionario.
3. **Suavizado de KDE:** el núcleo gaussiano aplanan ligeramente el pico de la distribución.
4. **Ruido estadístico inherente al proceso:** incluso en régimen estacionario, la varianza muestral difiere levemente de la teórica.

Pese a ello, el solapamiento superior al 95 % confirma que la simulación reproduce fielmente el comportamiento teórico del proceso de Ornstein–Uhlenbeck.

5.4. Presentación de resultados

A continuación se presentan un grupo de gráficas adicionales, representativas del comportamiento físico de las señales obtenidas por simulación. Para las gráficas mostradas, recuérdese que el código primero muestra la(s) trayectoria(s) generada(s) por método de Euler-Maruyama y, seguidamente, muestra las densidades de probabilidad obtenidas por la solución analítica y por la simulación utilizando KDE. Además, en las leyendas aparece el %Overlap, la herramienta utilizada para interpretar las gráficas. En la Figura 7 se pueden visualizar los parámetros ingresados para la obtención de las gráficas de la primera corrida, dichas gráficas visibles en la Figura 8.

Parámetros a ingresar	
Voltaje de la fuente V_e (V)	Intensidad del ruido σ (V)
10	2
Voltaje inicial V_0 (V)	Paso temporal Δt (s)
0	0.1
Capacitancia C (μF)	Tiempo total T (s)
1000	5
Resistencia R (Ω)	Cantidad de corridas
2000	1
Iniciar Simulación	

Figura 7: Parámetros ingresados para la primera corrida.

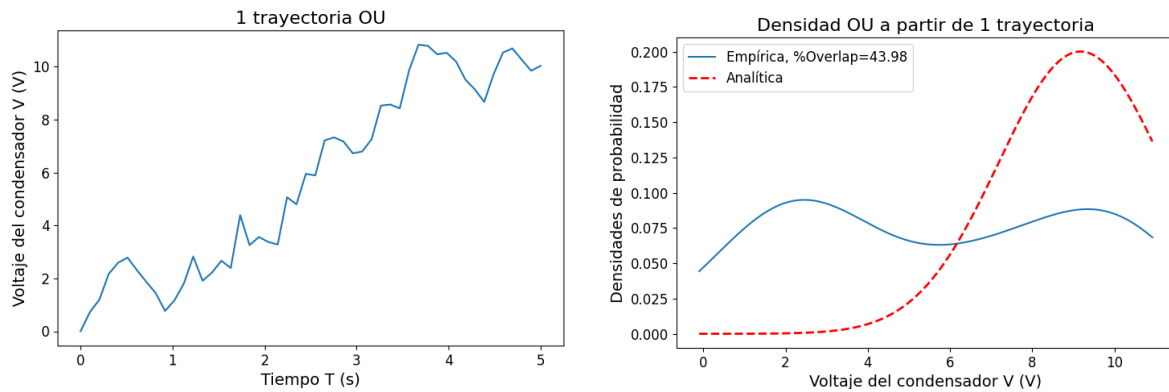


Figura 8: Trayectoria simulada del proceso Ornstein–Uhlenbeck (izquierda) y comparación entre la densidad empírica y la solución analítica de la ecuación de Fokker–Planck (derecha) para la primera corrida.

Además, se generaron otros dos resultados para analizar el comportamiento del fenómeno físico. En la Figura 8 se pueden ver las gráficas obtenidas para los primeros parámetros ingresados, que será utilizado como referencia comparativa para las dos corridas posteriores. Luego, la Figura 9 corresponde a los resultados obtenidos si se generan veinte trayectorias del proceso, manteniendo los demás parámetros constantes. Finalmente, la Figura 10 muestra el resultado de aumentar el tiempo total de trayectoria desde 5 s a 50 s, con el resto de parámetros idénticos a los ingresados para la primera situación.

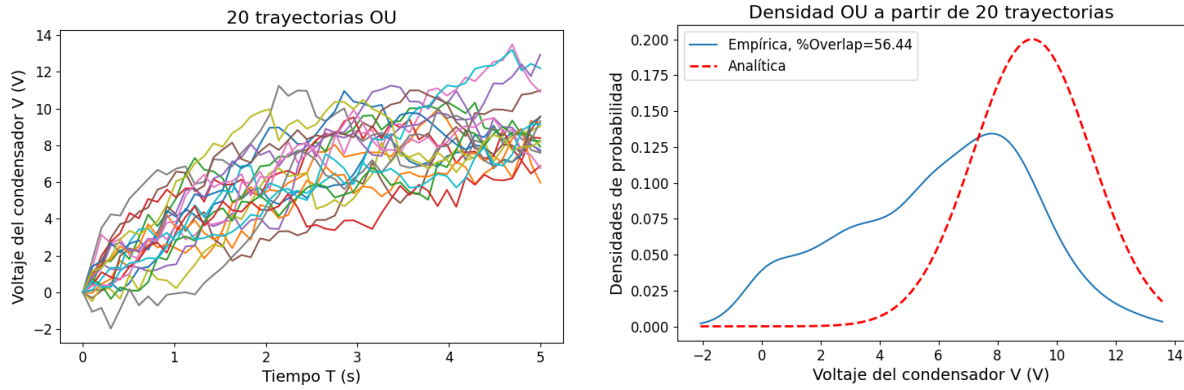


Figura 9: Trayectorias simuladas del proceso Ornstein–Uhlenbeck (izquierda) y comparación entre la densidad empírica y la solución analítica de la ecuación de Fokker–Planck (derecha) para la segunda corrida.

