С.А.Мзаник

ЛЕКЦИИ
по курсу

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Минск
2005

Простейшие дифференциальные уравнения

Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения и их решения.

Определение. Уравнение относится к дифференциальным, если оно содержит неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы.

Примеры.

$$y'(x) = x$$

$$y(y'(x)) = y^2.$$

Общий вид: $F(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0\,(1)$

Определение. Порядок уравнения – порядок старшей производной или старшего дифференциала неизвестных функций, входящих в данное уравнение.

Примеры.

$$xd^2x + d^2y = 0$$

- дифференциальное уравнение II порядка

$$y''' + 5y' + 3y = \sin x$$

- дифференциальное уравнение III порядка

Дифференциальные уравнения (ДУ) делятся на

Обыкновенные ДУ

ДУ в частных производных

Определение. Если неизвестная функция ДУ зависит от 1 аргумента, то ДУ называется **обыкновенным ДУ.** Если неизвестная функция ДУ зависит от нескольких аргументов – **ДУ с частными производными**.

Примеры.

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

- линейное уравнение I порядка в частных производных

Рассмотрим уравнение (1), $t \in I \subset \mathbb{R}$, I- промежуток действительной оси (некое связное множество): $[a; b]$ $\quad]a; b[$ $\quad [a; b[$ $\quad]a; b]$ $\quad |a; b|$

Примеры.

$tx'(t) + t^2 = 0$ рассматривается либо на]-∞;0[либо на]0;+∞[, но не на их объединении, $x(t) = \ln |t|$ не может быть решением.

Определение. Функцию $x(t): \quad I \to \mathbb{R}$ назовем решением дифференциального уравнения на промежутке I, если при подстановке в уравнение эта функция обращает его в тождество на промежутке I. При этом предполагается, что функция $x(t)$обладает всеми производными вплоть до порядка уравнения включительно, и что все функции, задающие уравнение, определены вдоль функции $x(t)$и ее производных

Примеры. $x(t)$ — положение точки на прямой, t_0 — начало движения, x_0 — начальное положение точки.

$\dot{x}(t) = v$ скорость движения постоянна. Тогда $\dot{x}(t) = v$ — дифференциальное уравнение, которым описывается этот процесс, поэтому $x(t) = t + c, \; = const.$

Особенность дифференциальных уравнений: описывается множество процессов $x_0 = x(t_0) = vt_0 + c, c = x_0 - vt_0, x(t) = v(t - t_0) + x_0.$

Определение. Если дополнительные условия на решение относятся к одному и тому же значению аргумента, то такие дополнительные условия называются **начальными условиями**. Если дополнительные условия на решение относятся к различным значениям аргумента – **граничными условиями**, те и другие вместе называются **краевыми условиями**.

Определение. **Начальной задачей** будем называть ДУ вместе с начальными условиями на неизвестную функцию. **Граничной задачей** будем называть ДУ вместе с граничными условиями на неизвестную функцию. Аналогично для **краевой задачи**.

Определение. Рассмотрим ОДУ (1). Если начальные условия для неизвестной функции ОДУ 1-го порядка состоит в задании значения функции и ее первых (n-1) производных в некоторой точке, то такие начальные условия называются **условиями Коши,** и соответствующая начальная задача – **задачей Коши**.

$$\begin{cases} x(s) = \xi_0 \\ x'(s) = \xi_1 \\ \ldots \\ x^{(n-1)}(s) = \xi_{n-1} \\ F(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0 \end{cases}$$

Простейшие ДУ 1-ого порядка(П-1)

$$D = \frac{d}{dt} \quad -\text{оператор} \quad \text{дифференцирования}$$

каждой функции ставится в соответствие ее производная.

$D^k = D(D^{k-1})$k – натуральное, где D^0 - тождественный оператор $D^0x = x$

(1) – это F(t, x, Dx, . . . , D^nx) = 0

$$D^k = \frac{d^k}{dt^k}$$

Определение. Простейшее ДУ 1-го порядка - это $Dx = f(t)$, $t \in I$, $f \in C(I)$ - непрерывна наI

R(I) – интегрируема на I

C(I) – непрерывна на I

$C^1(I)$ – класс непрерывно дифференцируемых функций на I

$C^{k(}I)$ – класс k раз непрерывно дифференцируемых функций на I

$C^\infty(I)$ – класс бесконечно дифференцируемых функций

ТОР для П – 1.

$\forall f \; \in C(I)$, $\forall S \in I$, $\forall \xi \in R$задачаКоши(2) $\begin{cases} Dx = f(t), \, t \in I \\ x(s) = \xi \end{cases}$ однозначно разрешима на I и ее решение можно представить в виде $x(t) = \xi + \int\limits_s^t f(\tau) d\tau$ **(3)**

$\oplus$

Из курса математического анализа известно, что решениями уравнения (2) являются первообразные функции функции f. Все множество первообразных функций может быть записано в виде $x(t) = \int f(t)dt = \int\limits_s^t f(\tau)d\tau + C$ **(4)** и других решений уравнения (2) быть не может. Для того, чтобы было выполнено начальное условие (2) надо подобрать значение C. А для этого в (4) вместо t подставим s

$x(s) = \int\limits_s^s f(\tau)d\tau + C \quad \Rightarrow \quad C = \xi$

Подставляя вместо C ξ в (4) получим требуемую формулу.

$\otimes$

Определения:

Решение ДУ, содержащее произвольную постоянную, называется общим решением этого ДУ.

Решение ДУ, полученное из общего, при конкретном значении произвольных постоянных, называется частным решением.

Решение ДУ, содержащее все решения данного уравнения, называется полным решением.

$$D^2x + x = 0,\ t \in R$$

$x(t) = \sin t$ - частное решение
$x(t) = \cos t$ - частное решение
$x(t) = C_1 \sin t$ - общее решение
$x(t) = C_2 \cos t$ - общее решение
$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ - полное решение

Граничные задачи

$D^2x = 0,\ t \in R$ - ДУ второго порядка. Решение - $x(t) = C_1 t + C_2$

Начальная задача: $\begin{cases} D^2x = 0, \\ x(0) = \xi_0, \\ Dx(0) = \xi_1 \end{cases}$ $\begin{cases} \xi_1 = Dx(0) = C_1, \\ \xi_0 = x(0) = C_2 \end{cases}$ Решение: $x(t) = \xi_0 t + \xi_1$

Граничная задача : $\begin{cases} D^2x = 0, \\ x(0) = 1, \\ x(1) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = C_2, \\ 0 = C_1 + C_2 \end{cases}$ Решение: $x(t) = -t + 1$

Упражнения:

Будет ли однозначно разрешима задача $\begin{cases} D^2x = 0, \\ x(0) = \xi_0,\ ? \\ x(1) = \xi_1 \end{cases}$

Разрешима и единственным ли образом задача $\begin{cases} Dx = 0, \\ x(0) = \xi_0,\ ? \\ x(1) = \xi_1 \end{cases}$

Стационарные линейные уравнения I порядка (СтЛ - 1).

Стационарное — это значит, что коэффициенты при D^nx постоянные.

$D = \frac{d}{dt}$; $D^0 x = x$; $D^{k+1} = D(D^k)$.

$$\begin{cases} Dx - \lambda x = f(t) \\ t \in I \subset R \end{cases}, \lambda \in R \tag{1}$$

(1) - неоднородное СтЛ-1.

ТОР для СтЛ — 1.

Для любой непрерывной на I функции f, $\forall s \in I, \forall \xi \in R$ начальная задача (задача Коши)

$$\begin{cases} Dx - \lambda x = f(t) \\ x|_{t=s} = \xi \end{cases}, t \in I \tag{2}$$

однозначно разрешима на промежутке I и ее решение может быть представлено в виде

$$x(t) = \xi e^{\lambda(t-s)} + \int\limits_s^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \tag{3}$$

$\oplus$

$$Dx = \lambda x$$

Рассмотрим функцию

$$D(e^{-\lambda t} x) = -\lambda e^{-\lambda t} x + e^{-\lambda t} Dx = e^{-\lambda t}(Dx - \lambda x)$$

Умножим уравнение (1) на $e^{-\lambda t}$:

$$e^{-\lambda t}(Dx - \lambda x) = e^{-\lambda t} f(t),$$

$$D(e^{-\lambda t} x) = e^{-\lambda t} f(t).$$

Рассмотрим функцию $u(t) = e^{-\lambda t} x(t)$.
Тогда получена начальная задача для u.

$$\begin{cases} Du = e^{-\lambda t} f(t) \\ u|_{t=s} = e^{-\lambda s} x(s) = e^{-\lambda s} \xi \end{cases} \tag{4}$$

По ТОР для П-1 задача (4) имеет единственное решение на промежутке I ($e^{-\lambda t} f(t)$ - непрерывна),
и это решение имеет вид:

$$u(t) = e^{-\lambda s} \xi + \int\limits_s^t e^{-\lambda \tau} f(\tau) d\tau$$

$$x(t) = e^{\lambda t}u(t) = e^{\lambda(t-s)}\xi + \int\limits_s^t e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau)d\tau$$

Функция $x(t)$ единственна, так как $u(t)$ единственна.
$\otimes$
Замечание: Если в формуле (68) ξ заменить на произвольную постоянную С, то мы получим общее решение для (1), которое будет являться еще и полным.
Вообще, общее решение имеет вид:

$$x(t) = Ce^{\lambda t} + \int\limits_s^t e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau)d\tau, C = const, s \in I$$

Коплексно-значные функции.

Функцию $h : I \to C, I \subset R$ называют коплексно-значной функцией.

Любую коплексно-значную функцию можно представить в виде:

$$h(t) = f(t) + ig(t), \text{где} \quad f, g : I \to R.$$

Функция f - действительная часть функции h.
Функция g - мнимая часть функции h.

Любое свойство, которое есть у одной из функций f, g, h - есть у всех трех функций (hимеет предел в $t_0 \Leftrightarrow f, g$ имеют предел в t_0).

$$Dh = Df + iDg$$
$$\int\limits_s^t h(\tau)d\tau = \int\limits_s^t f(\tau)d\tau + i\int\limits_s^t g(\tau)d\tau$$

Рассмотрим теперь СтЛ-1 вида:

$$Dz - \lambda z = h(t), t \in I \subset R, \text{где} \quad \lambda = \mu + iv, h(t) = f(t) + ig(t)$$

Рассмотрим теперь начальную задачу

$$\begin{cases} Dz - \lambda z = h(t), t \in I \\ z|_{t=s} = \zeta, \zeta = \xi + i\eta \end{cases} \tag{5}$$

Для задачи (5) имеет место ТОР:
$\forall h \in C(I), \forall s \in I, \forall \zeta \in C,$ задачаКоши(5) имеет единственное решение вида:

$$z(t) = \xi e^{\lambda(t-s)} + \int\limits_s^t e^{\lambda(t-\tau)}h(\tau)d\tau \tag{6}$$

Рассмотрим

$$\begin{cases} Dz - \lambda z = h(t), t \in I \\ z|_{t=s} = \zeta, \zeta = \xi + i\eta \end{cases}$$

Пусть теперь $\lambda \in R$.

Здесь иной случай:

$$z(t) = x(t) + iy(t).\text{Тогда}$$

$$Dz - \lambda z = Dx + iDy - \lambda x - i\lambda y = f + ig\text{изэтогополучаем}$$

$$\begin{cases} Dx - \lambda x = f(t) \\ Dy - \lambda y = g(t) \end{cases}$$

Начальное условие $z(s) = x(s) + iy(s), \begin{cases} x(s) = \xi \\ y(s) = \eta \end{cases}$.

Мы получили две начальные задачи, но обе действительные:

$$\begin{cases} Dx - \lambda x = f(t) \\ x(s) = \xi \end{cases}$$
$$\begin{cases} Dy - \lambda y = g(t) \\ y(s) = \eta \end{cases}$$

Пример:

$$\begin{cases} Dx + x = e^{2t} \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

Решение:

$$x(t) = 3e^{-t} + \int\limits_0^t e^{-(t-\tau)} e^{2\tau} d\tau = 3e^{-t} + e^{-t} \int\limits_0^t e^{3\tau} d\tau = 3e^{-t} + e^{-t} \frac{e^{3\tau}}{3}\Big|_0^t =$$
$$= 3e^{-t} + \frac{e^{2t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} = \frac{8}{3}e^{-t} + \frac{e^{2t}}{3}$$

Квазиполиномы.

Многочлен $P(t)$ - функция вида:

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0, \text{где} \quad a_n \neq 0, \quad \deg P = n.$$

$$\begin{array}{lcl} a_i \in R & \Rightarrow & P : R \to R \\ a_i \in C & \Rightarrow & P : R \to C \end{array}$$

$$P(t)e^{\lambda} \qquad P : R \to C, \;\; \lambda \in C.$$

Сумма таких функций называется квазиполиномом

$$\sum_{j=1}^{m} P_j(t) e^{\lambda_j t}, \quad \lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k.$$

$$D^k(P(t)e^{\lambda t}) = \sum_{m=0}^{k} C_k^m D^m P \cdot D^{k-m} e^{\lambda t} = Q(t)e^{\lambda t}, \quad \deg P = \deg Q.$$

$$\int_s^t P(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau = \left[P(\tau)\frac{e^{\lambda\tau}}{\tau}\right]_s^t - \frac{1}{\lambda}\int_s^t P'(t)e^{\lambda\tau}d\tau = Q(t)e^{\lambda t} + c, \quad \deg P = \deg Q.$$

Критерий совпадения квазиполиномов:

$$h(t) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t)e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^{m} p_{ja}t^a e^{\lambda_j t}, \quad 0 \leqslant a \leqslant \deg P_j$$

$$h_1(t) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^{m} q_{ja}t^a e^{\lambda_j t}, \quad 0 \leqslant a \leqslant \deg Q_j.$$

$$h(t) = h_1(t) \quad \Leftrightarrow \quad p_{ja} = q_{ja}, \ \forall j, a.$$

$$\sum_{j=1}^{m} P_j(t)e^{\lambda_j t} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_j(t) \equiv 0.$$

$\oplus$

$$P(t)e^{\lambda t} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad P(t) \equiv 0$$

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} \equiv 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad (*e^{-\lambda_1 t})$$

$$P_1(t) + P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \equiv 0.$$

Продифференцировав тождество ($\deg P_1(t)+1$) раз, получим

$$Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad Q_2 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad P_2 \equiv 0 \ (\deg Q_2 = \deg P_2) \quad \Rightarrow \quad P_1 \equiv 0. \quad \otimes$$

Действительные квазимногочлены

Действительным квазимногочленом называют функцию вида :

$$h(t) = \sum_{j=1}^{k} P_j\,(t)\,e^{\lambda_j t} + \sum_{j=k+1}^{m} \left(P_j\,(t)\,Cos\beta_j t + P_j^*\,(t)\,Sin\beta_j t\right) e^{\alpha_j t} \tag{7}$$

где : $\lambda_j, \beta_j, \alpha_j, \in \Re$.

Если некоторый квазимногочлен принимает только действительные значения, то его всегда можно представить в виде (7)

Теорема 1. (Стационарное линейное уравнение 1-ого порядка для квазимногочлена). Общее решение уравнения

$$D_z - \nu z = P_0\,(t)\,e^{\nu t} + \sum_{j=1}^{m} P_j\,(t)e^{\nu_j t} \tag{8}$$

представимо в виде

$$z\,(t) = (C + tQ_0\,(t))\,e^{\nu t} + \sum_{j=1}^{m} Q_j\,(t)\,e^{\nu_j t}, \tag{9}$$

где: $\deg Q_j = \deg P_j, j = \overline{0, m}$, а —произвольная постоянная.

При этом коэффициенты при многочленах Q являются линейными формами от коэффициентов многочленов P.

Теорема 2. Общее решение стационарного линейного дифференциального уравнения с действительным квазимногочленом имеет вид:

$$x(t) = (C + tQ_0(t))\,e^{\lambda t} + \sum_{j=1}^{k} Q_j(t)\,e^{\lambda_j t} + \sum_{j=k+1}^{m} \left(Q_j(t)\,Cos\beta_j t + Q_j^k(t)\,Sin\beta_j t\right) e^{\alpha_j t}, \quad (10)$$

где $\deg Q_j = \deg P_j, \quad j = \overline{1,k}$ и $\deg Q_j, \deg Q_j^* \leqslant \max\{\deg P_j, \deg P_j^*\}, j = \overline{k+1,m}.$

Формулы (9) и (10) составляют полное решение соответствующих стационарных уравнений, если C пробегает все возможные значения.

Однородные стационарные уравнения n-го порядка (Стл-n)

Общие свойства решений линейных уравнений

Линейным уравнением n-ого порядка будем называть уравнения вида:

$$D^n x + a_{n-1}(t)\, D^{n-1}x + \dots + a_1(t)\, Dx + a_0(t)\, x = f(t), \tag{11}$$

где: $t \in I \subset \mathbb{R}, a_i \in C(I), f \in C(I)$.

Для сокращения записи введем оператор: $L_n = D^n + a_{n-1}(t)\, D^{n-1} + \dots + a_1(t)\, D + a_0(t)\, D^0$. Поскольку каждый из $D^k, k = \overline{0, n}$ линеен, то и их линейная комбинация – оператор L_n – также является линейным оператором.

$$L_n \text{— линейный оператор} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} L_n(z_1 + z_2) = L_n z_1 + L_n z_2 \\ L_n(\alpha z_1) = \alpha L_n z_1 \end{cases}$$

Тогда уравнение (11) перепишется в виде: $L_n x = f(t)$.

Свойства линейных операторов:

1) <u>Линейность множества решений однородного линейного уравнения:</u> множество решений однородного линейного уравнения линейно, т.е. если x_1, x_2 —решения $L_n x=0$, то $x^*=x_1+x_2$, $x^{**}=\alpha x_1$, $\forall\alpha$, тоже решения $L_n x=0$. Это означает, что линейная комбинация множества решений однородного линейного уравнения также является решением.

2) <u>Суперпозиция:</u> Если x_i —являются решениями $L_n x_i = f_i, i = \overline{1, m}$, то $x = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ будет решением линейного неоднородного уравнения:

$$L_n x = f_1 + f_2 + \dots + f_m.$$

3) <u>Структура общего решения неоднородного линейного уравнения:</u> общее решение неоднородного линейного уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного линейного уравнения и некоторого частного решения неоднородного исходного уравнения.

$\diamondsuit$

Пусть x^* —решение: $L_n x = f$, x^{**} — тоже решение.

Рассмотрим $x^{***} = x^{**} - x^*$, тогда:

$$L_n x^{***} = L_n(x^{**} - x^*) = L_n x^{**} - L_n x^* = f - f = 0.$$

Оператор L_n и соответствующее ему уравнение (11) называют *стационарным оператором* и *стационарным линейным уравнением n-го порядка* (Стл-n), если все коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ являются постоянными.

Рассмотрим задачу Коши для однородного Стл-n:

$$\begin{cases} L_n x = 0 \\ D^k x(s) = \xi_k, k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$

Надо доказать что она однозначно разрешима и найти ее решение.

<u>**Лемма 1.**</u> (о факторизации стационарного оператора): Линейный стационарный оператор

$$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 \tag{12}$$

может быть представлен в виде:

$$L_n = (D-\lambda_1)^{m_1} * (D-\lambda_2)^{m_2} * \cdots * (D-\lambda_k)^{m_k}, \tag{13}$$

где λ_j — корни характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \tag{14}$$

а m_j — кратность корня λ_j. Числа λ_j называют характеристическими числами оператора.

♢

Докажем для $n = 2$. $L_2 = D^2 + a_1 D + a_0$, $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Пусть λ_1, λ_k —корни, тогда

$$\begin{cases} a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_k) \\ a_0 = \lambda_1\lambda_k \end{cases}$$

Тогда $(D-\lambda_1)(D-\lambda_k) = D^2 - \lambda_k D - \lambda_1 D + \lambda_1\lambda_k = D^2 + a_1 D + a_0$. ⊗

<u>Замечание:</u> Для произвольного n доказательство проводиться также, с использованием теоремы Виета для многочленов произвольной степени.

<u>**Лемма 2.**</u>

$$(D-\nu)^m \left(e^{\nu t} z\right) = e^{\nu t} D^m z \tag{15}$$

♢ Имеем

$$(D-\nu)\left(e^{\nu t}z\right) = D\left(e^{\nu t}z\right) - \nu e^{\nu t}z = \nu e^{\nu t}z + e^{\nu t}Dz - \nu e^{\nu t}z = e^{\nu t}Dz,$$

значит (15) верно для $m = 1$. Далее по индукции

$$(D-\nu)^{r+1}\left(e^{\nu t}z\right) = (D-\nu)\left((D-\nu)^r\left(e^{\nu t}z\right)\right) = (D-\nu)\left(e^{\nu t}D^r z\right) = e^{\nu t}D^{r+1}z$$

⊗

<u>**Теорема.**</u> (об однозначной разрешимости(ТОР) для Стл-n). Начальная задача Стл-n

$$\begin{cases} L_n z = 0 \\ D^k z(s) = \xi_k, k = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{16}$$

для $\forall\, s \in \mathbb{R}$, $\forall \xi_k \in \mathbb{C}$ однозначно разрешима на $\mathbb{R}$ и ее решение может представлено в виде:

$$z(t) = \sum_{j=1}^{r} Q_j(t)\, e^{\nu_j t} \tag{17}$$

где ν_j — характеристические числа оператора L_n с кратностями m_j, а степени многочленов $\deg Q_j \leqslant m_j - 1$. При этом их коэффициенты являются линейными формами от начальных условий.

♢

Для n=2:

$$L_2 z = 0 \tag{18}$$

$$z\left(s\right) = \xi_0 \quad , \quad Dz\left(s\right) = \xi_1$$

$$L_2 = \left(D - \nu_1\right)\left(D - \nu_r\right) \quad , \quad \left(D - \nu_1\right)\left(D - \nu_r\right) z = 0$$

$$\left(D - \nu_r\right) z = \omega.$$

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(D - \nu_1\right)\omega = 0 \\ \omega\left(s\right) = \xi_1 - \nu_r \xi_0 \end{array} \right. \tag{19}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(D - \nu_r\right) z = \omega \\ z\left(s\right) = \xi_0 \end{array} \right. \tag{20}$$

В силу ТОР для Стл-1 задача (19) имееет единственное решение, которое может быть представлено в виде:

$$\omega\left(t\right) = \omega_0 e^{\nu_1 (t-s)} + \int\limits_s^t e^{\nu_1 (t-\tau)} * 0 * d\tau = \omega_0 e^{\nu_1 (t-s)}$$

Тогда (20) перепишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(D - \nu_r\right) z = \omega_0 e^{\nu_1 (t-s)} \\ z\left(s\right) = \xi_0 \end{array} \right.$$

И в силу ТОР для Стл-1 эта система обладает единственным решением:

$$\begin{array}{l} z\left(t\right) = \xi_0 e^{\nu_r (t-s)} + \int\limits_s^t e^{\nu_r (t-\tau)} \omega_0 e^{\nu_1 (\tau - s)} d\tau = \\ = \xi_0 e^{\nu_r (t-s)} + \omega_0 e^{-\nu_1 s} e^{\nu_r t} \int\limits_s^t e^{(\nu_1 - \nu_r)} d\tau \end{array}$$

Если $\nu_1 \neq \nu_r$ то $r = 2$ и получаем:

$$\begin{array}{l} z\left(t\right) = \xi_0 e^{\nu_2 (t-s)} + \omega_0 e^{-\nu_1 s} e^{\nu_2 t} \frac{e^{(\nu_1 - \nu_2) t} - e^{(\nu_1 - \nu_2) s}}{\nu_1 - \nu_2} = \\ = \left(\xi_0 e^{-\nu_2 s} - \omega_0 \frac{e^{-\nu_2 s}}{\nu_1 - \nu_2}\right) e^{\nu_2 t} + \frac{\omega_0}{\nu_1 - \nu_2} e^{-\nu_1 s} e^{\nu_1 t} \end{array}$$

Если же $\nu_1 = \nu_r$ то $r = 1$ и получаем:

$$z\left(t\right) = \xi_0 e^{\nu_1 (t-s)} + \omega_0 e^{-\nu_1 s} e^{\nu_1 t}\left(t - s\right) = \left(\omega_0 e^{-\nu_1 s} t + \left(\xi_0 - \omega_0 s\right) e^{-\nu_1 s}\right) e^{\nu_1 t}$$

$\otimes$

Следствия:

1) Единственным решением для нулевой начальной задачи является нулевое (тривиальное) решение:

$$\begin{cases} L_n z = 0 \\ D^k z(s) = 0, k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$

$z(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$.

$\Diamond$

$z(t) \equiv 0$ подходит, а поскольку мы доказали единственность решения, то больше решений нет. $\otimes$

2) В случае, когда коэффициенты оператора действительны и начальные значения в начальном условии тоже действительны то задача 16) при $\forall\ s \in \mathbb{R}, \forall\ \xi_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0, n-1}$ однозначно разрешима и ее решение представимо в виде действительного квазиполинома:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{l} Q_j(t) e^{\lambda_j t} + \sum_{j=l+1}^{r} \left(Q_j(t) Cos\beta_j t + Q_j^*(t) Sin\beta_j t\right) e^{\alpha_j t},$$

где $\lambda_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, l},\ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}, \beta_j \neq 0, j = \overline{l+1, r}$, причем $\lambda_j, \alpha_j \pm \beta_j$ — характеристические числа начального условия с кратностями m_j, $\deg Q_j, Q_j^* \leqslant m_j - 1$, а их коэффициенты линейные формы ξ_k.

Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений n-го порядка

Полное решение СтЛ-n

Лемма: для $\forall m \in \mathbb{N}(D-\nu)^m(\epsilon^{\nu t}z) = \epsilon^{\nu t}D^m z$.

Теорема о полном решении однородного СтЛ-n:
Общее решение СтЛ-n
$$L_n z = 0, \tag{21}$$
составляющее все решения этого уравнения (т.е. полное решение) задается в виде квазиполинома
$$z(t) = Q_1(t)\epsilon^{\nu_1 t} + \ldots + Q_m(t)\epsilon^{\nu_m t}, \tag{22}$$
где $\nu_1, \ldots, \nu_m$ — характеристические числа оператора L_n с кратностью $n_1, \ldots, n_m(n_1+\ldots+n_m = n)$, а полиномы Q_j — полиномы с неопределенными коэффициентами, $degQ_j = n_j - 1, j = \overline{1,m}$.

$\diamondsuit$

Из ТОР для однородного СтЛ-n следует, что решение любой начальной задачи представимо в виде (22).

Осталось показать, что любой квазиполином вида (22) является решением

$$L_n(\sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\epsilon^{\nu_j t}) = \sum_{j=1}^{m} L_n(Q_j(t)\epsilon^{\nu_j t}) = \sum_{j=1}^{m}(D-\nu_1)^{n_1}\ldots(D-\nu_m)^{n_m}(D-\nu_j)^{n_j}(Q_j(t)\epsilon^{\nu_j t}) =$$

$$+\sum_{j=1}^{m} L_{n-n_j}(\epsilon^{\nu_j t}D^{\nu_j}Q_j(t)) = 0$$

$\otimes$

Замечание.
Предположим, что оператор в (21) имеет действительные коэффициенты. В этом случае каждому комплексному характеристическому числу от этого оператора соответствует сопряженное характеристическое число, причем кратности их совпадают: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ с кратностью $n_1, \ldots, n_r; \lambda_{r+1} \pm i\mu_{r+1}, \ldots, \lambda_l \pm i\mu_l, \mu_j \neq 0, j = \overline{r+1,l}$.

Тогда полное решение (21) задается квазиполиномом

$$\sum_{j=1}^{r} Q_j(t)\epsilon^{\nu_j t} + \sum_{j=r+1}^{l}(Q_j(t)\cos\mu_j t + Q_j^*(t)\sin\mu_j t)\epsilon^{\nu_j t}, \tag{23}$$

где $degQ_j = n_j - 1, degQ_j^* = n_j - 1$ и их коэффициенты — действительные постоянные.

Пример.
$D^2x + \omega^2 x = 0, \lambda^2 + \omega^2 = 0\ \lambda = \pm\omega$
$x(t) = C_1\epsilon^{i\omega t} + C_2\epsilon^{-i\omega t}, C_1, C_2 \in C$
$x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Замечание. Знание структуры полного решения однородного СтЛ-n позволяет пользоваться методом неопределенных коэффициентов при решении начальной задачи.

