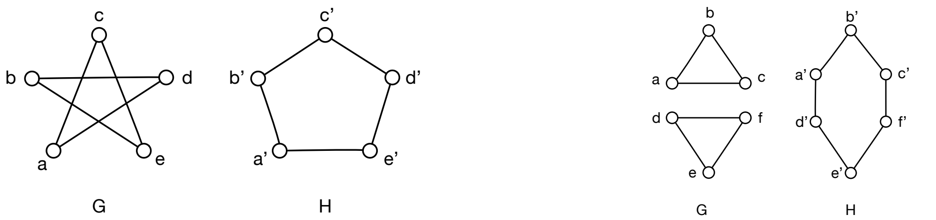
Programmation par Contraintes - Rapport

Vasquez Alessandro

11 février 2018

Table des matières



(a) Deux graphes isomorphes

(b) Graphes non-isomorphes

FIGURE 1 – Isomorphisme, examples

1 Introduction

Nous verrons d'abord les définitions des problème que nous traiterons dans la section 2.

1.1 Isomorphisme de graphe

Définition 1.1. Soient G, H deux graphes $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$. Une fonction f entre F et G est un isomorphisme ssi f est une bijection entre les sommets de G et de H t.q. $(u, v) \in E$ ssi $(f(u), f(v)) \in H$.

Nous remarquons qu'il y a plusieurs propriétés qui doivent être satisfaites :

(i) $|V| = |V'|$,

(ii) $|E| = |E'|$,

(iii) G, H ont le même nombre de composantes connectées.

Au début on peut penser que si tous les sommets des deux graphes ont le même dégrée, le graphe sont forcement isomorphes. La figure 1b montre un exemple de graphes dont tous les sommets ont le même degré mais qui ne sont pas isomorphes.

1.2 Isomorphisme de sous-graphe

Définition 1.2. Soients G, H deux graphes $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$. Nous nous demandons s'il existe un sous-graphe $G' = (V_s, E_s), V_s \subseteq V$ et $E_s \subseteq E \cap (V \times V)$ tq $G' =_{iso} H$.

1.3 Plus grandes sous structures communes

2 Développement

2.1 Isomorphisme de graphe

2.1.1 Modélisation

Soient $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ deux graphes. La définition d'isomorphisme nous permet d'obtenir directement une modélisation. Soit $CSP = (X, D, C)$ le problème de PPC que nous voulons définir. Nous définissons l'ensemble de variables de la façon suivante :

$$X = \{x_v \mid v \in V\}, \; \forall v \in V.$$

Puisque nous cherchons une fonction $f : V \to V'$ t.q. $(u, v) \in E$ ssi $(f(u), f(v)) \in E'$, nous savons déjà que deux sommets $u \in V, u' \in V'$ peuvent être liés par f uniquement si $deg(u) = deg(u')$. Donc, nous allons considérer pour chaque $u \in V$ l'ensemble des sommets $\{v_1, v_2..v_k\}$ tq $v_1, v_2..v_k \in V'$ et $deg(v_1) = deg(v_2) = .. = deg(v_k) = deg(u),$ pour un certain $k : 0 \leq k \leq |V'|$. Nous remarquons tout de suite que si $k = 0$ pour un sommet $u \in V$, il n'y aura pas une solution à notre problème. Pour chaque variable $x \in X$, le domaine est ainsi définis comme l'ensemble :

$$D_x = \{v \mid deg(v) = deg(x) \wedge v \in V'\}.$$

Pour définir les contraintes, nous suivrons la définition d'isomorphisme, donc $\forall u, v \in V$ tq $(u, v) \in E$:

$$C(x_u, x_v) \triangleq \text{" pour chaque sommets } u' \in D_{x_u} : \exists v' \in D_{x_v} \text{ tq } (u', v') \in E' \wedge u' \neq v' \text{ "}.$$

Ici les contraintes sont binaires et définies localement. Nous pouvons imaginer l'ensemble de contraintes locales ainsi définies comme un seul contrainte globale C_g. À ce propos, il est utile de préciser que une contrainte globale *alldiff* peut être utilisé une fois pour toute plutôt que indiquer $u' \neq v'$ pour chaque contrainte $C(x_u, x_v)$.

2.1.2 Résolution

En considérant l'ensemble de contraintes locales comme une contrainte globale C_g, nous allons introduire maintenant le réseau des valeurs associé à C_g. Puisque $\forall x \in X : D_x \subseteq V'$ nous savons que

$$U(C) = \bigcup_{x \in X(C)} D_x = V'.$$

Nous savons aussi que $|X| = |V|$, parce que une et une seule variable est associé à chaque sommet de G. Nous définissions le graphe bipartite $GV(C) = (X(C), U(C), A)$ où $A \subseteq X(C) \times U(C)$ est l'ensemble d'arêtes défini de la manière suivante :