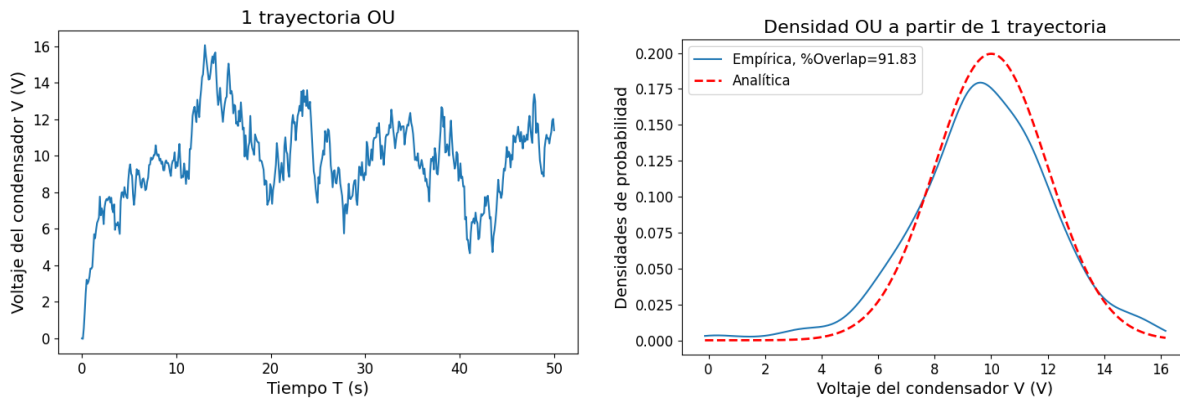


Figura 10: Trayectorias simuladas del proceso Ornstein–Uhlenbeck (izquierda) y comparación entre la densidad empírica y la solución analítica de la ecuación de Fokker–Planck (derecha) para la tercera corrida.

Nótese que, al incrementar tanto el número de trayectorias simuladas como la duración temporal de cada una, la densidad de probabilidad obtenida empíricamente se aproxima mejor a la distribución normal predicha por la solución analítica de la ecuación de Fokker–Planck. En particular, utilizando el %Overlap como métrica para comparar gráficas, se concluye que los parámetros iniciales generaron resultados coherentes con la distribución gaussiana en un 43,98 %, luego al aumentar a 20 corridas se obtuvo una concordancia del 56,44 % y aumentando el tiempo a 50 s, esta es del 91,83 %, por lo que la discrepancia es de $100 \% - 91,83 \% = 8,17 \%$, este último resultado es extremadamente bajo considerando que solo se generó una trayectoria aleatoria. Sin embargo, estos comportamientos se sustentan en principios probabilísticos y físicos fundamentales.

En particular, la Ley de los Grandes Números establece que, al aumentar la cantidad de muestras independientes de un proceso aleatorio, las estimaciones empíricas de cantidades como medias, varianzas o densidades convergen hacia sus valores teóricos [54]. En el contexto del proceso Ornstein–Uhlenbeck simulado, cada trayectoria aporta información parcial sobre la distribución estacionaria del voltaje, por lo que al acumular sus aportaciones, se espera que estas reflejen el comportamiento normal con mayor precisión. Por esta razón, es coherente que en la Figura 9 el %Overlap sea mayor al aumentar el número de trayectorias.

Sin embargo, se sabe que el condensador tiende a estabilizarse en un voltaje igual al voltaje de la fuente [55]. Por lo tanto, si el valor inicial es menor (como los ejemplos mostrados), el sistema requiere un intervalo de tiempo suficiente para relajarse hacia ese punto de equilibrio. En las primeras dos corridas se trabaja con un tiempo de

análisis de tan solo 5 s, lo cuál es insuficiente para que el voltaje del condensador se estabilice. Durante este periodo de tiempo, antes de la estabilidad, domina el ruido producido por la resistencia.

Es por esto que, en la tercera corrida, al aumentar el tiempo total de análisis, el proceso tiene más oportunidad de estabilidad. Nótese que el sistema alcanza estabilidad alrededor de los 7 s. Una vez que el voltaje alcanza una región cercana al valor medio teórico del proceso Ornstein–Uhlenbeck, las fluctuaciones alrededor de dicho nivel se vuelven representativas de la dinámica estacionaria. Esto produce una densidad empírica que se ajusta mejor a la distribución analítica, lo cual se refleja directamente en el mayor porcentaje de %Overlap obtenido.

