А. В. ПОГОРЕЛОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

517.3
П 43
УДК 516.0

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собой ценное руководство по аналитической геометрии. Написана она четким и ясным языком, богата конкретным геометрическим материалом. При сравнительно малом объеме книга излагает с достаточной полнотой все основные вопросы курса. В ней имеется также большое число упражнений и задач, удачно подобранных в методическом отношении.

Книга рассчитана на студентов физико-математических факультетов университетов и пединститутов. Она может быть использована также студентами втузов.

Алексей Васильевич Погорелов

Аналитическая геометрия, изд. 3

М., 1968 г., 176 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко.*

Техн. редактор К. Ф. Брудно. *Корректор Л. Ф. Сөркина.*

Сдано в набор 20/XI-1967 г. Подписано к печати 27/II-1968 г. Бумага тип. № 3 84×108/32. Физ. печ. л. 5,5 Условн. печ. л. 9,24. Уч. изд. л. 7,83. Тираж 200 000 экз. Т—00077. Цена книги 32 коп. Заказ № 2194

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.
Отпечатано с матриц в Киргизполиграфкомбинате Главполиграфиздата Мин. культуры Кирг. ССР, г. Фрунзе, Жигулевская, 102. Зак. №3527.

$\frac{2-2-3}{0\ 68}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании книги внесены незначительные изменения в основной текст. Отличается она от первого издания главным образом упражнениями, список которых значительно пополнен.

Общеизвестно, что основным средством овладения методами аналитической геометрии является решение задач. Поэтому вопросу о подборе упражнений и их расположении было уделено особое внимание. Каждый параграф основного текста заканчивается рядом упражнений. Их специальное расположение сужает область поисков решения и делает отдельно взятые трудные упражнения вполне доступными учащимся.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия не имеет строго определенного содержания и определяющим для нее является не предмет исследования, а метод.

Сущность этого метода заключается в том, что геометрическим объектам сопоставляются некоторым стандартным способом уравнения (системы уравнений) так, что геометрические отношения фигур выражаются в свойствах их уравнений.

Например, в случае декартовых координат каждой прямой на плоскости сопоставляется однозначно линейное уравнение

$$ax + by + c = 0.$$

Пересечение трех прямых в одной точке выражается условием совместности системы трех уравнений, задающих эти прямые.

Благодаря универсальности подхода к решению различных задач, метод аналитической геометрии стал основным методом геометрических исследований и широко применяется в других областях точного естествознания — механике, физике.

Аналитическая геометрия объединила геометрию с алгеброй и анализом, что плодотворно сказалось на развитии этих трех разделов математики.

Основные идеи аналитической геометрии восходят к Декарту, который в 1637 г. в сочинении «Геометрия» изложил основы ее метода.

В предлагаемом курсе лекций излагаются основы метода аналитической геометрии в применении к простейшим геометрическим объектам. Курс составлен в соответствии с программой для физико-математических факультетов университетов.

Глава I

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Введение координат на плоскости

Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy — *оси координат* (рис. 1). Точкой пересечения O — *началом координат* — каждая из осей разбивается

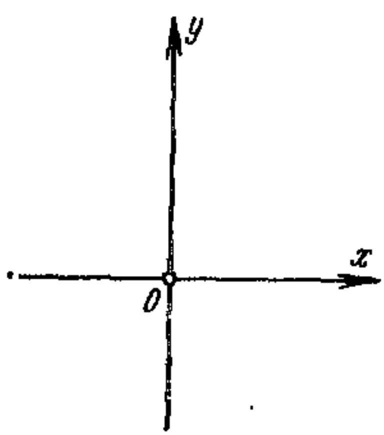


Рис. 1.

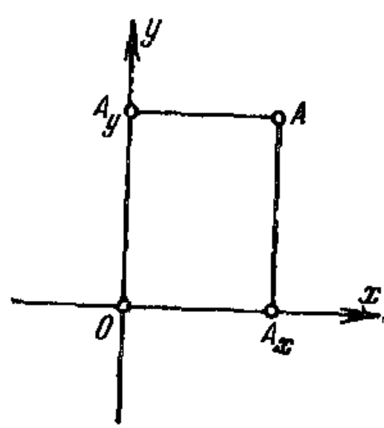


Рис. 2.

на две полуоси. Условимся одну из них называть *положительной*, отмечая на чертеже стрелкой, а другую *отрицательной*.

Каждой точке A плоскости мы сопоставим пару чисел — *координаты точки* — *абсциссу* (x) и *ординату* (y) по следующему правилу.

Через точку A проведем прямую, параллельную *оси ординат* (Oy) (рис. 2) Она пересечет *ось абсцисс* (Ox) в некоторой точке A_x. Под абсциссой точки A мы будем понимать число x, равное по абсолютной величине расстоянию от O до A_x, положительное, если A_x принадлежит положительной полуоси, отрицательное, если A_x принадлежит отрицательной полуоси. Если точка A_x совпадает с O, то полагаем x равным нулю.

Ордината (y) точки A определяется аналогично.

Координаты точки будем записывать в скобках рядом с буквенным обозначением точки, например $A(x, y)$.

Оси координат разбивают плоскость на четыре прямых угла — *квадранта* — *I*, *II*, *III*, *IV* (рис. 3). В пределах одного квадранта знаки обеих *координат* сохраняются и имеют значения, указанные на рисунке.

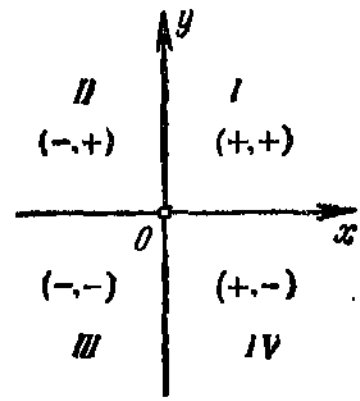


Рис. 3.

Точки *оси x* (оси абсцисс) имеют равные нулю ординаты (y), а точки *оси y* (оси ординат) — равные нулю абсциссы (x). У начала координат абсцисса и ордината равны нулю.

Плоскость, на которой введены описанным выше способом координаты x и y, будем называть *плоскостью xy*. Произвольную точку на этой плоскости с координатами x и y будем иногда обозначать просто (x, y).

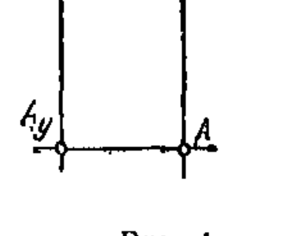


Рис. 4.

Для произвольной пары вещественных чисел x и y существует, и притом единственная, точка A на плоскости xy, для которой x будет абсциссой, а y ординатой.

Действительно, пусть для определенности $x > 0$, а $y < 0$. Возьмем на положительной полуоси x точку A_x на расстоянии x от начала O, а на отрицательной полуоси y — точку A_y на расстоянии $|y|$ от O. Проведем через точки A_x и A_y прямые, параллельные осям y и x соответственно (рис. 4). Эти прямые пересекутся в некоторой точке A, абсцисса которой, очевидно, x и ордината y. В других случаях, например $x < 0$, $y > 0$; $x > 0$, $y > 0$ и $x < 0$, $y < 0$, доказательство аналогично.

Упражнения

1. Где находятся те точки плоскости xy, для которых

$$\text{а) } |x| = a, \qquad \text{б) } |x| = |y|?$$

2. Где находятся те точки плоскости xy, для которых

$$\text{а) } |x| < a, \qquad \text{б) } |x| < a,\ |y| < b?$$

3. Найти координаты точки, симметричной $A(x, y)$ относительно оси x, оси y, начала координат.

4. Найти координаты точки, симметричной точке $A(x, y)$ относительно биссектрисы первого (второго) координатного угла?

5. Как изменятся координаты точки $A(x, y)$, если за ось x принять ось y, а за ось y принять ось x?

6. Как изменятся координаты точки $A(x, y)$, если начало координат сместить в точку $A_0(x_0, y_0)$, не меняя направления осей координат?

7. Найти координаты середин сторон квадрата, приняв за оси координат его диагонали.

8. Известно, что три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежат на одной прямой. Как узнать, какая из этих точек расположена между двумя другими?

§ 2. Расстояние между точками

Пусть на плоскости xy даны две точки: A_1 с координатами x_1, y_1 и A_2 с координатами x_2, y_2. *Выразим расстояние между точками A_1, A_2 через координаты этих точек.*

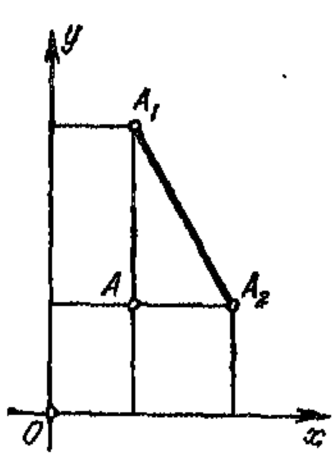


Рис. 5.

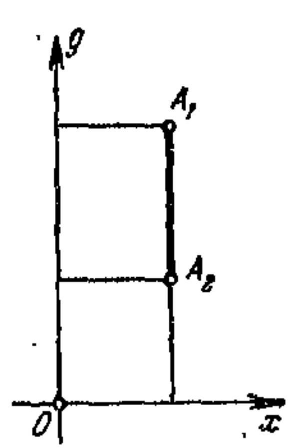


Рис. 6.

Допустим, что $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Проведем через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные осям координат (рис. 5).

Расстояние между точками A и A_1 равно $|y_1-y_2|$, а расстояние между точками A и A_2 равно $|x_1-x_2|$. Применяя к прямоугольному треугольнику A_1AA_2 теорему Пифагора, получим

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=d^2, \qquad (*)$$

где d — расстояние между точками A_1 и A_2.

Хотя формула (*) для расстояния между точками выведена нами в предположении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, она остается верной и в других случаях. Действительно, при $x_1=x_2$, $y_1 \neq y_2$ (рис. 6) d равно $|y_1-y_2|$. Тот же результат даст и формула (*). Аналогично обстоит дело при $x_1 \neq x_2$, $y_1=y_2$. При $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ точки A_1 и A_2 совпадают и формула (*) даст $d=0$.

Упражнения

1. Как найти координаты точки на оси x, если она равноудалена от двух данных точек $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$? Рассмотреть пример $A(0, a)$, $B(b, 0)$.

2. Как найти координаты центра круга, описанного около треугольника ABC, заданного координатами своих вершин? Рассмотреть пример: $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(0, 0)$.

3. Даны координаты двух вершин A и B равностороннего треугольника ABC. Как найти координаты третьей вершины? Рассмотреть пример $A(0, a)$, $B(a, 0)$.

4. Даны координаты двух смежных вершин A и B квадрата $ABCD$. Как найти координаты остальных вершин? Рассмотреть пример $A(a, 0)$, $B(0, b)$.

5. Какому условию должны удовлетворять координаты вершин треугольника ABC, чтобы он был прямоугольным с прямым углом при вершине C?

6. Какому условию должны удовлетворять координаты вершин треугольника ABC, для того чтобы угол A был больше угла B?

7. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин. Как узнать, является он вписанным в окружность или нет?

8. Доказать, что при любых вещественных a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 имеет место неравенство

$$\sqrt{(a_1-a)^2+(b_1-b)^2}+\sqrt{(a_2-a)^2+(b_2-b)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}.$$

Какому геометрическому факту оно соответствует?

§ 3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости xy даны две различные точки — $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$. *Найдем координаты x и y точки A, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $\lambda_1:\lambda_2$.*

Пусть отрезок A_1A_2 не параллелен оси x. Спроектируем точки A_1, A, A_2 на ось y (рис. 7). Имеем

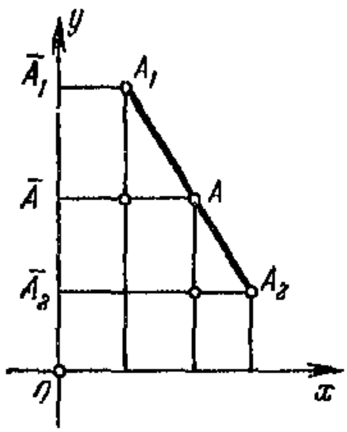


Рис. 7.

$$\frac{A_1A}{AA_2} = \frac{\bar{A}_1\bar{A}}{\bar{A}\bar{A}_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Так как точки $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}$ имеют соответственно те же ординаты, что и точки A_1, A_2, A, то

$$\bar{A}_1\bar{A} = |y_1 - y|,$$

$$\bar{A}\bar{A}_2 = |y - y_2|.$$

Следовательно,

$$\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Так как точка $\bar{A}$ лежит между $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$, то $y_1 - y$ и $y - y_2$ одного знака. Поэтому

$$\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Отсюда находим

$$y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \qquad (*)$$

Если отрезок A_1A_2 параллелен оси x, то $y_1 = y_2 = y$. Тот же результат даст и формула (*), которая, таким образом, верна при любом расположении точек A_1, A_2.

Абсцисса точки A находится аналогично. Для нее получается формула

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Упражнения

1. Даны координаты трех вершин параллелограмма (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Найти координаты четвертой вершины и центра.

2. Даны координаты вершин треугольника (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Найти координаты точки пересечения медиан.

3. Даны координаты середин сторон треугольника (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Найти координаты вершин.

4. Дан треугольник с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Найти координаты вершин подобного и подобно расположенного треугольника с коэффициентом подобия λ и центром подобия в точке (x_0, y_0).

5. Говорят, что точка A *делит внешним образом отрезок* A_1A_2 *в отношении* $\lambda_1:\lambda_2$, если эта точка лежит на прямой, соединяющей точки A_1, A_2, вне отрезка A_1A_2, и отношение расстояний ее от точек A_1 и A_2 равно $\lambda_1:\lambda_2$. Показать, что координаты точки A через координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2) точек A_1 и A_2 выражаются по формулам

$$x=\frac{\lambda_2x_1-\lambda_1x_2}{\lambda_2-\lambda_1}, \qquad y=\frac{\lambda_2y_1-\lambda_1y_2}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

6. Показать, что координаты любой точки прямой, соединяющей точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, можно представить в виде

$$x=tx_1+(1-t)x_2, \qquad y=ty_1+(1-t)y_2.$$

Какие значения параметра t соответствуют внутренним точкам отрезка A_1A_2 прямой?

7. Даны два отрезка координатами своих концов. Как найти координаты точки, в которой пересекаются прямые, содержащие эти отрезки? Как узнать, не прибегая к чертежу, пересекаются отрезки или нет?

8. *Центром тяжести двух масс* μ_1 *и* μ_2, *расположенных в точках* $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, называется точка A, делящая отрезок A_1A_2 *в отношении* $\mu_2:\mu_1$. *Таким образом*, ее *координаты*

$$x=\frac{\mu_1x_1+\mu_2x_2}{\mu_1+\mu_2}, \qquad y=\frac{\mu_1y_1+\mu_2y_2}{\mu_1+\mu_2}.$$

Центр тяжести n масс μ_i, расположенных в точках A_i, определяется по индукции. Именно, если A'_n — центр тяжести первых $n-1$ масс, то центр тяжести всех n масс определяется как центр тяжести двух масс: μ_n, *расположенной в точке* A_n, и $\mu_1+\ldots+\mu_{n-1}$, расположенной в точке A'_n. Вывести формулы для центра тяжести масс μ_i, расположенных в точках $A_i(x_i, y_i)$,

$$x=\frac{\mu_1x_1+\ldots+\mu_nx_n}{\mu_1+\ldots+\mu_n}, \qquad y=\frac{\mu_1y_1+\ldots+\mu_ny_n}{\mu_1+\ldots+\mu_n}.$$

9. Пусть $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ — три точки, не лежащие на одной прямой. Доказать, что координаты любой точки A плоскости xy можно представить в виде

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3, \qquad y=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3,$$

где $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$.

Числа λ_1, λ_2, λ_3 называются *барицентрическими координатами* точки A. Точки A_1, A_2, A_3 называются *базисными точками* барицентрической системы координат.

Где расположены те точки плоскости, у которых $\lambda_1=0$ ($\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$)? Где расположены точки, у которых все барицентрические координаты положительны?

10. Найти барицентрические координаты точки пересечения медиан треугольника, точки пересечения биссектрис и точки пересечения высот, приняв за базисные точки вершины треугольника.

11. Точки A', B', C' делят стороны треугольника ABC, противоположные вершинам A, B, C, в отношении $\lambda:\mu$, $\mu:\nu$, $\nu:\lambda$ соответственно. Доказать, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке. Найти ее барицентрические координаты, приняв за базисные точки вершины треугольника. (Теорема Менелая.)

§ 4. Понятие об уравнении кривой. Уравнение окружности

Пусть на плоскости xy дана некоторая линия или, как говорят, *кривая* (рис. 8). *Уравнение* $\varphi(x, y) = 0$ *называется уравнением кривой в неявной форме,* если ему удовлетворяют координаты x, y любой точки этой кривой и любая пара чисел x, y, удовлетворяющая уравнению $\varphi(x, y) = 0$, представляет собой координаты точки кривой. Очевидно, кривая определяется своим уравнением, поэтому можно говорить о задании кривой ее уравнением.

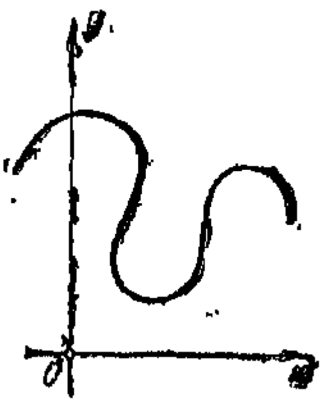


Рис. 8.

В аналитической геометрии часто рассматриваются две задачи: 1) по заданным геометрическим свойствам кривой составить ее уравнение, 2) по заданному уравнению кривой выяснить ее геометрические свойства. Рассмотрим эти задачи в применении к простейшей из кривых — окружности.

Пусть $A_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка плоскости xy и R — любое положительное число. Составим уравнение окружности с центром A_0 и радиусом R (рис. 9).

Пусть $A(x, y)$ — произвольная точка окружности. Ее расстояние от центра A_0 равно R. Согласно § 2 квадрат расстояния точки A от A_0 равен

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2.$$

Таким образом, координаты x, y каждой точки A окружности удовлетворяют уравнению

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2=0. \qquad (*)$$

Обратно, любая точка A, координаты x, y которой удовлетворяют уравнению (*), принадлежит окружности, так как ее расстояние от A_0 равно R.

В соответствии с данным выше определением *уравнение* (*) *есть уравнение окружности с центром* A_0 *и радиусом* R.

Рассмотрим теперь вторую задачу для кривой, заданной уравнением

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$
$$(a^2+b^2-c>0).$$

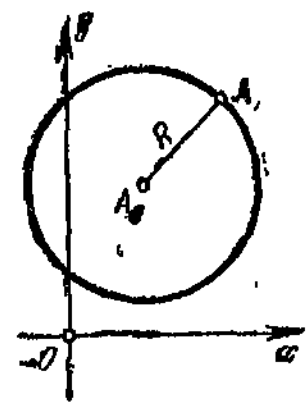


Рис. 9.

Уравнение кривой можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$(x+a)^2+(y+b)^2-(\sqrt{a^2+b^2-c})^2=0.$$

Из этого уравнения видно, что каждая точка (x, y) кривой находится на одном и том же расстоянии, равном $\sqrt{a^2+b^2-c}$, от точки $(-a, -b)$ и, следовательно, *кривая представляет собой окружность с центром* $(-a, -b)$ *и радиусом* $\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Упражнения

1. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых от двух данных точек (x_1, y_1), (x_2, y_2) постоянно и равно $\lambda \neq 1$. Что представляет собой это геометрическое место точек?

2. Какие особенности в расположении окружности

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \quad (a^2+b^2-c>0)$$

относительно системы координат имеют место, если

1) $a=0$; 2) $b=0$; 3) $c=0$;
4) $a=0$, $b=0$; 5) $a=0$, $c=0$; 6) $b=0$, $c=0$.

3. Показать, что если в левую часть уравнения окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$$

подставить координаты любой точки, лежащей вне круга, то получится квадрат касательной, проведенной из этой точки к окружности.

4. *Степенью точки* A относительно окружности называется произведение отрезков секущей, проведенной через точку A, взятое со знаком + (плюс) для внешних точек и со знаком — (минус) для внутренних. Показать, что левая часть уравнения окружности

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$

при подстановке в нее координат произвольной точки дает степень этой *точки относительно окружности*.

5. Составить уравнение геометрического места точек плоскости xy, сумма расстояний которых от двух данных точек $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ постоянна и равна $2a$ (эллипс). Показать, что уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=a^2-c^2$.

6. Составить уравнение геометрического места точек плоскости xy, разность расстояний которых от двух данных точек $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ постоянна и равна $2a$ (гипербола). Показать, что уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=c^2-a^2$.

7. Составить уравнение геометрического места точек плоскости xy, равноудаленных от точки $F(0, 2p)$ и оси x (парабола).

8. Пусть

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0, \quad x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0$$

— уравнения двух окружностей. Показать, что любая окружность, проходящая через точки пересечения двух данных, задается уравнением вида

$$\lambda(x^2+y^2+2ax+2by+c)+\mu(x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1)=0,$$

где λ и μ — постоянные.

Показать, что окружность, проходящая через точку пересечения двух данных и точку (x_0, y_0) плоскости, задается уравнением

$$\omega(x, y)\,\omega_1(x_0, y_0)-\omega(x_0, y_0)\,\omega_1(x, y)=0,$$

где для краткости левые части уравнений данных окружностей обозначены ω и ω_1.

§ 5. Уравнение кривой в параметрической форме

Представим себе, что точка A движется вдоль кривой. Пусть к моменту t ее координаты $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$. Систему уравнений

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

задающую координаты произвольной точки кривой как функции параметра t, называют *уравнениями кривой в параметрической форме*.

Параметр t не обязательно время, это может быть любая другая величина, характеризующая положение точки на кривой.

Составим уравнение окружности в параметрической форме.

Пусть центр окружности находится в начале координат, а радиус равен R. Положение точки A на окружности мы будем характеризовать углом α, который образует радиус OA с положительной полуосью x (рис. 10). Очевидно, координаты точки A равны $R\cos\alpha$, $R\sin\alpha$ и, следовательно, уравнение окружности

$$x = R\cos\alpha, \quad y = R\sin\alpha.$$

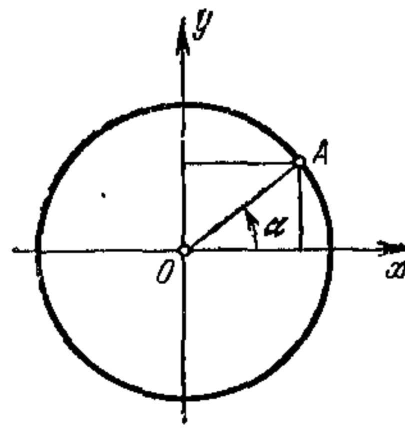


Рис. 10.

Имея уравнение кривой в параметрической форме:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad (*)$$

можно получить ее уравнение в неявной форме:

$$f(x, y) = 0.$$

Для этого достаточно исключить параметр t из уравнений $(*)$, найдя его из одного уравнения и подставив в другое, или другим способом.

Например, чтобы получить уравнение в неявной форме окружности, заданной уравнениями в параметрической форме

$$x = R\cos\alpha, \quad y = R\sin\alpha,$$

достаточно возвести оба равенства в квадрат и сложить почленно. Тогда получим знакомое уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Упражнения

1. Показать, что уравнениями в параметрической форме

$$x = R\cos t + a, \quad y = R\sin t + b$$

задается окружность радиуса R с центром в точке (a, b).

2. Составить уравнение кривой, которую описывает точка отрезка длины a, делящая его в отношении $\lambda:\mu$, когда концы отрезка скользят по координатным осям. Принять в качестве параметра угол, образуемый отрезком с осью x. Что представляет собой кривая, если $\lambda:\mu = 1$?

3. Треугольник двумя своими вершинами скользит по координатным осям. Составить уравнение кривой, которую при этом описывает третья вершина (рис. 11).

Отв. $x=a\cos t+h\sin t, \quad y=b\sin t+h\cos t,$

где a, b, h и параметр t имеют значения, указанные на рис. 11.

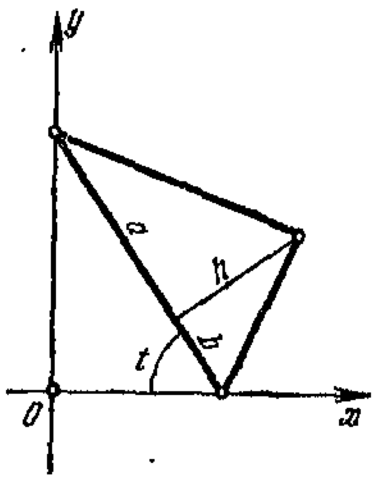


Рис. 11.

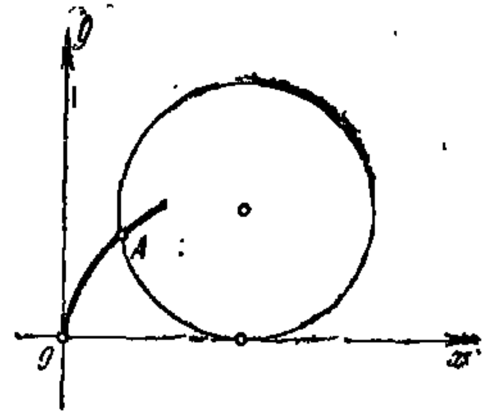


Рис. 12.

4. Составить уравнение кривой, которую описывает точка окружности радиуса R, катящейся по оси x (рис. 12). Принять в качестве параметра путь s, пройденный центром окружности. Считать, что в начальный момент ($s=0$) точка A совпадает с началом координат.

Отв. $x=R\left(\frac{s}{R}-\sin\frac{s}{R}\right), \quad y=R\left(1-\cos\frac{s}{R}\right)$ (*циклоида*).

5. Кривая задана уравнением

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=0.$$

Показать, что введением параметра $t=\frac{y}{x}$ можно получить следующие уравнения этой кривой в параметрической форме

$$x=-\frac{d+et}{a+bt+ct^2}, \qquad y=-\frac{dt+et^2}{a+bt+ct^2}.$$

6. Показать, что эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{(упр. 5 § 4)}$$

допускает параметрическое задание

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t.$$

7. Показать, что гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{(упр. 6 § 4)}$$

допускает параметрическое задание

$$x=a\operatorname{ch} t, \quad y=b\operatorname{sh} t,$$

§ 6. Точки пересечения кривых

Пусть в плоскости xy даны две кривые: кривая γ_1, заданная уравнением

$$f_1(x, y) = 0,$$

и кривая γ_2, заданная уравнением

$$f_2(x, y) = 0.$$

Найдем точки пересечения кривых γ_1 и γ_2, т. е. координаты этих точек.

Пусть $A(x, y)$ — точка пересечения кривых γ_1 и γ_2. Так как точка A лежит на кривой γ_1, то ее координаты удовлетворяют уравнению $f_1(x, y) = 0$. Так как точка A лежит на кривой γ_2, то ее координаты удовлетворяют уравнению $f_2(x, y) = 0$. Таким образом, координаты любой точки пересечения кривых γ_1 и γ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0.$$

Обратно, любое вещественное решение этой системы уравнений дает координаты одной из точек пересечения кривых.

Аналогично в случае, если кривая γ_1 задана уравнением

$$f_1(x, y) = 0,$$

а кривая γ_2 уравнениями в параметрической форме

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

координаты x, y точек пересечения удовлетворяют системе трех уравнений

$$f_1(x, y) = 0, \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Если обе кривые заданы уравнениями в параметрической форме

$$\gamma_1: \qquad x = \varphi_1(t), \quad y = \psi_1(t),$$
$$\gamma_2: \qquad x = \varphi_2(\tau), \quad y = \psi_2(\tau),$$

то координаты x, y точек пересечения удовлетворяют системе четырех уравнений:

$$x=\varphi_1(t),\quad y=\psi_1(t);$$
$$x=\varphi_2(\tau),\quad y=\psi_2(\tau).$$

Пример. Найти точки пересечения окружностей

$$x^2+y^2=2ax,\quad x^2+y^2=2bx.$$

Вычитая уравнения почленно, находим $ax=by$. Подставляя $y=\frac{a}{b}x$ в первое уравнение, получим

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x^2-2ax=0.$$

Отсюда

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{2ab^2}{a^2+b^2}.$$

Им соответствуют

$$y_1=0,\quad y_2=\frac{2ba^2}{a^2+b^2}.$$

Искомые точки пересечения $(0, 0)$ и $\left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2}, \frac{2ba^2}{a^2+b^2}\right)$.

Кривая своим уравнением определена однозначно. Напротив, одна и та же кривая может задаваться различными уравнениями. Именно, если $f_1(x, y)=0$ — уравнение кривой γ и $f_2(x, y)=0$ — любое эквивалентное ему уравнение, т. е. имеющее те же решения (x, y), что и $f_1=0$, то оно, очевидно, тоже будет уравнением кривой. И обратно, если кривая задается уравнениями $f_1(x, y)=0$ и $f_2(x, y)=0$, то эти *уравнения эквивалентны*, т. е. *каждое решение* (x, y) первого уравнения будет решением второго уравнения и наоборот. Приведем пример.

Пусть $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — две функции, определенные внутри квадрата $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$ равенствами

$$f_1(x, y)=x^2+y^2-1$$

$$f_2(x, y)=\begin{cases} x-\sqrt{1-y^2}, & \text{если} \quad x\geqslant 0,\\ x+\sqrt{1-y^2}, & \text{если} \quad x\leqslant 0.\end{cases}$$

Окружность с центром в начале координат и радиусом 1 может быть задана и уравнением $f_1(x, y)=0$, и уравнением $f_2(x, y)=0$.

Упражнения

1. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнения окружности

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$

для того, чтобы окружность

a) не пересекалась с осью x;

b) пересекалась с осью x в двух точках;

c) касалась оси x?

2. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнений окружностей:

$$x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0,$$
$$x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0,$$

чтобы окружности пересекались, касались?

3. Найти точки пересечения двух окружностей:

1) $x^2+y^2=1$; 2) $x=\cos t+1$, $y=\sin t$.

4. Найти точки пересечения двух кривых, заданных уравнениями в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=s^2+1, \\ y=s, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=t^2 \\ y=t+1. \end{cases}$$

5. Показать, что точки пересечения кривых

$$ax^4+by^4=c, \quad Ax^6+By^6=C$$

расположены симметрично относительно осей координат.

6. Даны две кривые γ_1 и γ_2. Кривая γ_1 задана уравнением в неявном виде

$$\omega(x, y)=0,$$

где $\omega(x, y)$ — некоторый многочлен степени не более n. Кривая γ_2 задана уравнениями в параметрической форме

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

где φ и ψ — многочлены степени не более m. Показать, что если кривые γ_1 и γ_2 имеют более mn общих точек, то кривая γ_2 целиком лежит на кривой γ_1, то есть каждая ее точка является вместе с тем точкой кривой γ_1.

Глава II

ПРЯМАЯ

§ 1. Общий вид уравнения прямой

Прямая линия является простейшей и наиболее употребительной из кривых.

Сейчас мы покажем, что *любая прямая имеет уравнение вида*

$$ax + by + c = 0, \qquad (*)$$

где a, b, c — постоянные. И обратно, *если a и b не равны нулю одновременно, то существует прямая, для которой* (*) *будет ее уравнением.*

Пусть $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2, b_2)$ — какие-нибудь две различные, симметрично расположенные относительно данной прямой точки (рис. 13). Тогда любая точка $A(x, y)$ прямой равноудалена от точек A_1 и A_2. И обратно, любая точка A, равноудаленная от A_1 и A_2, принадлежит прямой. Отсюда уравнение прямой

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2.$$

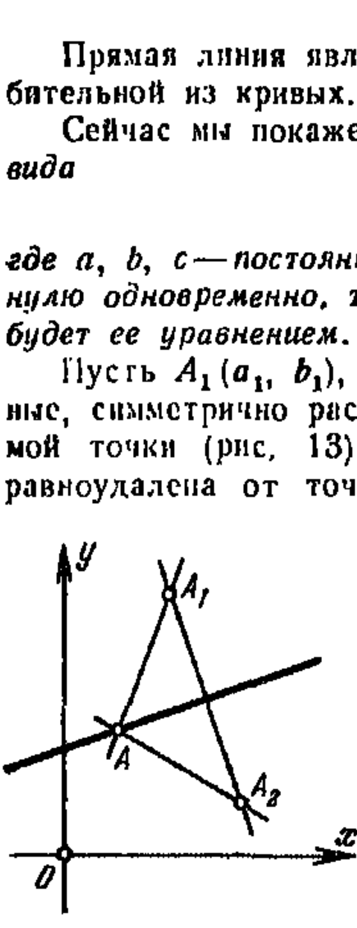


Рис. 13.

Перенося все члены уравнения налево, раскрывая квадраты и производя очевидные упрощения, получим

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0.$$

Первая часть утверждения доказана.

Докажем вторую часть. Пусть B_1 и B_2 — две различные точки плоскости xy, координаты которых удовлетворяют уравнению (*). Пусть

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

уравнение прямой B_1B_2.

Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

совместна, ей заведомо удовлетворяют координаты точки B_1 и координаты точки B_2.

Как известно из элементарной алгебры, совместная система двух линейных уравнений имеет либо единственное решение, либо (если решение не единственное) одно уравнение является следствием другого, то есть получается из него умножением на некоторое число.

Система уравнений (**) имеет по крайней мере два решения. Следовательно, уравнение $ax+by+c=0$ является следствием уравнения $a_1x+b_1y+c_1=0$, а значит, прямая B_1B_2 задается уравнением $ax+by+c=0$.

Вторая часть утверждения доказана.

Упражнения

1. Показать, что уравнением

$$a^2x^2+2abxy+b^2y^2-c^2=0$$

задается пара прямых. Найти уравнение каждой прямой в отдельности.

2. Кривая γ задается уравнением

$$\omega(x, y)=0,$$

где ω — многочлен степени n относительно x и y. Показать, что если кривая γ имеет с некоторой прямой более n точек пересечения, то она содержит эту прямую целиком.

3. Показать, что если коэффициенты уравнений двух различных прямых

$$ax+by+c=0, \quad Ax+By+C=0$$

удовлетворяют условию

$$Ab-aB=0,$$

то прямые параллельны, т. е. не пересекаются.

4. Показать, что любая прямая допускает задание уравнениями в параметрической форме

$$x=at+b, \quad y=ct+d$$

(см. упр. 6 § 3).

5. *Радикальной осью* двух окружностей называется геометрическое место точек равных степеней относительно этих окружностей

(см. упр. 3 § 4). Показать, что радикальная ось есть прямая. Если окружности пересекаются, то она проходит через точки пересечения.

6. Пусть имеем две окружности:

$$x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0,$$
$$x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0.$$

Показать, что все окружности

$$\lambda(x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1)+\mu(x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2)=0$$

имеют одну и ту же радикальную ось.

7. Показать, что геометрическое место точек плоскости, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна, есть прямая.

8. Преобразование *инверсии* относительно окружности с центром O и радиусом R заключается в сопоставлении каждой точке A точки A' луча OA такой, что $OA \cdot OA' = R^2$. Пусть O находится в начале координат. Показать, что координаты точки A' выражаются через координаты точки A по формулам

$$x' = \frac{R^2x}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{R^2y}{x^2+y^2}.$$

9. Показать, что при инверсии окружность переходит в окружность или прямую (когда в прямую?).

10. Найти координаты точки A^*, симметричной $A(x_0, y_0)$ относительно прямой

$$ax+by+c=0.$$

11. Показать, что три прямые

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3=0$$

имеют общую точку тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

12. Показать, что три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 2. Расположение прямой относительно системы координат

Выясним, какие особенности в расположении прямой относительно системы координат имеют место, если ее уравнение $ax+by+c=0$ того или иного частного вида.

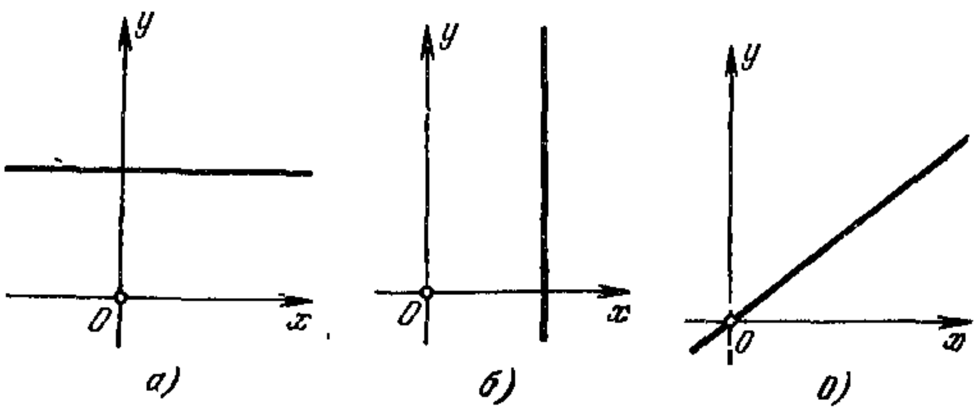


Рис. 14.

1. $a=0$. В этом случае уравнение прямой можно переписать так:

$$y=-\frac{c}{b}.$$

Таким образом, все точки прямой имеют одну и ту же ординату $\left(-\frac{c}{b}\right)$ и, следовательно, *прямая параллельна оси* x (рис. 14, *а*). *В частности, если и* $c=0$, *то прямая совпадает с осью* x.

