Foglio 2 - Es 14/15

Esercizio 14

Punto uno

Il primo punto dell'esercizio ci chiede di dimostrare, per $k \in \{0, \dots N-1\}$, che vale:

$$p_{Bin(N,q)}(k+1) = \frac{q}{1-q}\frac{N-k}{k+1}p_{Bin(N,q)}(k)$$

Iniziamo sostituendo la distribuzione binomiale, $p_{Bin(N,q)}(k)$

$$p_{Bin(N,q)}(k+1) = \binom{N}{k+1}q^{k+1}(1-q)^{N-k-1}$$

E riscriviamo $\binom{N}{k+1}$ come $\frac{N-k}{k+1}\binom{N}{k}$,ottenendo:

$$p_{Bin(N,q)}(k+1) = \frac{N-k}{k+1}\binom{N}{k}q^{k+1}(1-q)^{N-k-1}$$

Dividiamo per $p_{Bin(N,q)}(k)$:

$$\frac{p_{Bin(N,q)}(k+1)}{p_{Bin(N,q)}(k)} = \frac{N-k}{k+1}\frac{q^{k+1}(1-q)^{N-k-1}}{q^k(1-q)^{N-k}}$$

E semplificando dimostriamo dunque la veridicità del primo punto

$$p_{Bin(N,q)}(k+1) = \frac{N-k}{k+1} * \frac{q}{1-q} * p_{Bin(N,q)}(k)$$

Punto due

Dimostriamo che

$$p_{Bin(N,q)}(k) = p_{Bin(N,1-q)}(N-k)$$

Riscriviamo $p_{Bin(N,1-q)}(N-k)$, come

$$p_{Bin(N,1-q)}(N-k) = \binom{N}{N-k}(1-q)^{N-k}q^k$$

Essendo $\binom{N}{N-k} = \binom{N}{k}$, otteniamo

$$p_{Bin(N,1-q)}(N-k) = \binom{N}{k}q^k(1-q)^{N-k} = p_{Bin(N,q)}(k)$$

Dimostrando il punto due.

Esercizio 15

Giustificazione matematica

Avendo $N+M$ votanti e M votano per A, mentre N scelgono casualmente tra A e B, definendo S_N come gli indecisi che votano per A, quindi il numero di successi in N prove ripetute e indipendenti, questi sono rappresentabili tramite una distribuzione binomiale $Bin(N, \frac{1}{2})$.
Dunque per vincere
A deve valere $M + Bin(N, \frac{1}{2}) > \frac{N+M}{2}$, quindi la probabilità tale per cui vinca A vale:

$$P(S_N + M > \frac{N+M}{2}) = P(S_N > \frac{N-M}{2}) = \sum_{k=\frac{N-M}{2}+1}^{N} p_{Bin(N,\frac{1}{2})}(k)$$

Commento codice Python

Per il calcolo del esempio tramite codice python ho dovuto approssimare la distribuzione binomiale a causa dell'instabilità con grandi N.

Ho utilizzato dunque una distribuzione normale standard che ci permette di approssimare $S_N = Bin(N, \frac{1}{2})$ con $N(np, np(1-p))$ cioè una distribuzione normale gaussiana di media np e varianza $np(1-p)$