Пример.

$$\begin{cases} x(0)=1 \\ Dx(0)=2 \\ D^2x+\omega^2x=0 \end{cases} \quad x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t, C_1,C_2\in\mathbb{R}Dx=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t$$

$$\begin{cases} 1=C_1 \\ 2=\omega C_2 \end{cases} \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=2\div\omega,\omega\neq 0 \end{cases} x(t)=\cos\omega t+2\div\omega\sin\omega t,\omega\neq 0$$

Вронскиан

Предположим, что есть $z_1, z_2, \ldots, z_n$,– n функций, каждая из которых по крайней мере (n-1) раз дифференцируема. Тогда $W(t)$ — определитель Вронского или Вронскиан системы функций $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

$$W(t)=\begin{vmatrix} z_1(t) & \ldots & z_n(t) \\ Dz_1 & \ldots & Dz_n \\ D^2z_1 & \ldots & D^2z_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-1}z_1 & \ldots & D^{n-1}z_n \end{vmatrix}$$

Теорема (Остроградского-Лиувилля). Рассмотрим уравнение

$$L_n=D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_n, L_nz=0. \tag{24}$$

Если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ решение уравнения (24), то Вронскиан этой системы

$$W(t)=W(s)\epsilon^{-a_{n-1}(t-s)}, \quad s\in\mathbb{R}. \tag{25}$$

$\diamondsuit$

Докажем для n=2. Вычислим

$$DW(t)=D\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ Dz_1 & Dz_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} Dz_1 & Dz_2 \\ Dz_1 & Dz_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ D^2z_1 & D^2z_2 \end{vmatrix}=[D^2z_{1,2}+a_1Dz_{1,2}+a_0z_{1,2}=0]=$$

$$=\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ -a_1Dz_1-a_0z_1 & -a_1Dz_2-a_0z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ -a_1Dz_1 & -a_1Dz_2 \end{vmatrix}=$$

$$=-a_1\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ Dz_1 & Dz_2 \end{vmatrix}=-a_1W(t)\Rightarrow DW(t)=-a_1W(t)$$

Общее решение имеет вид $W(t)=C\epsilon^{-a_1t}$. При $t=s$ $W(s)=C\epsilon^{-a_1s}\Rightarrow C=W(s)\epsilon^{a_1s}$. Таким образом $\forall sW(t)=W(s)\epsilon^{-a_1(t-s)}$. $\otimes$

Формула (25) – формула Остроградского-Лиувилля.

Следствие: Вронскиан системы решений либо равен нулю, либо не обращается в ноль ни в одной точке. $\exists t_0 \quad W(t_0)=0\Rightarrow \quad W(s)=0\Rightarrow W(t)\equiv 0$.

Линейная зависимость и независимость решений

Система функций $f_1, \dots, f_n$, $I \in \mathbb{R}$, называется линейно зависимой, если $\exists C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ такие, что $C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 \neq 0$ и $C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + ... + C_n f_n(t) = 0 \; \forall \; t \in I$.

Если над полем комплексных чисел $\forall C \in \mathbb{C}$, то $|C_1| + |C_2| + \dots + |C_n| \neq 0$.

В противном случае система линейно независима(т.е. для $\forall C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ $|C_1^2| + |C_2^2| + \dots + |C_n^2| \neq 0, \exists t_0 \in I$, что $C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \dots + C_n f_n(t) \neq 0$).

Пример. $\cos(t), \sin(t)$: $C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(t + \varphi(C_1, C_2))$ функции линейно независимые на $\mathbb{R}$.

Теорема (о линейной зависимости решений функций однородных Стл-n) Система решений $Z_1(t), \dots, Z_n$ однородного стационарного уравнения

$$L_n Z = 0 \tag{26}$$

линейно зависима на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\exists t_0 \in \mathbb{R}$, что $W(t_0) = 0$.

$\Diamond \Rightarrow Z_1(t), \dots, Z_n$ — линейно зависима (т.е. одно из Z_i линейно выражается через остальные Z_j $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, n$) Столбец определителя Вронского, соответствующий этому решению, будет линейной комбинацией остальных столбцов определителя. Тогда определитель Вронского будет равен нулю.

$\Leftarrow \exists t_0 \in I$, что $W(t_0) = 0$. Рассмотрим t_0, где $W(t_0) = 0$. Рассмотрим линейную систему относительно $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} Z_1(t_0) * C1 + Z_2(t_0) * C_2 + \dots + Z_n(t_0) * C_n = 0 \\ DZ_1(t_0) * C1 + DZ_2(t_0) * C_2 + \dots + DZ_n(t_0) * C_n = 0 \\ \dots \\ D^{(n-1)} * Z_1(t_0) * C1 + D^{(n-1)} * Z_2(t_0) * C_2 + \dots + D^{(n-1)} * Z_n(t_0) * C_n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Определитель этой системы равен нулю (т.к. это определитель Вронского).

Существует ненулевое решение $C_1, \dots, C_n$, $|C_1^*| + |C_2^*| + \dots + |C_n^*| \neq 0$ Рассмотрим функцию $Z(t) = C_1^* Z_1(t) + \dots + C_n^* Z_n(t)$. Т.к. $Z_1(t), \dots, Z_n$ — решения уравнения (26), то функция $Z(t)$ также является решением этого уравнения. Кроме того вычмслим k производных в точке t_0:

$D^{(k)} Z(t_0) = (Z_1(t_0) C_1 + \dots + Z_n(t_0) C_n)^(k) \quad \Longrightarrow \quad D^{(k)} Z(t_0) = 0, \forall k = 1, \dots, n$.

Таким образом, $Z(t)$ является решением нулевой задачи для (26). Любая нулевая задача для (26) имеет только нулевое решение. Следовательно, $Z(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Поэтому система решений $Z_1(t), \dots, Z_n$ — линейно зависима (по определению). $\otimes$

Упражнение.

Построить пример линейно независимой системы функций, у которой Вронскиан будет равен нулю.

Следствие.

Для того, чтобы решения $Z_1(t), \dots, Z_n$ были линейно независимы на множестве $\mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы Вронскиан был отличен от нуля хотя бы в одной точке.

Базис пространства решений однородного Стл-1

Рассмотрим n задач Коши

$$\left.\begin{array}{r} L_n\varphi_i = 0 \\ D^{(k)}\varphi_i(0) = \delta_{ik}. \end{array}\right\} \tag{28}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, т.е.

$$\delta_{ik} = \left.\begin{array}{r} 1, i = k \\ 0, i \neq k. \end{array}\right\} \tag{29}$$

Каждая задача из (29) имеет единственное решение $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ и эти решения будут линейно независимы (в силу предыдущего следствия) $W(t_0) = 1 \neq 0$.

Действительно, $w(t_0) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right| = 1.$

Теорема (о представлении решений через базисные решения) Любое решение $Z(t)$ можно представить в виде

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k\varphi_k(t), \tag{30}$$

где $C_k = D^{(k)}z(0) = 0, k = 0, \dots, n-1$.

$\diamondsuit$

Пусть $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ — решения (28) (а значит и решения (26)), тогда и их линейная комбинация — решение уравнения (26)

Вычислим $D^k z(t)\Big|_{t=0} = D^k(\sum_{j=0}^{n-1} C_j\varphi_j(t_0)) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j D^k\varphi_j(t_0) = C_k$, поскольку δ_{jk} равно единице при $k = j$, в остальных случаях, т.е при $k \neq j$, δ_{jk} равно нулю. Осталось заметить, что любое решение уравнения (28) однозначно определяется заданием функции и ее первых производных до $(n-1)$ порядка в любой точке (например в точке "0"), следовательно, любое решение представимо в виде (30).

$\otimes$

Таким образом из теоремы следует, что $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$ образуют базис пространства решений уравнения (26), и размерность этого пространства равна n. Указанный базис называется *базисом Коши* или *базисом нормированным в нуле*.

Заметим, что если функции $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ являются линейно независимыми решениями (28), то они образуют базис пространства решений этого уравнения. Поэтому общее решение (28) представимо в виде $Z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_j * \psi_k(t)$

Сдвиг решения однородного уравнения

Рассмотрим уравнение

$$L_nZ = 0 \tag{31}$$

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (31), т.е. $L_n x(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Лемма о сдвиге. Если $X(t)$ — решение однородного уравнения (31), то сдвиг этого решения

$y(t) = x(t-s), \forall\, s \in \mathbb{R}$ также является решением уравнения (31).

$\diamondsuit$

$Dx(t-s) = \dfrac{d}{dt}x(t-s) = \dfrac{dx(t-s)}{d(t-s)}\dfrac{d(t-s)}{dt} = [\dfrac{d(t-s)}{dt} = 1] = \dfrac{dx(t-s)}{d(t-s)}$, откуда

$$D^k x(t-s) = \frac{d^k x(t-s)}{d(t-s)^k} \tag{32}$$

$L_n x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$D^n x(t) + a_{n-1}D^{n-1}x(t) + \cdots + a_1 Dx(t) + a_0 x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\dfrac{d^n x(t-s)}{d(t-s)} + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}x(t-s)}{d(t-s)^n} + \cdots + a_1\dfrac{dx(t-s)}{d(t-s)} + a_0\dfrac{x(t-s)}{1} = 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$D^n x(t-s) + a_{n-1}D^{n-1}x(t-s) + \cdots + a_1 Dx(t-s) + a_0 x(t-s) = 0$

$L_n y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\otimes$

Замечание 1. В силу соотношения (32) мы получаем

$x(0) = y(s), \forall\, k \quad D^k x\Big|_{t=0} = D^k y\Big|_{t=s}.$

Замечание 2. Если функции $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$ - представляют собой базис Коши уравнения (31) (нормированный в нуле), то $\varphi_0(t-s), \varphi_1(t-s), \ldots, \varphi_{n-1}(t-s)$ — тоже нормированный базис, но уже в точке "s"(в силу Леммы о сдвиге эти функции — решение уравнения (31). А начальное значение $D^k\varphi_j(t-s)\Big|_{t=s} = \delta_{kj}, k, j = 0, \ldots, n-1.$)

Поэтому Вронскиан этой системы функций в точке равен единице (т.к. матрица Вронского — единичная матрица).

Замечание 3. Решение задачи Коши

$$\left.\begin{array}{r} L_n x = 0 \\ k = 0, \ldots, n-1, D^{(k)}x\Big|_{t=0} = \xi_k \end{array}\right\} \tag{33}$$

представимо в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t) \tag{34}$$

Решение же задачи Коши

$$\left.\begin{array}{r} L_n x = 0 \\ D^{(k)}x\Big|_{t=s} = \xi_k^* \end{array}\right\} \tag{35}$$

можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^* \varphi_k(t-s).$$

Неоднородные СтЛ-n

Решение нулевой задачи Коши для неоднородного уравнения

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L_n = (D - \delta_1)(D - \delta_2)...(D - \delta_n)$$

(среди δ_iмогут быть равные)

$$\Delta\delta_j = \delta_j - \delta_{j-1}, \quad j = \overline{2, n}$$

Теорема (о решении нулевой начальной задачи для неоднородного уравнения):
Пусть $f(t) \in C(I)$, то решение нулевой начальной задачи:

$$\begin{cases} L_n x = F(t), t \in I \\ D^k \left. x \right|_{t=s} = 0, k = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{36}$$

$\forall s \in I$ имеет вид

$$x(t) = \int\limits_s^t F(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{37}$$

где

$$F(t) = \int\limits_0^t d\tau_{n-1} \int\limits_0^{\tau_{n-1}} d\tau_{n-2} ... \int\limits_0^{\tau_2} e^{\delta_n t - \Delta\delta_n \tau_{n-1} - ... - \Delta\delta_2 \tau_1} d\tau_1 \tag{38}$$

$\diamondsuit$
Для случая $n = 2$:

$$L_n = (D - \delta_1)(D - \delta_2)$$

$$F(t) = \int\limits_0^t e^{\delta_2 t - (\delta_2 - \delta_1)\tau_1} d\tau_1$$

$$\begin{cases} (D - \delta_1)(D - \delta_2)x = f(t) \\ x(s) = 0, Dx(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (D - \delta_2)x = w \\ x(s) = 0 \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} (D - \delta_1)w = f(t) \\ w(s) = 0 \end{cases} \tag{40}$$

По ТОР для СтЛ-1 задача (39) однозначно разрешима и её решение:

$$w(t) = \int\limits_s^t e^{\delta_1(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

Рассмотрим (40). В силу ТОР для СтЛ-1 имеем решение:

$$x(t) = \int\limits_s^t e^{\delta_2(t-u)} w(u) du = \int\limits_s^t e^{\delta_2(t-u)} (\int\limits_s^u e^{\delta_1(u-\tau)} f(\tau) d\tau) du$$

Покажем, что полученный интеграл имеет вид (37). Изменим порядок интегрирования.

$$x(t) = \int\limits_s^t (\int\limits_\tau^t e^{\delta_2(t-u)} e^{\delta_1(u-\tau)} f(\tau) du) d\tau = [u - \tau = \tau_1] = \int\limits_s^t (\int\limits_0^{t-\tau} e^{\delta_2(t-\tau-\tau_1)} e^{\delta_1 \tau_1} d\tau_1) f(\tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_s^t (\int\limits_0^{t-\tau} e^{\delta_1(t-\tau)} e^{-(\delta_2-\delta_1)\tau_1} d\tau_1) f(\tau) d\tau = \int\limits_s^t F(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Теорема доказана.

Из (37) видно, что функция F определяется только характеристическими числами оператора L_n и не зависит от неоднородного уравнения и начальной точки s. Такую функцию F называют функцией Коши оператора L_n.

Лемма (о представлении стационарного оператора):
Для стационарного оператора

$$L_n = (D - \delta_1)(D - \delta_2)...(D - \delta_n)$$

справедливо представление в виде:

$$L_n x = e^{\delta_1 t} D(e^{\Delta\delta_2 t} D(e^{\Delta\delta_3 t} D(...e^{\Delta\delta_n t} D(e^{-\delta_n t} x))...)) \tag{41}$$

◊ Для $n = 2$:

$$L_2 x = e^{\delta_1 t} D(e^{(\delta_2-\delta_1)t} D(e^{-\delta_2 t} x))$$

$$(D - \delta)x = e^{\delta t} D(e^{-\delta t} x)$$

$$L_2 x = (D - \delta_1)(D - \delta_2)x = (D - \delta_1)(e^{\delta_2 t} D(e^{-\delta_2 t} x)) =$$
$$= e^{\delta_1 t} D(e^{-\delta_1 t} e^{\delta_2 t} D(e^{-\delta_2 t} x))$$

⊗

Теорема (о функции Коши стационарного оператора):
Функция Коши F(t) стационарного оператора L_n совпадает с базисной функцией

F(t)=φ_{n-1}(t), где $\varphi_{0,\dots,}$ φ_{n-1} – базис Коши однородного СтЛ-n: L_nx=0.

$\diamondsuit$
По условию φ_{n-1}(t) удовлетворяет начальной задаче:

$$\begin{cases} L_n\varphi_{n-1}(t) = 0 \\ D^k\varphi_{n-1}(0) = 0, k = \overline{0, n-2} \\ D^{n-1}\varphi_{n-1}(0) = 1 \end{cases} \tag{42}$$

Покажем, что

$$\begin{cases} DF(t) = 0, \forall t \in R \\ D^kF(0) = 0, k = \overline{0, n-2} \\ D^{n-1}F(0) = 1 \end{cases} \tag{43}$$

Докажем, что F(t) удовлетворяет (43).
Для $n = 2$:

$$\begin{aligned} &L_2F = (D-\delta_1)(D-\delta_2)F(t) = \\ &= e^{\delta_1 t}D(e^{\delta_2 t}e^{-\delta_1 t}D(e^{-\delta_2 t}\int\limits_0^1 e^{\delta_2 t}e^{-(\delta_2-\delta_1)\tau_1}d\tau_1)) = \\ &= e^{\delta_1 t}D(e^{(\delta_2-\delta_1)t}e^{-(\delta_2-\delta_1)t}) = 0, \forall t \in R \end{aligned}$$

F(0)=0

$$\begin{aligned} &DF(t\ )|_{t=0} = D(\int\limits_0^t e^{\delta_2 t}e^{-(\delta_2-\delta_1)\tau_1}d\tau_1\ )|_{t=0} = \\ &= \delta_2 e^{\delta_2 t}\int\limits_0^t e^{-(\delta_2-\delta_1)\tau_1}d\tau_1 + e^{\delta_2 t}(e^{-(\delta_2-\delta_1)t}\ )|_{t=0} = 1 \end{aligned}$$

Таким образом, F(t) оператора L_n удовлетворяет (43), а, значит, совпадает с базисной функцией φ_{n-1}(t)
$\otimes$

Задача Коши для неоднородного СтЛ-n

Теорема (ТОР для неоднородного СтЛ-n):

$$\forall f \in C(I), \quad \forall s \in I, \quad \forall \xi_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \quad k = \overline{0, n-1,}$$

задача Коши для неоднородного СтЛ-n

$$\begin{cases} L_nx = f(t), t \in I \\ D^kx(s) = \xi_k, k = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{44}$$

имеет единственное решение на I, представляемое в виде:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\varphi_k(t-s) + \int\limits_s^t \varphi_{n-1}(t-s)f(\tau)d\tau \tag{45}$$

где $\varphi_{0,\dots,}$ φ_{n-1} — базис соответствующего однородного СтЛ-n, нормированный в нуле.

$\Diamond$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_n x = f(t), t \in I \\ D^k x(s) = 0, k = \overline{0, n-1} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\exists ! x^*(t) = \int\limits_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{46}$$

Пусть $x(t)$ — решение (44), тогда рассмотрим функцию:

$$y(t) = x(t) - x^*(t)$$

$$L_n y(t) = L_n x(t) - L_n x^*(t) = f(t) - f(t) = 0, \forall t \in I$$

$$D^k y(s) = D^k x(s) - D^k x^*(s) = \xi_k - 0 = \xi_k, k = \overline{0, n-1}$$

Таким образом, $y(t)$ является решением:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_n y = 0 \\ D^k y(s) = \xi_k \end{array} \right.$$

Решение этой начальной задачи единственно и представимо в виде:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s),$$

где $\varphi_{0,\ldots,}$ φ_{n-1} – базис соответствующего однородного СтЛ-n, нормированный в нуле. Следовательно: $x(t) = y(t) + x^*(t)$ — единственное и представимо в виде (45), ч.т.д.

$\otimes$

Замечание: существование решения $x(t)$ задачи (44) доказывается следующим образом (для n=2):

$$\left\{ \begin{array}{l} (D-\delta_1)(D-\delta_2)x = f \\ x(s) = \xi_0 \\ Dx(s) = \xi_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D-\delta_2)x = w(t) \\ x(s) = \xi_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D-\delta_1)w = f \\ w(s) = Dx(s) - \delta_2 x(s) = \xi_1 - \delta_2 \xi_0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$w(t)$, которую подставляем в предыдущую систему.

Формула (45) даёт метод Коши интегрирования неоднородных СтЛ-n:

1) Строим базис Коши соответствующего L_n x=0

2) Выписываем решение по формуле (45).

3) Упрощаем полученное выражение.

Методы интегрирования неоднородных СтЛ-n

Метод Лагранжа построения частного решения неоднородного уравнения. (Метод вариации произвольных постоянных)

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$L_n(x) = f, \tag{47}$$

$t \in I \subset \mathbb{R}$, $f \in C(I)$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $L_n(x) = 0$, и пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — базис этого уравнения, тогда

$$x_{oo}(t) = c_1\psi_1(t) + \ldots + c_n\psi_n(t) \tag{48}$$

— общее решение.

$$x_y(t) = x^*(t) = u_1(t)\psi_1(t) + \ldots + u_n(t)\psi_n(t) \tag{49}$$

— частное решение.

Теорема. Для любой непрерывной функции f функция (49) является решением уравнения (47), если $\psi_1, \ldots, \psi_n$ -базис однородного уравнения (48), соответствующего уравнению (47), а функции $u_1, \ldots, u_n$ — некоторые первообразные функций $v_1, \ldots, v_n$, которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \psi_1 v_1 + \psi_2 v_2 + \ldots + \psi_n v_n & = & 0 \\ D\psi_1 v_1 + D\psi_2 v_2 + \ldots + D\psi_n v_n & = & 0 \\ \ldots \\ D^{n-2}\psi_1 v_1 + D^{n-2}\psi_2 v_2 + \ldots + D^{n-2}\psi_n v_n & = & 0 \\ D^{n-1}\psi_1 v_1 + D^{n-1}\psi_2 v_2 + \ldots + D^{n-1}\psi_n v_n & = & 0 \end{cases}$$

$\diamondsuit$ Проведём для $n = 2$. Рассмотрим

$$L_2(x) = f \tag{50}$$

$$L_2(x) = 0, \tag{51}$$

где ψ_1, ψ_2 — базис однородного уравнения (51)

$$x^*(t) = \psi_1(t)u_1(t) + \psi_n(t)u_n(t) \tag{52}$$

—частное решение, где
$u_1 = \int v_1\, dx$; $u_2 = \int v_2\, dx$

$$\begin{cases} \psi_1 v_1 + \psi_2 v_2 & = & 0 \\ D\psi_1 v_1 + D\psi_2 v_2 & = & 0 \end{cases}$$

— линейная система относительно v_1, v_2.
Матрица этой системы является матрицей Вронского для ψ_1, ψ_2 ,и определитель этой системы — Вронскиан этой системы. Так как ψ_1, ψ_2 образуют базис, то Вронскиан этой системы функций $\neq 0$, $\Rightarrow$ система однозначно разрешима. Так как функция f — непрерывная

функция, то решением системы будут непрерывные функции: действительно, ψ_1, ψ_2 — квазиполиномы — непрерывны. Систему можно решать по правилу Крамера:
1) Вычислить Вронскиан.
2) Вычислить вспомогательные определители: столбец свободных членов — заменяет один из столбцов.
Получим непрерывные функции (первообразные $\exists$).
Чтобы доказать, что функция (52) является решением (50), подставим и проверим $L_2(x^*) \equiv f$:
$D^2x^* + a_1Dx^* + a_0x^* \equiv f$
$Dx^* = D\psi_1 u_1 + \psi_1 Du_1 + D\psi_2 u_2 + \psi_2 Du_2 = D\psi_1 u_1 + D\psi_2 u_2 + (\psi_1 v_1 + \psi_2 v_2) = D\psi_1 u_1 + D\psi_2 u_2$

$$Dx^* = D\psi_1 u_1 + D\psi_2 u_2 \tag{53}$$

$D^2x^* = D^2\psi_1 u_1 + D\psi_1 Du_1 + D^2\psi_2 u_2 + D\psi_2 Du_2 = D^2\psi_1 u_1 + D^2\psi_2 u_2 + (D\psi_1 v_1 + D\psi_2 v_2) = D^2\psi_1 u_1 + D^2\psi_2 u_2 + f$

$$D^2x^* = D^2\psi_1 u_1 + D^2\psi_2 u_2 + f \tag{54}$$

По формулам (52), (53), (54): $L_2(x^*) = D^2x^* + a_1Dx^* + a_0x^* = D^2\psi_1 u_1 + D^2\psi_2 u_2 + f + a_1(D\psi_1 u_1 + D\psi_2 u_2) + a_0\psi_1 u_1 + a_0\psi_2 u_2 = u_1(D^2\psi_1 + a_1D\psi_1 + a_0\psi_1) + u_2(D^2\psi_2 + a_1D\psi_2 + a_0\psi_2) + f = u_1L_2(\psi_1) + u_2L_2(\psi_2) + f = f$, так как $u_1L_2(\psi_1) = 0$ и $u_2L_2(\psi_2) = 0$.
$\otimes$

Алгоритм метода Лагранжа.
1) Строим базис $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — однородного уравнения (48) соответствующего уравнению (47).
2) Составляем систему и решаем её (находим $v_1, \ldots, v_n$).
3) Находим первообразные функций $v_1, \ldots, v_n$,т.е. $u_1, \ldots, u_n$.
4) Выписываем решение в форме (49).
Замечание.
Если в (49) вместо функций $u_1, \ldots, u_n$ подставить не конкретные первообразные функций v , а неопределенный интеграл от v, то получим функцию
$\widetilde{x} = \psi_1(t)(u_1(t) + c_1) + \ldots + \psi_n(t)(u_n(t) + c_n) = x^*(t) + \psi_1(t)c_1(t) + \ldots + \psi_n(t)c_n(t)$, которая будет являться полным решением исходного неоднородного уравнения.
Преимущество метода Лагранжа: легко строится базис, так как не нужна нормировка .
Если требуется построить решение начальной задачи для уравнения (47), то тогда по методу Лагранжа мы должны выписать общее решение неоднородного уравнения, а далее подставить в него начальные условия и получим систему от n уравнений с n неизвестными $c_1, \ldots, c_n$. Решив её и получим частное решение.

Метод Эйлера решения неоднородных уравнений

Метод Эйлера применим только в том случае, когда неоднородность имеет вид квазиполиномиальной неоднородности:

$$L_n(x) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t)e^{\alpha_j t}. \tag{55}$$

В силу правила суперпозиции, достаточно рассмотреть уравнение

$$L_n(x) = P(t)e^{\alpha t}. \tag{56}$$

Число α будем называть контрольным числом квазиполинома.

Теорема. Частное решение уравнения (56) может быть представлено в виде:

$$x^*(t) = t^r Q(t) e^{\alpha t}, \tag{57}$$

где $deg(Q) = deg(P)$ и его коэффициенты однозначно определяются коэффициентами многочлена P, а r — кратность того характеристического числа, которое совпадает с контрольным числом ($r = 0$, если такие характеристические числа отсутствуют).
$\diamondsuit$ Докажем для $n = 2$:
Рассмотрим $L_2(x) = P(t)e^{\alpha t} \Longleftrightarrow (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x = P(t)e^{\alpha t}$
Рассмотрим уравнение первого порядка: $Dx - \lambda x = P(t)e^{\alpha t}$, $e^{\lambda t} D(e^{-\lambda t} x) = P(t)e^{\alpha t}$. $D(e^{-\lambda t}x) = P(t)e^{(\alpha-\lambda)t}$.

$$e^{-\lambda t} x = \int_0^t P(\tau) e^{(\alpha-\lambda)\tau} = \left\{ \begin{array}{l} tQ(t), \alpha = \lambda \\ Q(t)e^{(\alpha-\lambda)t} + C, \lambda \neq \alpha \end{array} \right.$$

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{lll} tQ(t)e^{\lambda t}, & \alpha = \lambda, & deg(Q) = deg(P) \\ Q(t)e^{\alpha t} + Ce^{\lambda t}, & \lambda \neq \alpha, & deg(Q) = deg(P) \end{array} \right.$$

где $ce^{\lambda t}$ — решение однородного уравнения $Dx - \lambda x = 0$. Тогда, в случае $\lambda \neq \alpha$, функция $Q(t)e^{\alpha t}$ также, как и функция $Q(t)e^{\alpha t} + ce^{\lambda t}$, является частным решением неоднородного уравнения. Т.е. функция (57) имеет место с $r = 1$.
Пусть $w = (D - \lambda_2)x$, тогда $(D - \lambda_1)w = P(t)e^{\alpha t}$.
Тогда

$$w(t) = \left\{ \begin{array}{l} tQ(t)e^{\alpha t}, \alpha = \lambda_1, deg(Q) = deg(P) \\ Q(t)e^{\alpha t}, \lambda_1 \neq \alpha, deg(Q) = deg(P) \end{array} \right.$$

Решим уравнение: $(D - \lambda_2)x = w(t)$
В силу (47):

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{l} t^2 Q_1(t)e^{\alpha t}, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \\ tQ_1(t)e^{\alpha t}, \lambda_1 = \alpha \neq \lambda_2 \\ tQ_1(t)e^{\alpha t}, \lambda_2 = \alpha \neq \lambda_1 \\ Q_1(t)e^{\alpha t}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \alpha \end{array} \right.$$

$deg(Q_1) = deg(Q) = deg(P)$. Для произвольного n доказывается с помощью метода математической индукции.
$\otimes$

Все сказанное остается справедливым, если $\sum_{j=1}^m P_j(t)e^{\alpha_j t}$ — действительный квазиполином.
Рассмотрим

$$L_n x = (P_1(t)cos(\beta t) + P_2(t)sin(\beta t))e^{\alpha t}. \tag{58}$$

Тогда частное решение этого уравнения представимо в виде:

$$x(t) = t^r (Q_1(t)cos(\beta t) + Q_2(t)sin(\beta t))e^{\alpha t}, \tag{59}$$

где $deg(Q_1), deg(Q_2) \leqslant max\{deg(P_1), deg(P_2)\}$, а r — кратность того характеристического числа, которое совпадает с контрольным числом $\alpha \pm i\beta$
Оператор L_n в (58) имеет действительные коэффициенты.

f	контр. и характ.числа	Вид частн.реш-я
$P(t)e^{\alpha t}$	$\lambda_i \neq \alpha,$ $\forall i$	$Q(t)e^{\alpha t},$ $deg(Q) = deg(P)$
$P(t)e^{\alpha t}$	$\exists j_0, r - \text{кр.},$ $\lambda_{j_0} = \alpha$	$t^r Q(t)e^{\alpha t},$ $deg(Q) = deg(P)$
$e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)sin(\beta t))$	$\lambda_j \neq \alpha \pm i\beta,$ $\forall j$	$(Q_1 cos(\beta t) + Q_2 sin(\beta t))e^{alphat},$ $deg(Q_1), deg(Q_2) \leqslant max\{deg(P_1), deg(P_2)\}$
$e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)sin(\beta t))$	$\exists j_0, r - \text{кр.},$ $\lambda_{j_0} = \alpha \pm i\beta$	$t^r(Q_1 cos(\beta t) + Q_2 sin(\beta t))e^{alphat},$ $deg(Q_1), deg(Q_2) \leqslant max\{deg(P_1), deg(P_2)\}$

Алгоритм метода Эйлера:
1) Находим характеристические числа оператора L_n
2) Выписываем решение, используя таблицу.

