Лекции по дифференциальным уравнениям

Л.А.Альсевич

Составлено на основе конспекта студента 2-го курса 5-й группы Качана Ильи

Оглавление

Тема 1

Основные понятия

1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения и их решения

Обыкновенным дифференциальным уравнением[1] называется соотношение вида

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

где F — заданная функция своих аргументов, t — независимая переменная, $x(t)$ — неизвестная функция одной переменной, $x', x'', \dots, x^{(n)}$ — ее производные.

Замечание 1 *Так как производные связаны с дифференциалами, то в уравнение вместо производных присутствовать дифференциалы.*

Пример 1 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$

Порядком ОДУ вида (1.1) называют порядок страшей производной (или старшего дифференциала), входящей в это уравнение.

Пример 2 $(x')^3 x'' = t + x'''$ — *уравнение 3-го порядка.*

Пример 3 $y\frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y}$ — *не является ОДУ* ($u(x, y)$ — *функция 2-х переменных*).

Решением ОДУ вида (1.1) порядка n называтся функция $x\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, т. е. функция, заданная на промежутке $\mathcal{I}$ (связном множестве!), дифференцируемая на $\mathcal{I}$ до порядка n включительно и обращающая уравнение (1.1) в тождество на $\mathcal{I}$. В качестве $\mathcal{I}$ может рассматривается отрезок $[a; b]$, полуинтервал $(a; b]$ или $[a; b)$, а также вся чистовая прямая $(-\infty; +\infty)$.

Пример 4 *Проверить, является ли функция $x = \frac{1}{t}$, $t \neq 0$ решением уравнения $x' = -x^2$.*
Ответ: *не является* (*так как множество* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ *несвязно*).

Пример 5 *Функция $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$ является решением уравнения $x' = -x^2$.*

[1] Далее будем употреблять сокращение ОДУ

Пример 6 *Функция* $x = \frac{1}{t}$, $t < 0$ *является решением уравнения* $x' = -x^2$.

Пример 7 *Функция* $x = \frac{1}{t}$, $t \in [1;3]$ *является решением уравнения* $x' = -x^2$.

График решения уравнения (1.1) называют *интегральной кривой*.

Решение примера 7 есть *сужение* решения примера 5. Любое сужение $x_1(t)$ решения $x(t)$ уравнения (1.1) на промежуток $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ также является решением уравнения (1.1).

Если решение $x(t)$ ОДУ (1.1) не является сужением ни одного из решений уравнения (1.1), отличного от самого себя, то решение $x(t)$ называют *продолженным* или *непродолжаемым*. Нашей основной задачей в дальнейшем будет построение решения на максимально возможном промежутке.

Пример 8 $x'' + x = 0$.
Каждая из из следующих фунций: $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \cos t$, $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t \, (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ — *является решением данного уравнения.*

Совокупность решений ОДУ (1.1) порядка n, заданную формулой, содержащей n произвольных существенных постоянных[2], называют *общим решением.*

Решение ОДУ (1.1), получающееся из общего при конкрестных значениях произвольных постоянных, называют *частным решением.*

Совокупность всех решений ОДУ (1.1) называют *полным решением*[3].

Пример 9 $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$.
Функция $x(t) = (t+C)^3$ *является общим решением данного уравнения, однако функция* $x(t) \equiv 0$ *не является его частным решением. Полным решением данного уравнения будет совокупность*

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = (t+C)^3 \\ x(t) \equiv 0 \end{array} \right.$$

1.2 Опреатор дифференцирования

Введем в рассмотрение оператор дифференцирования $D := \frac{d}{dt}$. Действие этого оператора на функцию x осуществляется по правилу $Dx = \frac{dx}{dt}$.

Целые неотрицательные степени D определяются по индукции, т.е.:

$$D^0 x = x,\ D^1 x = x', \ldots,\ D^n x = D(D^{n-1}x) \Longrightarrow D^n x = \frac{d^n x}{dt^n}$$

[2]Здесь существенность означает, что несолько произвольных постоянных нельзя объединить в одну, сохранив при этом общий вид решения.

[3]Далее будем употреблять сокращения ОР, ЧР, ПР для общего, частного и полного решения соответственно

Оператор D линеен, т.е. $D(\alpha x + \beta y) = \alpha Dx + \beta Dy$, кроме того выполняется равенство $D^n \cdot D^m = D^{n+m} = D^m \cdot D^n$.

Теперь ОДУ (1.1) можно переписать в виде

$$F(t, x, Dx, \dots, D^n x) = 0. \tag{1.2}$$

1.3 Задача Коши (начальная задача)

Математически задача Коши формулируется следующим образом.

Рассмотрим уравнение $F(t, x, Dx, \dots, D^n x) = 0$ и начальные условия

$$D^k x\big|_{t=s} = \xi_k, \qquad k = \overline{0, n-1}, \tag{1.3}$$

или, в развёрнутом виде,

$$x\big|_{t=s} = \xi_0,\ Dx\big|_{t=s} = \xi_1,\ \dots,\ D^{n-1}x\big|_{t=s} = \xi_{n-1}, \tag{1.4}$$

где $s \in \mathfrak{I},\ \xi_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, n-1}$.

Решить задачу Коши означает из всех решений уравнения (1.1) выбрать то, которое удовлетворяет поставленным начальным условиям. Возникают следующие вопросы:

- Когда задача Коши разрешима?
- Когда ее решение единственно?

А посему в дальнейшем мы будем доказывать *теоремы об однозначной разрешимости*[4] задачи Коши.

Пример 10 $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$.
Посмотрим на график полного решения

$$\begin{cases} x(t) = (t+C)^3 \\ x(t) \equiv 0 \end{cases}$$

этого уравнения.

Через любую точку M вида $M(t_0, x_0)$, $t_0 \neq 0$ проходит единственная интегральная кривая. Это означает, что решение задачи Коши для рассматриваемого уравнения с начальным условием $x\big|_{t=t_0} = x_0$ единственно. В то же время, через любую точку N вида $N(t_0, 0)$ проходят по крайней мере две интегральные кривые, а значит, решение соответствующей задачи Коши не единственно.

[4]Далее будем употреблять сокращение ТОР

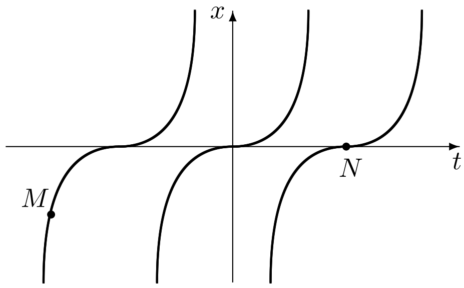

Рис. 1.1: График ПР уравнения $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$

1.4 Простейшие уравнения первого порядка (П−1)

Простейшее уравнение 1-го порядка имеет вид

$$Dx = f(t), \qquad t \in \mathfrak{I} \tag{1.5}$$

В курсе матанализа было получено, что решением уравнения (1.5) является функция

$$x(t) = \int f(t)\,dt = C + \int\limits_s^t f(\tau)\,d\tau, \tag{1.6}$$

где $\int_s^t f(\tau)\,d\tau$ задаёт одну из первообразных[5].

Задача Коши для уравнения (1.5) примет вид

$$\begin{array}{ll} Dx = f(t), & \quad t \in \mathfrak{I} \\ x\big|_{t=s} = \xi, & \quad s \in \mathfrak{I},\ \xi \in \mathbb{R} \end{array} \tag{1.7}$$

Теорема 1.1 (ТОР для П−1) *Пусть функция $f(t) \in C(\mathfrak{I})$. Тогда $\forall s \in \mathfrak{I}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$ задача Коши (1.7) однозначно разрешима на $\mathfrak{I}$ и её решение определяется по формуле*

$$x(t) = \xi + \int\limits_s^t f(\tau)\,d\tau \tag{1.8}$$

Доказательство. Удовлетворим решение (1.6) начальному условию:

$$\xi = C + \int\limits_s^s f(\tau)\,d\tau \overset{f\text{ непр.}}{\iff} \xi = C + 0 \implies C = \xi\,.$$

Единственность решения следует из того, что C определяется однозначно. □

Простейшее уравнение n−го порядка (П−n) — это уравнение вида

$$D^n x = f(t), \qquad t \in \mathfrak{I} \tag{1.9}$$

[5]В качестве нижнего передела интегрирования можно брать любое $s \in \mathfrak{I}$, поскольку C — произвольная постоянная.

Теорема 1.2 [6] *Общее решение уравнения* (1.9) *можно представить в виде*

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_k t^k+\int\limits_s^t\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}f(\tau)\,d\tau. \tag{1.10}$$

Доказательство. Покажем индукцией по m, что $D^{n-m}x$ может быть представлен в виде

$$D^{n-m}x=\sum_{k=0}^{m-1}C_k t^k+\int\limits_s^t\left(\int\limits_s^{\tau_1}\left(\dots\int\limits_s^{\tau_{m-1}}f(\tau_m)\,d\tau_m\dots\right)d\tau_2\right)d\tau_1. \tag{1.11}$$

Сперва проверим *базу индукции* при $m=1$ и $m=2$:

$$D(D^{n-1}x)=f(t)\implies D^{n-1}x=C_1+\int_s^t f(\tau)\,d\tau$$

$$D(D^{n-2}x)=D^{n-1}x\implies D^{n-2}x=C_2+\int_s^t\left(C_1+\int_s^\sigma f(\tau)\,d\tau\right)d\sigma=$$

$$=C_2+C_1(t-s)+\int_s^t\left(\int_s^\sigma f(\tau)d\tau\right)d\sigma=C_3+C_1t+\int_s^t d\sigma\int_s^\sigma f(\tau)d\tau.$$

Теперь докажем *индуктивный переход*: предположим, что утверждение уже доказано для $m-1$, т.е. верно равенство

$$D^{n-m+1}x=\sum_{k=0}^{m-2}C_k t^k+\int\limits_s^t\left(\int\limits_s^{\tau_1}\left(\dots\int\limits_s^{\tau_{m-2}}f(\tau_{m-1})\,d\tau_{m-1}\dots\right)d\tau_2\right)d\tau_1.$$

Переобозначим в последнем интеграле верхние пределы ($t:=\tau_1,\ \ \tau_1:=\tau_2,\ \dots,\ \tau_{m-2}:=\tau_{m-1},\ \ \tau_{m-1}:=\tau_m$) и проинтегрируем последнее равенство в пределах от s до t:

$$D^{n-m}x=C+\int\limits_s^t\left(\sum_{k=0}^{m-2}C_k t^k+\int\limits_s^{\tau_1}\left(\int\limits_s^{\tau_2}\left(\dots\int\limits_s^{\tau_{m-1}}f(\tau_m)\,d\tau_m\dots\right)d\tau_3\right)d\tau_2\right)d\tau_1=$$

$$=C+\sum_{k=0}^{m-2}C_k\frac{t^{k+1}-s^{k+1}}{k+1}+\int\limits_s^t\left(\int\limits_s^{\tau_1}\left(\dots\int\limits_s^{\tau_{m-1}}f(\tau_m)\,d\tau_m\dots\right)d\tau_2\right)d\tau_1=$$

$$=C+\underbrace{\sum_{k=0}^{m-2}\frac{C_k s^{k+1}}{k+1}}_{\text{const}}+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{C_k}{k+1}t^k+\int\limits_s^t\left(\int\limits_s^{\tau_1}\left(\dots\int\limits_s^{\tau_{m-1}}f(\tau_m)\,d\tau_m\dots\right)d\tau_2\right)d\tau_1=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}B_k t^k+\int\limits_s^t\left(\int\limits_s^{\tau_1}\left(\dots\int\limits_s^{\tau_{m-1}}f(\tau_m)\,d\tau_m\dots\right)d\tau_2\right)d\tau_1,$$

[6] Доказательство этой теоремы на лекции было предложено как упражнение.

где $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$ — произвольные действительные постоянные. Итак, переход доказан, а вместе с ним и равенство (1.11). Полагая в нём $m := n$, получим вид общего решения уравнения (1.9):

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k t^k + \int\limits_s^t \left(\int\limits_s^{\tau_1} \left(\ldots \int\limits_s^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\, d\tau_n \ldots \right) d\tau_2 \right) d\tau_1 \tag{1.12}$$

Осталось заметить, что интеграл в этом равенстве получается из интеграла (1.10) $(n-1)$–кратным интегрированием по частям. Действительно, выполняя замены переменных интегрирования, получим:

$$\int\limits_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau = \int\limits_s^t \frac{(t-\tau_1)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau_1)\, d\tau_1 = \begin{bmatrix} u = \frac{(t-\tau_1)^{n-1}}{(n-1)!}, & du = -\frac{(t-\tau_1)^{n-2}}{(n-2)!} d\tau_1 \\ dv = f(\tau_1)\, d\tau_1, & v = \int\limits_s^{\tau_1} f(\tau_n)\, d\tau_n \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{(t-\tau_1)^{n-1}}{(n-1)!} \int\limits_s^{\tau_1} f(\tau_n)\, d\tau_n \right) \Bigg|_{\tau_1 = s}^{t} + \int\limits_s^t \frac{(t-\tau_1)^{n-2}}{(n-2)!} \left(\int\limits_s^{\tau_1} f(\tau_n)\, d\tau_n \right) d\tau_1 =$$

$$= \int\limits_s^t \frac{(t-\tau_1)^{n-2}}{(n-2)!} \left(\int\limits_s^{\tau_1} f(\tau_n)\, d\tau_n \right) d\tau_1 = \begin{bmatrix} u = \frac{(t-\tau_1)^{n-2}}{(n-2)!}, & du = -\frac{(t-\tau_1)^{n-3}}{(n-3)!} d\tau_1 \\ dv = \left(\int\limits_s^{\tau_1} f(\tau_n) d\tau_n \right) d\tau_1, & v = \int\limits_s^{\tau_1} \left(\int\limits_s^{\tau_2} f(\tau_n) d\tau_n \right) d\tau_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{(t-\tau_1)^{n-2}}{(n-2)!} \int\limits_s^{\tau_1} \left(\int\limits_s^{\tau_2} f(\tau_n) d\tau_n \right) d\tau_2 \right) \Bigg|_{\tau_1 = s}^{t} + \int\limits_s^t \frac{(t-\tau_1)^{n-3}}{(n-3)!} \left(\int\limits_s^{\tau_1} \left(\int\limits_s^{\tau_2} f(\tau_n) d\tau_n \right) d\tau_2 \right) d\tau_1 =$$

$$= \int\limits_s^t \frac{(t-\tau_1)^{n-3}}{(n-3)!} \left(\int\limits_s^{\tau_1} \left(\int\limits_s^{\tau_2} f(\tau_n) d\tau_n \right) d\tau_2 \right) d\tau_1 = \cdots =$$

$$= \int\limits_s^t (t-\tau_1) \left(\int\limits_s^{\tau_1} \left(\int\limits_s^{\tau_2} \left(\ldots \int\limits_s^{\tau_{n-2}} f(\tau_n)\, d\tau_n \ldots \right) d\tau_3 \right) d\tau_2 \right) d\tau_1 =$$

$$\begin{bmatrix} u = t - \tau_1, & du = -d\tau_1 \\ dv = \left(\int\limits_s^{\tau_1} \left(\int\limits_s^{\tau_2} \left(\ldots \int\limits_s^{\tau_{n-2}} f(\tau_n)\, d\tau_n \ldots \right) d\tau_3 \right) d\tau_2 \right) d\tau_1, & v = \int\limits_s^{\tau_1} \left(\int\limits_s^{\tau_2} \left(\int\limits_s^{\tau_3} \left(\ldots \int\limits_s^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\, d\tau_n \ldots \right) d\tau_4 \right) d\tau_3 \right) d\tau_2 \end{bmatrix}$$

$$= \int\limits_s^t \left(\int\limits_s^{\tau_1} \left(\int\limits_s^{\tau_2} \left(\int\limits_s^{\tau_3} \left(\ldots \int\limits_s^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\, d\tau_n \ldots \right) d\tau_4 \right) d\tau_3 \right) d\tau_2 \right) d\tau_1,$$

что и требовалось. $\square$

Тема 2

Простейшие уравнения с квазимногочленами

2.1 Комплекснозначные решения

Комплекснозначные функции — это функции действительного аргумента, принимающие комплексные значения.

Комплекснозначная функция определяется следующим образом:

$$h(t) = f(t) + i\,g(t), \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — вещественнозначные функции.

Если $f(t)$ и $g(t)$ дифференцируемы, то и $h(t)$ дифференцируема, причем

$$Dh(t) = Df(t) + i\,Dg(t)\,.$$

Если $f(t)$ и $g(t)$ интегрируемы, то и $h(t)$ интегрируема, причем

$$\int h(t)\,dt = \int Df(t)\,dt + i\int Dg(t)\,dt\,.$$

Важнейшей комплекснозначной функцией является *комплекснозначная экспонента* $e^{\nu t},\ \nu = \lambda + i\,\mu$. Воспользовавшись формулой Эйлера, её можно переписать в виде

$$e^{\nu t} = e^{(\lambda + i\,\mu)t} = e^{\lambda t}e^{i\mu t} = e^{\lambda t}(\cos\mu t + i\sin\mu t)\,.$$

Используя эту формулу нетрудно получить, что $D(e^{\nu t}) = \nu e^{\nu t},\ \nu = \lambda + i\,\mu$.

Рассмотрим П$-$1 с *комплекснозначной неоднородностью*, т.е. уравнение вида

$$Dz = h(t)\,, \qquad t \in \mathcal{J}\,, \tag{2.1}$$

где $z = x + iy$ — комплекснозначная переменная, а $h(t) = f(t) + i\,g(t)$ — комплекснозначная функция.

В силу критерия равенства комплексных чисел уравнение (2.1) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} Dx = f(t)\,, \\ Dy = g(t)\,. \end{cases}$$

Комплекснозначным решением уравнения (2.1) называют комплекснозначную функцию $z(t)$, определённую на промежутке $\mathcal{I}$, дифференцируемую на $\mathcal{I}$ и обращающую уравнение (2.1) в тождество на $\mathcal{I}$.

Из вышесказанного следует, что ОР уравнения (2.1) определяется по формуле

$$z(t) = C + \int_s^t h(\tau)\, d\tau\,, \qquad s \in \mathcal{I}\,,\ C \in \mathbb{C}\,. \tag{2.2}$$

2.2 Квазимногочлены

Многочленом степени n называют выражение вида $P(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$.

При рассмотрении многочленов будем считать, что их старшие коэффициенты отличны от нуля.

Любой комплекснозначный многочлен $P(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k t^k$, $c_k = a_k + i\, b_k$, может быть представлен в виде

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + i \sum_{k=0}^{n} b_k t^k = H(t) + i\, R(t)\,,$$

где $H(t)$ и $R(t)$ — вещественнозначные многочлены.

Очевидно, что при дифференцировании многочлена его степень понижается на 1, а при интегрировании — повышается на 1.

Квазимногочленом называют выражение вида

$$R(t) = \sum_{l=0}^{m} P_l(t) e^{\gamma_l t}, \qquad \gamma_k \neq \gamma_j \ \text{при}\ k \neq j\,,$$

где $P_l(t)$ — комплекснозначные многочлены, $e^{\gamma_l t}$ — комплекснозначные экспоненты.

Отметим, что имеют место следующие представления

$$D(P(t)e^{\gamma t}) = Q(t)e^{\gamma t}, \qquad \deg Q(t) = \deg P(t)$$

$$\int \big(P(t)e^{\gamma t}\big)\, dt = \begin{bmatrix} u = P(t) \\ dv = e^{\gamma t}\, dt \end{bmatrix} = \cdots = H(t)e^{\gamma t}, \qquad \deg H(t) = \deg P(t)$$

Теорема 2.1 (Критерий совпадения квазимногочленов)
Два квазимногочлена с приведенными подобными членами при экспонентах совпадают тогда и только тогда, когда равны их соответствующие коэффициенты.

Вычислим значение следующего выражения:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(P(t)e^{\nu t}+Q(t)e^{\overline{\nu}t}\right)= \\
&\quad=\operatorname{Re}\left(\left(P_1(t)+i\,P_2(t)\right)e^{\lambda t}e^{i\mu t}+\left(Q_1(t)+i\,Q_2(t)\right)e^{\lambda t}e^{-i\mu t}\right)= \\
&\quad=\operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}\,(\cos\mu t+i\sin\mu t)(P_1(t)+i\,P_2(t))+\right. \\
&\quad\left.+\left(Q_1(t)+i\,Q_2(t)\right)\left(\cos(-\mu t)+i\sin(-\mu t)\right)e^{\lambda t}\right)= \\
&\quad=e^{\lambda t}\operatorname{Re}(\,P_1(t)\cos\mu t+i\,P_1(t)\sin\mu t+ \\
&\quad+i\,P_2(t)\cos\mu t-P_2(t)\sin\mu t+Q_1(t)\cos\mu t- \\
&\quad-i\,Q_1(t)\sin\mu t+i\,Q_2(t)\cos\mu t+Q_2(t)\sin\mu t\,)= \\
&\quad=\;e^{\lambda t}\left(\,(P_1(t)+Q_1(t))\cos\mu t+(Q_2(t)-P_2(t))\sin\mu t\right).
\end{aligned}
$$

Окончательно получаем

$$\operatorname{Re}\left(P(t)e^{\nu t}+Q(t)e^{\overline{\nu}t}\right)=\;e^{\lambda t}\left(\,M(t)\cos\mu t+N(t)\sin\mu t\right)\;,$$

где $M(t)$ и $N(t)$ — вещественнозначные многочлены.

2.3 Простейшие уравнения с квазимногочленами

Рассмотрим уравнение вида

$$Dz=h(t),\qquad t\in\mathfrak{I},\tag{2.3}$$

где $h(t)=P_0(t)+\sum\limits_{l=1}^{m}P_l(t)e^{\nu_l t}$, $\nu_k\neq\nu_j$ при $k\neq j$ — квазимногочлен.

Для уравнения (2.3) ОР определяется по формуле

$$z(t)=C+\int\limits_s^t h(\tau)\,d\tau.\tag{2.4}$$

Лемма 2.1 *Пусть $z_1(t)$, $z_2(t)$, … , $z_r(t)$ — решения простейших дифференциальных уравнений $Dz=h_1$, $Dz=h_2$, … , $Dz=h_r$ соответственно. Тогда функция*

$$z(t)=\sum_{k=1}^{r}z_k(t)$$

является решением следующего уравнения:

$$Dz=h(t),\qquad h(t)=\sum_{k=1}^{r}h_k(t).$$

Доказательство. Поскольку каждая функция $z_k(t)$ является решением уравнения $Dz = h_k(t)$, то $Dz_k(t) \equiv h_k(t) \quad \forall k = \overline{1, r}$. Тогда

$$Dz(t) = D\left(\sum_{k=1}^{r} z_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{r} Dz_k(t) \equiv \sum_{k=1}^{r} h_k(t) = h(t),$$

откуда и следует, что $z(t)$ — решение уравнения $Dz = h(t)$. $\square$

Лемма 2.2 *Общее комплекснозначное решение уравнения* $Dz = P_0(t)$ ($P_0(t)$ — *комплекснозначный многочлен*) *определяется по формуле*

$$z(t) = C + t\,Q_0(t)\,,$$

где C — *произвольная комплексная постоянная,* $Q_0(t)$ — *комплекснозначный многочлен степени* $\deg Q_0 = \deg P_0$, *и коэффициенты* $Q_0(t)$ *однозначно выражаются через коэффициенты* $P_0(t)$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (2.4) :

$$\begin{aligned} z(t) &= C_1 + \int\limits_s^t P_0(\tau)\,d\tau = \widetilde{C_1} + R(t) = \begin{bmatrix} \deg P_0 = m \\ \deg R = m+1 \end{bmatrix} = \\ &= \widetilde{C_1} + a_{m+1}t^{m+1} + \cdots + a_1 t + a_0 = [a_k \in \mathbb{C}] = \\ &= \widetilde{C_1} + a_0 + t(a_{m+1}t^m + \cdots + a_2 t + a_1) = C + t\,Q_0(t). \end{aligned}$$

Из критерия совпадения квазимногочленов и правил интегрирования следует, что коэффициенты $Q_0(t)$ однозначно выражаются через коэффициенты $P_0(t)$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.3 *Общее комплекснозначное решение уравнения*

$$Dz = P(t)e^{\nu t}$$

определяется по следующей формуле:

$$z(t) = C + Q(t)e^{\nu t},$$

где C — *произвольная комплексная постоянная,* $Q(t)$ — *комплекснозначный многочлен степени* $\deg Q = \deg P$, *и коэффициенты* $Q(t)$ *однозначно выражаются через коэффициенты* $P(t)$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (2.4) :

$$z(t) = C + \int\limits_s^t P(\tau)e^{\nu\tau}d\tau \overset{\text{см.§2.2}}{=} C + Q(t)e^{\nu t}, \qquad \deg Q = \deg P$$

Однозначное выражение для коэффициентов следует из критерия совпадения квазимногочленов и правил интегрирования. $\square$

Теорема 2.2 *Общее комплекснозначное решение простейшего уравнения с квазимногочленом:*

$$Dz = P_0(t) + \sum_{l=1}^{m} P_l(t) e^{\nu_l t}$$

определяется по формуле:

$$z(t) = C + t\,Q_0(t) + \sum_{l=1}^{m} Q_l(t) e^{\nu_l t}, \tag{2.5}$$

где C — произвольная комплексная постоянная, $Q_0(t), Q_l(t)$ — комплекснозначные многочлены степени $\deg Q_0 = \deg P_0$, $\deg Q_l = \deg P_l$, и коэффициенты $Q_0(t)$, $Q_l(t)$ однозначно выражаются через коэффициенты $P_0(t)$, $P_l(t)$ соответственно.

