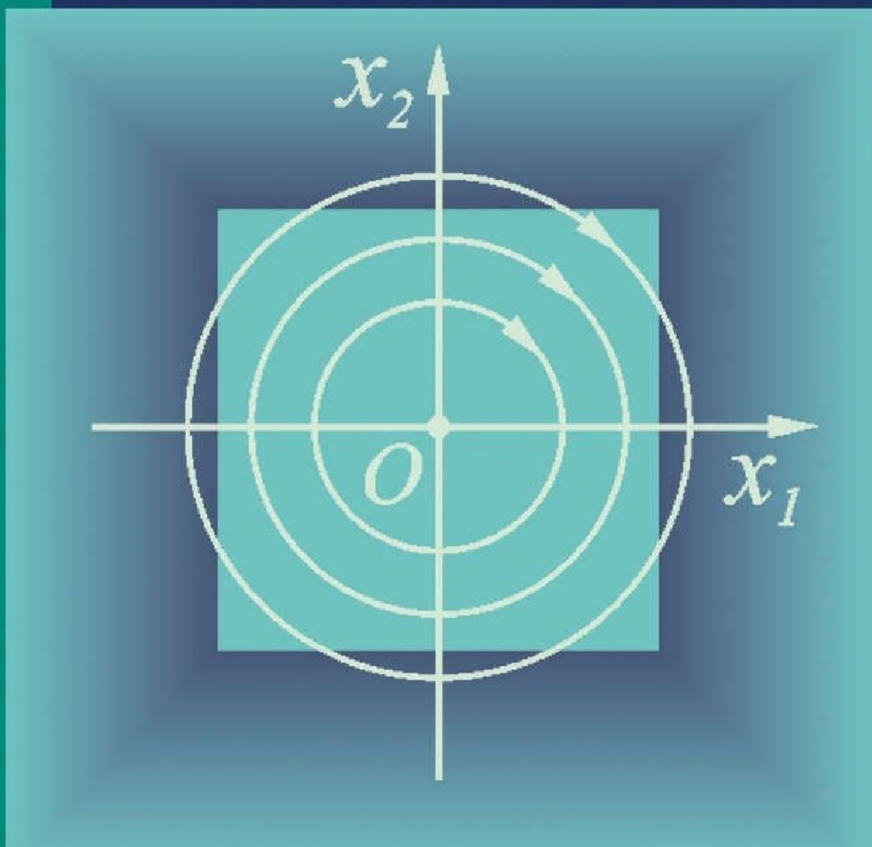
ВУЗ

студентам учреждений высшего образования

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Практикум



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Практикум

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по математическим, физическим и
экономическим специальностям

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
2012

УДК 517.9(075.9)
ББК 22.161.6я73
Д50

А в т о р ы: Л.А. Альсевич, С.А. Мазаник, Г.А. Расолько, Л.П. Черенкова

Р е ц е н з е н т ы: кафедра дифференциальных уравнений и теории функций Гомельского государственного университета (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, доцент *А.П. Старовойтов*); заведующий кафедрой высшей математики Белорусского государственного экономического университета доктор физико-математических наук, профессор *М.П. Дымков*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

ISBN 978-985-06-2111-5
© Издательство «Вышэйшая школа», 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие подготовлено в соответствии с программой курса дифференциальных уравнений для студентов, специализирующихся по прикладной математике. Оно будет полезно также студентам математических, физических, экономических факультетов университетов и технических вузов. Построено пособие так, чтобы выработать у учащихся практические навыки решения и исследования дифференциальных уравнений и систем, описывающих эволюционные процессы в различных областях естествознания.

Расположение материала, операторный подход к изложению теории линейных стационарных дифференциальных уравнений и стационарных линейных векторных уравнений, методика изучения элементарных уравнений как уравнений, приводимых к уравнениям в полных дифференциалах, отличают данное пособие от традиционных. Изучение линейных уравнений со стационарным оператором позволяет уже в начале курса рассматривать приложения дифференциальных уравнений к теории колебаний, которая в свою очередь знакомит студентов с качественной теорией дифференциальных уравнений, развивает у них исследовательские навыки. В пособии представлены задания для контрольных и лабораторных работ, а также варианты тестовых заданий по отдельным темам курса.

Наряду с широко известными методами интегрирования линейных стационарных систем дифференциальных уравнений (методы Коши, Лагранжа, Д'Аламбера, экспонентное представление решения) предлагается операторный метод сведения системы к системе независимых уравнений и метод построения экспоненты матрицы, не требующий знания жордановой формы матрицы.