2. $b=0$. Этот случай рассматривается аналогично. *Прямая параллельна оси* y (рис. 14, *б*) *и совпадает с ней, если и* $c=0$.

3. $c=0$. *Прямая проходит через начало координат*, так как его координаты (0, 0) всегда удовлетворяют уравнению прямой, если $c=0$ (рис. 14, *в*).

4. Пусть все коэффициенты уравнения прямой отличны от нуля (прямая не проходит через начало координат и не параллельна ни оси x, ни оси y). Тогда, умножая уравнение

на $1/c$ и полагая $-c/a=\alpha$, $-c/b=\beta$, приводим его к виду

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1. \qquad (*)$$

Коэффициенты уравнения прямой в такой форме имеют простой геометрический смысл: α *и* β *с точностью до знака равны длинам отрезков, которые прямая отсекает на осях координат* (рис. 15). Действительно, ось x ($y=0$) прямая пересекает в точке (α, 0), а ось y ($x=0$) — в точке (0, β).

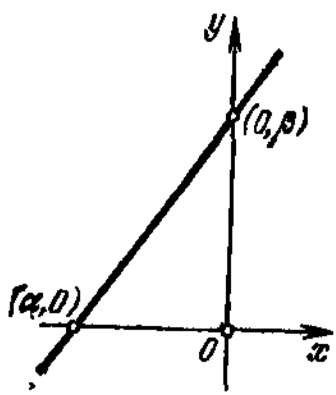


Рис. 15.

Упражнения

1. При каком условии прямая

$$ax+by+c=0$$

пересекает положительную полуось x (отрицательную полуось x)?

2. При каком условии прямая

$$ax+by+c=0$$

не пересекает первого координатного угла?

3. Показать, что прямые, задаваемые уравнениями

$$ax+by+c=0,$$
$$ax-by+c=0 \quad (b\neq 0),$$

симметрично расположены относительно оси x.

4. Показать, что прямые, задаваемые уравнениями

$$ax+by+c=0, \quad ax+by-c=0,$$

симметрично расположены относительно начала координат.

5. Задан *пучок прямых*

$$ax+by+c+\lambda(a_1x+b_1y+c_1)=0.$$

Выяснить, при каком значении параметра λ прямая пучка параллельна оси x (оси y), при каком λ проходит через начало координат.

6. При каком условии прямая $ax+by+c=0$ вместе с осями координат ограничивает равнобедренный треугольник?

7. Показать, что площадь треугольника, ограниченного прямой,

$$ax+by+c=0 \quad (a,\ b,\ c\neq 0)$$

и осями координат,

$$s=\frac{1}{2}\frac{c^2}{|ab|}.$$

8. Найти касательные к окружности

$$x^2+y^2+2ax+2by=0,$$

параллельные координатным осям.

§ 3. Уравнение прямой в форме, разрешенной относительно y. Угол между прямыми

При движении вдоль любой прямой, не параллельной оси y, в одном направлении x возрастает, в другом убывает. Направление, соответствующее возрастанию x, назовем *положительным*.

Пусть на плоскости xy имеем две прямые — g_1 и g_2, не параллельные оси y. *Углом* $\vartheta(g_1, g_2)$, образуемым прямой g_2 с прямой g_1, мы будем называть угол, по абсолютной величине меньший π, на который надо повернуть прямую g_1, чтобы положительное направление на ней совместить с положительным направлением g_2. Причем угол считается положительным, если прямая g_1 поворачивается в том же направлении, в котором поворачивается на угол $\frac{\pi}{2}$ положительная полуось x до совмещения с положительной полуосью y (рис. 16).

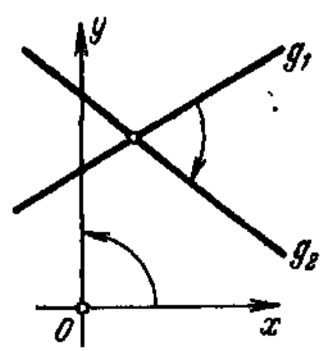


Рис. 16.

Угол между прямыми обладает следующими очевидными свойствами:

1) $\vartheta(g_1, g_2)=-\vartheta(g_2, g_1)$;

2) $\vartheta(g_1, g_2)=0$ тогда и только тогда, когда прямые параллельны или совпадают;

3) $\vartheta(g_3, g_1)=\vartheta(g_3, g_2)+\vartheta(g_2, g_1)$.

Пусть

$$ax+by+c=0$$

прямая, не параллельная оси y $(b\neq 0)$. Умножая уравнение прямой на $1/b$ и полагая $-a/b=k$, $-c/b=l$, приводим его к виду

$$y=kx+l. \qquad (*)$$

Коэффициенты уравнения прямой в этой форме имеют простой геометрический смысл:

k — тангенс угла α, образуемого прямой с осью x, а l — с точностью до знака отрезок, отсекаемый прямой на оси y.

В самом деле, пусть $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ — две точки на прямой (рис. 17). Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{(kx_2+l)-(kx_1+l)}{x_2-x_1} = k.$$

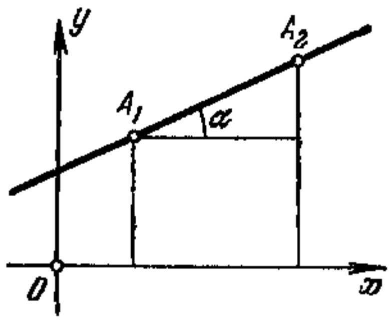


Рис. 17.

Ось y ($x=0$) прямая, очевидно, пересекает в точке $(0, l)$.

Пусть на плоскости xy даны две прямые:

$$y = k_1x + l_1,$$
$$y = k_2x + l_2.$$

Найдем угол ϑ, который вторая прямая образует с первой. Обозначая α_1 и α_2 углы, образуемые прямыми с осью x из третьего свойства угла между прямыми, получаем

$$\vartheta = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, то

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Отсюда определяется ϑ, так как $|\vartheta| < \pi$.

Упражнения

1. Показать, что прямые $ax+by+c=0$, $bx-ay+c'=0$ пересекаются под прямым углом.

2. Какой угол с осью x образует прямая

$$y = x\operatorname{ctg}\alpha, \quad \text{если} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0?$$

3. Составить уравнения сторон правильного треугольника, приняв за оси координат одну из сторон и высоту, опущенную на эту сторону.

4. Найти внутренние углы треугольника, ограниченного прямыми $x+2y=0$, $2x-y=0$, $x+y=1$.

5. При каком условии ось x для прямых

$$ax+by=0, \quad a_1x+b_1y=0$$

является биссектрисой образованных ими углов?

6. Вывести для угла ϑ, образуемого прямой

$$x=at+b, \quad y=ct+d$$

с осью x, формулу

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{c}{a}.$$

7. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=a_1t+b_1, \\ y=a_2t+b_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=c_1t+d_1, \\ y=c_2t+d_2. \end{cases}$$

8. Показать, что четырехугольник, ограниченный прямыми

$$\pm ax \pm by+c=0 \quad (a,\ b,\ c\neq 0),$$

есть ромб. Оси координат являются его диагоналями.

§ 4. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть на плоскости xy имеем две прямые, заданные уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Выясним, какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямых, чтобы прямые были: а) параллельны, б) перпендикулярны.

Допустим, ни одна из прямых не параллельна оси y. Тогда их уравнения можно записать в форме

$$y=k_1x+l_1,$$
$$y=k_2x+l_2,$$

где

$$k_1=-\frac{a_1}{b_1}, \quad k_2=-\frac{a_2}{b_2}.$$

Принимая во внимание выражение для угла между прямыми, получим *условие параллельности прямых:*

$$k_1-k_2=0,$$

или

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \tag{*}$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$1 + k_1k_2 = 0,$$

или

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0. \tag{**}$$

Хотя условия (*) и (**) получены в предположении, что ни одна из прямых не параллельна оси y, они остаются верными, если это условие нарушается.

Пусть, например, первая прямая параллельна оси y. Это значит, что $b_1 = 0$. Если вторая прямая параллельна первой, то она тоже параллельна оси y и, следовательно, $b_2 = 0$. Условие (*), очевидно, выполняется. Если вторая прямая перпендикулярна первой, то она параллельна оси x и, следовательно, $a_2 = 0$. В этом случае, очевидно, выполняется условие (**).

Покажем, что *если для прямых выполняется условие* (*), *то они либо параллельны, либо совпадают.*

Допустим, $b_1 \neq 0$. Тогда из условия (*) следует, что $b_2 \neq 0$, так как если $b_2 = 0$, то и $a_2 = 0$, что невозможно. При этом условие (*) можно записать так:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \quad \text{или} \quad k_1 = k_2,$$

что выражает равенство углов, образуемых прямыми с осью x. Следовательно, прямые либо параллельны, либо совпадают.

Если $b_1 = 0$ (а значит, $a_1 \neq 0$), то из (*) следует, что $b_2 = 0$. Таким образом, обе прямые параллельны оси y и, следовательно, либо параллельны друг другу, либо совпадают.

Покажем, что *условие* (**) *достаточно для того, чтобы прямые были перпендикулярны.*

Допустим, $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$. Тогда условие (**) можно переписать так:

$$1 + \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad 1 + k_1k_2 = 0.$$

А это значит, что прямые образуют прямой угол, т. е. перпендикулярны.

Если же $b_1=0$ (следовательно, $a_1\neq 0$), то из условия (**) получается $a_2=0$. Таким образом, первая прямая параллельна оси y, а вторая параллельна оси x, и, следовательно, они перпендикулярны друг другу.

Случай, когда $b_2=0$, рассматривается аналогично.

Упражнения

1. Для того чтобы прямые

$$ax+by+c=0, \quad a_1x+b_1y+c_1=0$$

были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы система этих двух уравнений не имела решения. Вывести отсюда условие параллельности

$$ab_1-ba_1=0.$$

2. Показать, что прямые, отсекающие на координатных осях отрезки равной длины, либо параллельны, либо перпендикулярны.

3. Найти условие параллельности (перпендикулярности) прямых, заданных уравнениями в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=\alpha_1 t+a_1, \\ y=\beta_1 t+b_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\alpha_2 t+a_2, \\ y=\beta_2 t+b_2. \end{cases}$$

4. *Найти условие параллельности (перпендикулярности) прямых*, одна из которых задана уравнением

$$ax+by+c=0,$$

а другая уравнениями в параметрической форме

$$x=\alpha t+\beta, \quad y=\gamma t+\delta.$$

5. В семействе прямых, заданных уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

(λ — параметр семейства), найти прямую, параллельную (перпендикулярную) прямой

$$ax+by+c=0.$$

§ 5. Взаимное расположение прямой и точки. Уравнение прямой в нормальной форме

Пусть на плоскости x, y имеем точку $A'(x', y')$ и прямую g:

$$ax+by+c=0.$$

Если точка A' лежит на прямой g, то

$$ax'+by'+c=0.$$

Выясним, *какой геометрический смысл имеет выражение*

$$h(x', y') \equiv ax' + by' + c,$$

если точка A' не лежит на прямой.

Пусть $A'(x', y')$ и $A''(x'', y'')$ — две точки, не лежащие на прямой g. Координаты любой точки отрезка $A'A''$ можно представить в форме

$$x = tx' + (1-t)x'', \quad y = ty' + (1-t)y'', \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(§ 3, гл. I). Таким образом, для любой точки A отрезка $A'A''$

$$h(x, y) = th(x', y') + (1-t)h(x'', y'').$$

Если точки A' и A'' принадлежат одной полуплоскости, то $h(t)$ не обращается в нуль на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, по непрерывности h $h(0) = h(x'', y'')$ и $h(1) = h(x', y')$ одного знака. Если A' и A'' принадлежат разным полуплоскостям, то $h(t)$ обращается в нуль на отрезке $[0, 1]$ и, будучи линейной, принимает на концах отрезка противоположные по знаку значения, т. е. $h(x'', y'')$ и $h(x', y')$ противоположных знаков.

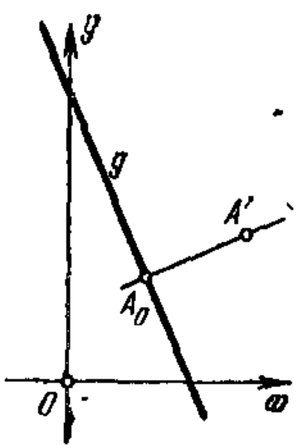


Рис. 18.

Итак, *выражение*

$$ax' + by' + c$$

для точек A' одной из полуплоскостей, определяемых прямой g, положительно, а для точек другой — отрицательно.

Чтобы выяснить геометрический смысл

$$|ax' + by' + c|,$$

найдем расстояние точки A' от прямой g.

Опустим из точки A' перпендикуляр на прямую g (рис. 18). Пусть $A_0(x_0, y_0)$ — основание перпендикуляра. Уравнение прямой $A'A_0$ можно записать в форме

$$b(x - x') - a(y - y') = 0.$$

В самом деле, задаваемая этим уравнением прямая проходит через точку A' и перпендикулярна g. Отсюда

$$b(x_0 - x') - a(y_0 - y') = 0. \qquad (*)$$

Так как точка A_0 лежит на прямой g, то

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Отсюда

$$ax' + by' + c = a(x' - x_0) + b(y' - y_0). \qquad (**)$$

Из равенств $(*)$ и $(**)$ возведением в квадрат и сложением получается

$$(ax' + by' + c)^2 = (a^2 + b^2)[(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2].$$

Таким образом,

$$|ax' + by' + c| = \sqrt{a^2 + b^2}\,\delta(x', y'),$$

где $\delta(x', y')$ — расстояние точки $A'(x', y')$ от прямой g.

Итак, *величина*

$$|ax' + by' + c|$$

пропорциональна расстоянию точки (x', y') от прямой

$$ax + by + c = 0.$$

В частности, если $a^2 + b^2 = 1$, то указанная величина равна расстоянию точки от прямой. В этом случае говорят, что прямая задана уравнением в *нормальной форме*.

Очевидно, чтобы привести уравнение прямой

$$ax + by + c = 0$$

к нормальной форме, достаточно разделить его на $+\sqrt{a^2 + b^2}$ или $-\sqrt{a^2 + b^2}$.

Упражнения

1. Составить уравнение в нормальной форме прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

2. Пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) — вершины треугольника. Вывести формулу для площади треугольника

$$\delta = \frac{1}{2}\,|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|.$$

3. Даны уравнения сторон треугольника и точка своими координатами. Как узнать, лежит эта точка внутри треугольника или вне его?

4. Показать, что расстояние между параллельными прямыми

$$ax+by+c_1=0,\quad ax+by+c_2=0$$

равно

$$\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

5. Составить уравнения прямых, параллельных прямой

$$ax+by+c=0,$$

находящихся от нее на расстоянии δ.

6. Показать, что если две пересекающиеся прямые заданы уравнениями в нормальной форме

$$ax+by+c=0,\quad a_1x+b_1y+c_1=0,$$

то уравнение биссектрис углов, образованных ими, будут

$$(a_1x+b_1y+c_1)\pm(a_2x+b_2y+c_2)=0.$$

7. Показать, что геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных прямых находятся в данном отношении, состоит из двух прямых. Составить уравнение этих прямых, взяв уравнения исходных прямых в нормальной форме и приняв отношение расстояний равным $\lambda:\mu$.

§ 6. Основные задачи на прямую

Составим уравнение произвольной прямой, проходящей через точку $A(x_1, y_1)$.

Пусть

$$ax+by+c=0 \tag{*}$$

— уравнение искомой прямой. Так как прямая проходит через точку A, то

$$ax_1+by_1+c=0.$$

Выражая отсюда c и подставляя его в уравнение (*), получаем

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0.$$

Очевидно, при любых a и b прямая, задаваемая этим уравнением, проходит через точку A.

Составим уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$.

Так как прямая проходит через точку A_1, то ее уравнение можно записать в форме

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0,$$

Так как прямая проходит через точку A_2, то

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0,$$

откуда

$$\frac{a}{b}=-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

и искомое уравнение

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}-\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=0.$$

Составим уравнение прямой, параллельной

$$ax+by+c=0,$$

проходящей через точку $A(x_1, y_1)$.

Каково бы ни было λ, уравнение

$$ax+by+\lambda=0$$

задает прямую, параллельную данной. Выберем λ так, чтобы уравнение удовлетворялось при $x=x_1$ и $y=y_1$:

$$ax_1+by_1+\lambda=0.$$

Отсюда

$$\lambda=-ax_1-by_1$$

и искомое уравнение будет

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0.$$

Составим уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A(x_1, y_1)$, *перпендикулярную прямой*

$$ax+by+c=0.$$

При любом λ прямая

$$bx-ay+\lambda=0$$

перпендикулярна заданной прямой. Выбирая λ так, чтобы уравнение удовлетворялось при $x=x_1$, $y=y_1$, находим искомое уравнение:

$$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0.$$

Составим уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ *и образующую угол* α *с осью* x $\left(|\alpha|<\frac{\pi}{2}\right)$.

Уравнение прямой можно записать в форме

$$y = kx + l.$$

Коэффициенты k и l находятся из условий

$$\operatorname{tg}\alpha = k, \quad y_1 = kx_1 + l.$$

Искомое уравнение:

$$y - y_1 = \operatorname{tg}\alpha\,(x - x_1).$$

В заключение заметим, что уравнение любой прямой, проходящей через точку пересечения двух данных прямых:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

можно записать в форме

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) = 0. \qquad (**)$$

Действительно, уравнение (**) при любых λ и μ, не равных нулю одновременно, задает прямую, которая проходит через точку пересечения двух данных, так как ее координаты, очевидно, удовлетворяют уравнению (**). Далее, какова бы ни была точка (x_1, y_1), отличная от точки пересечения данных прямых, прямая (**) при

$$\lambda = a_2x_1 + b_2y_1 + c_2, \quad -\mu = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1$$

проходит через точку (x_1, y_1). Следовательно, прямыми (**) исчерпываются все прямые, которые проходят через точку пересечения данных.

Упражнения

1. Составить уравнения прямых, параллельных

$$ax + by + c = 0,$$

находящихся от нее на расстоянии δ.

2. Составить уравнение прямой, параллельной (перпендикулярной)

$$ax + by + c = 0,$$

проходящей через точку пересечения прямых:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

3. При каком условии точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) симметрично расположены относительно прямой

$$ax + by + c = 0?$$

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) и равноотстоящей от точек (x_1, y_1), (x_2, y_2).

5. Показать, что три прямые:

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3=0$$

имеют общую точку тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$$

6. Показать, что три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) тогда и только тогда лежат на прямой, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

§ 7. Преобразование координат

Пусть на плоскости введены две системы координат xy и $x'y'$ (рис. 19). Установим связь между координатами произвольной точки относительно этих систем координат.

Пусть

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

— уравнения в нормальной форме осей y' и x' в системе координат xy. Уравнение прямой в нормальной форме определено однозначно с точностью до перемены знака у всех коэффициентов уравнения. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что для некоторой точки $A_0(x_0, y_0)$ первого квадранта системы координат $x'y'$

Рис. 19.

$$a_1x_0+b_1y_0+c_1>0,$$
$$a_2x_0+b_2y_0+c_2>0$$

(в противном случае знаки коэффициентов можно заменить на противоположные).

Мы утверждаем, что *координаты произвольной точки x', y' относительно системы координат $x'y'$ выражаются через координаты x, y той же точки в системе координат xy по формулам*

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Докажем, например, первую формулу. Абсолютная величина левой и правой частей формулы одинакова, так как представляет собой расстояние точки от оси y'. В каждой из полуплоскостей, определяемых осью y', левая и правая части формулы сохраняют знак и меняют его при переходе от одной полуплоскости в другую. А так как для точки A_0 знаки совпадают, то они совпадают для любой точки плоскости.

Вторая формула доказывается аналогично.

Так как

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

представляют собой уравнения в нормальной форме двух перпендикулярных прямых, то коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 формул (*) связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 1, \\ a_2^2 + b_2^2 &= 1, \\ a_1a_2 + b_1b_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Принимая во внимание первые две формулы (**), a_1, b_1, a_2, b_2 можно представить так:

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos\alpha, & b_1 &= \sin\alpha, \\ a_2 &= \cos\alpha_1, & b_2 &= \sin\alpha_1. \end{aligned}$$

Тогда из третьего соотношения (**) получаем

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \sin\alpha\sin\alpha_1 = \cos(\alpha - \alpha_1) = 0,$$

откуда следует, что $\alpha_1 = \alpha \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. И формулы преобразования координат (*) можно записать в одной из следующих двух форм:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + c_1, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha + c_2, \end{aligned}$$

или

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + c_1,$$
$$y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + c_2.$$

Первая из них охватывает все случаи, когда система координат $x'y'$ может быть получена движением из системы координат xy. Вторая система формул охватывает случаи, когда система координат $x'y'$ получается из системы xy движением и зеркальным отражением.

Величины α, c_1 и c_2 в формулах преобразования координат имеют простой геометрический смысл: α — с точностью до кратного 2π — угол, образуемый осью x' с осью x, а c_1 и c_2 — координаты начала системы координат xy в системе координат $x'y'$.

Упражнения

1. Составить формулы перехода от системы координат xy к системе координат $x'y'$, если оси координат x' и y' задаются уравнениями

$$ax + by + c_1 = 0,$$
$$-bx + ay + c_2 = 0.$$

2. Составить уравнение кривой

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

приняв за новые оси координат прямые:

$$x + y = 0, \quad x - y = 0.$$

3. Система координат $x'y'$ получена вращением около некоторой точки (x_0, y_0) из системы координат xy. По формулам преобразования координат (*) найти x_0 и y_0.

4. Показать, что преобразование плоскости xy в себя, при котором точке (x, y) сопоставляется точка (x', y') согласно формулам

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + c_1,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + c_2,$$

есть движение. (Это преобразование непрерывно зависит от параметров α, c_1, c_2, обращается в тождественное при $\alpha = c_1 = c_2 = 0$ и сохраняет расстояния между точками.)

5. Показать, что преобразование плоскости xy в себя с помощью формул

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + c_1,$$
$$y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + c_2$$

сводится к движению и зеркальному отражению.

6. Полагая $z=x+iy$, показать, что всякое движение в плоскости xy осуществляется линейным преобразованием комплексного переменного

$$z'=\omega z+c,$$

где ω и c — комплексные числа, причем $|\omega|=1$.

7. Найти уравнение кривой, которую описывает точка C механизма, изображенного на рис. 20. Треугольник ABC жесткий, точка A скользит по оси x, а точка B движется по окружности радиуса R с центром в начале координат.

Решение. В момент, когда точка B совпадает с B_0, точки A, B, C имеют координаты $(d, 0)$, $(R, 0)$, (a, b). Положим $z_0=a+ib$. В произвольный момент комплексная координата точки C

$$z=\omega z_0+c.$$

Так как точка B все время остается на окружности $x^2+y^2=R^2$, а точка A на оси x, то

$$|\omega R+c|=R, \quad \operatorname{Im}(\omega d+c)=0.$$

Отсюда

$$|\omega(R-z_0)+z|=R, \qquad \operatorname{Im}(\omega(d-z_0)+z)=0.$$

Или

$$|R-z_0|^2+\omega(R-z_0)\overline{z}+\overline{\omega}(R-\overline{z_0})z+|z|^2=R^2,$$
$$\omega(d-z_0)-\overline{\omega}(d-\overline{z}_0)+z-\overline{z}=0.$$

(Чертой отмечаются комплексно сопряженные числа.)

Решая эти уравнения относительно ω и $\overline{\omega}$ и замечая, что $\omega\overline{\omega}=1$, находим уравнение, которому удовлетворяет z. Подставляя затем $x+iy$ вместо z, получаем уравнение искомой кривой.

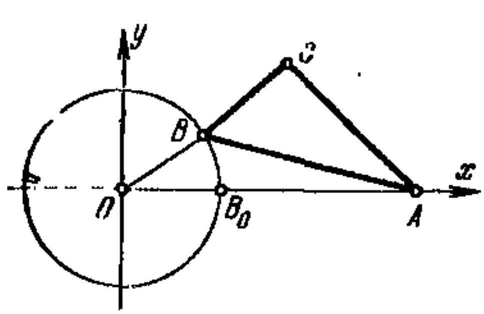


Рис. 20.

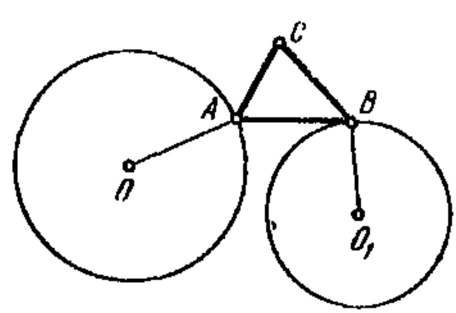


Рис. 21.

8. Найти уравнение кривой, которую описывает точка C механизма, изображенного на рис. 21. Треугольник ABC жесткий, его вершины A и B движутся по окружностям.

Глава III

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

§ 1. Полярные координаты

Проведем из произвольной точки O на плоскости полупрямую g и зададим некоторое направление отсчета углов около точки O. Каждой точке A плоскости можно сопоставить два числа: ρ и ϑ: ρ — расстояние точки A до O, ϑ — угол, образуемый полупрямой OA с полупрямой g (рис. 22).

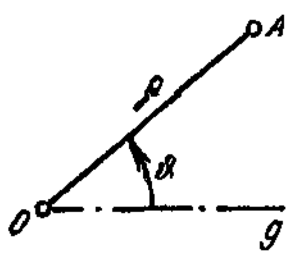


Рис. 22.

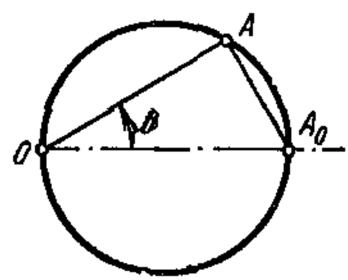


Рис. 23.

Числа ρ и ϑ называются *полярными координатами* точки A. Точка O называется *полюсом*, а полупрямая g — *полярной осью*.

Подобно тому, как и в случае декартовых координат, можно говорить об уравнении кривой в полярных координатах. Именно, уравнение

$$\varphi(\rho, \vartheta) = 0$$

называется *уравнением кривой в полярных координатах*, если полярные координаты каждой точки кривой ему удовлетворяют. И обратно, любая пара чисел ρ, ϑ, удовлетворяющая этому уравнению, представляет собой полярные координаты одной из точек кривой.

Составим для примера уравнение в полярных координатах окружности, проходящей через полюс, с центром на полярной оси и радиусом R. Из прямоугольного треугольника OAA_0 получаем $OA = OA_0 \cos \vartheta$ (рис. 23). Отсюда уравнение окружности

$$\rho = 2R \cos \vartheta.$$

Введем на плоскости $\rho\vartheta$ систему декартовых координат xy, приняв полюс O за начало декартовой системы координат, полярную ось — за положительную полуось x, а направление положительной полуоси y выберем так, чтобы она образовала с полярной осью при выбранном направлении отсчета углов угол $+\frac{\pi}{2}$.

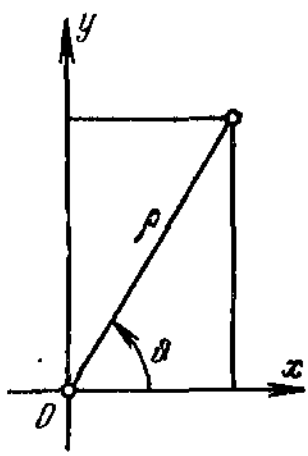


Рис. 24.

Между полярными и декартовыми координатами точки очевидным образом устанавливается следующая простая связь:

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta \qquad (*)$$

(рис. 24). Это позволяет, зная уравнение кривой в полярных координатах, получить ее уравнение в декартовых координатах и наоборот.

Составим, например, уравнение произвольной прямой в полярных координатах. Уравнение прямой в декартовых координатах

$$ax + by + c = 0.$$

Вводя в это уравнение вместо x и y, ρ и ϑ согласно формулам $(*)$, получим

$$\rho (a \cos \vartheta + b \sin \vartheta) + c = 0.$$

Полагая далее

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\rho_0,$$

получим уравнение прямой в форме

$$\rho \cos (\alpha - \vartheta) = \rho_0.$$

Упражнения

1. Показать, что уравнение любой окружности в полярных координатах можно записать в форме

$$\rho^2 + 2a\rho\cos(\alpha - \vartheta) + b = 0.$$

Определить координаты ее центра ρ_0, ϑ_0 и радиус R.

2. Выразить расстояние между точками через полярные координаты этих точек.

3. Какой геометрический смысл имеют α и ρ_0 в уравнении прямой в полярных координатах

$$\rho\cos(\alpha - \vartheta) = \rho_0.$$

4. Составить уравнение в полярных координатах геометрического места оснований перпендикуляров, опущенных из точки A окружности на ее касательные (*кардиоида*, рис. 25). Принять за полюс точку A, а за полярную ось — продолжение радиуса OA.

Отв. $\rho = R(1 - \cos\vartheta)$.

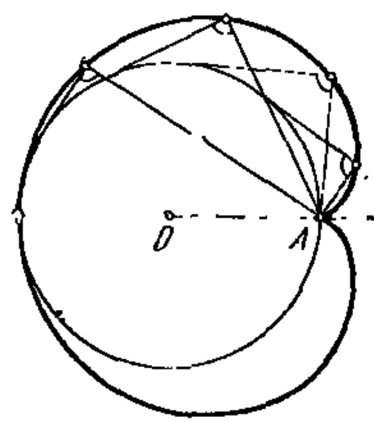


Рис. 25.

5. Составить уравнение *лемнискаты Бернулли*. Так называется геометрическое место точек, произведение расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) постоянно и равно $\frac{1}{4}(F_1F_2)^2$. Принять за полюс середину отрезка, соединяющего фокусы, а за полярную ось — полупрямую, проходящую через один из фокусов.

Отв. $\rho = a\sqrt{2\cos 2\vartheta}$, где a — половина расстояния между фокусами.

§ 2. Конические сечения. Уравнения в полярных координатах

Коническим сечением называется кривая, по которой пересекает круговой конус произвольная плоскость, не проходящая через его вершину (рис. 26). Конические сечения обладают рядом замечательных свойств. Одно из них заключается в следующем.

Каждое коническое сечение, кроме окружности, представляет собой геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний которых от некоторой точки F и некоторой прямой δ постоянно. Точка F называется ***фокусом*** конического сечения, а прямая δ ***директрисой.***

Докажем это свойство. Пусть γ — кривая, по которой плоскость σ пересекает конус (рис. 27). *Впишем в конус сферу, касающуюся плоскости σ, и обозначим F точку* касания сферы с плоскостью. Пусть ω — плоскость, в которой лежит окружность касания сферы с конусом. Возьмем на кривой γ произвольную точку M. Проведем через точку M образующую конуса и обозначим B точку пересечения ее с плоскостью ω. *Опустим, наконец, перпендикуляр из точки M* на прямую δ пересечения плоскостей σ и ω.

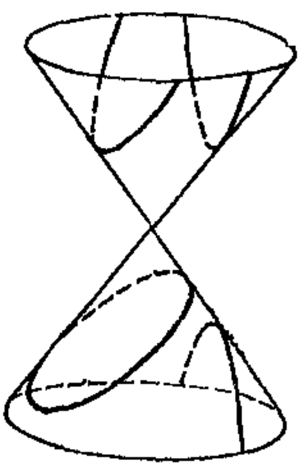


Рис. 26.

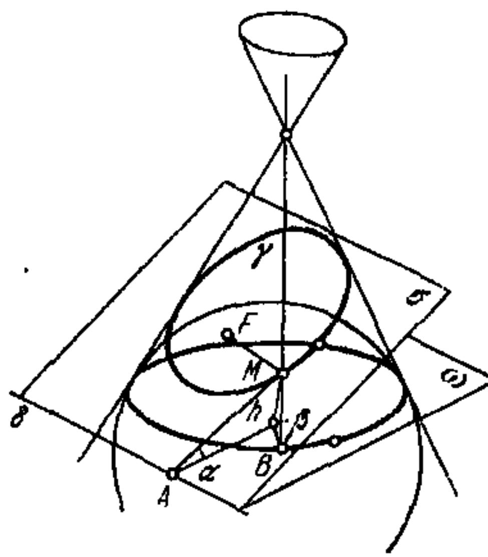


Рис. 27.

Утверждается, что кривая γ по отношению к точке F и прямой δ обладает указанным выше свойством. Действительно, $FM = BM$, как касательные к сфере из одной точки. Далее, если обозначить $h(M)$ расстояние точки M от плоскости ω, то $AM = \frac{h(M)}{\sin\alpha}$, $MB = \frac{h(M)}{\sin\beta}$, где α — угол между плоскостями ω и σ, а β — угол между образующими конуса и плоскостью ω.

Отсюда следует, что $\frac{AM}{FM} = \frac{AM}{BM} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, т. е. отношение $\frac{AM}{FM}$ не зависит от точки M. Утверждение доказано.

В зависимости от того, каково отношение λ расстояний произвольной точки конического сечения от фокуса и директрисы, кривая называется *эллипсом* ($\lambda < 1$), *параболой* ($\lambda = 1$)

и *гиперболой* ($\lambda > 1$). Число λ называется *эксцентриситетом* конического сечения.

Пусть F — фокус конического сечения и δ — его директриса (рис. 28). В случае эллипса и параболы ($\lambda \leqslant 1$) все точки кривой располагаются по одну сторону директрисы, именно со стороны, где находится фокус F. Действительно, для всякой точки A, расположенной с другой стороны директрисы,

$$\frac{AF}{A\bar{A}} > \frac{AB}{A\bar{A}} \geqslant 1.$$

Напротив, у гиперболы ($\lambda > 1$) есть точки, расположенные по обе стороны директрисы. Гипербола состоит из двух ветвей, разделяемых директрисой.

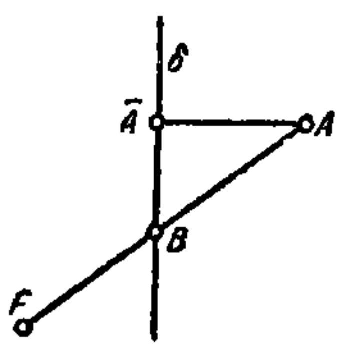


Рис. 28.

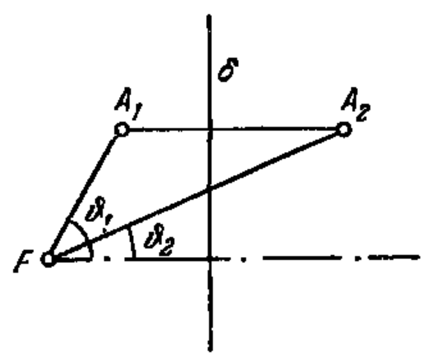


Рис. 29.

Составим уравнение конического сечения в полярных координатах, приняв за полюс системы координат $\rho\vartheta$ фокус конического сечения, а полярную ось проведем так, чтобы она была перпендикулярна директрисе и пересекала ее (рис. 29).

Пусть p — расстояние фокуса от директрисы. Расстояние произвольной точки A конического сечения от фокуса равно ρ, а расстояние от директрисы $p - \rho\cos\vartheta$ или $\rho\cos\vartheta - p$, смотря по тому, как располагаются точки A и F — по одну сторону директрисы или по разные. Отсюда уравнение конического сечения

$$\frac{\rho}{p - \rho\cos\vartheta} = \lambda \qquad (*)$$

в случае эллипса и параболы,

$$-\frac{\rho}{p-\rho\cos\vartheta}=\pm\lambda \qquad (**)$$

в случае гиперболы (знак $+$ соответствует одной ветви гиперболы, а знак $-$ другой).

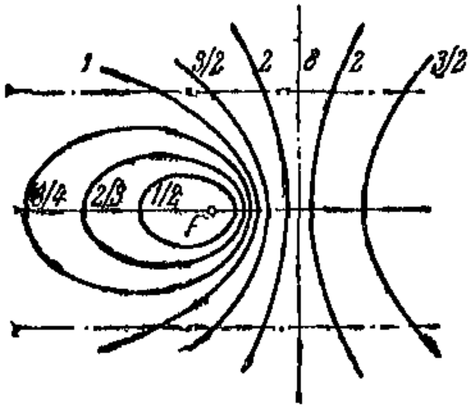


Рис. 30.

Решая уравнения (*), (**) относительно ρ, получаем

$$\rho=\frac{\lambda p}{1+\lambda\cos\vartheta}$$

— уравнение эллипса и параболы,

$$\rho=\frac{\pm\lambda p}{1\pm\lambda\cos\vartheta}$$

— уравнение гиперболы.

На рис. 30 показано, как изменяется форма конического сечения в зависимости от эксцентриситета λ.

Упражнения

1. Показать, что кривая, заданная уравнением

$$\rho=\frac{e}{1+a\cos\vartheta+b\sin\vartheta},$$

представляет собой коническое сечение. При каком условии кривая является эллипсом, гиперболой, параболой?

2. Составить уравнение эллипса, зная, что его фокус находится в полюсе системы координат $\rho\vartheta$, по трем точкам $(\rho_1, 0)$, $\left(\rho_2, \frac{\pi}{2}\right)$, (ρ_3, π).

3. Найти фокусы и директрисы эллипса, гиперболы, заданных уравнением

$$\rho=\frac{p}{1+a\cos\vartheta+b\sin\vartheta}.$$

4. Пусть A и B — точки пересечения конического сечения с прямой, проходящей через фокус F. Доказать, что

$$\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}$$

не зависит от прямой.