Доказательство. Следует из трёх предыдущих лемм. □

Тема 3

Линейные однородные уравнения со стационарным оператором (с постоянными коэффициентами)

3.1 Линейные дифференциальные уравнения порядка n в основной форме

Так называют уравнения вида

$$D^n x + p_{n-1}(t) D^{n-1} x + \cdots + p_1(t) Dx + p_0(t) x = f(t), \qquad t \in \mathcal{I}, \tag{3.1}$$

где $p_k(t)$ — коэффициенты уравнения, а $f(t)$ — неоднородность.

Решением уравнения (3.1) называется функция $x\colon\ \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, заданная на промежутке $\mathcal{I}$ (связном множестве!), дифференцируемая на $\mathcal{I}$ до порядка n включительно и обращающая уравнение (3.1) в тождество на $\mathcal{I}$.

Если $f(t) \equiv 0$ на промежутке $\mathcal{I}$, то уравнение (3.1) называют *однородным* линейным уравнением. В противном случае уравнение называют *неоднородным*.

Будем рассматривать случай, когда уравнение (3.1) имеет вид

$$D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \cdots + a_1 Dx + a_0 x = f(t), \qquad a_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1, n-1}, \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) называют *линейным уравнением $n-$го порядка с постоянными коэффициентами*. Соответствующее однородное уравнение

$$D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \cdots + a_1 Dx + a_0 x = 0 \tag{3.3}$$

называется линейным однородным уравнением, соответствующим линейному неоднородному уравнению (3.2).

Введем в рассотрение оператор L_n:

$$L_n = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 D^0. \tag{3.4}$$

Действие оператора на функцию x определяется следующим образом:

$$L_n x = D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \cdots + a_1 Dx + a_0 x\,.$$

В силу линейности $D^0, D, \ldots, D^n$ оператор L_n линеен, т.е.

$$L_n(\alpha x + \beta y) = \alpha L_n x + \beta L_n y\,.$$

Теперь уравнения (3.2), (3.3) перепишутся в виде

$$L_n x = f(t), \qquad t \in \mathfrak{I} \tag{3.5}$$

$$L_n x = 0, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

Оператор L_n называют *стационарным оператором n–го порядка*. А посему уравнение (3.2) также принято называть *линейным уравнением со стационарным оператором*[1].

3.2 Линейные дифференциальные уравнения со стационарным оператором 1-го порядка

Будем рассматривать СтЛУ-1 вида

$$Dz - \nu z = h(t), \qquad t \in \mathfrak{I}\,, \tag{3.7}$$

где $h(t)$ — комплекснозначная функция, ν — комплексная постоянная.

Задача состоит в том, чтобы найти ОР уравнения (3.7), а также ОР уравнения (3.7) с квазимногочленом.

Уравнение (3.7) можно переписать в виде

$$L_1 z = h(t), \qquad L_1 = D - \nu D^0$$

Лемма 3.1 (основная) *Справедливо следующее представление*

$$L_1 z = e^{\nu t} D\left(e^{-\nu t} z\right) \tag{3.8}$$

Доказательство. $e^{\nu t} D\left(e^{-\nu t} z\right) = e^{\nu t}\left(e^{-\nu t} Dz - \nu e^{-\nu t} z\right) = Dz - \nu z = L_1 z\,.$ □

На основании этой леммы

$$\text{Уравнение (3.7)} \iff e^{\nu t} D\left(e^{-\nu t} z\right) = h(t) \iff D\left(e^{-\nu t} z\right) = e^{-\nu t} h(t).$$

Введём новую функцию $W(t) = e^{-\nu t} z(t)$. Тогда уравнение (3.7) запишется в виде

$$DW = e^{-\nu t} h(t).$$

Итак, относительно W получили простейшее дифференциальное уравнение 1-го порядка, а значит, его общее решение

$$W(t) = C + \int_s^t e^{-\nu\tau} h(\tau)\, d\tau \iff e^{-\nu t} z(t) = C + \int_s^t e^{-\nu\tau} h(\tau)\, d\tau \iff$$

$$\iff z(t) = Ce^{\nu t} + e^{\nu t}\int_s^t e^{-\nu\tau} h(\tau)\, d\tau = Ce^{\nu t} + \int_s^t e^{\nu t} \cdot e^{-\nu\tau} h(\tau)\, d\tau.$$

[1] Далее будем пользоваться сокращением СтЛУ-n — стационарное линейное уравнение n–го порядка.

Таким образом, ОР уравнения (3.7) определяется по формуле

$$z(t) = Ce^{\nu t} + \int\limits_s^t e^{\nu(t-\tau)} h(\tau)\, d\tau \tag{3.9}$$

Теорема 3.1 (ТОР для СтЛУ-1) *Пусть функция* $h(t) \in C(\mathfrak{I})$. *Тогда* $\forall s \in \mathfrak{I}$, $\forall \sigma \in \mathbb{C}$ *решение задачи Коши*

$$\begin{aligned} &Dz - \nu z = h(t), \qquad t \in \mathfrak{I} \\ &z|_{t=s} = \sigma \end{aligned} \tag{3.10}$$

существует и единственно и определяется по формуле

$$z(t) = e^{\nu(t-s)}\sigma + \int\limits_s^t e^{\nu(t-\tau)} h(\tau)\, d\tau. \tag{3.11}$$

Доказательство. Воспользуемся соотоношением (3.8) и перепишем задачу Коши с учётом основной леммы:

$$\begin{aligned} &D\left(e^{-\nu t} z\right) = e^{-\nu t} h(t), \qquad t \in \mathfrak{I} \\ &z|_{t=s} = \sigma. \end{aligned}$$

Обозначая $W(t) = e^{-\nu t} z(t)$, получим задачу Коши относительно переменной W:

$$\begin{aligned} &W = e^{-\nu t} h(t), \qquad t \in \mathfrak{I} \\ &W|_{t=s} = e^{-\nu s}\sigma. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Поскольку функция $e^{-\nu t} h(t)$ является непрерывной на $\mathfrak{I}$ как произведение непрерывных функций, то на основани ТОР для П-1 задача Коши (3.12) однозначно разрешима на $\mathfrak{I}$, и её решение определяется по формуле

$$W(t) = e^{-\nu s}\sigma + \int\limits_s^t e^{\nu \tau} h(\tau)\, d\tau,$$

или

$$e^{-\nu t} z(t) = e^{-\nu s}\sigma + \int\limits_s^t e^{\nu \tau} h(\tau)\, d\tau,$$

что равносильно (3.11). Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим СтЛУ-1 с квазимногочленом вида

$$Dz - \nu z = P_0(t) e^{\nu t} + \sum_{l=1}^{m} P_l(t) e^{\gamma_l t}, \tag{3.13}$$

где $P_0(t), P_l(t)$ — комплекснозначные многочлены, $\nu \neq \gamma_l \quad \forall l = \overline{1, m}$.

Теорема 3.2 *Общее комплекснозначное решение уравнения* (3.13) *определяется по формуле*

$$z(t) = Ce^{\nu t} + t\,Q_0(t)e^{\nu t} + \sum_{l=1}^{m} Q_l(t)e^{\gamma_l t},$$

где C — произвольная комплексная постоянная, $Q_0(t), Q_l(t)$ — комплекснозначные многочлены степени $\deg Q_0 = \deg P_0$, $\deg Q_l = \deg P_l$, и коэффициенты $Q_0(t)$, $Q_l(t)$ однозначно выражаются через коэффициенты $P_0(t)$, $P_l(t)$ соответственно.

Доказательство. Воспользуемся соотношением (3.8) и перепишем уравнение (3.13):

$$e^{\nu t} D\left(e^{-\nu t} z\right) = P_0(t)e^{\nu t} + \sum_{l=1}^{m} P_l(t)e^{\gamma_l t} \iff D\left(e^{-\nu t} z\right) = P_0(t) + \sum_{l=1}^{m} P_l(t)e^{(\gamma_l - \nu)t}.$$

Сделав замену $W(t) = e^{-\nu t} z(t)$, приходим к П−1 с квазимногочленом, ОР которого запишется по формуле (2.5) из § 2.3. Следовательно,

$$e^{-\nu t} z(t) = C + t\,Q_0(t) + \sum_{l=1}^{m} Q_l(t)e^{(\gamma_l - \nu)t},$$

где C — произвольная комплексная постоянная, $Q_0(t), Q_l(t)$ — комплекснозначные многочлены степени $\deg Q_0 = \deg P_0$, $\deg Q_l = \deg P_l$, и коэффициенты $Q_0(t)$, $Q_l(t)$ однозначно выражаются через коэффициенты $P_0(t)$, $P_l(t)$ соответственно.

Умножая последнее равенство на $e^{\nu t}$, приходим к требуемой формуле. □

3.3 Факторизация оператора L_n (разложение на множители)

Напомним определение оператора L_n:

$$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 D^0. \tag{3.14}$$

Запишем следующий многочлен:

$$\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \cdots + a_1\nu + a_0 \tag{3.15}$$

Многочлен (3.15) называют *характеристическим многочленом* оператора L_n, а алгебраическое уравнение

$$\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \cdots + a_1\nu + a_0 = 0 \tag{3.16}$$

называют *характеристическим уравнением* оператора L_n. Корни этого уравнения называют *характеристическими числами* оператора L_n.

Пусть многолен (3.15) имеет слеующие

Корни	Их кратности
ν_1	n_1
ν_2	n_2
$\dots$	$\dots$
ν_m	n_m

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$$

Тогда $\quad \nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \dots + a_1\nu + a_0 = (\nu-\nu_1)^{n_1}(\nu-\nu_2)^{n_2}\dots(\nu-\nu_m)^{n_m}.$

В случае $n = 2$ имеем оператор

$$L_2 = D^2 + a_1 D + a_0, \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{C}.$$

Его характеристический многочлен раскладывается на множители

$$\nu^2 + a_1\nu + a_0 = (\nu-\nu_1)(\nu-\nu_2),$$

где ν_1, ν_2 — корни многочлена, для которых выполняется теорема Виета:

$$\begin{cases} \nu_1 + \nu_2 = -a_1 \\ \nu_1\nu_2 = a_0 \end{cases}$$

Возникает вопрос: а нельзя ли сам оператор L_2 „разлжить на множители“, т.е. представить в виде „произведения“(композиции) операторов $(D-\nu_1 D^0)(D-\nu_2 D^0)$?

Из теории оператораторов известно, что два оператора равны тогда и только тогда, когда совпадают их области определения и равны результаты их действий.

Оба оператора L_2 и $(D-\nu_1 D^0)(D-\nu_2 D^0)$ определены на множестве дважды дифференцируемых функций. Рассмотрим результаты их действий:

$$\begin{gathered} (D-\nu_1 D^0)(D-\nu_2 D^0)x = (D-\nu_1 D^0)(Dx-\nu_2 D^0 x) = \\ D(Dx-\nu_2 x) - \nu_1 D^0(Dx-\nu_2 x) = D^2x - \nu_2 Dx - \nu_1 Dx + \nu_1\nu_2 x = \\ D^2 x - (\nu_1+\nu_2)Dx + \nu_1\nu_2 x = D^2 x + a_1 Dx + a_0 x = L_2 x \end{gathered}$$

Итак, результаты действий совпадают, а следовательно, операторы равны, т.е.

$$L_2 = D^2 + a_1 D + a_0 = (D-\nu_1 D^0)(D-\nu_2 D^0).$$

Аналогичным образом доказывается, что для произвольного n:

$$L_n = (D-\nu_1 D^0)^{n_1}(D-\nu_2 D^0)^{n_2}\dots(D-\nu_m D^0)^{n_m}.$$

Пример 11 $D^2 z - 2Dz + z = 0 \iff (D-D^0)^2 z = 0.$

Пример 12 $D^2 z - 5Dz + 6z = 0 \iff (D-2D^0)(D-3D^0)z = 0.$

3.4 Построение решения однородного СтЛУ-n

Нас будет интересовать ОР уравнения

$$L_n x = 0, \tag{3.17}$$

где $a_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = \overline{0, n-1}$ и x — *вещественнозначная* функция.

Но прежде рассмотрим уравнение

$$L_n z = 0, \tag{3.18}$$

где $a_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = \overline{0, n-1}$ и $z = x + i\,y$ — *комплекснозначная* функция. Из определения следует:

$$L_n z = 0 \iff \begin{cases} L_n x = 0, \\ L_n y = 0. \end{cases}$$

Поэтому если мы найдем комплексное решение $z(t)$ уравнения (3.18), то действительное решение $x(t)$ уравнения (3.17) получится из него выделением действительной части: $x(t) = \mathrm{Re}(z(t))$.

Рассмотрим случай $n = 2$ для уравнения (3.18). Если ν_1, ν_2 — собственные значения оператора L_n, то

$$L_2 z = 0 \iff (D - \nu_1 D^0)\underbrace{(D - \nu_2 D^0)z}_{W} = 0 \iff (D - \nu_1 D^0)W = 0.$$

ОР последнего уравнения (это СтЛУ-1) определяется по формуле $W(t) = Ce^{\nu_1 t}$. Приходим к уравнению (также СтЛУ-1)

$$(D - \nu_2 D^0)z = C_1 e^{\nu_1 t}$$

Его общее решение:

$$z(t) = \widetilde{C_2} e^{\nu_2 t} + \int_s^t e^{\nu_2(t-\tau)} \cdot C_1 e^{\nu_1 \tau} d\tau = \widetilde{C_2} e^{\nu_2 t} + C_1 e^{\nu_2 t} \int_s^t e^{(\nu_1 - \nu_2)\tau} d\tau.$$

Поэтому:

1. Если $\nu_1 \neq \nu_2$, то $z(t) = C_2 e^{\nu_2 t} + \widetilde{C_1} e^{\nu_1 t} = \sum\limits_{j=1}^{2} Q_j(t) e^{\nu_j t}$, где $Q_j(t)$ — многочлены с произвольными комплексными коэффициентами, а их степени $\deg Q_j(t) = 0$, т.е. на 1 меньше кратности соответствующих собственных значений ν_j.

2. Если $\nu_1 = \nu_2$, то $z(t) = (C_1 t + C_2) e^{\nu_1 t} = \sum\limits_{j=1}^{1} Q_j(t) e^{\nu_j t}$, где $Q_j(t)$ — многочлен с произвольными комплексными коэффициентами, а его степень $\deg Q_j(t) = 1$, т.е. на 1 меньше кратности соответствующего собственного значения ν_j.

Итак, пусть

Собств. знач. L_n	Их кратности
$\nu_1 = \lambda_1 + i\,\mu_1$	n_1
$\nu_2 = \lambda_1 - i\,\mu_1$	n_1
$\ldots$	$\ldots$
$\nu_{2r-1} = \lambda_r + i\,\mu_r$	n_r
$\nu_{2r} = \lambda_r - i\,\mu_r$	n_r
$\ldots$	$\ldots$
$\nu_{2r+1} \in \mathbb{R}$	n_{2r+1}
$\ldots$	$\ldots$
$\nu_m \in \mathbb{R}$	n_m

$$2(n_1 + \cdots + n_r) + n_{2r+1} + \cdots + n_m = n.$$

Тогда, обобщая полученный выше результат на случай произвольного n (например, методом математической индукции), получаем, что ОР уравнения (3.18) определяется по формуле

$$z(t) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)e^{\nu_j t}, \tag{3.19}$$

где ν_j — собственные значения оператора L_n, $Q_j(t)$ — комплекснозначные многочлены с произвольными комплексными коэффициентами степени $\deg Q_j(t) = n_j - 1$, т.е. на 1 меньше кратности собственных значений ν_j.

Формулу (3.19) запишем несколько иначе:

$$z(t) = \sum_{j=1}^{2r} Q_j(t)e^{\nu_j t} + \sum_{l=2r+1}^{m} Q_l(t)e^{\nu_l t} = \sum_{j=1}^{r} \left(P_j(t)e^{\nu_j t} + R_j(t)e^{\overline{\nu_j} t}\right) + \sum_{l=2r+1}^{m} Q_l(t)e^{\nu_l t}.$$

Выделяя действительную часть полученного выражения (см. § 2.2), получим ОР уравнения (3.17):

$$x(t) = \mathrm{Re}(z(t)) = \sum_{j=1}^{r} \left(M_j(t)\cos\mu_j t + N_j(t)\sin\mu_j t\right) e^{\lambda_j t} + \sum_{l=2r+1}^{m} H_l(t)e^{\nu_l t},$$

где $M_j(t)$, $N_j(t)$ и $H_l(t)$ — вещественнозначные многочлены с произвольными действительными коэффициентами степени $\deg M_j(t) = \deg N_j(t) = n_j - 1$, $\deg H_l(t) = n_l - 1$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3.18):

$$\begin{array}{lll} L_n z = 0, & t \in \mathbb{R} & \\ D^k z\big|_{t=s} = \xi_k, & k = \overline{0, n-1} & s \in \mathbb{R},\ \xi_k \in \mathbb{R} \end{array} \tag{3.20}$$

Теорема 3.3 (ТОР для $L_n z = 0$, $a_k \in \mathbb{R}$) *Для $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall \xi_k \in \mathbb{R}$ задача Коши (3.20) однозначно разрешима на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. В случае $n = 2$ задача Коши (3.20) примет вид

$$\begin{array}{l} L_2 z = 0, \\ Dz\big|_{t=s} = \xi_1,\ z\big|_{t=s} = \xi_0 \end{array} \iff \begin{array}{l} (D - \nu_1 D^0)(D - \nu_2 D^0)z = 0, \\ Dz\big|_{t=s} = \xi_1,\ z\big|_{t=s} = \xi_0, \end{array} \tag{3.21}$$

где ν_1, ν_2 — собственные значения оператора L_2.

Обозначив $W(t) = Dz - \nu_2 D^0 z$, получим новую задачу Коши

$$\begin{array}{l} (D - \nu_1 D^0)W = 0, \\ W\big|_{t=s} = Dz\big|_{t=s} - \nu_2 z\big|_{t=s} = \xi_1 - \nu_2 \xi_0 = \overline{\xi_0}. \end{array}$$

Согласно ТОР для СтЛУ-1 эта задача однозначно разрешима на $\mathbb{R}$ относительно $W(t)$.

Относительно $z(t)$ получаем такую задачу Коши:

$$\begin{array}{l} (D - \nu_2 D^0)z = W(t), \\ z\big|_{t=s} = \xi_0. \end{array}$$

Опять-таки на основании ТОР для СтЛУ-1 $\exists! z(t)$ — решение этой задачи на $\mathbb{R}$. Это же $z(t)$ будет являтся и решением задачи Коши (3.20). Теорема доказана для случая $n = 2$. Пользуясь методом математической индукции можно обобщить полученный результат на случай произвольного n . $\square$

Задача Коши для уравнения (3.17) $\iff$ задаче Коши (3.20) вида:

$$\begin{array}{l} L_n x = 0, \\ D^k x\big|_{t=s} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1} \end{array} \tag{3.22}$$

$$\begin{array}{l} L_n y = 0, \\ D^k y\big|_{t=s} = 0, \quad k = \overline{0, n-1} \end{array} \tag{3.23}$$

Следствие 3.3.1 *Для $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall \xi_k \in \mathbb{R}$ задача Коши* (3.22) *однозначно разрешима на $\mathbb{R}$, т.е. $\exists! x(t)$, определённая на $\mathbb{R}$ и являющаяся её решением.*

Замечание 2 *Для $\forall s \in \mathbb{R}$, задача Коши* (3.23) *однозначно разрешима на $\mathbb{R}$, т.е. $\exists! y(t) \equiv 0$, являющаяся решением уравнения $L_n y = 0$.*

Задача Коши (3.23) называется *нулевой задачей Коши*. Решение задачи (3.22) можно выписать в явном виде, исходя из общего решения, удовлетворяя его начальным условиям.

3.5 Принцип суперпозиции

Рассмотрим однородное СтЛУ-n (3.17): $L_n x = 0$. Покажем, что множество его решений образует линейное пространство.

Теорема 3.4 *Пусть* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ — *частные решения уравнения* (3.17). *Тогда* $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ — *также частное решение уравнения* (3.17).

Доказательство. Следует из линейности оператора L_n. □

Теорема 3.5 *Если* $x_1(t)$ — *частное решение уравнения* (3.17), *то для* $\forall C \in \mathbb{R}$ $x(t) = Cx_1(t)$ — *также решение* (*возможно, общее*) *уравнения* (3.17).

Доказательство. Следует из линейности оператора L_n. □

Из теорем 3.4, 3.5 следует, что все решения уравнения (3.17) образуют линейное пространство.

Следствие 3.5.1 *Если* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t)$ — *решения уравнения* (3.17), *то и* $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \cdots + C_rx_r(t)$ — *также его решение.*

Рассмотрим неоднородное СтЛУ-n

$$L_nx = f(t)$$

Теорема 3.6 *Пусть* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t)$ — *решения неоднородных уравнений* $L_nx = f_1(t), L_nx = f_2(t), \ldots, L_nx = f_r(t)$ *соответственно. Тогда* $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{r} x_k(t)$ *есть решение уравнения* $L_nx = f(t)$, $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{r} f_k(t)$.

Доказательство. Следует из линейности оператора L_n. □

Замечание 3 *Из теоремы* (3.6), *в частности, следует, что решения неоднородного СтЛУ-*n *не образуют линейного пространства.*

3.6 Вронскиан

Рассмотрим n функций $\Psi_0(t), \Psi_1(t), \ldots, \Psi_{n-1}(t)$, которые дифференцируемы на $\mathfrak{I} \in \mathbb{R}$ до порядка $n-1$ включительно. Тогда определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} \Psi_0 & \Psi_1 & \ldots & \Psi_{n-1} \\ D\Psi_0 & D\Psi_1 & \ldots & D\Psi_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-1}\Psi_0 & D^{n-1}\Psi_1 & \ldots & D^{n-1}\Psi_{n-1} \end{vmatrix} = W(\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1})\big|_t$$

называют *определителем Вронского* (или *вронскианом*).

Теорема 3.7 (правило дифференцирования определителей) *Производная определителя равна сумме определителей, которые получаются из исходного заменой соответствующей строки на строку из производных*

Это же правило справедливо и для столбцов. Оно следует из определения определителя и правила нахождения производной произведения.

Теорема 3.8 *Пусть* $\Psi_0(t), \Psi_1(t), \ldots, \Psi_{n-1}(t)$ — n *решений уравнения* (3.17). *Тогда справедлива формула Остроградского-Лиувилля*

$$W(t) = W(s)e^{-a_{n-1}(t-s)}, \tag{3.24}$$

где $W(t) = W(\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1})\big|_t$, $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0 D^0$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим определитель Вронского решений уравнения (3.17):

$$W(\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1})\big|_t = \begin{vmatrix} \Psi_0 & \Psi_1 & \ldots & \Psi_{n-1} \\ D\Psi_0 & D\Psi_1 & \ldots & D\Psi_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-1}\Psi_0 & D^{n-1}\Psi_1 & \ldots & D^{n-1}\Psi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Дано, что $L_n\Psi_k(t) \equiv 0 \quad \forall k = \overline{0, n-1}$, т.е.

$$D^n\Psi_k(t) + a_{n-1}D^{n-1}\Psi_k(t) + \cdots + a_1 D\Psi_k(t) + a_0\Psi_k(t) \equiv 0 \qquad \forall k = \overline{0, n-1}$$

Отсюда получаем:

$$D^n\Psi_k(t) = -a_0\Psi_k(t) - a_1 D\Psi_k(t) - \cdots - a_{n-1}D^{n-1}\Psi_k(t) \qquad \forall k = \overline{0, n-1} \tag{3.25}$$

Вычислим по правилу производную определителя $W(t)$:

$$DW(t) = \begin{vmatrix} D\Psi_0 & \ldots & D\Psi_{n-1} \\ D\Psi_0 & \ldots & D\Psi_{n-1} \\ D^2\Psi_0 & \ldots & D^2\Psi_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-1}\Psi_0 & \ldots & D^{n-1}\Psi_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Psi_0 & \ldots & \Psi_{n-1} \\ D^2\Psi_0 & \ldots & D^2\Psi_{n-1} \\ D^2\Psi_0 & \ldots & D^2\Psi_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-1}\Psi_0 & \ldots & D^{n-1}\Psi_{n-1} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+ \begin{vmatrix} \Psi_0 & \ldots & \Psi_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-3}\Psi_0 & \ldots & D^{n-3}\Psi_{n-1} \\ D^{n-1}\Psi_0 & \ldots & D^{n-1}\Psi_{n-1} \\ D^{n-1}\Psi_0 & \ldots & D^{n-1}\Psi_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Psi_0 & \ldots & \Psi_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-3}\Psi_0 & \ldots & D^{n-3}\Psi_{n-1} \\ D^{n-2}\Psi_0 & \ldots & D^{n-2}\Psi_{n-1} \\ D^{n}\Psi_0 & \ldots & D^{n}\Psi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Все определители, кроме последнего, содержат одинаковые строки, а значит, равны нулю. Поэтому

$$DW(t) = \begin{vmatrix} \Psi_0 & \ldots & \Psi_{n-1} \\ D\Psi_0 & \ldots & D\Psi_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-2}\Psi_0 & \ldots & D^{n-2}\Psi_{n-1} \\ D^{n}\Psi_0 & \ldots & D^{n}\Psi_{n-1} \end{vmatrix} \overset{(3.25)}{=}$$

$$\overset{(3.25)}{=} \begin{vmatrix} \Psi_0 & \dots & \Psi_{n-1} \\ D\Psi_0 & \dots & D\Psi_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ D^{n-2}\Psi_0 & \dots & D^{n-2}\Psi_{n-1} \\ -a_0\Psi_0(t) - \dots - a_{n-1}D^{n-1}\Psi_0(t) & \dots & -a_0\Psi_{n-1}(t) - \dots - a_{n-1}D^{n-1}\Psi_{n-1}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Домножим } i\text{-ю} \\ \text{строку на } a_{i-1} \text{ и} \\ \text{сложим с последней} \\ \text{для } \forall i = \overline{1, n-1} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \Psi_0 & \dots & \Psi_{n-1} \\ D\Psi_0 & \dots & D\Psi_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ D^{n-2}\Psi_0 & \dots & D^{n-2}\Psi_{n-1} \\ -a_{n-1}D^{n-1}\Psi_0 & \dots & -a_{n-1}D^{n-1}\Psi_{n-1} \end{vmatrix} = -a_{n-1}W(t).$$

Таким образом, для определителя Вронского решений уравнения (3.17) получили дифференциальное уравнение

$$DW + a_{n-1}W = 0.$$

Его общее решение: $W(t) = Ce^{-a_{n-1}t}$.