El modelo matemático describe la evolución temporal del voltaje en un circuito RC sometido a fluctuaciones aleatorias, representándolo mediante un proceso de Ornstein–Uhlenbeck cuya densidad de probabilidad está determinada por la ecuación de Fokker–Planck. A partir de esta formulación, se puede predecir cómo el voltaje se relaja hacia un valor medio impuesto por la fuente mientras experimenta desviaciones debidas al ruido térmico, así como la forma gaussiana de la distribución estacionaria y la rapidez con la que el sistema alcanza la estabilidad.

Esta descripción coincide con el comportamiento físico del circuito, el resistor introduce fluctuaciones asociadas al ruido térmico y el condensador actúa como un elemento de almacenamiento que suaviza esas variaciones, de modo que el voltaje resultante se encuentra siempre en competencia entre la relajación determinista hacia el estado estable y las perturbaciones aleatorias. Los parámetros del modelo, como la constante de relajación y la intensidad del ruido, corresponden directamente a propiedades del circuito, por lo que la teoría captura los mecanismos fundamentales detrás del fenómeno observado.

Aunque se trata de una idealización, la representación es razonablemente fiel a la realidad. El proceso de Ornstein–Uhlenbeck supone ruido gaussiano y elementos lineales ideales, lo cual simplifica la complejidad física pero conserva la estructura estadística principal del sistema. En condiciones controladas, los resultados que predice se alinean bien con mediciones experimentales, especialmente en la región donde el circuito se encuentra cerca del régimen estacionario. Las discrepancias aparecen cuando intervienen efectos no ideales, como ruido no gaussiano, variaciones de temperatura o tolerancias en los componentes, pero dentro del marco del curso, el modelo ofrece una aproximación sólida y físicamente consistente.

A. Apéndices

A.1. Código utilizado para la simulación preliminar de proceso de Ornstein–Uhlenbeck

```
1 # Simulación de proceso Ornstein–Uhlenbeck
2
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 #LaTeX typeset. Si no tienen LaTeX instalado en la compu : 1. q mancos , 2. comenten ↘
   esta parte
7 plt.rcParams.update({
8     "text.usetex": True,
9     "font.family": "serif",
10    "font.sans-serif": "Computer Modern Roman",
11 })
```

```

12
13 # Parámetros del proceso OU
14 T = 30.0          # Tiempo de simulación
15 theta = 3         # Velocidad de reversión a la media
16 mu = 0.0          # Media a largo plazo
17 sigma = 0.3       # Coeficiente de volatilidad
18 X0 = 10.0         # Valor inicial
19
20 dt = 0.001        # Unidad de tiempo
21 N = int(T / dt)   # Cantidad de pasos de tiempo
22
23 # Generar el vector de resultados
24 X = np.zeros(N)
25 X[0] = X0
26
27 # Generar el proceso OU
28 for t in range(1, N):
29     dW = np.sqrt(dt) * np.random.normal(0, 1) #Movimiento Browniano
30     X[t] = X[t-1] + theta * (np.sin(t) - X[t-1]) * dt + sigma * dW
31
32 # Graficar el resultado
33 plt.figure(figsize=(12,3))
34 plt.plot(np.linspace(0, T, N), X, color="#FF68C5")
35 plt.title(r"Simulación de proceso Ornstein–Uhlenbeck con $x_0 = %.2f$, $\theta = %.2f$,
36           , $\mu = %.2f$, $\sigma = %.2f$" % (X0, theta, mu, sigma))
37 plt.xlabel("Tiempo")
38 plt.ylabel("X(t)")
39 plt.savefig("procesoOU.pdf", format="pdf", bbox_inches='tight', pad_inches=0) # \
40     Guardar en PDF sin espacio alrededor para facilitar inclusión.
41
42 plt.show()

```

A.2. Derivación de la ecuación Fokker-Planck desde un proceso estocástico

A partir de la descripción de un proceso Ornstein-Uhlenbeck se puede obtener la ecuación de Fokker-Planck, siguiendo un proceso similar al detallado por [56]. Se comienza, como es de esperar, con un proceso estocástico general (proceso de Itô):

$$dx(t) = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dB_t \quad (16)$$

Se define una función arbitraria $f(x) \in C^2$, la cual se asume posee soporte compacto², al igual que sus derivadas. Esta función se utilizará temporalmente para invocar el lema de Itô, el cual establece que

$$df = f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx} dx^2 \quad (17)$$

²Esto implica que $\exists x_1, x_2 : f(x) = 0 \quad \forall x \notin [x_1, x_2]$

Al sustituir la ecuación (16) y el hecho que³ $dx^2 = \sigma^2(x, t)dt$ en la ecuación (17) se obtiene:

$$df = f_x [\mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dB_t] + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)f_{xx}dt = \left[\mu(x, t)f_x dt + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)f_{xx} \right] dt + \sigma(x, t)dB_t \quad (18)$$