Пример. $(D^2+1)(D-3)^2 x = sin(t) + (t^2+1)e^{3t} + cos(2t) + te^{2t}$
$\lambda_1 = i, d_1 = 1$
$\lambda_2 = -i, d_2 = 1$
$\lambda_3 = 3 d_3 = 2.$

$x(t) = t(Acos(t)+Bsin(t))+t^2(C_1 t^2+C_2 t+C_3)e^{3t}+(D_1 cos(2t)+D_2 sin(2t))+(E_1 t+E_2)e^{2t}$
Подставляем $x(t)$ в уравнение, приравниваем коэффициенты, находим решение (можно отдельно для каждого слагаемого).

Фазовые графики

Фазовая плоскость

Рассмотрим $L_2 x = 0$ или

$$D^2x + a_1 Dx + a_0 x = 0. \tag{60}$$

Стационарным решением (60) называют решение $x(t)$, построенное для любого t из $\mathbb{R}$. Для любого уравнения (60) всегда есть тривиальное решение $x(t) = 0$.

$$x(t) = \xi. \quad D^2x(t) = Dx(t) \equiv 0. \quad a_0\xi = 0 \quad => \quad a_0 = 0 \quad =>$$

Кроме тривиального, есть и другие стационарные решения. Если же $a_0 \neq 0$, то тривиальное решение является единственным стационарным.

Евклидова плоскость Oxy называется фазовой плоскостью уравнения (60), если решения уравнения (60) изображены на этой плоскости в виде фазовых графиков.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) :: = Dx(t); \end{cases} \tag{61}$$

Фазовым графиком стационарного решения является точка $(\xi, 0)$. Такие точки называются точками покоя. Для невырожденного уравнения, где $a0 \neq 0$, единственной точкой покоя является начало координат.

Теорема (о фазовых графиках). Фазовые графики уравнения (60) либо не пересекаются, либо совпадают.

$\diamondsuit$ Если у нас есть фазовый график решения $x(t)$, то фазовый график сдвига этого решения $x(t-s)$ будет тем же самым фазовым графиком, что и само решение.

$$\begin{cases} x(t) = x(t), \\ Dx(t) = y(t); \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t-s) = x(t-s), \\ Dx(t-s) = y(t-s); \end{cases}$$

Предполагаем, что существуют два пересекающихся графика решений:

$$\begin{cases} x(t) = x, \\ Dx(t) = y; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^*(t) = x, \\ Dx^*(t) = y; \end{cases}$$

Пусть они имеют общую точку (ξ,η). Тогда:

$$\begin{cases} x(s) = \xi, \\ Dx(s) = \eta; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^*(s^*) = \xi, \\ Dx^*(s^*) = \eta; \end{cases}$$

Рассмотрим решение $\tilde{x}$(t), которое представляет собой решение $\tilde{x}(t) = x^*(t - s + s^*)$.

Получаем: $\begin{cases} \tilde{x}(s) = x^*(s^*) = \xi = x(s), \\ Dx(s) = Dx^*(s^*) = \eta = Dx(s); \end{cases}$

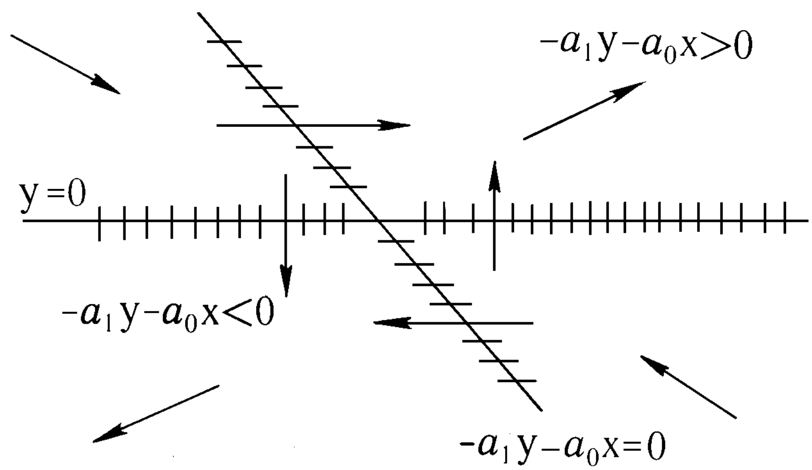
Последнее соотношение означает, что x и $\tilde{x}$ представляют собой одно и то же решение, но фазовый график $\tilde{x}$, как сдвиг решения x^*, совпадает с фазовым графиком x^*. А $\tilde{x}$ — то же самое, что x, значит, фазовые графики x и x^* совпали, что противоречит нашему положению. Значит, фазовые графики уравнения (60) либо не пересекаются, либо совпадают. $\otimes$

Направление движения по фазовому графику

Так как $y ::= Dx(t)$, то в первой и второй четвертях, где $y > 0$, получаем, $Dx(t) > 0$. Значит, абсциссы фазовых графиков при возрастании t, возрастают (аналогично для третей и четвертой четвертей).

$$Dy(t) = D^2x(t) = [(60)] = -a_1Dx(t) - a_0x(t) = -a_1y - a_0x$$

Поэтому в полуплоскости $-a_1y - a_0x > 0$, движение по фазовому графику возрастает, а в полуплоскости $-a_1y - a_0x > 0$ − убывает. $dy/dx-$ производная к графику.$dy/dx = Dy(t)/Dx(t) = (-a_1y - a_0x)/y$. В дальнейшем будем считать, что мы имеем дело с невырожденным уравнением, т.е. $a_0 \neq 0$. Если $D^2x - a_1Dx + a_0x = 0$, то в (60) направление движения по фазовым графикам меняется на противоположное. Эти соображения позволяют зафиксировать знак a_1. в дальнейшем будем считать $a_1 > 0, a_0 \neq 0$.



О-графики

$(x(t), y(t))$ — график называется O^+-графиком, если $(x(t), y(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$

bf Лемма Если $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} k \in R$, а (x(t),y(t)) − O-график, то k − характеристическое число оператора L_2

$\diamondsuit$ Рассмотрим O^+-график $(x(t), y(t))$.

$$k = \lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{Dy(t)}{Dx(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{D^2k(x)}{Dx(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{-a_1y(t) - a_0x(t)}{y(t)} = -a_1 - a_0\frac{1}{k},$$

$k \neq \infty, k \neq 0$, т.к.$a_0 \neq 0$. Поэтому $k = -a_1 - a_0\frac{1}{k}$, но $k^2 + a_1k + a_0 = 0$ — характеристическое уравнение, следовательно, k — характеристическое число оператора L_2.

Следствие:

О-графики могут существовать только у уравнений, в которых характеристические числа действительные.

Седло.

Предположим, что характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Тогда решение $x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$

$$y(t) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$a_0 = \lambda_1\lambda_2, a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$$

1 случай: $C_1 = C_2 = 0$. $(x(t), y(t))$ — точка покоя (0,0)

2 случай: $C_1 = 0, C_2 \neq 0$.

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} \end{cases} \Rightarrow y = \lambda_2 x$$

3 случай: $C_1 \neq 0, C_2 = 0$.

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} \end{cases} \Rightarrow y = \lambda_1 x$$

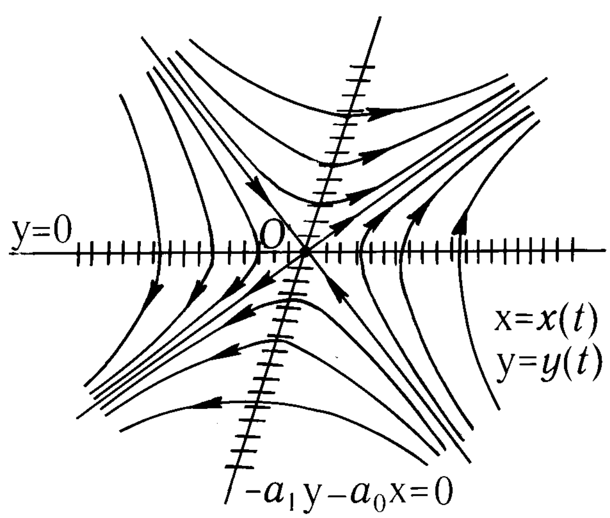
$$C_1 > 0, x(t) > 0, y(t) < 0 \Rightarrow x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0, y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$C_1 < 0, x(t) < 0, y(t) > 0 \Rightarrow x(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0, y(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

4 случай: $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$. Легко видеть, что на прямой $-a_1 y - a_0 x = 0$ касательные фазовых графиков должны быть горизонтальными.

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 + \lambda_2) y - \lambda_1\lambda_2 x = 0 \\
&y = \tfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} x \\
&\tfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} > \lambda_2 \\
&\lambda_1\lambda_2 < \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 \\
&\tfrac{y(t)}{x(t)} = \tfrac{\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}} \begin{array}{l} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_2 \\ \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \lambda_1 \end{array}
\end{aligned}$$

Точка покоя с таким расположением фазовых графиков называется седлом.



Бикритический узел.

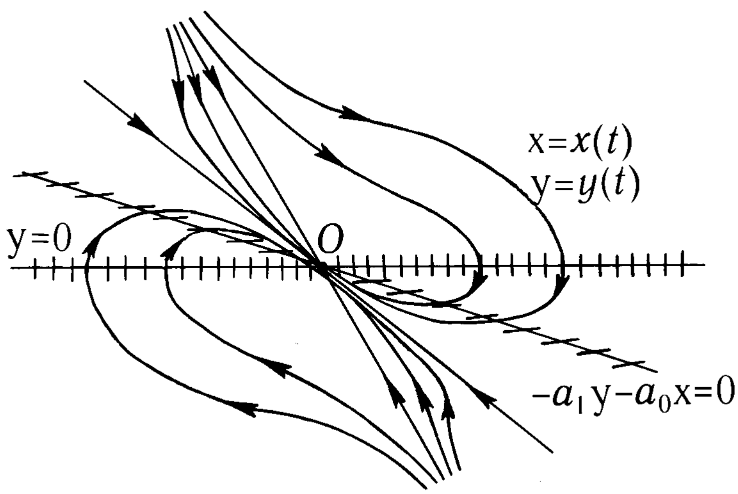
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Пусть $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$
Аналогично предыдущему имеем 4 случая
1. $C_1 = C_2 = 0 \Longrightarrow (x(t), y(t)) = (0, 0)$;
2. $C_1 = 0,\ C_2 \neq 0, \Longrightarrow x(t) = C_2 e^{\lambda_{2t}}$; $y(t) = \lambda_2 C_2 e^{\lambda_{2t}}$; $y = \lambda_2 x$.
3. $C_1 \neq 0, \Longrightarrow C_2 = 0, \Longrightarrow x(t) = C_1 e^{\lambda_{1t}}$, $y(t) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_{1t}}$; $y = \lambda_1 x$.
4. $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0, \Longrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \Longrightarrow$

$$-a_1 y - a_0 x = 0;$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) y - \lambda_1 \lambda_2 x = 0 => y = ((\lambda_1 * \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)) * x$$
;

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}} \begin{array}{l} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \lambda_2 \\ \xrightarrow[t\to-\infty]{} \lambda_1 \end{array}$$

Точка покоя с таким расположением фазовых графиков называется бикритическим узлом.



Монокритический узел.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0$
Тогда

$$x(t) = (C_1 t + C_2) e^{\lambda t}$$
$$y(t) = (C_1 + \lambda C_2 t + \lambda C_2) e^{\lambda t}$$

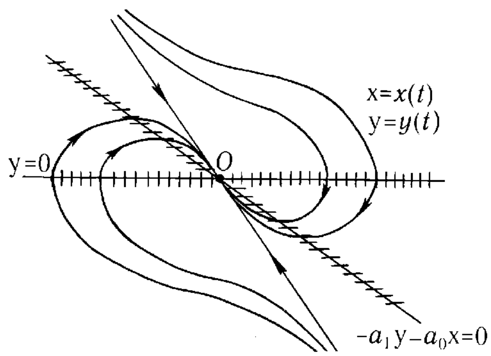
Опять есть 4 случая

1.	$C_1 = C_2 = 0$	$(x(t), y(t)) = (0, 0)$		
2.	$C_1 = 0$	$C_2 \neq 0$	$x(t) = C_2 e^{\lambda t}$	$y(t) = \lambda C_2 e^{\lambda t}; y = \lambda x$
3.	$C_1 \neq 0$	$C_2 = 0$	$x(t) = C_1 t e^{\lambda t}$	$y(t) = C_1 (1 + \lambda t) e^{\lambda t}$
4.	$C_1 \neq 0$	$C_2 \neq 0$		

$$x(t) = (C_1 + C_2)e^{\lambda t}$$
$$y(t) = (C_1 + \lambda C_2 t + \lambda C_2)e^{\lambda t}$$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\lambda C_1 t + C_1 + \lambda C_2}{C_1 t} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} \lambda$$

Точка покоя с таким расположением фазовых графиков называется монокритическим узлов.



Центр, фокус

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in C(\alpha \pm i\beta, \beta \neq 0)$

Тогда $x = (C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t)e^{\alpha t} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\sin(\beta t + \varphi(C_1, C_2))e^{\alpha t}$, где $\cos\varphi(C_1, C_2) = \dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \sin\varphi(C_1, C_2) = \dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ Положим

$$x(t) = C\sin(\beta t + C_0)e^{\alpha t},\ C_0, C \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, C \neq 0$$
$$y(t) = C(\beta\cos(\beta t + C_0) + \alpha\sin(\beta t + C_0))e^{at},$$

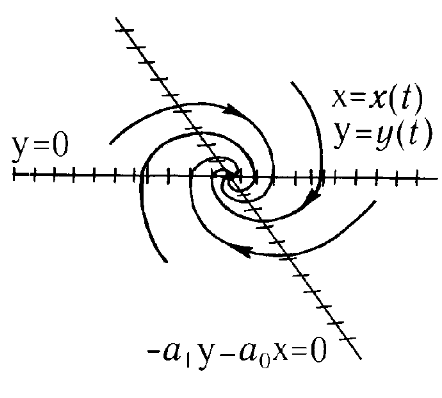
где $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = C \neq 0, \varphi(_1, _2) = C_0$.

Легко видеть, что через каждую точку фазовой плоскости проходит фазовый график в виде спирали, бесконечное число раз пересекающей оси координат.

Если же $C = 0$ то $(x, y) = (0, 0)$ — точка покоя.

Заметим, что при $\alpha < 0$ фазовые графики являются O^+-графиками.

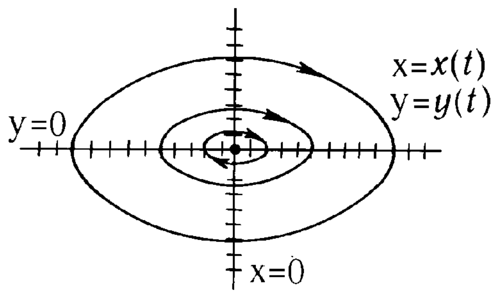
Точка покоя с таким расположением окрестных фазовых графиков называется фокусом.



При $\alpha = 0$ фазовые графики представляют собой эллипсы ($C \neq 0$)

$$x(t) = C\sin(\beta t + C0), \quad y(t) = C\beta\cos(\beta t + C0).$$

В этом случае точка покоя называется центром.



Классификация точек покоя невырожденного однородного уравнения II порядка

Для невырожденного уравнения $D^2x + a_1Dx + a_0 = 0$ $a_0 \neq 0$ существует единственная точка покоя (0,0), и:

если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$, то точка покоя — седло;
если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то точка покоя — бикритический узел;
если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$, то точка покоя — монокритический узел;
если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda_1) = -\mathrm{Im}(\lambda_2) \neq 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) \neq 0$, то точка покоя — фокус;
если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda_1) = -\mathrm{Im}(\lambda_2) \neq 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = 0$, то точка покоя — центр.

Прямая покоя

Рассмотрим теперь вырожденное уравнение, т.е.

$$D^2x + a_1Dx = 0 \quad a_0 = 0, \quad (a_1 > 0)$$

Пусть $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -a_1$, тогда

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{-a_1t} + C_2; \\ y(t) = -a_1C_1e^{-a_1t} \end{cases}$$

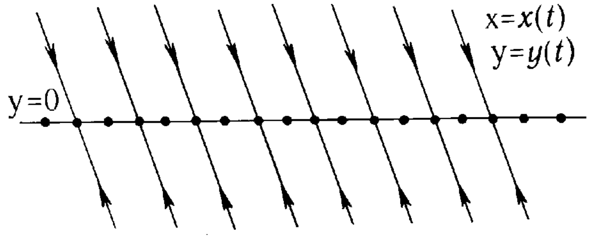
При $C_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x(t) = C_2 \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

Вся ось состоит сплошь из точек покоя и образует прямую покоя.

Других точек покоя у уравнения нет ($y(t) \neq const$).

При $C_1 \neq 0 \Rightarrow y = -a_1(x - C_2)$, и $(x(t), y(t)) \to (C_2, 0)$ при $t \to +\infty$. Фазовые графики имеют вид, изображенный на рисунке.



Если же $a_1 = 0$, то $D^2x = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Поэтому

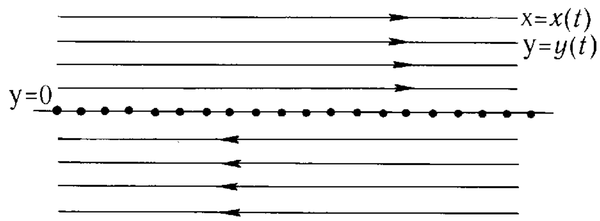
$$\begin{cases} x(t) = (C_1t + C_2) \\ y(t) = C_1 \end{cases}$$

Если $C_1 = 0$, то

$$\begin{cases} x(t) = C_2 \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

Опять вся ось состоит из точек покоя. Других точек покоя нет.

При $C_1 \neq 0$ фазовые графики — прямые параллельные оси Ox.



(Если $a_1 < 0$, то это то же, что при $_1 > 0$ заменить t на $(-t)$ (см. выше) график симметрично отображается относительно и направление меняется на противоположное.)

Зависимость решений от начальных данных

Интегральная непрерывность решений

Рассмотрим две задачи Коши: невозмущенную

$$\begin{cases} L_n x = f \\ D^k x(s) = \xi_k, \ k = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{62}$$

и возмущенную

$$\begin{cases} L_n x(t) = f, \quad t \in I \subset R \\ D^k x(s) = \xi_k + \Delta\xi_k, \ k = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{63}$$

Пусть $x(t,\xi) = x(t, \xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ — решение (62) и $x(t, \xi + \Delta\xi)$ — решение (63).

Как решение (63) отличается от решения (62)? (задача устойчивости)

Когда отклонение будет небольшим?

Отклонением $\rho(t, \Delta\xi)$ решений задач (62) и (63) называется величина

$$\sum_{j=0}^{n-1} |D^j x(t,\xi) - D^j x(t, \xi + \Delta\xi)| \tag{64}$$

Имеем

$$x(t,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s) + \int_s^t \varphi_{k-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

где $(\varphi_1, ..., \varphi_{n-1})$ — базис Коши однородного уравнения $L_n x = 0$ (нормированный в 0) и

$$x(t, \xi + \Delta\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k + \Delta\xi_k) \varphi_k(t-s) + \int_s^t \varphi_{k-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Поэтому $\rho = \sum\limits_{j=0}^{n-1} |D^j(x(t, \xi + \Delta\xi) - x(t,\xi))| = \sum\limits_{j=0}^{n-1} |D^j \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta\xi_k \varphi_k(t-s)| \quad \Rightarrow$

$$\rho(t, \Delta\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\xi_k| |D^j \varphi_k(t-s)| \tag{65}$$

не зависит от f и ξ.

Определение: Решение невозмущенной задачи $x(t,\xi)$ заданной (62) называется непрерывно зависящим от начальных данных на промежутке $I_1 \subset I$, если $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall \Delta\xi_k \in \mathbb{R}, \ |\Delta\xi_k| \leqslant \delta \ \Rightarrow \ \rho(t, \Delta\xi) \leqslant \varepsilon, \ \forall t \in I_1 (s \in I_1)$.

Определение: Если решение невозмущенной задачи (62) непрерывно, зависит от начальных данных для любого компактного промежутка I_0, $I_0 \subset I$, то говорят, что это решение интегрально непрерывно на I.

Теорема (об интегральной непрерывности решений СТЛ-n):

Если функция f непрерывна на I, то любое решение задачи (62) интегрально непрерывно на I.

P.S. Непрерывность f только, чтобы можно было использовать ТОР для СТЛ-n.

$\Diamond$ Возьмем любое решение $x(t,\xi)$. Рассмотрим соответствующую возмущенную задачу (63) с решением $x(t,\xi+\Delta\xi)$

Рассмотрим отклонения этих решений по формуле (65):

$$\rho(t,\Delta\xi)=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\xi_k||D^j\varphi_k(t-s)|$$

Рассмотрим произвольный компакт $I_0\subset I$, $\varphi_0,...,\varphi_{n-1}$ являются квазиполиномами => $D^j\varphi_0,...,D^j\varphi_{n-1}$ — тоже квазиполиномы $\forall\ j=\overline{0,n-1}$.

Любой квазиполином — непрерывная функция, поэтому, по теореме Вейерштрасса, все эти функции ограничены на компакте I_0. Тогда

$$\exists M:\forall t\in I_0(s\in I_0)...|D^j\varphi_k(t-s)|\leqslant M,\forall t\in I_0$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{\varepsilon}{Mn^2}:\Delta\xi_k\in\mathbb{R},|\Delta\xi_k|\leqslant\delta,\rho(t,\Delta\xi)\leqslant M\delta n^2=\varepsilon,$$

(здесь воспользовались тем, что слагаемых $|\Delta D^j\varphi_k(t-s)|\leqslant M$ всего n^2). Следовательно, $x(t,\xi)$ непрерывно зависит от начальных данных на произвольном компакте I_0, т.е. это решение интегрально непрерывно на I. $\otimes$

Пример:

$$\begin{cases}x(0)=\xi\\ Dx-x=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x(0)=\xi+\Delta\xi\\ Dx-x=0\end{cases}$$

$$x(t,\xi)=\xi e^t\quad x(t,\xi+\Delta\xi)=(\xi+\Delta\xi)e^t$$

$$\rho(t,\Delta\xi)=|\Delta\xi|e^t$$

Рассмотрим промежуток $[0,+\infty)$

$$[a,b]\subset[0,+\infty)\quad |e^t|\leqslant M=e^b$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{\varepsilon}{e^b}\Rightarrow|\Delta\xi|e^t\leqslant\frac{\varepsilon}{e^b}e^b=\varepsilon.$$

т.е. интегральная непрерывность на $[o,+\infty)$, а непрерывной зависимости нет, так как

$$\rho(t,\Delta\xi)=|\Delta\xi|e^t\to+\infty\quad\text{при}\quad t\to+\infty$$

для любых сколь угодно малых $\Delta\xi$.

Устойчивость решений

Рассмотрим невозмущенную и возмущенную задачи Коши

$$\begin{cases}L_n x=f, & t\in[s;+\infty)\\ D^k x(s)=\xi_k, & k=\overline{0,n-1}\end{cases}\tag{66}$$

$$\begin{cases} L_n\,x = f, & t \in [s;+\infty) \\ D^k\,x(s) = \xi_k + \Delta\,\xi_k, & k = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{67}$$

Устойчивость решения – это непрерывная зависимость его решения от начальных данных на всем [s;+∞).

$$\rho(t, \Delta\xi) = \sum_{k=0}^{n=1} \left| D^k\,x(t;\xi + \Delta\xi) - D^k\,x(t,\xi) \right| \tag{68}$$

Решение задачи (66) называется устойчивым (устойчивым по Ляпунову в положительном направлении), если

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall \Delta\,\xi_k \in R, \quad |\Delta\,\xi_k| \leqslant \delta \Rightarrow \quad \rho(t, \Delta\xi) \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in [s;+\infty)$$

Решение $x(t,\xi)$ задачи (66) называется асимптотически устойчивым, если

1) оно устойчиво

2) для всех достаточно малых $\Delta\xi$ отклонение $\rho(t,\Delta\xi) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Поскольку отклонение решения $\rho(t,\Delta\xi)$ не зависит ни от неоднородности функции, ни от ξ_k, то, если устойчиво хотя бы одно решение уравнения (66), то устойчивы и все его решения.

Если устойчиво решение однородного уравнения $L_n\,x = 0$, то устойчиво и решение уравнения (66), и наоборот. Поэтому устойчивость любого решения уравнения (66) равносильно устойчивости нулевого (тривиального) решения соответствующего однородного уравнения. В дальнейшем будем говорить об устойчивости самого уравнения. То же самое относиться и к асимптотической устойчивости.

Рассмотрим уравнение

$$L_n\,x = 0, \quad t \in [s,+\infty) \tag{69}$$

Теорема (Критерия Ляпунова устойчивости СтЛ-n) Для того, чтобы (69) было устойчивым необходимо и достаточно, чтобы действительные части характеристических чисел оператора L_n были не положительны ($Re(\lambda_k) \leqslant 0$) , а характеристические числа λ_i, для которых $Re(\lambda_i) = 0$, были однократны.

$\Diamond \Longleftarrow$ Пусть

$$\lambda_j = \alpha_j + i\,\beta_j, \quad \beta_j \in R, \quad \alpha_j \leqslant 0$$

Произвольное решение уравнения (69) имеет вид

$$x(t) = \sum_{\alpha_j} \left(P_j(t)\cos(\beta_j\,t) + Q_j(t)\sin(\beta_j\,t)\right) e^{\alpha_j\,t} + \sum_{\alpha_j=0} \left(c_j\cos(\beta_j\,t) + \overline{c_j}\sin(\beta_j\,t)\right)$$

$c_j, \overline{c_j}$ единственным образом определяются начальными условиями. За счет выбора начальных условий получим

$$|\Delta\,\xi_k| \leqslant \delta \Rightarrow \quad \sqrt{c_j^2 + \overline{c_j^2}} \leqslant \varepsilon, \quad \rho(t,\Delta\xi) \leqslant M_\varepsilon \Rightarrow$$

Следовательно, нулевое решение уравнения (69) будет устойчивым.

$\Longrightarrow$ Решение устойчиво. Пусть

1) $\exists\lambda = \alpha + i\beta \quad Re(\lambda) = \alpha > 0$ или

2) $\exists\lambda = i\mu$ кратность больше 1

1) В сумме присутствуют слагаемые вида $|e^{\alpha t}\, c\cos(\beta t)|$ с $\alpha > 0$, поэтому эти слагаемые не являются ограниченными на $[s, +\infty)$. Но это противоречит устойчивости решения.

2) Функции же вида $|ct\cos(\beta t)|$, $|ct\sin(\beta t)|$ неограничены на $[s, +\infty)$, что также противоречит устойчивости решения. $\otimes$

Теорема(Критерий асимптотической устойчивости) Для того, чтобы уравнение (69) было асимптотически устойчивым необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех характеристических чисел оператора L_n были отрицательны, т.е. $Re(\lambda_k) < 0$.