5. Показать, что преобразование инверсии параболы относительно фокуса переводит ее в кардиоиду (см. упр. 4 § 1).

§ 3. Уравнения конических сечений в декартовых координатах в канонической форме

В § 2 мы получили уравнения конических сечений в полярных координатах $\rho\vartheta$. Перейдем теперь к системе декартовых координат xy, приняв полюс O за начало координат, а полярную ось — за положительную полуось x.

Из уравнений (*) и (**) § 2 для любого конического сечения имеем

$$\rho^2 = \lambda^2 (p - \rho \cos \vartheta)^2.$$

Отсюда, принимая во внимание формулы § 1, устанавливающие связь между полярными и декартовыми координатами точки, получаем

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 (p - x)^2,$$

или

$$(1 - \lambda^2) x^2 + 2p\lambda^2 x + y^2 - \lambda^2 p^2 = 0. \tag{*}$$

Это уравнение значительно упрощается, если сместить начало координат вдоль оси x соответствующим образом.

Рассмотрим сначала случай эллипса и гиперболы. В этом случае уравнение (*) можно записать так:

$$(1 - \lambda^2) \left(x + \frac{p\lambda^2}{1 - \lambda^2} \right)^2 + y^2 - \frac{p^2\lambda^2}{1 - \lambda^2} = 0.$$

Введем теперь новые координаты x', y' по формулам

$$x + \frac{\lambda^2 p}{1 - \lambda^2} = x', \quad y = y',$$

что соответствует переносу начала в точку

$$\left(-\frac{\lambda^2 p}{1 - \lambda^2}, \ 0 \right).$$

Тогда уравнение кривой примет вид

$$(1 - \lambda^2) x'^2 + y'^2 - \frac{\lambda^2 p^2}{1 - \lambda^2} = 0.$$

Или, полагая для краткости

$$\frac{\lambda^2 p^2}{(1 - \lambda^2)^2} = a^2, \qquad \frac{\lambda^2 p^2}{|1 - \lambda^2|} = b^2,$$

получаем следующие уравнения:

для эллипса

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0,$$

для гиперболы

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1=0.$$

Параметры a и b называются *полуосями* эллипса (гиперболы).

В случае параболы ($\lambda=1$) уравнение (*) будет иметь вид

$$2px+y^2-p^2=0$$

или

$$y^2-2p\left(-x+\frac{p}{2}\right)=0;$$

введением новых координат

$$x'=-x+\frac{p}{2}, \quad y'=y$$

оно преобразуется к виду

$$y'^2-2px'=0.$$

Полученные нами в координатах x', y' уравнения конических сечений называются *каноническими.*

Упражнения

1. Показать, что уравнение конического сечения с фокусом (x_0, y_0) и директрисой

$$ax+by+c=0$$

имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+k(ax+by+c)^2=0.$$

Для каких значений k это коническое сечение представляет собой эллипс, параболу, гиперболу?

2. Пусть K — любое коническое сечение и F — его фокус. Показать, что расстояние произвольной точки A конического сечения до фокуса F линейно выражается через координаты точки x, y, т. е.

$$AF=\alpha x+\beta y+\gamma,$$

где α, β, γ — постоянные.

3. Показать, что любая прямая пересекается с коническим сечением не более чем в двух точках.

4. Показать, что геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек постоянна, есть эллипс (см. упр. 5 § 4 гл. I).

5. Показать, что геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек постоянна, есть гипербола (см. упр. 6 § 4 гл. I).

6. Что представляет собой геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных окружностей K_1 и K_2? Рассмотреть различные случаи взаимного расположения окружностей K_1 и K_2, а также случай вырождения одной из окружностей в прямую.

§ 4. Исследование формы конических сечений

Эллипс —

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{рис. } 31).$$

Во-первых, заметим, что оси координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат — центром симметрии.

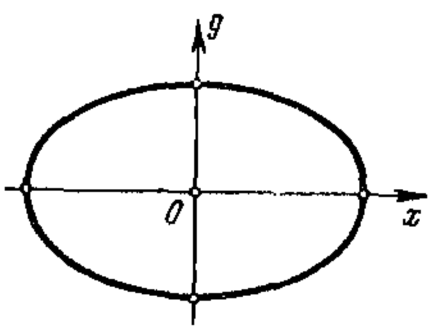


Рис. 31.

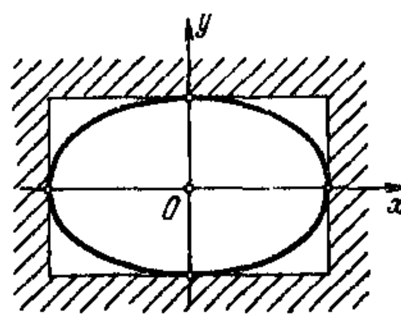


Рис. 32.

Действительно, если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то симметричные ей точки относительно осей координат $(-x, y)$, $(x, -y)$ и относительно начала координат $(-x, -y)$ тоже принадлежат эллипсу, так как удовлетворяют его уравнению вместе с точкой (x, y). Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются *вершинами* эллипса.

Весь эллипс содержится внутри прямоугольника $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, образуемого касательными в его вершинах (рис. 32).

Действительно, если точка (x, y) вне прямоугольника, то для нее выполняется по крайней мере одно из неравенств $|x| > a$ или $|y| > b$, но тогда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} > 1$$

и точка не может принадлежать эллипсу.

Особенно наглядно образование эллипса получается из окружности путем ее равномерного сжатия. Начертим на плоскости окружность

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1. \qquad (*)$$

Представим себе, что плоскость xy равномерно сжимается относительно оси x так, что точка (x, y) переходит в точку

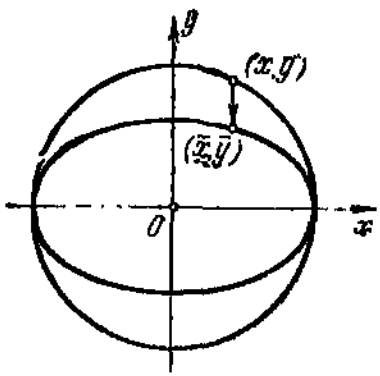


Рис. 33.

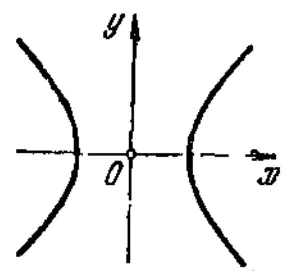


Рис. 34.

$(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x}=x$, а $\bar{y}=\frac{b}{a}y$. При этом окружность $(*)$ перейдет в некоторую кривую (рис. 33). Координаты любой ее точки удовлетворяют уравнению

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}=1.$$

Таким образом, эта кривая — эллипс.

Гипербола —

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (рис. 34).}$$

Буквально так же, как и в случае эллипса, заключаем, что оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат — центром симметрии.

Гипербола состоит из двух ветвей симметричных относительно оси y, расположенных вне прямоугольника $|x|<a$, $|y|<b$ внутри двух углов, образованных его диагоналями (продолжениями диагоналей, рис. 35).

Действительно, внутри прямоугольника $|x| < a$ и, следовательно,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<1,$$

т. е. *внутри прямоугольника нет точек гиперболы.*

Нет их в оставшейся заштрихованной на рис. 35 части плоскости, так как для любой точки (x, y) из этой части плоскости

$$\frac{b}{a}<\frac{|y|}{|x|},$$

откуда

$$\frac{|x|}{a}<\frac{|y|}{b}$$

и, следовательно,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<0<1.$$

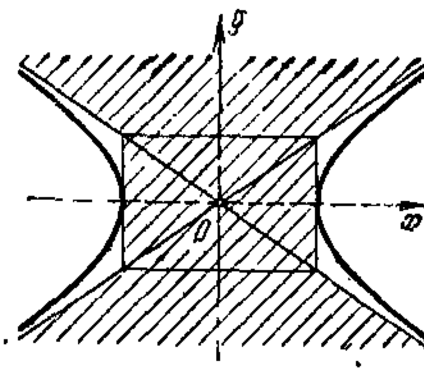


Рис. 35

Отметим еще следующее свойство гиперболы. Если точка (x, y), двигаясь вдоль гиперболы, неограниченно удаляется от *начала координат* $(x^2+y^2 \to \infty)$, *то ее расстояние от одной из диагоналей прямоугольника*, которые, очевидно, задаются уравнениями

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0, \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,$$

неограниченно убывает (стремится к нулю).

В самом деле, величины

$$\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right| \text{ и } \left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right|$$

пропорциональны расстояниям точки (x, y) гиперболы от указанных прямых (§ 5 гл. II). Произведение этих величин

$$\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|\left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right|=\left|\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right|=1.$$

Если наше утверждение о том, что расстояние от одной из диагоналей стремится к нулю, неверно, то существует такое $\lambda>0$ и сколь угодно удаленные точки гиперболы, *для которых*

$$\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|>\lambda, \quad \left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right|>\lambda.$$

А так как

$$\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|\left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right|=1,$$

то для таких точек

$$\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|<\frac{1}{\lambda}, \quad \left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right|<\frac{1}{\lambda}.$$

Возводя эти неравенства в квадрат и складывая, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<\frac{1}{\lambda^2},$$

а это противоречит тому, что $x^2+y^2\to\infty$.

Утверждение доказано.

Прямые

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0, \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

называются *асимптотами* гиперболы.

Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

по отношению к рассмотренной гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

называется *сопряженной*. Она имеет те же асимптоты, но

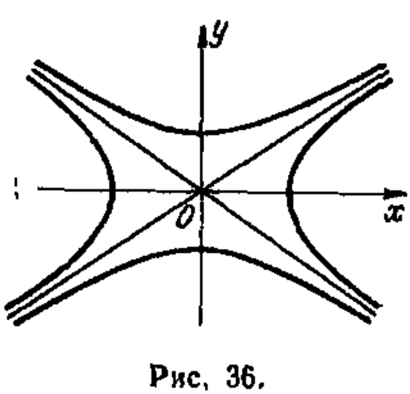


Рис. 36.

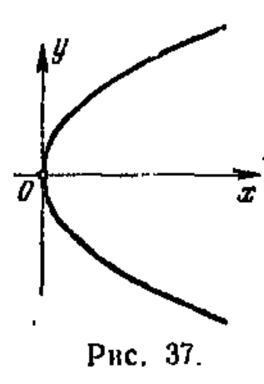


Рис. 37.

располагается в дополнительных вертикальных углах, образованных асимптотами (рис. 36).

П а р а б о л а (рис. 37)

$$y^2-2px=0$$

имеет ось x осью симметрии, так как вместе с точкой (x, y) ей принадлежит симметричная относительно оси x точка $(x, -y)$. Точка пересечения параболы с ее осью называется *вершиной* параболы. Таким образом, в данном случае вершиной параболы является начало координат.

Упражнения

1. Показать, что эллипс располагается вне ромба с вершинами в вершинах эллипса.

2. Показать, что любой эллипс представляет собой проекцию окружности.

3. Показать, что произведение расстояний точки гиперболы до ее асимптот постоянно (не зависит от точки).

4. Показать, что уравнение любой гиперболы с асимптотами

$$a_1x+b_1y+c_1=0, \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

можно записать в форме

$$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=\text{const}.$$

5. Показать, что произвольная прямая может пересекать коническое сечение не более чем в двух точках.

6. Обосновать следующий способ построения эллипса. Стороны CD и AC прямоугольника делят на одинаковое число равных отрезков (рис. 38). Точки деления соединяют с A и B. При этом

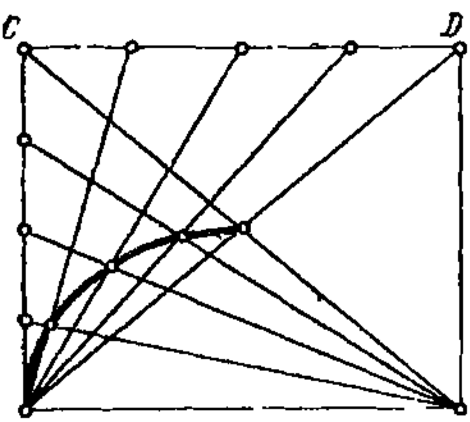


Рис. 38.

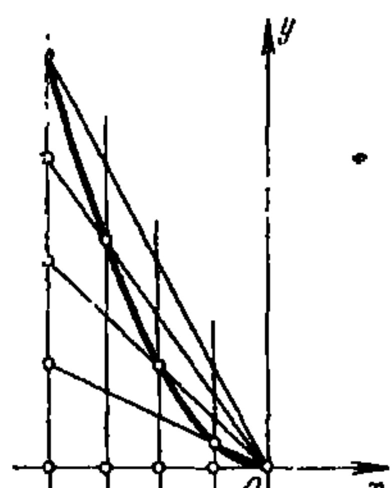


Рис. 39.

отмеченные точки пересечения лежат на эллипсе с большой осью AB. Малая полуось равна половине высоты прямоугольника.

7. Обосновать способ построения параболы, представленный на рис. 39.

§ 5. Касательная к коническому сечению

Касательной к кривой в точке A называется предельное положение секущей AB, когда точка B неограниченно приближается к A (рис. 40).

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Составим уравнение касательной в точке $A(x_0, y_0)$. Пусть $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ — точка кривой, близкая к A. Уравнение секущей

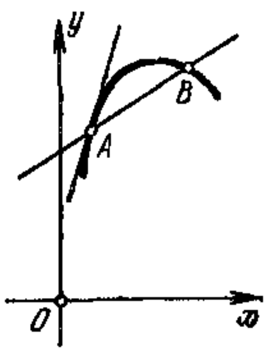


Рис. 40.

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0).$$

При $B \to A$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0).$$

И мы получаем уравнение касательной

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (*)$$

Аналогично, если кривая задана уравнением $x = \varphi(y)$, уравнение касательной в точке (x_0, y_0) будет

$$x - x_0 = \varphi'(y_0)(y - y_0). \qquad (**)$$

Составим уравнение касательной к коническому сечению.

Случай параболы. Уравнение параболы можно записать в виде

$$x = \frac{y^2}{2p}.$$

Тогда уравнение касательной в форме (**) будет

$$x - x_0 = \frac{y_0}{p}(y - y_0),$$

или

$$yy_0 - y_0^2 + px_0 - px = 0.$$

Так как точка (x_0, y_0) лежит на параболе и, следовательно, $y_0^2 - 2px_0 = 0$, то уравнение касательной можно представить в следующей окончательной форме:

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0.$$

Случай эллипса (гиперболы). Пусть (x_0, y_0) — точка эллипса, причем $y_0 \neq 0$. В окрестности этой точки эллипс можно задать уравнением

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

где квадратный корень надо брать со знаком y_0. Уравнение касательной по формуле (*)

$$y - y_0 = -\frac{x_0 b}{a^2\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}}(x - x_0)$$

или

$$y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

Умножая его на $\frac{y_0}{b^2}$ и перенося все члены в левую часть равенства, получим

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0,$$

или

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0,$$

так как $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

В окрестности каждой точки эллипса (x_0, y_0), где $x_0 \neq 0$, эллипс можно задать уравнением

$$x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Тогда аналогичным рассуждением с помощью формулы (**) приходим к уравнению касательной

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Так как в каждой точке эллипса x_0 и y_0 не могут быть одновременно нули, то в любой точке (x_0, y_0) уравнение касательной к эллипсу будет

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

получается аналогично и имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Упражнения

1. Показать, что касательная к коническому сечению имеет с ним только одну общую точку — точку касания.

2. Показать, что касательная к гиперболе вместе с асимптотами определяет треугольник постоянной площади.

3. Пусть $\varphi(x, y)=0$ — уравнение конического сечения. Выразить условие касания прямой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y), с коническим сечением и, таким образом, составить уравнение пары касательных, проведенных из точки (x_0, y_0) к коническому сечению.

4 Выразить условие касания прямой

$$y-y_0=\lambda(x-x_0)$$

с эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Показать, что геометрическое место вершин (x_0, y_0) прямых углов, стороны которых касаются эллипса, есть окружность.

5. Показать, что вершины прямых углов, стороны которых касаются параболы, лежат на директрисе, а прямая, соединяющая точки касания, проходит через фокус.

6. Способом, указанным в задаче 3, вывести уравнение пары касательных к коническому сечению, параллельных прямой

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0.$$

7. Показать, что отрезок касательной к гиперболе между асимптотами делится точкой касания пополам.

8. Пусть X_0 — вершина параболы, X — произвольная точка параболы и $\overline{X}$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки X на касательную в вершине X_0. Показать, что касательная параболы в точке X делит отрезок $X_0\overline{X}$ пополам.

§ 6. Фокальные свойства конических сечений

По определению у конического сечения имеется фокус и директриса. Покажем, что у *эллипса и гиперболы есть еще один фокус и директриса.* Действительно, пусть коническое сечение — эллипс. В каноническом расположении его директриса δ_1 параллельна оси y, а фокус F_1 расположен на оси x (рис. 41). Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Так как эллипс в таком расположении симметричен относительно оси y, то у него есть фокус F_2 и директриса δ_2, симметричные относительно оси y фокусу F_1 и директрисе δ_1.

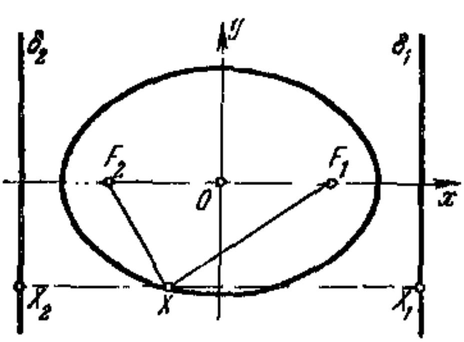


Рис. 41.

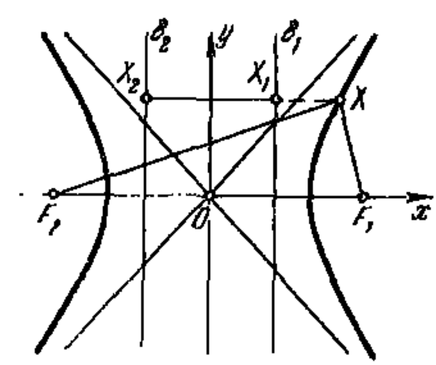


Рис. 42.

Аналогичным рассуждением устанавливается существование двух фокусов и директрис у гиперболы.

Покажем, что *сумма расстояний произвольной точки эллипса от его фокусов постоянна*, т. е. не зависит от точки. Действительно, для произвольной точки X (рис. 41) имеем

$$\frac{XF_1}{XX_1}=\lambda, \qquad \frac{XF_2}{XX_2}=\lambda.$$

Отсюда

$$XF_1+XF_2=\lambda\,(X_1X_2)=\text{const}.$$

Аналогично показывается, что *разность расстояний произвольной точки гиперболы от ее фокусов постоянна* (рис. 42).

Отметим теперь следующее оптическое свойство эллипса. *Световые лучи, исходящие из одного фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходят через второй фокус* (рис. 43, *а*). Иными словами, отрезки XF_1 и XF_2 с касательной в точке X образуют равные углы $\alpha_1=\alpha_2$.

Действительно, допустим, утверждение неверно, и, следовательно, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Отразим зеркально относительно касательной фокус F_2 (рис. 43, *б*) и соединим полученную точку F_2^* с точками X и F_1. Так как $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $\overline{X}F_2 + \overline{X}F_1 = F_2^*F_1 < XF_2 + XF_1$. При неограниченном удалении точки X' вдоль касательной за точку $\overline{X}$ сумма $X'F_1 + X'F_2$ неограниченно растет, в частности становится больше $XF_1 + XF_2$. Следовательно, существует точка X', отличная от X, такая, что $X'F_1 + X'F_2 = XF_1 + XF_2$. Точка X' должна принадлежать эллипсу. Но это невозможно, так как касательная конического сечения имеет с ним только одну общую точку. Мы пришли к противоречию. Итак, $\alpha_1 = \alpha_2$, утверждение доказано.

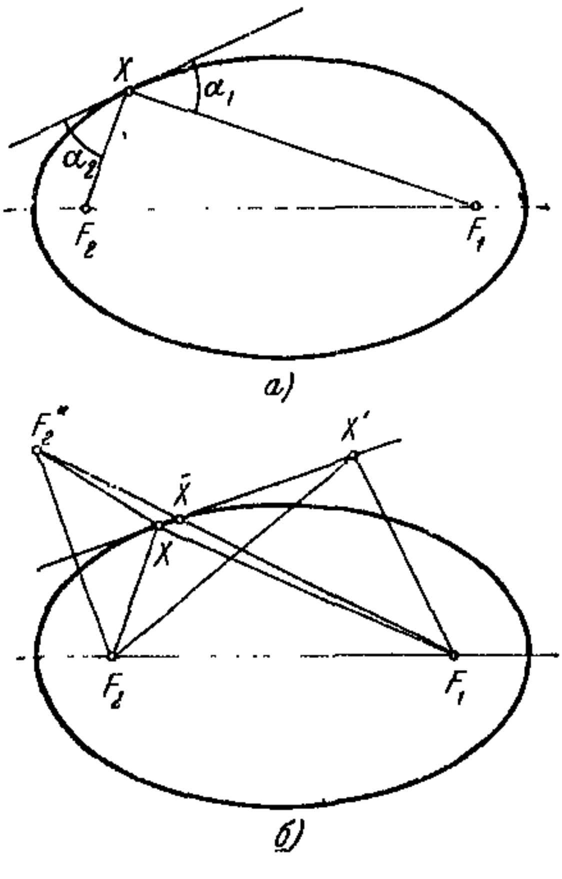


Рис. 43.

Аналогичным свойством обладает гипербола. Именно, *световые лучи, исходящие из одного фокуса, после зеркального отражения от гиперболы кажутся исходящими из другого фокуса* (рис. 44).

Соответствующее оптическое свойство параболы состоит в том, что *лучи света, исходящие из фокуса, после зеркального отражения от параболы образуют параллельный пучок.*

В заключение найдем фокусы эллипса и гиперболы в каноническом расположении. Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть c — расстояние от центра эллипса до фокусов. Сумма расстояний вершины $(0, b)$ от фокусов равна $2\sqrt{b^2+c^2}$. Сумма расстояний вершины $(a, 0)$ от фокусов равна $2a$. Отсюда

$$\sqrt{b^2+c^2}=a,$$

и, следовательно,

$$c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

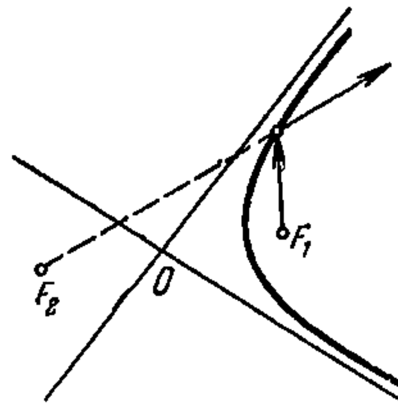


Рис. 44.

Сравниваем разность расстояний от фокусов точки гиперболы с абсциссой c, где c — расстояние от центра гиперболы до фокусов, и разность расстояний вершины $(a, 0)$ от фокусов. При этом для расстояния c фокусов гиперболы от ее центра получается формула $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Упражнения

1. Обосновать следующий способ построения фокусов эллипса. Из вершины на малой полуоси описывают окружность радиусом, равным большой полуоси. Точки пересечения этой окружности с большой осью эллипса и есть его фокусы.

2. Пусть X — произвольная точка эллипса (гиперболы). Показать, что отношение расстояния фокуса от точки X к расстоянию его от касательной в точке X не зависит от того, какой взят фокус.

3. Доказать оптическое свойство эллипса и гиперболы, опираясь на результат задачи 2.

4. Доказать оптическое свойство параболы.

5. Найти фокус параболы в каноническом расположении.

6. Найти директрисы конических сечений в каноническом расположении.

7. Показать, что все конические сечения k_λ, задаваемые уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1,$$

где λ — параметр семейства, софокусны, т. е. имеют общие фокусы.

8. Показать, что через каждую точку плоскости xy, не принадлежащую осям координат, проходит два конических сечения семейства k_λ (упр. 7) — эллипс и гипербола.

9. Показать, что эллипс и гипербола семейства k_λ (упр. 8), проходящие через точку (x_0, y_0), пересекаются в этой точке под прямым углом, то есть касательные к ним в точке (x_0, y_0) перпендикулярны.

§ 7. Диаметры конического сечения

Диаметром эллипса (гиперболы) называется любая прямая, проходящая через центр эллипса (гиперболы). *Диаметром параболы* называется любая прямая, параллельная ее оси, в частности сама ось.

Произвольная прямая пересекает коническое сечение не более чем в двух точках. Если точек пересечения две, то отрезок прямой с концами в точках пересечения называется *хордой*. Имеет место следующее свойство конических сечений.

Средины параллельных хорд конического сечения лежат на диаметре (рис. 45).

Это свойство очевидно, если хорды перпендикулярны оси симметрии. В этом случае средины хорд лежат на этой оси.

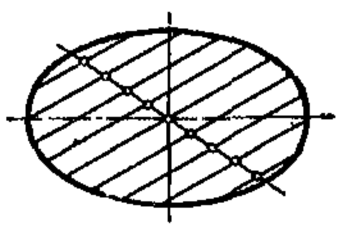
Рассмотрим общий случай. Семейство параллельных прямых, не параллельных осям координат, можно задать уравнениями

$$y = kx + b \qquad (k \neq 0),$$

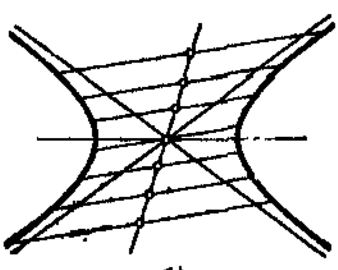
где k одно и то же для всех прямых.

Уравнения эллипса и гиперболы можно объединить следующей записью:

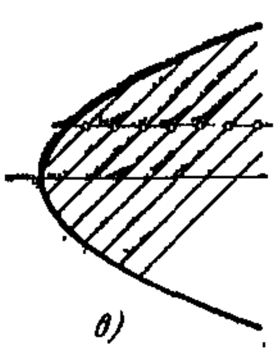
$$\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0.$$



а)



б)



в)

Рис. 45.

Концы хорд удовлетворяют системе уравнений

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0, \quad y = kx + b.$$

Подставляя вместо y в первое уравнение $kx + b$, находим уравнение, которому удовлетворяют абсциссы x_1 и x_2 концов хорды:

$$(\alpha+\beta k^2)x^2+2\beta kbx+\beta b^2-1=0.$$

По свойству корней квадратного уравнения

$$x_1+x_2=-\frac{2\beta kb}{\alpha+\beta k^2}.$$

Таким образом, абсцисса средины хорды

$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{\beta kb}{\alpha+\beta k^2}.$$

Ординату y_c найдем, подставляя x_c в уравнение хорды $y=kx+b$:

$$y_c=-\frac{\beta k^2b}{\alpha+\beta k^2}+b=\frac{\alpha b}{\alpha+\beta k^2}.$$

Отсюда

$$y_c=-\frac{\alpha}{\beta k}x_c.$$

Таким образом, средины параллельных хорд $y=kx+b$ лежат на прямой, проходящей через начало координат — центр эллипса (гиперболы). Ее угловой коэффициент

$$k'=-\frac{\alpha}{\beta k}.$$

Диаметр

$$y=k'x$$

называется *сопряженным* по отношению к диаметру

$$y=kx,$$

параллельному хордам.

Очевидно, свойство сопряженности диаметров *взаимно*, так как угловой коэффициент диаметра, сопряженного

$$y=k'x,$$

равен —

$$\frac{\alpha}{\beta k'}=k.$$

Рассмотрим случай параболы. Координаты концов хорд удовлетворяют системе

$$y^2-2px=0, \quad y=kx+b.$$

Исключая x, находим уравнение для ординат концов

$$y^2-\frac{2py}{k}+\frac{2pb}{k}=0.$$

Отсюда, подобно предыдущему,

$$y_1+y_2=\frac{2p}{k}.$$

Таким образом,

$$y_c=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{p}{k}=\text{const}.$$

Средины хорд лежат на прямой, параллельной оси x (оси параболы).

Отметим еще одно свойство сопряженных диаметров. *Если диаметр пересекает коническое сечение, то касательные в точках пересечения параллельны сопряженному диаметру*

Действительно, пусть (x_0, y_0) — точка пересечения диаметра $y=kx$ с эллипсом (гиперболой) $\alpha x^2+\beta y^2=1$. Уравнение касательной в точке (x_0, y_0) $\alpha x x_0+\beta y y_0-1=0$. Ее угловой коэффициент $k'=-\alpha x_0/\beta y_0$. Так как точка (x_0, y_0) лежит на диаметре $y=kx$, то $y_0=kx_0$. Поэтому

$$k'=-\frac{\alpha}{\beta k},$$

что и требовалось доказать

Упражнения

1. Касательные к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

имеют угловой коэффициент k. Определить точки касания.

2. Хорда эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

делится в точке (x_0, y_0) пополам Найти угловой коэффициент хорды.

3. Показать, что эллипс допускает параметрическое задание

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t.$$

Какому условию удовлетворяют значения параметра t, отвечающие концам сопряженных диаметров?

Доказать, что сумма квадратов сопряженных диаметров эллипса постоянна (теорема Аполония).

Сформулировать и доказать соответствующую теорему для гиперболы.

4. Любой эллипс можно представить как проекцию круга. Показать, что сопряженным диаметрам эллипса в этом проектировании соответствуют перпендикулярные диаметры круга. Опираясь на это, доказать, что площадь параллелограмма, образованного касательными на концах сопряженных диаметров, постоянна.

5. Показать, что площадь любого параллелограмма с вершинами в концах сопряженных диаметров эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

имеет одно и то же значение, равное $2ab$.

6. Известно, что среди всех четырехугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат. Показать, что среди всех четырехугольников, вписанных в эллипс, наибольшую площадь имеют параллелограммы с вершинами в концах сопряженных диаметров.

7. Показать, что площадь эллипса с полуосями a, b равна πab.

8. Можно ли в эллипс вписать треугольник так, чтобы касательная в каждой его вершине была параллельна противоположной стороне? С каким произволом это можно сделать? Чему равна площадь такого треугольника, если полуоси эллипса a и b?

§ 8. Кривые второго порядка

Кривой второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0, \qquad (*)$$

в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля.

Очевидно, *это определение инвариантно относительно выбора системы координат*, так как координаты точки в любой другой системе координат выражаются линейно через координаты ее в системе xy и, следовательно, уравнение в любой другой системе координат будет иметь вид $(*)$.

Выясним, что представляет собой геометрически кривая второго порядка.

Отнесем кривую к новой системе координат $x'y'$, связанной с системой xy формулами

$$x=x'\cos\alpha+y'\sin\alpha,$$
$$y=-x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

Уравнение кривой, сохраняя при этом форму (*), будет иметь коэффициент при $x'y'$

$$2a'_{12}=2a_{11}\cos\alpha\sin\alpha-2a_{22}\sin\alpha\cos\alpha+2a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$
$$=(a_{11}-a_{22})\sin 2\alpha+2a_{12}\cos 2\alpha.$$

Очевидно, всегда можно выбрать угол α так, чтобы этот коэффициент был равен нулю. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что в исходном уравнении (*) $a_{12}=0$.

Дальше будем различать два случая:

Случай A — оба коэффициента a_{11} и a_{22} отличны от нуля.

Случай B — один из коэффициентов a_{11} или a_{22} равен нулю. *Не ограничивая общности, будем считать* $a_{11}=0$.

В случае A переходом к новой системе координат $x'y'$

$$x'=x+\frac{a_1}{a_{11}},\quad y'=y+\frac{a_2}{a_{22}}$$

приводим уравнение (*) к виду

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+c=0 \qquad (**)$$

и различаем *следующие подслучаи:*

A_1: $c\neq 0$, знаки a_{11}, a_{22} одинаковы и противоположны c. Кривая представляет собой, очевидно, эллипс.

A_2: $c\neq 0$, знаки a_{11} и a_{22} противоположны. Кривая — гипербола.

A_3: $c\neq 0$, знаки a_{11}, a_{22} и c одинаковы. Уравнению не удовлетворяет ни одна вещественная точка. Кривая называется *мнимой*.

A_4: $c=0$, знаки a_{11} и a_{22} различны. Кривая распадается на пару прямых, так как уравнение (**) можно записать в форме

$$\left(x'-\sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}y'\right)\left(x'+\sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}y'\right)=0.$$

A_5: $c=0$, знаки a_{11} и a_{22} одинаковы. Уравнение можно записать в форме

$$\left(x'-i\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}y'\right)\left(x'+i\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}y'\right)=0.$$

Кривая распадается на пару мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке (0,0).

Рассмотрим теперь случай В.

В этом случае переходом к новой системе координат $x'y'$

$$x'=x, \quad y'=y+\frac{a_2}{a_{22}}$$

уравнение кривой приводим к виду

$$2a_1x'+a_{22}y'^2+c=0. \qquad (***)$$

Дальше различаем следующие подслучаи.

$В_1$: $a_1\neq 0$. Кривая — парабола, так как переходом к новым координатам

$$x''=x'+\frac{c}{2a_1}, \qquad y''=y'$$

уравнение (***) приводится к виду

$$2a_1x''+a_{22}y''^2=0.$$

$В_2$: $a_1=0$, a_{22} и c противоположных знаков. Кривая распадается на пару параллельных прямых

$$y\pm\sqrt{-\frac{c}{a_{22}}}=0.$$

$В_3$: $a_1=0$, a_{22} и c одного знака. Кривая распадается на пару мнимых, не пересекающихся прямых

$$y\pm i\sqrt{\frac{c}{a_{22}}}=0.$$

$В_4$: $a_1=0$, $c=0$. Кривая — пара совпадающих прямых.

Таким образом, *вещественная кривая второго порядка представляет собой либо коническое сечение (эллипс, гиперболу, параболу), либо пару прямых (может быть, совпадающих).*

Упражнения

1. Показать, что кривая второго порядка

$$(ax+by+c)^2-(a_1x+b_1y+c_1)^2=0$$

распадается на пару прямых, может быть, совпадающих.

2. Как известно, все точки эллипса находятся в ограниченной части плоскости xy. Исходя из этого, показать, что кривая второго порядка

$$(ax+by+c)^2+(\alpha x+\beta y+\gamma)^2=k,$$

если выражения $ax+by$, $\alpha x+\beta y$ независимы и $k>0$, является эллипсом.

3. Показать, что кривая второго порядка

$$(ax+by+c)^2-(\alpha x+\beta y+\gamma)^2=k\neq 0,$$

если $ax+by$, $\alpha x+\beta y$ независимы, есть гипербола.

4. Показать, что кривая второго порядка

$$(ax+by+c)(\alpha x+\beta y+\gamma)=k\neq 0$$

при условии независимости выражений $ax+by$, $\alpha x+\beta y$ является гиперболой.

5. Показать, что если некоторая прямая пересекает кривую второго порядка в трех точках, то кривая распадается на пару прямых, может быть, совпадающих.

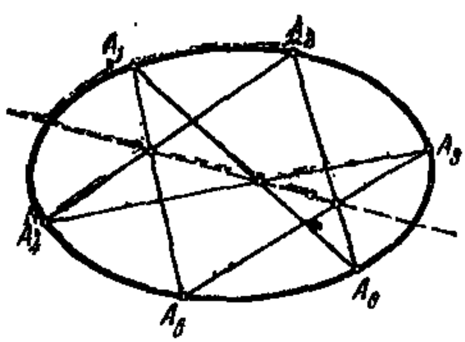


Рис. 46.

6. Показать, что если две кривые второго порядка имеют пять общих точек, то они совпадают.

7. Кривая называется кривой третьего порядка, если она задается уравнением $\varphi_3(x, y)=0$, где $\varphi_3(x, y)$ — многочлен третьей степени относительно x и y. Показать, что если кривая γ_3 третьего порядка имеет с кривой γ_2 второго порядка семь общих точек, то она распадается на кривую γ_2 и прямую.

8. Пусть γ — кривая второго порядка, $A_1, \ldots, A_6$ — вершины вписанного в нее шестиугольника, $\alpha_{ij}(x, y)=0$ — уравнения сторон, соединяющих вершины A_i и A_j (рис. 46). Показать, что кривая третьего порядка

$$\alpha_{24}\alpha_{16}\alpha_{35}-\lambda\alpha_{34}\alpha_{26}\alpha_{15}=0$$

пересекается с кривой γ в шести точках A_i. Показать, что подходящим выбором параметра λ можно добиться распадения кривой третьего порядаа на кривую γ и прямую.

9. Доказать теорему Паскаля: три точки пересечения прямых α_{15} и α_{24}, α_{34} и α_{16}, α_{26} и α_{35} лежат на одной прямой (рис. 46).

Глава IV

ВЕКТОРЫ

§ 1. Сложение и вычитание векторов

Под *вектором* мы будем понимать направленный отрезок (рис. 47). Направление вектора указывается стрелкой. Точка A называется *началом* вектора, а B — *концом*.

Два вектора считаются *равными*, если один из них может быть получен параллельным переносом из другого (рис. 48). Очевидно, если вектор $\boldsymbol{a}$ равен $\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{b}$ равен $\boldsymbol{a}$. Если $\boldsymbol{a}$ равен $\boldsymbol{b}$, а $\boldsymbol{b}$ равен $\boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{a}$ равен $\boldsymbol{c}$.

Рис. 47.

Рис. 48.