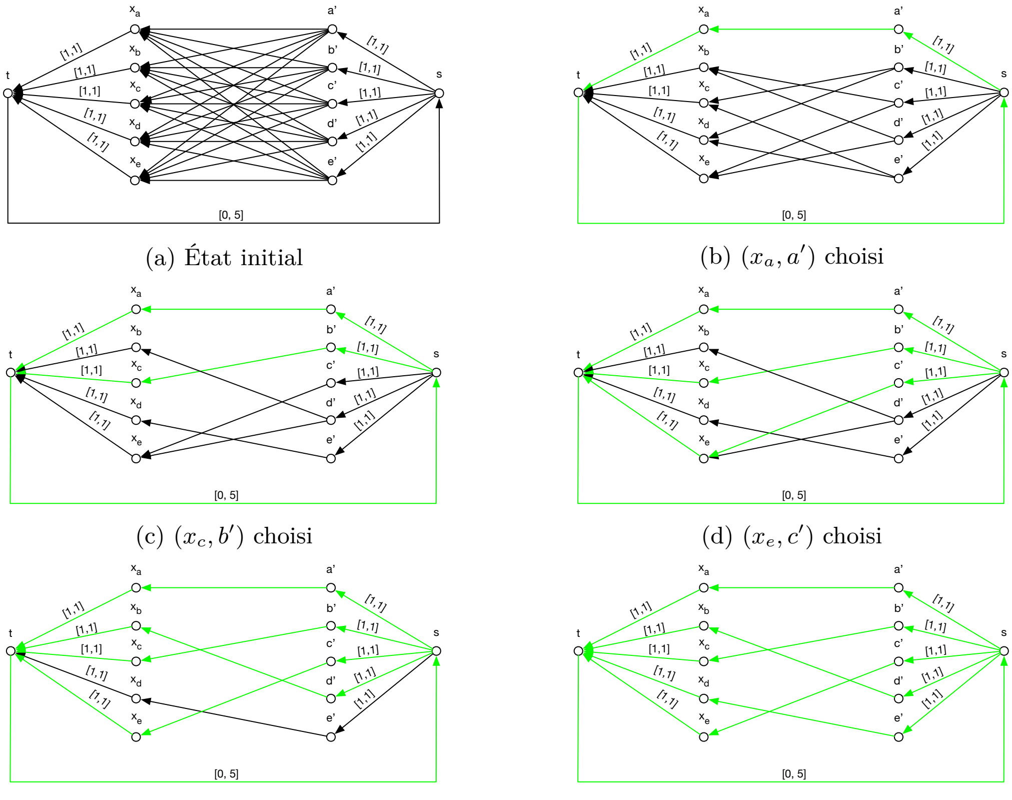
$$A = \{(x_v, u) \in A \mid x_v \in X(C), u \in U(C) \wedge deg(v) = deg(u)\},$$

c'est à dire que dans le graphe $GV(C)$ il y aura un arc entre une variable x_v et un sommet $u \in G'$ seulement si v et u ont le même degré. En introduisant deux sommets s et t, un arc de s à $u, \forall u \in U(C)$, un arc de x à $t, \forall x \in X(C)$, un arc de t à s et en supposant que l'arc (x_v, u) est sortant de u et entrant en x_v, nous pouvons construire le réseau de valeurs $N(C)$. Le problème de trouver un isomorphisme peut être transformé en un problème de flot sur $N(C)$ en définissant la fonction de capacité $c : A \to [\mathbb{R}, \mathbb{R}]$, où $[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ est un intervalle fermé, i.e. le flot qui passe dans l'arc a peut prendre une valeur dans cet intervalle, borne inférieure et supérieure comprises. Dans notre cas, la fonction de capacité c est définie par

$$\forall (u,v) \in A : c((u,v)) = \begin{cases} [1,1] & \text{if } u = s \vee v = t, \\ [0,1] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque nous injections un flot de s à $u \in U(C)$ et puis de u à $x_v \in X(C)$ nous allons couper les arcs qui sont incompatible avec la contrainte globale où $u = x_v$ est fixé : par exemple, si un sommet $v' \in V$ est adjacent à v, mais $u' \in V'$ n'est pas adjacent à u, l'arc $(x_{v'}, u')$ sera coupé. Nous allons itérer cette procédure jusqu'à nous trouvons une solution. Si pendant le processus un sommet perd tous ses arcs (i.e. son degré devient 0), nous recommençons la procédure de zéro mais en choisissant au début un arc différent de (u, x_v). Un exemple de cette procédure de coupage des arcs est présenté dans la figure 2. Nous remarquons que à chaque pas, des que un arc est choisi, il y a des arcs qui sont coupés pour au moins une des contraintes suivantes :

1. le contrainte *alldiff,*
2. le contrainte d'adjacence des sommets.



(a) État initial

(b) (x_a, a') choisi

(c) (x_c, b') choisi

(d) (x_e, c') choisi

(e) (x_b, d') choisi

(f) (x_d, e') choisi

Figure 2 – Résolution pour l'exemple dans la figure 1a.

2.2 Isomorphisme de sous-graphe

Comme pour le premier problème, nous pouvons définir un $CSP = (X, D, C)$ tout de suite en utilisant la définition du problème d'isomorphisme de sous-graphe que nous avons introduit dans la section 1. Soient $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ deux graphes. Les variables et les domaines sont définies toujours de la manière suivante :

$$X = \{x_v \mid v \in V\}, \ \forall v \in V,$$

$$D_x = \{v \mid deg(v) = deg(x) \wedge v \in V'\}.$$

Comme avant, les contraintes peuvent être définies :

$$C(x_u, x_v) \triangleq \text{ " pour chaque sommets } u' \in D_{x_u} : \exists v' \in D_{x_v} \text{ tq } (u', v') \in E' \wedge u' \neq v' \text{ ".}$$

3 Conclusion

4 Bibliographie