$\diamondsuit \Longleftarrow$ Раз действительные части всех характеристических чисел меньше нуля, то в силу предыдущего критерия, уравнение (69) устойчиво. Кроме того

$$\left|P(t)\, e^{\lambda t}\right| = |P(t)|\, e^{(Re\lambda)t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\rho(t, \Delta\xi) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что и гарантирует асимптотическую устойчивость.

$\Longrightarrow$ Решение асимптотически устойчиво, следовательно, устойчиво. Поэтому $Re(\lambda_k) \leqslant 0$. Пусть $\exists\lambda, Re\lambda = 0$

Среди слагаемых, входящих в решение присутствуют слагаемые

$$c\cos(\mu t) + c^*\sin(\mu t), \mu \in \mathbb{R}$$

но эти слагаемые не стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Следовательно,

$$\rho(t, \Delta\xi) \not\to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

что противоречит асимптотической устойчивости. $\otimes$

Таким образом, исследование устойчивости и асимптотической устойчивости уравнения

$$D^n\, x + a_{n-1}\, D^{n-1}\, x + ... + a_0\, x = 0$$

сводится к исследованию корней характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + ... + a_0 = 0.$$

Поэтому часто говорят об устойчивости (асимптотической устойчивости) характеристического уравнения.

Необходимое условие устойчивости Для устойчивости характеристического уравнения необходимо, чтобы все его коэффициенты были неотрицательны.

$\diamondsuit$ Действительно, пусть $Re\lambda_j \leqslant 0$ при всех j. Тогда, по теореме Виета,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = -\, a_{n-1},$$

откуда

$$0 \geqslant \sum_{j=1}^{n} Re(\lambda_j) = -\, a_{n-1} \Longrightarrow a_{n-1} \geqslant 0.$$

Опять используем теорему Виета:

$$a_{n-2} = \sum \lambda_j\, \lambda_k \geqslant 0,$$

и так далее для всех коэффициентов. $\otimes$

Аналогично доказывается и

Необходимое условие асимптотической устойчивости. Для асимптотической устойчивости уравнения (69) необходимо, чтобы все коэффициенты были положительны.

Критерий Гурвица асимптотической устойчивости уравнения. Для того, чтобы уравнение (69) было асимптотически устойчивым необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры определителя T были положительны, где

$$T = \begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называют гурвицианом.

Распишем его для уравнения четвертого порядка $\lambda^4 + a_3\,\lambda^2 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$:

$$T = \begin{vmatrix} a_3 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

Линейные системы с постоянными коэффициентами

Системы в нормальной дифференциальной форме.

Будем говорить, что система дифференциальных уравнений имеет нормальную форму, если старшая производная каждой неизвестной функции входит лишь в одно уравнение, и это уравнение разрешимо относительно старших производных. Например, система

$$\begin{cases} x_1^{(II)} = x_1^{(I)} + x_2^{(II)} + x_3, \\ x_2^{(IV)} = x_1 + x_3^{(II)} + x_2, \\ x_3^{(III)} = x_1^I + x_2 + x_3. \end{cases}$$

имеет нормальную форму.

Любую систему в нормальной форме можно привести к системе первого порядка, посредством введения новых переменных. Например, для приведенной системы это можно сделать так:

$$\begin{array}{lll} y_1 = x_1, & y_4 = x_2^I, & y_7 = x_3, \\ y_2 = x_1^I, & y_5 = x_2^{II}, & y_8 = x_3^I, \\ y_3 = x_2, & y_6 = x_2^{III}, & y_9 = x_3^{II}. \end{array}$$

$$\begin{cases} Dy_1 = y_2, \\ Dy_2 = y_2 + y_5 + y_7, \\ Dy_5 = y_6, \\ Dy_3 = y_4, \\ Dy_4 = y_5, \\ Dy_6 = y_1 + y_9 + y_3, \\ Dy_7 = y_8, \\ Dy_8 = y_9, \\ Dy_9 = y_2 + y_3 + y_7. \end{cases}$$

система первого порядка относительно новых переменных.

Линейная система в координатной форме:

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ Dx_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Dx_{n1} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \quad t \in I \subset \mathbb{R}. \tag{70}$$

Решением этой системы называется совокупность из n функций$(x_1\,(t)\,, x_2\,(t)\,, ..., x_n\,(t))$, которые будучи подставлены в систему превращают ее в тождество.

Система (70) в векторной записи:

$$Dx = A(t)x + f\,(t) \tag{71}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \ldots \\ f_{n(t)} \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij}(t))\,, i, j = \overline{1, n}$.

Под решением системы (71) понимается вектор-функция $x(t) = (x_1(t)\,, x_2(t)\,, .., x_n(t))^T$

Система (71) называется линейным векторным уравнением. Напомним правила работы с векторными и матричными функциями:

$$Dx(t) = \begin{pmatrix} Dx_1(t) \\ \ldots \\ Dx_n(t) \end{pmatrix}, \quad DX(t) = [X(t) = (x_{ij}(t))] = (Dx_{ij}(t))$$

$$DA(t)\,B(t) = A(t)\,D(B(t)) + D(A(t))\,B(t)$$

$$D(X(t)\,\vec{c}) = DX(t)\,\vec{c}$$

$$D(Ax(t)) = ADx(t)$$

$$\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau = \begin{pmatrix} \int\limits_0^t x_1(\tau)\,d\tau. \\ \ldots \\ \int\limits_0^t x_n(\tau)\,d\tau \end{pmatrix}$$

$$\int\limits_s^t X(\tau)\,d\tau = \left(\int\limits_s^t x_{ij}(\tau)\,d\tau\right)$$

$$\int\limits_s^t Ax(\tau)\,d\tau = A\int\limits_s^t x(\tau)\,d\tau$$

$$\int\limits_s^t A(\tau)\,Bd\tau = \int\limits_s^t A(\tau)\,d\tau \cdot B$$

Упражнение. Докажите:

$$\int\limits_s^t U(\tau)\,dV(\tau) = U(\tau)\,V(\tau)\Big|\begin{matrix} t \\ s \end{matrix} - \int\limits_s^t dU(\tau)V(\tau)\,,$$

где $U(\tau)\,, V(\tau)$ — матрицы.

Система линейных уравнений $Dx = A(t)\,x + f(t)$ называется стационарным векторным уравнением, или стационарной линейной системой, если все элементы a_{ij} матрицы A являются постоянными числами.

Функцию f называют неоднородностью уравнения. А систему с нулевой неоднородностью $Dx = Ax$ называют однородной системой, соответствующей неоднородной системе (71).

Специальные стационарные линейно-векторные уравнения

Специальными стационарными линейно-векторными уравнениями называются уравнения вида

$$Dx = Ax + f(t), t \in I \subset \mathbb{R}, \tag{72}$$

где матрица A — постоянная матрица, имеющая некоторый специальный вид. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} Dx = Ax + f(t), t \in I \\ x\,|_{t=s} = \xi \end{cases} \tag{73}$$

Возможны два простейших случая. Рассмотрим 1 случай:

Матрица A — диагональная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

В этом случае уравнению (72) соответствует следующая система:

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + f_1(t) \\ Dx_2 = a_{22}x_2 + f_2(t) \\ ... \\ Dx_n = a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{74}$$

Это уравнение (72) в координатной форме. Начальные условия:

$$x_1\,|_{t=s} = \xi_1\ , ...x_n\,|_{t=s} = \xi_n \tag{75}$$

Система распадается на отдельные уравнения. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x + f_1(t) \\ x_1\,|_{t=s} = \xi_1 \end{cases} \tag{76}$$

Она однозначно разрешима, если $f_1(t)$ непрерывна на I. То же самое — для всех $f_k(t), k = \overline{1,n}$, если они непрерывны, то каждое $x_k(t)$ определено из (74), (75) единственным образом.

Итак мы доказали следующую теорему.

Теорема 1 (ТОР для СтЛВУ с диагональной матрицей). Пусть векторная функция $f(t)$ непрерывна на I. Тогда $\forall\ s \in I, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, задача Коши (73) в случае диагональной матрицы A однозначно разрешима на I.

Теперь рассмотрим второй случай:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

В этом случае уравнению (72) соответствует следующая система:

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + f_1(t) \\ Dx_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t) \\ \ldots \\ Dx_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{77}$$

Или это уравнение в координатной форме. Начальные условия:

$$x_1\left.\right|_{t=s} = \xi_1\,, \ldots x_n\left.\right|_{t=s} = \xi_n \tag{78}$$

Теорема 2. (ТОР для СТЛВУ с треугольной матрицей):

Пусть $f(t)$ непрерывна на I. Тогда $\forall\ s \in I, \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$, задача Коши (77), (78) в случае треугольной матрицы A однозначно разрешима на I.

$\diamondsuit$

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x + f_1(t) \\ x_1\left.\right|_{t=s} = \xi_1 \end{cases}$$

Так как $f_1(t)$ —непрерывна, то задача Коши однозначно разрешима на I, т.е. $\exists\,!\ x_1(t) = e^{a_1(t-s)}\xi + \int\limits_s^t e^{a_1(t-\tau)}f(\tau)d\tau$, она является дифференцируемой функцией на $I \Rightarrow$ является непрерывной. Рассмотрим теперь

$$\begin{cases} Dx_2 = a_{22}x_2 + a_{21}x_1 + f_2(t) \\ x_2\left.\right|_{t=s} = \xi_2 \end{cases}$$

Задача Коши однозначно разрешима, если неоднородность $a_{21}x_1(t) + f_2(t)$ непрерывна на I, но она непрерывна, так как непрерывны a_{21}, x_1 и f_2. Следовательно, существует единственное (непрерывное) решение $x_2(t)$.

Далее подставляем в 3-е уравнение $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и т.д. Продолжая этот процесс, получим что каждое $x_k(t)$ на I определено единственным образом. Следовательно, решение $x(t)$ на I существует и единственно.

Доказательство теоремы для верхнетреугольной матрицы аналогично.

$\otimes$

Разрешимость СтЛВУ с произвольной матрицей A.

Теорема (ТОР для СтЛВУ с произвольной матрицей) Пусть $f(t)$ - непрерывна на I. Тогда $\forall\, S \in I, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$ задача Коши (73) однозначно разрешима на I.

$\diamondsuit$ Из алгебры известно, что для любой постоянной матрицы A существует невырожденная матрица S такая, что $S^{-1}AS = J$, где J — жорданова (треугольная) форма матрицы A. Сделаем в (73) замену $x = Sy$. Тогда

$$D(Sy) = ASy + f(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Dy = S^{-1}ASy + S^{-1}f(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Dy = Jy + g(t).$$

Полученная система является треугольной, $y(s) = S^{-1}x(s) = S^{-1}\xi$. Поэтому ($g = S^{-1}f$ — непрерывная функция) полученная задача Коши однозначно разрешима на I, и , следовательно, однозначно разрешима на I и исходная задача $x(t) = Sy(t)$.

$\otimes$

Сведение системы в нормальной дифференцируемой форме к системе независимых уравнений.

Пусть $n = 2$. Уравнение (72) примет вид

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t) \\ Dx_1 = a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + f_2(t) \end{cases} \tag{79}$$

Будем считать, что f_1 и f_2 - дифференцируемы столько раз, сколько нам потребуется. Пусть $a_{12} \neq 0$ (иначе – система треугольная), тогда

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}}(Dx_1 - a_{11}x_1 - f_1(t))$$

Подставляем: $\dfrac{1}{a_{12}}D(Dx_1 - a_{11}x_1 - f_1(t)) = a_{21}x_1 + a_{22}(Dx_1 - a_{11}x_1 - f_1(t)) + f_2(t)$

$$D^2x_1 + B_1Dx_1 + B_0x_1 = g(t)$$

Таким образом, мы получили стационарное уравнение относительно x_1.

Если бы $f(t) \equiv 0$, т.е. $f_1 \equiv 0$, $f_2 \equiv 0$, то мы получили бы систему однородных стационарных уравнений, и привели бы ее к однородному стационарному уравнению.

Так как решением однородного стационарного уравнения являются квазиполиномы, то и решением $Dx = Ax$ также являются (векторные) квазиполиномы.

Для $n > 2$ сведение системы к уравнению или совокупности уравнений проводится аналогично.

Пространство решений однородного стационарного линейно-векторного уравнения

Линейность пространства решений

Рассматриваем уравнение:

$$Dx = Ax, \tag{80}$$

определённое на $I = \mathbb{R}$. Пусть вектор $x_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$ является решением (80), т.е. $Dx_1(t) \equiv Ax_1(t)$, пусть вектор $x_k(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \dots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}$ также решение (80), т.е. $Dx_k(t) \equiv Ax_k(t)$. Пусть есть n решений (80):

$$x_1(t) \dots x_n(t)$$

тогда

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \dots + C_nx_n(t) = \sum_{k=1}^{n} C_kx_k(t)$$

также решение (80) где C_k - некоторые константы.
Найдём:

$$Dx(t) = D\sum_{k=1}^{n} C_kx_k(t) = [\text{в силу линейности D}] = \sum_{k=1}^{n} D(C_kx_k(t)) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} C_kAx_k(t) = A\sum_{k=1}^{n} C_kx_k(t) = Ax(t)$$

т.е. $Dx(t) \equiv Ax(t) \Rightarrow x(t)$ — решение (80)
$\Rightarrow$ Линейная комбинация решений — решение.
$\Rightarrow$ множество решений (80) образует линейное пространство.

Из координат решений (80) запишем:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}x_{12}\dots x_{1n} \\ x_{21}x_{22}\dots x_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{n1}x_{n2}\dots x_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица решений уравнения (80)
$\Rightarrow \Phi(t)$ будет удовлетворять $D\Phi(t) = A\Phi(t)$.

Определим функцию $W(t) = det\Phi(t)$.

Теорема. Пусть $x_1(t)\dots x_n(t)$ — решения (80), тогда имеет место формула Остроградского-Лиувилля:

$$W(t)=W(s)e^{(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})(t-s)} \tag{81}$$

$\diamondsuit$

Докажем для случая $n=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{pmatrix}$ и для $\Phi(t), W(t)=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{vmatrix}, x_1=\binom{x_{11}}{x_{21}}, x_2=\binom{x_{12}}{x_{22}}$

$Dx_1(t)\equiv Ax_1(t)\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} Dx_{11} &=& a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}\\ Dx_{21} &=& a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}\end{array}\right.$

$Dx_2(t)\equiv Ax_2(t)\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} Dx_{12} &=& a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}\\ Dx_{22} &=& a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}\end{array}\right.\quad (*)$

Найдём $DW(t)=\begin{vmatrix} Dx_{11} & Dx_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12}\\ Dx_{21} & Dx_{22}\end{vmatrix}=[\text{в силу}(*)]=$
$=\begin{vmatrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}\\ x_{21} & x_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12}\\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{vmatrix}+$
$\begin{vmatrix} a_{12}x_{21} & a_{12}x_{22}\\ x_{21} & x_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12}\\ a_{21}x_{11} & a_{21}x_{12}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12}\\ a_{22}x_{21} & a_{22}x_{22}\end{vmatrix}=a_{11}W(t)+a_{22}W(t)$

$\Rightarrow DW(t)=(a_{11}+a_{22})W(t)$ — однородное СтЛ-1 относительно $W(t)$, общее решение которого: $W(t)=Ce^{(a_{11}+a_{22})t}$. Учитывая, что $W(t)|_{t=s}=W(s)$, получим

$W(s)=Ce^{(a_{11}+a_{22})s}\Rightarrow C=W(s)e^{-(a_{11}+a_{22})s}$

Подставляя найденное C в общее решение, получим:

$W(t)=W(s)e^{(a_{11}+a_{22})t}e^{-(a_{11}+a_{22})s}$.

Для $n=2$ теорема доказана, для произвольного n доказательство аналогично.

$\otimes$

Следствие Если $W(s)\neq 0$, то в силу (81) $W(t)\neq 0$ для произвольного t. Например, если $s=0$, то опять в силу (81):

$$W(t)=W(0)e^{(a_{11}+\dots+a_{nn})t}\neq 0$$

Определение Решения $x_1(t)\dots x_n(t)$ уравнения (80) образуют базис, если определитель $W(t)$ матрицы этих решений $\neq 0\ \forall\, t$. В этом случае матрица решений $\Phi(t)$ называется базисной или фундаментальной.

Теорема Пусть $x_1(t)\dots x_n(t)$ — базис пространства решений (80), тогда функция

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n} C_k x_k(t) \tag{82}$$

где $C_k - \forall const\in\mathbb{R}$ является общим (полным) решением (80)

$\diamondsuit$

$x(t)$ в (82) является решением (80) (см выше). Покажем, что в (82) содержатся все решения (80)

Рассмотрим произвольную задачу Коши для (80)

$$\left\{\begin{array}{lcl} Dx &=& Ax\\ x|_{t=s} &=& \xi \quad \forall s,\forall\xi\end{array}\right. \tag{83}$$

покажем, что существуют произвольные постоянные при которых решение задачи Коши будет содержаться в формуле (82):

$$\xi=\sum_{k=1}^{n}C_kx_k(s)\Rightarrow\left\{\begin{array}{lcl}\xi_1&=&C_1x_{11}(s)+\dots+C_nx_{1n}(s)\\ \dots&&\\ \xi_n&=&C_1x_{n1}(s)+\dots+C_nx_{nn}(s)\end{array}\right.$$

— линейная неоднородная алгебраическая система относительно C_k. Определитель этой системы $W(s)\neq 0\Rightarrow$ она имеет единственное решение, т.е. всегда найдутся значения C_k при которых решение произвольной задачи Коши (83) содержится в (82) $\Rightarrow$ все решение уравнения (80) в (82) содержатся $\Rightarrow x(t)$ действительно общее (полное) решение.

$\otimes$

Заметим, что

$$x(t)=C_1\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\dots\\x_{n1}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\\dots\\x_{n2}\end{pmatrix}+\dots+C_n\begin{pmatrix}x_{1n}\\x_{2n}\\\dots\\x_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1x_{11}+C_2x_{12}+\dots+C_nx_{1n}\\\dots\\\dots\\C_1x_{n1}+C_2x_{n2}+\dots+C_nx_{nn}\end{pmatrix}=\Phi(t)\begin{pmatrix}{}_{1n}\\{}_{2n}\\\dots\\{}_{nn}\end{pmatrix}=\Phi(t)C,$$

где C — произвольный n-мерный вектор. $\Rightarrow$ общее решение (80) представимо в виде $x(t)=\Phi(t)C$.

Правило Эйлера построения базисной матрицы

Решение уравнения (80) будем искать в виде

$$x(t)=\gamma e^{\nu t}\qquad\overline{\gamma}\neq\overline{0}\tag{84}$$

подставляем в (80):

$$\gamma\nu e^{\nu t}\equiv A\gamma e^{\nu t}\Rightarrow A\gamma=\nu\gamma\tag{85}$$

$$(A-\nu E)\gamma=0\tag{86}$$

— алгебраическая однородная система для нахождения γ, ненулевое решение будет тогда, когда

$$det(A-\nu E)=0\tag{87}$$

— это характеристическое уравнение A. Найдём собственное значение - ν матрицы A, тогда γ — собственный вектор, отвечающий собственному значению ν.

I случай

все собственные значения A действительны и различны:

$$\nu_n\in\mathbb{R}\qquad k=\overline{1,n}\qquad\nu_i\neq\nu_j\qquad i\neq j$$

$\Rightarrow\forall\nu_k$ построим собственные вектора $\gamma_k\qquad x_k(t)=\gamma_ke^{\nu_kt}\qquad k=\overline{1,n}$

$$W(t)|_{t=0}=|[\gamma_1\dots\gamma_n]|\neq 0$$

$\Rightarrow$ построен базис

II случай

$\nu_k \in R \quad k = \overline{1, n} \quad \exists \nu_j$ с кратностью $n_j \Rightarrow$ для $\forall$ простого корня строим решение в виде (84) и в зависимости от $rank(A - \nu_j E)$ данное собственное значение ν_j может отвечать m собственным значениям γ_j,
если $m = n_j$, решение построено,
если $m < n_j$ — решение для собственного значения ν_j будем искать в виде

$$x(t) = (\alpha_0 t + \alpha_1)e^{\nu_j t}.$$

Подставляем в (80) и находим α_0 и α_1. α_0 — собственный вектор, α_1 — присоединенный вектор. Если таких решений будет r и $m + r = n_j$ — процесс завершен, если $m + r < n_j$, то ищем решение в виде многочлены степени 2

III случай

$\nu_k \in C$. В этом случае строят комплексно-значные решения и выделяют действительные и мнимые части.

Экспонента матрицы

Векторные и матричные нормы

Пусть a некоторый вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$. Норма вектора a — функция со свойствами:

1. $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$,
   $\| a \| = 0 \Leftrightarrow a = \vec{0}$;

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$, $\| \alpha \cdot a \| = | \alpha | \cdot \| a \|$;

3. $\| a + b \| \leqslant \| a \| + \| b \|$.

Норму матрицы A определим равенством:

$$\| A \| = \sup_{\|a\| \neq 0} \frac{\| A \cdot a \|}{\| a \|} = \sup_{\|a\|=1} \| A \cdot a \|$$

Будем говорить, что она согласована с соответствующей нормой вектора.

Справедливы соотношения 1-3 и свойство мультипликативности:
$\| A \cdot B \| \leqslant \| A \| \cdot \| B \|$.

Лемма. $\forall A, \forall n \in N \ \| A^n \| \leqslant \| A \|^n, \| E \| = 1$.
Доказательство очевидно.

Рассмотрим матричную последовательность

$$A_k \longrightarrow A \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

1. $\forall \epsilon > 0, \exists \nu > 0, \forall k \geqslant \nu \Rightarrow | A_k - A | \leqslant \epsilon$;

2. $a_{ij}^{(k)} \longrightarrow a_{ij}$ при $k \longrightarrow \infty, \forall i, j$.

Рассмотрим теперь матричный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k = B.$$

Ряд называется сходящимся, а B называется суммой этого ряда,если каждый из рядов для элементов является сходящимся

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^k = b_{ij},$$

Аналогично для функциональных матричных последовательностей и рядов $A_k(t) \longrightarrow A(t)$, $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) = B(t)$.

Экспонентой матрицы A ($\exp A$) называется ряд вида

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Так как

$$\frac{\| A^k \|}{k!} \leqslant \frac{\| A \|^k}{k!},$$

то

$$\| e^A \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\| A \|^k}{k!} = e^{\|A\|},$$

следовательно ряд сходится для любой матрицы.

Аналогично,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Для $t \in [-\alpha, \alpha]$:

$$\| e^{At} \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\| A \|^k | t |^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\| A \|^k \alpha^k}{k!} = e^{\|A\|\alpha}$$

Ряд сходится равномерно на [-α, α] по признаку Вейерштрасса, т.е. на любом отрезке. Поэтому e^{At} сходится локально равномерно на $\mathbb{R}$.

Лемма. $De^{At} = Ae^{At}$

$\diamondsuit$ Формально продифференцируем

$$De^{At} = D(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1} k}{k!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = Ae^{At}.$$

Поскольку ряд сходится локально равномерно на $\mathbb{R} \Rightarrow$ дифференцирование было законным.$\otimes$

Свойства:

1. $e^{[0]t} = E$, [0]- нулевая матрица;
2. если AB=BA, то $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$,
   $e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt} = e^{Bt} e^{At}$;
3. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.

Теорема (об экспоненциальном представлении задачи Коши СтЛВ). Пусть f непрерывна на I. Тогда $\forall s \in I, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши

$$Dx = Ax + f, t \in I, x(s) = \xi \tag{88}$$

может быть представлено в виде

$$x(t) = e^{A(t-s)}\xi + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau. \tag{89}$$

$\diamondsuit$ Подставим (93) в (92):
$Dx = (De^{A(t-s)})\xi + D(e^{At}\int_s^t e^{-A\tau} f(\tau)\,d\tau) = Ae^{A(t-s)}\xi + Ae^{At}\int_s^t e^{-A\tau} f(\tau)\,d\tau + e^{At}e^{-At}f(t) = A(e^{A(t-s)}\xi + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau) + Ef(t) = Ax(t) + f(t)$;
$x(s) = e^{A0}\xi + \int_s^s e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau = E\xi + 0 = \xi \Rightarrow$ (93) является единственным решением начальной задачи (92) (В силу теоремы о единственности решения).$\otimes$

Замечания:

1. Если в (93) вектор начальных значений заменить произвольным постоянным вектором c, то формула
$$x(t) = e^{A(t-s)}c + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau \tag{90}$$
будет общим решением (92).

2. Формула (90) составляет правило Коши разрешения задачи (92).

Матрица Коши

Матрица e^{At} является базисной (фундаментальной) для $Dx = Ax$. Это следует из леммы для производной экспоненты и того факта, что по теореме Остроградского-Лиувилля экспонента является невырожденной матрицей. Действительно, $dete^{At} = e^{\mathrm{tr}At} \neq 0$ при любом t.

Фундаментальная матрица $X(t)$ называется нормированной в точке s, если $X(s) = E$, где E — единичная матрица. Нетрудно проверить, что для любых двух фундаментальных матриц $X_1(t)$, $X_2(t)$ существует невырожденная матрица C, $detC \neq 0$ такая, что $X_1(t) = X_2(t)C$.

Пусть $X_0(t), X_s(t)$ - нормированные в точках 0 и s, т.е. $X_0(0) = X_s(s) = E$.

Если $X_s(t) = X_0(t)$, то $X_s(0) = X_0(0)C$, т.е. $C = X_s(0)$. Поэтому $X_s(t) = X_0(t)X_s(0)$, $X_0(t) = X_s(t)X_s^{-1}(0)$

Пусть $X(t)$ произвольная фундаментальная матрица. Тогда функция $X(t)X^{-1}(\tau) = K(t,\tau)$ при каждом фиксированном τ — фундаментальная матрица решений, причем $K(\tau,\tau) = E$. Такую матрицу называют матрицей Коши системы $Dx = Ax$. Легко видеть, что при постоянной матрице A матрица Коши может быть представлена в виде

$$K(t,\tau) = e^{At}e^{-A\tau} = e^{A(t-\tau)}.$$

Поэтому формула (90) может быть переписана в виде

$$x(t) = K(t,s)c + \int_s^t K(t,\tau) f(\tau)\,d\tau. \tag{91}$$

Вычисление матричной экспоненты

Вычисление матричной экспоненты с использованием жордановой формы матрицы

По определению

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Рассмотрим вначале случай, когда матрица A диагональная

$$A = diag\left\{a_1, ..., a_n\right\}.$$

Тогда очевидно, что

$$A^k = diag\left\{a_1^k, ..., a_n^k\right\}$$

и

$$e^{At} = diag\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^k t^k}{k!}, ..., \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n^k t^k}{k!}\right\} = diag\left\{e^{a_1 t}, ..., e^{a_n t}\right\}$$

В случае произвольной матрицы A всегда существует невырожденная матрица S, которая приводит A к жордановой форме, т.е.

$$S^{-1}AS = J = diag\{J_1(\lambda_1), ..., J_m(\lambda_m)\}, \quad J_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\, 1\, 0\, 0\, ...\, 0 \\ 0\, \lambda\, 1\, 0\, ...\, 0 \\ .... \\ 0\, 0\, 0\, 0\, ...\, \lambda \end{pmatrix}.$$

Размерность клеток Жордана равна кратности соответствующего элементарного делителя.

Поэтому

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SJ^kS^{-1}}{k!} = S\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} S^{-1} = Se^{Jt}S^{-1} \tag{92}$$

причем в силу блочного строения матрицы J имеем

$$e^{Jt} = diag\{e^{J_1 t}, ..., e^{J_m t}\}. \tag{93}$$

Следовательно, достаточно научиться строить экспоненту для одной клетки Жордана

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Представим клетку Жордана в виде

$$J(\lambda) = \lambda E + H,$$

где E — единичная матрица, а H — матрица у которой единицы стоят лишь на первой линии, параллельной главной диагонали, а все остальные элементы равны 0. Пусть размерность этой клетки равна p. Тогда очевидно, что $H^p = [0]$, $[0]$ — нулевая матрица. Кроме того, поскольку матрицы E и H коммутируют, то из свойств матричной экспоненты следует, что

$$e^{J(\lambda t} = e^{\lambda Et+Ht} = e^{\lambda Et}e^{Ht}$$

и так как $e^{\lambda Et} = e^{\lambda t}E$, то достаточно построить e^{Ht}.