Но $W|_{t=s} = Ce^{-a_{n-1}s} \implies C = W(s)e^{a_{n-1}s}$, откуда и получаем требуемую формулу (3.24). $\square$

Следствие 3.8.1 *Если $\exists s \in \mathbb{R}$, в которой $W(s) = 0$, то* $W(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Следствие 3.8.2 *Если $\exists s \in \mathbb{R}$, в которой $W(s) \neq 0$, то* $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Другими словами, определитель Вронского решений уравнения (3.17) либо равен нулю во всех точках из $\mathbb{R}$, либо не обращается в нуль ни в одной точке из $\mathbb{R}$.

3.7 Линейная зависимость функций одной переменной

Система функций $z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)$, определённых на промежутке $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$, называется *линейно независимой* на этом промежутке $\mathfrak{I}$, если $\exists a_k \in \mathbb{R}$ $k = \overline{0, n-1}$, не все одновременно равные нулю, такие, что

$$a_0z_0(t) + a_1z_1(t) + \dots + a_{n-1}z_{n-1}(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathfrak{I} \tag{3.26}$$

В противном случае система функций *линейно независима* на $\mathfrak{I}$.

Отметим, что если система функций линейно зависима, то это равносильно тому, что одна из функций системы линейно выражается через остальные функции этой системы.

Система, содержащая нулевую функцию, линейно зависима.

Теорема 3.9 *Система решений $z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)$ уравнения $L_nz = 0$ линейно зависима тогда и только тогда, когда её определитель Вронского отличен от нуля в некоторой точке:* $\exists t_0 \in \mathbb{R},\ \ W(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})|_{t=t_0} \neq 0$.

Доказательство:

Необходимость. Запишем определитель Вронского системы решений уравнения $L_n z = 0$:

$$W(t) = \begin{vmatrix} z_0 & \dots & z_{n-2} & z_{n-1} \\ Dz_0 & \dots & Dz_{n-2} & Dz_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-1}z_0 & \dots & D^{n-1}z_{n-2} & D^{n-1}z_{n-1} \end{vmatrix}.$$

По условию выполняется соотношение (3.26). Пусть без ограничения общности $a_{n-1} \neq 0$, тогда

$$z_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}}(a_0 z_0 + a_1 z_1 + \dots + a_{n-2} z_{n-2}), \tag{3.27}$$

$$D^k z_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}}(a_0 D^k z_0 + a_1 D^k z_1 + \dots + a_{n-2} D^k z_{n-2}), \quad k = \overline{1, n-1} \tag{3.28}$$

Подставляя выражения (3.27), (3.28) в последний столбец, видим, что он равен линейной комбинации остальных столбцов с коэффициентами $-\frac{a_0}{a_{n-1}}, \dots, -\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$. Следовательно, $W(t) = 0 \ \ \forall t \implies \exists t_0, \ W(t_0) = 0$, что и требовалось.

Достаточность. Дано, что $\exists t_0, \ W(t_0) = 0$. Рассмотрим следующую систему линейных уравнений (a_k — переменные):

$$\begin{cases} a_0 z(t_0) + a_1 z_1(t_0) + \dots + a_{n-1} z_{n-1}(t_0) = 0, \\ a_0 Dz(t_0) + a_1 Dz_1(t_0) + \dots + a_{n-1} Dz_{n-1}(t_0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 D^{n-1}z(t_0) + a_1 D^{n-1}z_1(t_0) + \dots + a_{n-1} D^{n-1}z_{n-1}(t_0) = 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Эта система однородна, а её определитель есть в точности $W(t_0) = 0$. Следовательно, она имеет ненулевое решение $(\widetilde{a_0}, \widetilde{a_1}, \dots, \widetilde{a_{n-1}})$. Построим функцию

$$z(t) = \widetilde{a_0} z_0(t) + \widetilde{a_1} z_1(t) + \dots + \widetilde{a_{n-1}} z_{n-1}(t). \tag{3.30}$$

На основании принципа суперпозиции (см. § 3.5) $z(t)$ является решением уравнения $L_n z = 0$. Вычислим:

$$D^k z(t) = \widetilde{a_0} D^k z_0(t) + \widetilde{a_1} D^k z_1(t) + \dots + \widetilde{a_{n-1}} D^k z_{n-1}(t), \quad k = \overline{0, n-1} \overset{(3.29)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(3.29)}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{l} z\big|_{t=t_0} = 0, \\ Dz\big|_{t=t_0} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ D^{n-1}z\big|_{t=t_0} = 0. \end{array}$$

Таким образом, мы имеем уравнение $L_n z = 0$ и начальные условия $D^k z\big|_{t=t_0} = 0, \ k = \overline{0, n-1}$, т.е. нулевую задачу Коши, имующую единственное решение $z(t) \equiv 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$. Из (3.30) получаем:

$$\widetilde{a_0} z_0(t) + \widetilde{a_1} z_1(t) + \dots + \widetilde{a_{n-1}} z_{n-1}(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

т.е. система $z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)$ линейно зависима на $\mathbb{R}$, что и требовалось.

Теорема доказана. □

Следствие 3.9.1 *Если существуют n решений уравнения $L_n x = 0$, определитель Вронского которых не равен нулю ни в одной точке, то эти решения линейно независимы.*

3.8 Базис системы решений однородного СтЛУ-n (фундаментальная система решений)

Рассмотрим однородное СтЛУ (3.17): $L_n x = 0 \quad t \in \mathbb{R}$.

Пусть $x(t)$ — его решение. Функцию $x(t-s)$ называют *сдвигом* решения $x(t)$.

Лемма 3.2 (о сдвиге) *Сдвиг $x(t-s)$ решения $x(t)$ уравнения (3.17) также является решением этого уравнения.*

Доказательство. Для случая $n = 2$: $L_2 x = 0 \iff D^2x + a_1 Dx + a_0 x = 0$. Необходимо доказать, что

$$D^2x(t-s) + a_1 Dx(t-s) + a_0 x(t-s) \equiv 0. \tag{3.31}$$

Поскольку $x(t)$ — решение уравнения (3.17), то имеет место тождество

$$D^2x(t) + a_1 Dx(t) + a_0 x(t) \equiv 0 \iff \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.32}$$

Но оно, в частности, справедливо и для $t := t - s \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d^2x(t-s)}{(d(t-s))^2} + a_1 \frac{dx(t-s)}{d(t-s)} + a_0 x(t-s) \equiv 0 \tag{3.33}$$

Выясним, как связаны между собой $\frac{dx(t-s)}{d(t-s)}$ и $\frac{dx(t-s)}{dt}$:

$$\frac{dx(t-s)}{d(t-s)} = \frac{dx(t-s)}{dt} \cdot \underbrace{\frac{dt}{d(t-s)}}_{=1} = \frac{dx(t-s)}{dt} = Dx(t-s).$$

Получили, что $\frac{d}{d(t-s)} = \frac{d}{dt} = D$. Осталось рассомтреть

$$\frac{d^2x(t-s)}{(d(t-s))^2} = \frac{d}{d(t-s)} \left(\frac{dx(t-s)}{d(t-s)} \right) = D(Dx(t-s)) = D^2x(t-s).$$

Следовательно, тождество (3.33) переходит в тождество (3.31), что и требовалось. Доказательство для случая произвольного n проводится аналогичным образом по индукции. $\square$

Отметим тот факт, что $D^k x(t-s)\big|_{t=s} = D^k x(0) = D^k x(t)\big|_{t=0}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Базисом пространства решений (*фундаментальной системой решений*) однородного СтЛУ-n (3.17) называют n линейно независимых решений этого уравнения, через которые выражается любое другое решение этого уравнения.

Рассмотрим n специальных задач Коши:

$$\begin{array}{llllll}
0. & L_n x = 0 & 1. & L_n x = 0 & & n-1. \;\; L_n x = 0 \\
 & x|_{t=0} = 1 & & x|_{t=0} = 0 & & x|_{t=0} = 0 \\
 & Dx|_{t=0} = 0 & & Dx|_{t=0} = 1 & \ldots\ldots & D^k x|_{t=0} = 0, \\
 & D^k x|_{t=0} = 0, & & D^k x|_{t=0} = 0, & & k = \overline{1, n-2} \\
 & k = \overline{2, n-1} & & k = \overline{2, n-1} & & D^{n-1} x|_{t=0} = 1
\end{array}$$

На основании ТОР для однородного СтЛУ-n каждая из них однозначно разрешима: обозначим их решения через $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$. Эти функции:

1. Являются решениями однородного СтЛУ-n (3.17), т.е. $L_n \varphi_k(t) \equiv 0$ $\forall k = \overline{0, n-1}$.

2. Удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$D^j \varphi_k(t)\Big|_{t=0} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, \; j = k \\ 0, \; j \neq k \end{cases} \qquad k = \overline{0, n-1}, \;\; j = \overline{0, n-1}$$

Определитель Вронского $W(\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t))|_{t=0} = 1 \neq 0$. Следовательно, функции $\varphi_k(t), \; k = \overline{0, n-1}$ являются линейно независимыми на $\mathbb{R}$.

На основании леммы о сдвиге функции $\varphi_k(t-s), \;\; k = \overline{0, n-1}$ также будут решениями (3.17), удовлетворяющими следующим начальным условиям:

$$D^j \varphi_k(t-s)\Big|_{t=s} = \delta_{jk}, \qquad k = \overline{0, n-1}, \;\; j = \overline{0, n-1}$$

Вронскиан $W(\varphi_0(t-s), \varphi_1(t-s), \ldots, \varphi_{n-1}(t-s))|_{t=s} = 1 \neq 0$, а значит, функции $\varphi_k(t-s), \; k = \overline{0, n-1}$ также линейно независимы.

Итак, если дано n решений уравнения (3.17), то для того, чтобы проверить, являются ли они линейно независимыми, достаточно сосчитать определитель Вронского хотя бы в одной точке.

Теорема 3.10 (о базисе однородного СтЛУ-n) *Пусть* $\varphi_k(t), \;\; k = \overline{0, n-1}$ — n *решений специальных задач Коши. Тогда функция*

$$x(t) = C_0 \varphi_0(t) + C_1 \varphi_1(t) + \cdots + C_{n-1} \varphi_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \varphi_k(t), \qquad (3.34)$$

где C_k *— произвольные действительные постоянные, является ОР уравнения* (3.17).

Доказательство. Т.к. $\varphi_k(t), \;\; k = \overline{0, n-1}$ есть решения n специальных задач Коши, то они линейно независимы на $\mathbb{R}$.

1. То, что функция $x(t)$, заданная формулой (3.34), является решением уравнения (3.17), следует из принципа суперпозиции.

2. Докажем, что любое решение уравнения (3.17) содержится в формуле (3.34). Для этого рассмотрим произвольную задачу Коши

$$\begin{array}{ll} L_n x = 0, & t \in \mathbb{R} \\ D^k x\big|_{t=s} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1} & s \in \mathbb{R},\ \xi_k \in \mathbb{R} \end{array} \tag{3.35}$$

и покажем, что всегда существуют такие значения произвольных постоянных C_k, при которых решение задачи (3.35) будет содержаться в формуле (3.34). Для этого выпишем систему равенств

$$\begin{array}{l} x(t) = C_0\varphi_0(t) + C_1\varphi_1(t) + \cdots + C_{n-1}\varphi_{n-1}(t), \\ Dx(t) = C_0 D\varphi_0(t) + C_1 D\varphi_1(t) + \cdots + C_{n-1} D\varphi_{n-1}(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D^k x(t) = C_0 D^k\varphi_0(t) + C_1 D^k\varphi_1(t) + \cdots + C_{n-1} D^k\varphi_{n-1}(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D^{n-1} x(t) = C_0 D^{n-1}\varphi_0(t) + C_1 D^{n-1}\varphi_1(t) + \cdots + C_{n-1} D^{n-1}\varphi_{n-1}(t), \end{array} \tag{3.36}$$

и удовлетворим их начальным условиям задачи Коши (3.35). Другими словами, поставим в систему (3.36) значение $t = s$:

$$\begin{cases} C_0\varphi_0(s) + C_1\varphi_1(s) + \cdots + C_{n-1}\varphi_{n-1}(s) = \xi_0, \\ C_0 D\varphi_0(s) + C_1 D\varphi_1(s) + \cdots + C_{n-1} D\varphi_{n-1}(s) = \xi_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_0 D^k\varphi_0(s) + C_1 D^k\varphi_1(s) + \cdots + C_{n-1} D^k\varphi_{n-1}(s) = \xi_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_0 D^{n-1}\varphi_0(s) + C_1 D^{n-1}\varphi_1(s) + \cdots + C_{n-1} D^{n-1}\varphi_{n-1}(s) = \xi_{n-1}. \end{cases} \tag{3.37}$$

Получили относительно C_k неоднородную систему линейных уравнений, определитель которой есть определитель Вронского $W(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})|_{t=s}$, не равный нулю при $\forall t$, в том числе и при $t = s$. Следовательно, для этой системы существует единственное решение $(C_0^*, C_1^*, \dots, C_{n-1}^*)$. Это значит, что однозначно определяемая функция

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^* \varphi_k(t)$$

удовлетворяет начальным условиям задачи Коши (3.35) и является решением уравнения (3.17). Итак, решение произвольной задачи Коши (3.35) содержится в формуле (3.34). Это и означает, что в формуле (3.34) содержатся все решения уравнения (3.17).

Теорема доказана. □

Замечание 4 *В системе* (3.37) *положим* $s = 0$. *Получим*

$$C_0 = \xi_0,\ C_1 = \xi_1,\ \dots,\ C_{n-1} = \xi_{n-1}$$

Следовательно, решение задачи Коши

$$\begin{array}{l} L_n x = 0, \\ D^k x\big|_{t=0} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1} \end{array}$$

запишется в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t).$$

А тогда решение задачи Коши

$$\begin{aligned} &L_n x = 0, \\ &D^k x\big|_{t=s} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1} \end{aligned}$$

запишется в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s).$$

Замечание 5 *В* §3.5 *мы показали, что множество всех решений уравнения* (3.17) *образует линейное пространство. Теорема о базисе однородного СтЛУ-n доказывает, что размерность пространства решений равна n. Из свойств линейного пространства следует, что система решений $\psi_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$ уравнения* (3.17) *образует базис пространства решений тогда и только тогда, когда эта система линейно независима. При этом функция $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k \psi_k(t)$, будет общим решением (ввиду принципа суперпозиции).*

Из доказанного выше можно сделать вывод, что как $\varphi_k(t)$, так и $\varphi_k(t-s)$ ($k = \overline{0, n-1}$) являются базисами пространства решений уравнения (3.17).

Базис $\varphi_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$ назвают базисом *нормированным в точке* $t = 0$, а базис $\varphi_k(t-s)$, $k = \overline{0, n-1}$ назвают базисом *нормированным в точке* $t = s$.

Отметим наиболее простой **способ построения** $\varphi_k(t-s)$:

1. Строим нормированный в точке $t = 0$ базис пространства решений, т.е. решаем n специальных задач Коши. Получаем функции $\varphi_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$.
2. Производим сдвиг на s и строим $\varphi_k(t-s)$, $k = \overline{0, n-1}$.

Любой базис $\psi_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, отличный от базиса $\varphi_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, будем называть *произвольным базисом*. Его можно получить, исходя из структуры общего решения, переписав формулу этого решения относительно произвольных постоянных.

Пример 13 $D^3x - 3D^2x + 3Dx - x = 0$

$$\nu^3 - 3\nu^2 + 3\nu - 1 = 0 \iff (\nu - 1)^3 = 0$$

Общее решение: $x(t) = (C_2t^2 + C_1t + C_0)e^t = C_0 \underbrace{e^t}_{\psi_0(t)} + C_1 \underbrace{te^t}_{\psi_1(t)} + C_2 \underbrace{t^2e^t}_{\psi_2(t)}.$

Тема 4

Линейные неоднородные уравнения со стационарным оператором

Будем рассматривать неоднородное и соответствующее ему однородное уравнения:

$$L_n x = f(t), \qquad t \in \mathcal{I} \tag{4.1}$$

$$L_n x = 0, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

4.1 Общее решение неоднородного СтЛУ-n

Пусть $x^*(t)$ — частное решение уравнения (4.1): $L_n x^*(t) \equiv f(t), \quad t \in \mathcal{I}$.
Пусть $x(t)$ — произвольное решение уравнения (4.1): $L_n x(t) \equiv f(t), \quad t \in \mathcal{I}$.

Построим функцию $\widetilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$ и посмотрим, какому из уравенининий она будет удовлетворять:

$$L_n \widetilde{x}(t) = L_n(x(t) - x^*(t)) = L_n x(t) - L_n x^*(t) \equiv f(t) - f(t) = 0,$$

т.е. функция $\widetilde{x}(t)$ является решением однородного уравнения (4.2). Если предположить вдобавок, что $x(t)$ является ОР уравнения (4.2), то за счёт выбора произвольных постоянных мы сможем построить любое решение $x(t) = \widetilde{x}(t) + x^*(t)$ неоднородного уравнения (4.1). Другими словами, если $\widetilde{x}(t)$ — ОР уравнения (4.2), то $x(t)$ — ОР уравнения (4.1). Формально это можно записать так:

$$x_{\text{ОН}} = x_{\text{ОО}} + x_{\text{ЧН}},$$

где $x_{\text{ОН}}$ — общее решение неоднородного уравнения, $x_{\text{ЧН}}$ — частное решение неоднородного уравнения, $x_{\text{ОО}}$ — общее решение соответствующего ему однородного уравнения.

4.2 Функция Коши

Здесь мы рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} &L_n z = f(t), \quad t \in \mathfrak{I}, \\ &D^k z\big|_{t=s} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $z = x + i\,y$ — комплексная переменная, $\xi_k \in \mathbb{R}$ — действительные постоянные, а $f(t)$ — вещественнозначная функция, $f(t)\colon\ \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$. Она равносильна двум задачам:

$$\begin{aligned} &L_n x = f(t), \quad t \in \mathfrak{I}, \\ &D^k x\big|_{t=s} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} &L_n y = 0, \quad t \in \mathfrak{I}, \\ &D^k y\big|_{t=s} = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

При этом задача Коши (4.5) однозначно разрешима: $y(t) \equiv 0$.

Теорема 4.1 (ТОР для неоднородного СтЛУ-n) *Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $\mathfrak{I}$. Тогда $\forall s \in \mathfrak{I}$, $\forall \xi_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{0, n-1})$ существует и единственно решение задачи Коши* (4.4) *на* $\mathfrak{I}$.

Доказательство. Будем вести для случая $n = 2$. Задача Коши для неоднородного СтЛУ-2 примет вид

$$\begin{aligned} &L_2 x = f(t), \quad t \in \mathfrak{I}, \\ &x|_{t=s} = \xi_0, \quad \xi_0 \in \mathbb{R}, \\ &Dx|_{t=s} = \xi_1, \quad \xi_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Рассмотрим более общую задачу Коши относительно комплексной переменной $z = x + i\,y$:

$$\begin{aligned} &L_2 z = f(t), \quad t \in \mathfrak{I}, \\ &z|_{t=s} = \xi_0, \quad \xi_0 \in \mathbb{R}, \\ &Dz|_{t=s} = \xi_1, \quad \xi_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Если она окажется однозначно разрешимой, то однозначно разрешимой будет и задача (4.6), поскольку $x(t)$ однозначно выражается через $z(t)$: $x(t) = \mathrm{Re}(z(t))$.

Пусть ν_1, ν_2 — собственные значения оператора L_2. Задачу (4.7) перепишем в виде

$$\begin{aligned} &(D - \nu_1 D^0)(D - \nu_2 D^0) z = f(t), \quad t \in \mathfrak{I}, \\ &z|_{t=s} = \xi_0, \quad Dz|_{t=s} = \xi_1. \end{aligned}$$

Положим $W = (D - \nu_2 D^0) z$, получив при этом:

$$\begin{aligned} &DW(t) = f(t), \quad t \in \mathfrak{I}, \\ &W|_{t=s} = (Dz - \nu_2 z)|_{t=s} = \xi_1 - \nu_2 \xi_0 = \xi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

— задачу Коши для СтЛУ-1. На основании ТОР $\exists!\, W(t)$ — её решение на промежутке $\mathfrak{I}$. Так как функция $W(t)$ является решением СтЛУ-1, то $W(t)$ дифференцируема, а следовательно, и непрерывна на $\mathfrak{I}$. Обратимся снова к переменной z:

$$\begin{aligned} &(D - \nu_2 D^0) z = W(t), \quad t \in \mathfrak{I} \quad W(t) \in C(\mathfrak{I}) \\ &z|_{t=s} = \xi_0, \quad \xi_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

На основании ТОР для СтЛУ-1 $\exists!\, z(t)$ — решение задачи Коши (4.8) на промежутке $\mathfrak{I}$, а значит, и задачи (4.7). Поэтому $\exists!\, x(t)$ — решение задачи Коши (4.6) на промежутке $\mathfrak{I}$, что и требовалось. Доказательство для случая произвольного n проводится по той же схеме. $\square$

Далее нам понадобятся некоторые сведения из курса математического анализа.

Интеграл вида $\int\limits_s^t g(t,\tau)\,d\tau$ является собственным интегралом, зависящим от параметра. Если бы мы его вычислили, то получили бы функцию от t. При этом, если $g(t,\tau)$, $g'_t(t,\tau)$ непрерывны как функции двух переменных, то интеграл дифференцируем, а его производная может быть вычислена по формуле:

$$D\left(\int\limits_s^t g(t,\tau)\,d\tau\right) = g(t,t) + \int\limits_s^t g'_t(t,\tau)\,d\tau.$$

Рассмотрим n—ю специальную задачу Коши:

$$\begin{array}{l} L_n x = 0, \\ D^k x\big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, n-2}, \\ D^{n-1} x\big|_{t=0} = 1. \end{array}$$

Её решение — функция $\varphi_{n-1}(t)$, а решением специальной задачи Коши

$$\begin{array}{l} L_n x = 0, \\ D^k x\big|_{t=s} = 0, \quad k = \overline{0, n-2}, \\ D^{n-1} x\big|_{t=s} = 1. \end{array}$$

будет функция $\varphi_{n-1}(t-s)$. А посему имеем:

$$\begin{array}{l} L_n \varphi_{n-1}(t-s) \equiv 0, \\ D^k \varphi_{n-1}(t-s)\big|_{t=s} = 0, \quad k = \overline{0, n-2}, \\ D^{n-1} \varphi_{n-1}(t-s)\big|_{t=s} = 1. \end{array}$$

Теорема 4.2 *Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $\mathfrak{I}$. Тогда $\forall s \in \mathfrak{I}$ нулевая задача Коши*

$$\begin{array}{l} L_n x = f(t), \quad t \in \mathfrak{I}, \\ D^k x\big|_{t=s} = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \end{array} \tag{4.9}$$

однозначна разрешима, и её решение может быть найдено по формуле:

$$x(t) = \int\limits_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\,d\tau, \tag{4.10}$$

где $\varphi_{n-1}(t)$ — последняя базисная функция пространства решений соответствующего однородного уравнения.

Доказательство:

1. Однозначная разрешимость задачи Коши (4.9) на промежутке $\mathcal{I}$ следует из ТОР для СтЛУ$-n$.