Para la eliminar la dependencia de la ecuación (18) en dB_t , se toma el valor esperado con respecto a la posición. Dado que $\mathbb{E}[dB_t] = 0$,

$$\mathbb{E}[df] = \mathbb{E} \left[\mu(x, t)f_x dt + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)f_{xx} \right] dt$$

Del lado izquierdo de la expresión, se intercambia el operador diferencial con el de valor esperado. Además, se pasa el diferencial de tiempo del lado derecho, lo cual resulta en

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[f] = \mathbb{E} \left[\mu(x, t)f_x dt + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)f_{xx} \right]$$

Ahora, sustituyendo la definición de valor esperado, definiendo $p(x, t)$ como la función de densidad de probabilidad, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x, t)f_x p(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2(x, t)f_{xx}p(x, t) dx$$

Del lado izquierdo, se cambia el orden de la derivada con la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x, t)f_x p(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2(x, t)f_{xx}p(x, t) dx \quad (19)$$

A continuación, se busca simplificar las expresiones de las integrales del lado derecho. Se definen individualmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x, t)f_x p(x, t) dx \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2(x, t)f_{xx}p(x, t) dx \end{aligned}$$

Se comienza con I_1 . Se integra por partes, definiendo $u_1 = \mu(x, t)p(x, t)$ y $dv_1 = f_x(x)dx$. Entonces,

$$du_1 = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x, t)p(x, t)) dx \quad \wedge \quad v_1 = f(x)$$

con lo cual

³Ver derivación del lema de Itô [57].

$$I_1 = f(x)\mu(x,t)p(x,t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x,t)p(x,t)) \, dx$$

Dado que $f(x)$ posee soporte compacto, $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$ y entonces

$$I_1 = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x,t)p(x,t)) \, dx \quad (20)$$

Para el análisis de I_2 se procede de la misma forma, pero, por la presencia del término f_{xx} , será necesario aplicar integración por partes dos veces. Comenzando con $u_{21} = \sigma^2(x,t)$ y $dv_{21} = f_{xx}(x) \, dx$ se obtiene

$$du_{21} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma^2(x,t)p(x,t)) \, dx \quad \wedge \quad v_{21} = f_x(x)$$

Entonces,

$$I_2 = f_x(x)\sigma^2(x,t)p(x,t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \frac{\partial}{\partial x} (\sigma^2(x,t)p(x,t)) \, dx$$

Al igual que $f(x)$, $f_x(x)$ posee soporte compacto, entonces:

$$I_2 = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \frac{\partial}{\partial x} (\sigma^2(x,t)p(x,t)) \, dx$$

Nuevamente, se integrará por partes, esta vez con $u_{22} = \partial_x (\sigma^2(x,t)p(x,t))$ y $dv_{22} = f_x(x) \, dx$, con lo cual

$$du_{21} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x,t)p(x,t)) \, dx \quad \wedge \quad v_{22} = f(x)$$

Entonces,

$$I_2 = -f(x) \frac{\partial}{\partial x} (\sigma^2(x,t)p(x,t)) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x,t)p(x,t)) \, dx$$

Al igual que antes, dado que $f(x)$ posee soporte continuo, se obtiene

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x,t)p(x,t)) \, dx \quad (21)$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (20) y (21) en la ecuación (19) se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \, dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x,t)p(x,t)) \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x,t)p(x,t)) \, dx$$

Uniendo en una sola integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x,t)p(x,t)) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x,t)p(x,t)) \right] dx = 0$$

Dado que $f(x)$ es una función arbitraria, la única forma de anular la integral es si el término en corchetes es cero. Entonces,

$$\boxed{\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x,t)p(x,t)) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x,t)p(x,t)) = 0} \quad (22)$$

Q.E.D.