Пособие составлено на основании опыта проведения практических и лабораторных занятий по курсу дифференциальных уравнений на факультете прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета. По структуре и методике изложения материала оно связано с книгами Ю.С. Богданова, Ю.Б. Сыроида «Дифференциальные уравнения» (Минск: Вышэйшая школа, 1983) и Ю.С. Богданова, С.А. Мазаника, Ю.Б. Сыроида «Курс дифференциальных уравнений» (Мінск: Універсітэцкае, 1996). Настоящее издание является продолжением наших книг «Практикум по дифференциальным уравнениям» (Минск: Вышэйшая школа, 1990; Минск: БГУ, 2000), поэтому мы сохранили нумерацию задач, а для новых задач используется двойная нумерация. Наряду с задачами, составленными авторами, в практикуме приведены стандартные задачи из известных сборников задач по дифференциальным уравнениям.

В практикум включен ряд примеров решения задач с использованием пакета компьютерной математики MathCad. Это дополнение вызвано тем, что рассматриваемые методы интегрирования и их применение основаны на четких и понятных алгоритмах, однако практическое их использование часто требует от студентов выполнения большого объема вычислений и аналитических преобразований. Широкие возможности, которыми обладают в этом плане современные системы компьютерной математики, позволяют в определенной мере решить эту проблему. Применение пакетов компьютерной математики в процессе обучения не является самоцелью и никоим образом не может полностью заменить традиционные методы обучения. Тем не менее использование таких пакетов на практических занятиях по дифференциальным уравнениям позволяет не только находить аналитические или численные решения дифференциальных уравнений, но и осуществить визуализацию полученных результатов, что облегчает восприятие студентами материала, дает возможность на занятиях рассмотреть гораздо больше примеров, больше времени уделить качественному анализу получаемых результатов. Отметим, что в силу специфики пакета MathCad многие символьные вычисления занимают в строке документа несколько рядом расположенных страниц и при их внедрении в книгу некоторые части вычислений не видны. Однако при работе на компьютере по приведенному в тексте листингу информация восстанавливается в полном объеме.

Авторы выражают глубокую признательность член-корреспонденту Национальной академии наук Беларуси профессору Ф.М. Кирилловой, профессорам А.Ф. Андрееву, М.П. Дымкову, Г.А. Медведеву, В.И. Мироненко и доценту Н.Т. Стельмашуку за рецензии, советы и замечания, способствовавшие улучшению наших книг.

Все отзывы и пожелания просим присылать по адресу: 220050, Минск, проспект Ф. Скорины, 4, кафедра высшей математики, факультет прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Дифференциальное уравнение. Порядок уравнения. Решения уравнения

Дифференциальное уравнение для определения функции $x = x(t)$ имеет вид

$$F(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^n x) = 0, \tag{1.1}$$

где F – заданная функция своих аргументов; D – *оператор дифференцирования по* t, т.е. оператор, действующий по следующим правилам:

$$D^0 x = x, \quad Dx = \frac{dx}{dt}, \quad D^{k+1}x = D(D^k x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^k x}{dt^k}\right) = \frac{d^{k+1}x}{dt^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Искомая функция $x = x(t)$ зависит от одного аргумента t и считается заданной на связном множестве (промежутке). Рассматриваемое уравнение называют *обыкновенным.* Обыкновенное дифференциальное уравнение может быть записано также с помощью дифференциалов искомой функции и независимой переменной

$$H(t, x, dx, d^2x, \dots, d^n x) = 0, \tag{1.3}$$

где H – заданная функция своих аргументов.

Порядком уравнения называют порядок старшей из производных или старшего из дифференциалов искомой функции, входящих в уравнение.

Решением уравнения называют функцию $x = x(t)$, которая задана на промежутке $I = |a, b| \subset \mathbb{R}$, имеет все производные до порядка n включительно и обращает на промежутке I уравнение в тождество

$$F(t, x(t), Dx(t), D^2x(t), \dots, D^n x(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in I \tag{1.4}$$

(здесь под $|a, b|$ понимается один из промежутков: $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $-\infty \le a < b \le +\infty$).

Задача 1.1. Определить, какие из приведенных функций x являются на соответствующем множестве I решениями уравнения $D^2x + 4x = 1/\cos 2t$:

а) $x = 1/4\cos 2t \ln\cos 2t + t/2\sin 2t, \quad I = (-\pi/4, \pi/4)$;

б) $x = 1/4\cos 2t \ln|\cos 2t| + t/2\sin 2t, \quad I = (\pi/4, 3\pi/4)$;

в) $x = 1/4\cos 2t \ln|\cos 2t| + t/2\sin 2t, \quad I = (0, \pi/2)$;

г) $x = 1/4\cos 2t \ln\cos 2t + t/2\sin 2t, \quad I = (-\pi/4, \pi/4) \cup (7\pi/4, 9\pi/4)$;

д) $x = \cos 2t + \sin 2t, \quad I = (7\pi/4, 9\pi/4)$.