2. Докажем формулу (4.10), т.е. покажем, что функция $x(t)$, определяемая этой формулой, удовлетворяет уравнению и начальным условиям задачи Коши (4.9). В случае $n = 2$:
$$L_2 x = f(t), \quad t \in \mathcal{I}, \qquad x|_{t=s} = 0, \quad Dx|_{t=s} = 0.$$
$$x(t) = \int\limits_s^t \varphi_1(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$
Вычислим первую и вторую производные функции $x(t)$:
$$Dx(t) = D\left(\int_s^t \varphi_1(t-\tau) f(\tau)\, d\tau\right) = \varphi_1(t-t) f(t) + \int_s^t D\varphi_1(t-\tau) f(\tau)\, d\tau =$$
$$= \varphi_1(0) f(t) + \int_s^t D\varphi_1(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = [\varphi_1(0) = 0] = \int_s^t D\varphi_1(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$
$$D^2 x(t) = D(Dx(t)) = D\varphi_1(t-t) f(t) + \int_s^t D^2\varphi_1(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = [D\varphi_1(0) = 1] =$$
$$= f(t) + \int_s^t D^2\varphi_1(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$
Тогда в силу свойства линейности интеграла:
$$L_2 x(t) = D^2 x(t) + a_1 Dx(t) + a_0 x(t) =$$
$$= f(t) + \int_s^t \underbrace{\big(D^2\varphi_1(t-\tau) + a_1 D\varphi_1(t-\tau) + a_0\varphi_1(t-\tau)\big)}_{L_2\varphi_1(t-\tau)\equiv 0} d\tau = f(t).$$
Тем самым показали, что функция $x(t)$, определяемая по формуле (4.10), удовлетворяет уравнению задачи Коши (4.9). Осталось проверить выполнимость начальных условий:
$$x(t)|_{t=s} = \int_s^t \varphi_1(s-\tau) f(\tau)\, d\tau = 0, \qquad Dx(t)|_{t=s} = \int_s^s D\varphi_1(s-\tau) f(\tau)\, d\tau = 0.$$
Итак, начальные условия выполнены, а значит, функция $x(t)$ действительно является решением задачи Коши (4.9) в случае $n = 2$.

Доказательство для случая произвольного n проводится по аналогичной схеме. $\square$

Функцию $\varphi_{n-1}(t)$ называют *функцией Коши* оператора L_n.

4.3 Метод Коши разрешения неоднородного СтЛУ−n

Ранее мы доказали (см. § 3.8), что задача Коши

$$\begin{aligned} &L_n x = 0, \\ &D^k x\big|_{t=s} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1} \end{aligned} \tag{4.11}$$

однозначно разрешима на $\mathbb{R}$, а её решение: $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s)$. В этом параграфе мы получим аналогичный результат, но уже для неоднородного уравнения.

Теорема 4.3 *Пусть функция $f(t)$ непрерывна на промежутке $\mathfrak{I}$. Тогда $\forall s \in \mathfrak{I}$, $\forall \xi_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0, n-1}$ существует и единственно на $\mathfrak{I}$ решение задачи Коши*

$$\begin{aligned} &L_n x = f(t), \quad t \in \mathfrak{I}, \\ &D^k x\big|_{t=s} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

которое определяется по формуле

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s) + \int\limits_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{4.13}$$

Доказательство:

1. Однозначная разрешимость задачи Коши (4.12) следует из ТОР для неоднородного СтЛУ−n.

2. Пусть $x(t)$ — решение задачи (4.12), т.е. $L_n x \equiv f(t)$, $t \in \mathfrak{I}$ и выполнены начальные условия $D^k x\big|_{t=s} = \xi_k$, $k = \overline{0, n-1}$. Пусть $x^*(t)$ — решение нулевой задачи Коши для неоднородного уравнения, т.е. $L_n x^* \equiv f(t)$, $t \in \mathfrak{I}$ и выполнены начальные условия $D^k x^*\big|_{t=s} = 0$, $k = \overline{0, n-1}$. Построим функцию $\widetilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$ и посмотрим, какому из уравнений она удовлетворяет:

$$L_n \widetilde{x}(t) = L_n x(t) - L_n x^*(t) \equiv f(t) - f(t) = 0,$$

т.е. $\widetilde{x}(t)$ является решением уравнения задачи Коши (4.11). Помотрим, каким начальным условиям она удовлетворяет:

$$D^k \widetilde{x}(t)\big|_{t=s} = D^k x(t)\big|_{t=s} - D^k x^*(t)\big|_{t=s} = \xi_k - 0 = \xi_k, \qquad k = \overline{0, n-1}$$

Таким образом, $\widetilde{x}(t)$ является решением задачи Коши (4.11) на $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$, а значит, $\widetilde{x}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s)$. Но $x^*(t)$ — решение нулевой задачи Коши для неоднородного уравнения, которое определяется по формуле $x^*(t) = \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau$. По нашему построению $x(t) = \widetilde{x}(t) + x^*(t)$, что и доказывает формулу (4.13).

Теорема доказана. □

Замечание 6 *Формула* (4.13) *и составляет правило Коши разрешения неоднородного СтЛУ—n. ОР неоднородного СтЛУ—n по правилу Коши определяется в виде*

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n-1} C_k\varphi_k(t-s)+\int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

или в виде

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n-1} C_k\psi_k(t)+\int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

где $C_k\in\mathbb{R}$ — произвольные постоянные; $\varphi_k(t-s)$, $k=\overline{0,n-1}$ — базис пространства решений соответствующего однородного СтЛУ-n, нормированный в точке $t=s$; $\psi_k(t)$, $k=\overline{0,n-1}$ — произвольный базис пространства решений соответствующего однородного СтЛУ-n.

4.4 Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных) отыскания ЧР неоднородного СтЛУ—n

ОР однородного СтЛУ-n $L_nx=0$ представляет собой функцию

$$x_{\text{OO}}(t)=\sum_{k=0}^{n-1} C_k\psi_k(t),$$

где $C_k\in\mathbb{R}$ — произвольные постоянные, а $\varphi_k(t-s)$, $k=\overline{0,n-1}$ — произвольный базис пространства решений этого уравнения.

ЧР неоднородного СтЛУ-n $L_nx=f(t)$, $t\in\mathfrak{I}$, где функция $f(t)\in C(\mathfrak{I})$, по методу Лагранжа будем искать в виде:

$$x_{\text{ЧН}}(t)=x^*(t)=\sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)\psi_k(t), \tag{4.14}$$

где $u_k(t)$, $k=\overline{0,n-1}$ — искомые функции, а $\psi_k(t)$, $k=\overline{0,n-1}$ — данный нам базис пространства решений однородного СтЛУ-n.

Другими словами, частное решение неоднородного уравнения по методу Лагранжа строится по виду общего решения соответствующего ему однородного уравнения.

Теорема 4.4 *Пусть функции $Du_k(t)$, $k=\overline{0,n-1}$ удовлетворяют на промежутке $\mathfrak{I}$ следующей системе Лагранжа:*

$$\begin{cases} Du_0\psi_0+Du_1\psi_1+\cdots+Du_{n-1}\psi_{n-1}=0,\\ Du_0D\psi_0+Du_1D\psi_1+\cdots+Du_{n-1}D\psi_{n-1}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ Du_0D^{n-2}\psi_0+Du_1D^{n-2}\psi_1+\cdots+Du_{n-1}D^{n-2}\psi_{n-1}=0,\\ Du_0D^{n-1}\psi_0+Du_1D^{n-1}\psi_1+\cdots+Du_{n-1}D^{n-1}\psi_{n-1}=f(t). \end{cases} \tag{4.15}$$

Тогда частное решение $x^*(t)$ уравнения $L_n x = f(t),\ t \in \mathcal{I}$ с непрерывной неоднородностью $f(t) \in C(\mathcal{I})$ может быть найдено по формуле:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)\psi_k(t),$$

где $\psi_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$ — некоторый базис пространства решений однородного СтЛУ-n; $u_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$ — некоторые первообразные для $Du_k(t)$.

Отметим, что определитель системы (4.15) есть определитель Вроского системы базисных функций $\psi_k(t)$, поэтому он не равен нулю ни в одной точке промежутка $\mathcal{I}$, а значит, система (4.15) всегда однозначно разрешима на $\mathcal{I}$.

Доказательство. Проведём для случая $n = 2$. Тогда (4.14), (4.15) примут вид

$$x^* = u_0\psi_0 + u_1\psi_1, \qquad \begin{cases} Du_0\psi_0 + Du_1\psi_1 = 0, \\ Du_0 D\psi_0 + Du_1 D\psi_1 = f. \end{cases}$$

Покажем, что x^* является решением уравнения $L_n x = f(t)$:

$$Dx^* = \underbrace{Du_0\psi_0 + Du_1\psi_1}_{=0} + u_0 D\psi_0 + u_1 D\psi_1 = u_0 D\psi_0 + u_1 D\psi_1,$$

$$D^2x^* = \underbrace{Du_0 D\psi_0 + Du_1 D\psi_1}_{=f} + u_0 D^2\psi_0 + u_1 D^2\psi_1 = f + u_0 D^2\psi_0 + u_1 D^2\psi_1,$$

$$L_2 x^* = D^2x^* + a_1 Dx^* + a_0 x^* =$$
$$= f + u_0 \underbrace{\left(D^2\psi_0 + a_1 D\psi_0 + a_0\psi_0\right)}_{L_2\psi_0 \equiv 0} + u_1 \underbrace{\left(D^2\psi_1 + a_1 D\psi_1 + a_0\psi_1\right)}_{L_2\psi_1 \equiv 0} \equiv f.$$

Таким образом, функция $x^* = u_0\psi_0 + u_1\psi_1$, где u_1, u_2 — некоторые первообразные для Du_0, Du_1, действительно является решением неоднородного СтЛУ-n. Теорема доказана для случая $n = 2$. Доказательство в случае произвольного n проводится по аналогичной схеме. $\square$

Следовательно, общее решение неоднородного СтЛУ$-n$ по методу Лагранжа определяется формулой

$$x_{\text{ОН}}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k\psi_k(t) + \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)\psi_k(t),$$

где $C_k \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, $\psi_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$ — некоторый базис пространства решений соответствующего однородного СтЛУ-n, $u_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$ — некоторые первообразные функций $Du_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, которые являются решениями системы Лагранжа (4.15).

Замечание 7 *Когда система Лагранжа решена и функции Du_k найдены, в качестве u_k можно взять интегралы с переменными верхними пределами:*

$u_k(t)=\int\limits_s^t Du_k(\tau)d\tau,\ s,t\in\mathfrak{I}$. *Но ежели вместо интегралов с переменными верхними пределами взять неопределённые интегралы* $\int Du_k(t)dt=\int\limits_s^t Du_k(\tau)d\tau+C_k$, *то получим уже не частное, а общее решение:*

$$x^*(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int Du_k(t)dt\right)\psi_k(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int\limits_s^t Du_k(\tau)d\tau+C_k\right)\psi_k(t)=\sum_{k=0}^{n-1}u_k(t)\psi_k(t)+\sum_{k=0}^{n-1}C_k\psi_k(t).$$

4.5 СтЛУ с квазимногочленом (со специальной неоднородностью)

Здесь рассматривать будем уравнение с квазимногочленом

$$L_n z = h(t), \tag{4.16}$$

где $z=x+i\,y$ — комплекснозначная переменаая, а $h(t)=f(t)+i\,g(t)$ — квазимногочлен, т.е. функция специального вида:

$$h(t)=\sum_{k=1}^{r}P_k(t)e^{\nu_k t},$$

где $P_k(t)$ — комплекснозначные многочлены, $e^{\nu_k t}$ — комплекснозначные экспоненты.

Принцип суперпозиции утверждает, что если $z_k(t)$ — решения уравнений $L_n z=h_k$ ($k=\overline{1,r}$), то функция $z(t)=\sum\limits_{k=1}^{r}z_k(t)$ является решением уравнения $L_n z=h$, $h(t)=\sum\limits_{k=1}^{r}h_k(t)$. Итак, если мы хотим найти какое-то частное решение уравнения, правая часть которого распадается в сумму нескольких слагаемых, то достаточно найти решения уравнений для каждого слагаемого в отдельности, а потом просуммировать полученные решения. Поэтому ниже рассмотрим уравнение с квазимногочленом вида

$$L_n z = P(t)e^{\gamma t}. \tag{4.17}$$

Число γ называют *контрольным числом* правой части уравнения (4.17).

Теорема 4.5 (Правило Эйлера отыскания ЧР) *Уравнение с квазимногочленом* (4.17) *допускает частное решение вида*

$$x^*(t)=t^r Q(t)e^{\gamma t}, \tag{4.18}$$

где $Q(t)$ *— комплекснозначный многочлен, коэффициенты которого однозначно выражаются через коэффициенты* $P(t)$ *и* $\deg Q(t)=\deg P(t)$. *Число*

$$r=\begin{cases}0,\ \gamma \text{ не явл-ся собств. знач. } L_n,\\ \text{кратности собств. знач. } \gamma.\end{cases}$$

Доказательство. Проведём для случая $n = 2$. Имеем уравнение $L_2 z = P(t)e^{\gamma t}$. Пусть ν_1, ν_2 — собственные значения оператора L_2. Тогда уравнение можно переписать в виде $(D - \nu_1 D^0)(D - \nu_2 D^0)z = P(t)e^{\gamma t}$.

Напомним (см. § 3.2, теорема 3.2), что уравнение с квазимногочленом вида $Dz - \nu z = P_0(t)e^{\gamma t}$ допускает частное решение

$$z^*(t) = \begin{cases} t\,Q_0(t)e^{\gamma t}, \text{ если } \gamma = \nu, \\ Q_0(t)e^{\gamma t}, \text{ если } \gamma \neq \nu, \end{cases}$$

причём (в обоих случаях) $Q_0(t)$ — комплекснозначный многочлен, коэффициенты которого однозначно выражаются через коэффициенты $P_0(t)$ и $\deg Q(t) = \deg P(t)$. Этим будем неоднократно пользоваться ниже.

Обозначив $W = (D - \nu_2 D^0)z$, перейдём к уравнению $(D - \nu_1 D^0)W = P(t)e^{\gamma t}$. Дальнейшее доказательство заключается в разборе следующих случаев.

Случай 1а: $\nu_1 \neq \gamma$. Получим частное решение $W^*(t) = Q_1(t)e^{\gamma t}$, где коэффициенты комплекснозначного многочлена $Q_1(t)$ однозначно выражаются через коэффициенты $P(t)$ и $\deg Q_1(t) = \deg P(t)$.

Случай 1б: $\nu_1 = \gamma$. Получим общее решение $W(t) = t\,Q_1(t)e^{\gamma t} + C_1 e^{\nu_1 t}$, где коэффициенты комплекснозначного многочлена $Q_1(t)$ однозначно выражаются через коэффициенты $P(t)$ и $\deg Q_1(t) = \deg P(t)$.

Вернёмся теперь к переменной z: $(D - \nu_2 D^0)z = W(t)$.

Случай 2а: $\nu_1 \neq \gamma,\ \nu_2 \neq \gamma$. Тогда уравнение $(D - \nu_2 D^0)z = Q_1(t)e^{\gamma t}$ допускает частное решение $z^*(t) = Q(t)e^{\gamma t}$, где коэффициенты комплекснозначного многочлена $Q(t)$ однозначно выражаются через коэффициенты $Q_1(t)$, а значит, и через коэффициенты $P(t)$, и $\deg Q(t) = \deg Q_1(t) = \deg P(t)$. Условие $\nu_1 \neq \gamma,\ \nu_2 \neq \gamma$ означает, что γ не является собственным значением оператора L_2, т.е $r = 0$ и полученное частное решение соответствует формуле (4.18).

Случай 2б: $\nu_1 \neq \gamma,\ \nu_2 = \gamma$. Тогда уравнение $(D - \nu_2 D^0)z = Q_1(t)e^{\gamma t}$ допускает частное решение $z^*(t) = t\,Q(t)e^{\gamma t}$, где коэффициенты комплекснозначного многочлена $Q(t)$ однозначно выражаются через коэффициенты $Q_1(t)$, а значит, и через коэффициенты $P(t)$, и $\deg Q(t) = \deg Q_1(t) = \deg P(t)$. Условие $\nu_1 \neq \gamma,\ \nu_2 \neq \gamma$ означает, что γ является однократным собственным значением оператора L_2, т.е $r = 1$ и полученное частное решение соответствует формуле (4.18).

Случай $\nu_1 = \gamma,\ \nu_2 \neq \gamma$ аналогичен предыдущему (для его доказательнства можно изначально рассмотреть уравнение $(D - \nu_2 D^0)(D - \nu_1 D^0)z = P(t)e^{\gamma t}$, обозначить $W = (D - \nu_1 D^0)z$ и повторить рассуждения выше).

Осталось рассмотреть случай, когда $\nu_1 = \nu_2 = \gamma$. Как было отмечено в *случае 1б* общее решение $W(t) = t\,Q_1(t)e^{\gamma t} + C_1 e^{\nu_1 t}$, $\deg Q_1(t) = \deg P(t)$. Обозначив $G(t) = t\,Q_1(t)$, прийдём к уравнению $(D - \nu_2 D^0)z = G(t)e^{\gamma t} + C_1 e^{\nu_1 t}$, $\deg G(t) = \deg Q_1(t) + 1 = \deg P(t) + 1 = m + 1$. Так как $\nu_1 = \nu_2 = \gamma$, то (согласно принципу суперпозиции) ОР полученного уравнения $z(t) = t\,M(t)e^{\gamma t} + t\,\widetilde{C_1}e^{\nu_1 t} + C_2 e^{\nu_2 t}$, где коэффициенты $M(t)$ однозначно выражаются через коэффициенты $G(t)$, а значит, через окэффициенты $Q_1(t)$ и, соответственно, коэффициенты $P(t)$, $\deg M(t) = \deg G(t) = m+1$. Значение $\widetilde{C_1}$ однозначно выражается через C_1, поэтому $\widetilde{C_1}$ (как и C_2, C_1) — произвольная постоянная. Имеем:

$$
\begin{gathered}
z(t) = t\,(a_{m+1}t^{m+1} + \cdots + a_1 t + a_0)e^{\gamma t} + t\,\widetilde{C_1}e^{\nu_1 t} + C_2 e^{\nu_2 t} = \\
= t^2(a_{m+1}t^m + \cdots + a_2 t + a_1)e^{\gamma t} + t\,a_0 e^{\gamma t} + t\,\widetilde{C_1}e^{\nu_1 t} + C_2 e^{\nu_2 t} = \\
= t^2 Q(t)e^{\gamma t} + t\,a_0 e^{\gamma t} + t\,\widetilde{C_1}e^{\gamma t} + C_2 e^{\gamma t} = t^2 Q(t)e^{\gamma t} + (t\,(a_0 + \widetilde{C_1}) + C_2)e^{\gamma t} = \\
= t^2 Q(t)e^{\gamma t} + (C_1 t + C_2)e^{\gamma t}.
\end{gathered}
$$

Полагая значения произвольных постоянных $C_1 := 0$, $C_2 := 0$, получим частное решение $z^*(t) = t^2 Q(t)e^{\gamma t}$, где коэффициенты $Q(t)$ однозначно выражаются через коэффициенты $P(t)$ и $\deg Q(t) = m = \deg P(t)$. Условие $\nu_1 = \nu_2 = \gamma$ означает, что γ является двукратным собственным значением оператора L_2, т.е $r = 2$ и полученное частное решение соответствует формуле (4.18).

Теорема доказана в случае $n = 2$. Доказательство в случае произвольного n можно провести по методу математической индукции. □

Уравнение (4.16) $L_n z = h(t) \iff \begin{cases} L_n x = f(t), \\ L_n y = g(t). \end{cases}$ Нас будет интересовать действительное решение $x(t) = \mathrm{Re}(z(t))$.

Теорема 4.6 *Частное действительное решение уравнения с вещественнозначным квазимногочленом определяется следующим образом:*

- *Уравнение* $L_n x = R(t)e^{\gamma t}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ *допускает частное решение вида* $x^*(t) = t^r Q(t)e^{\gamma t}$, *где* $Q(t)$ — *вещественнозначный многочлен, коэффициенты которого однозначно выражаются через коэффициенты* $R(t)$ *и* $\deg Q(t) = \deg R(t)$.
- *Уравнение* $L_n x = (F(t)\cos\mu t + G(t)\sin\mu t)e^{\lambda t}$, $\gamma = \lambda + i\,\mu$ *допускает частное решение вида* $x^*(t) = t^r(M(t)\cos\mu t + N(t)\sin\mu t)e^{\lambda t}$, *где* $M(t)$, $N(t)$ — *вещественнозначные многочлены, коэффициенты которых однозначно выражаются через коэффициенты* $F(t), G(t)$ *соответственно и* $\deg M(t) = \deg N(t) = \max\{\deg F(t), \deg G(t)\}$.

Число $r = \begin{cases} 0, \gamma \text{ не явл-ся собств. знач. } L_n, \\ \text{кратности собств. знач. } \gamma. \end{cases}$

Доказательство[1]**.** Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение $L_n z = (R(t) + 0 \cdot i)e^{\gamma t}$ как уравнение с комплекснозначным многочленом. По предыдущей теореме оно допускает комплекснозначное частное решение $z^*(t) = t^r\widetilde{Q}(t)e^{\gamma t}$, где коэффициенты $\widetilde{Q}(t)$ однозначно выржаются через коэффициенты $R(t) + 0 \cdot i$, т.е. через коэффициенты $R(t)$, $\deg\widetilde{Q}(t) = \deg R(t)$. Тогда $x^*(t) = \mathrm{Re}(z^*(t)) = \mathrm{Re}\left(t^r\widetilde{Q}(t)e^{\gamma t}\right) = t^r\mathrm{Re}(\widetilde{Q}(t))e^{\gamma t} = t^r Q(t)e^{\gamma t}$ будет частным решением уравнения с вещественнозначным многочленом $L_n x = R(t)e^{\gamma t}$, удовлетворяющим условию теоремы.

[1] Доказательство этой теоремы на лекции было предложено в качестве упражнения.

Пусть $\gamma = \lambda + i\,\mu$. Рассмотрим комплекснозначный многочлен $P(t) = P_1(t) + i\,P_2(t)$. Имеем:

$$\operatorname{Re}\big(P(t)e^{\gamma t}\big) = \operatorname{Re}\big((P_1(t) + i\,P_2(t))e^{i\mu t}e^{\lambda t}\big) =$$
$$= e^{\lambda t}\operatorname{Re}((P_1(t) + i\,P_2(t))(\cos\mu t + i\,\sin\mu t) = (P_1(t)\cos\mu t - P_2(t)\sin\mu t)e^{\lambda t}.$$

Положим $P_1(t) := F(t),\ P_2(t) := -G(t)$, тогда

$$\operatorname{Re}\big(P(t)e^{\gamma t}\big) = (F(t)\cos\mu t + G(t)\sin\mu t)e^{\lambda t}.$$

По предыдущей теореме уравнение $L_n z = P(t)e^{\gamma t}$ допускает комплекснозначное частное решение $z^*(t) = t^r Q(t)e^{\gamma t}$, где коэффициенты $Q(t)$ однозначно выражаются через коэффициенты $P(t) = F(t) - i\,G(t)$, т.е. через коэффициенты $F(t)$ и $G(t)$, $\deg Q(t) = \deg P(t) = \max\{\deg F(t), \deg G(t)\}$. Тогда $x^*(t) = \operatorname{Re}(z^*(t)) = t^r\operatorname{Re}\left(Q(t)e^{\gamma t}\right) = t^r(M(t)\cos\mu t + N(t)\sin\mu t)e^{\lambda t}$ будет частным решением уравнения с вещественнозначным многочленом $L_n x = (F(t)\cos\mu t + G(t)\sin\mu t)e^{\lambda t}$, удовлетворяющим условию теоремы. $\square$

Тема 5

Фазовая плоскость однородного СтЛУ–2

5.1 Фазовые графики

Будем рассматривать однородное СтЛУ–2:

$$L_2 x = 0 \iff D^2 x + a_1 D x + a_0 x = 0 \tag{5.1}$$

Пусть $\nu^2 + a_1 \nu + a_0 = 0$ — его характеристическое уравнение, ν_1, ν_2 — собственные значения. В зависимости от ν_1, ν_2 общее решение $x(t)$ запишется по-разному:

1. Если $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$ и $\nu_1 \neq \nu_2$, то $x(t) = C_1 e^{\nu_1 t} + C_2 e^{\nu_2 t}$.
2. Если $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$ и $\nu_1 = \nu_2$, то $x(t) = (C_1 t + C_2) e^{\nu_1 t}$.
3. Если $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}$, $\nu_1 = \lambda + i\,\mu$, $\nu_2 = \lambda - i\,\mu$,
   (a) $\lambda \neq 0$, то $x(t) = (C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t) e^{\lambda t}$.
   (b) $\lambda = 0$, то $x(t) = C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t$.

Решение $x(t)$ уравнения (5.1) называют *стационарным*, если $x(t) \equiv C \in \mathbb{R}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Посмотрим, существует ли стационарное решение уравнения (5.1):

$$0 + a_0 \cdot 0 + a_0 C = 0 \iff a_0 C = 0$$

В случае $a_0 \neq 0$ получаем единственное стационарное решение $x(t) \equiv 0$, а в случае $a_0 = 0$ получаем бесконечное множество стационарных решений $x(t) \equiv C$, $C \in \mathbb{R}$.