Referencias

- [1] S. Carter, L. R. Mujica-Parodi y H. H. Strey, «Parameter estimation from an Ornstein-Uhlenbeck process with measurement noise,» *Physical Review E*, vol. 110, n.º 4, pág. 044112, 2024. DOI: [10.1103/PhysRevE.110.044112](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.110.044112). dirección: <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.110.044112>.
- [2] M. A. Pinsky, *An Introduction to Stochastic Modeling*, en, 4th ed. San Diego: Elsevier Science & Technology, 2011, ISBN: 978-0-12-381417-3.
- [3] A. Strang, «A Theoretical Review of Area Production Rates as Test Statistics for Detecting Nonequilibrium Dynamics in Ornstein-Uhlenbeck Processes,» *Axioms*, vol. 13, n.º 12, pág. 820, 2024. DOI: [10.3390/axioms13120820](https://doi.org/10.3390/axioms13120820). dirección: <https://www.mdpi.com/2075-1680/13/12/820>.
- [4] P. Lansky y S. Ditlevsen, «A review of the methods for signal estimation in stochastic diffusion leaky integrate-and-fire neuronal models,» en, *Biological Cybernetics*, vol. 99, n.º 4, págs. 253-262, nov. de 2008, ISSN: 1432-0770. DOI: [10.1007/s00422-008-0237-x](https://doi.org/10.1007/s00422-008-0237-x). visitado 15 de sep. de 2025. dirección: <https://doi.org/10.1007/s00422-008-0237-x>.
- [5] M. L. Dietrich, C. Sarmoria, A. Brandolin y M. Asteasuain, «High-Pressure Polymerization of Ethylene in Tubular Reactors: Prediction of the Bivariate Distributions of Molecular Weight-Branched with a Rigorous Reactor Model,» en *Computer Aided Chemical Engineering*, ép. 13 International Symposium on Process Systems Engineering (PSE 2018), M. R. Eden, M. G. Ierapetritou y G. P. Towler, eds., vol. 44, Elsevier, ene. de 2018, págs. 1447-1452. DOI: [10.1016/B978-0-444-64241-7.50236-6](https://doi.org/10.1016/B978-0-444-64241-7.50236-6). visitado 15 de sep. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780444642417502366>.
- [6] D. M. Paganin y K. S. Morgan, «X-ray Fokker-Planck equation for paraxial imaging,» en, *Scientific Reports*, vol. 9, n.º 1, pág. 17537, nov. de 2019, Publisher: Nature Publishing Group, ISSN: 2045-2322. DOI: [10.1038/s41598-019-52284-5](https://doi.org/10.1038/s41598-019-52284-5). visitado 14 de sep. de 2025. dirección: <https://www.nature.com/articles/s41598-019-52284-5>.
- [7] M. C. Mariani, M. A. M. Bhuiyan y O. K. Tweneboah, «Estimation of stochastic volatility by using Ornstein-Uhlenbeck type models,» en, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 491, págs. 167-176, feb. de 2018, ISSN: 03784371. DOI: [10.1016/j.physa.2017.08.153](https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.08.153). visitado 15 de sep. de 2025. dirección: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378437117308828>.

- [8] L. Dai, Z. Fu y Z. Huang, «Option pricing formulas for uncertain financial market based on the exponential Ornstein–Uhlenbeck model,» en, *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 28, n.º 3, págs. 597-604, mar. de 2017, ISSN: 1572-8145. DOI: [10.1007/s10845-014-1017-1](https://doi.org/10.1007/s10845-014-1017-1). visitado 15 de sep. de 2025. dirección: <https://doi.org/10.1007/s10845-014-1017-1>.
- [9] B. Lehle y J. Peinke, «Analyzing a stochastic process driven by Ornstein-Uhlenbeck noise,» *Physical Review E*, 2017. dirección: https://www.researchgate.net/publication/313216739_Analyzing_a_stochastic_process_driven_by_Ornstein-Uhlenbeck_noise.
- [10] G. Ascione, Y. Mishura y E. Pirozzi, «The Fokker–Planck equation for the time-changed fractional Ornstein–Uhlenbeck stochastic process,» *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, vol. 152, n.º 4, págs. 1032-1057, 2022. DOI: [10.1017/prm.2021.45](https://doi.org/10.1017/prm.2021.45). dirección: <https://www.cambridge.org/core/journals/proceedings-of-the-royal-society-of-edinburgh-section-a-mathematics/article/fokkerplanck-equation-for-the-timechanged-fractional-ornsteinuhlenbeck-stochastic-process/BFA4CF33A08E2ACF1B9347B533D4AA52>.
- [11] L. Chevillard, «Regularized fractional Ornstein-Uhlenbeck processes, and their relevance to the modeling of fluid turbulence,» *arXiv preprint arXiv:1705.10576*, 2017. dirección: <https://arxiv.org/abs/1705.10576>.
- [12] P. Trajanovski, P. Jolakoski, K. Zelenkovski, A. Iomin, L. Kocarev y T. Sandev, «Ornstein-Uhlenbeck process and generalizations: particle’s dynamics under comb constraints and stochastic resetting,» *arXiv preprint arXiv:2301.12304*, 2023. dirección: <https://arxiv.org/abs/2301.12304>.
- [13] P. C. Bressloff, «Stochastic Fokker-Planck equation in random environments,» *Physical Review E*, vol. 94, n.º 4, pág. 042 129, 2016. dirección: <https://www.math.utah.edu/~bressloff/publications/16-12.pdf>.
- [14] L. T. Giorgini, W. Moon y J. S. Wettlaufer, «Analytical Survival Analysis of the Ornstein–Uhlenbeck Process,» en, *Journal of Statistical Physics*, vol. 181, n.º 6, págs. 2404-2414, dic. de 2020, ISSN: 0022-4715, 1572-9613. DOI: [10.1007/s10955-020-02669-y](https://doi.org/10.1007/s10955-020-02669-y). visitado 15 de sep. de 2025. dirección: <http://link.springer.com/10.1007/s10955-020-02669-y>.
- [15] G. Gerhartz, *Langevin and Fokker-Planck equation*, Seminario de Física Estadística Teórica, Universidad de Heidelberg, 2023. dirección: https://www.thphys.uni-heidelberg.de/~wolschin/statsem23_6.pdf.
- [16] M. N. Rosenbluth, W. M. MacDonald y D. L. Judd, «Fokker-Planck Equation for an Inverse-Square Force,» en, *Physical Review*, vol. 107, n.º 1, págs. 1-6, 1957. DOI: [10.1103/PhysRev.107.1](https://doi.org/10.1103/PhysRev.107.1). visitado 20 de oct. de 2025. dirección: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.107.1>.
- [17] H. A. Kramers, «Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions,» en, *Physica*, vol. 7, n.º 4, págs. 284-304, 1940. DOI: [10.1016/S0031-8914\(40\)90098-2](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(40)90098-2). visitado 20 de oct. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891440900982>.
- [18] W. F. Brown, «Thermal Fluctuations of a Single-Domain Particle,» en, *Physical Review*, vol. 130, págs. 1677-1686, 1963. DOI: [10.1103/PhysRev.130.1677](https://doi.org/10.1103/PhysRev.130.1677). visitado 20 de oct. de 2025. dirección: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.1677>.
- [19] E. N. Parker, «The passage of energetic charged particles through interplanetary space,» en, *Planetary and Space Science*, vol. 13, 1965. visitado 20 de oct. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0032063365901315>.
- [20] P.-H. Chavanis, «Generalized Fokker–Planck equations and effective thermodynamics,» *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, News and Expectations in Thermostatistics, vol. 340, n.º 1, págs. 57-65, sep. de 2004, ISSN: 0378-4371. DOI: [10.1016/j.physa.2004.03.077](https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.03.077). visitado 19 de oct. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437104003978>.