Р е ш е н и е. а) Функция $f(t) = 1/\cos 2t$ определена и непрерывна на заданном интервале $I = (-\pi/4, \pi/4)$. Непосредственной подстановкой

$$x = 1/4\cos 2t \ln\cos 2t + t/2\sin 2t, \qquad Dx = t\cos 2t - 1/2\sin 2t \ln\cos 2t,$$
$$D^2x = -\cos 2t \ln\cos 2t - 2t\sin t + 1/\cos 2t$$

в данное уравнение убеждаемся, что оно обращается в тождество на $I = (-\pi/4, \pi/4)$. Следовательно, заданная функция x является решением уравнения.

б) Поскольку $\cos 2t$ на интервале $I=(\pi/4, 3\pi/4)$ отрицателен и $|\cos 2t| = -\cos 2t$, то функцию x запишем в виде $x = 1/4\cos 2t \ln(-\cos 2t) + t/2\sin 2t$. Функция $1/\cos 2t$ определена и непрерывна на I, функция x дважды дифференцируема на I. Непосредственной подстановкой

$$x = 1/4\cos 2t\ln(-\cos 2t) + t/2\sin 2t, \quad Dx = -1/2\sin 2t\ln(-\cos 2t) + t\cos 2t,$$
$$D^2x = -\cos 2t\ln(-\cos 2t) - 2t\sin t + 1/\cos 2t$$

в данное уравнение убеждаемся, что оно обращается в тождество на $I=(\pi/4, 3\pi/4)$. Следовательно, функция x является решением уравнения.

в) Считать функцию x решением заданного уравнения на промежутке $I=(0, \pi/2)$ нельзя, так как она не дифференцируема на I и правая часть уравнения $f(t) = 1/\cos 2t$ разрывна на I.

г) Согласно определению решения дифференциального уравнения, функция, заданная на множестве $I=(-\pi/4, \pi/4)\bigcup(7\pi/4, 9\pi/4)$, не является решением, так как в данном случае множество I не является промежутком, т.е. не является связным.

д) Функция $f(t) = 1/\cos 2t$ определена и непрерывна на заданном интервале $I=(7\pi/4, 9\pi/4)$. Подставив в исходное уравнение

$$x = \cos 2t + \sin 2t, \quad Dx = -2\sin 2t + 2\cos 2t, \quad D^2x = -4\cos 2t - 4\sin 2t,$$

будем иметь $0 = 1/\cos 2t$. Это означает, что функция x не является решением данного уравнения.

Определить, какие из приведенных функций являются решениями указанного уравнения на заданном множестве:

1. $x = t\,Dx + t\,e^{x/t}$:

а) $x = -t\ln\ln t, \quad I=(0,+\infty)$;

б) $x = -t\ln\ln t, \quad I=(1,+\infty)$;

в) $x = -t\ln\ln t, \quad I=[1,+\infty)$;

г) $x = \ln t, \quad I=(0,+\infty)$.

2. $D^2x - 2Dx + x = \dfrac{e^t}{t}$:

а) $x = e^t\ln t, \quad I=(0,+\infty)$;

б) $x = t\,e^t\ln t, \quad I=(0,+\infty)$;

в) $x = t\,e^t\ln t, \quad I=(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$;

г) $x = e^t(t\ln|t| + t), \quad I=(-\infty,0)$.

3. $(2t+1)x'' + 4tx' - 4x = 0$:

а) $x = t + e^{-2t}, \quad I=(-2,-1)\bigcup(1,2)$;

б) $x = e^{2t}, \quad I=\mathbb{R}$;

в) $x = C_1t + C_2e^{-2t}, \quad I=\mathbb{R}$, C_1, C_2 – постоянные;

г) $x = t, \quad I=\mathbb{R}$.

4. $x' = \dfrac{1}{2}\sqrt{t} + \sqrt[3]{x}$:

а) $x = t^{3/2}, \quad I=[0,+\infty)$;

б) $x = |t|^{3/2}, \quad I=(-\infty,0)$;

в) $x = 1 + t^{3/2}, \quad I=[0,+\infty)$;

г) $x = -t^{3/2}, \quad I=[0,+\infty)$.

5. $D^2x + \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\cos t}Dx + x = \operatorname{arctg}\sqrt{t}$:

а) $x = \sin t, \quad I=[0,\pi/2)$;

б) $x = t\sin t, \quad I=[0,\pi/2)$;

в) $x = t\sin t, \quad I=[0,+\infty)$;

г) $x = \sin t, \quad I=[0,\pi/2)$.