Обозначим $H_k = H^k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

единички стоят в первой линии, параллельной главной диагонали,

$$H_2 = H_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

единички стоят во второй линии, параллельной главной диагонали,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

единички стоят в третьей линии, параллельной главной диагонали, и так далее. Наконец

$$H_{p-1} = H_1^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Начиная с p-ой степени все матрицы H^k нулевые ($k \geqslant p$).

Поэтому

$$e^{J(\lambda)t} = e^{(\lambda E+H_1)t} = \left[\begin{array}{c} EH_1 = H_1E \\ \lambda tE \cdot H_1t = H_1t\lambda tE \end{array} \right] = e^{\lambda Et}e^{H_1t} = e^{\lambda t}Ee^{H_1t}.$$

$$e^{H_1 t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_1^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_1^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k t^k}{k!} = [H_0 = E] = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{n-4}}{(n-4)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом

$$e^{J(\lambda)t} = e^{\lambda t} e^{H_1 t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{n-4}}{(n-4)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

и для вычисления e^{At} достаточно воспользоваться формулами (92), (93).

Пример Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Если характеристические числа матрицы комплексные, то она приводима действительным преобразованием к обобщенной канонической форме с блоками вида

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

При этом

$$exp\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} t\right) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Вычисление матричной экспоненты с использование аннулирующего многочлена

Рассмотрим какой-либо аннулирующий многочлен для :

$$p(\lambda) = \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + b_1\lambda + b_0.$$

Тогда

$$A^m = -\left(b_{m-1}A^{m-1} + ... + b_0E\right),$$

откуда

$$A^k = f_k(EA, ..., A^{m-1}), \quad \forall\, k \geqslant m.$$

Например, если $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, то

$$A^2 = A + E \quad \Longrightarrow \quad A^3 = A^2 + A = 2A + E \quad \Longrightarrow \quad A^4 = 2A^2 + A = 3A + 2E \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(t) A^k,$$

т.е. вместо ряда имеем конечную сумму и требуется только найти функции $\alpha_k(t)$. Оказывается, что функция $\alpha_{m-1}(t)$ является решением специальной задачи Коши для стационарного уравнения, для которого аннулирующий многочлен матрицы A является характеристическим:

$$\begin{cases} D^m\alpha_{m-1}(t) + b_{m-1}D^{m-1}\alpha_{m-1}(t) + .. + b_0\alpha_{m-1}(t) = 0 \\ D^k\alpha_{m-1}(0) = 0, k = \overline{0, m-2} \\ D^{m-1}\alpha_{m-1}(0) = 1 \end{cases}$$

Остальные функции находятся с использованием аналога схемы Горнера

	α_{m-1}	$b_{m-1}\alpha_{m-1}$	$b_{m-2}\alpha_{m-1}$	$\dots$	$b_1\alpha_{m-1}$	$b_1\alpha_{m-1}$
D	α_{m-1}	$b_{m-1}\alpha_{m-1} + D\alpha_{m-1} = \alpha_{m-2}$	$b_{m-2}\alpha_{m-1} + D\alpha_{m-2} = \alpha_{m-3}$	$\dots$	$b_1\alpha_{m-1} + D\alpha_1 = \alpha_0$	0

Методы интегрирования неоднородных систем

Метод Коши

Рассмотрим задачу Коши для стационарной системы

$$Dx = Ax + f(t), \quad t \in I, \tag{94}$$

где $f \in C(I)$, с начальными условиями

$$x(s) = \xi.$$

Как было показано ранее, метод Коши построения решения этой начальной задачи заключается в применении формулы

$$x(t) = e^{A(t-s)}\xi + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau.$$

Если в этой формуле вектор начальных значений ξ заменить произвольным постоянным вектором c, то формула

$$x(t) = e^{A(t-s)}c + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

будет доставлять общие решением (94) по методу Коши.

Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных)

Мы применяли метод Лагранжа для неоднородных СтЛ:

$$L_n x = f;$$

$$x_{oo}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \psi_k(t);$$

$$x_{\text{чн}} = \sum u_k(t)\psi_k(t);$$

Решим стационарное векторное уравнение (94

Требуется построить общее решение. Пусть существуют два решения этой системы:$x^1(t)$ и $x^2(t)$, тогда

$$Dx(t) = Dx^1(t) - Dx^2(t) = Ax^1(t) + f - (Ax^2(t) + f) = A(x^1(t) - x^2(t)) = Ax(t)$$

Поэтому разность решений неоднородной системы — решение соответствующей однородной. Таким образом,

$$x_{\text{он}} = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}.$$

Рассмотрим однородную систему

$$Dx = Ax, \tag{95}$$

соответствующую неоднородной системе (94). Ее общее решение имеет вид

$$x(t) = X(t)c,$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица решений (95), а c — произвольный постоянный вектор.

Метод Лагранжа построения частного решения заключается в том что решение неоднородной системы ищется в виде

$$x^*(t) = X(t)u(t). \tag{96}$$

Так как $x^*(t)$ — решение, то оно удовлетворяет (94). Поэтому

$$Dx^* = (DX(t))u(t) + X(t)Du(t) = [Dx^* = Ax^* + f, DX = AX] = AXu + XDu = AXu + f,$$

откуда

$$X(t)Du = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad Du = X^{-1}(t)f(t) \tag{97}$$

Решая уравнение (97) получаем некоторые решения $u(t)$,

$u(t) = \int\limits_s^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$, s — любая точка из I, f — непрерывная, таким образом частное решение $x(t)$ может быть записано в виде (см. (95)

$$x^*(t) = X(t)\int\limits_s^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad s \in I.$$

А общее решение может быть записано в виде:

$$x(t) = X(t)c + X(t)\int\limits_s^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \tag{98}$$

Таким образом, формула (98) — запись общего решения неоднородного уравнения с помощью метода Лагранжа. Построенное x — сводится к построению $X(t)$:

1-й способ: Метод Эйлера

2-й способ: Экспоненциальное представление решения.

Устойчивость по Ляпунову

Устойчивость стационарных линейных систем

Рассмотрим две начальные задачи: невозмущенную

$$\begin{cases} Dx = Ax + f(t), & t \in I = [s, +\infty) \\ x(s) = \xi. \end{cases} \tag{99}$$

с решением $x(t; s, \xi)$ и возмущенную

$$\begin{cases} Dx = Ax + f(t), & t \in I = [s, +\infty) \\ x(s) = \xi + \Delta\xi. \end{cases} \tag{100}$$

с решением $x(t; s, \xi + \Delta\xi)$.

Определение. Решение $x(t; s, \xi)$ задачи (99) устойчиво по Ляпунову в положительном направлении, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \Delta\xi, \quad \forall\, t \in I\, \|\Delta\xi\| \leqslant \delta \quad \|x(t; s, \xi + \Delta\xi) - x(t; s, \xi)\| \leqslant \varepsilon.$$

Определение. Решение $x(t; s, \xi)$ задачи (99) асимптотически устойчиво по Ляпунову в положительном направлении, если оно устойчиво и для всех достаточно малых $\Delta\xi$

$$\|x(t; s, \xi + \Delta\xi) - x(t; s, \xi)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Поскольку решения задач (99) и (100) представимы в виде

$$x(t; \xi) = e^{A(t-s)}\xi + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

и

$$x(t; s, \xi + \Delta\xi) = e^{A(t-s)}(\xi + \Delta\xi) + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau,$$

то

$$\|x(t; s, \xi + \Delta\xi) - x(t; s, \xi)\| = \|e^{A(t-s)}\Delta\xi\|.$$

Поэтому отклонение решений не зависит ни от неоднородности уравнения f, ни от начального значения ξ. Следовательно, устойчивость (асимптотическая устойчивость) одного решения (99) равносильна устойчивости (асимптотической устойчивости) всех его решений, т.е. устойчивости (асимптотической устойчивости) самой системы; кроме того, устойчивость (асимптотическая устойчивость) неоднородной системы (99) равносильна устойчивости (асимптотической устойчивости) соответствующей однородной системы

$$Dx = Ax, \quad t \in I = [s, +\infty). \tag{101}$$

Устойчивость и асимптотическую устойчивость этой последней системы мы и будем изучать.

Лемма. Стационарные линейные системы

$$Dx = Ax \tag{102}$$

$$Dx = Bx \tag{103}$$

одновременно устойчивы (асимптотически устойчивы), если A и B подобны.

$\diamondsuit$ Существует матрица S, $detS \neq 0$ такая, что $A = S^{-1}BS$. Тогда

$$Dx = S^{-1}BSx \Leftrightarrow SDx = BSx \Leftrightarrow D(Sx) = B(Sx) \Leftrightarrow [y = Sx] \Leftrightarrow Dy = By$$

$$y = Sx \Leftrightarrow S^{-1}y = x$$

предположим, что (102) устойчиво, тогда

$$\|y(t, \xi + \Delta\xi) - y(t, \xi)\| = \|y(t, \Delta\xi) - y(t, 0)\| = \|y(t, \Delta\xi)\| = \|Sx(t, \Delta\xi_1)\| \leqslant \|S\| \cdot \|x(t, \Delta\xi_1)\|$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \forall \|\Delta\xi_1\| \leqslant \delta \Rightarrow \|x(t, \Delta\xi_1)\| \leqslant \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{\delta} > 0 \quad \exists \tilde{\delta} > 0 \quad (\tilde{\delta} = \|S\|\, \delta) \quad \forall \Delta\xi, \|\Delta\xi\| \leqslant \tilde{\delta} \Rightarrow \|y(t, \Delta\xi)\| \leqslant \varepsilon \, \|S\|$$

т.е. если система (102) устойчива, то устойчива и система (103). Если к тому же

$$\|x(t, \Delta\xi_1)\| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{то}$$

$$\|y(t, \Delta\xi_1)\| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Если мы поменяем в рассуждениях местами системы (102) и (103), то получим, что из устойчивости (103) следует устойчивость (102),а из асимптотической устойчивость (103) следует асимптотической устойчивость (102).

Критерий Ляпунова Для устойчивости линейной стационарной системы необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех собственных значений матрицы системы были неположительными, причем элементарные делители, соответствующие собственным значениям с нулевой действительной частью, были однократными.

$\diamondsuit$ Рассмотрим блочно-диагональную матрицу A и A яляется жордановой формой:

$$A = \begin{pmatrix} [] & & 0 \\ & [] & \\ 0 & & [] \end{pmatrix}$$

Докажем достаточность: Пусть $Re(\lambda_i) \leqslant 0$, причем, если $Re(\lambda_j) = 0$, то соответствующие элементарные делители однократны. Каждая клетка жордана имеет вид

$$J(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix},$$

тогда

$$e^{J(\lambda_k)(t-s)} = e^{\lambda_k(t-s)}(P_k(t)).$$

Пусть $Re(\lambda_j) = 0$, тогда соответствующие элементарные делители однократны, поэтому $J(\lambda_j) = (\lambda_j)$ и $e^{J(\lambda_j)(t-s)} = (e^{\lambda_j(t-s)})$.

Построим теперь экспоненту матрицы A в предположении, что для неоднократных делителей матрицы A выполнено $Re(\lambda_k) < 0$:

$$e^{A(t-s)}\Delta\xi = \begin{pmatrix} \left[e^{\lambda_j^1(t-s)}\right] & & & & & & \\ & \left[e^{\lambda_j^2(t-s)}\right] & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \left[e^{\lambda_j^k(t-s)}\right] & & & \\ & & & & \left[e^{\lambda_k^1(t-s)}P_k^1(t)\right] & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \left[e^{\lambda_k^d(t-s)}P_k^d(t)\right] \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \Delta\xi_1 \\ \Delta\xi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta\xi_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\left\|e^{\lambda_j(t-s)}\right\| \leqslant 1$$

$$\left\|e^{\lambda_k(t-s)}P_k(t)\right\| = e^{Re\lambda_k(t-s)}\left\|P_k(t)\right\| \quad \text{где} \quad e^{Re\lambda_k(t-s)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

т.е. все элементы ограничены и тогда

$$\exists M \quad \forall t \geqslant S \quad \left\|e^{A(t-s)}\right\| \leqslant M \quad \rho(t, \Delta\xi) \leqslant M\left\|\Delta\xi\right\|$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \frac{\varepsilon}{M} \quad \forall\left\|\Delta\xi\right\| \leqslant \delta \quad \rho(t, \Delta\xi) \leqslant \varepsilon \quad \text{т.е.} \quad (102)\ \text{устойчива}.$$

Докажем необходимость:

От противного. Предположим, что не выполняются условия теоремы, т.е.

$$\exists\lambda_0, \quad Re\lambda_0 > 0 \quad \text{либо} \quad \exists\lambda_1, \quad Re\lambda_1 = 0 \quad \text{по} \quad (\lambda-\lambda_1)^k, k > 1$$

$$e^{A(t-s)}\Delta\xi = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0(t-s)}\begin{pmatrix} 1 & ? & \cdots \\ ? & ? & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} & & \\ & [] & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\xi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0(t-s)}\Delta\xi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|e^{\lambda_0(t-s)}\Delta\xi_1\right| = e^{Re\lambda_0(t-s)}\left|\Delta\xi_1\right| \quad \text{и} \quad [\text{при}\,|\Delta\xi_1| \neq 0] \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

и никак не может быть ограниченна, а это уже противоречит устойчивости.

Второй случай:

$$\exists\lambda_1, \quad Re\lambda_1 = 0 \quad (\lambda-\lambda_1)^k, k > 1$$

$$e^{A(t-s)}\Delta\xi = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-s)}\begin{pmatrix} 1 & t & \cdots \\ \vdots & 1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} & & \\ & [] & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\xi_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-s)}\Delta\xi_2 t \\ e^{\lambda_1(t-s)}\Delta\xi_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\|e^{A(t-s)}\Delta\xi\right\| = \left\|\begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-s)}\Delta\xi_2 t \\ e^{\lambda_1(t-s)}\Delta\xi_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = |\Delta\xi_2|\left\|\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\| \underset{t\to+\infty,\Delta\xi_2\neq 0}{\longrightarrow} \infty$$

А это опять же противоречит условию устойчивости. $\otimes$

Аналогично доказывается и

Критерий Ляпунова асимптотической устойчивости Для асимптотической устойчивости линейной стационарной системы необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех собственных значений матрицы системы были отрицательными.

Поскольку асимптотическая устойчивость определяется только собственными числами матрицы A, т.е. корнями характеристического многочлена, то для систем остаются справедливыми те же самые условия и признаки асимптотической устойчивости, что и для СтЛ (см. с. 39).

Фазовые графики

Фазовая плоскость однородной двумерной системы

Рассмотрим однородную стационарную двумерную систему

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ Dx_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{104}$$

Евклидова плоскость Ox_1x_2 - фазовая плоскость системы (104). Фазовым графиком решения (104) называется кривая $(x_1(t), x_2(t))$. Предполагается, что матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ не является диагональной: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq diag,\ a_{12}^2 + a_{21}^2 \neq 0,\ a_{12} \neq 0.$

Из первого уравнения выражаем x_2 и подставляем во второе:

$$x_2 = \frac{Dx_1 - a_{11}x_1}{a_{12}}$$

$$\frac{D^2x_1 - a_{11}Dx_1}{a_{12}} = a_{21}x_1 + \frac{a_{22}(Dx_1 - a_{11}x_1)}{a_{12}}$$

$$\begin{aligned} &D^2x_1 - (a_{11} + a_{22})\,Dx_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1 = 0 \\ &D^2x_1 - SpA \cdot Dx_1 + \det A \cdot x = 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим систему специального вида

$$\begin{cases} Dx_1 = x_2 \\ Dx_2 = ax_1 + bx_2 \end{cases} \tag{105}$$

Эта система будет преобразована к системе

$$\begin{cases} D^2x_1 - bDx_1 - ax_1 = 0 \\ x_2 = Dx_1 \end{cases} \tag{106}$$

Поэтому фазовый график системы (106), а следовательно и фазовый график системы (105), совпадает с фазовым графиком уравнения

$$D^2x - bDx + ax = 0. \tag{107}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_1(t) \\ y = Dx_1(t) = x_2(t) \end{cases}$$

Лемма. $\forall\, A \neq \lambda E$ существует матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det A & trA \end{pmatrix} = B$ такая, что $A \sim B$.

$\diamondsuit$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - trA \cdot \lambda + \det A = \det(B - \lambda E)$$

если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то элементарные делители A совпадают с элементарными делителями B; если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, то если бы элементарными делителями были $(\lambda - \lambda_0), (\lambda - \lambda_0)$, то матрица имела бы вид $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, т.е. была бы скалярной. Следовательно, всегда элементарные делители матриц A и B совпадают и,значит, эти матрицы подобны. $\otimes$

Таким образом, для любой нескалярной матрицы существует такая невырожденная матрица T, что $A = TBT^{-1}$, где B имеет вид (105). Тогда

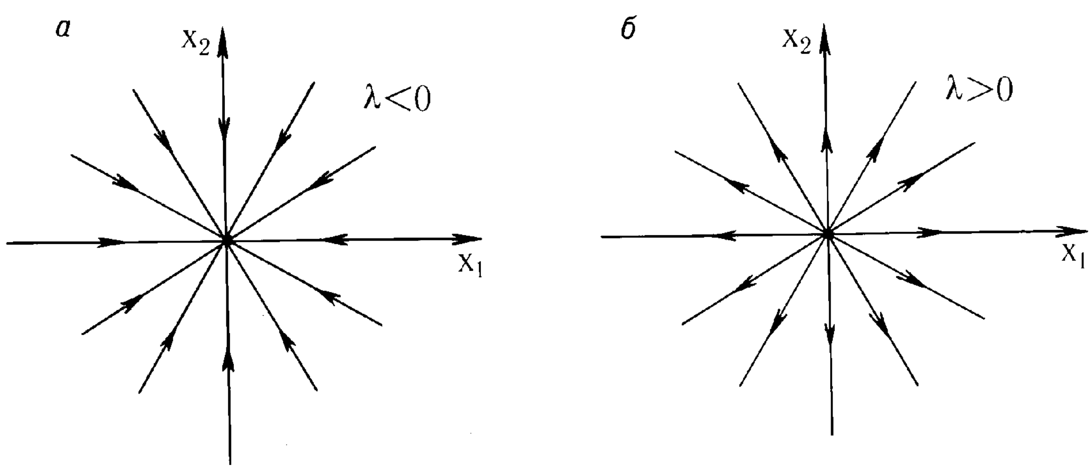
$$\begin{aligned} &Dx = Ax \\ &Dx = TBT^{-1}x \\ &T^{-1}Dx = BT^{-1}x,\ Ty = x \end{aligned}$$

Откуда следует, что фазовые графики системы (104) (в случае не скалярной матрицы A) с точностью до аффинного преобразования совпадают с фазовыми графиками системы вида (105), и, следовательно, с фазовыми графиками соответствующего СтЛ-2.

Пусть теперь матрица A скалярная, т.е.

$$\begin{cases} Dx_1 = \lambda x_1 \\ Dx_2 = \lambda x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = c_1 e^{\lambda t} \\ x_2 = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

При $\lambda \neq 0$, $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ получаем единственную точку покоя $(0,0)$, которая будет дикритическим узлом, так как остальные фазовые тректории будут лучами $c_1x_2 = c_2x_1$.



Если же $\lambda = 0$, то все точки плоскости являются точками покоя, т.е. вся фазовая плоскость — плоскость покоя.

Элементарные уравнения

Основные определения

Дифференциальные уравнения называют элементарными, если его решения могут быть получены в виде элементарных функций или квадратур элементарных функций.

Уравнение
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{108}$$
- уравнение первого порядка в нормальной дифференциальной форме. φ(x,y) задает гладкую кривую без самопересечений, если оно равносильно:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} x, y \text{ - непрерывно дифференцируемы}$$

$$(x(t)')^2 + (y(t)')^2 \neq 0$$

и разным t соответствуют разные точки, за исключением начала и конца. Интегральной дугой уравнения (108) будем называть уравнение кривой, вдоль которой (108) обращается в тождество.

Интегральную дугу уравнения (108), которая не является собственной частью никакой другой части интегрирующей дуги будем называть интегральной кривой.

Соотношение $w(x,y) = 0$ называют интегралом уравнения (108) если оно задает интегральные дуги уравнения.

Интеграл, зависящий от произвольных постоянных называется общим, а интеграл, полученный из общего при конкретных значениях произвольных постоянных называется частным. Решением в явном виде назовем функцию $y = y(x)$, $x \in |a, b|$, если интеграл уравнения можно задать в виде $y - y(x) = 0$. Решением в явном виде может иметь и функцию $x = x(y), y \in |c, d|$. Пару функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} t \in T$$

будем называть решением уравнения в параметрическом виде, если интеграл уравнения можно задать в виде
$$\begin{cases} x - x(t) = 0, \\ y - y(t) = 0. \end{cases} t \in T$$
Соотношение $\omega(x,y) = 0$, неразрешенное относительно x и y, будем называть решением в неявном виде.

Классификация фазовых точек

Евклидову плоскость O_{xy} будем называть фазовой плоскостью. Точка M — точка существования, если через нее проходит по крайней мере одна интегральная кривая. Точку $M = (x_0, y_0)$ назовем особой, если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ в противном случае — неособая. Это значит, что $|P(x_0, y_0)| + |Q(x_0, y_0)| \neq 0$.

Кривые l_1, l_2 — различные в точке M, если в любой окрестности этой точки эти кривые не совпадают. Точка M называется точкой неединственности, если через нее проходят, по крайней мере, две интегральные дуги, различные в этой точке. В противном случае M — точка единственности. Точка неединственности уравнения называется точкой ветвления, если, по крайней мере, две интегральные дуги, проходящие через эту точку и различные в ней имеют общую касательную.

Теорема. Всякая неособая точка неединственности является точкой ветвления.

♢ Пусть $M(x_0, y_0)$ — неособая. Тогда $|P(x_0, y_0)| + |Q(x_0, y_0)| \neq 0$ Предположим, что $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Для любой интегральной дуги, проходящей через Q, угловой коэффициент будет равен $K = -P(x_0, y_0)/Q(x_0, y_0)$.

А так как M - точка неединственности, то существует 2 дуги, проходящие и имеющие общую касательную, то M и будет точкой ветвления. ⊗

Уравнения в полных дифференциалах(УПД)

Уравнение (108) называется УПД, если существует u такая, что $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. УПД $\Leftrightarrow$ $du(x, y) = 0$. l является интегральной дугой, если существует C_l,что соотношение $u(x, y) = C_l$ задает интегральные дуги.

Теорема. Уравнение (108), заданное в односвязной области D является УПД $\Leftrightarrow$ когда выполнены условия Эйлера: $Q'_x = P'_y$ $P, Q \in C(D)$ при этом

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(\xi, \eta)d\xi + Q(\xi, \eta)d\eta = C$$

определяет полное семейство интегралов УПД. Если D не содержит особых точек уравнения (108), то любая точка является точкой существования и единственности.

♢ Первая часть теоремы доказана в курсе математического анализа. Докажем вторую часть. Рассмотрим произвольную точку $(x_0, y_0) \in D$ и рассмотрим

$$u(x, y) = u(x_0, y_0). \tag{109}$$

Будем трактовать это соотношение как ФУ поскольку (x_0, y_0) — неособая, следовательно $|P(x_0, y_0)| + |Q(x_0, y_0)| \neq 0$ Пусть P(x_0, y_0) $\neq$0, тогда в силу теоремы о неявной функции (109) однозначно разрешимо относительно x.

$$x_0 = x(y_0).$$

⊗

Интегрирующий множитель

Рассмотрим уравнение первого порядка в нормальной дифференциальной форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \forall (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \tag{110}$$

Определение. Непрерывная,отличная от нуля функция μ(x,y) называется интегрирующим множителем уравнения (110), если

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0 \tag{111}$$

представляет собой уравнение в полных дифференциалах.

Теорема(об интегрирующем множителе) Пусть функции P и Q - непрерывно дифференцируемые на D и $\mu \in C^1(D)$, $\mu \neq 0$ $\forall(x,y)\in D$, тогда, для того, чтобы функция μ была интегрирующим множителем уравнения (110), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial y}P - \frac{\partial \ln|\mu|}{\partial x}Q = Q'_x - P'_y \quad \forall(x,y)\in D \tag{112}$$

$\Diamond$ μ - интегрирующий множитель $\Longleftrightarrow$ μPdx + μQdy - уравнение в полных дифференциалах $\Longleftrightarrow (\mu Q)'_x = (\mu P)'_y \Longleftrightarrow \mu'_x Q + \mu Q'_x = \mu'_y P + \mu P'_y \overset{\mu\neq 0}{\Longleftrightarrow} Q'_x - P'_y = \frac{\mu'_y}{\mu}P - \frac{\mu'_x}{\mu}Q \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\mu'_x}{\mu} \\ \frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\mu'_y}{\mu} \end{array}\right.$ $\Longleftrightarrow$ (112) $\otimes$

Рассмотрим уравнение (110). Рассмотрим случай когда $\mu = \mu(x)$. Тогда из (112) $\Rightarrow$ $-\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}Q = Q'_x - P'_y \Longleftrightarrow \frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{Q'_x - P'_y}{-Q} \overset{\mu=\mu(x)}{\Longleftrightarrow}$

$$\frac{Q'_x - P'_y}{-Q} = \varphi(x) \tag{113}$$

$\Rightarrow$ интегрирующий множитель зависит от x тогда и только тогда, когда соотношение (113) зависит только от x. $\frac{\partial \ln\mu(x)}{\partial x} = \varphi(x) \Rightarrow \ln\mu(x) = \int\varphi(x)dx$, а тогда $\mu(x) = e^{\int_s^x \varphi(t)dt}$, где s - любое.

Пусть теперь $\mu = \mu(y)$. Тогда $\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{Q'_x - P'_y}{P} \Longleftrightarrow \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \psi(y)$. А тогда $\mu(y) = e^{\int_s^y \psi(t)dt}$, где s - любое.

Рассмотрим случай, когда $\mu = \mu(\omega(x,y))$. Тогда $\frac{\mu'_y}{\mu}P - \frac{\mu'_x}{\mu}Q = Q'_x - P'_y \Longleftrightarrow \frac{\mu'_\omega \omega'_y}{\mu}P - \frac{\mu'_\omega \omega'_x}{\mu}Q = Q'_x - P'_y \Longleftrightarrow \frac{\mu'_\omega}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{\omega'_y P - \omega'_x Q} \Longleftrightarrow \frac{\partial \ln\mu(\omega)}{\partial\omega} = \frac{Q'_x - P'_y}{\omega'_y P - \omega'_x Q} = f(\omega)$. Тогда $\mu(\omega) = e^{\int_s^\omega f(t)dt}$, где s - любое.

Начальная задача для уравнения первого порядка в нормальной дифференциальной форме

Рассмотрим (110), где x,y - равноправные переменные. Найдем решение уравнения (110) такое, что $(x(s),y(s))=(x_0,y_0)$ в момент времени s в точке (x_0,y_0). Геометрическая постановка данной задачи: найти интегральную кривую уравнения (110) проходящую через точку $M(x_0,y_0)$.

Если (110) - уравнение в полных дифференциалах, то начальная задача этого уравнения имеет единственное решение (в любой неособой точке), более того, решение записывается в виде:

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(\xi,\eta)d\xi + Q(\xi,\eta)d\eta = 0.$$

dU(x,y)=Pdx+Qdy. U(x,y) = c - дает общее решение или общий интеграл, $U(x_0,y_0) = c_0$. Тогда получаем, что $U(x,y) = c_0 \Rightarrow U(x,y) = U(x_0,y_0) \Rightarrow U(x,y) - U(x_0,y_0) = 0$.

Уравнение с разделенными и разделяющимися переменными

Уравнение вида:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \quad P \in C(|a,b|), Q \in C(|c,d|) \tag{114}$$

называется уравнением с разделенными переменными. Очевидно, что уравнение (114) - уравнение в полных дифференциалах. Поэтому в силу Теоремы об уравнении в полных дифференциалах получаем:

$$\int_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(\eta)d\eta = C,$$

где $x_0,\, x \in |a,b|,\, y_0,\, y \in |c,d|$.

Пример. $xdx + ydy = 0\ x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}$.

$x^2 + y^2 =$ c >0 - полное решение (все интегральные кривые могут быть найдены по этой формуле). В качестве (x_0,y_0) возьмем x_0=y_0=0.