- [21] N. Sato, «Dissipative brackets for the Fokker–Planck equation in Hamiltonian systems and characterization of metriplectic manifolds,» *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 411, pág. 132 571, oct. de 2020, ISSN: 0167-2789. DOI: [10.1016/j.physd.2020.132571](https://doi.org/10.1016/j.physd.2020.132571). visitado 19 de oct. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278919307687>.
- [22] G. E. Uhlenbeck y L. S. Ornstein, «On the Theory of the Brownian Motion,» en, *Physical Review*, vol. 36, n.º 5, págs. 823-841, 1930. DOI: [10.1103/PhysRev.36.823](https://doi.org/10.1103/PhysRev.36.823). visitado 20 de oct. de 2025. dirección: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.36.823>.
- [23] B. L. Sawford, «Reynolds number effects in Lagrangian stochastic models of turbulent dispersion,» en, *Physics of Fluids A*, vol. 3, n.º 6, págs. 1577-1586, 1991. visitado 20 de oct. de 2025. dirección: <https://pubs.aip.org/aip/pof/article/3/6/1577/402215/Reynolds-number-effects-in-Lagrangian-stochastic>.
- [24] K. Hasselmann, «Stochastic climate models. Part I: Theory,» en, *Tellus*, vol. 28, 1976. visitado 20 de oct. de 2025. dirección: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.2153-3490.1976.tb00696.x>.
- [25] K. Berg-Sørensen y H. Flyvbjerg, «Power spectrum analysis for optical tweezers,» en, *Review of Scientific Instruments*, vol. 75, n.º 3, págs. 594-612, 2004. visitado 20 de oct. de 2025. dirección: <https://pubs.aip.org/aip/rsi/article/75/3/594/460552/Power-spectrum-analysis-for-optical-tweezers>.
- [26] R. H. Hirpara, «An Ornstein-Uhlenbeck process-driven power system model,» *Journal of Electrical Engineering & Technology*, vol. 10, n.º 1, págs. 1-9, 2015. DOI: [10.5370/JEET.2015.10.1.1](https://doi.org/10.5370/JEET.2015.10.1.1). dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315030554>.
- [27] D. T. Gillespie, «The mathematics of Brownian motion and Johnson noise,» *American Journal of Physics*, vol. 64, n.º 3, págs. 225-240, 1996. DOI: [10.1119/1.18210](https://doi.org/10.1119/1.18210). dirección: <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article/64/3/225/1040013/The-mathematics-of-Brownian-motion-and-Johnson>.
- [28] E. Bibbona, G. Panfilio y P. Tavella, «The Ornstein–Uhlenbeck process as a model of a low pass filtered white noise,» *Metrologia*, vol. 45, n.º 6, S117-S126, 2008. DOI: [10.1088/0026-1394/45/6/S17](https://doi.org/10.1088/0026-1394/45/6/S17). dirección: https://www.researchgate.net/publication/230905635_The_Ornstein-Uhlenbeck_process_as_a_model_of_a_low_pass_filtered_white_noise.
- [29] S. Rajendran, «Analytical solutions of Fokker-Planck equation,» 2020, Octubre 2020.
- [30] M. C. Wang y G. E. Uhlenbeck, «On the Theory of the Brownian Motion II,» *Reviews of Modern Physics*, vol. 17, n.º 2-3, págs. 323-342, 1945. DOI: [10.1103/RevModPhys.17.323](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.17.323).
- [31] L. Pichler, A. Masud y L. A. Bergman, «Numerical Solution of the Fokker–Planck Equation by Finite Difference and Finite Element Methods—A Comparative Study,» en, en *Computational Methods in Stochastic Dynamics*, M. Papadrakakis, G. Stefanou y V. Papadopoulos, eds., vol. 26, Series Title: Computational Methods in Applied Sciences, Dordrecht: Springer Netherlands, 2013, págs. 69-85, ISBN: 978-94-007-5134-7. DOI: [10.1007/978-94-007-5134-7_5](https://doi.org/10.1007/978-94-007-5134-7_5). visitado 14 de oct. de 2025. dirección: https://link.springer.com/10.1007/978-94-007-5134-7_5.
- [32] N. Morita, *Finite Element Programming in Nonlinear Geomechanics and Transient Flow*, en. Elsevier, 2021, ISBN: 978-0-323-91112-2. DOI: [10.1016/C2021-0-00098-5](https://doi.org/10.1016/C2021-0-00098-5). visitado 21 de oct. de 2025. dirección: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/C20210000985>.
- [33] R. Shamey y X. Zhao, *Modelling, simulation and control of the dyeing process* (Woodhead Publishing series in textiles 130), en. Amsterdam Boston: Elsevier Woodhead Publishing, 2014, ISBN: 978-0-85709-133-8.
- [34] C. Grossmann, H.-G. Roos y M. Stynes, *Numerical Treatment of Partial Differential Equations*, en. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, ISBN: 978-3-540-71584-9. DOI: [10.1007/978-3-540-71584-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71584-9). visitado 21 de oct. de 2025. dirección: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-71584-9>.