6. $t^2D^2x + t\,Dx + 2x = 2\cos\ln t + \sin\ln t$:

а) $x = \sin\ln t + \cos(\sqrt{2}\ln t), \quad I=(-\infty,0)$;

б) $x = 1/2\cos\ln t + \sin\ln t, \quad I = (0, +\infty);$

в) $x = 1/2\cos\ln t + \sin\ln t + \cos(\sqrt{2}\ln t), \quad I = (0, +\infty);$

г) $x = 1/2\cos\ln t + \sin\ln t + 2\sin(\sqrt{2}\ln t), \quad I = (0, +\infty).$

7. $D^3x + Dx = \sin t \big/ \cos^2 t$:

а) $x = 1/\cos t + \cos t \ln\cos t + (t - \operatorname{tg} t)\sin t, \quad I = (-\pi/2, \pi/2);$

б) $x = 1 + \cos t + \sin t, \quad I = (-\pi/2, \pi/2);$

в) $x = \cos t \ln\cos t + (t - \operatorname{tg} t)\sin t + \dfrac{1}{\cos t}, \quad I = (-\pi/2, \pi/2) \bigcup (3\pi/2, 5\pi/2).$

Показать, что функции $x = x(t)$, зависящие от произвольных постоянных $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$, являются решениями соответствующих уравнений. Указать максимальный промежуток существования решения:

8. $x = C_1 e^{C_2 t}, \quad xD^2x = \left(Dx\right)^2.$

9. $x = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t, \quad D^2x + 9x = 0.$

10. $x = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t + \dfrac{t}{9}, \; D^2x + 9x = t.$

11. $x = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t + e^{3t}, \quad D^2x + 9x = 18e^{3t}.$

12. $x = C_1 \big/ t + C_2, \quad tx'' + 2x' = 0.$

13. $x = C_1 t + C_1^2, \quad x = tDx + \left(Dx\right)^2.$

14. $x = C_1 t + \sin C_1, \quad x = tDx + \sin Dx.$

15. $x = C_1 t + \ln C_1, \quad x = tx' + \ln x'.$

16. $x = C_1 \operatorname{ch} t + C_2 \operatorname{sh} t, \quad D^2x - x = 0.$

17. $x = C_1\dfrac{t^2}{2} + C_1^2 t + C_2, \quad Dx = t\,D^2x + (D^2x)^2.$

18. $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t, \quad D^4x - x = 0.$

19. Доказать, что многочлены Чебышева первого рода

$$T_m\left(t\right) = \cos\left(m\arccos\, t\right) \big/ 2^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N},$$

удовлетворяют уравнениям $(1 - t^2)D^2x - tDx + m^2x = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$

Показать, что функции $x = x(t)$, заданные неявно, являются решениями соответствующих уравнений:

20. $x = \operatorname{arctg}\left(x + t\right) + C, \quad \left(x + t\right)^2 Dx = 1.$

21. $t = x^2 + x, \quad Dx D^3x - 3\left(D^2x\right)^2 = 0.$

22. $x\ln x - t - \int\limits_0^t e^{\tau^2}\,d\tau = 0, \quad x\left(1 + \ln x\right)x'' + \left(x'\right)^2 = 2t\,x\,e^{t^2}.$

23. $9x^2 - 4at^3 = 0, \quad \left(D\,x\right)^2 - at = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$

24. $(x-t)(x^2-t^2+1)=0,\ tx(Dx)^2-(t^2+x^2)Dx+tx=0.$

25. $\left(tx+1\right)(t^2x-1)=0, \quad \left(x'\right)^2+\frac{3x}{t}x'+\frac{2x^2}{t^2}=0.$

26. $x^3-7t^2x+6t^3=0, \quad (Dx)^3-7Dx+6=0.$

27. $t^2+x+\ln x-\frac{t}{x}=C, \quad x>0, \quad (2tx^2-x)+(x^2+t+x)Dx=0.$

28. $x^4=4a^2t^2, \quad x^2\left(Dx\right)^2-a^2=0, \quad a\in\mathbb{R}.$

29. $t^2+x^2=a^2, \quad x=tDx-a\sqrt{1+\left(Dx\right)^2}, \quad a\in\mathbb{R}.$

Показать, что функции $x=x(t)$, заданные параметрически, являются решениями соответствующих уравнений:

30. $\begin{cases} t=\frac{\ln\tau}{2}+\frac{3}{4\tau^2}, \\ x=\frac{\tau}{4}+\frac{3}{4\tau^3}, \quad \tau>0, \end{cases}$ $\qquad (D^2x)^2-2DxD^2x+3=0.$