Уравнение (5.1) при $a_0 \neq 0$ называют *невырожденным*. Для невырожденного уравнения имеется лишь одно стационарное решение $x(t) \equiv 0$.

Плоскость Oxy называют *фазовой* для уравнения (5.1), если каждое решение $x(t)$ уравнения (5.1) представляется на ней в виде *фазовых графиков*:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) := Dx(t). \end{cases} \tag{5.2}$$

Фазовые графики нестационарных решений представляют собой кривые, заданные параметрически. Стационарному решению $x(t) \equiv C$ будет соответствовать фазовый график $\begin{cases} x = C, \\ y = 0. \end{cases}$ — точка прямой Ox. Если $a_0 \neq 0$, имеем единственное стационарное решение $x(t) \equiv 0$, которому будет соответствовать фазовый график $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$ — точка начала координат.

Фазовые графики стационарных решений состоят из точек, называемых *точками покоя*. Невырожденное уравнение (5.1) имеет единственную точку покоя $O(0;0)$, а вырожденное — семейство прямых, каждая из которых сплошь состоит из точек покоя.

Теорема 5.1 *Фазовые графики* (5.2) *уравнения* (5.1) *либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — решение уравнения (5.1), которому соответствует фазовый график $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) = Dx(t). \end{cases}$ Пусть $x_1(t)$ — ещё одно решение уравнения (5.1), которому соответствует фазовый график $\begin{cases} x = x_1(t), \\ y = y_1(t) = Dx_1(t). \end{cases}$ Предположим, что фазовые графики $x(t)$ и $x_1(t)$ имеют общую точку $(\xi;\eta)$, т.е. $\exists\, s, s^* \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x(s) = \xi, \\ y(s) = Dx(s) = \eta. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1(s^*) = \xi, \\ y_1(s^*) = Dx_1(s^*) = \eta. \end{cases}$

Построим вспомогательную функцию $\widetilde{x}(t) = x(t+s-s^*)$ — сдвиг решения $x(t)$, который, как известно, также будет решением уравнения (5.1). Фазовый график $\widetilde{x}(t)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x = \widetilde{x}(t) = x(t + s - s^*), \\ y = \widetilde{y}(t) = D\widetilde{x}(t) = Dx(t + s - s^*). \end{cases}$$

Из этой записи видно, что фазовые графики $x(t)$ и $\widetilde{x}(t)$ совпадают. Осталось показать, что фазовые графики $x_1(t)$ и $\widetilde{x}(t)$ совпадают. Для этого сосчитаем

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}(s^*) = x(s^* + s - s^*) = x(s) = \xi, \\ &\widetilde{y}(s^*) = D\widetilde{x}(s^*) = Dx(s) = \eta. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем два решения уравнения (5.1), удовлетворяющие начальным условиям:

$$\widetilde{x}(t): \begin{array}{l} \widetilde{x}(s^*) = \xi, \\ D\widetilde{x}(s^*) = \eta. \end{array} \qquad x_1(t): \begin{array}{l} x_1(s^*) = \xi, \\ Dx_1(s^*) = \eta. \end{array}$$

На основании ТОР задачи Коши для однородного СтЛУ-2 $x_1(t)$ и $\widetilde{x}(t)$ совпадают. Следовательно, совпадают и их фазовые графики, что и требовалось. □

5.2 Направление движения по фазовым графикам

С этого момента считаем $a_0 \neq 0$ и рассматриваем невырожденное уравнение (5.1). В этом случае уравнение имеет единственное стационарное решение $x(t) \equiv 0$, которому соответствует фазовый график $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$ — точка $O(0;0)$, являющаяся точкой покоя.

Изобразим фазовую плоскость невырожденного уравнения (5.1).

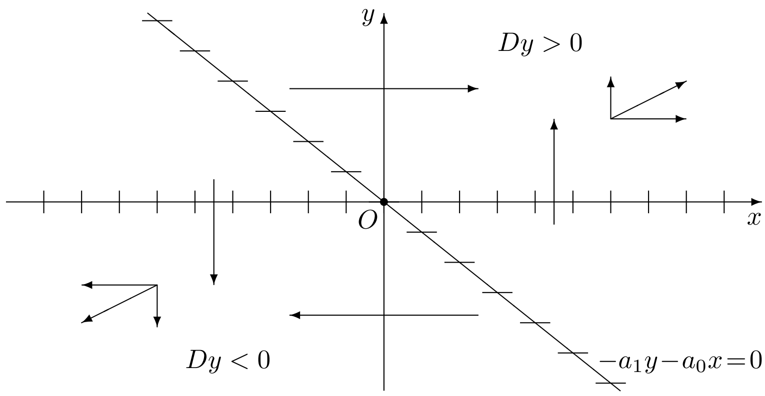

Рис. 5.1: Направление движения по фазовым графикам

Если рассмотреть точки верхней полуплоскости, то для них $y(t)>0 \Longrightarrow Dx(t)>0$, т.е. $x(t)$ возрастает. Это означает, что в верхней полуплоскости абсциссы x точек фазовых графиков возрастают с ростом t. Аналогично в нижней полуплоскости $y(t) < 0 \Longrightarrow Dx(t) < 0$, т.е $x(t)$ убывает, а абсциссы x точек фазовых графиков убывают с ростом t.

Заменим t на $-t$. Тогда направление движения по фазовым графикам изменится на противоположное и, кроме того, поскольку $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, то

$$y(-t) = \frac{dx(-t)}{d(-t)} = \frac{dx(-t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d(-t)} = -1 \cdot \frac{dx(-t)}{dt} = -Dx(-t) = -y(t).$$

Это означает, что фазовые графики отразятся симметрично относительно Ox при замене t на $-t$.

Помотрим, что произойдёт с самим уравнением (5.1) при замене t на $-t$:

$$\frac{d^2x(-t)}{d(-t)^2} + a_1\frac{d(-x)}{d(-t)} + a_0x(-t) = 0 \Longleftrightarrow \left[\frac{d^2x(-t)}{d(-t)^2} = \frac{d}{d(-t)}\left(\frac{dx(-t)}{d(-t)}\right) = \right.$$
$$\left. = -\frac{d}{dt}\left(-\frac{dx(-t)}{dt}\right) = -\frac{d^2x(-t)}{dt^2}\right] \Longleftrightarrow \frac{d^2x(-t)}{dt^2} - a_1\frac{d(-x)}{dt} + a_0x(-t) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow D^2x - a_1Dx + a_0x = 0.$$

Пример 14 *Если мы знаем фазовые графики уравнения $D^2x + 2Dx + 2x = 0$, то фазовые графики уравнения $D^2x - 2Dx + 2x = 0$ получаются из них симметричным отражением относительно Ox и заменой направления движения на противоположное.*

Поэтому далее, без ограничения общности, считаем, что $a_1 \geq 0$. Рассмотрим угловой коэффициент касательной к фазовым графикам:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Dy}{Dx}.$$

Но сперва перепишем уравнение (5.1) с учётом $y = Dx,\ Dy = D^2x$:

$$Dy + a_1 y + a_0 x = 0 \iff Dy = -a_1 y - a_0 x.$$

Значит, угловой коэффициент касательной к фазовым графикам можно определить так:

$$y'_x = \frac{-a_1 y - a_0 x}{y}$$

Если $Dy = 0$, то получаем $-a_1 y - a_0 x = 0$ — уравнение прямой. На этой прямой угловой коэффициент касательных к фазовым графикам $y'_x = 0$ и, следовательно, все фазовые графики пересекают эту прямую с горизонтальной касательной.

Если $y \to 0$, то $y'_x = \infty$ и, следовательно, все фазовые графики пересекают прямую Ox с вертикальной касательной.

Замечание 8 *Если t интерпретировать как время движения материальной точки, то фазовые графики можно понимать как траектории движения точки.*

5.3 O графики

Если точки фазового графика $(x(t); y(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} (0;0)$, то его называют O^+ *фазовым графиком*. Если точки фазового графика $(x(t); y(t)) \xrightarrow[t\to-\infty]{} (0;0)$, то его называют O^- *фазовым графиком*. И наконец, если точки фазового графика $(x(t); y(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} (0;0)$, то его называют *$O$ фазовым графиком*. Другими словами, O фазовый график является как O^+, так и O^- фазовым графиком.

Если дополнительно выполняется $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = k$, то график называют *$kO^+$ фазовым графиком*. Аналогично определяются kO^- и *kO фазовые графики*. Направление k называют *исключительным направлением* (с этим направлением мы входим в начало координат, двигаясь по точкам kO^+ фазового графика).

Теорема 5.2 *Если уравнение* (5.1) *имеет $kO^\pm$ фазовые графики, что число k является собственным значением оператора L_2*

Доказательство. Проведём для kO^+ графиков (для kO^- доказательство аналогично). Из условия следует, что

$$k = \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \left[\left(\frac{0}{0}\right), \text{правило Лопиталя}\right] = \lim_{t\to+\infty} \frac{Dy(t)}{Dx(t)} =$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{-a_1 y(t) - a_0 x(t)}{y(t)} = -a_1 - a_0 \lim_{t\to+\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = -a_1 - a_0 \frac{1}{k}.$$

Значит, $k = -a_1 - a_0\frac{1}{k} \implies k^2 + a_1 k + a_0 = 0 \implies k$ является собственным значением оператора L_2, что и требовалось. $\square$

Следствие 5.2.1 *Если уравнение* (5.1) *имеет* $kO^{\pm}$ *фазовые графики, то оператор* L_2 *имеет действительное собственное значение.*

Предположим, что уравнение (5.1) имеет kO фазовые графики. Посмотрим, будут ли лучи прямой $y = kx$ фазовыми графиками уравнения (5.1):

$$Dx = y = kx,$$
$$D^2x = Dy = D(kx) = kDx = k^2x,$$
$$D^2x + a_1Dx + a_0x = k^2x(t) + a_1kx(t) + a_0x(t) = x(t)\left(k^2 + a_1k + a_0\right) = 0 \quad \forall x(t).$$

Это означает, что лучи прямой $y = kx$ являются фазовыми графиками уравнения (5.1). Отметим особо, что фазовыми графиками могут быть только **лучи** этой прямой (сама прямая не может быть фазовым графиком, поскольку она проходит через точку $O(0;0)$, являющуюся фазовым графиком нулевого решения $x(t) \equiv 0$, и не совпадает с этой точкой).

5.4 Типы точек покоя

По-прежнему считаем, что $a_0 \neq 0,\ a_1 \geq 0$.

I. Седло[1]**.** Предположим, что оператор L_2 имеет действительные собственные значения $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$ разных знаков: $\nu_1\nu_2 < 0$. Пусть для определённости $\nu_1 < 0$, $\nu_2 > 0$. По теореме Виета $a_0 = \nu_1\nu_2$, поэтому $a_0 < 0$. Общее решение запишется в этом случае в виде $x(t) = C_1e^{\nu_1 t} + C_2e^{\nu_2 t}$, а его фазовые графики:

$$\begin{cases} x = C_1e^{\nu_1 t} + C_2e^{\nu_2 t}, \\ y = C_1\nu_1e^{\nu_1 t} + C_2\nu_2e^{\nu_2 t}. \end{cases}$$

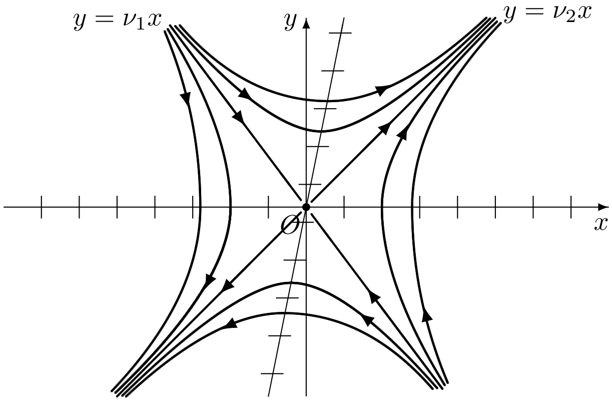

Рис. 5.2: Седло

[1] Название объясняется тем, что фазовые графики напоминают сечения гиперболического параболоида, в народе называемого седлом.

Отметим, что точки фазовых графиков решений не стремятся к точке $O(0;0)$ при $t \to \pm\infty$, когда $C_1, C_2 \neq 0$.

Если же $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$, то точки фазовых графиков $\begin{cases} x = C_1 e^{\nu_1 t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \\ y = C_1\nu_1 e^{\nu_1 t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \end{cases}$. Из системы видно, что $y = \nu_1 x$. Это означает, что фазовые графики решений, удовлетворяющих условию $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$, есть $\nu_1 O^+$ фазовые графики, которые представляют собой лучи прямой $y = \nu_1 x$.

Аналогично для $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$: $\begin{cases} x = C_2 e^{\nu_2 t} \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0 \\ y = C_2\nu_2 e^{\nu_2 t} \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0 \end{cases}$, $y = \nu_2 x$. Это опять-таки означает, что фазовые графики решений, удовлетворяющих условию $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, есть $\nu_2 O^-$ фазовые графики, которые представляют собой лучи прямой $y = \nu_2 x$.

Рассмотрим теперь прямую $-a_1 y - a_0 x = 0 \iff y = -\frac{a_0}{a_1}x$, $-\frac{a_0}{a_1} > 0$. Сравним её уголовой коэффициент с угловым коэффициентом прямой $y = \nu_2 x$:

$$-\frac{a_0}{a_1} - \nu_2 = -\frac{\nu_1\nu_2}{-(\nu_1+\nu_2)} - \nu_2 = -\frac{\nu_2^2}{\nu_1+\nu_2} = \frac{\nu_2^2}{a_1} > 0,$$

поэтому прямая $-a_1 y - a_0 x = 0$ лежит выше прямой $y = \nu_2 x$.

Рассмотрим поведение фазовых графиков на ∞:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{C_1\nu_1 e^{\nu_1 t} + C_2\nu_2 e^{\nu_2 t}}{C_1 e^{\nu_1 t} + C_2 e^{\nu_2 t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{C_1\nu_1 e^{(\nu_1-\nu_2)t} + C_2\nu_2}{C_1 e^{(\nu_1-\nu_2)t} + C_2} = [\nu_1 - \nu_2 < 0] = \nu_2,$$

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty}\frac{C_1\nu_1 + C_2\nu_2 e^{(\nu_2-\nu_1)t}}{C_1 + C_2 e^{(\nu_2-\nu_1)t}} = [\nu_2 - \nu_1 > 0] = \nu_1.$$

Таким образом, при $t \to +\infty$ фазовые графики приближаются к лучам прямой $y = \nu_2 x$, а при $t \to -\infty$ — к лучам прямой $y = \nu_1 x$. Другими словами, фазовые графики всех решений начинаются от лучей прямой $y = \nu_1 x$ и заканчиваются на лучах прямой $y = \nu_2 x$.

Приведённые выше выкладки позволяют нам сделать эскиз фазовых графиков, как на рис. 5.2. Точка покоя O с таким расположением фазовых графиков называется *седлом*.

II. Узлы. Предположим, оператор L_2 имеет действительные собственные значения $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$, но уже одного знака: $\nu_1\nu_2 > 0$. Возможны два случая.

1) $\nu_1 \neq \nu_2$. Тогда $a_0 = \nu_1\nu_2 > 0$. Мы знаем, что $-(\nu_1+\nu_2) = a_1 \geq 0$, поэтому $\nu_1 < 0, \nu_2 < 0$. Пусть для определённости $\nu_1 < \nu_2 < 0$. Запишем общее решение $x(t) = C_1 e^{\nu_1 t} + C_2 e^{\nu_2 t}$ и координаты точек его фазовых графиков:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\nu_1 t} + C_2 e^{\nu_2 t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \\ y = C_1\nu_1 e^{\nu_1 t} + C_2\nu_2 e^{\nu_2 t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \end{cases}$$

Т.е фазовые графики всех решений представляют собой O^+ фазовые графики.

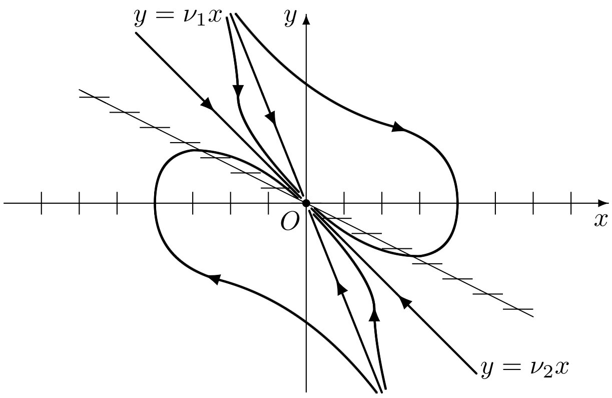

Рис. 5.3: Бикритический узел

Если $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$, то из системы получим, что $y = \nu_1 x$, а если $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, то $y = \nu_2 x$. Поэтому имеем четыре лучевых графика — лучи прямых $y = \nu_1 x$ и $y = \nu_2 x$.

Прямая $-a_1 y - a_0 x = 0 \iff y = -\frac{a_0}{a_1} x$, $-\frac{a_0}{a_1} < 0$ имеет отрицательный наклон и (это нетрудно проверить) лежит ниже прямой $y = \nu_2 x$.

Рассмотрим поведение фазовых графиков на ∞:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{C_1 \nu_1 e^{\nu_1 t} + C_2 \nu_2 e^{\nu_2 t}}{C_1 e^{\nu_1 t} + C_2 e^{\nu_2 t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{C_1 \nu_1 e^{(\nu_1 - \nu_2)t} + C_2 \nu_2}{C_1 e^{(\nu_1 - \nu_2)t} + C_2} = [\nu_1 - \nu_2 < 0] = \nu_2,$$

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{C_1 \nu_1 + C_2 \nu_2 e^{(\nu_2 - \nu_1)t}}{C_1 + C_2 e^{(\nu_2 - \nu_1)t}} = [\nu_2 - \nu_1 > 0] = \nu_1.$$

Значит, фазовые графики всех решений имеют $\nu_2 O^+$ и $\nu_1 O^-$ направленность. Они начинаются от лучей прямой $y = \nu_1 x$ и входят в начало координат по направлению лучей прямой $y = \nu_2 x$.

Приведённые выше выкладки позволяют нам сделать эскиз фазовых графиков, как на рис. 5.3. Точка покоя O с таким расположением фазовых графиков называется *бикритическим узлом*.

2) $\nu_1 = \nu_2$. Как и ранее, $a_0 > 0$, $-\frac{a_1}{2} = \nu_1 < 0$. Общее решение запишется в виде $x(t) = (C_1 t + C_2) e^{\nu_1 t}$, а координаты точек его фазовых графиков:

$$\begin{cases} x = (C_1 t + C_2) e^{\nu_1 t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \\ y = C_1 e^{\nu_1 t} + (C_1 t + C_2) \nu_1 e^{\nu_1 t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \end{cases}$$

Т.е фазовые графики всех решений представляют собой O^+ фазовые графики.

Если $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, то из системы получим $y = \nu_1 x$. Поэтому имеются два лучевых графика — лучи прямой $y = \nu_1 x$.

Прямая $-a_1 y - a_0 x = 0 \iff y = -\frac{a_0}{a_1} x$, $-\frac{a_0}{a_1} < 0$ имеет отрицательный наклон и (это нетрудно проверить) лежит ниже прямой $y = \nu_1 x$.

Рассмотрим поведение фазовых графиков на ∞:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{C_1 e^{\nu_1 t} + (C_1 t + C_2) \nu_1 e^{\nu_1 t}}{(C_1 t + C_2) e^{\nu_1 t}} = \lim_{t \to \infty} \left(\nu_1 + \frac{C_1}{C_1 t + C_2} \right) = \nu_1.$$

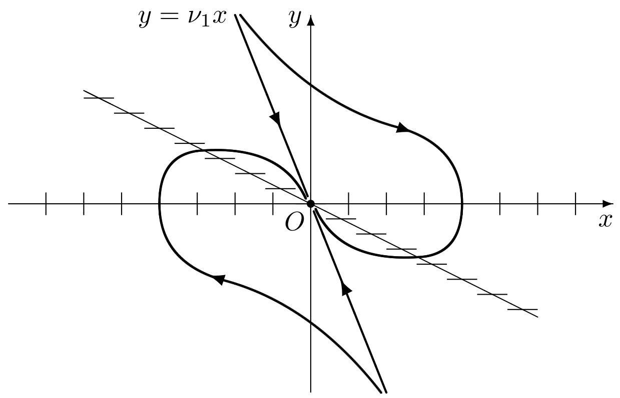

Рис. 5.4: Монокритический узел

Это значит, что фазовые графики всех решений имеют $\nu_1 O$ направленность. Они начинаются от лучей прямой $y = \nu_1 x$ и входят в начало координат по направлению тех же самых лучей.

Приведённые выше выкладки позволяют нам сделать эскиз фазовых графиков, как на рис. 5.4. Точка покоя O с таким расположением фазовых графиков называется *монокритическим узлом*.

III. Фокус. Центр. Предположим, оператор L_2 имеет комплексные собственные значения $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}$, $\nu_{1,2} = \lambda \pm i\,\mu$. Возможны два случая.

1) $\lambda \neq 0$. Тогда $0 \leq a_1 = -(\nu_1 + \nu_2) = -2\lambda$, т.е. $\lambda < 0$. Общее решение примет вид $x(t) = (C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t)e^{\lambda t}$, а координаты точек фазовых графиков:

$$\begin{cases} x = (C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t)e^{\lambda t} \\ y = (-C_1 \mu \sin \mu t + C_2 \mu \cos \mu t + C_1 \lambda \cos \mu t + C_2 \lambda \sin \mu t)e^{\lambda t} \end{cases}$$

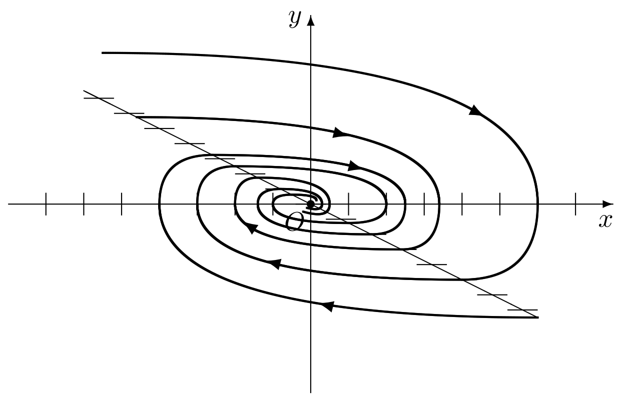

Рис. 5.5: Фокус

Поскольку $\lambda < 0$, точки фазовых графиков всех решений $(x; y) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (0; 0)$. Следовательно, фазовые графики всех решений являются O^+ графиками.

Так как $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}$, то лучевых графиков не будет. Прямая $-a_1 y - a_0 x = 0 \iff \iff y = -\frac{a_0}{a_1} x$, $a_0 = \nu_1 \nu_2 = \lambda^2 + \mu^2 > 0$ имеет отрицательный наклон.

Можно заметить, что при $t \to +\infty$ отношение $\frac{y(t)}{x(t)}$ не имеет предела. Но при $t \to +\infty$ как x, так и y будут бесконечное число раз менять знак, по модулю стремясь к нулю. Поэтому фазовые графики в этом случае напоминают спираль (рис. 5.5). Точка покоя O с таким расположением фазовых графиков называется *фокусом*.

2) $\lambda = 0$. Общее решение примет вид $x(t) = C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t$, а координаты точек фазовых графиков:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t \\ y = -C_1 \mu \sin \mu t + C_2 \mu \cos \mu t \end{cases}$$

Отсюда видим, что ни x ни y не стремятся к нулю ни при $t \to +\infty$, ни при $t \to -\infty$. Поскольку собственные значения комплексные, лучевых графиков не будет.

Ввиду того, что $a_1 = -(\nu_1 + \nu_2) = -2\lambda = 0$, прямая $-a_1 y - a_0 x = 0$ перейдёт в прямую $x = 0$.

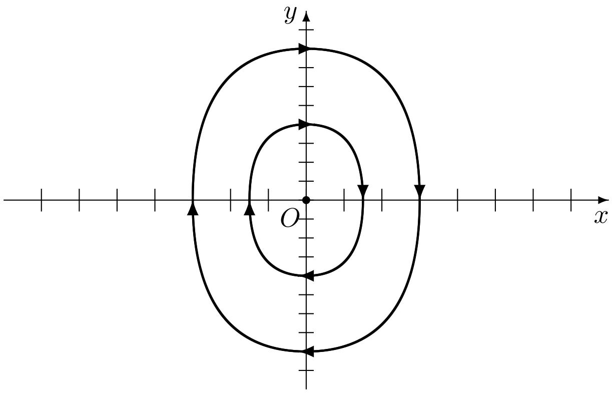

Рис. 5.6: Центр

Отношение $\frac{y(t)}{x(t)}$ не имеет предела при $t \to \pm\infty$. Но заметим, что

$$x^2 + \frac{y^2}{\mu^2} = (C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t)^2 + (-C_1 \sin \mu t + C_2 \cos \mu t)^2 =$$
$$= C_1^2(\cos^2\mu t + \sin^2\mu t) + C_2^2(\sin^2\mu t + \cos^2\mu t) + 2C_1C_2 \cos\mu t \sin\mu t - 2C_1C_2 \sin\mu t \cos\mu t =$$
$$= C_1^2 + C_2^2.$$

Поэтому фазовые графики всех решений представляютс собой эллипсы с осями симметрии Ox и Oy (рис. 5.6). Точка покоя O с таким расположением фазовых графиков называется *центром*.