Уравнение вида:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \tag{115}$$

где $P_1(x), P_2(x) \in (|a,b|), Q_1(y), Q_2(y) \in C(|c,d|)$, называется уравнением с разделяющимися переменными. Данное уравнение задано в прямоугольнике.

Рассмотрим корни x_i,y_j такие, что $P_2(x)$=0,$Q_1(y)$=0 и, рассмотрим прямоугольники свободные от этих корней. На этих прямоугольниках уравнение имеет интегрирующий множитель $\mu(x,y) = \dfrac{1}{P_2(x)Q_1 y}$.

Действительно,

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0,$$

т.е. на каждом таком прямоугольнике мы получаем уравнение с разделенными переменными $\Rightarrow$ решением уравнения (115) является следующего уравнения:

$$\int_{x_0^i}^{x^i} \frac{P_1(\xi)}{P_2(\xi)}d\xi + \int_{y_0^j}^{y^j} \frac{Q_2(\xi)}{Q_1(\eta)}d\eta = c,$$

где $x_0^i, x^i \in]x_i, x_{i+1}[, \quad y_0^j, y^j \in]y_j, y_{j+1}[$. Но кроме этих решений интегральными кривыми являются решения

$$\left[\begin{array}{l} x = x_i \\ y = y_j \end{array}\right.$$

Поэтому добавим и эти решения.

Все эти решения, а также составные интегральные кривые, если они появятся, определяют полное решение уравнения.

Пример. $y^{2/3}$dx-1/3dy = 0 $\quad D = \mathbb{R}^2$,x$\in \mathbb{R}$,y$\in \mathbb{R}$

Нас интересуют корни функции $y^{2/3}$=0 $\Rightarrow$ y_1=0.

Рассмотрим прямоугольник $\Pi_1 = \{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y > 0\} : dx - 1/3y^{-2/3}dy = 0$. Получим $x - y^{1/3} = c$, т.е. $y = (x-c)^3$

Теперь рассмотрим $\Pi_2 = \{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y < 0\} : dx - 1/3y^{-2/3}dy = 0$. Получим $x - y^{1/3} = c_1$, т.е. $y = (x-c_1)^3$

В итоге получим совокупность: $\left[\begin{array}{l} y = (x-C)^3, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y = 0. \end{array}\right.$

Линейные и приводящиеся к ним уравнения

Линейное уравнение 1-го порядка

Уравнение
$$(p(x)+q(x)y)d(x)+r(x)d(y)=0, \quad p,q,r \in C(|a,b|) \tag{116}$$
называется линейным уравнением 1-го порядка относительно y.

Пусть x_i — корни уравнения $r(x)=0$; рассмотрим интервал (x_i,x_{i+1}). Будем искать интегрирующий множитель для (116) на этом интервале, зависящий только от x:

$$\mu=\mu(x)$$

$$\frac{r'(x)-q(x)}{-r(x)}=\omega=\frac{d\ln\mu}{dx}$$

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{r'(x)}{r(x)}dx-\int\frac{q(x)}{r(x)}dx}=$$

$$=e^{-\ln|r(x)|}*e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{q(x)}{r(x)}dx}=\frac{1}{|r(x)|}e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{q(x)}{r(x)}dx},$$

$$x_0\in(x_i,x_{i+1})$$

$$\mu(x)=\frac{1}{r(x)}e^{\int\limits_{x_0}^{x}\frac{q(x)}{r(x)}dx}, x\in(x_i,x_{i+1})$$

Тогда уравнение
$$\mu(x)(p(x)+q(x)y)dx+\mu(x)r(x)dy=0$$
— уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя которое, получим

$$\begin{cases} u(x,y)=C, \quad (x,y)\in(x_i,x_{i+1})\times\mathbb{R} \\ x=x_i \end{cases}$$

Остается дополнить эти решения составными решениями, если они существуют.

Если (x_0,y_0) — неособая точка уравнения

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

то можно из уравнения в нормальной дифференциальной форме получить уравнение в производных:

$$Q(x_0,y_0)\neq 0, \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad y'=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

или

$$P(x_0, y_0) \neq 0, \quad x' = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

Общее решение уравнения в производных

$$y' = P(x)y + Q(x), \quad x \in |a,b|, \tag{117}$$

имеет вид

$$y(x) = e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}(C + \int\limits_{x_0}^{x} Q(\delta)\, e^{\int\limits_{x_0}^{\delta} p(\tau)d\tau} d\delta), \quad x_0 \in |a,b|. \tag{118}$$

Если функция y должна удовлетворять начальному условию $y(x_0) = y_0$, то в (118) надо положить $C = y_0$.

Формулу (118) можно получить с помощью метода Лагранжа (метода вариации произвольной постоянной).

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (117):

$$y' = P(x)y, \quad x \in |a,b|. \tag{119}$$

Тогда его общее решение имеет вид

$$y_{oo}(x) = C\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}, x_0 \in |a,b|.$$

Будем искать частное решение уравнения (117) в виде

$$y_{\text{чн}} = u(x)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau},$$

Подставляя в (117), получим

$$u'(x)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} + u\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} P(x) = u\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} P(x) + Q(x),$$

откуда

$$Q(x)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} = u'(x)$$

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} Q(\delta)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{\delta} P(\tau)d\tau} d\delta$$

Так как $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$, то и получим формулу (118).

Пример. $(-y - x^2)dx + xdy = 0$, $y \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Делим на x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y + x$$

$$y(x) = e^{\int\limits_{1}^{x} \frac{1}{\tau} d\tau}(C + \int\limits_{1}^{x} \delta\, e^{-\int\limits_{1}^{\delta} \frac{1}{\tau} d\tau} d\delta) = e^{\ln x}(C + \int\limits_{1}^{x} \delta\, e^{-\ln\delta} d\delta) = x(C + x - 1) = x(C_1 + x)$$

$$y = x^2 + C_1 x$$

Если бы $x \geqslant 0$, к полученному решению надо было бы добавить решение $x = 0$ и проверить наличие составных решений.

Однородные уравнения 1-го порядка

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется однородной функцией степени однородности k, если

$$f(\iota x_1, ..., \iota x_n) = \iota^k f(x_1, ..., x_n)$$

Например,

$$f(x,y,z) = x + y + z, \quad k = 1;$$
$$f(x,y) = \frac{x}{y}, \quad f(\iota x, \iota y) = \frac{\iota x}{\iota y} = \frac{x}{y}, \quad k = 0.$$

Дифференциальное уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{120}$$

называется однородным уравнением 1-го порядка если P и Q — однородные одной и той же степени однородности. Сделаем в (120) замену

$$\begin{cases} x = x \\ y = u(x)x, \end{cases}$$

где u — новая функция. Тогда

$$P(x,ux)dx + Q(x,ux)(udx + xdu) = 0$$
$$x^k(P(1,u)dx + Q(1,u)(udx + xdu)) = 0$$
$$x^k((P(1,u) + Q(1,u)u)dx + (Q(1,u)xdu) = 0$$

Если $k > 0$, то $x = 0$ — решение. сокращая на x^k, получаем

$$(P(1,U) + Q(1,U)u)dx + Q(1,u)xdu = 0$$

и решаем как линейное относительно , или как уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение в производных

$$y' = f(x,y)$$

называется однородным, если f — однородная функция нулевой степени однородности. Замена та же.

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$(p(x)y + q(x)y^m)dx + r(x)dy = 0 \qquad p, q, r \in C(|a,b|) \tag{121}$$

При $m = 0$ — это линейное уравнение; при $m = 1$ — уравнение с разделяющимися коэффициентами.

Для всех остальных случаев с помощью замены $y = u^{\frac{1}{1-m}}$ уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению:

$$(pu^{\frac{1}{1-m}} + qu^{\frac{m}{1-m}})dx + r\frac{1}{1-m}u^{\frac{m}{1-m}}du = 0$$

$$u^{\frac{m}{1-m}}((pu+q)dx + r\frac{1}{1-m}du) = 0$$

Является ли $u = 0$ решением зависит от m.

Рассмотрим случай $r \neq 0$, тогда, разделив на $r(x)$, уравнение (121) можно записать как уравнение, разрешенное относительно y':

$$y' = P(x)y + Q(x)y^m.$$

Разделив на y^m, получим уравнение

$$\frac{1}{y^m}y' = P(x)\frac{1}{y^{m-1}} + Q(x),$$

которое после замены $u(x) = \dfrac{1}{y^{m-1}(x)}$ становится линейным относительно u.

Общее, особое и побочные решения

Побочные решения и доопределение общего решения. Допустим, что в результате формальных действий над уравнением

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \quad (x,y) \in E, \tag{122}$$

где коэффициенты P и Q определены в области E плоскости Oxy, получено соотношение

$$\Phi(x,y,C) = 0, \tag{123}$$

которое, возможно, описывает общее решение уравнения (122). Корректировка этого соотношения состоит в исключении *побочных решений,* т.е. решений уравнения (123), которые не являются решениями уравнения (122), и в восстановлении потерянных решений с тем, чтобы на E или на некотором подмножестве E получить полное решение уравнения (122). Пусть E_Φ — проекция множества задания $G \subset Oxyz$ функции $\Phi(x,y,z)$ на плоскость Oxy, а K_Φ — множество линий, определяемых соотношением (123) при всевозможных допустимых значениях параметра C. Линии уравнения (123), расположенные хотя бы частично вне множества $E_1 = E_\Phi \cap E$, отвечают побочным решениям.

Пример. Соотношение $x^2+y^2=C>0$ задает не только полуокружности $x^2+y^2=C>0$, $y>0$, являющиеся истинными решениями уравнения $x/\sqrt{y}dx + \sqrt{y}dy = 0$, но и побочные решения — полные окружности $x^2+y^2=C>0$.

Побочные решения, отвечающие линиям, расположенным в E_1, исключаются на основании следующей теоремы: *Пусть функция $\omega(x,y)$ непрерывно дифференцируема в области $E_1 \subset E$ и производные ω'_x ω'_y одновременно обращаются в нуль разве лишь в особых точках уравнения (122). Тогда линия K, определяемая соотношением*

$$\omega(x,y) = 0 \tag{124}$$

является линией уравнения (122) в том и только в том случае, если

$$\begin{vmatrix} P(x,y) & Q(x,y) \\ \omega'_x(x,y) & \omega'_y(x,y) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall\,(x,y) \in K. \tag{125}$$

Действительно, если предположить, что функция Φ непрерывно дифференцируема по (x,y), то (см. условие (125)) решение (123) при $C = C_0$ является решением уравнения (122), если выполняются соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(x,y,C_0) = 0, \\ \begin{vmatrix} P(x,y) & Q(x,y) \\ \Phi'_x(x,y,C_0) & \Phi'_y(x,y,C_0) \end{vmatrix} = 0. \end{array} \right. \tag{126}$$

Линии, которые удовлетворяют первому из соотношений (126), но не удовлетворяют второму — побочные решения уравнения (122).

Пример. Допустим, что при формальном интегрировании уравнения $dx + dy/(2y) = 0$, $y>0$, проведены операции

$$\int dx + \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = C \quad \Longrightarrow \quad x + \sqrt{y} = C \quad \Longrightarrow \quad y = (C-x)^2.$$

Для исследования соотношения $y = (C - x)^2$ составляем систему вида (126)

$$\begin{cases} y - (C - x)^2 = 0, \\ \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \\ 2(C - x) & 1 \end{vmatrix} = 1 - (C - x)/\sqrt{y} = 0, \end{cases}$$

из которой заключаем, что соотношение $\sqrt{y} = x - C$ определяет побочное решение.

Допустим, что в результате формального преобразования соотношения (123) получено соотношение

$$\Phi_1(x, y, \gamma) = 0, \tag{127}$$

где γ — новая произвольная постоянная. Может случиться, что при формальном интегрировании уравнения (122), приведшем к соотношению (123), были допущены погрешности, компенсированные погрешностями перехода от (123) к (127). В этом случае соотношение (127) определяет решения уравнения (122), которые не содержатся в семействе линий, определяемых соотношением (123), что позволяет восстановить потерянные решения.

Пример. Уравнение $ydx - xdy = 0$ имеет общее решение в неявном виде $y - Cx = 0$. Положим $C = 1/\gamma$. После формальных преобразований получим общее решение $x - \gamma y = 0$, которое сравнительно с исходным общим решением содержит дополнительное решение $x = 0$, получаемое при $\gamma = 0$. В этой ситуации говорят, что общее решение $y - Cx = 0$ доставляет решение $x = 0$ при $C = \infty$.

Особые решения. Скажем, что соотношение (123) определяет общее решение уравнения (122) на множестве E_1, если линии, заданные этим соотношением, являются линиями уравнения (122), причем через каждую точку множества E_1 проходит хотя бы одна такая линия.

Лемма. *Если соотношение (123) определяет общее решение уравнения (122) на множестве E_1 и если путь $\mathcal{K}$, расположенный в E_1, в каждой своей неособой точке касается линии из указанного общего решения, которая проходит через соответствующую точку M, то $\mathcal{K}$ — путь уравнения (122).*

$\diamondsuit$ По условию касательная к пути $\mathcal{K}$ в каждой точке M одновременно с линией общего решения, которая проходит через M, имеет наклон, предписанный полем наклонов $\varkappa$ уравнения (122). Путь $\mathcal{K}$ оказывается, таким образом, характеристикой поля $\varkappa$ и является поэтому путем уравнения (122). $\otimes$

Линия $K^* \subset E_1$ называется *огибающей семейства линий* из общего решения (123) на E_1, если существует представление $\mathcal{K}^*$ этой линии такое, что путь $\mathcal{K}^*$ в каждой неособой точке M уравнения касается линии из общего решения, проходящей через M, но не совпадает ни с одной линией из общего решения на промежутке (ненулевой длины) изменения параметра t. На основании леммы огибающая семейства линий уравнения (122) сама является линией этого уравнения.

Решение в неявном виде $\omega(x, y) = 0$ уравнения (122) назовем *особым* для общего решения (123), если линия K^*, изображающая это решение, является огибающей семейства линий (123).

Теорема. Пусть функция $\Phi(x, y, z)$ непрерывно дифференцируема по (x, y, z) и пусть соотношение $\Phi(x, y, z) = 0$ определяет на E_1 непрерывно дифференцируемую функцию $z = z(x, y)$ с промежутком значений Γ. Если общее решение в неявной форме $\Phi(x, y, C) = 0$ каждому значению C из Γ сопоставляет одну единственную линию уравнения (122), то все особые решения для общего решения (123) содержатся среди линий, определяемых системой соотношений

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C)=0, \\ \Phi'_C(x,y,C)=0. \end{cases}$$

Пример. Соотношение $\Phi(x,y,C)=y-(x-C)^3$ дает общее решение в неявной форме уравнения $y^{2/3}dx-dy/3=0$. На основании указанной выше теоремы особым решением может быть только линия, вдоль которой выполняются условия

$$\begin{cases} y-(x-C)^3=0, \\ 3(x-C)^2=0, \end{cases}$$

т.е. прямая $y=0$. Из схемы расположения линий рассматриваемого уравнения следует, что ось абсцисс действительно состоит из точек ветвления и является особым решением.

Пример. Предположим, что цилиндрическая поверхность малой высоты освещена точечным источником света, который расположен в плоскости П, перпендикулярной к образующей цилиндра. Найти уравнение направляющей для случая, когда освещенность всех точек поверхности цилиндра равна E_0 (линии равной освещенности).

◇ Полярную систему координат на плоскости П выберем таким образом, чтобы ее полюс совпал с источником света. Так как источник света точечный, то освещенность произвольной элементарной площадки цилиндрической поверхности может быть найдена по формуле $E=I\dfrac{(\vec{n},\vec{R})}{R^3n}$, где I — сила света; $\vec{R}$ — радиус – вектор, проведенный из источника света к освещаемой элементарной площадке; $\vec{n}$ — нормальный к площадке вектор ; $R=|\vec{R}|$, $n=|\vec{n}|$. В силу малости высоты цилиндра считаем, что равноосвещенность его поверхности тождественна равноосвещенности образующей цилиндра, лежащей в плоскости П. Поэтому можно считать, что $\vec{R}$ — радиус-вектор, проведенный из источника света к образующей, а $\vec{n}$ — нормальный к образующей вектор. Если $R=R(\varphi)$ — уравнение образующей в полярной системе координат, то$\vec{n}=(R'\sin\varphi+R\cos\varphi, R\sin\varphi-R'\cos\varphi)$, $n=\sqrt{R^2+R'^2}$. По условию $E=E_0$ и, следовательно, дифференциальное уравнение, задающее искомую образующую, имеет вид $E_0=I\dfrac{R^2}{R^3\sqrt{R^2+R'^2}}$. После соответствующих преобразований получаем уравнение с разделяющимися переменными$\dfrac{dR}{d\varphi}=\sqrt{\dfrac{I^2}{R^2}-R^2}$, интегрируя которое, находим общее решение

$$R^2=\frac{I}{E_0}\sin(2\varphi+C), \tag{128}$$

где C — произвольная постоянная. Следовательно, образующими искомых цилиндрических поверхностей, все точки которых равноосвещены, являются лемнискаты. Однако, кроме общего решения (128), полученное дифференциальное уравнение имеет особое решение, которое найдем, исключив параметр C из системы

$$\begin{cases} R^2-\dfrac{I}{E_0}\sin(2\varphi+C)=0, \\ \dfrac{I}{E_0}\cos(2\varphi+C)=0. \end{cases}$$

В результате получим соотношение $R^2 = I/E_0$, которое задает окружность радиусом $\sqrt{I/E_0}$. Эта окружность является огибающей семейства лемнискат (128), поэтому функция $R^2 = I/E_0$ — особое решение.

Составные решения. Допустим, что соотношение (123) определяет общее решение в неявной форме уравнения (122), а соотношение

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{129}$$

дает особое решение. Пусть L_0 — совокупность линий, определяемых соотношениями (123) и (129). Каждая линия из L_0 является характеристикой поля наклонов $\varkappa$ уравнения (122). Если две различные линии из L_0 имеют общую касательную в общей точке M, то из частей этих линий можно составить новую линию, которая будет характеристикой поля $\varkappa$, т.е. линией уравнения (122). Соответствующее решение назовем *составным*. Пополнив L_0 всевозможными составными решениями, получим семейство решений L_1, на основе которого описанным только что способом можно построить новое семейство решений L_2. Продолжив этот процесс, получим совокупность расширяющихся семейств решений, которая приводит к полному семейству решений на рассматриваемой части плоскости.

Пример. Помимо парабол $y = Cx^2$ уравнение $2ydx - xdy = 0$ имеет в качестве своих линий всевозможные составные линии $y = Cx^2$ при $x \leqslant 0$ и $y = C1x^2$ при $x \geqslant 0$.

Пример. Уравнение из примера кроме линий из общего решения и особого решения имеет составные решения, в частности

$$y = \begin{cases} (x+1)^3, & x < -1, \\ 0, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-1)^3 & x > 1. \end{cases}$$

Специальные дифференциальные уравнения

Уравнение Риккати

Неполные уравнения 1-ого порядка.

1)Уравнения без явного вхождения аргумента: F(y,y')=0.

Подбираем пару функций y = ψ(t) и y = ω(t) так чтобы : F (ψ(t), ω(t)) $\equiv$ 0. И если такая пара найдена, то проблем нет: dψ(t) = ω(t) dx $\Rightarrow$ dx = $\frac{\psi'(t)}{\omega(t)}$ dt $\Rightarrow$ x(t) = $\int \frac{\psi'(t)}{\omega(t0}dt$.

Тогда решение имеет вид: $\begin{cases} x = \int \frac{\psi'(t)}{\omega(t)}dt \\ y = \psi(t) \end{cases}$

Пример. $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = 2$

$1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. А мы сделаем гиперболическую замену: y'= sh t

$\sqrt{1+y'^2}$ =ch t; $\begin{cases} y' = sh\, t \\ y = 2ch\, t \end{cases}$

Одна функция подобралась, вторая нашлась: dy = y'dx. Инвариантность формы I дифференциала.

2sh t dt = sh t dx; 2 dt = dx; x =2t + c

$\begin{cases} x \; = \; 2t \; + \; c \\ y \; = \; 2ch\, t \end{cases}$ Можновыразитьвявномвиде :y = 2ch$\frac{x-c}{2}$

Ещё надо рассмотреть случай $y' = 0$ (мы ведь сокращали).

Отсюда $y = c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{c_1}{2} = 2 \Rightarrow$ y = 2 - дополнительное решение.

Ответ $\left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 2ch\frac{x-c}{2} \end{array} \right.$ + составные интегральные дуги (если они существуют).

2) Уравнение без явного вхождения неизвестной функции.

F($\varphi(t), \omega(t)$) $\equiv$0

dy = y'dx $\Rightarrow$ dy = $\omega(t)\varphi'(t)dt$; y = $\int \omega(t)\varphi'(t)dt$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \omega(t)\varphi'(t)dt \end{cases}$$

Пример. x$y'^3 = 1 + y'$

y' =t; x = $\frac{1+t}{t^3}$; (одну функцию берем, как вздумается, а вторую — как получится)

dy = d($\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2}$) = (-3t^{-3} - 2t$t^{-2}$)dt = $\frac{3}{2}t^{-2} + 2t^{-1} + C$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}t^{-2} + 2t^{-1} + C \\ x = \frac{1+t}{t^3} \end{cases}$$

3)Уравнение, которое не содержит ни x, ни y: F(y')=0.

$y' = \alpha \quad \Rightarrow$y = $\alpha x + C$ (если бы мы знали α)

Уравнение F(α)=0 имеет конечное число корней на каждом отрезке из множества задания. Пусть α_k - эти корни (их счётное количество).

$y' = \alpha_k \quad \Rightarrow$y = α_kx + c $\Rightarrow \quad \alpha_k = \frac{y-c}{x}$

F(α_k) = 0 $\Leftrightarrow$F($\frac{y-c}{x}$) = 0 – общее решение этого уравнения в неявном виде.

Условие: Все корни функции F являются изолированными.

Голоморфные функции – функции, которые разлагаются в ряд Тейлора:

f(x) = $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

f(x) - бесконечно дифференцируема. Может ли она быть не представима своим рядом Тейлора. – Может.

f(x) = $\begin{cases} 0, \ x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, x \ \neq 0 \end{cases}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} x^k \to 0, \ f(x) \neq 0$$

Теорема. Нули голоморфной функции изолированы.

Пример.

$$y'^3 - 7y' + 6 = 0$$

Общее решение: $(\frac{y-c}{x})^3 - 7(\frac{y-c}{x}) + 6 = 0$

Можно было иначе: $\alpha^3 - 7\alpha + 6 = 0 \Rightarrow \quad \alpha = 1 \ \alpha = 2 \quad \alpha = -3$

Отсюда y = x +C; y = 2x + C; y=-3x+C (3 решения)

Уравнения высших порядков

Понижение порядка уравнения

Рассмотрим уравнение n-го порядка

$$F(\lambda, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{130}$$

Цель – понизить порядок уравнения.

1) **Уравнение, не содержащее искомой функции и ее $m-1$ производной**:

$$F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, ..., y^{(n)}) = 0. \tag{131}$$

Делаем подстановку:

$$z(x) = y^{(m)}(x) \quad z'(x) = y^{(m+1)} \quad z^{(n-m)}(x) = y^{(n)}$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$F(x, z, z', ..., z^{(n-m)}) = 0.$$

Если мы построили решение этого уравнения $z = \varphi(x, c_1, ..., c_{(n-m)})$, то решения исходного уравнения (131) — решение простейшего уравнения:

$$y^{(m)} = \varphi(x, c_1, ..., c_{(n-m)}),$$

решая которое, получим

$$y = f(x_1, c_1, ..., c_{(n-m)}, A_1, ..., A_m).$$

Пример. $xy'' + xy' = y'$

$$y' = z(x), \quad y'' = z'$$

Получим уравнение Бернулли

$$xz' + xz^2 = z.$$

2) **Уравнение, не содержащее аргумента**:

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{132}$$

Замена

$$y'(x) = z(y), \quad y''(x) = z'(y) = z'_y \cdot y'_x = z'_y \cdot z,$$

и так далее. Тогда, если

$$y^{(k)} = f_k(z, ..., z^{(k-1)}),$$

то

$$y^{(k+1)} = f_{k+1}(z, ..., z^{(k)}),$$

т.е. в конечном счете мы получим уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$\Phi(y, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$$

Пусть $z(y) = g(y, C_1, ..., C_{n-1})$ — решение этого уравнение. Тогда для получения решения уравнения (132) нам необходимо еще решить уравнение с разделяющимися переменными $y'(x) = g(y, C_1, ..., C - n - 1)$.

3) **Уравнение в точных производных:**

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{133}$$

если

$$\frac{d\Phi(x,\ y,\ y',\ ...,\ y^{(n-1)})}{dx} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}).$$

Тогда (133) $\Leftrightarrow$ $\Phi(x,\ y,\ y',\ ...,\ y^{(n-1)}) = \mathrm{C}$

Пример: $y(y') + x(y')^2 + x(y')(y'') = 0$.

Это уравнение равносильно уравнению $(xy(y'))' = 0$.

Получаем уравнение $xy(y') = C$ — уравнение с разделяющимися переменными.

4) **Уравнение однородное относительно искомой функции и ее производных**:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{134}$$

если функция F такова, что

$$F(x, ty_0, ty_1, \ldots, ty_n) = t^\mu F(x, y_0, y_1, \ldots, y_n).$$

В этом случае делается подстановка $y' = yz(x)$. Получаем

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z') = yf_2(z, z'),$$

$$y^{(3)} = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'') = yf_3(z, z', z''),$$

и так далее. Тогда

$$y^{(k)} = yf_k(z, z)', \ldots, z^{(k-1)}).$$

Поэтому уравнение (134) переходит в уравнение

$$F(x, y, yz, yf_2(z, z'), \ldots, yf_n(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) =$$

$$== y^\mu F(x, 1, z, f_2(z, z'), \ldots, f_n(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = y^\mu F_1(x, z, \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Сокращая на $y \neq 0$, получим уравнение, порядок которого на 1 меньше.

5) **Однородное уравнение**:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{135}$$

если F обладает свойством:

$$F(x, \lambda y_0, \lambda^0 y_1, \lambda^{-1} y_2 \ldots, \lambda^{-n+1} y_n) = \lambda^\mu F(x, y_0, y_1, \ldots, y_n).$$

Делаем подстановку $t = \ln x$, $z = \dfrac{y}{x}$. Тогда

$$y' = (z(t)x)'_x = z'_t \frac{1}{x} x + z = z'_t + z;$$

$$y'' = (z'_t + z)'_x = z''_{t^2} \frac{1}{x} + z'_t \frac{1}{x} = (z'' + z')e^{-t};$$

...

$$y^{(k)} = f_k(z, z', \ldots, z^{(k)}) e^{(-k+1)\, t};$$

Тогда уравнение (135) переходит в уравнение

$$F(e^t, ze^t, f_1(z, z'), f_2(z, z', z'')e^{-t}, \ldots, f_n(z, z', \ldots, z^{(n)})e^{(-n+1)\, t}) =$$
$$= e^{\mu\, t} F(1, z, f_1(z, z'), f_2(z, z', z''), \ldots, f_n(z, z', \ldots, z^{(n)})) = 0;$$

В таком уравнении нет явного вхождения аргумента, поэтому порядок уравнения можно понизить.