31. $\begin{cases} t=\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{3p^2}, \\ x=\frac{2}{3p}-\sqrt{p}, \quad p>0, \end{cases}$ $\qquad t\left(x'\right)^2+xx'-1=0.$

32. $\begin{cases} t=\tau^{-2}\ln\tau, \\ x=\tau^{-1}\left(1+2\ln\tau\right), \quad \tau>0, \end{cases}$ $\qquad xDx-2t\left(Dx\right)^2-1=0.$

33. $\begin{cases} t=2\left(1-p\right)+e^{-p}, \\ x=2-p^2+e^{-p}\left(1+p\right), \quad p\in\mathbb{R}, \end{cases}$ $\qquad x=(1+Dx)t+(Dx)^2.$

34. $\begin{cases} t=e^{-\varphi}\cos\varphi, \\ x=\left(1+\sin 2\varphi\right)e^{-2\varphi}/4, \quad \varphi\in\mathbb{R}, \end{cases}$ $\qquad 4x=(Dx+t)^2.$

35. $\begin{cases} t=e^{-\varphi}\left(1+\varphi\right), \\ x=e^{-2\varphi}\left(1+2\varphi+2\varphi^2\right)/4, \quad \varphi\in\mathbb{R}, \end{cases}$ $\qquad 4x=\left(x'\right)^2+t^2.$

36. $\begin{cases} t=e^{-\varphi/2}\cos\varphi, \\ x=\left(2+\sin 2\varphi\right)e^{-\varphi}/4, \quad \varphi\in\mathbb{R}, \end{cases}$ $\qquad 2x=t^2+tDx+(Dx)^2.$

37. $\begin{cases} t=\frac{p^3}{4}-\frac{p^2}{2}, \quad p\in\mathbb{R}, \\ x=3\frac{p^4}{16}-\frac{p^3}{3}, \end{cases}$ $\qquad x=-\frac{(Dx)^3}{12}+\frac{t}{2}Dx+\frac{1}{4}(Dx)^2+t+\frac{t^2}{(Dx)^2}.$

37.1. $\begin{cases} t = \sqrt{1-\tau^2}, \\ x = \dfrac{1}{\tau}, \quad 0 < \tau < 1, \end{cases}$ $\qquad D^2 x - 2t x^2 Dx = x^5.$

37.2. $\begin{cases} t = \sin\tau, \\ x = \dfrac{1}{\cos\tau}, \quad -\dfrac{\pi}{2} < \tau < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ $\qquad D^2 x - 2t x^2 Dx = x^5.$

37.3. $\begin{cases} t = \operatorname{sh}^2\tau, \\ x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2\tau}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \end{cases}$ $\qquad D^2 x + 2x\, Dx = 0.$

Каждое дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, семейство решений, задаваемое формулой, содержащей *произвольные постоянные*.

Рассмотрим обратную задачу: построить дифференциальное уравнение по известному решению $x = x(t, C_1, \dots, C_n)$, заданному соотношением $\Phi(t, x, C_1, \dots, C_n) = 0$.

Дифференциальное уравнение, связывающее t и $x(t)$, получается путем исключения постоянных $C_1, \dots, C_n$ из системы

$$\begin{cases} \Phi\big(t, x, C_1, ..., C_n\big) = 0, \\ D\Phi\big(t, x, C_1, ..., C_n\big) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D^n\Phi\big(t, x, C_1, ..., C_n\big) = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Построить дифференциальные уравнения наименьших порядков, решением которых являются заданные функции:

38. $x = \dfrac{1}{t+C}.$

39. $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \sin t.$

40. $t^2 + Ctx - x^2 = 2t.$

41. $x = C\cos t,\ \ y = C\sin t.$

42. $x^{2/3} + t^{2/3} = C^{2/3}.$

43. $x = Ct + C\big/\sqrt{1+C^2}\,.$

44. $x = t\left(1 + \displaystyle\int \frac{e^t}{t}\,dt\right).$

45. $x = t\displaystyle\int \frac{\sin t}{t}\,dt + 5t^2.$

46. $x = t\left(\displaystyle\int_2^t \frac{\tau}{\ln\tau}\,d\tau + C\right) + \sin t.$

47. $x - C_2 - C_1^2 t - \dfrac{C_1}{2}t^2 = 0.$

48. $3x = 3t + (t + C_1)^3 + C_2.$

49. $3x = 4(t + C_1)^{3/2} + C_2 t + C_3.$

50. $x\ln x + t + C_1 x + C_2 = 0.$

51. $2C_1 x = \big(C_1 t + C_2\big)^2 + 1.$

52. Составить дифференциальное уравнение семейства парабол, оси симметрии которых параллельны оси ординат, а вершины расположены на оси абсцисс.