Два вектора называются *одинаково направленными* (*противоположно направленными*), если они параллельны и у равных им векторов, имеющих общее начало, концы располагаются по одну сторону от начала (соответственно по разные стороны от начала).

Длина отрезка, изображающего вектор, называется *абсолютной величиной вектора*.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало совпадает с концом.

Для векторов вводятся операции — *сложение* и *вычитание*. Именно, *суммой* двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, который получается из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ или равных им векторов так, как показано на рис. 49.

Сложение векторов коммутативно, т. е. для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \quad \text{(рис. 50)}.$$

4. Показать, что три вектора $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ зависимы тогда и только тогда, когда для них выполняется условие (*).

5. Показать, что для любых четырех векторов

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1)\cdots(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_4) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ (\boldsymbol{r}_4\boldsymbol{r}_1)\cdots(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_4) \end{vmatrix} = 0.$$

6. Пусть $l_1, \ldots, l_4$ — четыре луча, исходящие из одной точки, α_{ij} — угол между лучами l_i и l_j. Имеет место тождество

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_{12} & \cos\alpha_{13} & \cos\alpha_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos\alpha_{41} & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Показать.

§ 4. Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, определяемый следующим образом. Если хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ равен нулю или векторы параллельны, то $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$. В других случаях этот вектор по абсолютной величине равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, и направлен перпендикулярно плоскости этого параллелограмма так, что вращение в направлении от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ и направление $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ образуют «правый винт» (рис. 56).

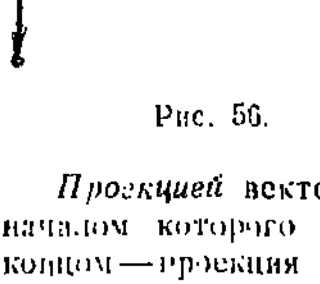


Рис. 56.

Из определения векторного произведения непосредственно получается:

1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

2) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\vartheta$, где ϑ — угол, образуемый векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

Проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на плоскость называется вектор $\boldsymbol{a}'$, началом которого является проекция начала вектора $\boldsymbol{a}$, а концом — проекция конца вектора $\boldsymbol{a}$. Очевидно, *равные векторы имеют равные проекции, проекция суммы векторов равна сумме проекций* (рис. 57).

Пусть имеем два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Обозначим $\boldsymbol{a}'$ проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{b}$ (рис. 58).

Тогда

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}.$$

Доказательство очевидно. Достаточно заметить, что векторы $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}$ имеют равные абсолютные величины и одинаковые направления.

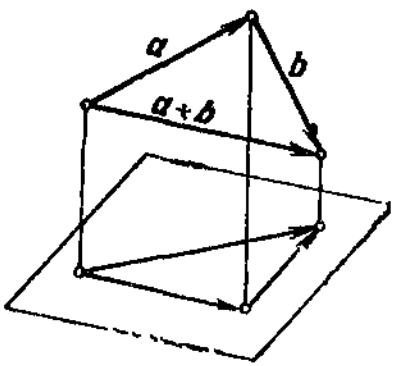


Рис. 57.

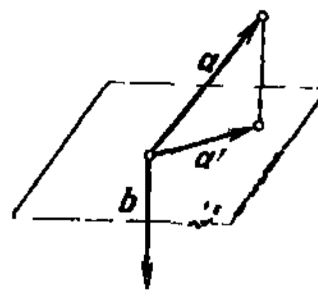


Рис. 58.

Векторное произведение обладает свойством дистрибутивности. Именно, для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}. \qquad (*)$$

Утверждение очевидно, если $\boldsymbol{c}=0$. Очевидно, далее, что равенство $(*)$ достаточно показать для случая $|\boldsymbol{c}|=1$, так как в общем случае оно тогда будет следовать из упомянутого выше свойства 3.

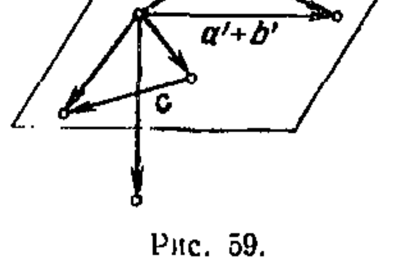


Рис. 59.

Итак, пусть $|\boldsymbol{c}|=1$. Обозначим $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$ — проекции векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{c}$ (рис. 59). Тогда векторы $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}$ и $(\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}')\times\boldsymbol{c}$ получаются из векторов $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ и $\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ соответственно поворотом на угол 90°. И, следовательно,

$$(\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}')\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}.$$

§ 2. Умножение вектора на число

Для векторов определяется операция умножения на число. Именно, *произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ называется вектор $\boldsymbol{a}\lambda = \lambda\boldsymbol{a}$, абсолютная величина которого $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$, а направление совпадает с направлением $\boldsymbol{a}$ или противоположно ему, смотря по тому $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$. При $\lambda = 0$ или $\boldsymbol{a} = 0$ считаем $\lambda\boldsymbol{a}$ равным нулевому вектору.

Умножение вектора на число обладает свойством ассоциативности и двумя свойствами дистрибутивности. Именно, для любых чисел λ, μ и векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a} \qquad \textit{(ассоциативность)},$$

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} &= \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}\\ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\end{aligned}\right\} \qquad \textit{(дистрибутивность)}.$$

Докажем эти свойства.

Абсолютные величины векторов $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ и $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ одинаковы и равны $|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|$. Направления этих векторов либо совпадают с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, если λ и μ одного знака, либо противоположны, если λ и μ разных знаков. Таким образом, векторы $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ и $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ равны по абсолютной величине и одинаково направлены, следовательно, равны. Если хотя бы одно из чисел λ, μ или вектор $\boldsymbol{a}$ равен нулю, то оба вектора равны нулю и, следовательно, равны друг другу. Ассоциативность доказана.

Докажем теперь первое свойство дистрибутивности:

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

Равенство очевидно, если хотя бы одно из чисел λ, μ или вектор $\boldsymbol{a}$ равен нулю. Поэтому можно считать, что λ, μ, $\boldsymbol{a}$ отличны от нуля.

Если λ и μ одного знака, то векторы $\lambda\boldsymbol{a}$ и $\mu\boldsymbol{a}$ одинаково направлены. Поэтому абсолютная величина вектора $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ равна $|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}| = (|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$. Абсолютная величина вектора $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ равна $|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}| = (|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$. Итак, абсолютные величины векторов $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ и $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ равны. Их направления тоже одинаковы. Именно, при $\lambda > 0$, $\mu > 0$ их направления совпадают с направлением $\boldsymbol{a}$, а при $\lambda < 0$, $\mu < 0$ противоположны $\boldsymbol{a}$. Случай, когда λ и μ разных знаков, рассматривается аналогично.

Докажем второе свойство дистрибутивности:

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

Свойство очевидно, если один из векторов или число λ равно нулю. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны, то $\boldsymbol{b}$ можно представить в виде $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$. И второе свойство дистрибутивности следует из первого. Действительно,

$$\lambda(1+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\mu\boldsymbol{a}.$$

Отсюда

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

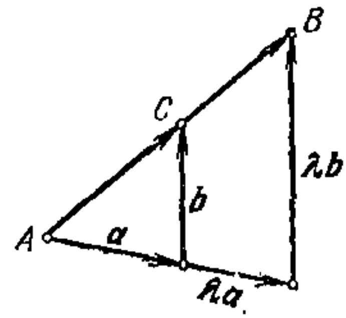


Рис. 53.

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — непараллельные векторы. Тогда при $\lambda>0$ вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 53) изображает с одной стороны $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$, с другой — $\lambda\overrightarrow{AC}$, равный $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. При $\lambda<0$ оба вектора меняют направления на противоположные.

Упражнения

1. Векторы $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots$ называются *линейно независимыми*, если не существует чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, из коих по крайней мере одно отлично от нуля, и таких, что

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\cdots=0.$$

Показать, что два вектора независимы тогда и только тогда, когда они отличны от нуля и не параллельны.

Показать, что три вектора независимы тогда и только тогда, когда они отличны от нуля и не существует параллельной им плоскости.

2. Показать, что любые три вектора, лежащие в одной плоскости, всегда зависимы.

Показать, что любые четыре вектора всегда зависимы.

3. Показать, что если два вектора в плоскости $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ независимы, то любой вектор $\boldsymbol{r}$ в этой плоскости линейно выражается через $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$:

$$\boldsymbol{r}=\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2.$$

Числа λ_1 и λ_2 определяются однозначно.

4. Показать, что если три вектора $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ независимы, то любой вектор $\boldsymbol{r}$ через них однозначно выражается в виде

$$\boldsymbol{r}=\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3.$$

§ 3. Скалярное произведение векторов

Углом между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется угол между векторами, равными $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно, имеющими общее *начало* (рис. 54).

Скалярным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число $(\boldsymbol{ab})$, равное произведению абсолютных величин векторов на косинус угла между ними.

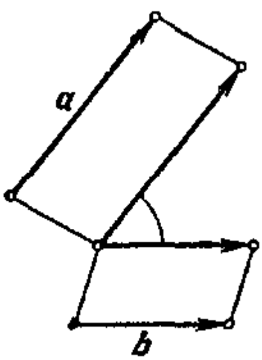


Рис. 54.

Скалярное произведение обладает следующими очевидными свойствами, непосредственно вытекающими из его определения:

1) $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$;

2) $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{aa}=|\boldsymbol{a}|^2$;

3) $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{ab})$;

4) если $|\boldsymbol{e}|=1$, то $(\lambda\boldsymbol{e})(\mu\boldsymbol{e})=\lambda\mu$;

5) скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы перпендикулярны или один из векторов равен нулю.

Проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую называется вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$, началом которого служит проекция начала вектора $\boldsymbol{a}$, а концом — проекция конца вектора $\boldsymbol{a}$. Очевидно, *равные векторы имеют равные проекции, проекция суммы векторов равна сумме проекций* (рис. 55).

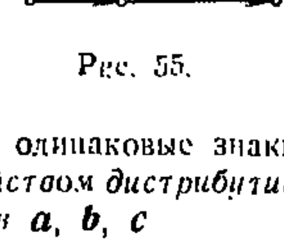


Рис. 55.

Скалярное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ равно скалярному произведению проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую, содержащую вектор $\boldsymbol{b}$, на вектор $\boldsymbol{b}$. Доказательство очевидно. Достаточно заметить, что $\boldsymbol{ab}$ и $\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ равны по абсолютной величине и имеют одинаковые знаки.

Скалярное произведение обладает свойством дистрибутивности. Именно, для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}.$$

Утверждение очевидно, если один из векторов равен нулю. Пусть все векторы отличны от нуля. Обозначим $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$, $\overline{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$ проекции векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ на прямую, содержащую вектор $\boldsymbol{c}$. Имеем

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=(\overline{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}})\,\boldsymbol{c}=(\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}})\,\boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}=\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}+\bar{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}.$$

Пусть $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, параллельный $\boldsymbol{c}$. Тогда векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\boldsymbol{c}$ допускают представления: $\bar{\boldsymbol{a}}=\lambda\boldsymbol{e}$, $\bar{\boldsymbol{b}}=\mu\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{c}=\nu\boldsymbol{e}$. И получаем

$$(\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}})\,\boldsymbol{c}=(\lambda\boldsymbol{e}+\mu\boldsymbol{e})\,\nu\boldsymbol{e}=(\lambda+\mu)\,\nu$$
$$\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}+\bar{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{e}\nu\boldsymbol{e}+\mu\boldsymbol{e}\nu\boldsymbol{e}=\lambda\nu+\mu\nu.$$

Отсюда

$$(\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}})\,\boldsymbol{c}=\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}+\bar{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}.$$

И, следовательно,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}.$$

В заключение покажем, что *если* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — *отличные от нуля, не параллельные одной плоскости векторы, то из трех равенств*

$$\boldsymbol{ra}=0,\quad \boldsymbol{rb}=0,\quad \boldsymbol{rc}=0$$

следует $\boldsymbol{r}=0$.

Действительно, если $\boldsymbol{r}\neq 0$, то из указанных трех равенств следует, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ перпендикулярны $\boldsymbol{r}$, а следовательно, параллельны плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{r}$, что невозможно.

Упражнения

1. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — вершины правильного n-угольника. Тогда $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_nA_1}=0$. Вывести отсюда, что

$$1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}=0,$$
$$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(2n-2)\pi}{n}=0.$$

2. Показать, что если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — любые не равные нулю и не параллельные векторы, то $\lambda^2\boldsymbol{a}^2+2\lambda\mu(\boldsymbol{ab})+\mu^2\boldsymbol{b}^2\geqslant 0$, причем равенство нулю имеет место, только если $\lambda=0$, $\mu=0$.

3. Показать, что для любых трех векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, параллельных одной плоскости,

$$\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1) & (\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2) & (\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_3)\\ (\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_1) & (\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_2) & (\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3)\\ (\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1) & (\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_2) & (\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_3)\end{vmatrix}=0. \qquad (*)$$

Сложение векторов ассоциативно. Именно, если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *— любые векторы, то*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

Это свойство сложения так же, как и предыдущее, непосредственно вытекает из определения операции сложения (рис. 51).

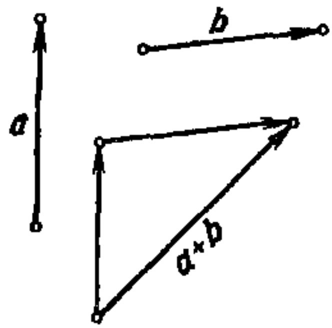


Рис. 49.

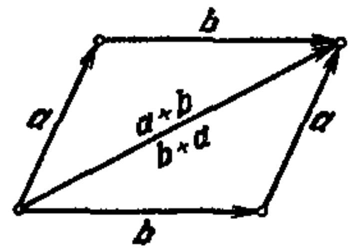


Рис. 50.

Отметим, что если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны, то вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, *если он не равен нулю, параллелен векторам* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причем одинаково направлен с большим (по абсолютной величине) вектором. Абсолютная величина вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

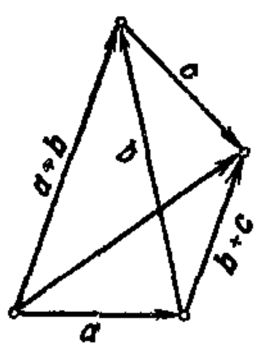


Рис. 51.

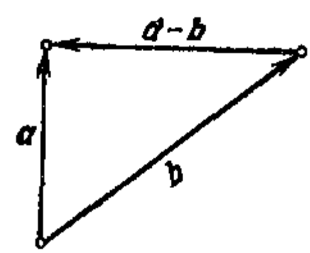


Рис. 52.

равна сумме абсолютных величин векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если они одинаково направлены, и разности абсолютных величин, если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *противоположно направлены.*

Вычитание векторов определяется как операция, обратная сложению. Именно, *разностью* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, который в сумме с вектором $\boldsymbol{b}$ дает вектор $\boldsymbol{a}$. Геометрически он получается из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ или равных им векторов так, как показано на рис. 52.

Для любых векторов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *имеет место неравенство*

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

(неравенство треугольника), геометрически выражающее собой в случае непараллельных векторов, что сумма двух сторон треугольника больше третьей. Это неравенство очевидным образом распространяется на случай любого числа векторов:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{l}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+\cdots+|\boldsymbol{l}|.$$

Упражнения

1. Показать, что сумма n векторов с общим началом в центре правильного n-угольника и концами в его вершинах равна нулю.

2. Три вектора имеют общее начало O, а концы — в вершинах треугольника ABC. Показать, что

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0$$

тогда и только тогда, когда O является точкой пересечения медиан треугольника.

3. Доказать тождество

$$2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2.$$

Какому геометрическому факту оно соответствует, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — отличные от нуля непараллельные векторы?

4. Показать, что знак равенства в неравенстве треугольника имеет место только тогда, когда оба вектора одинаково направлены или хотя бы один из векторов равен нулю.

5. Если сумма векторов $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ с общим началом O равна нулю и эти векторы не лежат в одной плоскости, то какова бы ни была плоскость α, проходящая через точку O, найдутся векторы $\boldsymbol{r}_i$, расположенные как по одну сторону плоскости, так и по другую. Показать.

6. Вектор $\boldsymbol{r}_{mn}$ лежит в плоскости xy, имеет началом точку (x_0, y_0), а концом точку $(m\delta, n\delta)$, где m и n — целые числа по абсолютной величине, не превосходящие M и N соответственно. Найти сумму всех векторов $\boldsymbol{r}_{mn}$, выразив ее через вектор с началом в точке $(0,0)$ и концом в точке (x_0, y_0).

7. Фигура F в плоскости xy имеет начало координат центром симметрии. Показать, что сумма векторов с общим началом и концами в целочисленных точках фигуры F равна нулю тогда и только тогда, если общим началом векторов является начало координат. (Предполагается, что фигура F содержит хотя бы одну целочисленную точку, т. е. точку с целочисленными координатами).

8. Выразить векторы, изображаемые диагоналями параллелепипеда, через векторы, изображаемые его ребрами.

А так как

$$\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c},$$
$$(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}') \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c},$$

то

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c},$$

что и требовалось доказать.

Отметим следующее простое тождество, имеющее место для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})^2.$$

Действительно, если ϑ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то это тождество выражает, что

$$(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \vartheta)^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \vartheta)^2$$

и, следовательно, очевидно.

Упражнения

1. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны вектору $\boldsymbol{c}$, то

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = 0.$$

Показать.

2. Если вектор $\boldsymbol{b}$ перпендикулярен $\boldsymbol{c}$, а вектор $\boldsymbol{a}$ параллелен вектору $\boldsymbol{c}$, то

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}).$$

Показать.

3. Для произвольного вектора $\boldsymbol{a}$ и вектора $\boldsymbol{b}$, перпендикулярного $\boldsymbol{c}$,

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}).$$

Показать.

4. Показать, что для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}).$$

5. Найти площадь основания треугольной пирамиды, у которой боковые ребра равны l, а углы при вершине α, β, γ.

§ 5. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называется число

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}. \qquad (*)$$

Очевидно, *смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из векторов равен нулю, или все три вектора параллельны одной плоскости.*

Смешанное произведение отличных от нуля векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *не параллельных плоскости, по абсолютной величине равно объему параллелепипеда, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (рис. 60).

В самом деле, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=S\boldsymbol{e}$, где S — площадь основания параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, а $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, перпендикулярный основанию. Далее, $(\boldsymbol{ec})$ с точностью до знака равно высоте параллелепипеда, опущенной на указанное основание. Следовательно, с точностью до знака $(\boldsymbol{abc})$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

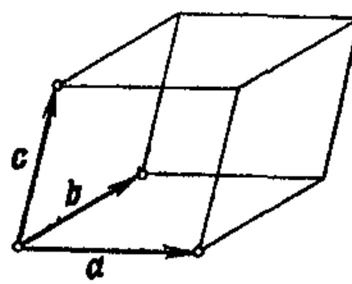


Рис. 60.

Смешанное произведение обладает следующим свойством:

$$(\boldsymbol{abc})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}). \qquad (**)$$

Достаточно заметить, что правая и левая часть равны по абсолютной величине и имеют одинаковые знаки.

Из определения $(*)$ смешанного произведения и свойства $(**)$ следует, что *при перестановке местами любых двух сомножителей смешанного произведения оно меняет знак на противоположный. В частности, смешанное произведение равно нулю, если два сомножителя равны.*

Упражнения

1. Замечая, что

$$((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}),$$

вывести тождество

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{ac}) & (\boldsymbol{ad})\\ (\boldsymbol{bc}) & (\boldsymbol{bd})\end{vmatrix}.$$

2. С помощью тождества

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{ac})\,\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{ab})\,(\boldsymbol{bc})$$

вывести формулу сферической тригонометрии

$$\sin\alpha\,\sin\gamma\cos B=\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha,$$

где α, β, γ — стороны треугольника на единичной сфере, а B — угол этого треугольника, противолежащий стороне β.

3. Вывести тождество

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{acd})-\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bcd}).$$

4. Показать, что для любых четырех векторов

$$b(acd)-a(bcd)+d(cab)-c(dab)=0.$$

5. Пусть e_1, e_2, e_3 — любые три вектора, удовлетворяющие условию $(e_1 e_2 e_3) \neq 0$. Тогда любой вектор r допускает представление

$$r=\frac{(re_2e_3)}{(e_1e_2e_3)}e_1+\frac{(re_3e_1)}{(e_1e_2e_3)}e_2+\frac{(re_1e_2)}{(e_1e_2e_3)}e_3.$$

Показать.

6. Показать, что решение системы векторных уравнений

$$(rab)=\gamma, \quad (rbc)=\alpha, \quad (rca)=\beta,$$

где a, b, c — данные векторы, удовлетворяющие условию $(abc) \neq 0$, а r — искомый вектор, можно записать в виде

$$r=\frac{1}{(abc)}(a\alpha+b\beta+c\gamma).$$

7. Показать, что если e_1, e_2, e_3 и r — любые четыре вектора, удовлетворяющие единственному условию $(e_1e_2e_3) \neq 0$, то имеет место тождество

$$r=\frac{(e_1\times e_2)(re_3)}{(e_1e_2e_3)}+\frac{(e_2\times e_3)(re_1)}{(e_1e_2e_3)}+\frac{(e_3\times e_1)(re_2)}{(e_1e_2e_3)}.$$

8. Показать, что решение системы векторных уравнений

$$ax=\alpha, \quad bx=\beta, \quad cx=\gamma,$$

где a, b, c — данные векторы, а x — искомый, если $(abc) \neq 0$, можно записать в форме

$$x=\frac{(a\times b)\gamma+(b\times c)\alpha+(c\times a)\beta}{(abc)}.$$

§ 6. Координаты вектора относительно заданного базиса

Пусть e_1, e_2, e_3 — любые три отличные от нуля, не параллельные одной плоскости векторы. Тогда любой вектор r допускает, и притом единственное, представление вида

$$r=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3. \qquad (*)$$

Числа λ_1, λ_2, λ_3 называются *координатами вектора* r относительно базиса e_1, e_2, e_3.

Докажем сначала единственность представления (*). Допустим, существует другое представление —

$$r=\lambda_1'e_1+\lambda_2'e_2+\lambda_3'e_3.$$

Тогда

$$(\lambda_1-\lambda_1')\,e_1+(\lambda_2-\lambda_2')\,e_2+(\lambda_3-\lambda_3')\,e_3=0.$$

Умножим это равенство скалярно на вектор $e_2\times e_3$. Получим

$$(\lambda_1-\lambda_1')\,(e_1e_2e_3)=0.$$

Так как $(e_1e_2e_3)\neq 0$, то $\lambda_1-\lambda_1'=0$. Аналогично заключаем, что $\lambda_2-\lambda_2'=0$, $\lambda_3-\lambda_3'=0$. Единственность представления (*) доказана.

Докажем теперь возможность представления (*).

Допустим, вектор r параллелен какому-нибудь из векторов e_1, e_2, e_3, например e_1. Тогда

$$r=\pm\frac{|r|}{|e_1|}\,e_1=\lambda e_1,$$

где знак $+$ (плюс) надо брать, если векторы r и e_1 одинаково направлены, а знак $-$ (минус), если они противоположно направлены.

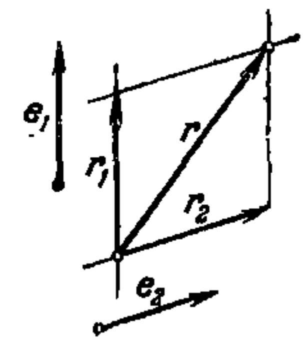


Рис. 61.

Пусть теперь вектор r вместе с векторами e_1 и e_2 параллелен одной плоскости, но не параллелен ни вектору e_1, ни вектору e_2. Проведем через концы вектора r прямые, параллельные векторам e_1 и e_2 (рис. 61). Тогда

$$r=r_1+r_2.$$

Но по доказанному $r_1=\lambda_1 e_1$, $r_2=\lambda_2 e_2$. Следовательно,

$$r=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2.$$

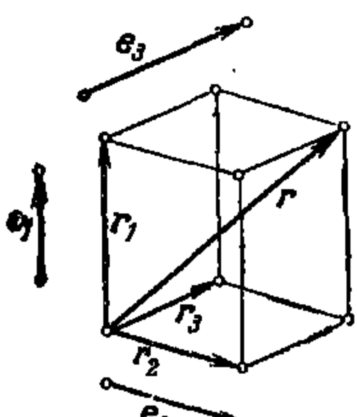


Рис. 62.

Пусть, наконец, вектор r ни с какой парой векторов e_1, e_2; e_2, e_3; e_3, e_1 не параллелен одной плоскости. Проведем через концы вектора r плоскости, параллельные указанным парам векторов (рис. 62). Тогда

$$r=r_1+r_2+r_3.$$

И так как по доказанному

$$r_1=\lambda_1 e_1,\quad r_2=\lambda_2 e_2,\quad r_3=\lambda_3 e_3,$$

то
$$r=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3.$$

Возможность представления вектора r в форме (*) доказана во всех случаях.

Координаты вектора имеют простой смысл, если базис состоит из трех единичных попарно ортогональных векторов.

Действительно, умножая равенство $r=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3$ последовательно на e_1, e_2, e_3 и замечая, что $e_1^2=e_2^2=e_3^2=1$, а $e_1 e_2=e_2 e_3=e_3 e_1=0$, получаем
$$\lambda_1=re_1,\quad \lambda_2=re_2,\quad \lambda_3=re_3.$$

Пусть r — вектор с координатами λ_1, λ_2, λ_3, а r' — вектор с координатами λ_1', λ_2', λ_3'. Найдем координаты вектора $r\pm r'$. Имеем
$$r=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3,\qquad r'=\lambda_1' e_1+\lambda_2' e_2+\lambda_3' e_3.$$
Отсюла $r\pm r'=(\lambda_1\pm\lambda_1')\,e_1+(\lambda_2\pm\lambda_2')\,e_2+(\lambda_3\pm\lambda_3')\,e_3$. И, следовательно, $\lambda_1\pm\lambda_1'$, $\lambda_2\pm\lambda_2'$, $\lambda_3\pm\lambda_3'$ *суть координаты вектора* $r\pm r'$.

Аналогично показывается, *что вектор* λr *имеет координатами* $\lambda\lambda_1$, $\lambda\lambda_2$, $\lambda\lambda_3$. *Отсюда следует, что у параллельных векторов координаты пропорциональны.*

Пусть базис e_1, e_2, e_3 состоит из трех единичных, попарно перпендикулярных векторов, смешанное произведение которых равно $+1$. *Найдем скалярное произведение векторов* r *и* r' *с координатами* λ_1, λ_2, λ_3 и λ_1', λ_2', λ_3' соответственно. Имеем
$$r=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3,\qquad r'=\lambda_1' e_1+\lambda_2' e_2+\lambda_3' e_3.\qquad (**)$$
Отсюда, *принимая во внимание*, что $e_1^2=e_2^2=e_3^2=1$, $e_1 e_2=e_2 e_3=e_3 e_1=0$, получаем
$$rr'=\lambda_1\lambda_1'+\lambda_2\lambda_2'+\lambda_3\lambda_3'.$$

Найдем координаты вектора $r\times r'$. Принимая во внимание представления (**) для векторов r, r' и соотношения $e_1\times e_2=e_3$, $e_2\times e_3=e_1$, $e_3\times e_1=e_2$, получаем
$$r\times r'=(\lambda_2\lambda_3'-\lambda_3\lambda_2')\,e_1+(\lambda_3\lambda_1'-\lambda_1\lambda_3')\,e_2+(\lambda_1\lambda_2'-\lambda_2\lambda_1')\,e_3.$$
Отсюда координаты вектора $r\times r'$:
$$\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_2' & \lambda_3'\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1\\ \lambda_3' & \lambda_1'\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_1' & \lambda_2'\end{vmatrix}.$$

Вычислим, наконец, смешанное произведение векторов

$$\boldsymbol{r}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \ \boldsymbol{r}'(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'), \ \boldsymbol{r}''(\lambda_1'', \lambda_2'', \lambda_3'').$$

Имеем

$$(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'') = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{r}'' =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2' & \lambda_3' \end{vmatrix} \lambda_1'' + \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_3' & \lambda_1' \end{vmatrix} \lambda_2'' + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1' & \lambda_2' \end{vmatrix} \lambda_3'' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1' & \lambda_2' & \lambda_3' \\ \lambda_1'' & \lambda_2'' & \lambda_3'' \end{vmatrix}.$$

Упражнения

1. Показать, что координаты вектора $\boldsymbol{r}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ соответственно равны:

$$\lambda_1 = \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}, \quad \lambda_3 = \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}.$$

2. Показать, что координаты вектора $\boldsymbol{r}$ относительно базиса $(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)$, $(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1)$, $(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)$ соответственно равны:

$$\lambda_1 = \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}, \quad \lambda_3 = \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_3}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}.$$

3. Разлагая векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ по ортогональному базису, с помощью теоремы умножения определителей доказать тождество

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c}\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}) \end{vmatrix}.$$

4. Доказать тождество

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})^2.$$

5. Показать, что объем трехгранной пирамиды с боковыми ребрами a, b, c и плоскими углами при вершине α, β, γ

$$v = \frac{1}{6}abc \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

6. Вывести формулу для объема треугольной пирамиды с боковыми ребрами a, b, c и двугранными углами при этих ребрах A, B, C.

Глава V

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Общие декартовы координаты

Проведем из произвольной точки O пространства три прямые — Ox, Oy, Oz, не лежащие в одной плоскости, и отложим на каждой из прямых из точки O отличные от нуля

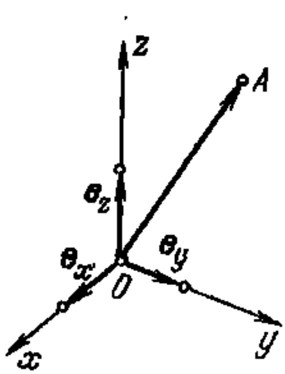


Рис. 63

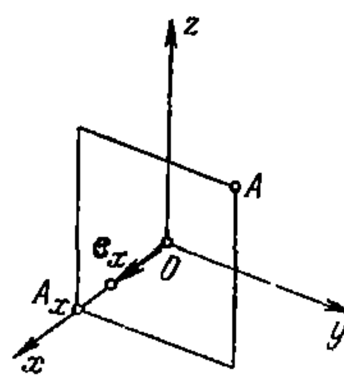


Рис. 64.

векторы e_x, e_y, e_z (рис. 63). Согласно § 6 гл. IV любой вектор $\overrightarrow{OA}$ допускает, и притом единственное, представление вида

$$\overrightarrow{OA} = xe_x + ye_y + ze_z.$$

Числа x, y, z называются *общими декартовыми координатами точки* A.

Прямые Ox, Oy, Oz называются *осями координат*: Ox — ось x, Oy — ось y, Oz — ось z. Плоскости Oxy, Oyz, Ozx называются *координатными плоскостями*: Oxy — плоскость xy, Oyz — плоскость yz, Ozx — плоскость xz.

Каждая из осей координат разбивается точкой O *(началом координат)* на две полуоси. Те из полуосей, куда направлены векторы e_x, e_y, e_z, называются *положительными*, другие *от-*

рицательными. Введенная таким образом система координат называется *правой*, если $(e_x e_y e_z) > 0$, и *левой*, если $(e_x e_y e_z) < 0$.

Геометрически координаты точки A получаются следующим образом. Проведем через точку A плоскость, параллельную плоскости yz. Она пересечет ось x в некоторой точке A_x (рис. 64). Тогда координата x точки A по абсолютной величине равна длине отрезка OA_x, измеренного единицей длины $|e_x|$, причем положительна, если A_x принадлежит положительной полуоси x, и отрицательна, если A_x принадлежит отрицательной полуоси x. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, как определяются координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ относительно базиса e_x, e_y, e_z.

Две другие координаты точки — y и z определяются аналогичным построением.

Если оси координат взаимно перпендикулярны, а векторы e_x, e_y, e_z единичные, то координаты называются *прямоугольными декартовыми координатами*.

Общие декартовы координаты на плоскости вводятся аналогично. Именно, из точки O (начала координат) проводим две произвольные прямые — Ox, Oy (оси координат) и откладываем из точки O на каждой из осей координат отличные от нуля векторы e_x и e_y соответственно. Тогда общие декартовы координаты произвольной точки A плоскости определяются как координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ относительно базиса e_x, e_y.

Очевидно, если оси координат перпендикулярны, а векторы e_x и e_y единичные, то определяемые таким образом координаты совпадают с введенными в § 1 гл. I и называются *прямоугольными декартовыми координатами*.

В дальнейшем мы, как правило, будем пользоваться прямоугольными декартовыми координатами. Все случаи использования общих декартовых координат будут специально оговариваться.

Упражнения

1. Где располагаются точки пространства, у которых

а) $x=0$; б) $y=0$; в) $z=0$;

г) $x=0$, $y=0$; д) $y=0$, $z=0$; е) $z=0$, $x=0$.

2. Сколько точек пространства удовлетворяет условиям

$$|x|=a,\quad |y|=b,\quad |z|=c,\quad \text{если } abc \neq 0.$$

3. Где расположены точки пространства, у которых

$$|x| < a, \quad |y| < b, \quad |z| < c.$$

4. Пусть A — какая-нибудь вершина параллелепипеда, A_1, A_2, A_3 — вершины, смежные с A, т. е. концы ребер, исходящих из A. Найти координаты всех вершин параллелепипеда, приняв за начало координат центр параллелепипеда, а концы базисных векторов в вершинах A_1, A_2, A_3.

5. Найти координаты точки, в которую переходит точка (x, y, z) при повороте около прямой, соединяющей точку (a, b, c) с началом координат, на угол $\alpha = \pi/2$. Система координат прямоугольная.

6. Решить задачу 5 при произвольном α.

§ 2. Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве

Пусть в пространстве введены общие декартовы координаты xyz, $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ — две произвольные точки пространства. *Найдем координаты точки A, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $\lambda_1:\lambda_2$* (рис. 65).

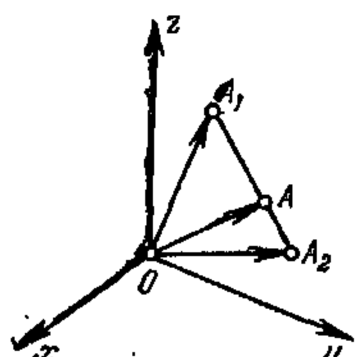


Рис. 65.

Векторы $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{AA_2}$ одинаково направлены, а их абсолютные величины относятся как $\lambda_1:\lambda_2$. Следовательно,

$$\lambda_2\overrightarrow{A_1A} - \lambda_1\overrightarrow{AA_2} = 0,$$

или

$$\lambda_2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_1}) - \lambda_1(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA}) = 0.$$

Отсюда

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\lambda_2\overrightarrow{OA_1} + \lambda_1\overrightarrow{OA_2}}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Так как координаты точки $A(x, y, z)$ есть не что иное, как координаты вектора OA, то

$$x = \frac{\lambda_2x_1 + \lambda_1x_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$y = \frac{\lambda_2y_1 + \lambda_1y_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$z = \frac{\lambda_2z_1 + \lambda_1z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Пусть система координат прямоугольная. *Выразим расстояние между точками A_1 и A_2 через координаты* этих точек.

Расстояние между точками A_1 и A_2 равно абсолютной величине вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ (рис. 66). Имеем

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} = e_x(x_2 - x_1) + e_y(y_2 - y_1) + e_z(z_2 - z_1).$$

Отсюда

$$(A_1A_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

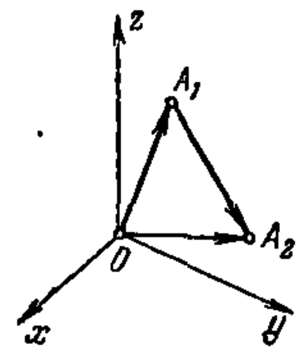


Рис. 66.

Выразим площадь треугольника в плоскости xy через координаты его вершин $A_1(x_1, y_1, 0)$, $A_2(x_2, y_2, 0)$, $A_3(x_3, y_3, 0)$.

Абсолютная величина вектора $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$ равна удвоенной площади треугольника $A_1A_2A_3$,

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = e_z \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Выразим объем тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ через координаты его вершин.

Смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, и, следовательно, ушестеренному объему тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$.

Отсюда

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Упражнения

1. Найти расстояние между двумя точками в общих декартовых координатах, если положительные полуоси образуют попарно углы α, β, γ, а базисные векторы e_x, e_y, e_z единичные.

2. Найти центр сферы, описанной около тетраэдра с вершинами $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, $(0, 0, 0)$.

3. Доказать, что прямые, соединяющие средины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке. Выразить ее координаты через координаты вершин тетраэдра.

4. Доказать, что прямые, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке. Выразить ее координаты через координаты вершин тетраэдра.

5. Пусть $A_i(x_i, y_i, z_i)$ — вершины тетраэдра. Показать, что точки с координатами

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3+\lambda_4x_4,$$
$$y=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3+\lambda_4y_4,$$
$$z=\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3+\lambda_4z_4$$

при $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3>0$, $\lambda_4>0$ и $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1$ расположены внутри тетраэдра.

6. Выразить площадь треугольника общего расположения через координаты его вершин. Система координат прямоугольная.

7. Показать, что формула для объема тетраэдра через координаты его вершин преобразуется к виду

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}.$$

8. Для того чтобы четыре точки $A_i(x_i, y_i, z_i)$ лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Доказать.