Уравнение Эйлера

Приведение уравнения Эйлера к стационарному линейному уравнению

$$(t-\alpha)^n D^n x + a_{n-1}(t-\alpha)^{n-1}D^{n-1}x + ... + a_1(t-\alpha)Dx + a_0 x = f(t), \qquad (136)$$

$\alpha, a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ — постоянные, $t \in I_+, I_- \subset \mathbb{R}\ I_+ = (\alpha, +\infty) \quad I_- = (-\infty, \alpha), f \in C(I_\pm)$, α называется особой точкой уравнения Эйлера. Разделив на $(t-\alpha)^n$, получим

$$D^n x + \frac{a_{n-1}}{t-\alpha}D^{n-1}x + ... + \frac{a_0}{(t-\alpha)^n}x = \frac{f(t)}{(t-\alpha)^n}$$

Сделаем замену: $\tau = \ln|t-\alpha|$

$$\begin{cases} t \in I_+ \Longrightarrow^{\tau=\ln(t-\alpha)} \tau \in (-\infty, +\infty) \\ t \in I_- \Longrightarrow^{\tau=\ln(\alpha-t)} \tau \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

$$t = \alpha \pm e^\tau \qquad +\text{, если } t \in I_+ \quad -\text{, если } t \in I_-$$

Обозначим

$$D_\tau = \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{d(\alpha \pm e^\tau)}{d\tau}D = \pm e^\tau D = (t-\alpha)D$$

$$D_\tau = (t-\alpha)D$$

$$D_\tau^0 = D^0$$

Лемма (о связи операторов дифференцирования) Имеет место следующее равенство:

$$(t-\alpha)^k D^k = D_\tau^k + A_{k,k-1}D_\tau^{k-1} + ... + A_{k1} + A_{k0} \qquad (137)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \quad A_{ki} \text{ - постоянные}$$

$\Diamond$

Пусть (137) выполняется для $k = m$

$$(t-\alpha)^m D^m = D_\tau^m + A_{m,m-1}D_\tau^{m-1} + ... + A_{m1}D_\tau + A_{m0}$$

$$D_\tau : \quad (t-\alpha)D((t-\alpha)^m D^m) = D_\tau^{m+1} + A_{m,m-1}D_\tau^m + ... + A_{m0}D_\tau$$

$$(t-\alpha)^{m+1}D^{m+1} + m(t-\alpha)^m D^m = D_\tau^{m+1} + A_{m,m-1}D_\tau^m + ... + A_{m0}D_\tau$$

$$(t-\alpha)^{m+1}D^{m+1} = D_\tau^{m+1} + (A_{m,m-1} - m)D_\tau^m + (A_{m,m-2} - mA_{m,m-1})D_\tau^{m-1} + ... +$$

$$+ (A_{m0} - mA_{m1})D_\tau - mA_{m0}D_\tau^0$$

$$(t-\alpha)^{m+1}D^{m+1} = D_\tau^{m+1} + A_{m+1,m}D_\tau^m + ... + A_{m+1,1}D_\tau + A_{m+1,0}D_\tau^0$$

По индукции (137) верно для всех $k \in \mathbb{N}_0$.

$\otimes$

Теорема (о приведении уравнения Эйлера к Ст-Л) Любое уравнение Эйлера (136) с помощью замены $\tau = \ln|t-\alpha|$ приводится к виду

$$D_\tau^n x + b_{n-1} D_\tau^{n-1} x + ... + b_0 x = g(\tau) \tag{138}$$

$$g(\tau) = f(\alpha \pm e^\tau)$$

$\Diamond$ Следует непосредственно из предыдущей леммы:

$$(t-\alpha)^k D^k x = D_\tau^k x + A_{k,k-1} D_\tau^{k-1} x + ... + A_{k0} x$$
$$f(t) \to f(\alpha \pm e^\tau) = g(\tau)$$

$\otimes$

Рассмотрим однородное уравнение Эйлера

$$(t-\alpha)^n D^n x + a_{n-1}(t-\alpha)^{n-1} D^{n-1} x + ... + a_1(t-\alpha) Dx + a_0 x = 0 \tag{139}$$

Однородное уравнение Эйлера переходит в однородной СтЛОД

$$D_\tau^n x + b_{n-1} D_\tau^{n-1} x + ... + b_0 x = 0, \tag{140}$$

характеристическим уравнение которого является

$$\nu^n + b_{n-1}\nu^{n-1} + ... + b_0 = 0. \tag{141}$$

Уравнение (141) можно получить из (140), полагая

$$x := e^{\nu\tau} \quad D^k x = D^k(e^{\nu\tau}) = \nu^k e^{\nu\tau}$$

Так как

$$e^\tau = t - \alpha \quad \to \quad e^{\nu\tau} = (t-\alpha)^\nu = x.$$

то из (139) получим

$$\nu(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-n+1)(t-\alpha)^n(t-\alpha)^{\nu-n} + a_{n-1}\nu(\nu-1)...(\nu-n+2)(t-\alpha)^{n-1}(t-\alpha)^{\nu-(n-1)} +$$

$$+ ... + a_0(t-\alpha)^\nu = 0$$

$$\nu(\nu-1)...(\nu-n+1) + a_{n-1}\nu(\nu-1)...(\nu-n+2) + ... + a_1\nu + a_0 = 0 \tag{142}$$

(142) — определяющее уравнение для уравнения Эйлера. Для того, чтобы получить из (139) однородное уравнение (140) можно воспользоваться алгоритмом:

1) Составить определяющее уравнение для уравнения Эйлера, т.е. (142)
2) Раскрыть в нём скобки и получить (141)
3) По уравнению (141) выписать уравнение (140)

Пример.

$$t^3 D^3 x + 2t^2 D^2 x - 6tDx + 3x = 0$$

$$\nu(\nu-1)(\nu-2) + 2\nu(\nu-1) - 6\nu + 3 = 0$$

$$\nu^3 - 3\nu^2 + 2\nu + 2\nu^2 - 2\nu - 6\nu + 3 = 0$$

$$\nu^3 - \nu^2 - 6\nu + 3 = 0$$

$$D_\tau^3 x - D_\tau^2 x - 6D_\tau x + 3x = 0$$

Теорема (об общем решении однородного уравнения Эйлера)

Пусть $\nu_1 = \alpha_1 \pm i\beta_1 \quad ... \quad \nu_r = \alpha_r \pm i\beta_r$ с ненулевой мнимой частью и кратностями $d_1, ..., d_r$, а $\nu_{r+1}, ..., \nu_m \in \mathbb{R}$ с кратностями $d_{r+1}, .., d_m$. Тогда общее решение (139) имеет вид

$$x(t) = \sum_{j=1}^{r} (P_j(\ln|t-\alpha|)\cos\beta_j \ln|t-\alpha| + Q_j(\ln|t-\alpha|)\sin\beta_j \ln|t-\alpha|)(t-\alpha)^{\alpha_j} +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{m} P_j(\ln|t-\alpha|)(t-\alpha)^{\nu_j}, \tag{143}$$

где P_j, Q_j — многочлены с произвольными постоянными коэффициентами, степени которых на 1 меньше, чем кратность соответствующего корня.

$\Diamond$

$$x(\tau) = \sum_{j=1}^{r} (P_j(\tau)\cos\beta_j\tau + Q_j(\tau)\sin\beta_j\tau)e^{\alpha_j\tau} + \sum_{j=r+1}^{m} P_j(\tau)e^{\nu_j\tau}$$

$$\tau \to \ln|t-\alpha|$$

$\otimes$

Начальная задача для уравнения Эйлера

Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{cases} (t-\alpha)^n D^n x + a_{n-1}(t-\alpha)^{n-1} D^{n-1} x + ... + a_1(t-\alpha)Dx + a_0 x = f(t) \\ D^k x|_{t=s} = \xi_k \quad k = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{144}$$

Теорема $\forall s \in \mathbb{R}$ решение задачи Коши (144) существует, единственно и представимо в виде:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\xi}_k \varphi_k(\ln|\frac{t-\alpha}{s-\alpha}|) + \int_s^t \varphi_{n-1}(\ln|\frac{t-\alpha}{u-\alpha}|)\frac{f(u)}{u-\alpha}du \tag{145}$$

φ_k — базис Коши, нормированный в нуле для стационарного однородного уравнения (140), соответствующего однородному уравнению Эйлера (139) для задачи (144)

$\Diamond$

Сделаем замену: $\tau = \ln|t-\alpha|$. Построим для (139) однородное уравнение (140) и базис, обозначив его $\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}$ Н.з. (144) преобразуется в н.з. для стационарного уравнения, (144) перейдет в (138), а начальные условия примут вид:

$$(t-\alpha)^k D^k x|_{t=s} = (s-\alpha)^k (D_\tau^k x + A_{k,k-1} D_\tau^{k-1} x + ... + A_{k0} x)|_{\tau=\sigma} =$$

$$= (s-\alpha)^k (\widetilde{\xi}_k + A_{k,k-1}\widetilde{\xi}_{k-1} + ... + A_{k0}\widetilde{\xi}_0) \quad k = \overline{0, n-1}$$

Получили треугольную систему уравнений с ненулевой диагональю. Значит ξ_k и $\widetilde{\xi}_k$ взаимно однозначно выражаются друг через друга. Решение (138) с начальными условиями $D_\tau^k x|_{\tau=\sigma} = \widetilde{\xi}_k \quad k = \overline{0, n-1}$ существует, единственно и представимо в виде:

$$x(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\xi}_k \varphi_k(\tau - \sigma) + \int_\sigma^\tau \varphi_{n-1}(\tau - v) g(v) dv$$

сделаем замену $\tau = \ln|t - \alpha| \quad \sigma = \ln|s - \alpha|$

$$\int_\sigma^\tau \varphi_{n-1}(\tau - v) g(v) dv = [v = \ln|u - \alpha|] = \int_s^t \varphi_{n-1}(\ln|\frac{t-\alpha}{u-\alpha}|)\frac{f(u)}{u-\alpha} du$$

$\otimes$

Пример.

$$t^2 D^2 x - 4tDx + 6x = 0 \quad t > 0$$
$$\nu(\nu - 1) - 4\nu + 6 = 0$$
$$\nu^2 - 5\nu + 6 = 0$$
$$\nu_1 = 2 \quad \nu_2 = 3$$
$$x(\tau) = C_1 e^{2\tau} + C_2 e^{3\tau}$$
$$x(t) = C_1 t^2 + C_2 t^3$$
$$x(1) = 1 \quad Dx(1) = 0 \quad x_\tau(0) = 1$$
$$tDx|_{t=1} = D_\tau x|_{\tau=0} = D_\tau x(0) = 0.$$

Представление решения уравнений Эйлера степенными рядами

Рассмотрим однородное и неоднородное уравнения Эйдера

$$(t-\alpha)^n D^n x + a_{n-1}(t-\alpha)^{n-1} D^{n-1} x + ... + a_1(t-\alpha)Dx + a_0 x = 0 \tag{146}$$

$$(t-\alpha)^n D^n x + a_{n-1}(t-\alpha)^{n-1} D^{n-1} x + ... + a_1(t-\alpha)Dx + a_0 x = f(t) \tag{147}$$

$t < \alpha$

Рассмотрим начальные значения:

$$D^k x(s) = \xi_k \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{148}$$

Пусть $\alpha - s = R$, $I_s = (s - R, s + R)$. Тогда функция

$$\ln|t-\alpha| = [t \in I_s] = \ln|t - \alpha + s - \alpha| = \ln|s-\alpha||1 + \frac{t-s}{s-\alpha}| = \ln|s-\alpha||1 - \frac{t-s}{\alpha - s}| =$$

$$= \left[|\frac{t-s}{\alpha-s}| < \frac{R}{R} = 1 \quad t \in I_s\right] = \ln|s-\alpha| + \ln(1 - \frac{t-s}{\alpha-s}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-s)^k, \quad t \in I_s,$$

представима в виде сходящегося степенного ряда на I_s.

Аналогично, функция

$$|t-\alpha|^\lambda = (\alpha-t)^\lambda = (\alpha-s+s-t)^\lambda = (\alpha-s)^\lambda(1+\frac{s-t}{\alpha-t})^\lambda = (\alpha-s)^\lambda(1-\frac{t-s}{\alpha-s}) =$$

$$= \left[|\frac{t-s}{\alpha-s}|<1, \quad \forall t\in I_s\right] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t-s)^k, \quad t\in I_s,$$

тоже разлагается в сходящийся степенной ряд на I_s.

Теорема (о представлении решения неоднородного уравнения Эйлера степенным рядом) Решение любой задачи Коши (147), (148) при условии, что функция $f(t)$ представима в виде степенного ряда, сходящегося на промежутке I_s, может быть представлено сходящимся степенным рядом на промежутке I_s.

$\Diamond$ По ранее доказанному решение начальной задачи Коши (147), (148):

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\xi}_k \varphi_k(\ln|\frac{t-\alpha}{s-\alpha}|) + \int_s^t \varphi_{n-1}(\ln|\frac{t-\alpha}{s-\alpha}|)\frac{f(u)}{u-\alpha}du, \widetilde{\xi}_k \leftrightarrow \xi_k, k=\overline{0,n-1},$$

где φ_k - базис, нормированный в 0 стационарного уравнения, к которому приводится уравнение Эйлера. Функции $\varphi_k(\tau)$ содержат лишь слагаемые вида

$$P(\tau)\cos\mu\tau e^{\lambda\tau}, Q(\tau)\sin\mu t e^{\lambda\tau}, P(\tau)e^{\lambda\tau}, P(\tau), e^{\lambda\tau}, \cos\mu\tau, \sin\mu t\tau.$$

После обратной подстановки $t=\alpha-e^\tau$, получим, для решения лишь слагаемые вида

$$P(\ln|\frac{t-\alpha}{s-\alpha}|), \cos(\mu\ln|\frac{t-\alpha}{s-\alpha}|)), \sin(\mu\ln|\frac{t-\alpha}{s-\alpha}|), |t-\alpha|^\lambda.$$

Как было показано ранее $\ln|\frac{t-\alpha}{s-\alpha}|, |t-\alpha|^\lambda$ представимо в виде степенного ряда на I_s, все функции $\cos, \sin$, и все многочлены также представимы степенными рядами на всей числовой прямой. Поэтому после подстановки степенного ряда в степенной ряд все эти функции будут представимы сходящимися степенными рядами на I_s. Кроме того, воспользовавшись теоремой об интегрировании степенного ряда, получим, что и интеграл в формуле (145) так же будет представлен в виде сходящегося степенного ряда на I_s. Таким образом, решение задачи Коши для неоднородного уравнения Эйлера представимо в виде сходящегося степенного ряда на I_s. $\otimes$

Как следствие из этой теоремы получаем

Теорема (о представлении решения однородного уравнения Эйлера степенным рядом) Решение любой задачи Коши (146), (148) представимо на промежутке I_s сходящимся степенным рядом.

Доказательство очевидно.

Замечание. Предположим, что решение задач (147), (148) представимо в виде степенного ряда

$$x(t) = \sum_{=0}^{\infty} a_k(t-s)^k, t\in I_s.$$

Тогда коэффициенты $a_k = \dfrac{\xi_k}{k!}$ для всех $k=\overline{0,n-1}$.

Линейные голоморфные уравнения

Голоморфные функции

Функцию g будем называть голоморфной в точке s, если в окрестности этой точки g представима сходящимся степенным рядом

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (t-s)^k.$$

Функция голоморфна на множестве, если она голоморфна в люой точке этого множества. Если h — голоморфная функция, т.е.

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (t-s)^k,$$

то

$$\lambda g(t) + \mu h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \alpha_\kappa + \mu \beta_\kappa)^k (t-s)^k,$$

$$g(t)h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i+j=k}^{\infty} \alpha_i \beta_j)(t-s)^k$$

$$g^{(m)}(t) = \sum_{k=m}^{\infty} \ (\alpha_\kappa (t-s)^k)^{(m)} = \sum_{k=m}^{\infty} (k(k-1)...(k-m+1)\alpha_k (t-s)^{(k-m)}$$

Уравнение

$$D^n x = a_{n-1}(t) D^{n-1} x + ... + a_0(t)x + f(t), t \in I_s = (s-R, s+R), R > 0$$

называется линейным голоморфным уравнением, если все его коэффициенты и неоднородность являются голоморфными на I_s функциями.

Формальное решение

Ряд, имеющий вид степенного ряда, но о сходимости которого не делается никаких предположений называется формальным степенным рядом. Действия над формальными степенными рядами выполняются по правилам обычных степенных рядов.

Рассмотрим голоморфное уравнение

$$D^n x = a_{n-1}(t) D^{n-1} x + ... + a_0(t)x + f(t), t \in I_s = (s-R, s+R), R > 0 \tag{149}$$

Формальный степенной ряд мы будем называть формальным решением уравнения (149), если после подстановки в это уравнение оно превращает его в формальное тождество.

Лемма. Для любых действительных A_0, A_1, ..., A_{n-1} единственным образом определяются числа A_n, A_{n+1}, ... такие, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t-s)^k \tag{150}$$

является формальным решением уравнения (149).

$\Diamond$ Для $n=2$, $s=0$. $A_0, A_1 \to A_2, ..., A_n, ...$ Имеем

$$D^2x = a_1(t)Dx + a_0(t)x + f(t),$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k, \quad a_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} t^k, \quad a_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} t^k$$

Тогда

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k, \quad Dx = \sum_{k=1}^{\infty} kA_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)A_{k+1}t^k,$$

$$D^2x = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)A_k t^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)A_{k+2}t^k.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)A_{k+2}t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}t^k \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)A_{k+1}t^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k}t^k \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)A_{k+2}t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_{1i}(j+1)A_{j+1} \right) t^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_{0i}A_j \right) t^k + \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k,$$

$$(k+2)(k+1)A_{k+2} = \sum_{i+j=k} a_{1i}(j+1)A_{j+1} + \sum_{i+j=k} a_{0i}A_j + f_k \quad \forall\, k = 0, 1, ...$$

Полученная система является бесконечной треугольной системой с ненулевой диагональю, и, следовательно, однозначно разрешима. $\otimes$

Мажорантные уравнения

Рассмотрим голоморфное уравнение

$$D^n x = b_{n-1}(t)D^{n-1}x + ... + b_0(t)x + g(t), \tag{151}$$

где

$$b_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{ik}(t-s)^k, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t-s)^k$$

Уравнение (151) будем называть мажорантным для уравнения (149), если

$$|a_{ik}| \leqslant b_{ik}, \quad |f_k| \leqslant g_k \quad \forall\, i, k.$$

Теорема (о сходимости формального решения) Если любая задача Коши для уравнения (151) с начальными условиями, заданными в точке s, имеет голоморфное на I_s решение, то формальное решение решение (149) сходится на промежутке I_s.

$\diamondsuit$ Для $n = 2, s = 0$. Рассмотрим формальное решение (150) уравнения (149), построенное по начальным данным A_0, A_1 и задачу Коши для (151) с начальными условиями следующего вида:

$$x(s) = B_0 = |A_0|\,, Dx(s) = B_1 = |A_1|\,.$$

Так как по условию любая начальная задача имеет голоморфное на I_s решение, то это решение можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k. \tag{152}$$

Подставим (152) в (151)

$$B_{k+2} = \sum_{i+j=k} b_{1i}(j+1)B_{j+1} + \sum_{i+j=k} b_{0i}B_j + g_k$$

Так как по условию $A_0 \leqslant B_0$ и $A_1 \leqslant B_1$, то по индукции получим

$$|(k+1)(k+2)A_{k+2}| \leqslant \sum_{i+j=k} |a_{1i}|\,(j+1)\,|A_{j+1}| + \sum_{i+j=k} |a_{0i}|\,|A_j| + |f_k| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i+j=k} b_{1i}(j+1)B_{j+1} + \sum_{i+j=k} b_{0i}B_j + g_k = (k+2)(k+1)B_{k+2}.$$

Следовательно (152) мажорирует (150), т.к. (152) сходится, то (150) сходится. $\otimes$

Существование голоморфных решений голоморфных уравнений

Рассмотрим начальную задачу для голоморфного уравнения

$$D^n x = a_{n-1}\,(t)\,D^{n-1}x + \cdots + a_0\,(t)\,x + f\,(t) \tag{153}$$

где $a_i\,(t)\,,\, f\,(t)$ голоморфны на $I_s = (s-R, s+R)$.

$$D^k x\,(S) = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1} \tag{154}$$

Лемма Абеля. Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k$ сходится на $(-R, R)$ тогда

$$\forall r,\ 0 < r < R,\ \exists M_r:\ |\alpha_k| \leqslant \frac{M_r}{r^k},\ \forall k \tag{155}$$

$\diamondsuit$ Пусть r — произвольное действительное число, такое, что $0 < r < R$.

Ряд сходится на $(-R, R)$, следовательно, он сходится абсолютно на $(-R, R)$, то есть сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|\, r^k$ (числовой). Этот ряд является знакоположительным, значит, его сумма $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|\, r^k = M_r$ такова, что $|\alpha_k|\, r^k \leqslant M_r \quad \Rightarrow (155)$. $\otimes$

Покажем, как для любого уравнения (153) можно построить мажорантное уравнение.

Рассмотрим, к примеру, (153) для $n = 2$ и $s = 0$.

По нашему предположению коэффициенты $a_1(t)$, $a_0(t)$, $f(t)$ - голоморфны на $(-R, R)$. Тогда пусть

$$a_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} t^k, \quad a_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} t^k, \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \tag{156}$$

По лемме Абеля для любого r такого, что $0 < r < R$, коэффициенты

$$|a_{1k}| \leqslant \frac{M}{r^k}, \quad |a_{0k}| \leqslant \frac{M}{r^k}, \quad |f_k| \leqslant \frac{M}{r^k} \tag{157}$$

Более того, тогда

$$|a_{0k}| \leqslant (k+1)\frac{M}{r^k}, \quad |f_k| \leqslant (k+1)\frac{M}{r^k}. \tag{158}$$

Положим

$$b_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{r^k} t^k, \quad g(t) = b_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)M}{r^k} t^k \tag{159}$$

В силу (157), (158) ряды (159) мажорируют ряды (157).

Следовательно, уравнение

$$D^n x = b_{n-1}(t) D^{n-1} x + \cdots + b_0(t) x + g(t) \tag{160}$$

мажорирует уравнение (153) (разумеется, если (159) — сходящиеся ряды).

Действительно,

$$b_1 = \sum_{k=0}^{\infty} M \left(\frac{t}{r}\right)^k = \frac{M}{1 - \frac{t}{r}} = \frac{Mr}{r - t}.$$

Ясно, что если $|t| < r$, то ряд сходится.

Вычислим сумму рядов

$$g(t) = b_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)M}{r^k} t^k.$$

Для этого продифференцируем почленно функцию $b_1(t)$:

$$b_1'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{r^k} k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)M}{r^{k+1}} t^k = \frac{1}{r} b_0(t)$$

$$g(t) = b_0(t) = r b_1'(t) = r \left(\frac{Mr}{r-t}\right)_t' = \frac{Mr^2}{(t-r)^2}$$

А теперь рассмотрим наши функции $b_0(t)$, $b_1(t)$, $g(t)$ и подставим в (160):

$$D^2 x = -\frac{Mr}{t-r} Dx + \frac{Mr^2}{(t-r)^2} x + \frac{Mr^2}{(t-r)^2}$$

$$(t-r)^2 D^2 x + (t-r) Mr Dx - Mr^2 x = Mr^2 \tag{161}$$

Полученное уравнение (161) является уравнением Эйлера, и в то же время это мажорантное уравнение для (153) при $n = 2,\ S = 0$. Таким образом, для любого линейного уравнения (153) всегда существует мажорантное уравнение, которое представляет собой уравнение Эйлера.

Теорема Коши. Если функции $a_i,\ i = \overline{0, n-1}$ и функция f голоморфны на $(s-R, s+R)$, то при любых начальных условиях (154) существует единственное решение уравнения (153), которое представимо в виде сходящегося на $(s-R, s+R)$ степенного ряда

$$x(t) = \xi_0 + \frac{\xi_1 (t-s)}{1!} + \cdots + \frac{\xi_{n-1} (t-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=n}^{\infty} A_k (t-s)^k, \tag{162}$$

где коэффициенты A_k единственным образом выражаются через ξ_i.

Другими словами, *любая задача Коши для линейного голоморфного уравнения обладает единственным решением в классе голоморфных функций*.

$\diamondsuit$ Для $n = 2$, $s = 0$.

$$D^2 x = a_1(t)\, Dx + a_0(t)\, x + f(t)\,, \tag{163}$$

где $a_0,\ a_1,\ f$ — голоморфны на $(-R, R)$.

$$x(s) = \xi_0, \quad Dx(s) = \xi_1 \tag{164}$$

Ранее было доказано, что существует уравнение Эйлера (161) которое мажорирует уравнение (163).

Рассмотрим (161) на промежутке $t \in (-r, r)$, $0 < r < R$.

В силу ранее доказанного, любая задача Коши для (161) имеет голоморфное на $(-r, r)$ решение, а это, в силу теоремы о сходимости формального решения, гарантирует, что ряд

$$x(t) = \xi_0 + \xi_1 t + \sum_{k=2}^{\infty} A_k t^k \tag{165}$$

для любых $\xi_0,\ \xi_1$ является сходящимся на $(-r, r)$. При этом коэффициенты $A_2,\ A_3,\ \cdots$ единственным образом выражаются через $\xi_0,\ \xi_1$.

Так как коэффициенты ряда (165) не зависят от r, то ряд (165) сходится на $(-R, R)$ (то есть на $(s-R, s+R),\ s = 0$). $\otimes$

Структура общего решения линейного голоморфного уравнения

Общее решение линейного голоморфного уравнения (153) может быть представлено в виде

$$x(t) = C_0 + \frac{C_1 t}{1!} + \cdots + \frac{C_{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=n}^{\infty} A_k t^k \tag{166}$$

где $C_0,\ \cdots,\ C_{n-1}$ — произвольные постоянные, коэффициенты A_k единственным образом выражаются через $C_0,\ \cdots,\ C_{n-1}$.

Знание вида решения (166) для уравнения (153) позволяет применять для нахождения решения метод неопределенных коэффициентов.

Первые интегралы

Системы в нормальной форме

Будем рассматривать системы вида

$$\begin{cases} Dx_1 = f_1\left(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\right) \\ Dx_2 = f_2\left(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\right) \\ \cdots \\ Dx_n = f_n\left(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\right) \end{cases} \tag{167}$$

Решение на I — набор функций от t, который обращает каждое равенство системы в тождество на I.

Автономные (стационарные) системы — это те, у которых в правой части нет аргумента t.

$$\begin{cases} Dx_1 = f_1\left(x_1,\ \cdots,\ x_n\right) \\ Dx_2 = f_2\left(x_1,\ \cdots,\ x_n\right) \\ \cdots \\ Dx_n = f_n\left(x_1,\ \cdots,\ x_n\right) \end{cases} \tag{168}$$

С помощью введения новой неизвестной функции всегда из неавтономной системы можно получить автономную, но на 1 большей размерности. Действительно, положим $x_{n+1} = t, \quad f_{n+1}\left(x_{n+1}, x_1,\ \cdots,\ x_n\right) \equiv 1$.

Тогда получим автономную систему

$$\begin{cases} Dx_1 = f_1\left(x_{n+1},\ x_1,\ \cdots,\ x_n\right) \\ \cdots \\ Dx_n = f_n\left(x_{n+1},\ x_1,\ \cdots,\ x_n\right) \\ Dx_{n+1} = f_{n+1}\left(x_{n+1},\ x_1,\ \cdots,\ x_n\right) \end{cases}$$

Рассмотрим автономную систему (168). Её можно представить в виде:

$$\frac{dx_1}{f_1\left(x_1,\ \cdots,\ x_n\right)} = \frac{dx_2}{f_2\left(x_1,\ \cdots,\ x_n\right)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n\left(x_1,\ \cdots,\ x_n\right)} = dt \tag{169}$$

Систему

$$\frac{dx_1}{f_1\left(x_1,\ \cdots,\ x_n\right)} = \frac{dx_2}{f_2\left(x_1,\ \cdots,\ x_n\right)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n\left(x_1,\ \cdots,\ x_n\right)} \tag{170}$$

называют системой в симметрической форме. Решение этой системы — кривая в пространстве R^{n+1} (интегральная кривая).

Первые интегралы систем дифференциальных уравнений

Будем рассматривать систему (168) в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$; $G = I \times E, \quad I \subset \mathbb{R},\ E \subset \mathbb{R}^n$. Система (170) также будет рассмотрена на G. Предположим, что через каждую точку из G проходит по крайней мере одно решение системы (168) (или (170)). (Для существования решений достаточно всего лишь непрерывности f_i.)

Непрерывно дифференцируемая функция Φ, отличная от константы на любой непустой подобласти области G называется первым интегралом системы (168), если она сохраняет постоянное значении вдоль любого её решения, то есть

$$\Phi\left(t,\ x_1\left(t\right),\ \cdots,\ x_n\left(t\right)\right)=C\quad \forall t,\quad \Phi:\ \ G\rightarrow\mathbb{R}.$$

Теорема (о первом интеграле) Для того, чтобы функция Φ была первым интегралом, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\frac{\partial\Phi\left(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\right)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi\left(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\right)}{\partial x_1}f_1\left(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\right)+\cdots+$$

$$+\frac{\partial\Phi\left(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\right)}{\partial x_n}f_n\left(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\right)=0 \tag{171}$$

для всех $(t,x_1,...,x_n)\in G$.

$\diamondsuit$ *Необходимость.* Берём произвольную точку $(s,\ \xi)=(s,\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)$.