53. Составить дифференциальное уравнение семейства парабол, вершины которых совпадают с началом координат, а осью симметрии является ось абсцисс.

54. Составить дифференциальное уравнение однопараметрического семейства окружностей единичного радиуса, центры которых лежат на прямой $y = 1$.

55. Составить дифференциальное уравнение семейства эллипсов, центры которых совпадают с началом координат, а оси симметрии – с осями координат.

II. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ

2. Простейшие дифференциальные уравнения. Общее и частное решения. Начальная и граничная задачи. Функция Грина

Простейшим дифференциальным уравнением порядка n является уравнение

$$D^n x = f(t),\ t \in I, \tag{2.1}$$

где функция $f(t)$ непрерывна на промежутке I.

Формула, определяющая совокупность решений рассматриваемого уравнения и содержащая n произвольных постоянных, задает его общее решение.

Общее решение простейшего уравнения задается формулой

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k t^k + \int_s^t \left(\int_s^{\tau_1} \ldots \int_s^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\, d\tau_n \ldots d\tau_2 \right) d\tau_1 \tag{2.2}$$

или формулой

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k t^k + \int_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau \quad \forall s \in I, \quad C_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{2.3}$$

Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных C_k, $k = \overline{0, n-1}$, называют *частным решением*. Для выделения частного решения из общего используют начальные, граничные и другие дополнительные условия. Условия, относящиеся к одному значению аргумента, называют *начальными*, а относящиеся к различным значениям аргумента – *граничными*.

Начальная задача (*задача Коши*) для простейшего уравнения порядка n имеет вид

$$D^n x = f(t),\ t \in I,\ D^k x\big|_{t=s} = \xi_k,\ k = \overline{0, n-1}. \tag{2.4}$$

Решение начальной задачи для простейшего уравнения определяется по формуле

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \frac{(t-s)^k}{k!} + \int_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau\,. \tag{2.5}$$

Найти общие решения уравнений на заданном промежутке:

56. $Dx = t\sin t, \quad I \in \mathbb{R}.$

57. $D^n x = t, \quad I = \mathbb{R}.$

58. $D^3 x = t^{-3}, \quad I = (0, +\infty).$

59. $x' = \cos^2 t, \quad I = \mathbb{R}.$

60. $Dx = \operatorname{tg} t, \quad I = (-\pi/2, \pi/2).$

61. $Dx = (1-t^2)^{-3/2}, \quad I = (-1, 1).$

62. $x' = \sin^3 t, \quad I = \mathbb{R}.$

63. $Dx = e^t \cos t, \quad I = \mathbb{R}.$

64. $D^2 x = \cos 2t, \quad I = \mathbb{R}.$

65. $x'' = (\sin t)/t, \quad I = (0, +\infty).$

66. $D^2 x = e^t/t, \quad I = (0, +\infty).$

Решить начальные задачи и обосновать выбор I:

67. $Dx = \operatorname{ctg} t, \quad I = (0, \pi), \quad x\big|_{t=\pi/2} = -1.$

68. $Dx = t \Big/ \sqrt{4t^2 - 1}, \quad I = (-\infty, -1/2), \quad x\big|_{t=-1} = 7.$

69. $x' = \cos t, \quad I = \mathbb{R}, \quad x\big|_{t=0} = 10.$

70. $Dx = 1 \Big/ \sqrt{1 - t^2}, \quad I = (-1, 1), \quad x\big|_{t=0} = 93.$

71. $D^3 x = -\cos t, \quad I = \mathbb{R}, \quad x\big|_{t=0} = 1, \quad Dx\big|_{t=0} = 0, \quad D^2 x\big|_{t=0} = -1.$

72. $D^3 x = 2/t^3, \quad I = (-\infty, 0), \quad x\big|_{t=-1} = Dx\big|_{t=-1} = D^2 x\big|_{t=-1} = 1.$

73. $D^3 x = e^t + 3t^{-5/2}, \quad I = (0, +\infty), \quad x\big|_{t=1} = Dx\big|_{t=1} = D^2 x\big|_{t=1} = 0.$

74. $x'' = 1, \quad I = \mathbb{R}$:

а) $x\big|_{t=t_0} = \alpha, \quad x'\big|_{t=t_0} = \beta;$

б) $x\big|_{t=0} = 0, \quad x'\big|_{t=0} = 0;$

в) $x\big|_{t=0} = 0, \quad x'\big|_{t=0} = 1;$

г) $x\big|_{t=0} = 1, \quad x'\big|_{t=0} = 0.$

75. $D^3 x = e^{-t}, \quad I = \mathbb{R}, \quad x\big|_{t=0} = Dx\big|_{t=0} = D^2 x\big|_{t=0} = 0.$