§ 3. Уравнение поверхности и кривой в пространстве

Пусть имеем поверхность (рис. 67). Уравнение

$$f(x, y, z)=0 \qquad (*)$$

называется *уравнением поверхности в неявной форме*, если координаты каждой точки поверхности удовлетворяют этому уравнению. И обратно, любая тройка чисел x, y, z, удовлетворяющая уравнению, представляет собой координаты одной из точек поверхности.

Систему уравнений

$$x=f_1(u,\ v),\quad y=f_2(u,\ v),\quad z=f_3(u,\ v), \qquad (**)$$

задающую координаты точек поверхности как функции двух параметров (u, v), называют *уравнениями поверхности в параметрической форме*.

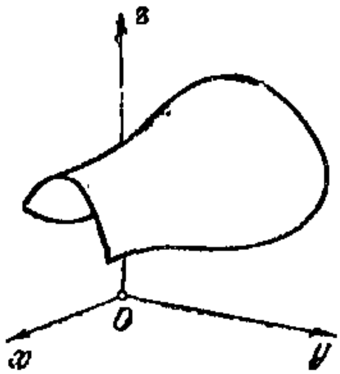


Рис. 67.

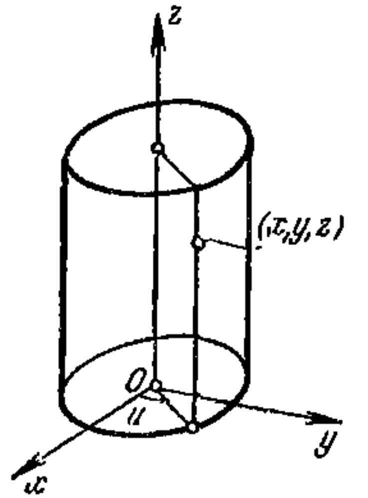


Рис. 68.

Исключая параметры u, v из системы (**), *можно получить уравнение поверхности в неявной форме.*

Составим уравнение произвольной сферы в прямоугольных декартовых координатах xyz.

Пусть (x_0, y_0, z_0) — центр сферы, а R — ее радиус. Каждая точка (x, y, z) сферы находится на расстоянии R от центра, а следовательно, удовлетворяет уравнению

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0. \qquad (***)$$

Обратно, любая точка (x, y, z), удовлетворяющая уравнению (***), находится на расстоянии R от (x_0, y_0, z_0) и, следовательно, принадлежит сфере. Согласно определению уравнение (***) есть уравнение сферы.

Составим уравнение кругового цилиндра с осью Oz и радиусом R (рис. 68).

Возьмем в качестве параметров u, v, характеризующих положение точки (x, y, z) на цилиндре, координату $z\,(v)$ и угол (u), который плоскость, проходящая через ось z и точку (x, y, z), образует с плоскостью xz. Тогда получим

$$x = R\cos u,\quad y = R\sin u,\quad z = v$$

— *уравнение цилиндра в параметрической форме.*

Возводя первые два уравнения в квадрат и складывая почленно, получим *уравнение цилиндра в неявной форме* —

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Пусть имеем некоторую кривую в пространстве. Систему уравнений

$$f_1(x, y, z) = 0,\quad f_2(x, y, z) = 0$$

называют *уравнениями кривой в неявной форме*, если координаты каждой точки кривой удовлетворяют обоим уравнениям. И обратно, любая тройка чисел, удовлетворяющая обоим уравнениям, представляет собой координаты некоторой точки кривой.

Систему уравнений

$$x = \varphi_1(t),\quad y = \varphi_2(t),\quad z = \varphi_3(t),$$

задающую координаты точек кривой как функции некоторого параметра (t), называют *уравнениями кривой в параметрической форме.*

Две поверхности, как правило, пересекаются по кривой. Очевидно, если поверхности задаются уравнениями $f_1(x, y, z) = 0$ и $f_2(x, y, z) = 0$, то кривая, по которой пересекаются поверхности, задается системой уравнений

$$f_1(x, y, z) = 0,\quad f_2(x, y, z) = 0.$$

Составим уравнение произвольной окружности в пространстве. Любую окружность можно представить как пересечение двух сфер. Следовательно, любая окружность может быть задана системой уравнений

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 - R_1^2 = 0,$$
$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 - R_2^2 = 0.$$

Кривая и поверхность, как правило, пересекаются в отдельных точках. Если поверхность задается уравнением $f(x, y, z) = 0$, а кривая уравнениями $f_1(x, y, z) = 0$,

$f_2(x, y, z) = 0$, то точки пересечения кривой с поверхностью удовлетворяют системе трех уравнений

$$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0.$$

Решая эту систему, находим координаты точек пересечения.

Упражнения

1. Показать, что поверхность, задаваемая уравнением вида

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$

если $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, есть сфера. Найти координаты ее центра и радиус.

2. Окружность задана пересечением двух сфер:

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2b_1y + 2c_1z + d_1 = 0,$$
$$f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2a_2x + 2b_2y + 2c_2z + d_2 = 0.$$

Показать, что уравнение любой сферы, проходящей через эту окружность, можно задать уравнением

$$\lambda_1 f_1(x, y, z) + \lambda_2 f_2(x, y, z) = 0.$$

3. Показать, что поверхность, задаваемая уравнением вида $\varphi(x, y) = 0$, цилиндрическая. Она образована прямыми, параллельными оси z.

4. Составить уравнение прямого кругового конуса с осью Oz, вершиной O и углом при вершине, равным α.

5. Составить уравнение поверхности, которую описывает середина отрезка, концы которого принадлежат кривым γ_1 и γ_2:

$$\gamma_1: \begin{cases} z = ax^2, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \gamma_2: \begin{cases} z = by^2, \\ x = 0. \end{cases}$$

6. Составить уравнение поверхности, которую описывает прямая, пересекая кривые γ_1, γ_2, оставаясь все время параллельной плоскости yz:

$$\gamma_1: \begin{cases} z = f(x), \\ y = a, \end{cases} \qquad \gamma_2: \begin{cases} z = \varphi(x), \\ y = b. \end{cases} \quad a \neq b$$

7. Показать, что кривая

$$z = \varphi(x), \quad y = 0 \ (x > 0)$$

при вращении около оси z описывает поверхность, задаваемую уравнением

$$z = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

8. Показать, что цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси z, проходящая через кривую

$$z = f(x), \quad z = \varphi(y),$$

задается уравнением

$$f(x) - \varphi(y) = 0.$$

§ 4. Преобразование координат

Пусть в пространстве введены две общие декартовы системы координат xyz и $x'y'z'$ (рис. 69). *Выразим координаты произвольной точки A в системе координат $x'y'z'$ через координаты ее в системе xyz.*

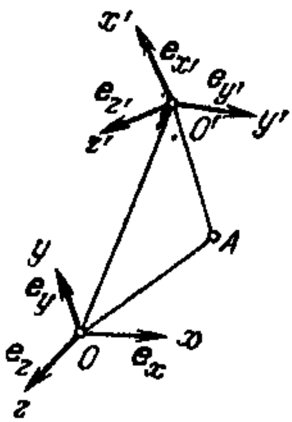


Рис. 69.

Имеем:

$$\overrightarrow{O'A} = x'\boldsymbol{e}_{x'} + y'\boldsymbol{e}_{y'} + z'\boldsymbol{e}_{z'},$$

$$\overrightarrow{O'O} = x_0'\boldsymbol{e}_{x'} + y_0'\boldsymbol{e}_{y'} + z_0'\boldsymbol{e}_{z'},$$

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z,$$

$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} = (x_0'\boldsymbol{e}_{x'} + y_0'\boldsymbol{e}_{y'} + z_0'\boldsymbol{e}_{z'}) + (x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z).$$

Векторы $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ допускают однозначное представление через векторы $\boldsymbol{e}_{x'}, \boldsymbol{e}_{y'}, \boldsymbol{e}_{z'}$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_x &= \alpha_{11}\boldsymbol{e}_{x'} + \alpha_{12}\boldsymbol{e}_{y'} + \alpha_{13}\boldsymbol{e}_{z'}, \\ \boldsymbol{e}_y &= \alpha_{21}\boldsymbol{e}_{x'} + \alpha_{22}\boldsymbol{e}_{y'} + \alpha_{23}\boldsymbol{e}_{z'}, \\ \boldsymbol{e}_z &= \alpha_{31}\boldsymbol{e}_{x'} + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_{y'} + \alpha_{33}\boldsymbol{e}_{z'}, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

где α_{ij} — координаты векторов $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_{x'}, \boldsymbol{e}_{y'}, \boldsymbol{e}_{z'}$.

Подставляя эти выражения в $\overrightarrow{O'A}$, получим

$$\overrightarrow{O'A} = (x_0' + \alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z)\,\boldsymbol{e}_{x'} + (y_0' + \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z)\,\boldsymbol{e}_{y'} + (z_0' + \alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z)\,\boldsymbol{e}_{z'}.$$

Выражения в скобках этой формулы суть координаты вектора $\overrightarrow{O'A}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_{x'}, \boldsymbol{e}_{y'}, \boldsymbol{e}_{z'}$, т. е. координаты точки A в системе $x'y'z'$. И мы получаем искомые формулы:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z + x_0', \\ y' &= \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z + y_0', \\ z' &= \alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z + z_0'. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Коэффициенты этих формул имеют следующие значения: α_{11}, α_{12}, α_{13} — координаты вектора e_x относительно базиса $e_{x'}$, $e_{y'}$, $e_{z'}$; α_{21}, α_{22}, α_{23} — координаты вектора e_y; α_{31}, α_{32}, α_{33} — координаты вектора e_z; x_0', y_0', z_0' — координаты точки O в системе координат $x'y'z'$.

Заметим, что детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Действительно, непосредственно проверяется, что

$$(e_x e_y e_z) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} (e_{x'} e_{y'} e_{z'}).$$

И так как $(e_x e_y e_z) \neq 0$, то $\Delta \neq 0$.

Для всех систем координат $x'y'z'$, которые могут быть непрерывно переведены друг в друга, детерминант Δ имеет один и тот же знак. (Непрерывность изменения системы координат понимается как непрерывность изменения начала O' и базиса $e_{x'}e_{y'}e_{z'}$.) Действительно, так как $(e_x e_y e_z)$ отлично от нуля, то Δ отлично от нуля. Так как, кроме того, Δ изменяется непрерывно, то оно не может принимать значений разных знаков.

Систему формул (**) при условии $\Delta \neq 0$ всегда можно истолковать как переход от некоторой системы координат $x'y'z'$ к системе координат xyz, начало которой в точке (x_0', y_0', z_0'), а базисные векторы выражаются через базисные векторы системы $x'y'z'$ по формулам (*).

Если обе системы координат xyz и $x'y'z'$ прямоугольные, то коэффициенты формул (**) удовлетворяют *условиям ортогональности*:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, \quad \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0, \\ &\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1, \quad \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} = 0, \\ &\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, \quad \alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{13} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (***)$$

которые получаются, если воспользоваться формулами (*) и соотношениями ортогональности базисов:

$$e_x^2 = e_y^2 = e_z^2 = 1, \quad e_x e_y = e_y e_z = e_z e_x = 0,$$
$$e_{x'}^2 = e_{y'}^2 = e_{z'}^2 = 1, \quad e_{x'} e_{y'} = e_{y'} e_{z'} = e_{z'} e_{x'} = 0.$$

Обратно, формулы (**), если выполняются условия (***), всегда можно истолковать как переход от некоторой прямоугольной системы координат $x'y'z'$ к системе прямоугольных координат xyz, начало которой в точке (x_0', y_0', z_0'), а базисные векторы задаются формулами (*). В силу условий (***) базисные векторы e_x, e_y, e_z единичные и попарно перпендикулярные.

Заметим, что в случае прямоугольных декартовых координат xyz и $x'y'z'$ $\Delta=\pm 1$, причем $\Delta=+1$, если одну систему координат можно движением совместить с другой. Если же это можно сделать движением *и зеркальным отражением*, то $\Delta=-1$.

Упражнения

1. Как будут выглядеть формулы преобразования координат, если плоскость xy совпадает с плоскостью $x'y'$?

2. Известно, что в некоторой системе координат уравнением

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx=c$$

задается сфера. Найти углы между осями координат.

3. Пусть имеем две системы координат xyz и $x'y'z'$ с общим началом O. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис первой системы, а $e_1\times e_2$, $e_2\times e_1$, $e_3\times e_1$ — базис второй. Составить формулы перехода от одной системы к другой.

4. Переход от одной прямоугольной декартовой системы координат xyz к другой прямоугольной декартовой системе координат $x'y'z'$ с тем же началом можно выполнить в три этапа:

$$\mathrm{I}\quad \begin{cases} x_1=x\cos\varphi-y\sin\varphi,\\ y_1=x\sin\varphi+y\cos\varphi,\\ z_1=z,\end{cases}$$

$$\mathrm{II}\quad \begin{cases} x_2=x_1,\\ y_2=y_1\cos\vartheta-z_1\sin\vartheta,\\ z_2=y_1\sin\vartheta+z_1\cos\vartheta,\end{cases}$$

$$\mathrm{III}\quad \begin{cases} x'=x_2\cos\psi-y_2\sin\psi,\\ y'=x_2\sin\psi+y_2\cos\psi,\\ z'=z_2.\end{cases}$$

Углы φ, ϑ, ψ называются углами Эйлера. Выяснить их геометрический смысл.

5. Показать, что преобразование пространства в себя, задаваемое формулами (**) при условиях (***), есть движение.

Глава VI

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ

§ 1. Уравнение плоскости

Составим уравнение произвольной плоскости в прямоугольных декартовых координатах xyz.

Пусть $A_0(x_0, y_0, z_0)$ — какая-нибудь точка плоскости и $\boldsymbol{n}$ — отличный от нуля вектор перпендикулярной плоскости. Тогда, какова бы ни была точка $A(x, y, z)$ плоскости, векторы $\overrightarrow{A_0A}$ и $\boldsymbol{n}$ перпендикулярны (рис. 70). Следовательно,

$$\overrightarrow{A_0A} \cdot \boldsymbol{n} = 0. \qquad (*)$$

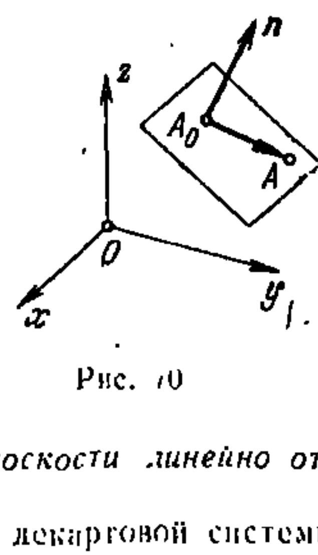


Рис. 70

Пусть α, β, γ — координаты вектора $\boldsymbol{n}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$. Тогда, так как $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_0}$, из $(*)$ следует:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0 \qquad (**)$$

Это и есть требуемое уравнение.

Таким образом, *уравнение любой плоскости линейно относительно координат x, y, z.*

Так как формулы перехода от одной декартовой системы координат к другой линейны, то *уравнение плоскости линейно в любой декартовой системе координат* (а не только прямоугольной).

Покажем теперь, что *любое уравнение*

$$ax + by + cz + d = 0$$

является уравнением некоторой плоскости.

Пусть x_0, y_0, z_0 — какое-нибудь решение данного уравнения. Тогда

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0,$$

и уравнение можно переписать в форме

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0. \qquad (***)$$

Пусть $\boldsymbol{n}$ — вектор с координатами a, b, c относительно базиса $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$, A_0 — точка с координатами x_0, y_0, z_0 и A — точка с координатами x, y, z. Тогда уравнение (***) можно записать в эквивалентной форме

$$\overrightarrow{A_0A}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

Отсюда следует, что все точки плоскости, проходящей через точку A_0 перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$ (и только они), удовлетворяют данному уравнению и, следовательно, оно является уравнением этой плоскости.

Заметим, что коэффициенты при x, y, z в уравнении плоскости суть координаты вектора, перпендикулярного плоскости относительно базиса $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$.

Упражнения

1. Составить уравнение плоскости, если заданы две симметрично расположенные относительно нее точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2).

2. Показать, что плоскости

$$ax+by+cz+d_1=0 \quad (d_1\neq d_2),$$
$$ax+by+cz+d_2=0$$

параллельны (не пересекаются).

3. Что представляет собой геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(ax+by+cz+d)^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)^2=0?$$

4. Показать, что кривая, задаваемая уравнениями

$$f(x, y, z)+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$f(x, y, z)+a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$

плоская, т. е. все точки этой кривой принадлежат некоторой плоскости.

5. Показать, что три плоскости, задаваемые уравнениями

$$ax+by+cz+d=0,$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0,$$
$$\lambda(ax+by+cz)+\mu(\alpha x+\beta y+\gamma z)+k=0,$$

при $k\neq\lambda d+\mu\delta$ не имеют общих точек.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через окружность, по которой пересекаются две сферы:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0.$$

7. Показать, что преобразование инверсии переводит сферу либо в сферу, либо в плоскость.

8. Показать, что уравнение любой плоскости, проходящей через прямую, по которой пересекаются плоскости

$$ax+by+cz+d=0,$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0,$$

может быть представлено в виде

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0.$$

9. Показать, что плоскость, проходящая через три данные точки (x_i, y_i, z_i) $(i=1, 2, 3)$, задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

§ 2. Расположение плоскости относительно системы координат

Выясним, какие особенности в расположении плоскости относительно системы координат имеют место, если ее уравнение того или иного частичного вида.

1. $a=0$, $b=0$. Вектор $\boldsymbol{n}$ (перпендикулярный плоскости) параллелен оси z. Плоскость параллельна плоскости xy, в частности совпадает с плоскостью xy, если и $d=0$.

2. $b=0$, $c=0$. Плоскость параллельна плоскости yz и совпадает с ней, если $d=0$.

3. $c=0$, $a=0$. Плоскость параллельна плоскости xz и совпадает с ней, если $d=0$.

4. $a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$. Вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен оси x $(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{n}=0)$. Плоскость параллельна оси x, в частности проходит через нее, если $d=0$.

5. $a\neq 0$, $b=0$, $c\neq 0$. Плоскость параллельна оси y и проходит через нее, если $d=0$.

6. $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c=0$. Плоскость параллельна оси z и проходит через нее, если $d=0$.

7. $d=0$. Плоскость проходит через начало координат (его координаты 0, 0, 0 удовлетворяют уравнению плоскости, если $d=0$).

Если все коэффициенты отличны от нуля, уравнение можно разделить на $-d$. Тогда, полагая

$$-\frac{d}{a}=\alpha, \quad -\frac{d}{b}=\beta, \quad -\frac{d}{c}=\gamma,$$

получаем уравнение плоскости в следующей форме:

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}-1=0. \qquad (*)$$

Числа α, β, γ с точностью до знака равны отрезкам, отсекаемым плоскостью на осях координат. Действительно, ось x ($y=0$, $z=0$) плоскость пересекает в точке $(\alpha, 0, 0)$, ось y — в точке $(0, \beta, 0)$, ось z — в точке $(0, 0, \gamma)$. Уравнение (*) называется *уравнением плоскости в отрезках на осях.*

В заключение заметим, что любая плоскость, не перпендикулярная плоскости xy ($c\neq 0$), может быть задана уравнением вида

$$z=px+qy+l.$$

Упражнения

1. Найти условия, при которых плоскость

$$ax+by+cz+d=0$$

пересекает положительную полуось x (y, z).

2. Найти объем тетраэдра, ограничиваемого координатными плоскостями и плоскостью

$$ax+by+cz+d=0,$$

если $abcd\neq 0$.

3. Доказать, что точки пространства, для которых

$$|x|+|y|+|z|<a,$$

расположены внутри октаэдра с центром в начале координат и вершинами на осях.

4. Дана плоскость σ уравнением в прямоугольных декартовых координатах

$$ax+by+cz+d=0$$

Составить уравнение плоскости σ', симметричной σ, относительно плоскости xy (начала координат O).

5. Дано семейство плоскостей, зависящее от параметра λ,

$$ax+by+cz+d+\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0.$$

Найти в семействе плоскость, параллельную оси z.

6. В семействе плоскостей

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)+\\+\mu(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)=0$$

найти плоскость, параллельную плоскости xy. Параметрами семейства являются λ и μ.

§ 3. Уравнение плоскости в нормальной форме

Если точка $A(x, y, z)$ принадлежит плоскости

$$ax+by+cz+d=0, \qquad (*)$$

то ее координаты удовлетворяют уравнению $(*)$.

Выясним, какой геометрический смысл имеет выражение

$$ax+by+cz+d,$$

если точка A не принадлежит плоскости.

Опустим из точки A перпендикуляр на плоскость. Пусть $A_0(x_0, y_0, z_0)$ — основание перпендикуляра. Так как точка A_0 лежит на плоскости, то

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0.$$

Отсюда

$$ax+by+cz+d=\\=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=\boldsymbol{n}\,\overrightarrow{A_0A}=\pm|\boldsymbol{n}|\,\delta,$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор, перпендикулярный плоскости с координатами a, b, c, а δ — расстояние точки A от плоскости.

Таким образом,

$$ax+by+cz+d$$

положительно по одну сторону плоскости, отрицательно по другую, а по абсолютной величине пропорционально расстоянию точки A от плоскости. Коэффициент пропорциональности:

$$\pm|\boldsymbol{n}|=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Если в уравнении плоскости $a^2+b^2+c^2=1$, то

$$ax+by+cz+d$$

будет равно с точностью до знака расстоянию точки от плоскости. В этом случае говорят, что плоскость задана *уравнением в нормальной форме.*

Очевидно, чтобы получить нормальную форму уравнения плоскости (*), достаточно разделить его на

$$\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Упражнения

1. Плоскости, задаваемые уравнениями в прямоугольных декартовых координатах:

$$ax+by+cz+d=0,$$
$$ax+by+cz+d'=0,$$

где $d \neq d'$ не имеют общих точек, следовательно, параллельны. Найти расстояние между этими плоскостями.

2. Плоскость

$$ax+by+d=0$$

параллельна оси z. Найти расстояние оси z от этой плоскости.

3. Что представляет собой геометрическое место точек, расстояния которых до двух данных плоскостей находятся в данном отношении?

4. Составить уравнения плоскостей, параллельных

$$ax+by+cz+d=0$$

и отстоящих от нее на расстоянии δ.

5. Показать, что точки пространства, удовлетворяющие условию

$$|ax+by+cz+d|<\delta^2,$$

расположены между параллельными плоскостями

$$ax+by+cz+d\pm\delta^2=0.$$

6. Заданы уравнения плоскостей, в которых лежат грани тетраэдра, и точка M своими координатами. Как узнать, лежит точка M внутри тетраэдра или нет?

7. Составить формулы перехода к новой прямоугольной декартовой системе координат $x'y'z'$, если новые координатные плоскости в старой системе задаются уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0.$$

§ 4. Взаимное расположение плоскостей

Пусть имеем две плоскости:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Выясним, при каком условии эти плоскости: а) параллельны, б) перпендикулярны.

Так как a_1, b_1, c_1 — координаты вектора $\boldsymbol{n}_1$, перпендикулярного первой плоскости, а a_2, b_2, c_2 — координаты вектора $\boldsymbol{n}_2$, перпендикулярного второй плоскости, то плоскости параллельны, если векторы $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ параллельны, т. е. если их координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

Это условие вместе с тем достаточно для параллельности плоскостей, если они не совпадают.

Для того чтобы плоскости (*) были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы указанные векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ были перпендикулярны, что для неравных нулю векторов эквивалентно условию

$$\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2=0 \quad \text{или} \quad a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0.$$

Пусть уравнениями (*) даны две произвольные плоскости. Найдем угол, образуемый этими плоскостями.

Угол ϑ между векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ равен одному из углов, образуемых плоскостями. Угол между векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ легко найти. Имеем

$$(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)=|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|\cos\vartheta.$$

Отсюда

$$\cos\vartheta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

Пусть имеем три различные плоскости:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0, \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Плоскости (**) либо пересекаются в одной точке, либо параллельны некоторой прямой, в частности проходят через прямую.

Если плоскости (**) пересекаются в одной точке, то система уравнений (**) имеет единственное решение. Как известно из алгебры, это будет тогда и только тогда, когда детерминант системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это можно пояснить и другим способом. Если плоскости пересекаются в единственной точке, то векторы $\boldsymbol{n}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\boldsymbol{n}_2(a_2, b_2, c_2)$, $\boldsymbol{n}_3(a_3, b_3, c_3)$ не могут быть параллельны одной плоскости (ибо тогда плоскости, пересекаясь в точке, пересекались бы по прямой), а следовательно, их смешанное произведение, равное детерминанту Δ, отлично от нуля.

Плоскости (**) будут параллельны некоторой прямой, если $\Delta = 0$, что означает параллельность векторов $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$ некоторой плоскости. Если при этом система (**) совместна (имеет решение), то плоскости пересекаются по прямой.

Упражнения

1. Найти углы, образуемые плоскостью

$$ax + by + cz + d = 0$$

с осями координат.

2. Найти угол, образуемый плоскостью

$$z = px + qy + l$$

с плоскостью xy

3. Площадь фигуры F в плоскости

$$z = ax + by + c$$

и площадь ее проекции $\bar{F}$ на плоскость xy связаны соотношением

$$S(F) = \sqrt{1 + a^2 + b^2}\, S(\bar{F}).$$

Показать.

4. При каком условии плоскость

$$ax + by + cz + d = 0$$

пересекает оси x и y под равными углами? При каком условии она пересекает под равными углами все три оси x, y и z?

5. Показать, что плоскость, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) и параллельная плоскости

$$ax+by+cz+d=0,$$

задается уравнением

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

6. Показать, что плоскость, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) *и перпендикулярная плоскостям*

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$

задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0.$$

7. Среди плоскостей пучка

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

найти плоскость, перпендикулярную

$$ax+by+cz+d=0.$$

8. Пусть

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

— уравнения трех плоскостей, не параллельных одной прямой. Тогда любая плоскость, проходящая через точку пересечения данных, имеет уравнение вида

$$\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)+$$
$$+\lambda_3(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)=0.$$

§ 5. Уравнение прямой

Любую прямую можно задать как пересечение двух плоскостей. Следовательно, *любая прямая может быть задана уравнениями:*

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

из коих первое задает одну плоскость, а второе — другую. Обратно, *любая совместная система двух таких независимых уравнений представляет собой уравнения некоторой прямой.*

Пусть $A_0(x_0, y_0, z_0)$ — какая-нибудь фиксированная точка прямой, $A(x, y, z)$ — произвольная точка прямой и $\boldsymbol{e}(k, l, m)$ — отличный от нуля вектор, параллельный прямой (рис. 71). Тогда векторы $\overrightarrow{A_0A}$ и $\boldsymbol{e}$ параллельны, следовательно, их координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m} \qquad (**)$$

Эта форма уравнения прямой называется *канонической* и представляет собой частный случай (*), так как допускает эквивалентную запись

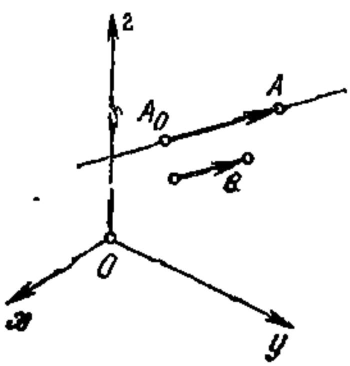


Рис. 71.

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l},$$

$$\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m},$$

соответствующую (*).

Пусть прямая задана уравнениями (*). Составим ее уравнение в канонической форме. Для этого достаточно найти какую-нибудь точку A_0 на прямой и вектор $\boldsymbol{e}$, параллельный прямой.

Всякий вектор $\boldsymbol{e}(k, l, m)$, параллельный прямой, будет параллелен каждой из плоскостей (*) и обратно. Следовательно, k, l, m удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} a_1k+b_1l+c_1m=0,\\ a_2k+b_2l+c_2m=0. \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

Таким образом, в качестве x_0, y_0, z_0 для канонического уравнения прямой можно взять любое решение системы (*), а в качестве коэффициентов k, l, m — любое решение (***), например:

$$k=\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},\quad l=\begin{vmatrix} c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix},\quad m=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}.$$

Из уравнения прямой в канонической форме можно получить ее уравнения в параметрической форме. Именно, полагая общее значение трех отношений канонического уравнения равным t, получим

$$x = kt + x_0, \quad y = lt + y_0, \quad z = mt + z_0$$

— *уравнение прямой в параметрической форме.*

Выясним, каковы особенности в расположении прямой относительно системы координат, если некоторые из коэффициентов канонического уравнения равны нулю.

Так как вектор $e(k, l, m)$ параллелен прямой, то при $m = 0$ прямая параллельна плоскости xy $(ee_z = 0)$, при $l = 0$ прямая параллельна плоскости xz, при $k = 0$ прямая параллельна плоскости yz.

При $k = 0$ и $l = 0$ прямая параллельна оси z $(e \| e_z)$, при $l = 0$ и $m = 0$ — параллельна оси x, при $k = 0$ и $m = 0$ — параллельна оси y.

В заключение заметим, что уравнениями вида (*) и (**) прямая может быть задана в общих декартовых координатах (а не только прямоугольных).

Упражнения

1. При каком условии прямая, заданная уравнением в канонической форме (**), пересекает ось x (y, z)? При каком условии прямая лежит в плоскости xy (yz, zx)?

2. Показать, что геометрическое место точек, равноудаленных от трех попарно не параллельных плоскостей, есть прямая.

3. Показать, что геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника, есть прямая. Составить ее уравнения, если заданы координаты вершин треугольника.

4. Показать, что через каждую точку поверхности

$$z = axy$$

проходят две прямые, целиком лежащие на поверхности.

5. Если прямые, задаваемые уравнениями

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0, \end{cases}$$

пересекаются, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Показать.

6. *Плюккеровыми координатами* прямой

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0 \end{cases}$$

называются величины

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \qquad (p_{ij} = -p_{ji}),$$

а также любые величины, им пропорциональные.

Показать, что плюккеровы координаты не зависят от того, какими плоскостями пучка задается прямая.

Показать, что плюккеровы координаты связаны соотношением

$$p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} + p_{13}p_{42} = 0$$

и всякую систему величин, удовлетворяющих этому условию, можно рассматривать как плюккеровы координаты некоторой прямой.

Показать, что если прямые $g(p_{ij})$ и $h(q_{ij})$ пересекаются, то

$$p_{12}q_{34} + p_{13}q_{42} + p_{14}q_{23} + p_{42}q_{13} + p_{23}q_{14} + p_{34}q_{12} = 0.$$

Показать, что если прямые $g(p_{ij})$ и $h(q_{ij})$ пересекаются, то координаты r_{ij} любой прямой пучка, определяемого прямыми g и h, допускают представление

$$r_{ij} = \lambda p_{ij} + \mu q_{ij}.$$

§ 6. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых

Пусть имеем прямую и плоскость, заданные уравнениями

$$ax + by + cz + d = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}.$$

Так как вектор (a, b, c) перпендикулярен плоскости, а вектор (k, l, m) параллелен прямой, то *прямая и плоскость будут параллельны, если эти векторы перпендикулярны, т. е. если*

$$ak + bl + cm = 0. \qquad (*)$$

Если при этом точка (x_0, y_0, z_0), принадлежащая прямой, удовлетворяет уравнению плоскости

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0,$$

то *прямая лежит в плоскости.*

Прямая и плоскость перпендикулярны, если векторы (a, b, c) *и* (k, l, m) *параллельны, т. е. если*

$$\frac{a}{k}=\frac{b}{l}=\frac{c}{m}. \tag{**}$$

Можно получить условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости, если прямая задана пересечением плоскостей

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.$$

Достаточно заметить, что вектор с координатами

$$k=\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},\quad l=\begin{vmatrix} c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix},\quad m=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$$

параллелен прямой, и воспользоваться условиями (*) и (**).

Пусть две прямые заданы уравнениями в канонической форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-x'}{k'}=\frac{y-y'}{l'}=\frac{z-z'}{m'},\\ \frac{x-x''}{k''}=\frac{y-y''}{l''}=\frac{z-z''}{m''}.\end{aligned}\right\} \tag{***}$$

Так как вектор (k', l', m') параллелен первой прямой, а вектор (k'', l'', m'') параллелен второй прямой, то *прямые параллельны, если*

$$\frac{k'}{k''}=\frac{l'}{l''}=\frac{m'}{m''}.$$

В частности, прямые совпадают, если при этом точка первой прямой, например (x', y', z'), удовлетворяет уравнению второй прямой, т. е. если

$$\frac{x'-x''}{k''}=\frac{y'-y''}{l''}=\frac{z'-z''}{m''}.$$

Прямые перпендикулярны, если векторы (k', l', m') *и* (k'', l'', m'') *перпендикулярны, т. е. если*

$$k'k''+l'l''+m'm''=0.$$

Если заданы две прямые уравнениями одной из рассмотренных форм, то нетрудно найти угол между ними. Достаточно найти угол между векторами, параллельными прямым.

Например, в случае задания прямых уравнениями в канонической форме (***) для одного из двух углов ϑ, образуемых прямыми, получаем

$$\cos\vartheta=\frac{k'k''+l'l''+m'm''}{\sqrt{k'^2+l'^2+m'^2}\,\sqrt{k''^2+l''^2+m''^2}}.$$

Упражнения

1. Показать, что если для прямых, задаваемых уравнениями (***),

$$\begin{vmatrix} x'-x'' & y'-y'' & z'-z'' \\ k' & l' & m' \\ k'' & l'' & m'' \end{vmatrix}=0,$$

то прямые либо параллельны, либо пересекаются.

2. Найти расстояние между двумя прямыми, заданными уравнениями в канонической форме.

3. Найти условие параллельности (перпендикулярности) прямой

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

к плоскости

$$ax+by+cz+d=0.$$

4. Найти условие параллельности (перпендикулярности) прямых

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0, \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0. \end{cases}$$

5. Найти уравнение конической поверхности с вершиной (x_0, y_0, z_0), образующие которой пересекают плоскость

$$ax+by+cz+d=0$$

под углом α.

6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и параллельной плоскостям:

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.$$

7. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке $(0, 0, 2R)$, если она проходит через окружность, задаваемую пересечением сферы

$$x^2+y^2+z^2=2Rz$$

с плоскостью

$$ax+by+cz+d=0.$$

Выяснить, что представляет собой пересечение этой конической поверхности с плоскостью xy.

8. *Стереографической проекцией сферы* называется проекция из произвольной ее точки на касательную плоскость в диаметрально

противоположной точке. Показать, что при стереографическом проектировании окружностям на сфере соответствуют окружности и прямые на плоскости проекции (см. упр. 7).

9. Какое преобразование на плоскости стереографической проекции соответствует зеркальному отражению сферы в ее диаметральной плоскости?

§ 7. Основные задачи на прямую и плоскость

Составить уравнение произвольной плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0).

Любая плоскость задается уравнением вида

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Так как точка (x_0, y_0, z_0) принадлежит плоскости, то

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

Отсюда уравнение искомой плоскости

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0,$$

или

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Очевидно, при любых a, b, c это уравнение удовлетворяется точкой (x_0, y_0, z_0).

Составить уравнение произвольной прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0).

Искомое уравнение:

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}.$$

Действительно, это уравнение задает прямую, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0), координаты которой, очевидно, удовлетворяют уравнению. Давая k, l, m произвольные (не все равные нулю) значения, получаем прямую произвольного направления.

Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки (x', y', z'), (x'', y'', z'').

Уравнение прямой можно записать в форме

$$\frac{x - x'}{k} = \frac{y - y'}{l} = \frac{z - z'}{m},$$

Так как вторая точка лежит на прямой, то

$$\frac{x''-x'}{k}=\frac{y''-y'}{l}=\frac{z''-z'}{m}.$$

Это позволяет исключить k, l, m, и мы получаем уравнение

$$\frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}=\frac{z-z'}{z''-z'}.$$

Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A'(x', y', z')$, $A''(x'', y'', z'')$, $A'''(x''', y''', z''')$, не лежащие на прямой.

Пусть $A(x, y, z)$ — произвольная точка искомой плоскости. Три вектора

$$\overrightarrow{A'A},\ \overrightarrow{A'A''},\ \overrightarrow{A'A'''}$$

лежат в одной плоскости. Следовательно,

$$(\overrightarrow{A'A},\ \overrightarrow{A'A''},\ \overrightarrow{A'A'''})=0.$$

И мы получаем искомое уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x' & y-y' & z-z' \\ x''-x' & y''-y' & z''-z' \\ x'''-x' & y'''-y' & z'''-z' \end{vmatrix}=0.$$

Составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку (x_0, y_0, z_0), параллельную плоскости

$$ax+by+cz+d=0.$$

Искомое уравнение:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

В самом деле, эта плоскость проходит через данную точку и параллельна данной плоскости.

Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_0, y_0, z_0) параллельно данной прямой

$$\frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l}=\frac{z-z'}{m}.$$

Искомое уравнение:

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}.$$

Прямая, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) *перпендикулярно плоскости*

$$ax+by+cz+d=0,$$

задается уравнением

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Плоскость, перпендикулярная прямой

$$\frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l}=\frac{z-z'}{m},$$

проходящая через точку (x_0, y_0, z_0), *задается уравнением*

$$k(x-x_0)+l(y-y_0)+m(z-z_0)=0.$$

Составим уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0), *параллельно прямым:*

$$\frac{x-x'}{k'}=\frac{y-y'}{l'}=\frac{z-z'}{m'},$$

$$\frac{x-x''}{k''}=\frac{y-y''}{l''}=\frac{z-z''}{m''}.$$

Так как векторы (k', l', m') и (k'', l'', m'') параллельны плоскости, то их векторное произведение перпендикулярно плоскости. Отсюда искомое уравнение

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} l' & m' \\ l'' & m'' \end{vmatrix}+(y-y_0)\begin{vmatrix} m' & k' \\ m'' & k'' \end{vmatrix}+(z-z_0)\begin{vmatrix} k' & l' \\ k'' & l'' \end{vmatrix}=0.$$

Или в компактной записи:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ k' & l' & m' \\ k'' & l'' & m'' \end{vmatrix}=0.$$

Упражнения

1. Составить уравнение плоскости, равноудаленной от двух скрещивающихся прямых, заданных уравнениями в канонической форме.

2. Показать, что любая плоскость, проходящая через прямую

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$

задается уравнением вида

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0.$$

3. Показать, что плоскость, проходящая через прямую

$$\frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l}=\frac{z-z'}{m}$$

и точку (x_0, y_0, z_0), не лежащую на прямой, задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'-x_0 & y'-y_0 & z'-z_0 \\ k & l & m \end{vmatrix}=0.$$

4. Показать, что любая прямая, пересекающая данные:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_1'x+b_1'y+c_1'z+d_1'=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0, \\ a_2'x+b_2'y+c_2'z+d_2'=0, \end{cases}$$

задается уравнениями

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda'(a_1'x+b_1'y+c_1'z+d_1')=0,$$

$$\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)+\mu'(a_2'x+b_2'y+c_2'z+d_2')=0.$$

5. Показать, что коническая поверхность, образованная прямыми, проходящими через начало координат и пересекающими кривую $\varphi(x, y)=0$, $z=1$, задается уравнением

$$\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0.$$

6. Показать, что цилиндрическая поверхность, образованная прямыми, параллельными

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu} \quad (\nu \neq 0)$$

и пересекающими кривую $\varphi(x, y)=0$ плоскости xy, задается уравнением

$$\varphi\left(x-\frac{\lambda}{\nu}z, \ y-\frac{\mu}{\nu}z\right)=0.$$

7. Показать, что поверхность, образуемая при вращении кривой $\varphi(x, z)=0$, $y=0$ около оси z, задается уравнением

$$\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0.$$

Глава VII

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Специальная система координат

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2_{13}xz + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (*)$$

Очевидно, *это определение инвариантно относительно выбора системы координат*. Действительно, уравнение поверхности в любой другой системе координат $x'y'z'$ получается из уравнения (*) заменой x, y и z линейными выражениями относительно x', y', z' и, следовательно, в координатах x', y', z' также будет иметь вид (*).

Любая плоскость пересекает поверхность второго порядка по кривой второго порядка. Действительно, так как определение поверхности инвариантно относительно выбора системы координат, то можно считать, что секущей плоскостью является плоскость xy $(z=0)$. А эта плоскость, очевидно, пересекает поверхность по кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0.$$

В частности, прямой круговой конус с осью z

$$\lambda z^2 = x^2 + y^2$$

является поверхностью второго порядка и, следовательно, любой плоскостью пересекается по кривой второго порядка. Если секущая плоскость не проходит через вершину, пара прямых исключается. Остается эллипс, гипербола или парабола.

Чтобы исследовать геометрические свойства поверхности второго порядка, естественно отнести ее к такой системе координат, в которой ее уравнение будет наиболее простым.

Сейчас *мы укажем систему координат, в которой уравнение поверхности значительно упростится. Именно, коэффициенты при yz, xz и xy в уравнении поверхности будут равны нулю.*

Рассмотрим функцию $F(A)$ точки $A(x, y, z)$, определяемую во всем пространстве, кроме начала координат, равенством

$$F(A) = \frac{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

На единичной сфере $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ она ограничена и, следовательно, достигает абсолютного минимума в некоторой точке A_0. А так как она постоянна вдоль любого луча, исходящего из начала координат $(F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = F(x, y, z))$, то в A_0 F достигает абсолютного минимума значений по отношению ко всему пространству (а не только на единичной сфере).

Введем новые декартовы координаты $x'y'z'$, сохранив начало O и приняв полупрямую OA_0 за положительную полуось z. Как известно, связь между координатами x, y, z и x', y', z' устанавливается формулами вида

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z', \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z', \\ z &= \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z'. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Уравнение поверхности в новых координатах x', y', z' получается из уравнения (*) заменой x, y, z через x', y', z', согласно формулам (**) и имеет вид

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{13}x'z' + \\ + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0.$$

Функция F в новых координатах имеет вид

$$F(A) = \frac{a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{13}z'x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

и получается заменой в старом выражении F x, y, z на x', y', z' тоже согласно формулам (**). Знаменатель по форме не изменился, так как представляет собой квадрат расстояния точки A от начала координат, который в обоих системах выражается одинаково.

Согласно выбору системы координат $x'y'z'$ минимум функции F достигается при $x'=0$, $y'=0$, $z'=1$. Поэтому, если в выражении F положить $x'=0$, $z'=1$, то получим функцию одного переменного

$$f(y')=\frac{a'_{22}y'^2+2a'_{23}y'+a'_{33}}{1+y'^2},$$

которая достигает минимума при $y'=0$. Следовательно,

$$\frac{df(y')}{dy'}=0 \quad \text{при} \quad y'=0.$$

Но

$$\left.\frac{df(y')}{dy'}\right|_{y'=0}=2a'_{23}.$$

Таким образом, коэффициент при $y'z'$ в уравнении поверхности равен нулю. Аналогично показывается, что коэффициент при $x'z'$ тоже равен нулю.

Итак, уравнение поверхности в системе координат $x'y'z'$ будет

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+$$
$$+2a'_{34}z'+a'_{33}z'^2+a_{44}=0.$$

Если теперь ввести новые координаты x'', y'', z'' по формулам

$$x'=x''\cos\vartheta+y''\sin\vartheta,$$
$$y'=-x''\sin\vartheta+y''\cos\vartheta,$$
$$z'=z'',$$

то так же, как и при рассмотрении кривых второго порядка (§ 8, гл. V), соответствующим выбором угла ϑ можно добиться того, что коэффициент при $x''y''$ тоже будет равен нулю.

Итак, *существует такая система прямоугольных декартовых координат, в которой уравнение поверхности имеет вид*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0.$$

§ 2. Классификация поверхностей второго порядка

Как показано в предыдущем параграфе, переходом к соответствующей системе координат уравнение поверхности второго порядка можно привести к виду

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0. \quad (*)$$

Будем различать три основных случая:

A — все три коэффициента при квадратах координат в уравнении (*) отличны от нуля;

B — два коэффициента отличны от нуля, а третий, например a_{33}, равен нулю;

C — один коэффициент, например a_{33}, отличен от нуля, а два другие равны нулю.

В случае A переходом к новой системе координат, согласно формулам

$$x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \quad y' = y + \frac{a_2}{a_{22}}, \quad z' = z + \frac{a_3}{a_{33}},$$

что соответствует переносу начала координат, приводим уравнение поверхности к виду

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + \delta = 0.$$

Теперь различаем следующие подслучаи случая A.

A_1: $\delta = 0$. Поверхность представляет собой *конус* — *мнимый*, если α, β, γ одного знака, *вещественный*, если среди чисел α, β, γ есть числа разных знаков.

A_2: $\delta \neq 0$, α, β, γ одного знака. Поверхность представляет собой *эллипсоид* — *мнимый*, если α, β, γ, δ одного знака, *вещественный*, если знак δ противоположен знаку α, β, γ.

A_3: $\delta \neq 0$, из четырех коэффициентов α, β, γ, δ два коэффициента одного знака, а два другие — противоположного. Поверхность — *однополостный гиперболоид.*

A_4: $\delta \neq 0$, один из первых трех коэффициентов противоположен по знаку остальным. Поверхность — *двуполостный гиперболоид.*

В случае B переходом к новым координатам по формулам

$$x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \quad y' = y + \frac{a_2}{a_{22}}, \quad z' = z$$

приводим уравнение поверхности к виду

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + 2pz' + q = 0.$$

Здесь надо различать следующие подслучаи:

B_1. $p = 0$, $q = 0$. *Поверхность распадается на пару плоскостей*

$$x' \pm \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\, y' = 0$$

— *мнимых*, если α и β одного знака, *вещественных*, если α и β противоположных знаков.

B_2: $p=0$, $q\neq 0$. Поверхность — *цилиндр* — *мнимый*, если α, β и q одного знака, *вещественный*, если есть коэффициенты разных знаков. В частности, если α и β одного знака, — *эллиптический* цилиндр, если α и β разных знаков, — *гиперболический* цилиндр.

B_3: $p\neq 0$. *Параболоиды*. Переходя к новым координатам

$$x''=x',\ y''=y',\ z''=z'+\frac{q}{2p},$$

приводим уравнение поверхности к виду

$$\alpha x''^2+\beta y''^2+2pz''=0.$$

Параболоид — *эллиптический*, если α и β одного знака, параболоид — *гиперболический*, если α и β разных знаков.

В случае С перейдем к новым координатам x', y', z':

$$x'=x,\quad y'=y,\quad z'=z+\frac{a_3}{a_{33}}.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\gamma z'^2+px+qy+r=0$$

и можно различать следующие подслучаи:

C_1: $p=0$, $q=0$. *Поверхность распадается на пару параллельных плоскостей* — *мнимых*, если γ и r одного знака, *вещественных*, если γ и r *противоположных* знаков, *совпадающих*, если $r=0$.

C_2: хотя бы один из коэффициентов p или q отличен от нуля. Сохраняя направление оси z, возьмем плоскость $px+qy+r$ за плоскость $z'y'$. Тогда уравнение примет вид

$$\gamma z'^2+\delta x'=0.$$

Поверхность — *параболический цилиндр*.

Упражнения

1. Кривая в плоскости xy

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0$$

представляет собой эллипс (гиперболу, параболу). Что представляет собой поверхность второго порядка

$$z=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a.$$

2. Показать, что поверхность второго порядка

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)^2+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)^2=0$$

распадается на пару плоскостей.

3. Чтобы получить проекцию на плоскость xy кривой пересечения поверхности

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+\ldots+a_{44}=0 \qquad (*)$$

с плоскостью

$$z=ax+by+c,$$

надо подставить в уравнение (*) $z=ax+by+c$. Показать.

4. Показать, что сечения поверхности второго порядка параллельными плоскостями подобны и подобно расположены.

5. Показать, что коническая поверхность, образованная прямыми, проходящими через данную точку, и пересекающими кривую второго порядка, есть поверхность второго порядка.

6. Пусть

$$f(x, y, z)=0, \quad \varphi(x, y, z)=0$$

— уравнения двух поверхностей второго порядка. Показать, что уравнение поверхности второго порядка, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и пересечение двух данных поверхностей, будет

$$f(x, y, z)\varphi(x_0, y_0, z_0)-\varphi(x, y, z)f(x_0, y_0, z_0)=0.$$

7. Показать, что прямая, задаваемая уравнениями

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z+\delta_1)=0,$$

$$(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)+\frac{1}{\lambda}(\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z+\delta_2)=0,$$

лежит целиком на поверхности второго порядка

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)-$$
$$-(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z+\delta_1)(\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z+\delta_2)=0.$$

8. Выяснить, что представляет собой поверхность, образованная прямыми, пересекающими три данные не параллельные и не пересекающиеся прямые.

9. Составить уравнение поверхности, которую описывает прямая

$$z=ax+b, \quad z=cy+d \qquad (a, b, c, d\neq 0)$$

при вращении около оси z.

§ 3. Эллипсоид

Уравнение эллипсоида (рис. 72)

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$$

делением на δ, полагая $\frac{\delta}{\alpha} = -a^2$, $\frac{\delta}{\beta} = -b^2$, $\frac{\delta}{\gamma} = -c^2$, приведем к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \qquad (*)$$

a, b, c называются *полуосями* эллипсоида и представляют собой отрезки, отсекаемые на осях координат поверхностью эллипсоида.

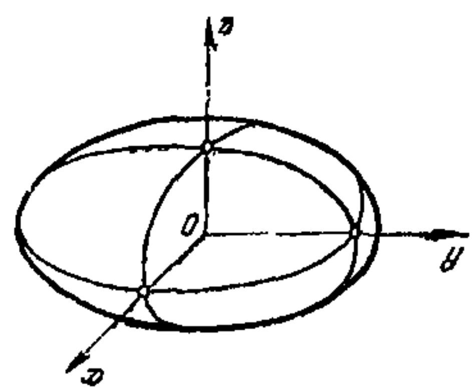


Рис. 72.

Из уравнения $(*)$ видно, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида, а начало координат — центром симметрии.

Подобно тому, как эллипс получается равномерным сжатием из окружности, *любой эллипсоид получается равномерным сжатием из сферы относительно двух перпендикулярных плоскостей.* Именно, если a — бо́льшая из полуосей эллипсоида, то он может быть получен из сферы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0$$

равномерным сжатием ее относительно плоскости xy с коэффициентом сжатия $\frac{c}{a}$ и относительно плоскости xz с коэффициентом сжатия $\frac{b}{a}$.

Если две полуоси эллипсоида равны, например $a = b$, то он называется *эллипсоидом вращения*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Пересекая его любой плоскостью $z=h$, параллельной плоскости xy, получаем окружность

$$x^2+y^2=1-\frac{h^2}{c^2},\quad z=h$$

с центром на оси z. Таким образом, в этом случае *эллипсоид образуется при вращении эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

лежащего в плоскости xz, около оси z (рис. 73).

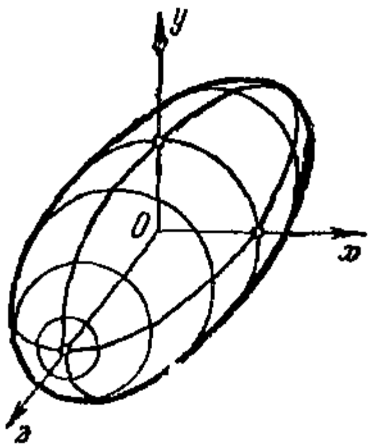


Рис. 73.

Если все три полуоси эллипсоида равны, то он представляет собой сферу.

Линия пересечения эллипсоида с произвольной плоскостью представляет собой эллипс.

Действительно, эта линия представляет собой кривую второго порядка. Так как эта линия конечна (эллипсоид конечен), то она не может быть ни гиперболой, ни параболой, ни парой прямых, а следовательно, она — эллипс.

Упражнения

1. Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

если $a<c$, представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек — фокусов — постоянна. Найти фокусы эллипсоида.

2. Пусть имеем эллипсоид

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta=0.$$

Показать, что если поверхность

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta-\lambda(x^2+y^2+z^2+\mu)=0$$

распадается на пару плоскостей, то эти плоскости пересекают эллипсоид по окружностям. Обосновать на этом способ разыскания круговых сечений эллипсоида.

3. Где расположены точки пространства, для которых

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1<0.$$

4. Показать, что эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

допускает задание уравнениями в параметрической форме:

$$x=a\cos u\cos v,\quad y=b\cos u\sin v,\quad z=c\sin u.$$

5. Что представляет собой поверхность

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=1,$$

если

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

6. Найти уравнение кривой на плоскости xy, ограничивающей область, в которую эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

проектируется пучком прямых, параллельных

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}\quad(\nu\neq 0).$$

§ 4. Гиперболоиды

Подобно тому как в случае эллипсоида уравнение гиперболоидов *можно привести к виду*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \text{ (однополостный гиперболоид, рис. 74)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0 \text{ (двуполостный гиперболоид, рис. 75)}.$$

Оба гиперболоида имеют координатные плоскости *плоскостями симметрии*, а начало координат — *центром симметрии*.

Если полуоси a и b гиперболоида равны, то он называется *гиперболоидом вращения* и получается вращением около оси z гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,\quad y=0$$

в случае однополостного гиперболоида и гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0,\ y=0$$

в случае двуполостного гиперболоида.

Общий гиперболоид ($a \neq b$) может быть получен из гиперболоида вращения ($a=b$) равномерным сжатием (или растяжением) относительно плоскости xz в отношении $\frac{b}{a}$.

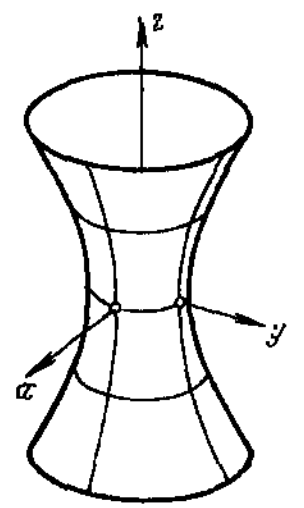


Рис. 74.

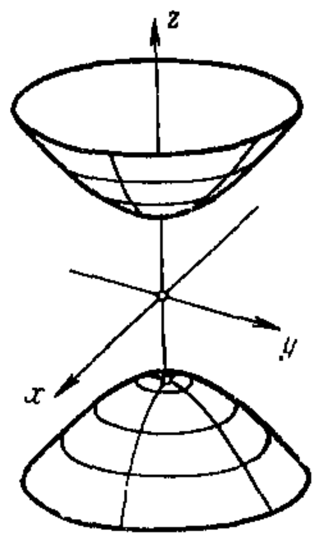


Рис. 75.

При пересечении гиперболоидов произвольной плоскостью могут получаться различные конические сечения. Например, плоскости $z=h$, параллельные плоскости xy, пересекают однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

по эллипсам

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}-1=0,\quad z=h,$$

а плоскости $y=h$ ($|h| \neq b$), параллельные плоскости xz, по гиперболам:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1+\frac{h^2}{b^2}=0,\ y=h.$$

Плоскость $y=b$ пересекает гиперболоид по двум прямым:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad y=b.$$

Упражнения

1. Составить уравнение гиперболоида, который образуется при вращении прямой

$$x=a, \quad \lambda x+\mu z=0$$

около оси z.

2. Найти круговые сечения гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

(см. упр. 2 § 3).

3. Показать, что через каждую точку пространства, не принадлежащую координатным плоскостям, проходят три поверхности семейства

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

(λ — параметр семейства) — эллипсоид, однополостный гиперболоид и двуполостный гиперболоид.

§ 5. Параболоиды

Уравнения параболоидов приводятся к виду

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad \text{(эллиптический параболоид, рис. 76)},$$

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \quad \text{(гиперболический параболоид, рис. 77)}.$$

Плоскости xz и yz являются плоскостями симметрии параболоидов. Их пересечение (ось z) называется *осью параболоида*, а пересечение оси с поверхностью параболоида — *вершиной*.

При $a=b$ эллиптический параболоид называется *параболоидом вращения*. Он получается при вращении параболы

$$z=\frac{x^2}{a^2}, \quad y=0$$

около оси z.

Общий эллиптический параболоид можно получить из параболоида вращения

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}$$

равномерным сжатием (растяжением) относительно плоскости xz.

Оба параболоида (эллиптический и гиперболический) плоскостями, параллельными координатным плоскостям xz

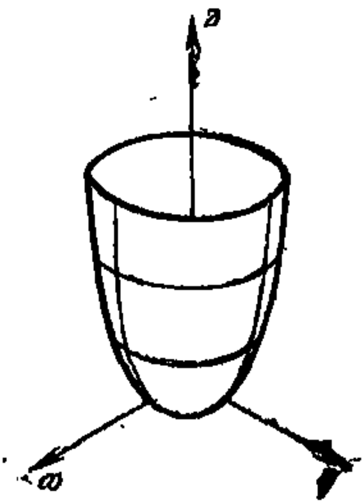


Рис. 76.

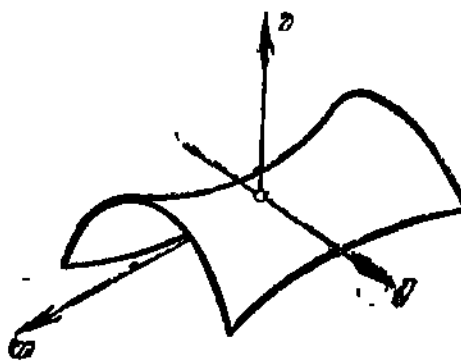


Рис. 77.

и yz, пересекаются по равным, параллельно расположенным параболам. Действительно, плоскости $x=h$ пересекают эллиптический параболоид по параболам

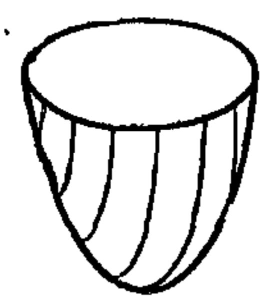


Рис. 78.

$$z-\frac{h^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}, \quad x=h.$$

Если каждую из этих парабол сдвинуть в направлении z на отрезок $\frac{h^2}{a^2}$, то получим одну и ту же параболу

$$z=\frac{y^2}{b^2}, \quad x=h.$$

Отсюда следует, что *эллиптический параболоид образуется при параллельном сдвиге параболы* $z=\frac{y^2}{b^2}$, $x=0$, *когда ее вершина движется вдоль параболы* $z=\frac{x^2}{a^2}$, $y=0$ (рис. 78).

Аналогично образуется гиперболический параболоид (рис. 79)

Плоскости, параллельные плоскости xy, кроме самой плоскости xy, пересекают эллиптический параболоид по

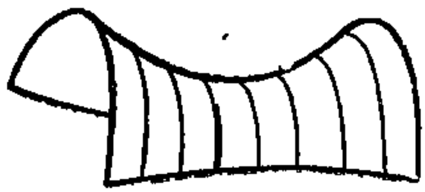


Рис. 79.

эллипсам, а гиперболический — по гиперболам. Плоскость xy пересекает гиперболический параболоид по двум прямым.

Упражнения

1. Показать, что эллиптический параболоид вращения представляет собой геометрическое место точек, равно удаленных от некоторой плоскости и точки (фокуса). Найти фокус эллипсоида

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}.$$

2. Показать, что никакая плоскость не пересекает эллиптический параболоид по гиперболам, а гиперболический параболоид по эллипсам.

§ 6. Конус и цилиндры

Уравнение конуса и цилиндров второго порядка можно записать в форме

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \text{ (конус, рис. 80)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \text{ (цилиндр эллиптический, рис. 81)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \text{ (цилиндр гиперболический, рис. 82)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}-pz=0 \text{ (цилиндр параболический, рис. 83)}.$$

Общий конус получается из кругового конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

равномерным сжатием (растяжением) относительно плоскости xz.

Цилиндры эллиптический, гиперболический, параболический пересекают плоскость xy по эллипсу, гиперболе, параболе и образуются прямыми, параллельными оси z, пересекающими указанные кривые.

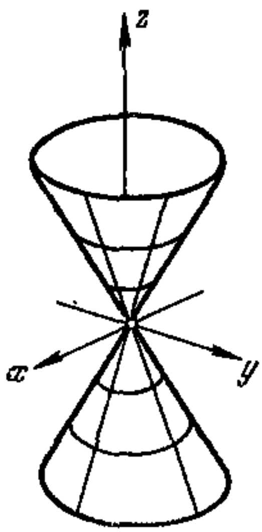


Рис. 80

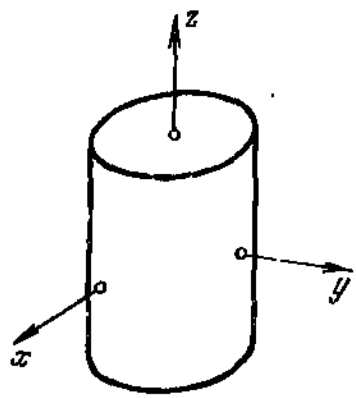


Рис. 81.

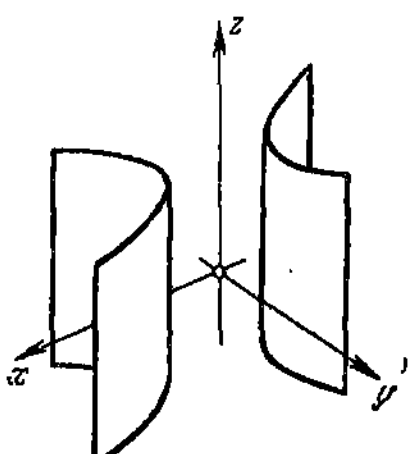


Рис. 82.

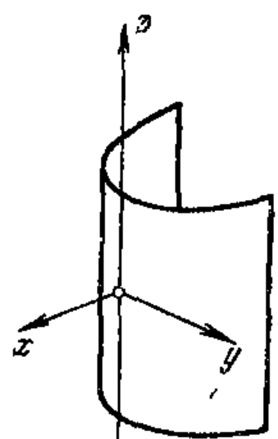


Рис. 83.

Общий эллиптический цилиндр получается из кругового

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-1=0$$

равномерным сжатием (растяжением) относительно плоскости xz.

В заключение заметим, что с однополостным и двуполостным гиперболоидами

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\pm 1=0$$

естественным образом связан конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

который называется *асимптотическим конусом*.

Каждая плоскость, проходящая через ось z, пересекает гиперболоиды по гиперболам, а конус по двум образующим, которые являются асимптотами этих гипербол. В частности, например, плоскость xz ($y=0$) пересекает гиперболоиды по гиперболам

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\pm 1=0,$$

а конус по двум прямым

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

которые являются асимптотами этих гипербол.

Упражнения

1. Показать, что уравнение кругового конуса с вершиной в начале координат, осью

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$$

и углом при вершине 2α можно записать в виде

$$\frac{(\lambda x+\mu y+\nu z)^2}{(x^2+y^2+z^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}=(\cos\alpha)^2.$$

2. Показать, что уравнение кругового цилиндра с осью

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$$

и радиусом R можно записать в виде

$$x^2+y^2+z^2-R^2=\frac{(\lambda x+\mu y+\nu z)^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}.$$

§ 7. Прямолинейные образующие на поверхностях второго порядка

Конус и цилиндры являются не единственными поверхностями второго порядка, содержащими прямолинейные образующие. Оказывается, этим свойством обладают также однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Действительно, *каждая прямая g_λ, задаваемая уравнениями*

$$z=\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right),\quad 1=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right), \tag{*}$$

лежит на гиперболическом параболоиде

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}, \tag{**}$$

так как каждая точка $(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющая уравнениям (*), удовлетворяет уравнению (**), которое из них получается как следствие почленным перемножением.

Помимо указанного семейства g_λ, *на гиперболическом параболоиде располагается еще одно семейство прямых g'_λ*:

$$z=\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right),\quad 1=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Аналогично показывается, что *на однополостном гиперболоиде*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

располагаются два семейства прямолинейных образующих —

$$g_\lambda:\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right),\qquad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

$$g'_\lambda:\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

В обоих случаях (гиперболического параболоида и однополостного гиперболоида) *прямолинейные образующие одного семейства не пересекаются, а прямолинейные образующие разных семейств пересекаются.*

Наличие прямолинейных образующих на гиперболическом параболоиде и однополостном гиперболоиде позволяет дать новый способ образования этих поверхностей. Именно, возьмем три прямолинейные образующие одного семейства — g_1, g_2, g_3. Тогда каждая прямолинейная образующая g второго семейства пересекает g_1, g_2, g_3. Следовательно, поверхность образуется прямыми g, пересекающими три данные (рис. 84).

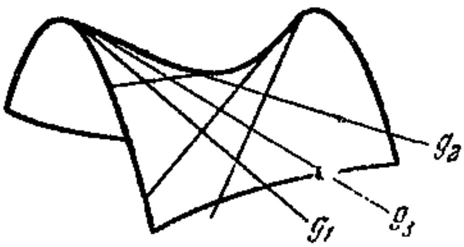


Рис. 84.

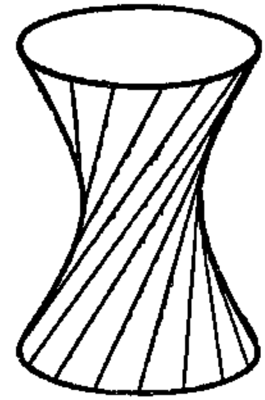


Рис. 85.

Что касается однополостного гиперболоида вращения, то он образуется также вращением любой его прямолинейной образующей около оси поверхности (рис. 85).

В заключение заметим, что прямолинейные образующие есть и на других поверхностях второго порядка, *только мнимые*. Например, на эллипсоиде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

располагаются два семейства мнимых прямых —

$$g_\lambda:\quad \frac{x}{a}+i\,\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-i\,\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

$$g'_\lambda:\quad \frac{x}{a}+i\,\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{iz}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Упражнения

1. Показать, что плоскость

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}+\frac{z+z_0}{2}=0,$$

проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+z=0,$$

пересекает гиперболоид по двум прямолинейным образующим разных семейств.

2. Найти прямолинейные образующие гиперболического параболоида $z=axy$.

3. Составить уравнение поверхности, образованной прямыми, параллельными плоскости xz, пересекающими две данные скрещивающиеся прямые.

§ 8. Диаметры и диаметральные плоскости поверхности второго порядка

Прямая пересекается с поверхностью второго порядка, как правило, в двух точках. Если точек пересечения две, то отрезок прямой с концами в точках пересечения называется *хордой*.

Средины параллельных хорд поверхности второго порядка лежат в плоскости (диаметральной плоскости).

Докажем это. Как показано в § 1, существует система координат, в которой уравнение поверхности имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0. \qquad (*)$$

Пусть хорды параллельны прямой $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$. Обозначим $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ координаты середины произвольной хорды. Тогда координаты концов хорды можно записать в виде $x=\bar{x}+\lambda t$, $y=\bar{y}+\mu t$, $z=\bar{z}+\nu t$ для одного конца и $x=\bar{x}-\lambda t$, $y=\bar{y}-\mu t$, $z=\bar{z}-\nu t$ для другого конца.

Так как концы хорды принадлежат поверхности, то их координаты удовлетворяют уравнению $(*)$. Отсюда

$$a_{11}\bar{x}^2+a_{22}\bar{y}^2+a_{33}\bar{z}^2+2a_1\bar{x}+2a_2\bar{y}+2a_3\bar{z}+a+$$
$$+2t(\lambda a_{11}\bar{x}+\mu a_{22}\bar{y}+\nu a_{33}\bar{z}+\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3)+$$
$$+t^2(a_{11}\lambda^2+a_{22}\mu^2+a_{33}\nu^2)=0.$$

Поскольку это равенство имеет место независимо от того, с каким знаком ($+$ или $-$) берется t, то коэффициент при t равен нулю:

$$\lambda(a_{11}\bar{x}+a_1)+\mu(a_{22}\bar{y}+a_2)+\nu(a_{33}\bar{z}+a_3)=0. \qquad (**)$$

Таким образом, координаты средин хорд удовлетворяют уравнению плоскости, что и требовалось доказать.

Очевидно, *если поверхность имеет центр, то диаметральная плоскость проходит через центр.*

В случае параболоида ($a_{33}=0$) все диаметральные плоскости параллельны оси параболоида (оси z).

Эллиптический (гиперболический) цилиндр имеет бесчисленное множество центров, расположенных на оси цилиндра. Поэтому каждая диаметральная плоскость цилиндра проходит через его ось. Это обстоятельство отражено и в уравнении диаметральных плоскостей. В случае параболического цилиндра все диаметральные плоскости параллельны.

Диаметральные плоскости конуса проходят через его вершину.

Имеет место следующее общее свойство диаметральных плоскостей, *диаметральные плоскости, соответствующие хордам, параллельным плоскости α, либо пересекаются по некоторой прямой g, либо параллельны. Диаметральная плоскость, соответствующая хордам, параллельным g, параллельна α.*

Докажем это. Пусть $e(\lambda, \mu, \nu)$ и $e'(\lambda', \mu', \nu')$ — отличные от нуля, не параллельные векторы в плоскости α. Тогда любой вектор в этой плоскости можно представить в виде $e_\xi(\xi\lambda + \xi'\lambda', \xi\mu + \xi'\mu', \xi\nu + \xi'\nu')$. Диаметральная плоскость, соответствующая хордам, параллельным вектору e_ξ, будет

$$\xi\{\lambda(a_{11}x + a_1) + \mu(a_{22}y + a_2) + \nu(a_{33}z + a_3)\} +$$
$$+ \xi'\{\lambda'(a_{11}x + a_1) + \mu'(a_{22}y + a_2) + \nu'(a_{33}z + a_3)\} = 0$$

и, следовательно, при любых ξ, ξ' проходит через прямую пересечения плоскостей

$$\left.\begin{aligned} \lambda(a_{11}x + a_1) + \mu(a_{22}y + a_2) + \nu(a_{33}z + a_3) = 0, \\ \lambda'(a_{11}x + a_1) + \mu'(a_{22}y + a_2) + \nu'(a_{33}z + a_3) = 0, \end{aligned}\right\} (***)$$

если они пересекаются, и параллельна им, если плоскости параллельны. Пусть плоскости (***) пересекаются и $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ — вектор, параллельный прямой пересечения. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \lambda''\lambda a_{11} + \mu''\mu a_{22} + \nu''\nu a_{33} = 0, \\ \lambda''\lambda' a_{11} + \mu''\mu' a_{22} + \nu''\nu' a_{33} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (****)$$

(параллельность вектора $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ плоскостям (***)).

Диаметральная плоскость, соответствующая хордам, параллельным вектору $(\lambda'', \mu'', \nu'')$, будет

$$\lambda''(a_{11}x + a_1) + \mu''(a_{22}y + a_2) + \nu''(a_{33}z + a_3) = 0.$$

Из условий (****) следует, что эта плоскость параллельна векторам $e(\lambda, \mu, \nu)$, $e'(\lambda', \mu', \nu')$ и, следовательно, параллельна содержащей их плоскости α.

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫХ УРАВНЕНИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА

§ 1. Преобразование квадратичной формы к новым переменным

Квадратичной формой переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ik}=a_{ki}).$$

Дискриминантом формы называется определитель, составленный из ее коэффициентов a_{ij}:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Сделаем замену переменных в квадратичной форме по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x_1'+\alpha_{12}x_2'+\ldots+\alpha_{1n}x_n', \\ x_2 &= \alpha_{21}x_1'+\alpha_{22}x_2'+\ldots+\alpha_{2n}x_n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_{n1}x_1'+\alpha_{n2}x_2'+\ldots+\alpha_{nn}x_n'. \end{aligned}$$

При этом мы получим квадратичную форму относительно переменных x_i'. Именно:

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j} a_{ij}\Big(\sum_k \alpha_{ik}x_k'\Big)\Big(\sum_l \alpha_{jl}x_l'\Big)=$$
$$=\sum_{k,l}\Big(\sum_{i,j} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl}\Big)x_k'x_l'=\sum_{k,l} a_{kl}'x_k'x_l',$$

где

$$a_{kl}'=\sum_{i,j} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl}.$$

Выясним, чему равен дискриминант D' полученной формы. Положим

$$\sum_i a_{ij}\alpha_{ik} = b_{jk}. \qquad (*)$$

Тогда

$$a'_{kl} = \sum_j b_{jk}\alpha_{jl},$$

и следовательно,

$$D' = \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Но, согласно формулам $(*)$,

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$D' = D \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}^2,$$

т. е. *дискриминант преобразованной формы равен дискриминанту исходной формы, умноженному на квадрат детерминанта преобразования.*

Упражнения

1. Показать, что дискриминант квадратичной формы

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4)$$

равен нулю.

2. Вычислить дискриминант формы переменных x_1, x_2, x_3, x_4

$$\Big(\sum_i a_ix_i\Big)^2 + \Big(\sum_i b_ix_i\Big)^2 + \Big(\sum_i c_ix_i\Big)^2 + \Big(\sum_i d_ix_i\Big)^2.$$

§ 2. Инварианты уравнения кривой и поверхности второго порядка относительно преобразования координат

Пусть мы имеем уравнение поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+\ldots+a_{44}=0 \qquad (*)$$

в какой-нибудь системе прямоугольных декартовых координат. Уравнение этой поверхности в любой другой системе прямоугольных декартовых координат $x'y'z'$ получается из уравнения (*), если в него вместо x, y, z подставить их выражения через x', y', z' согласно формулам § 4 гл. V:

$$\begin{aligned} x&=\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+\alpha_{13}z'+\alpha_1,\\ y&=\alpha_{21}x'+\alpha_{22}y'+\alpha_{23}z'+\alpha_2,\\ z&=\alpha_{31}x'+\alpha_{32}y'+\alpha_{33}z'+\alpha_3. \end{aligned}$$

При этом уравнение поверхности будет

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+\ldots+a'_{44}=0.$$

Функция $\varphi(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{44})$, не являющаяся константой, называется *инвариантом уравнения поверхности* относительно преобразования координат, если ее значения не зависят от системы координат, к которой отнесена поверхность, т. е., если какова бы ни была система координат $x'y'z'$,

$$\varphi(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{44})=\varphi(a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{44}).$$

Сейчас мы найдем один из основных инвариантов уравнения поверхности.

Будем рассматривать наряду с переходом к новой системе координат $x'y'z'$ преобразование квадратичной формы

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+\\ +2a_{31}x_3x_1-\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

к новым переменным x'_1, x'_2, x'_3 по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\alpha_{11}x'_1+\alpha_{12}x'_2+\alpha_{13}x'_3,\\ x_2&=\alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2+\alpha_{23}x'_3,\\ x_3&=\alpha_{31}x'_1+\alpha_{32}x'_2+\alpha_{33}x'_3. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Первая часть формы до члена $\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$ при таком преобразовании примет вид

$$a'_{11}x_1'^2+a'_{22}x_2'^2+a'_{33}x_3'^2+2a'_{12}x'_1x'_2+2a'_{23}x'_2x'_3+2a'_{31}x'_3x'_1,$$

причем коэффициенты a'_{ij} будут те же, что и в уравнении поверхности после перехода к системе координат $x'y'z'$. Что касается слагаемого формы $\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$, то оно перейдет в $\lambda(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)$ в силу условий ортогональности, которым удовлетворяют коэффициенты α_{ij} (§ 4 гл. V).