- [35] A. Logg, K.-A. Mardal y G. Wells, eds., *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book* (Lecture Notes in Computational Science and Engineering), en. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012, vol. 84, ISBN: 978-3-642-23099-8. DOI: [10.1007/978-3-642-23099-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-23099-8). visitado 21 de oct. de 2025. dirección: <https://link.springer.com/10.1007/978-3-642-23099-8>.
- [36] L. A. Bergman y J. C. Heinrich, «On the reliability of the linear oscillator and systems of coupled oscillators,» en, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, n.º 9, págs. 1271-1295, 1982, ISSN: 1097-0207. DOI: [10.1002/nme.1620180902](https://doi.org/10.1002/nme.1620180902). visitado 18 de oct. de 2025. dirección: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620180902>.
- [37] R. S. Langley, «A finite element method for the statistics of non-linear random vibration,» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 101, n.º 1, págs. 41-54, jul. de 1985, ISSN: 0022-460X. DOI: [10.1016/S0022-460X\(85\)80037-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(85)80037-7). visitado 18 de oct. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X85800377>.
- [38] B. F. Spencer y L. A. Bergman, «On the numerical solution of the Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic systems,» en, *Nonlinear Dynamics*, vol. 4, n.º 4, págs. 357-372, ago. de 1993, ISSN: 1573-269X. DOI: [10.1007/BF00120671](https://doi.org/10.1007/BF00120671). visitado 18 de oct. de 2025. dirección: <https://doi.org/10.1007/BF00120671>.
- [39] P. Kumar y S. Narayanan, «Solution of Fokker-Planck equation by finite element and finite difference methods for nonlinear systems,» en, *Sadhana*, vol. 31, n.º 4, págs. 445-461, ago. de 2006, ISSN: 0973-7677. DOI: [10.1007/BF02716786](https://doi.org/10.1007/BF02716786). visitado 18 de oct. de 2025. dirección: <https://doi.org/10.1007/BF02716786>.
- [40] M. Kumar, S. Chakravorty, P. Singla y J. L. Junkins, «The partition of unity finite element approach with hp-refinement for the stationary Fokker-Planck equation,» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 327, n.º 1, págs. 144-162, oct. de 2009, ISSN: 0022-460X. DOI: [10.1016/j.jsv.2009.05.033](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.05.033). visitado 18 de oct. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X09004842>.
- [41] M. Kumar, S. Chakravorty y J. L. Junkins, «A semianalytic meshless approach to the transient Fokker-Planck equation,» *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 25, n.º 3, págs. 323-331, jul. de 2010, ISSN: 0266-8920. DOI: [10.1016/j.probengmech.2010.01.006](https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2010.01.006). visitado 18 de oct. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026689201000007X>.
- [42] A. Masud y R. A. Khurram, «A multiscale/stabilized finite element method for the advection-diffusion equation,» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Flow Simulation and Modeling, vol. 193, n.º 21, págs. 1997-2018, mayo de 2004, ISSN: 0045-7825. DOI: [10.1016/j.cma.2003.12.047](https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.12.047). visitado 18 de oct. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782504000647>.
- [43] A. Masud y L. A. Bergman, «Application of multi-scale finite element methods to the solution of the Fokker-Planck equation,» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Special Issue on Computational Methods in Stochastic Mechanics and Reliability Analysis, vol. 194, n.º 12, págs. 1513-1526, abr. de 2005, ISSN: 0045-7825. DOI: [10.1016/j.cma.2004.06.041](https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.06.041). visitado 18 de oct. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782504004037>.
- [44] A. Masud y L. A. Bergman, «Solution of the Four Dimensional Fokker-Planck Equation: Still a Challenge,» en, 2005.
- [45] D. W. Peaceman y H. H. Rachford Jr., «The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations,» *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 3, n.º 1, págs. 28-41, mar. de 1955, Publisher: Society for Industrial and Applied Mathematics, ISSN: 0368-4245. DOI: [10.1137/0103003](https://doi.org/10.1137/0103003). visitado 18 de oct. de 2025. dirección: <https://epubs.siam.org/doi/10.1137/0103003>.