76. $D^2 x = (t-1)^{-3} - (t+1)^{-3}, \quad I = (-1, 1), \quad x\big|_{t=0} = Dx\big|_{t=0} = 0.$

Решить граничные задачи:

77. $D^2 x = 2, \quad I = \mathbb{R}, \quad x\big|_{t=-1} = 0, \quad x\big|_{t=1} = 0.$

78. $D^3 x = 2t^{-3}, \quad I = (0, +\infty), \quad x\big|_{t=1} = Dx\big|_{t=2} = D^2 x\big|_{t=3} = 0.$

79. $x' = -\sin t, \quad I = \mathbb{R}, \quad x\big|_{t=0} = 1, \quad x\big|_{t=\pi/2} = 0.$

80. $x' = -\sin t, \quad I = \mathbb{R}, \quad x\big|_{t=0} = 1, \quad x\big|_{t=\pi/2} = 1.$

81. Показать, что граничная задача $Dx = f(t),\ I = \mathbb{R},\ x\big|_{t=s} = a,\ \ x\big|_{t=r} = b,\ s \le t \le r,$ имеет решение лишь в исключительных случаях, и описать эти случаи.

82. Показать, что граничная задача $D^2 x = f(t),\ I = \mathbb{R},\ x\big|_{t=s} = a,\ \ x\big|_{t=r} = b,\ s \le t \le r,$ всегда имеет решение, и найти его.

Граничная задача для простейшего уравнения при $n = 2$

$$D^2 x = f(t), \quad t \in I = [a, b], \quad x\big|_{t=a} = A, \quad x\big|_{t=b} = B,$$

имеет решение

$$x = x(t) = \frac{b-t}{b-a} A + \frac{t-a}{b-a} B + \int_a^b G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

где $G(t,\tau) = (t-\tau) \cdot 1(t-\tau) - \dfrac{t-a}{b-a}(b-\tau)$, $1(t)$ – *функция единичного скачка*, $1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \ge 0. \end{cases}$

Функция $G(t, \tau)$ называется *функцией Грина* граничной задачи.

Записать с помощью функции Грина решения граничных задач:

83. $D^2 x = t, \quad x\big|_{t=0} = 1, \quad x\big|_{t=2} = 1.$

84. $D^2 x = \cos t, \quad x\big|_{t=0} = 0, \quad x\big|_{t=\pi} = 0.$

85. $x'' = \operatorname{tg} t, \quad x\big|_{t=0} = 0, \quad x\big|_{t=\pi/4} = 1.$

86. $x'' = t, \quad x\big|_{t=0} = 0, \quad x\big|_{t=1} = 0.$

3. Уравнения с кусочно-непрерывной неоднородностью

Решением простейшего дифференциального уравнения n-го порядка $D^n x = f(t),\ t \in I,$ с *кусочно-непрерывной неоднородностью* $f(t)$ называется функция, имеющая непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, обладающая кусочно-непрерывной производной (Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Гл. XXIV. §1–2) порядка n и обращающая уравнение в тождество на I всюду, за исключением, быть может, точек разрыва функции f.

Решение задачи Коши (начальной задачи)

$$D^n x = f(t), \quad t \in I, \quad D^k x\big|_{t=s} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad s \in I,$$

в случае кусочно-непрерывной неоднородности f на I может быть получено по формуле (2.5) построения решения задачи Коши для непрерывной функции f.

Задача 3.1. Найти общее решение уравнения $D^3 x = f(t),$ где

$$f(t) = \begin{cases} t+1, & t < 0, \\ t^2, & t \ge 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Так как $D^3 x = D(D^2 x),$ то исходное уравнение приводится к уравнению второго порядка

$$D^2 x = \begin{cases} (t+1)^2/2 + C_1^*, & t < 0, \\ t^3/3 + C_1, & t \ge 0. \end{cases}$$

Учитывая, что искомое решение $x(t)$ должно быть непрерывно на $I = \mathbb{R}$ и иметь непрерывные производные первого и второго порядков, потребуем непрерывности $D^2 x$ в точке $t = 0,$ что приводит к равенству $C_1^* + 0{,}5 = C_1.$ Следовательно, $C_1^* = C_1 - 0{,}5.$ Тогда

$$D^2 x = \begin{cases} (t+1)^2/2 + C_1 - 0{,}5, & t < 0, \\ t^3/3 + C_1, & t \ge 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$D x = \begin{cases} (t+1)^3/3! + (C_1 - 0{,}5)t + C_2^*, & t < 0, \\ t^4/12 + C_1 t + C_2, & t \ge 0. \end{cases}$$