Так как детерминант преобразования (**) равен ± 1, то дискриминанты форм до и после преобразования равны. Следовательно,

$$I(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

является инвариантом уравнения поверхности при любом λ.

Детерминант $I(\lambda)$ представляет собой многочлен относительно λ:

$$I(\lambda)=-\lambda^3+\lambda^2 I_1-\lambda I_2+I_3,$$

где

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Так как для двух различных систем координат xyz и $x'y'z'$

$$-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda+I_3=-\lambda^3+I'_1\lambda^2-I'_2\lambda+I'_3$$

для всех λ, то $I_1=I'_1$, $I_2=I'_2$, $I_3=I'_3$. И, следовательно, I_1, I_2, I_3 *суть инварианты уравнения поверхности.*

Покажем теперь, что

$$I_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

тоже является инвариантом.

Детерминант I_4 представляет собой дискриминант квадратичной формы

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{44}x_4^2.$$

Перейдем в этой форме к новым переменным x_i' по формулам

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2' + \alpha_{13}x_3' + \alpha_{14}x_4',\\
x_2 &= \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \alpha_{23}x_3' + \alpha_{24}x_4',\\
x_3 &= \alpha_{31}x_1' + \alpha_{32}x_2' + \alpha_{33}x_3' + \alpha_{34}x_4',\\
x_4 &= 0\cdot x_1' + 0\cdot x_2' + 0\cdot x_3' + 1\cdot x_4'.
\end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

При этом получим форму

$$a_{11}'x_1'^2 + 2a_{12}'x_1'x_2' + \ldots + a_{44}'x_4'^2,$$

где a_{ij}' те же, что и в преобразованном уравнении поверхности.

Так как детерминант преобразования (***), равный детерминанту преобразования (**), равен ± 1, то дискриминанты исходной и преобразованной формы равны, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{14}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ a_{41} & \ldots & a_{44}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & \ldots & a_{14}'\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ a_{41}' & \ldots & a_{44}'\end{vmatrix}.$$

И детерминант I_4 действительно является инвариантом уравнения поверхности.

Дословно такими же рассуждениями для уравнения кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

относительно преобразования координат получаются инварианты

$$I(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix},$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Упражнения

1. Вычислить инварианты уравнения поверхности

$$ax^2 + 2bxy - cy^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0.$$

2. Вычислить инварианты уравнения поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 - k^2(ax + by + cz)^2 = 0.$$

§ 3. Исследование кривой второго порядка по ее уравнению в произвольных координатах

Пусть дана кривая второго порядка в произвольных декартовых координатах xyz:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

В § 8 гл. III мы показали, что переходом к некоторой новой системе координат уравнение кривой можно привести к виду

$$\alpha x^2+\beta y^2+ax+by+c=0.$$

Не находя самой системы координат, мы можем просто найти коэффициенты α и β с помощью инварианта $I(\lambda)$. Действительно,

$$\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & 0\\ 0 & \beta-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=I(\lambda).$$

Отсюда видно, что α и β корни уравнения $I(\lambda)=0$, т. е. уравнения

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0.$$

Допустим, оба корня оказались отличными от нуля (это будет, если $I_2\neq 0$). Тогда, как показано в том же § 8 гл. III, уравнение кривой можно сдвигом системы координат привести к виду

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma=0.$$

Нетрудно найти коэффициент γ, используя инвариант I_3. Имеем

$$\begin{vmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{vmatrix}=I_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$\gamma=\frac{I_3}{\alpha\beta}=\frac{I_3}{I_2}.$$

Итак, *если $I_2\neq 0$, то уравнение кривой в соответствующей системе координат примет вид*

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0,$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Допустим теперь, что один из корней уравнения $I(\lambda)$ равен нулю (это будет, если $I_2=0$). Тогда один из коэффициентов α или β равен нулю; пусть для определенности $\alpha=0$. В этом случае, как показано в § 4 гл. III, кривая в соответствующих координатах задается уравнением

$$\beta y^2 + 2\gamma x = 0,$$

или

$$\beta y^2 + \delta = 0,$$

именно, первым уравнением, если $I_3 \neq 0$, и вторым уравнением, если $I_3 = 0$.

Пусть $I_3 \neq 0$ и, следовательно, кривая задается уравнением

$$\beta y^2 + 2\gamma x = 0.$$

Из уравнения

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$$

при $I_2 = 0$ находим $\beta = I_1$; γ находим, используя инвариант I_3. Именно:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = I_3.$$

Отсюда

$$\gamma = \sqrt{-\frac{I_3}{\beta}} = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}.$$

Итак, *в случае $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$ кривая в соответствующих координатах задается уравнением*

$$I_1 y^2 + 2x\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} = 0.$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда $I_2 = I_3 = 0$. Изменим коэффициенты уравнения кривой на малые величины ε_{ij}. Можно так распоряжаться добавками ε_{ij}, что I_2 будет отлично от нуля и уравнение кривой может быть приведено к виду

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0. \qquad (*)$$

А теперь перейдем к пределу при $\varepsilon_{ij} \to 0$. Тогда уравнение (*) перейдет в каноническое уравнение исходной кривой.

Пример. Пусть $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $a_{22} \neq 0$. Положим, $\varepsilon_{11} = t$, а все остальные ε_{ij} равны нулю. Тогда, переходя к пределу в уравнении (*), получим

$$I_1 x^2 + \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{a_{22}} = 0.$$

В заключение заметим, что *обращение инварианта I_3 в нуль есть необходимое и достаточное условие распадения кривой второго порядка на пару прямых. Чтобы в этом убедиться, достаточно вычислить I_3 для канонических форм уравнений кривых.*

Упражнения

1. Какому условию должно удовлетворять λ, чтобы кривая второго порядка

$$(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{33}) + \lambda\,(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + \ldots + b_{33}) = 0$$

распадалась на пару прямых. Показать, что прямые, на которые распадается эта кривая, проходят через точки пересечения кривых

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{33} = 0, \quad b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + \ldots + b_{33} = 0.$$

2. Уравнение четвертой степени

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

эквивалентно системе

$$a_0y^2 + a_1xy + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$
$$y - x^2 = 0.$$

Свести решение уравнения четвертой степени к решению уравнения третьей степени и квадратного (см. упр. 1).

3. Уравнение гиперболы, отнесенной к центру и одной из асимптот, имеет вид

$$y = \alpha x + \frac{\beta}{x}.$$

Выразить α и β через коэффициенты уравнения гиперболы в произвольных координатах.

4. Если за оси координат принять равные перпендикулярные диаметры эллипса, то его уравнение примет вид

$$x^2 + y^2 + 2\alpha xy + \delta = 0$$

Найти α и δ, располагая уравнением эллипса в произвольных координатах.

§ 4. Исследование поверхности второго порядка, заданной уравнением в произвольных координатах

Пусть поверхность второго порядка задана уравнением в произвольной системе прямоугольных координат xyz

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+\ldots+a_{44}=0.$$

Как показано в § 1 гл. VII, переходом к новой системе координат уравнение поверхности может быть приведено к виду

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+ax+by+cz+d=0.$$

Используя инвариант $I(\lambda)$, получаем

$$I(\lambda)=\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda+I_3.$$

Таким образом, α, β, γ суть корни уравнения $I(\lambda)=0$.

Допустим, все корни отличны от нуля ($I_3\neq 0$). В этом случае, как известно (§ 1 гл. VII), переходом к новым координатам уравнение приводится к виду

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta=0.$$

Коэффициент δ находим, используя инвариант I_4. Именно:

$$\begin{vmatrix} \alpha & & & 0 \\ & \beta & & \\ & & \gamma & \\ 0 & & & \delta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{14} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{41} & \ldots & a_{44} \end{vmatrix}=I_4.$$

Отсюда

$$\delta=\frac{I_4}{\alpha\beta\gamma}=\frac{I_4}{I_3},$$

Итак, *в случае $I_3\neq 0$ переходом к некоторой новой системе координат уравнение приводится к виду*

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+\frac{I_4}{I_3}=0,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — корни уравнения $I(\lambda)=0$.

Допустим теперь, что один из корней уравнения $I(\lambda)=0$ равен нулю, а два других отличны от нуля. Это будет, если

$I_3=0$, но $I_2\neq 0$. Тогда переходом к новым координатам (§ 1 гл. VII) уравнение поверхности приводится к одной из форм:

$$\alpha x^2+\beta y^2+2pz=0,$$
$$\alpha x^2+\beta y^2+\delta=0.$$

Первая из них соответствует случаю $I_4\neq 0$, а вторая — случаю $I_4=0$.

В первом случае коэффициент p находим, используя инвариант I_4.

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & p & 0 \end{vmatrix} = -\alpha\beta p^2 = I_4,$$

и уравнение поверхности будет

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}\,z=0.$$

В случае $I_4=0$ изменим коэффициенты уравнения поверхности на величины ε_{ij} так, чтобы $I_3\neq 0$. Тогда переходом к соответствующей системе координат уравнение приводится к виду

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2+\frac{I_4}{I_3}=0.$$

Производя теперь предельный переход при $\varepsilon_{ij}\to 0$, получим каноническую форму уравнения нашей поверхности.

Пример. Пусть $I_3=I_4=0$, но

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Положим, $\varepsilon_{33}=t$, а остальные ε_{ij} равны нулю. Тогда

$$\frac{I_4(t)}{I_3(t)}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Каноническая форма уравнения поверхности:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = 0.$$

Наконец, в случае, если два корня уравнения $I(\lambda)$ равны нулю, уравнение поверхности приводится к одной из форм:

$$\alpha x^2 + 2pz = 0 \text{ или } \alpha x^2 + \delta = 0.$$

Коэффициенты p и δ находятся путем варьирования коэффициентов уравнения поверхности подобно тому, как в только что рассмотренном случае. Мы не будем приводить этого исследования.

Упражнения

1. Найти каноническую форму уравнения поверхности

$$(ax + by + cz + d)(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0.$$

2. Показать, что если $I_4 = 0$, то поверхность представляет либо конус, либо цилиндр, либо распадается на пару плоскостей.

3. Показать, что если $I_4 = 0$ и $I_3 = 0$, то поверхность распадается на пару плоскостей.

4. Определить коэффициенты p и δ в каноническом уравнении поверхности в случае $I_2 = I_3 = I_4 = 0$.

§ 5. Диаметры кривой, диаметральные плоскости поверхности. Центр кривой и поверхности

Пусть поверхность второго порядка задана уравнением в произвольной декартовой прямоугольной системе координат

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{44} = 0 \qquad (*)$$

Для краткости записи в последующих выкладках введем следующие обозначения:

$$2F = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{44},$$
$$F_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14},$$
$$F_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24},$$
$$F_z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}.$$

Мы уже знаем (§ 8 гл. VII), что середины хорд данного направления $\lambda:\mu:\nu$, т. е. параллельных прямой

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu},$$

лежат в диаметральной плоскости. Составим ее уравнение, если поверхность задана уравнением (*).

Пусть (x, y, z) — середина произвольной хорды. Координаты концов хорды можно записать в виде

$$x_1=x+\lambda t,\ y_1=y+\lambda t,\ z_1=z+\lambda t,$$
$$x_2=x-\lambda t,\ y_2=y-\lambda t,\ z_2=z-\lambda t.$$

Подставляя эти координаты в уравнение поверхности (*), получаем

$$2F(x, y, z)\pm$$
$$\pm 2t(\lambda F_x(x, y, z)+\mu F_y(x, y, z)+\nu F_z(x, y, z))+$$
$$+t^2(a_{11}\lambda^2+a_{22}\mu^2+a_{33}\nu^2+2a_{13}\lambda\mu+2a_{23}\mu\nu+2a_{31}\nu\lambda)=0.$$

Из этого равенства следует, что коэффициент при t должен быть равен нулю:

$$\lambda F_x+\mu F_y+\nu F_z=0. \qquad (**)$$

Это и есть уравнение диаметральной плоскости, соответствующей хордам данного направления $\lambda:\mu:\nu$.

Если поверхность имеет центр, то каждая диаметральная плоскость проходит через центр. Следовательно, *центр поверхности определяется уравнениями*

$$F_x=0,\ F_y=0,\ F_z=0. \qquad (***)$$

Для кривых второго порядка можно провести совершенно аналогичное рассмотрение. Приведем окончательный результат.

Пусть кривая задана уравнением

$$2\Phi=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Положим

$$\Phi_x=a_{11}x+a_{12}y+a_{13},$$
$$\Phi_y=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}.$$

Тогда диаметр, соответствующий хордам направления $\lambda:\mu$, т. е. параллельным прямой

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu},$$

задается уравнением

$$\lambda\Phi_x+\mu\Phi_y=0.$$

Центр кривой (если кривая имеет центр) определяется из системы уравнений

$$\Phi_x=0, \quad \Phi_y=0.$$

Упражнения

1. Показать, что если начало координат перенести в центр кривой второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

то уравнение кривой примет вид

$$b_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\frac{I_3}{I_2}=0.$$

2. Показать, что если начало координат перенести в центр поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+\ldots+a_{44}=0,$$

то уравнение поверхности примет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+\frac{I_4}{I_3}=0.$$

§ 6. Оси симметрии кривой. Плоскости симметрии поверхности

Определим плоскости симметрии поверхности, заданной уравнением в произвольных координатах.

Пусть $\lambda:\mu:\nu$ — направление, перпендикулярное плоскости симметрии. Так как средины хорд направления $\lambda:\mu:\nu$ лежат в плоскости симметрии, то плоскость симметрии задается уравнением

$$\lambda F_x+\mu F_y+\nu F_z=0. \qquad (*)$$

Так как направление $\lambda:\mu:\nu$ перпендикулярно плоскости $(*)$, то

$$\frac{a_{11}\lambda+a_{12}\mu+a_{13}\nu}{\lambda}=\frac{a_{21}\lambda+a_{22}\mu+a_{23}\nu}{\mu}=\frac{a_{31}\lambda+a_{32}\mu+a_{33}\nu}{\nu}. \qquad (**)$$

Определив из этой системы уравнений $\lambda:\mu:\nu$ и подставив в уравнение (*), получим уравнение плоскости симметрии поверхности.

Чтобы упростить отыскание $\lambda:\mu:\nu$ из системы (**), обозначим ξ общее значение трех отношений (**). Тогда получим эквивалентную систему

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\xi)\lambda+a_{12}\mu+a_{13}\nu=0,\\ a_{21}\lambda+(a_{22}-\xi)\mu+a_{23}\nu=0,\\ a_{31}\lambda+a_{32}\mu+(a_{33}-\xi)\nu=0.\end{aligned}\right\}\qquad(***)$$

Так как λ, μ, ν не все равны нулю, то

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\xi & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\xi & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\xi\end{vmatrix}=I(\xi)=0.$$

Определяя отсюда ξ и подставляя его в систему (***), находим из нее $\lambda:\mu:\nu$.

Умея находить плоскости симметрии поверхности, нетрудно найти систему координат, в которой уравнение поверхности имеет каноническую форму.

Приведем пример.

Пусть в результате исследования инвариантов поверхности оказалось, что она эллипсоид. Тогда ее каноническое уравнение будет

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+\frac{I_4}{I_3}=0.$$

Мы видим, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии поверхности.

Если корни ξ_1, ξ_2, ξ_3 уравнения $I(\xi)$ все различны, то эти плоскости определяются однозначно указанным способом. Если же среди корней есть равные, то этот способ не дает однозначного решения (случай поверхности вращения). И к тому требованию, что координатные плоскости должны быть плоскостями симметрии, надо присоединить требование перпендикулярности.

Рассмотрим еще пример. Пусть поверхность является гиперболическим параболоидом. В этом случае есть две и только две плоскости симметрии. Они являются координатными плоскостями. Начало координат находится в точке пересечения оси гиперболоида (прямой пересечения плоскостей симметрии) с поверхностью.

Соответствующее рассмотрение для кривых второго порядка приводит к выводу:

Оси симметрии кривой второго порядка задаются уравнениями

$$\lambda\Phi_x + \mu\Phi_y = 0.$$

Из системы

$$(a_{11} - \xi)\lambda + a_{12}\mu = 0,$$
$$a_{21}\lambda + (a_{22} - \xi)\mu = 0,$$

где ξ — корень уравнения $I(\xi) = 0$, определяется $\lambda : \mu$.

Система координат, в которой уравнение кривой принимает каноническую форму, определяется из соображений, аналогичных тем, которые выше применены для поверхностей.

Упражнения

1. Найти ось кругового конуса

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ax + by - cz)^2 = 0.$$

2. Найти вершину и ось параболы

$$(ax + by + c)^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

3. Найти ось симметрии кривой

$$x^2 + y^2 + (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0.$$

§ 7. Асимптоты гиперболы. Асимптотический конус гиперболоида

Пусть гипербола задана уравнением в произвольных координатах xy:

$$2\Phi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (*)$$

Найдем уравнение ее асимптот.

Перейдем к системе координат $x'y'$, в которой уравнение гиперболы имеет каноническую форму:

$$2\Phi' = \alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma = 0.$$

В этой системе координат, как мы знаем (§ 5 гл. IV), обе асимптоты задаются уравнением

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 = 0,$$

т. е.

$$2\Phi' - \gamma = 0.$$

Если теперь перейти снова к координатам xy, то для гиперболы мы снова получим уравнение (γ), а следовательно, для ее асимптот уравнение

$$2\Phi = \gamma.$$

Постоянная γ, как известно (§ 3 гл. VIII), равна $\frac{I_3}{I_2}$. Таким образом, *уравнение асимптот гиперболы, заданной уравнением в общем виде, будет*

$$2\Phi - \frac{I_3}{I_2} = 0.$$

Проводя дословно такие же рассуждения для гиперболоида (однополостного, двуполостного)

$$2F = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{44} = 0,$$

находим уравнение его асимптотического конуса

$$2F - \frac{I_4}{I_3} = 0.$$

Упражнения

1. Найти асимптоты гиперболы

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) = \text{const}.$$

2. Найти асимптоты гиперболы

$$\lambda(ax + by + c)^2 + \mu(a_1x + b_1y + c_1)^2 = \nu \qquad (\lambda\mu\nu < 0).$$

§ 8. Касательная кривой. Касательная плоскость поверхности

Пусть кривая второго порядка задана уравнением общего вида

$$2\Phi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{33} = 0.$$

Составим уравнение ее касательной в произвольной точке $A_0(x_0, y_0)$.

Касательная к кривой по определению есть предел секущей g, когда точка K неограниченно приближается к A_0 (рис. 86).

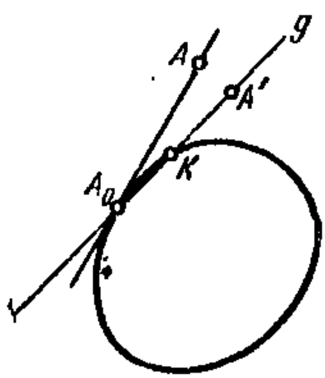


Рис. 86.

Пусть $A(x, y)$ — произвольная точка касательной. Обозначим $A'(x', y')$ ближайшую к A точку секущей. Очевидно, когда $K \to A_0$, $A' \to A$.

Координаты точки K через координаты A_0 и A' можно записать в виде

$$x_K = x_0 + t(x' - x_0),$$
$$y_K = y_0 + t(y' - y_0).$$

Подставляя координаты точки K в уравнение кривой, получим

$$2\Phi|_K = 2\Phi|_{A_0} + 2t\,\{(x'-x_0)\,\Phi_x|_{A_0} + (y'-y_0)\,\Phi_y|_{A_0}\} +$$
$$+ t^2\{a_{11}(x'-x_0)^2 + 2a_{12}(x'-x_0)(y'-y_0) + a_{22}(y'-y_0)^2\} = 0,$$

где индекс A_0 указывает на то, что в качестве x и y надо взять координаты точки A_0. Так как точка A_0 лежит на кривой, то $\Phi|_{A_0} = 0$. Поэтому равенство можно сократить на t. Получим

$$2(x'-x_0)\,\Phi_x(x_0, y_0) + 2(y'-y_0)\,\Phi_y(x_0, y_0) +$$
$$+ t\,\{a_{11}(x'-x_0)^2 + 2a_{12}(x'-x_0)(y'-y_0) + a_{22}(y'-y_0)^2\} = 0.$$

Пусть теперь $K \to A_0$. Тогда $t \to 0$, а $A' \to A$ (т. е. $x' \to x$, $y' \to y$), и мы получаем

$$(x-x_0)\,\Phi_x(x_0, y_0) + (y-y_0)\,\Phi_y(x_0, y_0) = 0. \qquad (*)$$

Это уравнение линейно относительно x и y и поэтому является уравнением некоторой прямой. Произвольная точка A касательной ему удовлетворяет. Следовательно, это — уравнение касательной.

Касательной плоскостью поверхности в точке A_0 мы будем называть такую плоскость, в которой лежат касательные всех кривых на поверхности, выходящих из A_0 (рис. 87). Составим уравнение касательной плоскости в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности второго порядка:

$$2F = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{44} = 0.$$

Проведем произвольную плоскость σ через точку A_0. Она пересечет поверхность по кривой второго порядка k_σ. Проведем касательную кривой k_σ в точке A_0 и обозначим $A(x, y, z)$ произвольную точку на этой касательной (рис. 88).

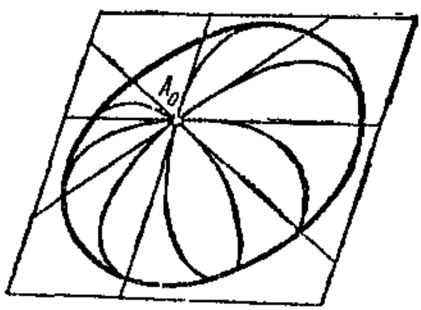


Рис. 87.

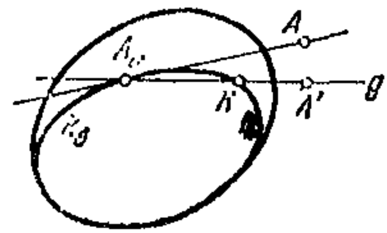


Рис. 88

Возьмем точку K на k_σ, близкую к A_0, и проведем через точки A_0, K секущую g. Пусть $A'(x', y', z')$ — точка секущей, ближайшая к A. Очевидно, при $K \to A_0$ $A' \to A$.

Координаты точки K через координаты A_0 и A' можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_K &= x_0 + t(x' - x_0), \\ y_K &= y_0 + t(y' - y_0), \\ z_K &= z_0 + t(z' - z_0). \end{aligned}$$

Подставляя координаты K в уравнение поверхности, получим

$$\begin{aligned} 2F|_{A_0} + 2t\{(x' - x_0) F_x|_{A_0} + (y' - y_0) F_y|_{A_0} &+ \\ + (z' - z_0) F_z|_{A_0}\} + t^2\{a_{11}(x' - x_0)^2 &+ \\ + 2a_{12}(x' - x_0)(y' - y_0) + \ldots + a_{33}(z' - z_0)^2\} &= 0. \qquad (*) \end{aligned}$$

Но $2F|_{A_0} = 0$, так как точка A_0 на поверхности. Деля равенство $(*)$ на t и переходя к пределу при $K \to A_0$, получаем

$$(x - x_0) F_x|_{A_0} + (y - y_0) F_y|_{A_0} + (z - z_0) F_z|_{A_0} = 0.$$

Это уравнение линейно относительно x, y, z и поэтому задает некоторую плоскость. Так как ему удовлетворяют координаты любой точки A, касательной k_σ в точке A_0, какова бы ни была σ, то оно представляет собой уравнение касательной плоскости поверхности в точке A_0.

Упражнения

1. Показать, что касательная плоскость поверхности второго порядка в точке P параллельна диаметральной плоскости, соответствующей хордам, параллельным диаметру, проходящему через P.

2. Пусть $2\Phi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{33} = 0$ — кривая второго порядка, $A_0(x_0, y_0)$ — точка вне этой кривой. Проведем через A_0 *произвольную прямую* g. *Пусть* $A(x, y)$ — *произвольная точка этой прямой*. Координаты любой точки B прямой g можно представить в виде

$$x_B = x_0 + t(x - x_0), \quad y_B = y_0 + t(y - y_0).$$

Значения параметра t, отвечающие точкам B_1 и B_2 пересечения кривой $2\Phi = 0$ с прямой g, находятся из квадратного уравнения

$$2\Phi(x_0 + t(x - x_0),\ y_0 + t(y - y_0)) = 0. \qquad (**)$$

Когда прямая g приближается к касательной, корни уравнения (**) сливаются.

Составить, принимая во внимание указанное соображение, уравнение пары касательных кривой второго порядка $2\Phi = 0$, исходящих из точки A_0.

3. Составить уравнение конуса с вершиной $A_0(x_0, y_0, z_0)$, касающегося поверхности второго порядка $2F = 0$ (см. упр. 2).

4. Составить уравнение цилиндра с осью, параллельной прямой

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu},$$

описанного около поверхности второго порядка $2F = 0$.

5. Показать, что геометрическое место вершин прямых трехгранных углов, грани которых касаются эллипсоида, есть сфера.

6. Показать, что геометрическое место вершин прямых трехгранных углов, грани которых касаются эллиптического параболоида, есть плоскость.

7. Показать, что касательная плоскость однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида пересекает поверхность по двум прямым.

8. Какому условию удовлетворяют коэффициенты уравнения плоскости

$$ux + vy + wz = 1,$$

если эта плоскость касается эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1?$$

9. Показать, что софокусные поверхности второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1,$$

проходящие через точку (x_0, y_0, z_0), пересекаются в этой точке под прямым углом. Предполагается, что точка не лежит ни в одной из координатных плоскостей.

Глава IX

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Ортогональные преобразования

Пусть произвольная фигура F движением или движением и зеркальным отражением переведена в некоторую фигуру F'. Тогда говорят, что фигура F' получена ортогональным преобразованием из F. Очевидно, *при ортогональном преобразовании фигуры расстояния между ее точками не изменяются.*

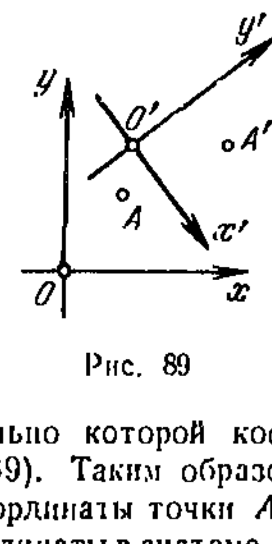


Рис. 89

Найдем формулы, устанавливающие связь между координатами произвольной точки $A(x, y, z)$ фигуры F и соответствующей точки $A'(x', y', z')$ фигуры F'.

Представим себе, что система координат $s(x, y, z)$ жестко связана с фигурой F. Тогда при ортогональном преобразовании она перейдет в некоторую систему координат s', относительно которой координаты точки A' будут x, y, z (рис. 89). Таким образом, задача состоит в том, чтобы выразить координаты точки A' в системе координат s, если известны ее координаты в системе s'.

Как известно (§ 4 гл. V), связь между координатами точки относительно двух декартовых прямоугольных систем координат устанавливается формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1, & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1, & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1, & a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Отсюда, принимая во внимание вышеизложенное, заключаем, *что любое ортогональное преобразование задается формулами* (*), *коэффициенты которых удовлетворяют условиям* (**).

Покажем, что и обратно, *всякое преобразование, задаваемое формулами* (*) *при условиях* (**) *есть ортогональное преобразование,* т. е. преобразованная фигура получается движением или движением и зеркальным отражением из данной.

Пусть $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ — две произвольные точки фигуры F, $A_1'(x_1', y_1', z_1')$ и $A_2'(x_2', y_2', z_2')$ — соответствующие точки фигуры F'. Квадрат расстояния между точками A_1' и A_2' равен

$$(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_2')^2.$$

Если в это выражение подставить выражения x_1', x_2', y_1', y_2', z_1', z_2' согласно формулам (*) и воспользоваться условиями (**), то получим

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2.$$

Таким образом, расстояние между любыми двумя точками фигуры F равно расстоянию между соответствующими точками фигуры F'. Следовательно, фигура F равна F' и F' получается движением или движением и зеркальным отражением из F.

Ортогональные преобразования обладают следующими геометрически очевидными свойствами, которые, впрочем, можно проверить и аналитически с помощью формул (*).

1. *Последовательное выполнение двух ортогональных преобразований есть снова ортогональное преобразование.* То есть, если фигура F' получается ортогональным преобразованием из F, а фигура F'' ортогональным преобразованием из F', то F'' получается ортогональным преобразованием из F.

2. *Преобразование, обратное к ортогональному, есть ортогональное преобразование.* То есть, если фигура F' получается ортогональным преобразованием из F, то F получается ортогональным преобразованием из F'.

3. *Тождественное преобразование, т. е. преобразование, задаваемое формулами*

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

есть ортогональное преобразование.

Ортогональные преобразования на плоскости определяются аналогично и обладают аналогичными свойствами. Они задаются формулами

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{aligned}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \end{aligned} \qquad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

Так как формулы преобразования прямоугольных декартовых координат (§ 7 гл. II) совпадают с формулами ортогональных преобразований, то из результатов § 8 гл. III, касающихся приведения уравнений кривых второго порядка к каноническому виду, следует, что любую кривую второго порядка можно ортогональным преобразованием перевести в кривую одного из следующих типов:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma &= 0, \\ \alpha x^2 + \beta y^2 &= 0, \\ \alpha x^2 + 2py &= 0, \\ \alpha x^2 + q &= 0, \\ x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Упражнения

1. Составить формулы ортогонального преобразования, которое плоскость xy (yz, xz) переводит в себя, плоскость xy переводит в плоскость xz (yz).

2. Составить формулы ортогонального преобразования, которое оставляет на месте начало координат, а ось x переводит в прямую

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}.$$

§ 2. Аффинные преобразования

Ортогональные преобразования являются частным случаем более общих преобразований фигур, так называемых *аффинных преобразований*. Аффинные преобразования задаются формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

где коэффициенты a_{ij} — любые вещественные числа, удовлетворяющие единственному условию

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (**)$$

Очевидно, *это определение инвариантно относительно выбора системы координат*, так как координаты точки в одной системе координат выражаются линейно через ее координаты в любой другой системе координат.

Аффинные преобразования обладают следующими легко проверяемыми свойствами:

1. *Последовательное выполнение двух аффинных преобразований есть аффинное преобразование.*

2. *Преобразование, обратное аффинному, тоже является аффинным преобразованием.*

3. *Тождественное преобразование является аффинным.*

Все эти свойства легко проверяются с помощью формул (*). Проверим, например, второе свойство.

Решая систему уравнений (*) относительно x, y (детерминант системы отличен от нуля), получим

$$\left.\begin{aligned} x &= a'_{11}x' + a'_{12}y' + a'_{13}z' + a'_{14}, \\ y &= a'_{21}x' + a'_{22}y' + a'_{23}z' + a'_{24}, \\ z &= a'_{31}x' + a'_{32}y' + a'_{33}z' + a'_{34}, \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

где a'_{ij} при $i, j \leqslant 3$ представляют собой приведенные алгебраические дополнения элементов a_{ij} в Δ. Детерминант Δ', составленный из a'_{ij}, как известно, равен $\Delta^{-1} \neq 0$. Отсюда следует, что преобразование, сопоставляющее точке (x', y', z') точку (x, y, z) согласно формулам (***), т. е. преобразование, обратное аффинному (*), аффинно.

В заключение заметим, что *аффинное преобразование определено однозначно, если заданы образы четырех точек, не лежащих в одной плоскости.* Действительно, подставляя в первое из уравнений (*) координаты данных четырех точек и их образов, получим:

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 + a_{14},\\
x_2' &= a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}z_2 + a_{14},\\
x_3' &= a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13}z_3 + a_{14},\\
x_4' &= a_{11}x_4 + a_{12}y_4 + a_{13}z_4 + a_{14}.
\end{aligned}$$

Эти равенства можно рассматривать как систему уравнений относительно a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}. Детерминант системы

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

по абсолютной величине равен ушестеренному объему тетраэдра с вершинами в данных четырех точках и, следовательно, отличен от нуля. Таким образом, из указанной системы величины a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} определяются однозначно. Аналогично доказывается, что коэффициенты двух других формул (*) также определяются однозначно.

Аффинное преобразование на плоскости определено однозначно, если заданы образы трех точек, не лежащих на прямой.

Упражнения

1. Составить формулы аффинного преобразования, переводящего точки (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1) в точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4).

2. Составить формулы аффинного преобразования на плоскости, переводящего оси координат x и y в две данные прямые

$$ax + by + c = 0, \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

§ 3. Аффинное преобразование прямой и плоскости

Из однозначной разрешимости формул аффинного преобразования

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}, \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (*)$$

относительно x, y и z следует, что *различные точки при аффинном преобразовании переходят в различные, и каждая точка* (x', y', z') *является образом некоторой точки* (x, y, z).

Докажем, что *при аффинном преобразовании плоскость переходит в плоскость, прямая в прямую, сохраняется параллельность.*

Пусть σ — произвольная плоскость и

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (**)$$

ее уравнение. При аффинном преобразовании $(*)$ плоскость σ переходит в некоторую фигуру σ'. Так как координаты каждой точки σ удовлетворяют уравнению $(**)$ и линейно выражаются через координаты соответствующей точки фигуры σ', то координаты точек σ' удовлетворяют также линейному уравнению

$$a'x' + b'y' + c'z' + d' = 0, \qquad (**)'$$

которое получается из $(**)$ заменой x, y, z их линейными выражениями относительно x', y', z' согласно формулам $(***)$ предыдущего параграфа. Уравнение $(**)'$ не может быть тождеством, так как, вводя в него вместо x', y', z' переменные x, y, z по формулам $(*)$, мы снова должны получить $(**)$.

Таким образом, σ' лежит в плоскости, задаваемой уравнением $(**)'$. Покажем, что σ' совпадает с этой плоскостью. Действительно, пусть (x', y', z') — любая точка плоскости $(**)'$. Ее образ при аффинном преобразовании, обратном $(*)$, удовлетворяет $(**)$, а следовательно, принадлежит σ. Отсюда мы делаем вывод, что σ' совпадает с плоскостью $(**)'$ (а не является ее частью). Тем самым доказано, что плоскость при аффинном преобразовании переходит в плоскость.

Так как плоскость при аффинном преобразовании переходит в плоскость, а обратное к аффинному преобразованию является аффинным, то *различные плоскости переходят в различные.*

Так как различные точки при аффинном преобразовании переходят в различные, то *параллельные плоскости переходят в параллельные.*

Так как через прямую можно провести две различные плоскости, а различные плоскости при аффинном преобразовании переходят в различные плоскости, то *прямая при аффинном преобразовании переходит в прямую.*

Так как две параллельные прямые можно определить пересечением двух параллельных плоскостей с третьей плоскостью, а параллельные плоскости при аффинном преобразовании переходят в параллельные, то *при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.*

В заключение заметим, что аффинные преобразования на плоскости обладают аналогичными свойствами. В частности, *при аффинном преобразовании на плоскости прямые переходят в прямые и сохраняется параллельность.*

Упражнения

1. Найти плоскости, в которые перейдут координатные плоскости xy, yz, zx при аффинном преобразовании (*).

2. Найти прямые, в которые перейдут оси координат при аффинном преобразовании (*).

§ 4. Основной инвариант аффинного преобразования

При ортогональном преобразовании расстояние между точками не изменяется. В связи с этим говорят, что расстояние между точками есть *инвариант* ортогонального преобразования. Можно было бы назвать много других инвариантов ортогонального преобразования, например угол между прямыми, площадь треугольника. Расстояние между точками является не только простейшим, но и основным инвариантом, так как через него могут быть выражены все остальные.

При аффинном преобразовании расстояние между точками, как правило, изменяется, так что расстояние между точками не является инвариантом общего аффинного преобразования.

Простейшим и основным инвариантом аффинного преобразования является *простое отношение трех точек на прямой.* Простым отношением трех точек A, B, C на прямой называется число

$$(ABC)=\frac{AB}{BC}.$$

Покажем, что простое отношение трех точек на прямой сохраняется при аффинном преобразовании, т. е. если точки A, B, C переходят при аффинном преобразовании в точки A', B', C', то

$$(ABC)=(A'B'C').$$

Не ограничивая общности, можно считать, что точки A, B, C лежат на оси x (прямую AB можно принять за ось x). Далее можно считать также, что точки A', B', C' тоже на оси x, так как ортогональным преобразованием, которое, очевидно, не меняет простого отношения (сохраняя длины отрезков), тройку точек A', B', C' всегда можно перевести на ось x. А в этом случае имеем

$$(ABC)=\frac{|x_A-x_B|}{|x_B-x_C|},\quad (A'B'C')=\frac{|x_{A'}-x_{B'}|}{|x_{B'}-x_{C'}|}.$$

Но координаты x' точек A', B', C' с координатами x точек A, B, C связаны равенством

$$x'=a_{11}x+a_{14}$$

и равенство простых отношений (ABC), $(A'B'C')$ очевидным образом проверяется.

Упражнения

1. Показать, что существует аффинное преобразование, которое переводит произвольный данный треугольник в правильный. Показать, что точка пересечения медиан переходит в точку пересечения медиан.