- [46] Y. Zhang, X. Wang, Q. Huang, J. Duan y T. Li, «Numerical analysis and applications of Fokker-Planck equations for stochastic dynamical systems with multiplicative α -stable noises,» *Applied Mathematical Modelling*, vol. 87, págs. 711-730, nov. de 2020, ISSN: 0307-904X. DOI: [10.1016/j.apm.2020.06.031](https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.031). visitado 14 de sep. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X20303061>.
- [47] A. Tabandeh, N. Sharma, L. Iannacone y P. Gardoni, «Numerical solution of the Fokker-Planck equation using physics-based mixture models,» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 399, pág. 115 424, sep. de 2022, ISSN: 0045-7825. DOI: [10.1016/j.cma.2022.115424](https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115424). visitado 14 de oct. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782522004716>.
- [48] H. Bartel, J. Lampert y H. Ranocha, «Structure-preserving numerical methods for Fokker-Planck equations,» en, *PAMM*, vol. 24, n.º 4, e202400007, 2024, ISSN: 1617-7061. DOI: [10.1002/pamm.202400007](https://doi.org/10.1002/pamm.202400007). visitado 14 de oct. de 2025. dirección: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/pamm.202400007>.
- [49] A. S. Neena, D. P. C. Mkhope y A. Awasthi, «Some Computational Methods for the Fokker-Planck Equation,» en, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, vol. 8, n.º 5, pág. 261, sep. de 2022, ISSN: 2199-5796. DOI: [10.1007/s40819-022-01462-7](https://doi.org/10.1007/s40819-022-01462-7). visitado 16 de oct. de 2025. dirección: <https://doi.org/10.1007/s40819-022-01462-7>.
- [50] H. P. Langtangen, «A general numerical solution method for Fokker-Planck equations with applications to structural reliability,» *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 6, n.º 1, págs. 33-48, mar. de 1991, ISSN: 0266-8920. DOI: [10.1016/S0266-8920\(05\)80005-0](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(05)80005-0). visitado 16 de oct. de 2025. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266892005800050>.
- [51] E. S. Rahman, «Euler-Maruyama's Method for Numerical Solution of Ornstein-Uhlenbeck's Equation,» Accedido: 2025-10-20, Tesis doct., Universitas Negeri Padang, 2020. dirección: https://matematika.fmipa.unp.ac.id/math/en/wp-content/uploads/2021/03/SKRIPSI_Elga-Sania-Rahman.pdf.
- [52] M. Sekatchev y Z. Zhou, *Stochastic Approaches to Asset Price Analysis*, Accedido: 2025-10-20, 2024. dirección: https://www.researchgate.net/figure/Simulation-of-Ornstein-Uhlenbeck-process-using-the-Euler-Marayama-method-with-the_fig1_382111531.
- [53] Z. W. Pei, *Kernel Methods in Mathematical Statistics*, Accedido: 2025-10-20, 2003. dirección: <http://staff.ustc.edu.cn/~zwp/teach/Math-Stat/kernel.pdf>.
- [54] L. Siddiqui, *Law of Large Numbers: A Key to Understanding Uncertainty*, en, jun. de 2025. visitado 15 de nov. de 2025. dirección: <https://www.datacamp.com/es/tutorial/law-of-large-numbers>.
- [55] H. D. Young y R. A. Freedman, «Circuitos RC,» en *Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics*, 14.^a ed. Boston: Pearson, 2016, vol. 2, cap. 10.5.
- [56] H. Risken, *The Fokker-Planck equation: methods of solution and applications* (Springer Series in Synergetics Volume 18), en. Berlin, [Germany]: Springer-Verlag, 1984, ISBN: 978-3-642-96809-9.
- [57] K. Ito, *On stochastic differential equations*, en, 1951. DOI: [10.1090/memo/0004](https://doi.org/10.1090/memo/0004). visitado 17 de oct. de 2025. dirección: <https://www.ams.org/memo/0004>.