Foglio 4 - Es15

Giustificazione matematica

Sfruttando il metodo Monte Carlo, per stimare un integrale su un dominio D, con funzione f, otteniamo:

$$\hat{I}_N = \frac{V_D}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Con V_D volume del dominio D e x_i punti campionati uniformemente in D.
E il limite centrale implica che per
N sufficientemente grande l'integrale $\hat{I}_N$ tende alla distribuzione normale caratterizzata da $\mathbb{E}[f]$ e $\frac{\sigma^2}{N}$.

Definiamo dunque l'errore standard dello stimatore come:

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

E garantiamo un errore massimo ϵ con confidenza $1 - \alpha$, definendo:

$$SE \leq \frac{\epsilon}{z_{\alpha/2}} \Rightarrow N \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{\epsilon}\right)^2$$

Utilizzando $\alpha = 0,05$ (confidenza 95%), e $z_{\alpha/2} \approx 1,96$.

N_{max} calcolati

Caso a

Per stimare l'area del cerchio unitario $x^2 + y^2 \leq 1$, che vale π, utilizziamo come dominio di integrazione il quadrato $[-1, 1]^2$, ottenendo:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}$$
$$V_D = 4$$
$$N_{max}^{(\pi)} = \left(\frac{1,96 \cdot 0,02057}{0,01}\right)^2 = 103.883$$

Caso b

Per stimare il volume della sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, che vale $\frac{4}{3}\pi$, utilizziamo come dominio di integrazione il cubo $[-1, 1]^3$, ottenendo:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in [-1, 1]\}$$
$$V_D = 8$$
$$N_{max}^{(\text{sfera})} = \left(\frac{1,96 \cdot 0,048}{0,01}\right)^2 = 613,397$$

Caso c

Per stimare il volume del corpo

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [-2, 2], \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 + \sin(\pi z)\}$$

utilizziamo come dominio di integrazione il cubo $[-2, 2]^3$, ottenendo:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in [-2, 2]\}$$
$$V_D = 64$$
$$N_{max}^{(\text{corpo})} = \left(\frac{1,96 \cdot 0,0165}{0,01}\right)^2 = 32.721.813$$

Il valore di N_{max} per il caso c è molto alto perché la varianza dello stimatore è elevata