Через неё проходит хотя бы одно решение. На этом решении $\Phi=const$, то есть

$$\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)\equiv C,\quad x\left(t\right)=\left(x_1\left(t\right),\ \cdots,\ x_2\left(t\right)\right).$$

Теперь дифференцируем по t

$$d\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)\equiv 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\partial\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)}{\partial x_1}\frac{dx_1\left(t\right)}{dt}+\cdots+\frac{\partial\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)}{\partial x_n}\frac{dx_n\left(t\right)}{dt}\equiv 0$$

Учитывая $\dfrac{dx_k\left(t\right)}{dt}=f_k\left(t,\ x\left(t\right)\right)$, имеем:

$$\frac{\partial\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)}{\partial x_1}f_1\left(t,\ x\left(t\right)\right)+\cdots+\frac{\partial\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)}{\partial x_n}f_n\left(t,\ x\left(t\right)\right)=0$$

Сюда подставим $t=s$:

$$\frac{\partial\Phi\left(s,\ \xi\right)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi\left(s,\ \xi\right)}{\partial x_1}f_1\left(s,\ \xi\right)+\cdots+\frac{\partial\Phi\left(s,\ \xi\right)}{\partial x_n}f_n\left(s,\ \xi\right)=0$$

В силу произвольности выбора $(s,\ \xi)$ имеем последнее равенство тождеством на G.

Итак, в любой точке из G выполняется (171).

Достаточность. Берём произвольное решение $\left(x_1\left(t\right),\ \cdots,\ x_n\left(t\right)\right)$.

Понятно, что точки $\left(t,\ x\left(t\right)\right)\in G$ (нас интересуют только такие решения).

Тогда для нашего решения для любого t выполняется (171):

$$\frac{\partial\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)}{\partial x_1}f_1\left(t,\ x\left(t\right)\right)+\cdots+\frac{\partial\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)}{\partial x_n}f_n\left(t,\ x\left(t\right)\right)=0\quad\text{для}\quad\forall t.$$

Тогда функции

$$f_k\left(t,\ x\left(t\right)\right)=\frac{\partial x_k\left(t\right)}{\partial t}$$

(ведь это решения). Поэтому в предыдущем тождестве все $f_k\left(t,\ x\left(t\right)\right)$ можно заменить на $\dfrac{\partial x_k\left(t\right)}{\partial t}$. Получим тождество по t.

Но левая часть этого тождества есть $\dfrac{d}{dt}\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)\equiv 0$. Следовательно $\Phi\left(t,\ x\left(t\right)\right)\equiv const$. А тогда по определению Φ - первый интеграл. $\otimes$

Пример.

$$\begin{cases} Dx_1=\dfrac{x_1^2}{x_2} \\ Dx_2=\dfrac{x_2^2}{x_1} \end{cases}$$

Решение. Проверим, что $\Phi\left(t,\ x_1,\ x_2\right)=arctg\dfrac{x_1}{x_2}-t$ является первым интегралом.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-1;\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=\frac{1}{1+\frac{x_1^2}{x_2^2}}\frac{1}{x_2}=\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2};\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=\frac{1}{1+\frac{x_1^2}{x_2^2}}\left(-\frac{x_1}{x_2^2}\right)=\frac{-x_1}{x_1^2+x_2^2}$$

$$-1+\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\equiv 0.$$

Далее: $arctg\frac{x_1}{x_2}-t=C_1;\quad x_1=x_2tg\left(t+C_1\right)$ это равенство подставим во второе уравнение,из которого найдём $x_2\left(t\right)$, а затем из этого же равенства найдем $x_1\left(t\right)$.

Интегрируемые комбинации

Теорема (об интегрируемых комбинациях) Пусть

$$\varphi_1(x)dx_1+\ldots+\varphi_n(x)dx_n=d\Phi(x),$$

$$\varphi_1(x)f_1(t,x)+\ldots+\varphi_n(x)f_n(t,x)\equiv 0,\quad \forall(t,x)\in \mathrm{R}^2\quad,\quad x=(x_1,\ldots,x_n),$$

тогда функция $\Phi(x)$ — автономный первый интеграл системы (167).

$\diamondsuit$

$$d\Phi(x)=\varphi_1(x)dx_1+\ldots+\varphi_n(x)dx_n,\quad \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_k}=\varphi_k(x)\quad,\quad \forall k=\overline{1,n},$$

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial t}=0,$$

поэтому

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_1}f_1(t,x)+\ldots+\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_n}f_n(t,x)=\varphi_1(x)f_1(t,x)+\ldots+\varphi_n(x)f_n(t,x)\equiv 0,$$

$$\forall\left(t,x\right)\in\mathbb{R}^{n+1}.$$

В силу теоремы о первом интеграле $\Phi(x)$ — первый интеграл системы (167).$\otimes$

Выражения, фигурирующие в условии теоремы, называются интегрируемыми комбинациями.

Для нахождения интегрируемых комбинаций пользуются свойством производных пропорций

$$\frac{dx_1}{f_1(t,x)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(t,x)} = \frac{\varphi_1 dx_1 + \ldots + \varphi_n dx_n}{\varphi_1 f_1 + \ldots + \varphi_n f_n}$$

Базис первых интегралов

Пусть $(\Phi_1(t,x), \ldots, \Phi_n(t,x))$ — независимая система первых интегралов для (167), и для $\forall H(y_1, \ldots, y_n) \quad \Rightarrow \quad H(\Phi_1(t,x), \ldots, \Phi_n(t,x))$ — также первый интеграл.

Тогда совокупность $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ называется базисом, если любой другой первый интеграл Ψ может быть выражен как

$$\Psi = H(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$$

Теорема (о базисе первых интегралов) Пусть векторная функция $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, компонентами которой являются первые интегралы системы (167), непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(s, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in G$ и

$$\det \frac{\partial \Phi}{\partial x}\bigg|_{(s,\xi)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\Bigg|_{(s,\xi_1,\ldots,\xi_n)} \neq 0.$$

Тогда для любого непрерывно дифференцируемого первого интеграла Ψ существует непрерывно дифференцируемая функция H, такая, что

$$\Psi(t,x) = H(\Phi_1(t,x), \ldots, \Phi_n(t,x))$$

при всех $(t, x_1, \ldots, x_n)$, достаточно близких к $(s, \xi_1, \ldots, \xi_n)$.

$\diamondsuit$ При фиксированном t векторная функция $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ имеет обратную функцию F. Положим

$$H(t,y) = \Psi(t, F_1(t,y), \ldots, F_n(t,y))$$

$$\Rightarrow \Psi(t,x) = H(\Phi_1(t,x), \ldots, \Phi_n(t,x))$$

при всех $(t, x_1, \ldots, x_n)$, достаточно близких к $(s, \xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Осталось показать, что H не зависит от t, т.е. что $dH/dt \equiv 0$. Продифференцируем по t тождества

$$\Phi_i(t, F_1(t,y), \ldots, F_n(t,y)) = y_i \quad \forall i = \overline{1,n},$$

получим в результате, что

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_n}\frac{\partial F_n}{\partial t} = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}.$$

В силу теоремы о первом интеграле имеем, что

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_n} f_n = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F_k}{\partial t} - f_k\right) = 0 \quad \forall i = \overline{1,n},$$

Т.к. матрица $\partial\Phi/\partial x$ невырожденная, то $\partial F_k/\partial t = f_k \quad \forall k = \overline{1,n}$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\frac{\partial F_k}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} f_k \equiv 0,$$

ибо Ψ — первый интеграл системы (167). $\otimes$

Уравнения в частных производных

Основные определения и понятия.

Уравнение в частных производных первого порядка для функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in G \subset \mathbb{R}^n.$$

Классификация для уравнений в частных производных первого порядка по способам вхождения искомой функции и ее производных в уравнение:

$$f_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = g(x,u) \text{ — квазилинейное} \tag{172}$$

$$f_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} + g(x)u = h(x) \text{ — линейное} \tag{173}$$

$$f_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \text{ — линейное однородное} \tag{174}$$

Все остальные уравнения в частных производных первого порядка называются нелинейными.

Теорема (Ковалевской) Пусть функции $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ и $f(x_1, \ldots, x_n, u, p_2, \ldots, p_n)$ голоморфны соответственно в окрестностях точек $(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta, \rho_2, \ldots, \rho_n)$, где

$$\eta = \varphi(\xi_2, \ldots, \xi_n), \quad \rho_i = \frac{\partial \varphi(\xi_2, \ldots, \xi_n)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{2, n}.$$

Тогда дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка в нормальной форме

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in G,$$

имеет и притом единственное решение $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in G$, голоморфное в окрестности точки $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, с начальным значением

$$u(\xi_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, \ldots, x_n).$$

Построение общего решения однородного линейного ЧП-1

Наряду с линейным однородным уравнением (174) рассмотрим стационарную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Dx_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n} \tag{175}$$

Ранее было показано, что любой стационарный первый интеграл $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ системы (175) является решением уравнения (174), и наоборот. Также показано, что если $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n)$,

..., $\Phi_m(x_1,\ldots,x_n)$ — стационарные первые интегралы системы (175), то функция $u=H(\Phi_1,\ldots,\Phi_m)$ также стационарный первый интеграл системы (175), а значит и решение (174) при любой дифференцируемой функции H. Поэтому знание совокупности первых интегралов системы (175), соответствующей системе (174), позволяет строить общее решение (174). Заметим, что вместо (175) можно использовать соответствующую систему в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\ldots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{f_n(x_1,\ldots,x_n)} \tag{176}$$

$$f_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+f_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0. \tag{177}$$

Общим решением уравнения в частных производных называется такое его решение, которое зависит от произвольных функций.

Алгоритм построения общего решения:

— Составляем систему в симметрической форме (176), соответствующую уравнению (174).

— Находим базис первых автономных интегралов этой системы: $\Phi_1(x),\ldots,\Phi_{n-1}(x)$.

— Выписываем общее решение $H(\Phi_1(x),\ldots,\Phi_{n-1}(x))$, где H — произвольная дифференцируемая функция, отличная от константы на всей своей области определения.

Пример:

$$(x-z)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Решение:

$$\frac{dx}{x-z}=\frac{dy}{y-z}=\frac{dz}{2z};$$

$$\frac{dx-dy}{x-y}=\frac{dz}{2z};$$

$$\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{dz}{2z}$$ — уравнение с разделенными переменными.

$$\ln|x-y|=\frac{1}{2}\ln|z|+\ln C_1;$$

$$\frac{x-y}{\sqrt{z}}=C_1$$ — первый интеграл.

$$\Phi_1(x,y,z)=\frac{x-y}{\sqrt{z}};$$

$$\frac{dx+dy+2dz}{x+y+2z}=\frac{dz}{2z};$$

$$\frac{d(x+y+2z)}{x+y+2z}=\frac{dz}{2z};$$

$$\ln|x+y+2z|=\frac{1}{2}\ln|z|+\ln C_2 \quad ,$$

$$\Phi_2(x,y,z) = \frac{x+y+2z}{\sqrt{z}};$$

$$u = H(\frac{x-y}{\sqrt{z}}, \frac{x+y+2z}{\sqrt{z}}) \quad \text{— общее решение.}$$

Решение начальной задачи для однородного линейного ЧП-1

Рассмотрим уравнение (174) с начальным условием

$$u\Big|_{x_1=\xi} = \varphi(x_2,\ldots,x_n). \tag{178}$$

Пусть $\Phi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\Phi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)$ — стационарные первые интегралы, образующие базис первых интегралов системы (176). Тогда общее решение уравнения (174) задается соотношением $u = H(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ и для выполнения начального условия (178) функцию H следует подобрать таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$H(\Phi_1(\xi,x_2,\ldots,x_n),\ldots,\Phi_{n-1}(\xi,x_2,\ldots,x_n)) = \varphi(x_2,\ldots,x_n).$$

Составим систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(\xi,x_2,\ldots,x_n) = C_1, \\ \ldots \\ \Phi_{n-1}(\xi,x_2,\ldots,x_n) = C_{n-1}. \end{cases} \tag{179}$$

Из этой системы находим

$$x_i = y_i(\xi,C_1,\ldots,C_{n-1}), \quad i=\overline{2,n}$$

Положим теперь

$$H(C_1,\ldots,C_{n-1}) = \varphi(y_2(\xi,C_1,\ldots,C_{n-1}),\ldots,y_{n-1}(\xi,C_1,\ldots,C_{n-1})). \tag{180}$$

При таком определении функции H функция

$$u = u(x_1,\ldots,x_n) = H(\Phi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\Phi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)), \tag{181}$$

являющаяся решением уравнения (174), удовлетворяет и начальному условию (178), так как в этом случае

$$u(\xi,x_2,\ldots,x_n) = H(\Phi_1(\xi,x_2,\ldots,x_n),\ldots,\Phi_{n-1}(\xi,x_2,\ldots,x_n)) =$$
$$= H(C_1,\ldots,C_{n-1}) = \varphi(x_2,\ldots,x_n)$$

Таким образом, построение решения уравнения (174) с начальным условием (178) проводим по следующей схеме: **алгоритм решения начальной задачи для линейного однородного уравнения**

— находим базис стационарных первых интегралов системы в симметричной форме (176), соответствующей исходному уравнению (174);

— составляем систему функциональных уравнений (179), которую разрешаем относительно переменных $x_2,\ldots,x_n$;

— строим функцию H по формуле (180);

— выписываем искомое решение по формуле (181) и, если это возможно, проводим аналитическое упрощение полученного решения.

Пример:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u(x,y,z)|_{z=0}=x^2+y^2.$$

Решение:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy},$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$

$$\ln|x|=\ln|y|+C,$$

$$\frac{x}{y}=C_1,$$

$$\Phi_1(x,y,z)=\frac{x}{y},$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{xy},$$

$$\frac{dx}{1}=\frac{dz}{y},$$

$$\frac{x}{C_1}dx=dz,$$

$$\frac{x^2}{2C_1}-z=C_2,$$

$$\Phi_2(x,y,z)=\frac{x^2}{2\frac{x}{y}}-z=\frac{xy}{2}-z.$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=C_1,\\[2mm] \dfrac{xy}{2}=C_2.\end{cases}$$

$$y=\sqrt{2\frac{C_1}{C_2}},\quad x=\sqrt{2C_1C_2}.$$

$$h(C_1,C_2)=(2\sqrt{C_1C_2})^2+(2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}})^2,$$

$$h(C_1,C_2)=2C_1C_2+2\frac{C_2}{C_1},$$

$$u(x,y,z)=2\frac{x}{y}(\frac{xy}{2}-z)+2\frac{(\frac{xy}{2}-z)}{\frac{x}{y}}=x^2-2\frac{xz}{y}+2xy\frac{xy-2z}{2}=x^2-2\frac{xz}{y}+y^2-2\frac{yz}{x}.$$

$$u(x,y,z)=x^2-2\frac{xz}{y}+y^2-2\frac{yz}{x}\quad \text{— решение начальной задачи.}$$

Построение общего решения квазилинейного ЧП-1

Рассмотрим квазилинейное уравнение (172). Построим вспомогательное линейное однородное уравнение:

$$f_1(x,u)\frac{\partial v}{\partial x_1}+...+f_n(x,u)\frac{\partial v}{\partial x_n}+g(x,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0 \tag{182}$$

и пусть $v=\psi(x,u)$ — решение уравнения (182)

Рассмотрим функциональное уравнение

$$\psi(x,u)=0. \tag{183}$$

Функция u являющаяся решением функционального уравнения (183), является решением исходного уравнения (172).

Действительно, пусть $u=u(x_1,...,x_n)$ решение уравнения (183), тогда $\psi(x,u(x_1,...,x_n))=0$, дифференцируем по всем переменным:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_k}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=-\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x_k}}{\frac{\partial\psi}{\partial u}}|_{u=u(x)}\quad ,$$

$$f_1(x,u(x)\frac{\frac{\partial\psi(x,u(x))}{\partial x_1}}{\frac{\partial\psi(x,u(x))}{\partial u}})+...+f_n(x,u(x)\frac{\frac{\partial\psi(x,u(x))}{\partial x_n}}{\frac{\partial\psi(x,u(x))}{\partial u}})=$$

$$=-\frac{1}{\frac{\partial\psi(x,u(x))}{\partial u}}(-g(x,u(x))\frac{\partial\psi(x,u(x))}{\partial u})=g(x,u(x)).$$

Получили тождество. Таким образом решение уравнения (183) является решением уравнения (172). Соотношения (183) доставляет решение уравнения (172) в неявном виде.

Система в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{f_1(x,u)}=\frac{dx_2}{f_2(x,u)}=...=\frac{dx_n}{f_n(x,u)}=\frac{du}{g(x,u)} \tag{184}$$

соответствует вспомогательному линейному однородному уравнению (182).

Пусть $\psi_1(x,u),...,\psi_n(x,u)$ — базис системы (184), и пусть H — произвольная дифференцируемая функция отличная от константы в области своего определения.

Тогда

$$H(\psi_1(x,u),...,\psi_n(x,u))=0 \tag{185}$$

доставляет общее решение уравнения (172). поскольку функция u, являющаяся решением уравнения (185), является решением уравнения (172) и ,так как она зависит от произвольной функции, то это общее решение уравнения (172).

Алгоритм построения общего решения квазилинейного уравнения с частными производными:

— Составляем систему в симметрической форме (184), соответствующую уравнению (172).

— Находим базис первых интегралов этой системы: $\psi_1(x,u), ..., \psi_n(x,u)$.

— Составляем функциональное уравнение (185) с произвольной функцией H. Решение этого уравнения и есть общее решение уравнения (172) (если можно решить уравнение (185) — решаем).

Пример:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u - xy \quad .$$

<u>*Решение:*</u>

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dy}{u-xy},$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

$$\ln|x| = \ln|y| + C,$$

$$\psi_1(x,y,u) = \frac{x}{y},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u - x\frac{x}{C_1}},$$

$$u = e^{\int\frac{dx}{x}}(C_2 - \frac{1}{C}\int xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx) = x(C_2 - \frac{x}{C_1}),$$

$$H(\frac{x}{y}, \frac{u}{x} + y) = 0,$$

$$\psi_2(x,y,u) = \frac{u}{x} + y,$$

$$\frac{u}{x} + y = \varphi(\frac{x}{y}),$$

$$u = (\varphi(\frac{x}{y}) - y)x \quad \text{— общее решение уравнения.}$$

Решение начальной задачи для квазилинейного ЧП-1

Рассмотрим квазилинейное уравнение в частных производных

$$f_1(x,u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x,u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n} = g(x,u) \tag{186}$$

с начальным условием

$$u(x)\big|_{x_1=\xi} = \varphi(x_2,\ldots,x_n) \tag{187}$$

Теорема (о решении начальной задачи квазилинейного уравнения в частных производных 1-ого порядка).

Пусть $\Psi_1(x,u),\ldots,\Psi_n(x,u)$– базис первых интегралов системы

$$\frac{du}{f_1(x,u)}=\frac{du}{f_2(x,u)}=\ldots=\frac{du}{f_n(x,u)}=\frac{du}{g(x,u)} \tag{188}$$

тогда решение начальной задачи (187) для уравнения (186) есть решение функционального уравнения

$$U\left(\Psi_1\left(x,u\right),\ldots,\Psi_n\left(x,u\right)\right)-\varphi\left(X_2\left(\Psi_1,\ldots,\Psi_n\right),\ldots,X_n\left(\Psi_1,\ldots,\Psi_n\right)\right)=0 \tag{189}$$

где функции $U,X_2,\ldots,X_n$– решение системы

$$\begin{cases}\Psi_1\left(\xi,x_2,\ldots,x_n,u\right)=C_1\\ \qquad\vdots\\ \Psi_n\left(\xi,x_2,\ldots,x_n,u\right)=C_n\end{cases} \tag{190}$$

$\diamondsuit$ Поскольку аргумент (x,u) входит в (189) как аргумент 1-ых интегралов, то решение этого функционального уравнения, т.е. функция u, является решением (186).

Проверим выполнение начального условия (187)

$$u\left(\xi,x_2,\ldots,x_n\right)\stackrel{?}{=}\varphi\left(x_2,\ldots,x_n\right)$$

$$U\left(\Psi_1\left(\xi,x_2,\ldots,x_n\right),\ldots,\Psi_n\left(\xi,x_2,\ldots,x_n\right)\right)=$$

$$=\varphi\left(X_2\left(\Psi_1\left(\xi,x_2,\ldots,x_n,u\right),\ldots,\Psi_n\left(\xi,x_2,\ldots,x_n,u\right)\right),\ldots,\right.$$

$$\left.X_n\left(\Psi_1\left(\xi,x_2,\ldots,x_n,u\right),\ldots,\Psi_n\left(\xi,x_2,\ldots,x_n,u\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{решение системы (190)}}}{U\left(C_1,C_2,\ldots,C_n\right)}=\varphi\left(X_2\left(C_1,\ldots,C_n\right),\ldots,X_n\left(C_1,\ldots,C_n\right)\right)$$

Поэтому функция u удовлетворяет начальному условию

$$u\left(\xi,x_2,\ldots,x_n\right)=\varphi\left(x_2,\ldots,x_n\right).$$

$\otimes$

Алгоритм решения начальной задачи квазилинейного уравнения в частных производных 1-ого порядка:

— Составляем систему (188), соответствующую уравнению (186).

– Находим базис первых интегралов системы (188), т.е. функции $\Psi_1,\ldots,\Psi_n$.

— Составляем систему функциональных уравнений (190).

— Находим решение этой системы $U,X_2,\ldots,X_n$.

— Выписываем функциональное уравнение (189), решение которого (функция u) является решением начальной задачи (Решая функциональное уравнение (189), пытаемся явно выразить решение).

Пример.

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = u - xy; \quad u\,(x, y)|_{x=2} = 1 + y^2.$$

<u>*Решение:*</u>

1. $$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u - xy};$$

2. $\Psi_1\,(x, y, u) = \frac{x}{y}; \quad \Psi_2\,(x, y, u) = \frac{u}{x} + y;$ (результат взят из примера предыдущего пункта)

3. $\begin{cases} \frac{2}{y} = C_1 \\ \frac{u}{2} + y = C_2 \end{cases}$ – система (190)

4. $\begin{cases} y = \frac{2}{C_1} \\ u = 2C_2 - \frac{4}{C_1} \end{cases}$

5. Т.к. $u\,(x, y)|_{x=2} = 1 + y^2$, то

$2C_2 - \frac{4}{C_1} = 1 + \frac{4}{C_1^2}; \quad C_1 \to \Psi_1, \quad C_2 \to \Psi_2$

$2 \cdot \left(\frac{u}{x} + y\right) - \frac{4 \cdot y}{x} = 1 + \frac{4 \cdot y^2}{x^2};$

$2 \cdot \left(\frac{u}{x} + y\right) = \frac{4 \cdot y^2}{x^2} + 1 + \frac{4 \cdot y}{x};$

$\frac{u}{x} = \frac{2y^2}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{2y}{x} - y;$

$u = \frac{2y^2}{x} + \frac{1}{2}x + 2y - xy.$

<u>*Ответ:*</u> $u = \frac{2y^2}{x} + \frac{1}{2}x + 2y - xy.$

<u>*Проверка:*</u>

$u(2, y) = 1 + y^2$– начальное условие выполнено.

То, что является решением, можно и не проверять, т.к. это функция от Ψ_1, Ψ_2.

$$u_x^{'} = -\frac{2y^2}{x^2} + \frac{1}{2} - y$$

$$u_y^{'} = \frac{4y}{x} + 2 - x$$

$$x \cdot u_x^{'} + y \cdot u_y^{'} = -\frac{2y^2}{x} + \frac{1}{2}x - xy + \frac{4y^2}{x} + 2y - xy = \left(\frac{2y^2}{x} + \frac{1}{2}x + 2y - xy\right) - xy = u - xy.$$

Уравнения Пфаффа

Двумерные интегралы уравнения Пфаффа

Уравнением Пфаффа называется уравнение вида

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0, \tag{191}$$

где

$$(x,y,z) \in G \subset \mathbb{R}^3$$

Решением этого уравнения (двумерным интегралом уравнения Пфаффа или интегральной поверхностью) называется соотношение вида $u(x,y,z) = 0$ такое, что если вычислить дифференциалы dx, dy и dz с учетом этого соотношения и подставить в (191), получим тождество на G.

$u(x,y,z) = 0$ — поверхность в трёхмерном пространстве.

Рассмотрим векторное поле

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

Тогда (191) $\Longleftrightarrow$ $(\vec{F},\ d\vec{r}) = 0$.

Кривая называется характеристикой векторного поля, если касательная в каждой точке этой кривой параллельна вектору поля в этой точке.

Нормальной трансвенсалью поверхности называется совокупность всех кривых, перпендикулярных этой поверхности.

Поэтому решить уравнение Пфаффа значит найти поверхность, нормальная трансвенсаль которой параллельна характеристикам поля.

Теорема (о двумерном интеграле уравнения Пфаффа)

Двумерный интеграл уравнения Пфаффа существует только тогда, когда выполнено следующее тождество:

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0 \tag{192}$$

$\diamondsuit$ Дано: существует двумерный интеграл уравнения Пфаффа *u(x,y,z)*. Докажем, что выполняется (192).

Уравнение Пфаффа можно записать в виде

$$(\vec{F}, d\vec{r}) = 0$$

Поскольку у этого уравнения существует двумерный интеграл, то следующие векторы должны быть параллельны:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \parallel (P, Q, R)$$

Следовательно, существует такое μ, что

$$\begin{cases} P = \mu\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ Q = \mu\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ R = \mu\dfrac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$$

Продифференцировав первую и вторую строчки системы по y и x соответственно, получим

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu'_y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial Q}{dx} = \mu'_x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Тогда

$$R(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = \mu\frac{\partial u}{\partial z}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = \mu\frac{\partial u}{\partial z}(\mu'_y\frac{\partial u}{\partial x} - \mu'_x\frac{\partial u}{\partial y}) = \mu\mu'_y u'_z u'_x - \mu\mu'_x u'_z u'_y$$

Аналогично получаем, что

$$P(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}) = \mu\mu'_z u'_x u'_y - \mu\mu'_y u'_x u'_z$$

и

$$Q(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}) = \mu\mu'_x u'_y u'_z - \mu\mu'_z u'_y u'_x$$

Сложив полученные тождества, получим (192).$\otimes$

Условие (192) можно записать в виде

$$(\vec{F}, rot\,\vec{F}) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0.$$

Если $rot\,\vec{F} = 0$, то в качестве функции u можно использовать $\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz$, т.к. в этом случае выполняется условие Эйлера и КРИ-2 не зависит от пути интегрирования.

Если (192) выполняется, то $\exists\,\mu(x,y,z)$ такое, что $\mu Pdx + \mu Qdy + \mu Rdz = 0$ - уравнение в полных дифференциалах.

Если рассматривается уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

то (192) всегда выполняется, а следовательно, всегда существует интегрирующий множитель μ.

Примеры. 1) $xdx + ydy + zdz = 0$.

$rot\,\vec{F} = 0 \Rightarrow$ это уравнение в полных дифференциалах и $u(x, y, z) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

2) $3yzdx + 2xzdy + xydz = 0$.

Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 3yz & 2xz & xy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3yz & 2xz & xy \end{vmatrix} = 3yz(x - 2x) - 2xz(y - 3y) + xy(2z - 3z) = -3xyz + 4xyz - xyz \equiv 0$$

— условие (192) выполняется.

Остаётся найти u. Предположим, $u(x, y, z) = 0$ разрешимо относительно z. Записав исходное уравнение в виде

$$dz = -\frac{3z}{x}dx - \frac{2z}{y}dy,$$

получим $z'_x = -\dfrac{3z}{x}$, т.е. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{3z}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{z} = -\dfrac{3}{x}dx$.

Проинтегрировав последнее уравнение, получаем

$$\ln\, z = -3\ln\, x + \ln\, \varphi(y)$$

$$\Downarrow$$

$$z = \frac{\varphi(y)}{x^3}$$

Чтобы найти $\varphi(y)$, приравняем производные по y:

$$z'_y = \frac{\varphi'(y)}{x^3} = -\frac{2z}{y}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\varphi'(y)}{x^3} = -\frac{2\varphi(y)}{x^3 y}$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{2}{y}dy$$

$$\ln\, \varphi = -2\ln\, y + C$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(y) = \frac{C}{y^2}$$

Таким образом,

$$z = \frac{C}{x^3 y^2}.$$

Соответственно, решение исходного уравнения может быть записано в виде

$$x^3 y^2 z - C = 0$$