2. Показать, что аффинным преобразованием любой данный параллелограмм можно перевести в квадрат. Можно ли любой четырехугольник перевести аффинным преобразованием в квадрат?

3. При каком условии аффинное преобразование плоскости, задаваемое формулами (*) предыдущего параграфа, оставляет неподвижной некоторую точку.

§ 5. Аффинные преобразования кривых и поверхностей второго порядка

Так как кривая второго порядка определяется как геометрическое место точек, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени, а координаты точки выражаются линейно через координаты ее образа при аффинном преобразовании, то *кривая второго порядка при аффинном преобразовании переходит в кривую второго порядка.*

Аналогично, *поверхность второго порядка при аффинном преобразовании переходит в поверхность второго порядка.*

Так как при аффинном преобразовании прямые переходят в прямые, причем параллельные прямые в параллельные, сохраняется простое отношение трех точек, в частности средина отрезка переходит в средину отрезка, то при *аффинном преобразовании диаметры кривой второго порядка переходят в диаметры, причем сопряженные диаметры в сопряженные, центр переходит в центр.*

Аналогичные свойства имеют место для поверхностей второго порядка при аффинном преобразовании.

Так как при аффинном преобразовании вещественные точки переходят в вещественные, мнимые в мнимые, то *при аффинном преобразовании вещественная кривая переходит в вещественную, а мнимая в мнимую.*

Очевидно, *если фигура конечна, то ее образ при аффинном преобразовании есть конечная фигура, если фигура бесконечная, то ее образ также бесконечная фигура.*

Как следствие указанных выше свойств аффинного преобразования заключаем:

При любом аффинном преобразовании эллипс переходит в эллипс, гипербола в гиперболу, парабола в параболу, пара прямых пересекающихся в пару прямых пересекающихся, пара параллельных прямых в пару параллельных прямых.

Аналогичные заключения можно сделать для поверхностей второго порядка.

Будем называть две фигуры *аффинно эквивалентными*, если они аффинным преобразованием могут быть переведены друг в друга.

Все эллипсы аффинно эквивалентны окружности

$$x^2+y^2=1.$$

Все гиперболы аффинно эквивалентны равнобокой гиперболе

$$x^2-y^2=1$$

Все параболы аффинно эквивалентны параболе

$$y=x^2.$$

Докажем, например, первое утверждение. Любой эллипс ортогональным преобразованием может быть переведен в эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

А этот эллипс равномерным сжатием (растяжением) относительно координатных осей

$$x'=\frac{x}{a},\quad y'=\frac{y}{b}$$

переводится в окружность

$$x'^2+y'^2=1.$$

В случае пространства имеют место аналогичные утверждения об аффинной эквивалентности поверхностей второго порядка.

В заключение покажем, что *любое аффинное преобразование на плоскости можно получить, выполняя последовательно три преобразования — равномерное растяжение (сжатие) относительно двух взаимно перпендикулярных прямых и некоторое ортогональное преобразование.*

Доказательство просто. Окружность

$$x^2+y^2=1$$

(рис. 90) при аффинном преобразовании перейдет в некоторый эллипс E'. Пусть A' и B' — две его последовательные вершины, O' — центр, $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — соответствующие точки окружности. Прямые $O\bar{A}$ и $O\bar{B}$ перпендикулярны, так как являются сопряженными диаметрами круга (они ведь соответствуют сопряженным диаметрам эллипса $O'A'$, $O'B'$).

Введем две системы координат: $\bar{x}\bar{y}$, взяв за положительные полуоси $\bar{x}$ и $\bar{y}$ прямые $O\bar{A}$ и $O\bar{B}$, и $x'\ y'$, приняв за положительные полуоси $O'A'$, $O'B'$. В системе координат $x'y'$ эллипс E' задается уравнением

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 = 1.$$

Существует ортогональное преобразование, которое переводит эллипс E

$$\alpha\bar{x}^2 + \beta\bar{y}^2 = 1$$

в эллипс E'. При этом его вершины $\bar{A}$, $\bar{B}$ переходят в вершины E': A' и B'.

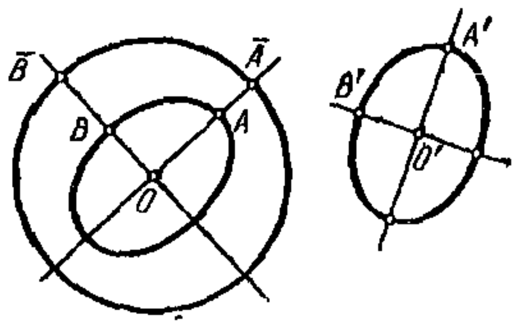


Рис. 90.

Рассмотрим теперь аффинное преобразование, которое состоит из равномерного растяжения (сжатия) относительно оси $\bar{y}$, при котором точка $\bar{A}$ переходит в A, равномерного растяжения (сжатия) относительно оси $\bar{x}$, при котором точка $\bar{B}$ переходит в B и ортогонального преобразования, переводящего эллипс E в E'. Построенное таким образом аффинное преобразование так же, как и данное, переводит точки O, $\bar{A}$, $\bar{B}$ в точки O, A', B', а следовательно, совпадает с ним (§ 2). Утверждение доказано.

Аналогичное предложение имеет место для аффинного преобразования в пространстве. Именно, *любое аффинное преобразование в пространстве может быть разложено на три равномерных сжатия (растяжения) по трем взаимно перпендикулярным направлениям и ортогональное преобразование.*

Упражнения

1. Вывести свойства сопряженных диаметров эллипса из свойств диаметров окружности. Вывести свойства диаметров и диаметральных плоскостей эллипсоида из свойств диаметров и диаметральных плоскостей сферы.

2. Аффинное преобразование на плоскости задано формулами

$$x' = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2.$$

Как показано, это преобразование можно разложить на равномерное растяжение (сжатие) по двум взаимно перпендикулярным направлениям и некоторое ортогональное преобразование. Найти коэффициенты растяжения (сжатия).

§ 6. Проективные преобразования

Аффинные преобразования фигур представляют собой частный случай более общих, так называемых *проективных преобразований*, задаваемых формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}, \\ y' &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}, \\ z' &= \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

коэффициенты которых удовлетворяют единственному условию:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Этими формулами преобразование определено для любой фигуры F, не пересекающей плоскость σ_∞:

$$a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0.$$

В ближайших рассмотрениях мы будем предполагать, что преобразуемая фигура не пересекается с плоскостью σ_∞.

Очевидно, *данное определение проективного преобразования инвариантно относительно выбора системы координат.*

Непосредственной проверкой можно убедиться, что *последовательное выполнение двух проективных преобразований есть проективное преобразование, обратное к проективному преобразованию снова проективное, тождественное преобразование — проективное.*

Проективное преобразование обладает многими свойствами аффинного преобразования. В частности, при проективных преобразованиях точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой.

Простое отношение трех точек при проективном преобразовании, вообще говоря, не сохраняется, но зато сохраняется *сложное* (*ангармоническое*) отношение четырех точек на прямой. Это отношение определяется следующим образом.

Пусть A, B, C, D — четыре точки на прямой и $\boldsymbol{e}$ — отличный от нуля вектор, не перпендикулярный прямой. Тогда сложным (ангармоническим) отношением точек A, B, C, D (взятых в данном порядке) называется число

$$(ABCD)=\frac{\boldsymbol{e}\cdot\overrightarrow{AC}}{\boldsymbol{e}\cdot\overrightarrow{BC}}:\frac{\boldsymbol{e}\cdot\overrightarrow{AD}}{\boldsymbol{e}\cdot\overrightarrow{BD}}.$$

Очевидно, это определение инвариантно относительно выбора вектора $\boldsymbol{e}$. Поэтому, взяв в качестве вектора $\boldsymbol{e}$ базисный вектор $\boldsymbol{e}_x$, если ось x не перпендикулярна прямой AD, получим

$$(ABCD)=\frac{x_C-x_A}{x_C-x_B}:\frac{x_D-x_A}{x_D-x_B}. \qquad (**)$$

Если оси y и z не перпендикулярны прямой, то получаются аналогичные формулы с координатами y и z.

Покажем, что *сложное отношение четырех точек A, B, C, D прямой сохраняется при проективном преобразовании.*

Не ограничивая общности, можно считать, что точки A, B, C, D лежат на оси x (прямую AD можно взять за ось x). Можно считать, далее, что их образы A', B', C', D' тоже лежат на оси x, так как ортогональным преобразованием, которое, очевидно, не меняет сложного отношения, они могут быть переведены на ось x. При этом координаты x' точек A', B', C', D' выражаются через координаты x точек A, B, C, D, по формуле

$$x'=\frac{a_{11}x+a_{14}}{a_{41}x+a_{44}},$$

и непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\frac{x_C-x_A}{x_C-x_B}:\frac{x_D-x_A}{x_D-x_B}=\frac{x_{C'}-x_{A'}}{x_{C'}-x_{B'}}:\frac{x_{D'}-x_{A'}}{x_{D'}-x_{B'}},$$

т. е.

$$(ABCD)=(A'B'C'D'),$$

что и требовалось доказать.

Проективные преобразования на плоскости задаются формулами

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (***)$$

и обладают аналогичными свойствами.

Название «проективные преобразования» связано со следующим свойством этих преобразований.

Всякая фигура F' плоскости α, полученная из фигуры F этой же плоскости проективным преобразованием, не сводящимся к аффинному, может быть получена центральным проектированием из некоторого центра S фигуры $\bar{F}$, равной F.

Обратно, всякая фигура, получаемая таким проектированием, может быть получена проективным преобразованием из F.

Мы докажем только вторую часть утверждения. Не ограничивая общности, можно считать, что плоскостью α является плоскость xy.

Пусть $A(x, y, 0)$ — произвольная точка фигуры F, $\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — соответствующая точка $\bar{F}$, $S(x_0, y_0, z_0)$ — центр проектирования и $A'(x', y', 0)$ — проекция $\bar{A}$ из центра S на плоскость xy. Так как точки $S, \bar{A}$ и A' лежат на одной прямой, то

$$\frac{x' - x_0}{\bar{x} - x_0} = \frac{y' - y_0}{\bar{y} - y_0} = \frac{-z_0}{\bar{z} - z_0}.$$

Отсюда

$$x' = \frac{-z_0\bar{x} + \bar{z}x_0}{\bar{z} - z_0}, \qquad y' = \frac{-z_0\bar{y} + \bar{z}y_0}{\bar{z} - z_0}.$$

Так как $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ линейно выражаются через x и y (фигура $\bar{F}$ получается ортогональным преобразованием из F), то выражения x' и y' через x и y будут иметь вид (***). А это значит, что получаемая проектированием фигура F' может быть получена проективным преобразованием фигуры F.

Упражнения

1. Показать, что любое проективное преобразование в пространстве можно разложить на аффинное преобразование и простейшее проективное преобразование

$$x' = \frac{x}{z}, \qquad y' = \frac{y}{z}, \qquad z' = \frac{1}{z}.$$

2. *Показать, что проективное преобразование на плоскости* однозначно определено, если оно задано для четырех точек, из коих никакие три не лежат на одной прямой.

3. Выразить через ангармоническое отношение ($ABCD$) ангармонические отношения этих точек, взятых в любом другом порядке, например ($ACBD$), ($BACD$) и т. д.

§ 7. Однородные координаты. Пополнение плоскости и пространства бесконечно удаленными элементами

Будем называть *однородными координатами* точки на плоскости любые три числа x_1, x_2, x_3, не все равные нулю, связанные с ее декартовыми координатами равенствами

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Однородные координаты точки определены не однозначно. Именно, если x_1, x_2, x_3 — однородные координаты точки, то числа ρx_1, ρx_2, ρx_3 при $\rho \neq 0$ тоже будут однородными координатами этой точки.

Так как любая прямая в декартовых координатах задается уравнением

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0 \qquad (a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$$

и любое такое уравнение есть уравнение некоторой прямой, то любая прямая в однородных координатах задается уравнением

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \qquad (a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$$

и любое такое уравнение является уравнением некоторой прямой.

Для каждой точки (x, y) плоскости, очевидно, можно указать тройку чисел, являющуюся ее однородными координатами, например x, y, 1. Обратное, вообще говоря, неверно. Именно, для тройки чисел x_1, x_2, x_3, у которой

$x_3=0$, нельзя указать точку, для которой эти числа были бы ее однородными координатами. Это обстоятельство создает большие неудобства при рассмотрении ряда вопросов, в частности, касающихся проективных преобразований фигур. В связи с этим мы дополним плоскость новыми элементами: *бесконечно удаленными точками и бесконечно удаленной прямой.*

Именно, мы будем говорить, что тройке чисел x_1, x_2, x_3, если $x_3=0$, соответствует бесконечно удаленная точка плоскости. Геометрическое место бесконечно удаленных точек будем называть бесконечно удаленной прямой.

На расширенной таким образом плоскости любое уравнение

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

является уравнением некоторой прямой. Если $a_1=a_2=0$, *то прямая бесконечно удаленная.*

На расширенной плоскости любые две прямые пересекаются, так как система двух линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0, \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

всегда имеет нетривиальное решение (не все x_1, x_2, x_3 равны нулю). В частности, *две параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке.* Действительно, если прямые (*) параллельны, то

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\lambda.$$

Поэтому, если второе уравнение системы (*) умножить на λ и вычесть из первого, то получим $(a_3-\lambda b_3)x_3=0$, откуда $x_3=0$.

Введенное нами проективное преобразование фигур (§ 6) можно продолжить на расширенную плоскость. Именно, рассмотрим на расширенной плоскости преобразование, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} x_1'&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3, \\ x_2'&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3, \\ x_3'&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это преобразование на нерасширенной плоскости совпадает с введенным ранее проективным преобразованием.

Действительно, на нерасширенной плоскости $x_3 \neq 0$, $x'_3 \neq 0$. Поэтому почленным делением первых двух формул на третью получаем

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},$$
$$y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

В случае пространства однородные координаты x_1, x_2, x_3, x_4 точки вводятся аналогично, как четверка чисел, связанная с декартовыми координатами равенствами

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \qquad y = \frac{x_2}{x_4}, \qquad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Так же, как и в случае плоскости, пространство пополняется бесконечно удаленными элементами: *бесконечно удаленными точками, бесконечно удаленными прямыми, бесконечно удаленной плоскостью*. При этом получается, что *в пополненном бесконечно удаленными элементами пространстве любое уравнение*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

задает плоскость (бесконечно удаленную, если $a_1 = a_2 = a_3 = 0$*); любые два независимых уравнения*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0,$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0$$

определяют прямую (может быть бесконечно удаленную, если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$*).*

Проективные преобразования, определенные в § 6, продолжаются на расширенное пространство и в однородных координатах задаются формулами:

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,$$
$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,$$
$$x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,$$
$$x'_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Упражнения

1. Составить формулы проективного преобразования расширенной плоскости, переводящего прямые $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ в прямые

$$a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3=0,$$
$$a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3=0,$$
$$a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3=0.$$

2. Найти координаты точки, в которой пересекаются прямые

$$\frac{x_1\alpha_4-x_4\alpha_1}{k_1}=\frac{x_2\alpha_1-x_4\alpha_2}{k_2}=\frac{x_3\alpha_4-x_4\alpha_3}{k_3},$$
$$\frac{x_1\beta_4-x_4\beta_1}{k_1}=\frac{x_2\beta_4-x_4\beta_2}{k_2}=\frac{x_3\beta_1-x_4\beta_3}{k_3}.$$

§ 8. Проективные преобразования кривых и поверхностей второго порядка

Кривая второго порядка в однородных координатах, очевидно, задается уравнением

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{33}x_3^2=0, \qquad (*)$$

которое получается из уравнения ее в декартовых координатах

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+\ldots+a_{33}=0 \qquad (**)$$

заменой x на $\frac{x_1}{x_3}$ и y на $\frac{x_2}{x_3}$.

Пополним плоскость бесконечно удаленными элементами и продолжим кривую, заданную уравнением (*), на расширенную плоскость, присоединив к ней все несобственные точки, удовлетворяющие уравнению (*), если таковые существуют.

Покажем, что *кривая второго порядка на расширенной плоскости проективно эквивалентна одной из следующих простых кривых:*

$$\left.\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2&=0,\\ x_1^2-x_2^2+x_3^2&=0,\\ x_1^2+x_2^2&=0,\\ x_1^2-x_2^2&=0,\\ x_1^2&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

т. е. проективным преобразованием может быть переведена в одну из них.

Рассматривая вопрос о приведении уравнения кривой второго порядка к каноническому виду (§ 8 гл. III), мы показали, что существует такая система координат $x'y'$, в которой уравнение кривой (**) принимает одну из следующих форм:

$$\begin{aligned} \alpha x'^2+\beta y'^2+\gamma &= 0,\\ \alpha x'^2+\beta y'^2 &= 0,\\ \alpha x'^2+\beta y' &= 0,\\ x'^2 &= 0. \end{aligned}$$

Аналитически это значит, что в уравнение (**) можно ввести новые переменные x', y', связанные с x и y формулами вида

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13},\\ y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23} \end{aligned}$$

так, что уравнение (**) примет одну из указанных форм.

Отсюда следует, что если кривую второго порядка (*) подвергнуть проективному преобразованию

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ x_2' &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ x_3' &= x_3, \end{aligned}$$

то получим одну из следующих кривых:

$$\begin{aligned} \alpha x_1^2+\beta x_2^2+\gamma x_3^2 &= 0,\\ \alpha x_1^2+\beta x_2^2 &= 0,\\ \alpha x_1^2+\beta x_2 x_3 &= 0,\\ x_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Что касается этих кривых, то их легко простым проективным преобразованием перевести в кривые (***). Например, в первом случае надо взять проективное преобразование

$$x_1'=\sqrt{|\alpha|}\,x,\quad x_2'=\sqrt{|\beta|}\,x_2,\quad x_3'=\sqrt{|\gamma|}\,x_3;$$

во втором —

$$x_1'=\sqrt{|\alpha|}\,x,\quad x_2'=\sqrt{|\beta|}\,x_2,\quad x_3'=x_3;$$

в третьем —

$$x_1'=\sqrt{|\alpha|}\,x_1,\quad x_2'=\frac{x_2+x_3}{2}\sqrt{|\beta|},\quad x_3'=\frac{x_2-x_3}{2}\sqrt{|\beta|}.$$

Для поверхностей второго порядка в пространстве, пополненном бесконечно удаленными элементами, можно доказать аналогичное утверждение. Именно, *любая поверхность второго порядка проективно эквивалентна одной из следующих:*

$$\begin{aligned}
x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2&=0,\\
x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2&=0,\\
x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2&=0,\\
x_1^2+x_2^2+x_3^2&=0,\\
x_1^2+x_2^2-x_3^2&=0,\\
x_1^2+x_2^2&=0,\\
x_1^2-x_2^2&=0,\\
x_1^2&=0.
\end{aligned}$$

Доказательство аналогично приведенному для кривых.

Упражнения

Найти проективные преобразования, которые переводят кривые

$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2 \pm (b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2=0,$$
$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)=0$$

в одну из канонических форм (***).

§ 9. Полюс и поляра

Если в формулу (**) § 6 для ангармонического отношения ввести однородные координаты, то получим

$$(ABCD)=\frac{\begin{vmatrix} x_{1A} & x_{1C}\\ x_{4A} & x_{4C}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{1B} & x_{1C}\\ x_{4B} & x_{4C}\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} x_{1A} & x_{1D}\\ x_{4A} & x_{4D}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{1B} & x_{1D}\\ x_{4B} & x_{4D}\end{vmatrix}} \qquad (*)$$

и соответственно две другие формулы с заменой x_1 всюду на x_2 или x_3.

Ангармоническое отношение точек на прямой в пространстве, пополненном бесконечно удаленными элементами, мы определим формулой (*). Независимо от доказательства, приведенного в § 6, можно показать, что определяемое таким образом ангармоническое отношение сохраняется при проективном преобразовании. Мы опустим эти выкладки.

Пусть имеем поверхность второго порядка

$$2F = \sum_{i,\, j=1}^{4} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (**)$$

и точку $A(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$, не лежащую на поверхности. Проведем через точку A произвольную прямую и обозначим C и D точки пересечения ее с поверхностью $(**)$. Построим точку B, гармонически разделяющую с A точки C и D, т. е. такую, что $(ABCD) = -1$.

Геометрическое место построенных таким образом точек B называется *полярой* точки A. Точка A по отношению к поляре называется *полюсом*.

Составим уравнение поляры. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — однородные координаты B. Координаты $\bar{x}_i$ любой точки прямой AB, отличной от A, можно представить в виде

$$\bar{x}_i = x_i + \lambda x'_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \qquad (***)$$

В самом деле, прямая AB задается двумя линейными уравнениями

$$\sum a_i x_i = 0, \quad \sum b_i x_i = 0.$$

Так как ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

равен двум (уравнения независимы), то любое решение этой системы представляет собой линейную комбинацию двух независимых

$$\bar{x}_i = \mu x_i + \nu x'_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Если точка отлична от A, то $\mu \neq 0$ и координаты $\bar{x}_i$ можно разделить на μ, получив указанное выше представление.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что ангармоническое отношение четырех точек A, B, $\lambda A + B$, $\mu A + B$ ($\xi A + B$ — точка с координатами $\xi x_i + x'_i$)

$$(A,\ B,\ \lambda A + B,\ \mu A + B) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Отсюда следует, что точки C и D пересечения прямой AB с поверхностью второго порядка допускают представления

$$C = \lambda A + B, \qquad D = -\lambda A + B.$$

Подставляя координаты точек C и D в уравнение поверхности, получим:

$$\sum_{i,j} a_{ij}(\pm \lambda x_i + x_i')(\pm \lambda x_j + x_j') =$$
$$= \lambda^2 \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j \pm 2\lambda \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j' + \sum_{i,j} a_{ij}x_i' x_j' = 0.$$

Отсюда следует:

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j' = 0.$$

Это и есть *уравнение поляры*. Таким образом, поляра представляет собой плоскость.

Отметим два важных свойства поляры:

1. *Поляра любой точки B поляры точки A проходит через A.*

2. *Если точка A движется вдоль прямой, то ее поляра поворачивается около некоторой прямой.*

Действительно, уравнение поляры точки $B(x_i'')$

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j'' = 0$$

удовлетворяется координатами точки A, так как

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_i' x_j'' = \sum_{i,j} a_{ij}x_i'' x_j' \qquad (a_{ij} = a_{ji}),$$

а

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_i'' x_j' =$$

в силу того, что B лежит на поляре точки A.

Пусть точка A движется вдоль прямой, соединяющей точки $A'(x_i')$ и $A''(x_i'')$. Поляра любой точки этой прямой будет

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_i (\lambda' x_j' + \lambda'' x_j'') = 0$$

или

$$\lambda' \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j' + \lambda'' \sum_{i,j} a_{ij}x_j x_i'' = 0.$$

Отсюда видно, что поляра вращается около прямой, задаваемой уравнениями

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j' = 0, \quad \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j'' = 0.$$

Поляра точки $A(x_1', x_2', x_3')$ относительно кривой второго порядка определяется аналогично (рис. 91). Она представляет собой прямую и задается уравнением

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j' = 0,$$

если кривая задается уравнением

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0.$$

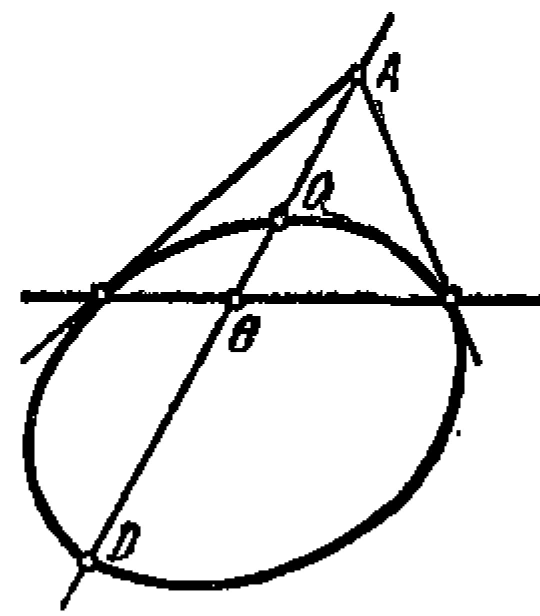


Рис. 91.

Упражнения

1. Показать, что точка C, которая вместе с бесконечно удаленной точкой прямой AB гармонически разделяет точки A и B, есть средина отрезка AB.

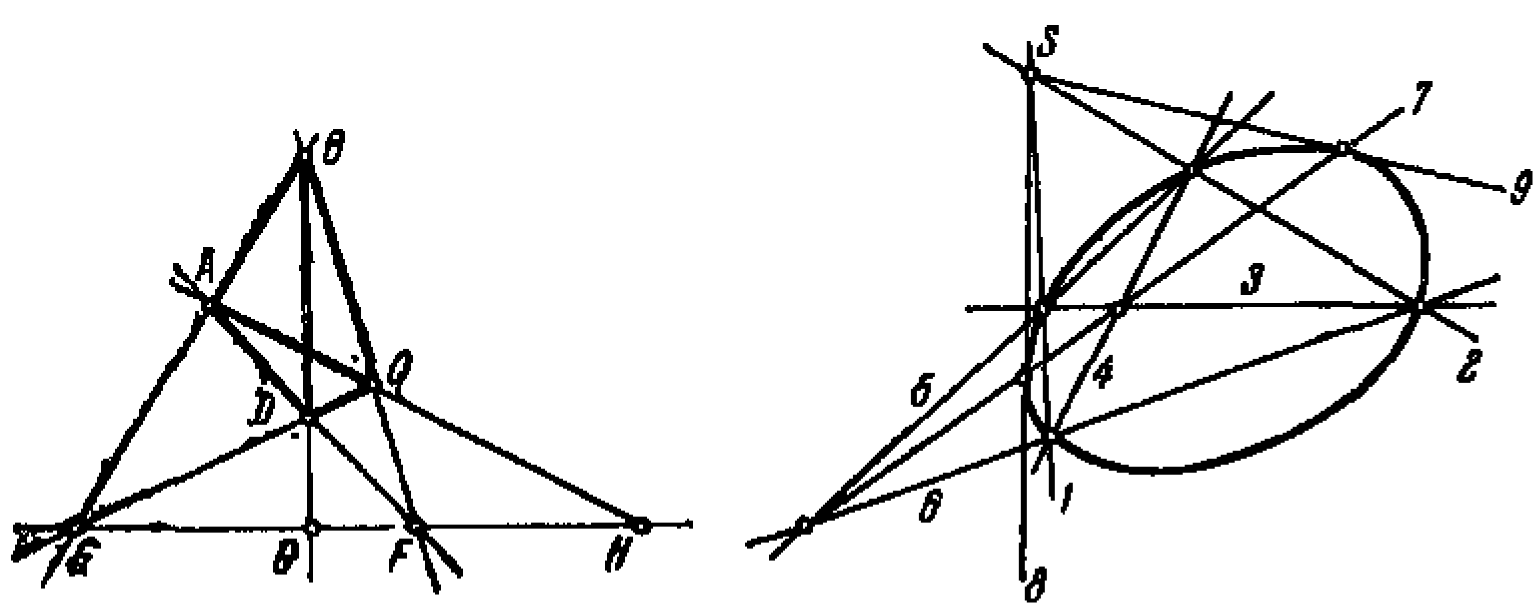


Рис. 92.

2. *Полным четырехугольником* называется фигура, составленная из четырех точек, по три не лежащих на одной прямой, и шести прямых, попарно их соединяющих (рис. 92). Показать, что пара точек G, H гармонически разделяет пару точек E, F. (Воспользоваться упр. 1 и инвариантностью ангармонического отношения при проективном преобразовании).

3. Обосновать следующий способ построения касательных к коническому сечению из произвольной точки S (рис. 93). Прямые 1 и 2 проводятся произвольно, остальные прямые — в порядке номеров согласно рисунку.

4. Как провести касательную к коническому сечению в данной точке на нем с помощью одной линейки?

5. Дано коническое сечение и прямая. Как с помощью одной линейки построить полюс прямой относительно данного конического сечения?

6. Пусть k — коническое сечение. Возьмем произвольную прямую f и на ней точку A. Построим поляру g точки A относительно k. Она пересечет f в точке B. Поляра h точки B пересекает прямую g в точке C и проходит через точку A. Так мы построим треугольник ABC, стороны которого являются полярами противоположных вершин. Этот треугольник называется *автополярным*.

Показать, что если стороны автополярного треугольника принять за прямые $x_1=0$, $x_2=0$ и $x_3=0$, то уравнение конического сечения k будет иметь вид

$$\alpha x_1^2+\beta x_2^2+\gamma x_3^2=0.$$

7. Вывести свойства диаметров и диаметральных плоскостей из свойств полюсов и поляр.

8. Показать, что поляра фокуса конического сечения есть директриса.

§ 10. Тангенциальные координаты

Каждой прямой на расширенной плоскости можно однозначно сопоставить отношение трех чисел $u_1:u_2:u_3$ — коэффициентов ее уравнения в однородных координатах —

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0. \qquad (*)$$

Будем называть числа u_1, u_2, u_3 *однородными координатами прямой*. Однородные координаты прямой определены неоднозначно. Именно, если u_1, u_2, u_3 — однородные координаты прямой, то ρu_1, ρu_2, ρu_3, если $\rho\neq 0$, тоже будут однородными координатами этой прямой.

Выясним, какой геометрический смысл имеет уравнение

$$u_1x_1^0+u_2x_2^0+u_3x_3^0=0, \qquad (**)$$

в котором переменными являются u_1, u_2, u_3, а x_1^0, x_2^0, x_3^0 фиксированы.

Каждому решению u_1^0, u_2^0, u_3^0 уравнения $(**)$ соответствует прямая

$$u_1^0x_1+u_2^0x_2+u_3^0x_3=0,$$

проходящая через точку (x_1^0, x_2^0, x_3^0). Обратно, координаты любой прямой, проходящей через эту точку, удовлетворяют уравнению (**). Таким образом, уравнению (**) удовлетворяют координаты прямых пучка с центром в точке (x_1^0, x_2^0, x_3^0) и только они. В связи с этим *уравнение* (**) *называют уравнением пучка*.

В случае пространства вводятся аналогично однородные координаты плоскости u_1, u_2, u_3, u_4 как коэффициенты ее уравнения в однородных координатах.

Уравнение

$$u_1x_1^0 + u_2x_2^0 + u_3x_3^0 + u_4x_4^0 = 0$$

при фиксированных x_i^0 и переменных u_i задает связку плоскостей с центром (x_i^0).

Тангенциальным уравнением кривой называется уравнение

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

которому удовлетворяют однородные координаты касательных кривой и только они. Составим тангенциальное уравнение невырожденной кривой второго порядка.

В § 8 гл. VIII получено уравнение касательной кривой второго порядка в декартовых координатах. При переходе к однородным координатам это уравнение приводится к следующей симметричной форме:

$$x_1F_{x_1'} + x_2F_{x_2'} + x_3F_{x_3'} = 0,$$

где

$$F_{x_1'} = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3',$$
$$F_{x_2'} = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{22}x_3',$$
$$F_{x_3'} = a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3'.$$

Отсюда следует, что однородные координаты касательной в точке (x_1', x_2', x_3') суть

$$u_1 = F_{x_1'},\quad u_2 = F_{x_2'},\quad u_3 = F_{x_3'}.$$

Решая эти три уравнения относительно x_1', x_2', x_3' (детерминант системы отличен от нуля, так как кривая не вырождается), получим для них линейные выражения относительно

u_1, u_2, u_3. Так как точка (x'_i) лежит на кривой, то ее координаты удовлетворяют уравнению кривой. Подставляя в уравнение кривой x_i, выраженные через u_i, получаем тангенциальное уравнение кривой. Очевидно, оно будет второй степени и однородно относительно координат u_i

$$2\Phi(u_1, u_2, u_3) = b_{11}u_1^2 + 2b_{12}u_1u_2 + \cdots + b_{33}u_3^2 = 0. \quad (***)$$

В связи с этим говорят, что кривая второго порядка является *кривой второго класса*.

Выясним, что *представляет собой геометрически совокупность прямых, координаты которых удовлетворяют произвольному уравнению вида* (***). Как только что показано, это может быть совокупность касательных к невырожденной кривой второго порядка. Однако это не исчерпывает всех возможностей. Например, уравнение

$$(\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3)(\beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3) = 0$$

задает два пучка прямых с центрами (α_i) и (β_i).

В § 8 было показано, что любая кривая второго порядка

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0$$

может быть проективным преобразованием переведена в кривую

$$\varepsilon_1x_1^2 + \varepsilon_2x_2^2 + \varepsilon_3x_3^2 = 0,$$

где ε_i — числа, равные -1, 1 или 0. Аналитически это значит, что форму $\sum a_{ij}x_ix_j$ всегда можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}x_j\right)^2,$$

причем детерминант, составленный из α_{ij}, отличен от нуля.

Отсюда следует, что уравнение (***) всегда можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}u_j\right)^2 = 0.$$

Если все $\varepsilon_i \neq 0$, то это уравнение задает касательные к невырожденной кривой второго порядка. Если один из коэффициентов ε_i, например ε_3, равен нулю, то уравнение

$$\varepsilon_1 (\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3)^2 + \varepsilon_2 (\alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3)^2 = 0$$

можно представить в виде произведения двух линейных относительно u_i множителей (вещественных или комплексных)

$$(\beta_{11}u_1 + \beta_{12}u_2 + \beta_{13}u_3)(\beta_{21}u_1 + \beta_{22}u_2 + \beta_{23}u_3) = 0$$

и уравнение задает два различных пучка прямых. Если два коэффициента ε_i равны нулю, например ε_2 и ε_3, то оба пучка сливаются в один:

$$(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3)^2 = 0.$$

Аналогичные рассмотрения можно провести для поверхностей второго порядка в пространстве. Ограничимся формулировкой результатов.

Тангенциальное уравнение невырожденной поверхности второго порядка имеет вид

$$\sum_{i,\,j=1}^{4} a_{ij}u_iu_j = 0.$$

Совокупность плоскостей, однородные координаты которых удовлетворяют произвольному уравнению вида

$$\sum_{i,\,j=1}^{4} a_{ij}u_iu_j = 0,$$

состоит либо из касательных плоскостей невырожденной поверхности второго порядка, либо из плоскостей, проходящих через касательные некоторого конического сечения, либо из двух связок плоскостей, которые, в частности, могут сливаться.

В заключение рассмотрим так называемое *коррелятивное преобразование*. На расширенной плоскости это преобразование, которое переводит фигуру F, составленную из точек, в фигуру F', составленную из прямых так, что координаты прямой фигуры F' выражаются через координаты соответствующей точки фигуры F по формулам:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ u_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ u_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это преобразование допускает простую геометрическую интерпретацию, если $a_{ij}=a_{ji}$. Именно, оно заключается в сопоставлении точке (x_1, x_2, x_3) ее *поляры относительно* кривой второго порядка, задаваемой уравнением

$$\sum a_{ij}x_i x_j = 0.$$

Отсюда следует основное свойство коррелятивного преобразования — точки, лежащие на прямой, переходят в прямые, проходящие через точку. Это свойство коррелятивного преобразования имеет место и в общем случае $(a_{ij} \neq a_{ji})$.

В пространстве коррелятивное преобразование определяется аналогично. Каждой точке A фигуры F сопоставляется плоскость α фигуры F', координаты которой линейно выражаются через координаты точки A. Коррелятивное преобразование в пространстве можно представить через соответствие полюсов и поляр относительно поверхности второго порядка.

Упражнения

1. *Ангармоническим отношением четырех прямых* пучка называется ангармоническое отношение четырех точек пересечения этих прямых с произвольной прямой, не проходящей через центр пучка. Показать, что это определение инвариантно относительно выбора секущей прямой, и найти выражение ангармонического отношения через однородные координаты прямых.

Показать, в частности, что ангармоническое отношение прямых (u_i), (v_i), $(u_i+\lambda v_i)$, $(u_i+\mu v_i)$ равно $\frac{\lambda}{\mu}$.

Показать, что при коррелятивном преобразовании ангармоническое отношение четырех точек фигуры F равно ангармоническому отношению соответствующих прямых (плоскостей) фигуры F'.

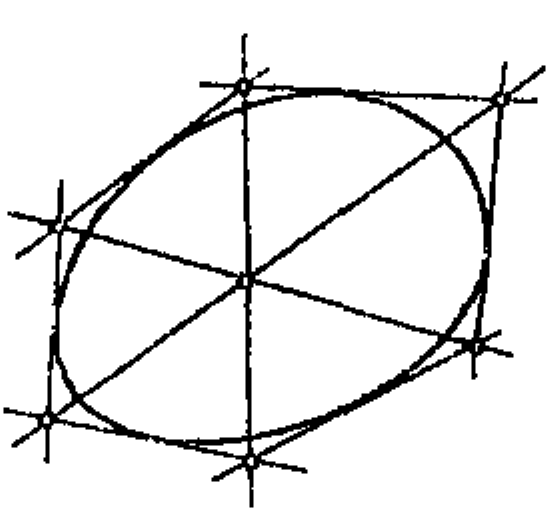


Рис. 94.

2. С помощью теоремы Паскаля (см. упр. к § 8 гл. III) доказать следующую теорему Брианшона. Три прямые попарно соединяющие противоположные вершины шестиугольника, описанного около конического сечения, пересекаются в одной точке (рис. 94).

А. В. ПОГОРЕЛОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