Напомним, что фазовые графики уравнения $D^2x - a_1 Dx + a_0 x = 0$ получаются из фазовых графиков уравнения $D^2 x + a_1 Dx + a_0 x = 0$ ($a_1 \geq 0$, $a_0 \neq 0$) симметричным отражением относительно прямой Ox и сменой направления движения на противоположное. Ясно, что при этих преобразованиях тип точки покоя сохранится. Таким образом, приведённые в этом параграфе рассуждения доказывают теорему:

Теорема 5.3 (о классификации точек покоя невырожденного ОСтЛУ–2) *Тип точки покоя невырожденного однородного СтЛУ–2 $D^2x+a_1Dx+a_0x = 0$ полностью определяется собственными значениями ν_1, ν_2 оператора L_2, а именно:*

1. *$\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$, $\nu_1\nu_2 < 0$ (разного знака) — седло.*
2. *$\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$, $\nu_1\nu_2 > 0$ (одного знака):*
   (a) *$\nu_1 \neq \nu_2$ — бикритический узел.*
   (b) *$\nu_1 = \nu_2$ — монокритический узел.*
3. *$\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}$, $\nu_{1,2} = \lambda \pm i\,\mu$:*
   (a) *$\lambda \neq 0$ — фокус.*
   (b) *$\lambda = 0$ — центр.*

5.5 Прямая покоя

Теперь рассмотрим вырожденное СтЛУ–2 ($a_0 = 0$, $a_1 \geq 0$):

$$D^2x + a_1Dx = 0$$

Оно допускает множество стационарных решений $x(t) \equiv C$, $C \in \mathbb{R}$, фазовые графики которых в совокупности есть не что иное, как прямая Ox: $\begin{cases} x = C, \\ y = 0. \end{cases}$ Иначе говоря, прямая Ox вся сплошь состоит из точек покоя. Поэтому она является *прямой покоя*.

Рассмотрим фазовые графики нестационарных решений. Характеристическое уравнение $\nu^2 + a_1\nu = 0$ имеет корень $\nu_2 = 0$. В зависимости от значения другого корня ν_1 выделяют случаи:

1) $\nu_1 \neq 0$, $\nu_2 = 0$. Тогда $0 \leq a_1 = -(\nu_1 + \nu_2) = -\nu_1$, $\nu_1 < 0$. Общее решение запишется в виде $x(t) = C_1e^{\nu_1 t} + C_2$, а координаты точек фазовых графиков:

$$\begin{cases} x = C_1e^{\nu_1 t} + C_2, \\ y = C_1\nu_1e^{\nu_1 t}. \end{cases}$$

Отсюда видим, что $y \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ а также $y = \nu_1C_1e^{\nu_1 t} = \nu_1(x - C_2)$. Поэтому фазовые графики нестационарных решений — это лучи прямых $y = \nu_1(x - C_2)$ (рис. 5.7).

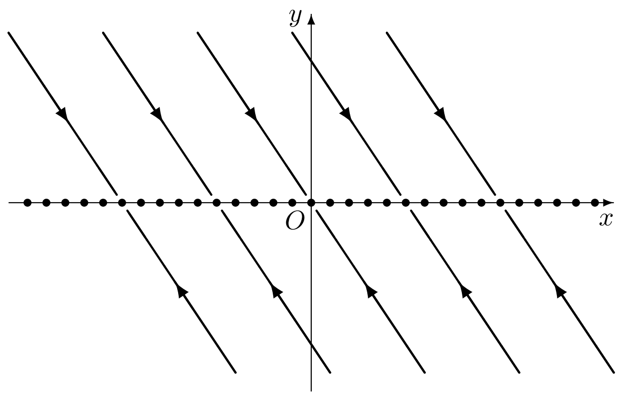

Рис. 5.7: Прямая покоя, $\nu_1 \neq 0$

2) $\nu_1 = \nu_2 = 0$. Исходное уравнение примет вид $D^2 x = 0$, его общее решение $x(t) = C_1 t + C_2$, координаты точек фазовых графиков:

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2, \\ y = C_1. \end{cases}$$

Понятно, что ни x, ни y не стремятся к нулю при $t \to \pm\infty$. Из системы видно, что фазовые графики есть прямые, параллельные прямой Ox (рис. 5.8).

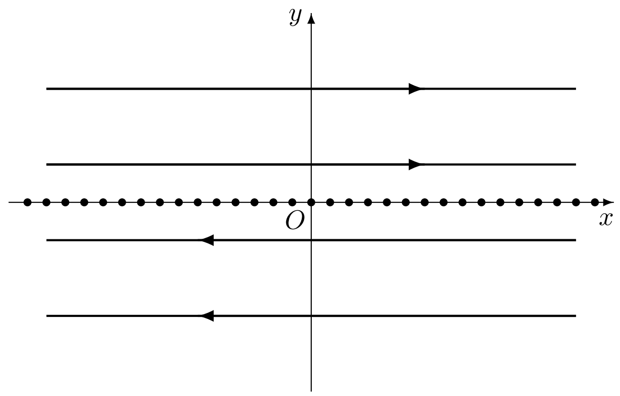

Рис. 5.8: Прямая покоя, $\nu_1 = 0$

Тема 6

Исследование стационарных линейных уравнений n-го порядка

Будем рассматривать неоднородное и соответствующее ему однородное уравнения:

$$L_n x = f(t), \qquad t \in \mathcal{I} \tag{6.1}$$

$$L_n x = 0, \tag{6.2}$$

где $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 D^0$, $a_k \in \mathbb{R}$. При этом будем предполагать, что функция $f(t)$ непрерывна на промежутке $\mathcal{I}$.

6.1 Интегральная непрерывность

Пусть $\varphi_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$ — базис пространства решений однородного уравнения (6.2), нормированный в точке $t = 0$.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{array}{l} L_n x = f(t), \quad t \in \mathcal{I}, \quad s \in \mathcal{I} \\ D^k x\big|_{t=s} = \xi_k, \quad \xi_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, n-1}. \end{array} \tag{6.3}$$

На основании ТОР для неоднородного СтЛУ$-n$ существует и единственно решение этой задачи, которое определяется по формуле

$$x(t, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t - s) + x^*(t),$$

где $x^*(t) = \int\limits_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$ — частное решение неоднородного уравнения (6.2), а через ξ обозначен вектор $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$.

Наряду с задачей (6.3) рассмотрим ещё одну задачу Коши:

$$\begin{array}{l} L_n x = f(t), \quad t \in \mathcal{I}, \quad s \in \mathcal{I} \\ D^k x\big|_{t=s} = \xi_k + \Delta\xi_k, \quad \xi_k, \Delta\xi_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, n-1}. \end{array} \tag{6.4}$$

В силу всё той же ТОР, задача (6.4) однозначно разрешима и её решение определяется по формуле

$$x(t,\xi{+}\Delta\xi) = \sum_{k=0}^{n-1}(\xi_k{+}\Delta\xi_k)\varphi_k(t{-}s){+}x^*(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\varphi_k(t{-}s){+}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\xi_k\varphi_k(t{-}s){+}x^*(t),$$

где $x^*(t) = \int_s^t \varphi_{n-1}(t{-}\tau)f(\tau)\,d\tau$ — частное решение неоднородного уравнения (6.2), а $\xi + \Delta\xi = (\xi_0{+}\Delta\xi_0,\ \xi_1{+}\Delta\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1}{+}\Delta\xi_{n-1})$.

Числа $\Delta\xi_k(t),\ k = \overline{0, n-1}$ называют *возмущениями* начальных значений ξ_k. Соответственно задачу Коши (6.4) называют *возмущённой* задачей Коши, а задачу (6.3) — *невозмущённой* задачей Коши.

Отклонением решений возмущённой и невозмущённой задач Коши называют функцию

$$\rho(t,\Delta\xi) = \sum_{j=0}^{n-1}\left|D^j x(t,\xi+\Delta\xi) - D^j x(t,\xi)\right| \tag{6.5}$$

Подсчитаем его несколько иначе:

$$D^j x(t,\xi) = D^j\left(\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\varphi_k(t-s) + x^*(t)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\, D^j\varphi_k(t-s) + D^j x^*(t),$$

$$D^j x(t,\xi{+}\Delta\xi) = \sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\, D^j\varphi_k(t-s) + \sum_{k=0}^{n-1}\Delta\xi_k\, D^j\varphi_k(t-s) + D^j x^*(t).$$

$$\rho(t,\Delta\xi) = \sum_{j=0}^{n-1}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\xi_k\, D^j\varphi_k(t-s)\right| \tag{6.6}$$

Замечание 9 *Из формулы* (6.6) *следует, что отклонение* ρ *не зависит от начальных значений* ξ_k *и неоднородности* $f(t)$*, а зависит лишь от возмущений* $\Delta\xi_k$ *и оператора* L_n*. Поэтому при изучении отклонения возмущённой и невозмущённой задач Коши для уравнения* (6.1) *можно рассматривать уравнение* (6.2)*, помня, что* $f(t) \in C(\mathfrak{I})$.

Говорят, что решение $x(t,\xi)$ уравнения (6.1) *непрерывно зависит от* ξ_k на промежутке $\mathfrak{I}$, если $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_\epsilon > 0,\ \forall t \in \mathfrak{I},\ \forall\Delta\xi_k \in \mathbb{R},\ k = \overline{0, n-1}$

$$\text{из выполнения } |\Delta\xi_0| + |\Delta\xi_1| + \cdots + |\Delta\xi_{n-1}| \le \delta_\epsilon \implies \rho(t,\Delta\xi) \le \epsilon.$$

Если решение $x(t,\xi)$ уравнения (6.1) непрерывно зависит от начальных значений ξ_k на любом компактном множестве $\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I}$, то его называют *интегрально непрерывным* на $\mathfrak{I}$.

Теорема 6.1 *Пусть функция* $f(t)$ *непрерывна на* $\mathfrak{I}$*. Тогда любое решение* $x(t,\xi)$ *уравнения* (6.1) *интегрально непрерывно на промежутке* $\mathfrak{I}$.

Доказательство. Рассмотрим некоторое решение $x(t,\xi)$ уравнения (6.1) и произвольный компакт $\mathfrak{I}_1 = [a;b] \subset \mathfrak{I}$ и покажем, что это решение непрерывно зависит от начальных значений ξ_k на $\mathfrak{I}_1$.

Все функции $D^j\varphi_k(t-s),\ k,j=\overline{0,n-1}$ являются квазимногочленами, а посему каждая из них непрерывна на отрезке $\mathfrak{I}_1$. Тогда по теормеме Вейерштрасса каждая функция $D^j\varphi_k(t-s)$ достигает на отрезке $\mathfrak{I}_1$ своего наибольшего значения $M_{j,k}$. Выбирая из чисел $M_{j,k}$ самое большое число M, получим, что существует константа $M = M_{[a;b]}$, зависящая лишь от отрезка $\mathfrak{I}_1 = [a;b]$, такая, что

$$\left|D^j\varphi_k(t-s)\right| \le M \qquad \forall t \in \mathfrak{I}_1, \quad \forall k,j=\overline{0,n-1}.$$

Зададимся произвольным $\epsilon > 0$ и оценим величину отклонения ρ:

$$\rho(t,\xi) = \sum_{j=0}^{n-1}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\xi_k\, D^j\varphi_k(t-s)\right| \le \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\xi_k|\,\left|D^j\varphi_k(t-s)\right| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\xi_k|\cdot M = M\sum_{j=0}^{n-1}(|\Delta\xi_0|+|\Delta\xi_1|+\dots+|\Delta\xi_{n-1}|) =$$
$$= nM(|\Delta\xi_0|+|\Delta\xi_1|+\dots+|\Delta\xi_{n-1}|).$$

Видим, что $\rho(t,\xi) \le \epsilon$, если $|\Delta\xi_0|+|\Delta\xi_1|+\dots+|\Delta\xi_{n-1}| \le \frac{\epsilon}{nM}$. Выбрав в качестве $\delta_\epsilon := \frac{\epsilon}{nM}$, получим:

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta_\epsilon>0,\ \forall t\in\mathfrak{I}_1 \qquad |\Delta\xi_0|+|\Delta\xi_1|+\dots+|\Delta\xi_{n-1}| \le \delta_\epsilon \implies \rho(t,\Delta\xi) \le \epsilon,$$

что и означает непрерывную зависимость решения $x(t,\xi)$ от начальных значений ξ_k на $\mathfrak{I}_1$. Так как отрезок $\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I}$ выбирался произвольным образом, то по определению решение $x(t,\xi)$ интегрально непрерывно на $\mathfrak{I}$, что и требовалось. □

Замечание 10 *Из интегральной непрерывности решения на промежутке $\mathfrak{I}$ не следует его непрерывная зависимость от ξ_k на $\mathfrak{I}$.*

6.2 Устойчивость по Ляпунову

С этого момента считаем, что $\mathfrak{I} = [s;+\infty)$.

Говорят, что решение $x(t,\xi)$ уравнения (6.1) *устойчиво по Ляпунову в положительном напрвлении* (или просто *устойчиво по Ляпунову*), если $\forall\epsilon>0$ $\exists\delta_\epsilon>0,\ \forall t\ge s,\ \forall\Delta\xi_k\in\mathbb{R},\ k=\overline{0,n-1}$

$$\text{из выполнения } |\Delta\xi_0|+|\Delta\xi_1|+\dots+|\Delta\xi_{n-1}| \le \delta_\epsilon \implies \rho(t,\Delta\xi) \le \epsilon.$$

Другими словами, решение устойчиво по Ляпунову, если оно непрерывно зависит от начальных значений ξ_k на полуоси $\mathfrak{I} = [s;+\infty)$.

Так как отклонение ρ не зависит от ξ_k, то из устойчивости одного из решений уравнения (6.1) следует устойчивость всех решений уравнения (6.1) (и, очевидно, наоборот: если все решения уравнения (6.1) устойчивы, то и данное нам конкретное решение этого уравнения тоже устойчиво). В этом случае имеет смысл говорить уже об *устойчивости самого уравнения* (6.1). А поскольку, отклонение ρ также не зависит от неоднородности $f(t)$, то исследование устойчивости неоднородного уравнения (6.1) можно заменить на исследование устойчивости однородного уравнения (6.2) (помня, что $f(t)$ непрерывна на $\mathcal{I}$). Таким образом, имеет место следующая схема:

Устойчивость неоднородного уравнения (6.1)	$\Longleftrightarrow$	Устойчивости однородного уравнения (6.2)	$\Longleftrightarrow$	Устойчивости нулевого решения уравнения (6.2)

которой мы будем пользоваться при доказательстве теорем.

Многочлен $\nu^n+a_{n-1}\nu^{n-1}+\dots+a_1\nu+a_0$ называют *ляпуновским*, если действительные части всех его корней неположительны ($\operatorname{Re}\nu_i \le 0\ \forall i=\overline{1,n}$), а те корни ν_k , для которых $\operatorname{Re}\nu_k=0$, являются однократными ($n_k=1$).

Теорема 6.2 (Критерий устойчивости по Ляпунову) *Для устойчивости уравнения* (6.1) *необходимо и достаточно, чтобы характеристический многочлен оператора L_n был ляпуновским.*

Доказательство:

Необходимость. Пусть уравнение (6.1) устойчиво. Тогда устойчиво нулевое решение $x(t,\overline{0})\equiv 0$ уравнения (6.2). Рассмотрим отклонение

$$\rho(t,\Delta\xi)=\sum_{j=0}^{n-1}\left|D^jx(t,\overline{0}+\Delta\xi)-D^jx(t,\overline{0})\right|=\sum_{j=0}^{n-1}\left|D^jx(t,\Delta\xi)\right|=\sum_{j=0}^{n-1}\left|D^jx(t)\right|,$$

где $x(t)=x(t,\Delta\xi)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\Delta\xi_k\varphi_k(t-s)$ — решение возмущённой задачи Коши для уравнения (6.2).

Если выписать общее решение уравненния (6.2), то при произвольных постоянных C_k будут стоять функции $\psi_k(t)$, образующие базис. Поэтому каждая из функций $\varphi_k(t-s)$ линейно выражается через базисные функции $\psi_j(t)$:

$$\varphi_k(t-s)=\alpha_{0\,k}\psi_0(t)+\alpha_{1\,k}\psi_1(t)+\dots+\alpha_{n-1\,k}\psi_{n-1}(t)\quad k=\overline{0,n-1}.$$

Тогда матрица $A=(a_{ij})$ будет матрицей перехода от базиса $\psi_k(t)$ к базису $\varphi_k(t-s)$. Она постоянна и зависит лишь от оператора L_n.

Докажем утверждение от противного:

1. Предположим, что имеется собственное значение, скажем, $\nu_0=\lambda_0+i\,\mu_0$ такое, что $\operatorname{Re}\nu_0=\lambda_0>0$. Тогда в общем решении будет присутствовать слагаемое вида $e^{\lambda_0 t}(A(t)\cos\mu_0 t+B(t)\sin\mu_0 t)$, где $A(t), B(t)$ — многочлены с произвольными коэффициентами одинаковой степени (если $\nu_0\in\mathbb{R}$, то слагаемое

примет вид $e^{\lambda_0 t}A(t)$ — частный случай при $\mu_0 = 0$). Подберем значения произвольных постоянных $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ так, чтобы коэффициенты многочленов $A(t), B(t)$ были положительными, а все остальные произвольные постоянные равнялись нулю. Получим частное решение $x(t) = e^{\lambda_0 t}(A(t)\cos\mu_0 t + B(t)\sin\mu_0 t)$. Поскольку $\cos\mu_0 t$ и $\sin\mu_0 t$ не обращаются одновременно в нуль, то с учётом $\lambda_0 > 0$ получим: $|x(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. С другой стороны, это частное решение $x(t)$ будет решением некоторой возмущённой задачи Коши, т.е. $\exists \Delta\xi,\ \ x(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta\xi_k \varphi_k(t-s)$. Тогда вектор $C = (C_0, C_1, \ldots, C_{n-1})^T$ — координатный столбец $x(t)$ в базисе $\psi_k(t)$, а $\Delta\xi$ — координатный столбец $x(t)$ в базисе $\varphi_k(t-s)$. Значит, $\Delta\xi = AC$ и по свойствам октаэдрической нормы:

$$|\Delta\xi_0| + \cdots + |\Delta\xi_{n-1}| = \|\Delta\xi\|_o = \|AC\|_o \le \underbrace{\|A\|_{\mathrm{I}}}_{=M=\mathrm{const}} \|C\|_o = M(|C_0| + \cdots + |C_{n-1}|)$$

Поэтому, сделав ненулевые C_k достаточно малыми, мы получим достаточно малое значение $\|\Delta\xi\|_o$. Отсюда можно сделать вывод, что найдётся вектор $\Delta\xi$ такой, что значение $|\Delta\xi_0| + \cdots + |\Delta\xi_{n-1}|$ достаточно мало, но отклонение $\rho(t, \Delta\xi) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} |D^j x(t)| \ge |x(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ — противоречие с устойчивостью нулевого решения. Следовательно, действительные части всех собственных значений неположительны.

2. Пусть имеется собственное значение, скажем, ν_0 такое, что $\mathrm{Re}\,\nu_0 = 0$ и его кратность $n_0 > 1$. Тогда в общем решении будет присутствовать слагаемое вида $A(t)\cos\mu_0 t + B(t)\sin\mu_0 t$, где $A(t), B(t)$ — многочлены с произвольными коэффициентами одинаковой степени > 0 (если $\nu_0 = 0$, то слагаемое примет вид $A(t)$). Подберем значения произвольных постоянных $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ так, чтобы коэффициенты многочленов $A(t), B(t)$ были положительными, а все остальные произвольные постоянные равнялись нулю. Получим частное решение $x(t) = A(t)\cos\mu_0 t + B(t)\sin\mu_0 t$. Поскольку $\cos\mu_0 t$ и $\sin\mu_0 t$ не обращаются одновременно в нуль, а степень многогочленов ≥ 1, то $|x(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. Аналогично предыдущему пункту, получаем, что что найдётся вектор $\Delta\xi$ такой, что значение $|\Delta\xi_0| + \cdots + |\Delta\xi_{n-1}|$ достаточно мало, но отклонение $\rho(t, \Delta\xi) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} |D^j x(t)| \ge |x(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ — противоречие с устойчивостью нулевого решения.

Полученные противоречия доказывают, что характеристический многочлен ляпуновский.

Достаточность. Дано, что характеристический многочлен ляпуновский. Докажем устойчивость нулевого решения уравнения (6.2). В доказательстве необходимости было показано, что $\Delta\xi = AC$ и за счёт малости $\|C\|_o$ достигается малость $\|\Delta\xi\|_o$. Но матрица A невырожденна (как матрица перехода от базиса к базису), а посему верно и обратное: $C = A^{-1}\Delta\xi$ и за счёт малости $\|\Delta\xi\|_o$ можно добиться малости $\|C\|_o$.

Тем собственным значениям ν_k, для которых $\operatorname{Re}\nu_k < 0$, в общем решении будут соответствовать слагаемые, связанные с экспонентой в отрицательной степени. Поэтому все такие слагаемые, а также и их производные, стремятся к нулю при $t \to +\infty$. А значит, при при всех достаточно больших t сумма модулей этих слагаемых и их производных будет меньше любого наперёд заданного ϵ.

Тем однократным собственным значениям ν_k, для которых $\operatorname{Re}\nu_k = 0$ в общем решении будут соответствовать слагаемые вида $C_i \cos \mu t + C_{i+1} \sin \mu t$ или просто C_i. Все эти слагаемые, а также их производные, по модулю ограничены числом $2\widetilde{C}$, где $\widetilde{C}$ — наибольшее из чисел $|C_k|$. Как было отмечено выше, за счёт малости $|\Delta\xi_0| + \cdots + |\Delta\xi_{n-1}|$ можно добиться малости числа $|C_0| + \cdots + |C_{n-1}|$, а значит, и числа $\widetilde{C}$. Поэтому для всех веторов $\Delta\xi$ с достаточно малой суммой $|\Delta\xi_0| + \cdots + |\Delta\xi_{n-1}|$, сумма модулей всех слагаемых, отвечающих собственным значениям ν_k, а также их призводных будет меньше любого наперёд заданного ϵ.

Итак, если характеристический многочлен ляпуновский, то для любого наперёд заданного ϵ при всех достаточно больших t, для всех веторов $\Delta\xi$ с достаточно малой суммой $|\Delta\xi_0| + |\Delta\xi_1| + \cdots + |\Delta\xi_{n-1}|$, будет выполняться неравентсво $\rho(t, \Delta\xi) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} |D^j x(t)| \leq 2\epsilon$. Это как раз означает, что нулевое решение уравнения (6.2) устойчиво, что и требовалось.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 6.3 (Необходимое условие устойчивости по Ляпунову) *Для устойчивости уравнения* (6.1) *необходимо, чтобы все коэффициенты оператора* L_n *были неотрицательными.*

Доказательство. Предположим, что уравнение (6.1) устойчиво. Тогда характеристический многочлен оператора L_n будет ляпуновским. Это значит, что каждое собственное значение принимает один из следующих видов:

Вид собственного значения	Его кратность
$\nu_1 \in \mathbb{R},\ \nu_1 < 0$	$n_1 \in \mathbb{N}$
$\nu_2 = \lambda + i\,\mu$, $\nu_3 = \lambda - i\,\mu$, $\lambda < 0$	$n_2 = n_3 = n_{2,3} \in \mathbb{N}$
$\nu_4 = 0$	$n_4 = 1$
$\nu_5 = i\,\beta$, $\nu_6 = -i\,\beta$	$n_5 = n_6 = n_{5,6} = 1$

Следовательно, в разложении характеристического многочлена на простые множители будут присутствовать множителели видов: $(\nu - \nu_1)^{n_1}$, $(\nu - \nu_2)^{n_{2,3}}(\nu - \nu_3)^{n_{2,3}}$, ν, $(\nu - \nu_5)(\nu - \nu_6)$. Заметим, что:

$$(\nu - \nu_1)^{n_1} = (\nu + \underbrace{(-\nu_1)}_{>0})^{n_1}$$

$$(\nu - \nu_2)^{n_{2,3}}(\nu - \nu_3)^{n_{2,3}} = (((\nu - \lambda) - i\,\mu)((\nu - \lambda) + i\,\mu))^{n_{2,3}} = (\nu^2 \underbrace{-2\lambda}_{>0} \nu + \lambda^2 + \mu^2)^{n_{2,3}}$$

$$(\nu - \nu_5)(\nu - \nu_6) = (\nu - i\,\beta)(\nu + i\,\beta) = \nu^2 + \beta^2$$

Поэтому при раскрытии скобок внутри этих множителей отрицательные коэффициенты не появятся. Тогда, перемножая все множители, раскрывая скобки, мы получим характеристический многочлен, в котором также не будет отрицательных коэффициентов, что и требовалось. $\square$

Эта теорема позволяет быстро дать отрицательный ответ на вопрос устойчивости некоторых уравнений.

