Если известны первые интегралы $\Phi_1(t, x)$, $\Phi_2(t, x)$, …, $\Phi_m(t, x)$, $m < n$ и ранг матрицы Якоби в точке (s, ξ) отличен от нуля, то в этом случае размерность системы (1') можно понизить на m. Если же $m = n$, то это означает, что интегрируемость системы (1') сводится к решению функциональной системы

$$\begin{cases}\Phi_1(t, x_1, \dots, x_n) = C_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_n(t, x_1, \dots, x_n) = C_n.\end{cases} \tag{5}$$

Если удастся разрешить функциональную систему (5), то получим решение исходной системы (1') в явном виде. Если же разрешить систему (5) не удастся, то получим решение системы (1') в неявном виде. Таким образом интегрирование системы дифференциальных уравнений (1') равносильно построению базиса первых интегралов данной системы.

§ Системы в симметрической форме

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \tag{6}$$

называют системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме.

В системе (6) все переменные равноправны, а также некоторые коэффициенты f_k могут быть равны нулю. Например,

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{0}.$$

Чтобы систему обыкновенных дифференциальных уравнений (6) записать в нормальной форме, необходимо одну из переменных выбрать независимой. Пусть без ограничения общности x_n – независимая переменная, $f_n \neq 0$. Тогда:

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{f_1(x)}{f_n(x)}, \\ \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)},\end{gathered} \tag{7}$$

где $f_k(x) = f_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Для того, чтобы проинтегрировать (7), достаточно построить базис из $n - 1$ первых интегралов. Тогда решение запишется в неявном виде:

$$\begin{cases}\Phi_1(x_1, \dots, x_n) = C_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1}.\end{cases}$$

Рассмотрение систем обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме часто оказывается полезным для отыскания первых интегралов, строя интегрируемые комбинации. Для нахождения интегрируемых комбинаций используют алгебраическое свойство равных отношений: если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \lambda$, то для любых α_1, α_2, …, α_n также выполняется $\frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n}{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n} = \lambda$, что для системы в симметрической форме запишется в следующем виде:

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \frac{dx_2}{f_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x)} = \frac{\varphi_1(x)dx_1 + \cdots + \varphi_n(x)dx_n}{\varphi_1(x)f_1(x) + \cdots + \varphi_n(x)f_n(x)}.$$

Пример. Проинтегрировать систему в симметрической форме

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$$

1) Выберем функции $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 \equiv 1$, по свойству равных отношений:
$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{(z-y)+(x-z)+(y-x)} = \frac{dx+dy+dz}{0},$$
откуда $dx + dy + dz = 0$, и следовательно, $x + y + z = C$, откуда $\Phi_1 = x + y + z$ – один из первых интегралов.
2) Выберем функции $\varphi_1 = 2x$, $\varphi_2 = 2y$, $\varphi_3 = 2z$, по свойству равных отношений:
$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{2xdx+2ydy+2zdz}{2(xz-xy+yx-yz+zy-zx)} = \frac{2xdx+2ydy+2zdz}{0},$$
откуда $2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$, и следовательно, $x^2 + y^2 + z^2 = C$, откуда $\Phi_2 = x^2 + y^2 + z^2$ – еще один первый интеграл.
3) Покажем, что построенные первые интегралы $\Phi_1 = x + y + z$, $\Phi_2 = x^2 + y^2 + z^2$ образуют базис. Их матрица Якоби $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ имеет ранг 2 (при $x \neq y$). Следовательно, $\Phi_1 = x + y + z$, $\Phi_2 = x^2 + y^2 + z^2$ образуют базис первых интегралов.