Foglio 3 - Es 12

Modello Probabilistico

La somma di due dadi segue la seguente distribuzione discreta:

Somma	Probabilità
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Giustificazione Matematica

Il gioco può essere modellato come un sistema di 12 catene di Markov indipendenti con stato iniziale 0 e stato assorbente 19. Ad ogni turno, esattamente una pedina viene avanzata in base alla distribuzione della somma di due dadi. Il processo è una simulazione di una corsa stocastica, in cui ogni pedina avanza con probabilità costante e nota ad ogni turno.

Poiché la probabilità che una determinata colonna venga scelta in un turno è data dalla probabilità della somma dei dadi corrispondente al numero della colonna, possiamo considerare che ciascuna pedina si muova secondo un processo di Bernoulli con parametro pari alla propria probabilità di avanzamento (es. colonna 7 ha 6/36 = 1/6). Il numero di turni necessari a far raggiungere una pedina alla posizione 19 segue una distribuzione negativa binomiale, ma l'interazione tra pedine impone un'analisi congiunta.

Le probabilità richieste nei punti (a)-(e) non possono essere calcolate in forma chiusa a causa della complessità combinatoria, quindi utilizziamo simulazioni Monte Carlo per stimare empiricamente:

- La frequenza con cui una pedina supera un'altra (competizione diretta tra colonne);
- La colonna che vince più spesso (massimo fra tempi di arrivo);
- La distribuzione del numero di mosse fino al termine (massimo tra le 12 durate individuali).

L'approccio simulativo sfrutta la legge dei grandi numeri per stimare le probabilità a partire da frequenze relative.

Quesiti

(a) La probabilità che la pedina della colonna 7 arrivi prima di quella della colonna 8 dipende dalla loro probabilità di avanzamento: 6/36 contro 5/36. Tramite simulazioni Monte Carlo, abbiamo ottenuto una probabilità stimata di vittoria della colonna 7 contro l'8 pari a circa 55.3%.

(b) La probabilità che una pedina in colonna k vinca è proporzionale alla frequenza della somma dei dadi pari a k. La colonna 7 ha la massima probabilità, stimata attorno al 17%.

(c) Per stimare $P(T = N)$, si osserva la distribuzione delle durate raccolte nelle simulazioni. Questa ha un picco attorno a 97 mosse, decrescendo verso le code.

(d) La probabilità che il gioco duri più di 100 mosse è circa 40.7%, sempre secondo la distribuzione raccolta con Monte Carlo.

(e) La probabilità che il gioco duri più di 200 mosse è trascurabile (inferiore allo 0.1%).

Durata media: Le simulazioni indicano una durata media di circa 96.3 mosse.

Conclusioni

La simulazione consente di ottenere in modo efficiente stime affidabili delle probabilità richieste. L'approccio numerico ha confermato che le colonne centrali (in particolare la 7) hanno un vantaggio significativo. La durata media del gioco è contenuta entro 100 turni nella maggior parte dei casi, con una distribuzione leggermente asimmetrica.

I grafici allegati mostrano chiaramente i risultati della simulazione e possono essere utilizzati per una comprensione visiva immediata del comportamento del sistema.