Пример 15 *Уравнение $D^3x - 8D^2x + 4Dx + x = 0$ неустойчиво по Ляпунову.*

6.3 Асимптотическая устойчивость

Говорят, что решение $x(t, \xi)$ уравнения (6.1) *асимптотически устойчиво* на $\mathcal{I} = [s; +\infty)$, если:

1. Оно устойчиво по Ляпунову.
2. При достаточно малых $\Delta\xi_k$ отклонение $\rho(t, \Delta\xi) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Так как отклонение ρ не зависит от ξ_k, то из асимптотической устойчивости одного из решений уравнения (6.1) следует асимптотическая устойчивость всех решений уравнения (6.1) (и, очевидно, наоборот: если все решения уравнения (6.1) асимптотически устойчивы, то и данное нам конкретное решение этого уравнения тоже асимптотически устойчиво). В этом случае имеет смысл говорить уже об *асимптотической устойчивости самого уравнения* (6.1). А поскольку, отклонение ρ также не зависит от неоднородности $f(t)$, то исследование асимптотической устойчивости неоднородного уравнения (6.1) можно заменить на исследование асимптотической устойчивости однородного уравнения (6.2) (помня, что $f(t)$ непрерывна на $\mathcal{I}$). Поэтому доказательства теорем будем вести по той же схеме, что и для обычной устойчивости.

Многочлен $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \cdots + a_1\nu + a_0$ называют *гурвицевым*, если действительные части всех его корней отрицательны ($\mathrm{Re}\,\nu_i < 0\ \forall i = \overline{1, n}$).

Теорема 6.4 (Критерий асимптотической устойчивости) *Для асимптотической устойчивости уравнения* (6.1) *необходимо и достаточно, чтобы характеристический многочлен оператора L_n был гурвицевым.*

Доказательство:

Необходимость. Дано, что уравнение (6.1) асимптотически устойчиво. Значит, оно устойчиво по Ляпунову и, следовательно, характеристический многочлен оператора L_n ляпуновский. От противного: пусть он не гурвицев, т.е. найдутся однократные собственные значения, скажем, ν_1, ν_2 такие, что $\nu_1 = i\beta$, $\nu_2 = -i\beta$ (или однократное собственное значение $\nu_0 = 0$). Докажем, что отклонение нулевого решения уравнения (6.2) $\rho(t, \Delta\xi) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} |D^j x(t, \Delta\xi)| = \sum\limits_{j=0}^{n-1} |D^j x(t)|$ не стремится к нулю при $t \to +\infty$. Тем самым получим противоречие с асимптотической устойчивостью нулевого решения уравнения (6.2).

Так как оператор L_n имеет описанные выше собственные значения ν_1, ν_2 (собственное значение ν_0), то в общем решении будет фигурировать слагаемое вида $C_i \cos\beta t + C_{i+1}\sin\beta t$ (или слагаемое C_i). Тогда, присвоив оставшимся произвольным постоянным нулевые значения, получим частное решение $x(t) = C_i\cos\beta t + C_{i+1}\sin\beta t$ (или $x(t) = C_i$). Оно будет решением некоторой возмущённой задачи Коши: $x(t) = x(t, \Delta\xi)$, и за счёт малости $\Delta\xi_k$ мы сможем добиться того, чтобы C_i, C_{i+1} были достаточно малыми (почему? — см. теорему 6.2). При этом, очевидно, отклонение $\rho(t,\Delta\xi) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} |D^j x(t)|$ не стремится к нулю при $t \to +\infty$ — противоречие.

Достаточность. Дано, что характеристический многочлен гурвицев. Значит, он и ляпуновский, и уравнение (6.1) устойчиво по Ляпунову. Поскольку характеристический многочлен гурвицев, то действительная часть каждого собственного значения отрицательна, и этому значению в общем решении уравнения (6.2) будет соответствовать слагаемое, связанное с экспонентой в отрицательной степени. Поэтому все такие слагаемые, а также их производные, стремятся к нулю при $t \to +\infty$, что влечёт $\rho(t,\Delta\xi) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} |D^j x(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Это означает асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения (6.2) , а вслед за ним и асимптотическую устойчивость уравнения (6.2), что и требовалось.

Теорема доказана. □

Теорема 6.5 (Необходимое условие асимптотической устойчивости) *Для асимптотической устойчивости уравнения* (6.1) *необходимо, чтобы все коэффициенты оператора L_n были положительными.*

Доказательство. Предположим, что уравнение (6.1) асимптотически устойчиво. Тогда характеристический многочлен оператора L_n будет гурвицевым. Это значит, что каждое собственное значение принимает один из двух видов:

Вид собственного значения	Его кратность
$\nu_1 \in \mathbb{R},\ \nu_1 < 0$	$n_1 \in \mathbb{N}$
$\nu_2 = \lambda + i\,\mu,$ $\nu_3 = \lambda - i\,\mu$ $\quad \lambda < 0$	$n_2 = n_3 = n_{2,3} \in \mathbb{N}$

Следовательно, в разложении характеристического многочлена на простые множители будут присутствовать множителели видов: $(\nu-\nu_1)^{n_1}$, $(\nu-\nu_2)^{n_{2,3}}(\nu-\nu_3)^{n_{2,3}}$. Заметим, что:

$$(\nu-\nu_1)^{n_1} = (\nu + \underbrace{(-\nu_1)}_{>0})^{n_1}$$

$$(\nu-\nu_2)^{n_{2,3}}(\nu-\nu_3)^{n_{2,3}} = (((\nu-\lambda) - i\,\mu)((\nu-\lambda)+i\,\mu))^{n_{2,3}} = (\nu^2 \underbrace{-2\lambda}_{>0}\nu + \lambda^2 + \mu^2)^{n_{2,3}}$$

Поэтому при раскрытии скобок внутри этих множителей получатся многочлены со строго положительными коэффициентами (при каждой степени ν будет положительный коэффициент). Тогда, перемножая все множители, раскрывая скобки, мы получим характеристический многочлен, в котором все коэффициенты положительны, что и требовалось. $\square$

Гурвицеаном многочлена $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \dots + a_1\nu + a_0$ называют определитель n-го порядка следующего вида:

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-(2n-1)} & a_{n-(2n-2)} & a_{n-(2n-3)} & a_{n-(2n-4)} & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

где, если $j < 0$, то $a_j = 0$.

Теорема 6.6 (Критерий Гурвица) *Многочлен $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \dots + a_1\nu + a_0$ является гурвицевым тогда и только тогда, когда все главные миноры его гурвицеана, окаймляющие a_{n-1}, строго положительны.*

Приводим его без доказательства (оно есть, например, в книге Б.П.Демидовича „Лекции по математической теории устойчивости“).

Замечание 11 *Кроме устойчивости (асимптотической устойчивости) в положительном направлении можно рассматривать и устойчивость (асимптотическую устойчивость) в отрицательном направлении. Все теоремы остаются в силе и для устойчивости в отрицательном направлении с тем лишь отличием, что знаки действительных частей и коэффициентов меняются на противоположные. Кроме того можно определить двустороннюю устойчивость как устойчивоть одновременно в двух направлениях: положительном и отрицательном. Из критериев устойчивости в положительном и отрицательном направлениях следует:*

Теорема 6.7 (Критерий двусторонней устойчивости) *Для двусторонней устойчивости уравнения* (6.1) *необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения были однократными, а их действительные части равнялись нулю.*

В этом случае все решения уравнения (6.2) представляют собой квазипериодические функции.

Тема 7

Линейные векторные уравнения со стационарным оператором (СтЛВУ)

7.1 Стационарные системы размерности n в нормальной дифференциальной форме

Стационарной системой размерности n в нормальной дифференциальной форме называется система следующего вида:

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ Dx_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Dx_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{7.1}$$

где $f_k(t)$ — неоднородности, a_{kj} — коэффициенты системы.

Если $f_k(t) \equiv 0 \ \forall k = \overline{1, n}$, то говорят, что система (7.1) *однородна*. В противном случае систему (7.1) называют *неоднородной*.

Решением системы (7.1) называют совокупность функций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, определённых на промежутке $\mathfrak{I}$, дифференцируемых на $\mathfrak{I}$ и обращающих каждое уравнение системы (7.1) в тождество на $\mathfrak{I}$.

Задача Коши для системы (7.1) примет вид

$$\begin{array}{l} Dx_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + f_n(t) \quad t \in \mathfrak{I} \quad k = \overline{1, n} \\ x_1|_{t=s} = \xi_1, \ \dots, \ x_n|_{t=s} = \xi_n \quad s \in \mathfrak{I} \quad \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R} \end{array}$$

Введём в рассмотрение матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Dx = \begin{pmatrix} Dx_1 \\ Dx_2 \\ \vdots \\ Dx_n \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Теперь перепишем систему (7.1) в векторном виде:

$$Dx = Ax + f(t) \qquad t \in \mathfrak{I} \tag{7.2}$$

Задача Коши теперь примет вид

$$\begin{aligned} &Dx = Ax + f(t), \quad t \in \mathfrak{I}, \\ &x|_{t=s} = \xi, \quad s \in \mathfrak{I}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{7.3}$$

Уравнение (7.2) называют *линейным векторным уравнением со стационарным оператором n-го порядка* (СтЛВУ$-n$). Система (7.1) в таком случае есть не что иное, как *координатная запись* уравнения (7.2).

Приведём несколько утверждений, которыми будем пользоваться далее при доказательстве теорем.

Пусть стационарная матрица (с постоянными элементами) S и вектор $x(t)$ таковы, что определено произведение $S \cdot x(t)$. Тогда если $x(t)$ — дифференцируемая функция, то и $S \cdot x(t)$ — дифференцируемая функция, причём:

$$D\left(S \cdot x(t)\right) = S \cdot Dx(t)$$

Аналогично, если $x(t)$ — интегрируемая функция, то и $S \cdot x(t)$ — интегрируемая функция, причём:

$$\int\limits_a^t S \cdot x(\tau)\, d\tau = S \cdot \int\limits_a^t x(\tau)\, d\tau$$

Это следует из того, что если $P(t) = (p_{kj}(t))$ — функциональная матрица, то $DP(t) = (Dp_{kj}(t))$, $\int_a^t P(\tau)\, d\tau = \left(\int_a^t p_{kj}(\tau)\, d\tau\right)$.

7.2 Специальные СтЛВУ

1. Пусть матрица A диагональна:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   Координатная форма записи уравнения (7.2) примет вид

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + f_1(t), \\ Dx_2 = a_{22}x_2 + f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Dx_n = a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases}$$

   т.е. получили систему независимых уравнений. Поэтому если все функции $f_k(t)$ $\forall k = \overline{1,n}$ непрерывны на промежутке $\mathfrak{I}$, то $\forall s \in \mathfrak{I}$, $\forall \xi_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$ задача Коши (7.3) будет однозначно разрешима на $\mathfrak{I}$, так как для каждого $j = \overline{1,n}$ задача Коши

$$\begin{aligned} &Dx_j = a_{jj}x_j + f_j(t), \\ &x_j|_{t=s} = \xi_j \end{aligned}$$

   однозначно разрешима на основании ТОР для СтЛУ-1.

2. Пусть матрица A нижнетреугольная:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Координатная форма записи уравнения (7.2) примет вид

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + f_1(t), \\ Dx_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Dx_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t). \end{cases}$$

В этом случае полученная система интегрируется последовательно, начиная с первого уравнения.

Случай верхнетреугольной матрицы аналогичен, только интегрирование следует начинать не с первого уравнения, а с последнего.

Теорема 7.1 (ТОР для треугольного СтЛВУ) *Пусть векторная функция $f(t)$ непрерывна на промежутке $\mathcal{I}$. Тогда $\forall s \in \mathcal{I}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, задача Коши* (7.3) *с треугольной матрицей A однозначно разрешима на $\mathcal{I}$, и её решение можно построить с помощью квадратур (последовательного интегрирования).*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда матрица A нижнетреугольная. Задача Коши (7.3) в координатной форме запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &Dx_1 = a_{11}x_1 + f_1(t), \\ &Dx_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &Dx_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t). \\ &x_1|_{t=s} = \xi_1, \ \dots, \ x_n|_{t=s} = \xi_n. \end{aligned}$$

Относительно переменной x_1 получим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} &Dx_1 = a_{11}x_1 + f_1(t), \\ &x_1|_{t=s} = \xi_1, \end{aligned}$$

которая на основании ТОР для СтЛУ−1 однозначно разрешима на $\mathcal{I}$, т.е. $\exists!\, x_1(t)$ — её решение на $\mathcal{I}$. Тогда $x_1(t)$ дифференцируемо на $\mathcal{I}$, а значит, и непрерывно на $\mathcal{I}$.

Для переменной x_2 получаем:

$$\begin{aligned} &Dx_2 = a_{22}x_2 + \underbrace{a_{21}x_1(t) + f_2(t)}_{\text{непр. на } \mathcal{I}}, \\ &x_2|_{t=s} = \xi_2. \end{aligned}$$

Эта задача Коши также на основании ТОР для СтЛУ−1 однозначно разрешима на $\mathcal{I}$, т.е. $\exists!\, x_2(t)$ — её решение на $\mathcal{I}$, которое дифференцируемо, а значит, и непрерывно на $\mathcal{I}$.

Последовательно рассматривая все остальные уравнения, получим, что каждая переменная $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяется единственным образом. Следовательно, задача Коши (7.3) однозначно разрешима на $\mathcal{I}$.

В случае верхнетреугольной матрицы A доказательство аналогично, только уравнения следует рассматривать от последнего к первому. $\square$

7.3 Разрешение произвольного СтЛВУ

Для всякой квадратной матрицы A над полем $\mathbb{C}$ существует невырожденная матрица S ($\det S \neq 0$) такая, что

$$A = SJS^{-1} \iff J = S^{-1}AS,$$

где J — жорданова нормальная форма матрицы A. Матрица J имеет треугольный вид.

Теорема 7.2 (ТОР для произвольного СтЛВУ) *Пусть векторная функция $f(t)$ непрерывна на промежутке $\mathcal{I}$. Тогда $\forall s \in \mathcal{I}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, задача Коши* (7.3) *однозначно разрешима на $\mathcal{I}$.*

Доказательство. Построим для матрицы A (вообще говоря, комплексную) матрицу S: $A = SJS^{-1}$. В уравнении (7.2) произведём замену переменной: $x = Sz$, где z — вообще говоря, комплексная переменная. Получим:

$$\begin{array}{l} D(Sz) = ASz + f(t), \\ Sz|_{t=s} = \xi. \end{array} \iff \begin{array}{l} SDz = ASz + f(t), \\ Sz|_{t=s} = \xi. \end{array} \iff \begin{array}{l} Dz = S^{-1}ASz + S^{-1}f(t), \\ z|_{t=s} = S^{-1}\xi. \end{array}$$

Учитывая равенство $A = SJS^{-1}$, получим:

$$\begin{array}{l} Dz = Jz + g(t), \\ z|_{t=s} = \sigma, \end{array}$$

где $\sigma = S^{-1}\xi \in \mathbb{C}^n$, $g(t) = S^{-1}f(t)$ — непрерывна на $\mathcal{I}$ (так как любая линейная комбинация $f_k(t)$ непрерывна на $\mathcal{I}$).

Мы пришли к задаче Коши с треугольной матрицей и непрерывной неоднородностью. На основании ранее доказанной ТОР $\exists!\, z(t)$ — её решение на $\mathcal{I}$. Тогда $\exists!\, x(t) = Sz(t)$ — решение задачи Коши (7.3) на $\mathcal{I}$, что и требовалось. $\square$

Замечание 12 *Изложенное доказательство даёт нам алгоритм разрешения произвольного СтЛВУ.*

7.4 Сведение системы в нормальной дифференциальной форме к системе независимых уравнений

Рассмотрим случай, когда $n = 3$ и $f(t) \equiv 0$:

$$\begin{cases} Dx_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \\ Dx_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \\ Dx_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3. \end{cases} \tag{7.4}$$

Не нарушая общности считаем, что $a_3 \neq 0$. Тогда $x_3 = \frac{1}{a_3}(Dx_1 - a_1x_1 - a_2x_2)$. Подставим это выражение в уравнения системы (7.4):

$$\begin{cases} Dx_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \frac{b_3}{a_3}(Dx_1 - a_1x_1 - a_2x_2), \\ \frac{1}{a_3}(D^2x_1 - a_1Dx_1 - a_2Dx_2) = c_1x_1 + c_2x_2 + \frac{c_3}{a_3}(Dx_1 - a_1x_1 - a_2x_2). \end{cases}$$

Полученную систему решаем относительно D^2x_1, Dx_2. Если получатся два независимых уравнения, то интегрируем каждое их них и получаем решения исходной системы (7.4). В противном случае выражаем x_2 через x_1, Dx_1, D^2x_1 и сводим систему к уравнению относительно x_1. Решив его, получим решения исходной системы (7.4).

Замечание 13 *То же самое делаем, если функции $f_k(t) \not\equiv 0$, но дифференцируемы нужное число раз.*

В случае произвольного n происходит то же самое, причём если система однородна, то её решениями являются квазимногочлены.

Отметим, что предложенный способ может вызвать технические затруднения при $n > 3$. В таких случаях бывает удобнее воспользоваться операторным методом.

7.5 Пространство решений однородного СтЛВУ

Рассмотрим однородное СтЛВУ$-n$ вида

$$Dx = Ax. \tag{7.5}$$

Его решение представляет собой вектор $\overline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ такой, что $D\overline{x}(t) \equiv A\overline{x}(t)$.

Рассмотрим n решений $\overline{x}_1(t)$, $\overline{x}_2(t)$, $\ldots$, $\overline{x}_n(t)$ уравнения (7.5), где

$$D\overline{x}_k(t) \equiv A\overline{x}_k(t), \qquad k = \overline{1,n}. \tag{7.6}$$

$$\overline{x}_k(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Составим матрицу:

$$\Phi(t) = [\,\overline{x}_1(t),\, \overline{x}_2(t),\, \dots,\, \overline{x}_n(t)\,] = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Имеем: $D\Phi(t) \equiv A\Phi(t)$. Матрицу $\Phi(t)$ называют *матрицей решений* уравнения (7.5).

Построим функцию $\overline{x}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k\overline{x}_k(t)$, где $C_k \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, и покажем, что она является решением уравнения (7.5). Действительно,

$$D\overline{x}(t) = D\left(\sum_{k=1}^{n} C_k\overline{x}_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k D\overline{x}_k(t) \overset{(7.6)}{\equiv} \sum_{k=1}^{n} C_k A\cdot\overline{x}_k(t) = \sum_{k=1}^{n} A\cdot C_k\overline{x}_k(t) = \\ = A\sum_{k=1}^{n} C_k\overline{x}_k(t) = A\overline{x}(t).$$

Из доказанного можно сделать вывод, что множество всех решений уравнения (7.5) образует линейное пространство.

Перепишем в матричном виде формулу для функции $\overline{x}(t)$:

$$\overline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k\overline{x}_k(t) = C_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + \dots + C_n\begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1x_{11} + \dots + C_nx_{1n} \\ C_1x_{21} + \dots + C_nx_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1x_{n1} + \dots + C_nx_{nn} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \Phi(t)\cdot C, \tag{7.7}$$

где $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $W(t) = \det\Phi(t)$.

Теорема 7.3 *Пусть* $\Phi(t)$ *— матрица решений уравнения* (7.5). *Тогда её определитель может быть вычислен по формуле*

$$W(t) = W(s)e^{(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})(t-s)}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Проведём для случая $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad W(t) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}.$$

Запишем тождества $Dx_1 \equiv Ax_1$ и $Dx_2 \equiv Ax_2$ в координатной форме:

$$\begin{array}{ll} Dx_{11} = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} \qquad & Dx_{12} = a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ Dx_{21} = a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} \qquad & Dx_{22} = a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{array}$$

Сосчитаем производную определителя матрицы решений:

$$DW(t) = \begin{vmatrix} Dx_{11} & Dx_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ Dx_{21} & Dx_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12}x_{21} & a_{12}x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ a_{21}x_{11} & a_{21}x_{12} \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ a_{22}x_{21} & a_{22}x_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} + a_{22}) \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + a_{22})W(t).$$

Получили однородное СтЛУ-1 относительно $W(t)$. Его общее решение:

$$W(t) = Ce^{(a_{11}+a_{22})t}.$$

Если $W|_{t=s} = W(s)$, то $W(s) = Ce^{(a_{11}+a_{22})s} \iff C = W(s)e^{-(a_{11}+a_{22})s}$. Подставляя найденное значение C в формулу общего решения, получим требуемое:

$$W(t) = W(s)e^{-(a_{11}+a_{22})s} \cdot e^{(a_{11}+a_{22})t} = W(s)e^{(a_{11}+a_{22})(t-s)}.$$

Доказательство для произвольного n проводится по аналогичной схеме. □

Следствие 7.3.1 *Если $W|_{t=s} \neq 0$ хотя бы в одной точке s, то $W(t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Известно, что определитель равен нулю тогда и только тогда, когда один из его столбцов линейно выражается через все остальные. Поэтому для того, чтобы система решений $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ однородного СтЛВУ (7.5) была линейно независима, достаточно, чтобы определитель соответствующей матрицы решений $W(t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Более того, следствие утверждает, что для линейной независимости достаточно, чтобы определитель был отличен от нуля хотя бы в одной точке: $\exists s \in \mathbb{R},\ W(s) \neq 0$.

Отметим, что в пространстве решений однородного СтЛВУ$-n$ (7.5) найдутся n линейно независимых решений. В качестве примера рассмотрим систему функций $x_k(t),\ k = \overline{1, n}$, где $x_k(t)$ является решением задачи Коши

$$Dx = Ax,$$

$$x|_{t=0} = \begin{array}{c} \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

для каждого $k = \overline{1,n}$. Её определитель $W(0) = \det[\,x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)\,] = \det E_n = 1 \neq 0$, что означает линейную независимость решений.

Теорема 7.4 *Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ — линейно независимая система решений однородного СтЛУ—n* (7.5). *Тогда функция*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k x_k(t), \tag{7.8}$$

где $C_k \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, является общим решением уравнения (7.5).

Доказательство.

1. То, что функция $x(t)$, определяемая формулой (7.8), является решением уравнения (7.5), было показано в начале этого параграфа.

2. Докажем, что все решения однородного СтЛУ—n (7.5) содердатся в формуле (7.8). Для этого рассмотрим произвольную задачу Коши ($s \in \mathbb{R}$ — произвольное число, $\xi \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор):

$$\begin{aligned} &Dx = Ax, \\ &x|_{t=s} = \xi \end{aligned}$$

   и покажем, что найдутся значения произвольных постоянных C_k, при которых $x(t)$ является решением этой задачи Коши.

   Следуя (7.7), перепишем $x(t) = \Phi(t)C$, где $\Phi(t) = [\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\,]$. Поскольку решения $x_k(t)$ линейно независимы, то $W(t) = \det\Phi(t)$ не равен нулю ни в одной точке (в том числе и в точке s). Так как $x(t)$ уже является решением уравнения (7.5), то осталось лишь удовлетворить его начальным условиям:

$$\xi = \Phi(s)\cdot C \overset{W(s)\neq 0}{\Longrightarrow} \exists\Phi^{-1}(s) \Longrightarrow C = \Phi^{-1}(s)\cdot\xi,$$

   что и требовалось.

Теорема доказана. □

Замечание 14 *Теорема доказывает во-первых, что размерность пространства решений уравнения* (7.5) *равна n, во-вторых, что общее решение уравнения* (7.5) *совпадает с его полным решением.*

Из вышесказанного и свойств линейного пространства следует, что система решений $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ (7.5) уравнения является *базисом* его пространства решений (*фундаментальной системой решений*), если $\exists s \in \mathbb{R}$, $W(s) \neq 0$. В этом случае говорят, что $\Phi(t)$ является *базисной матрицей* (*фундаментальной матрицей*). Другими словами, базисная матрица — это матрица решений, определитель которой не равен нулю.

Базис $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ пространства решений уравнения (7.5) такой, что $\Phi(s) = E_n$, называют базисом, *нормированным в точке s*.

7.6 Правило Эйлера построения базисной матрицы для однородного СтЛВУ$-n$

Ранее было отмечено, что решениями однородного СтЛВУ$-n$ являются квазимногочлены. Цель настоящего параграфа — построить n линейно независимых решений уравнения (7.5). Решения будем искать в виде:

$$x(t) = \overline{\gamma} e^{\nu t}, \quad \overline{\gamma} \neq \overline{0}.$$

Подставим это выражение в уравнение (7.5):

$$D\left(\overline{\gamma} e^{\nu t}\right) = A\overline{\gamma} e^{\nu t} \iff \overline{\gamma} \nu e^{\nu t} = A\overline{\gamma} e^{\nu t} \iff A\overline{\gamma} = \nu\overline{\gamma} \iff (A - \nu E)\overline{\gamma} = O,$$

т.е. $x(t)$ является решением однородного СтЛВУ тогда и только тогда, когда $\overline{\gamma}$ — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению ν. Как известно, собственные значения являются корнями характеристического уравнения $\det(A - \nu E) = 0$. Поэтому возможны следующие случаи.

I. Пусть все собственные значения матрицы A действительны и различны: $\nu_k \in \mathbb{R}$, $n_k = 1$, $k = \overline{1, n}$. Тогда для каждого ν_k строим действительный собственный вектор $\overline{\gamma}_k$, а по нему решение

$$x_k(t) = \overline{\gamma}_k e^{\nu_k t}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Построенные решения будут линейно незваисимы, так как собственные векторы линейно независимы:

$$\det \Phi(t)\big|_{t=0} = \det\left[\overline{\gamma}_1 e^{\nu_1 t}, \overline{\gamma}_2 e^{\nu_2 t}, \ldots, \overline{\gamma}_n e^{\nu_n t}\right]\Big|_{t=0} = \det\left[\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n\right] \neq 0.$$

II. Пусть все собственные значения матрицы A действительны, но имеется собственное значение ν_l кратности $n_l > 1$. Для однократных собственных значений строим решения, как в пункте I. Собственному значению ν_l может соответствовать несколько собственных векторов: $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_q$, $q \leq n_l$. Строим q независимых решений, как в пункте I. Если окажется, что $q = n_l$, то на этом останавливаемся.

В противном случае эти решения будем пополнять решениями вида

$$x(t) = (\overline{\beta}_0 t + \overline{\beta}_1) e^{\nu_l t}.$$

Подставим это выражение в уравнение (7.5):

$$(\nu_l \overline{\beta}_0 t + \overline{\beta}_0 + \nu_l \overline{\beta}_1) e^{\nu_l t} = A(\overline{\beta}_0 t + \overline{\beta}_1)) e^{\nu_l t} \iff \begin{cases} A\overline{\beta}_0 = \nu_l \overline{\beta}_0, \\ A\overline{\beta}_1 = \nu_l \overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_0. \end{cases} \iff \begin{cases} (A - \nu_l E)\overline{\beta}_0 = O, \\ (A - \nu_l E)\overline{\beta}_1 = \overline{\beta}_0. \end{cases}$$

Поэтому $x(t)$ является решением тогда и только тогда, когда $\overline{\beta}_0$ — собственный вектор, отвечающий ν_l (т.е. один из векторов $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_q$), а $\overline{\beta}_1$ — присоединённый к $\overline{\beta}_0$ вектор. Если построено r штук решений этого вида и $q + r = n_l$, то на этом останавливаемся. В противном случае пополняем все построенные решения решениями вида:

$$x(t) = (\overline{\beta}_0 t^2 + \overline{\beta}_1 t + \overline{\beta}_2) e^{\nu_l t}$$

и так далее. В итоге получим n_l решений.

Таким образом для каждого собственного значения кратности n_k мы построим n_k решений. Тогда если в полученную матрицу решений мы подставим значение $t = 0$, то получим матрицу, столбцы которой — собственные и присоединённые к ним векторы. Они все линейно независимы, а значит, определитель этой матрицы будет отличен от нуля. Следовательно, построенные n решений будут линейно независимыми.

III. Пусть имеются пары комплексно-сопряжённых собственных значений ($\nu_k = \lambda_k + i\,\mu_k$, $\overline{\nu}_k = \lambda_k + i\,\mu_k$). Если эти собственные значения однократные, то для них строим решения, как в пункте I. В противном случае строим поступаем так, как в пункте II. Но и в том, и в другом случае полученные решения будут комплекснозначными: $z_k(t) = x_k(t) + i\,y_k(t)$. Поскольку уравнение с комплексной переменной $z = x + i\,y$

$$Dz = Az \iff \begin{cases} Dx = Ax, \\ Dy = Ay, \end{cases}$$

то как действительные, так и мнимые части решений $z_k(t)$ будут решениями однородного уравнения (7.5). В этом случае выбираем из действительных и мнимых частей $z_k(t)$ такие решения, чтобы построенная матрица имела отличный от нуля определитель.

7.7 Правило Лагранжа построения частного решения неоднородного СтЛВУ

Напомним, что правило Лагранжа состоит в построении частного решения по структуре общего решения соответствующего однородного уравнения.

Рассмотрим неоднородное СтЛВУ и соответствующее ему однородное уравнение:

$$Dx = Ax + f(t), \quad t \in \mathfrak{I}. \tag{7.9}$$

$$Dx = Ax. \tag{7.10}$$

Общее решение уравнения (7.10) представляется в виде $x(t) = \Phi(t)C$, где $\Phi(t)$ — базисная матрица.

Пусть $x(t)$ — произвольное решение уравнения (7.9). Тогда $Dx(t) \equiv Ax(t) + f(t)$. Пусть $x^*(t)$ — частное решение уравнения (7.9): $Dx^*(t) \equiv Ax^*(t) + f(t)$. Построим векторную функцию

$$\widetilde{x}(t) = x(t) - x^*(t) \tag{7.11}$$

и посмотрим, какому из уравнений она удовлетворяет:

$$D\widetilde{x}(t) = Dx(t) - Dx^*(t) \equiv Ax(t) + f(t) - Ax^*(t) - f(t) = A(x(t) - x^*(t)) = A\widetilde{x}(t).$$

Следовательно, функция $\widetilde{x}(t)$ является решением однородного уравнения (7.10). Если предположить, что $\widetilde{x}(t)$ является общим решением, то из формулы (7.11) будет следовать, что $x(t)$ — общее решение уравнения (7.9). Итак, можно сделать вывод о том, что:

$$x_{\text{ОН}} = x_{\text{ОО}} + x_{\text{ЧН}},$$

где $x_{\text{ОН}}$ — общее решение неоднородного СтЛВУ, $x_{\text{ЧН}}$ — частное решение неоднородного СтЛВУ, $x_{\text{ОО}}$ — общее решение соответствующего ему однородного СтЛВУ.

Частное решение по методу Лагранжа будем искать в виде

$$x^*(t) = \Phi(t)u(t),$$

где $u(t)$ — искомая векторная функция. Подставим $x^*(t)$ в уравнение (7.9):

$$D(\Phi(t)u(t)) = A\Phi(t)u(t) + f(t) \Longleftrightarrow D\Phi(t)u(t) + \Phi(t)Du(t) = A\Phi(t)u(t) + f(t) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\ [D\Phi(t) \equiv A\Phi(t)]\ \Longleftrightarrow\ \Phi(t)Du(t) = f(t)\ \Longleftrightarrow\ Du(t) = \Phi^{-1}(t)f(t)\ \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\ u(t) = \int\limits_s^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad s \in \mathfrak{I}$$

Следовательно, $x^*(t) = \Phi(t)\int\limits_s^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau = \int\limits_s^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau.$

Таким образом, общее решение уравнения (7.9) по правилу Лагранжа определяется по формуле:

$$x(t) = \Phi(t)C + \int\limits_s^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (7.9):

$$\begin{array}{l} Dx = Ax + f(t), \quad t \in \mathfrak{I}, \\ x|_{t=s} = \xi, \quad s \in \mathfrak{I}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Удовлетворим найденное решение начальным условиям задачи:

$$\xi = \Phi(s)C + \int\limits_s^s \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau\ \Longleftrightarrow\ \xi = \Phi(s)C\ \Longleftrightarrow\ C = \Phi^{-1}(s)\xi.$$

Получаем решение задачи Коши по правилу Лагранжа:

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\xi + \int\limits_s^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Пример 16 *Построить базисную матрицу для уравнения $Dx = Ax$, где*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имееем: $\det(A-\nu E) = \nu^2+1 \implies \nu_1 = i, \nu_2 = -i$. *Ищем собственные векторы, отвечающие значению* ν_1*:*

$$(A - i\,E)\gamma = O:$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \end{array}\right) \implies \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ i\,\gamma_1 \end{pmatrix} = [\gamma_1 := 1] = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Решение по методу Эйлера:

$$x(t) = \gamma e^{i\,t} = \begin{pmatrix} e^{i\,t} \\ i\,e^{i\,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i\,\sin t \\ -\sin t + i\,\cos t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}}_{=Re\,z} + i\underbrace{\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{=Im\,z}.$$

Заметим, что определитель матрицы $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$, $W(0) = 1$. *Следовательно, мы нашли базисную матрицу. Но если бы оказалось, что* $W(t) = 0$*, то нам бы пришлось искать другие собственные векторы и выбирать из них те, для которых* $W(t) \neq 0$.

Тема 8

Разрешение СтЛВУ через экспоненту

8.1 Блочные матрицы

Рассмотрим матрицы $A = (a_{jk})$ и $B = (b_{jk})$. Частно приходится иметь дело с матрицами, разбитыми на блоки. Такие матрицы и называют *блочными*. Например,

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline K_{m1} & \dots & K_{mn} \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c|c} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline L_{m1} & \dots & L_{mn} \end{array}\right)$$

Если блоки матриц $A = (K_{pr})$ и $B = (L_{pr})$ допускают сложение, т.е. определена матрица $K_{pr} + L_{pr}$ $\forall p, r$, то матрицы A и B можно складывать (вычитать) поблочно: $A \pm B = (K_{pr} \pm L_{pr})$.

Если блоки матриц A и B допускают умножение, т.е. определена матрица $K_{ps} \cdot L_{sr}$ $\forall p, s, r$, то матрицы A и B можно умножать поблочно: $A \cdot B = (K_{ps} \cdot L_{sr})$.

В частности, если $A = \mathrm{diag}(K_1, K_2, \dots, K_n)$, то $A^m = \mathrm{diag}(K_1^m, K_2^m, \dots, K_n^m)$.

8.2 Норма матрицы

Под нормой матрицы $A = (a_{kj})$ понимается неотрицательное число $\|A\|$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\|O\| = 0$ и $\|A\| = 0 \Longrightarrow A = O$.
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.
3. $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$ для всех матриц A и B, допускающих сложение $A + B$.
4. $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ для всех матриц A и B, допускающих умножение $A \cdot B$.

Заметим, что из свойств 2 и 3 следует, что $\|A - B\| \le \|A\| + \|B\|$. Также, положив $A = B = E$ в 4, получим $\|E\| \ge 1$.

Наиболее часто используются три нормы матриц, определяемые формулами:

$$\|A\|_{\mathrm{I}} = \max_j \sum_k |a_{jk}| \quad \text{(суммирование в } j\text{-й строке)}$$

$$\|A\|_{\mathrm{II}} = \max_k \sum_j |a_{jk}| \quad \text{(суммирование в } k\text{-м столбце)}$$

$$\|A\|_{\mathrm{III}} = \sqrt{\sum_{j,k} |a_{jk}|^2} \quad \text{(суммирование по всем элементам)}$$

Нетрудно убедиться в том, что они действительно удовлетворяют упомянутым выше аксиомам.

В частном случае, когда $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, получим: $\|x\|_{\mathrm{I}} = \max\limits_{j=\overline{1,n}} |x_j|,\ \|x\|_{\mathrm{II}} = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|,$ $\|x\|_{\mathrm{III}} = |x|$.

Отметим, что для норм I, II, III выполняется совйство: $\forall a_{jk}\ \ |a_{jk}| \leq \|A\|$, причём если $A = (a_{11})$, то $\|A\| = |a_{11}|$. Кроме того, нормы I и II сохраняют единицу, т.е. $\|E\| = 1$.

8.3 Экспонента матрицы

Нампомним, что для $y \in \mathbb{R}$ справедливо представление e^y в виде степенного ряда:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}, \qquad |y| < +\infty$$

Рассмотрим квадратную матрицу $A = (a_{jk}),\ j,k = \overline{1,n}$. *Экспонентой матрицы* A (обозначается e^A) называют следующий матричный ряд:

$$E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{8.1}$$

Заметим, что матричный ряд (8.1) для любой квадратной матрицы A сходится и притом абсолютно. Действительно,

$$\|e^A\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\| \leq \|E\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|\frac{A^k}{k!}\| = \underbrace{m}_{\geq 0} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq m + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = m + e^{\|A\|}.$$

Свойства экспоненты матрицы:

1. $e^{O_{n\times n}} = E$.

   Доказательство. Следует непосредственно из определения экспоненты матрицы.

2. Если $AB = BA$, то $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

   Доказательство. $e^A \cdot e^B = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} D^k$, где $D_k = \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{A^j}{j!} \cdot \frac{B^{k-j}}{(k-j)!} = = \frac{1}{k!} \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \cdot A^j B^{k-j} = \frac{1}{k!} \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^j \cdot A^j B^{k-j} = \frac{1}{k!}(A+B)^k$. Применение формулы бинома Ньютона по отношению к матрицам законно, полькольку $AB = BA$. Поэтому: $e^A \cdot e^B = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = e^{A+B}$, что и требовалось.

3. $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

   Доказательство. Так как $A(-A) = (-A)A = A^2$, то, используя свойства 2 и 1, получим: $e^{-A} \cdot e^A = e^{-A+A} = e^O = E \Longrightarrow e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1} \cdot E = \left(e^A\right)^{-1}$, что и требовалось.

Для матрицы A размеров $n \times n$ и $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим матричную функцию

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Отметим некоторые из её свойств:

- Если $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, то $(At_1)(At_2) = (At_2)(At_1) = t_1 t_2 A^2$ и из свойства 2 экспоненты матрицы следует, что

$$e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}.$$

- Если $A = \operatorname{diag}(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$, то $A^k = \operatorname{diag}(a_1^k,\, a_2^k,\, \ldots,\, a_n^k)$. В этом случае:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{diag}(a_1^k,\, a_2^k,\, \ldots,\, a_n^k)\, t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{diag}\left(\frac{a_1^k t^k}{k!},\, \frac{a_2^k t^k}{k!},\, \ldots,\, \frac{a_n^k t^k}{k!}\right) =$$

$$= \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^k t^k}{k!},\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_2^k t^k}{k!},\, \ldots,\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n^k t^k}{k!}\right) = \operatorname{diag}\left(e^{a_1 t},\, e^{a_2 t},\, \ldots,\, e^{a_n t}\right).$$

- Если $A = J = \operatorname{diag}(J_{m_1}(\nu_1),\, J_{m_2}(\nu_2),\, \ldots,\, J_{m_l}(\nu_l))$ — матрица Жордана, то $A^k = J^k = \operatorname{diag}(J_{m_1}^k(\nu_1),\, J_{m_2}^k(\nu_2),\, \ldots,\, J_{m_l}^k(\nu_l))$. В этом случае:

$$e^{Jt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{diag}\left(\frac{J_{m_1}^k(\nu_1)\, t^k}{k!},\, \frac{J_{m_2}^k(\nu_2)\, t^k}{k!},\, \ldots,\, \frac{J_{m_l}^k(\nu_l)\, t^k}{k!}\right) =$$

$$= \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{m_1}^k(\nu_1)\, t^k}{k!},\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{m_2}^k(\nu_2)\, t^k}{k!},\, \ldots,\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{m_l}^k(\nu_l)\, t^k}{k!}\right) =$$

$$= \operatorname{diag}\left(e^{J_{m_1}(\nu_1)\, t},\, e^{J_{m_2}(\nu_2)\, t},\, \ldots,\, e^{J_{m_l}(\nu_l)\, t}\right).$$

Лемма 8.1 $D\left(e^{At}\right) = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = E + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots = e^{At}$. Он сходится локально равномерно на $\mathbb{R}$. Формально продифференцируем этот ряд:

$$D\left(e^{At}\right) = A + A^2 t + \dots + \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} + \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k + \dots$$

Получили степенной ряд с постоянными матричными коэффициентами, который также сходится локально равномерно на $\mathbb{R}$. Следовательно, операция дифференцирования законна и верны равенства:

$$D\left(e^{At}\right) = A \cdot (E + At + \dots + \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1} + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots) = A \cdot e^{At},$$

$$D\left(e^{At}\right) = (E + At + \dots + \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1} + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots) \cdot A = e^{At} \cdot A,$$

что и требовалось. $\square$

Из леммы, в частности, следует, что матрица A перестановочноа со своей экспонентой.

8.4 Экспонентное представление решений

Рассмотрим однородное СтЛВУ

$$Dx = Ax, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{8.2}$$

Теорема 8.1 *Для* $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ *задача Коши*

$$\begin{aligned} &Dx = Ax, \quad t \in \mathbb{R}, \\ &x|_{t=s} = \xi \end{aligned} \tag{8.3}$$

однозначно разрешима и её решение может быть вычислено по формуле:

$$x(t) = e^{A(t-s)} \xi. \tag{8.4}$$

Доказательство. Однозначная разрешимость следует из ТОР для произвольного СтЛВУ. Осталось показать, что функция $x(t)$, определяемая формулой (8.4), является решением задачи Коши (8.3). Докажем, что функция $x(t)$ является решением уравнения (8.2):

$$Dx(t) = D\left(e^{A(t-s)}\xi\right) = D(e^{At} \cdot \underbrace{e^{-As} \cdot \xi}_{\text{пост. вектор}}) = D\left(e^{At}\right) \cdot e^{-As} \cdot \xi = A\, e^{At} e^{-As}\, \xi =$$

$$= A\, e^{A(t-s)}\, \xi = A\, x(t).$$

Теперь проверим выполнимость начального условия:

$$x|_{t=s} = e^{A(s-s)}\xi = e^{O}\xi = E\xi = \xi.$$

Таким образом, функция $x(t)$, определяемая формулой (8.4), действительно является решением задачи Коши (8.3), что и требовалось. $\square$

Равенство $D\left(e^{At}\right) = A\,e^{At}$ означает, что матрица e^{At} является решением уравнения (8.2), т.е. она является матрицей решений. Более того,

$$\det\, e^{At}\big|_{t=0} = \det\, e^{O} = \det\, E = 1 \neq 0,$$

означает, что e^{At} является базисной матрицей: $\Phi(t) = e^{At}$. Поэтому общее решение уравнения (8.2) можно определять по формуле

$$x(t) = e^{At}, \tag{8.5}$$

где C — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$.

8.5 Разрешение неоднородного СтЛВУ по правилу Коши

Из справедливости формулы

$$D\left(\int\limits_s^t f(t,\tau)\,d\tau\right) = f(t,t) + \int\limits_s^t f'_t(t,\tau)\,d\tau$$

и правил дифференцирования и интегрирования матриц следует справедиловсть формулы

$$D\left(\int\limits_s^t \Phi(t,\tau)\,d\tau\right) = \Phi(t,t) + \int\limits_s^t \Phi'_t(t,\tau)\,d\tau,$$

где $\Phi(t,\tau)$ — функциональная матрица.

Теорема 8.2 *Пусть векторная функция $f(t)$ непрерывна на $\mathfrak{I}$. Тогда $\forall s \in \mathfrak{I}$ нулевая задача Коши*

$$\begin{array}{l} Dx = Ax + f(t), \quad t \in \mathfrak{I}, \\ x|_{t=s} = \overline{0} \end{array} \tag{8.6}$$

однозначна разрешима $\mathfrak{I}$, и её решение может быть найдено по формуле:

$$x(t) = \int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau. \tag{8.7}$$

Доказательство. Однозначная разрешимость следует из ТОР для произвольного СтЛВУ. Осталось показать, что функция $x(t)$, определяемая формулой (8.7), является решением задачи Коши (8.6). Докажем, что функция $x(t)$ является решением уравнения задачи (8.6):

$$Dx(t) = D\left(\int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau\right) = e^{A(t-t)} f(t) + \int_s^t D\left(e^{A(t-\tau)}\right) f(\tau)\,d\tau =$$

$$= E\cdot f(t) + \int_s^t A\,e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau = A\int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau + f(t) = A\,x(t) + f(t).$$

Теперь проверим выполнимость начального условия:

$$x|_{t=s} = \int_s^s \underbrace{e^{A(s-\tau)}}_{\text{непр.}} \underbrace{f(\tau)}_{\text{непр.}}\,d\tau = \overline{0}.$$

Таким образом, функция $x(t)$, определяемая формулой (8.7), действительно является решением задачи Коши (8.6), что и требовалось. $\square$

Теорема 8.3 *Пусть векторная функция $f(t)$ непрерывна на промежутке $\mathfrak{I}$. Тогда $\forall s \in \mathfrak{I}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, существует и единственно на $\mathfrak{I}$ решение задачи Коши*

$$\begin{aligned} &Dx = Ax + f(t), \quad t \in \mathfrak{I}, \\ &x|_{t=s} = \xi, \end{aligned} \tag{8.8}$$

которое определяется по формуле

$$x(t) = e^{A(t-s)}\xi + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau. \tag{8.9}$$

Доказательство. Однозначная разрешимость следует из ТОР для произвольного СтЛВУ. Пусть $x(t)$ — решение задачи (8.8), т.е. $Dx(t) \equiv A\,x(t) + f(t)$, $t \in \mathfrak{I}$ и выполнено начальное условие $x|_{t=s} = \xi$. Пусть $x^*(t)$ — решение нулевой задачи Коши для неоднородного уравнения, т.е. $Dx^*(t) \equiv A\,x^*(t) + f(t)$, $t \in \mathfrak{I}$ и выполнено начальное условие $x^*|_{t=s} = \overline{0}$. Построим функцию $\widetilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$ и посмотрим, какому из уравнений она удовлетворяет:

$$D\widetilde{x}(t) = Dx(t) - Dx^*(t) \equiv A\,x(t) + f(t) - A\,x^*(t) - f(t) = A(x(t) - x^*(t)) = A\,\widetilde{x}(t),$$

т.е. $\widetilde{x}(t)$ является решением уравнения задачи Коши (8.3). Помотрим, какому начальному условию она удовлетворяет:

$$\widetilde{x}(t)|_{t=s} = x(t)|_{t=s} - x^*(t)|_{t=s} = \xi - \overline{0} = \xi.$$

Таким образом, $\widetilde{x}(t)$ является решением задачи Коши (8.3) на $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$, а значит, $\widetilde{x}(t) = e^{A(t-s)}\xi$. Но $x^*(t)$ — решение нулевой задачи Коши для неоднородного уравнения, которое определяется по формуле $x^*(t) = \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau$. По нашему построению $x(t) = \widetilde{x}(t) + x^*(t)$, что и доказывает формулу (8.9). $\square$

Замечание 15 *Формула* (8.9) *и составляет правило Коши разрешения неоднородного СтЛВУ. Общее решение этого уравнения по правилу Коши имеет вид:*

$$x(t) = e^{At}C + \int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau.$$

Матрица $K(t,\tau) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(\tau) = e^{A(t-\tau)}$ называется *матрицей Коши*.

8.6 Вычисление экспоненты матрицы (классический метод)

Пусть A — квадратная матрица размеров $n \times n$. Цель настоящего параграфа — научиться вычислять e^{At}.

Для любой квадратной матрицы A над полем $\mathbb{C}$ существует невырожденная матрица S ($\det S \neq 0$) такая, что

$$A = SJS^{-1} \iff J = S^{-1}AS,$$

где J — жорданова нормальная форма матрицы A. Матрица J имеет блочную структуру.

Заметим, что $A^2 = SJS^{-1}SJS^{-1} = SJEJS^{-1} = SJ^2S^{-1}$. По индукции нетрудно показать, что $A^k = SJ^kS^{-1} \;\; \forall k \in \mathbb{N}$. Учитывая это, получим:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SJ^kS^{-1}t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} S\frac{J^k t^k}{k!}S^{-1} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!}\right)S^{-1} = Se^{Jt}S^{-1}.$$

Поэтому задача сводится к вычислению e^{Jt}.

Но ранее было показано, что $e^{Jt} = \operatorname{diag}\left(e^{J_{m_1}(\nu_1)\,t},\, e^{J_{m_2}(\nu_2)\,t},\, \ldots,\, e^{J_{m_l}(\nu_l)\,t}\right)$. Поэтому достаточно научиться вычислять $e^{J_m(\nu)\,t}$, где $J_m(\nu)$ — матрица размеров $m \times m$ вида

$$J_m(\nu) = \begin{pmatrix} \nu & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \nu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

Введём в рассмотрение матрицу размеров $m \times m$ вида

$$H_{1,m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицу $H_{1,m}$ называют 1*-м косым рядом*. Получим: $J_m(\nu) = \nu E + H_{1,m}$, поэтому

$$e^{J_m(\nu)\,t} = e^{(\nu E + H_{1,m})\,t} = e^{\nu E t} \cdot e^{H_{1,m}t} = [E^k = E \;\; \forall k \in \mathbb{N}] = e^{\nu t} \cdot E \cdot e^{H_{1,m}t} = e^{\nu t} \cdot e^{H_{1,m}t}$$

и осталось научиться вычислять $e^{H_{1,m}t}$.

Известен следующий результат:

$$H_{1,m}^k = \begin{cases} H_{k,m}, & 1 \le k \le m-1, \\ O_{m\times m}, & k \ge m, \end{cases}$$

где $H_{k,m}$ — k-*й косой ряд* (единицы стоят на k-й справа диагонали, если считать от главной диагонали). Следовательно,

$$e^{H_{1,m}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_{1,m}^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{H_{1,m}^k t^k}{k!} = E + H_{1,m}t + \frac{1}{2!}H_{2,m}t^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}H_{m-1,m}t^{m-1}.$$

Окончательно получим:

$$e^{H_{1,m}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \ldots & \frac{1}{(m-2)!}t^{m-2} & \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{1}{(m-3)!}t^{m-3} & \frac{1}{(m-2)!}t^{m-2} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{J_m(\nu)\,t} = e^{\nu t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \ldots & \frac{1}{(m-2)!}t^{m-2} & \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{1}{(m-3)!}t^{m-3} & \frac{1}{(m-2)!}t^{m-2} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$