Вследствие непрерывности Dx в точке $t = 0$ получаем $C_2^* + 1/6 = C_2,$ откуда $C_2^* = C_2 - 1/6$. Следовательно,

$$Dx = \begin{cases} (t+1)^3/3! + (C_1 - 0{,}5)t + C_2 - 1/6, & t < 0, \\ t^4/12 + C_1 t + C_2, & t \ge 0, \end{cases}$$

откуда

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{(t+1)^4}{4!}+\left(C_1-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{t^2}{2}+\left(C_2-\dfrac{1}{6}\right)t+C_3^*, & t<0,\\ t^5/60+C_1t^2/2+C_2t+C_3, & t\ge 0.\end{cases}$$

Непрерывность решения $x(t)$ в точке $t=0$ требует выполнения равенства $C_3^*+1/24=C_3$. Следовательно, искомое решение определяется формулой

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{(t+1)^4}{4!}+\left(C_1-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{t^2}{2}+\left(C_2-\dfrac{1}{6}\right)t+C_3-\dfrac{1}{24}, & t<0,\\ t^5/60+C_1t^2/2+C_2t+C_3, & t\ge 0.\end{cases}$$

Задача 3.2. Найти общее решение уравнения $Dx=f(t)$, где

$$f(t)=\begin{cases}-1, & t<0,\\ 1, & t\ge 0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение первого порядка имеет решение

$$x(t)=\begin{cases}-t+C_1^*, & t<0,\\ t+C_1, & t\ge 0,\end{cases}$$

причем $C_1^*=C_1$. Обратим внимание на тот факт, что для найденной *кусочно-дифференцируемой функции* $x(t)$ производная Dx в точке $t=0$ – односторонняя (именно правая) производная – совпадает со значением $f(0)$.

Найти общие решения уравнений:

87. $D^3x=1(t-\alpha),\quad \alpha\in\mathbb{R}.$

88. $D^2x=1(t)\sin(t).$

89. $D^2x=\begin{cases}t, & t<0,\\ \sin t, & t\ge 0.\end{cases}$

90. $Dx=\begin{cases}2+t, & t<0,\\ t^3, & t\ge 0.\end{cases}$

91. $x''=t\operatorname{sgn}t,\quad \operatorname{sgn}t=\begin{cases}-1, & t<0,\\ 0, & t=0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$

Решить задачи Коши:

92. $x'=e^{2t}\cdot 1(t),\quad x|_{t=0}=2.$

93. $D^2x=1/(t-3)$:

а) $x|_{t=3}=1,\quad Dx|_{t=3}=0;$

б) $x|_{t=4}=2,\quad Dx|_{t=4}=1;$

в) $x|_{t=0}=0,\quad Dx|_{t=0}=0.$

4. Геометрические приложения простейших дифференциальных уравнений. Простейшие математические модели естественных процессов

Геометрические приложения. При отыскании кривых $y = y(x)$, удовлетворяющих некоторым условиям, нередко бывает легче установить соотношения между дифференциалами переменных x и y, используя геометрический смысл этих понятий, и, следовательно, построить дифференциальное уравнение для функции $y(x)$. Построение касательной, определение длины подкасательной и поднормали основаны на том, что $y'(x_0)$ определяет угловой коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$ в точке $(x_0, y(x_0))$. *Подкасательной* кривой $y = y(x)$ в точке $(x_0, y(x_0))$ называется проекция на ось абсцисс направленного отрезка касательной, заключенного между точкой касания и точкой пересечения этой касательной с осью абсцисс. *Поднормаль* кривой $y = y(x)$ в точке $(x_0, y(x_0))$ – это проекция на ось абсцисс направленного отрезка нормали от точки $(x_0, y(x_0))$ до точки пересечения нормали с осью абсцисс.

Иногда при решении геометрических задач получается *интегральное уравнение* (уравнение, содержащее интеграл искомой функции), которое приводится к дифференциальному уравнению с помощью операции дифференцирования.

Задача 4.1. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox пропорционален абсциссе точки касания.

Р е ш е н и е. Пусть $y = y(x)$ – искомая функция. Тогда $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ есть тангенс упоминаемого в условии задачи угла. Следовательно, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = ax_0$, где a – коэффициент пропорциональности. Так как требуемое соотношение должно выполняться для всех точек искомой кривой, то имеем дифференциальное уравнение $y' = ax$. Решив его, получим кривые $y = ax^2/2 + C$, $C \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию задачи.

94. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox обратно пропорционален абсциссе точки касания.

95. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox равен квадрату абсциссы точки касания.

96. Найти проходящую через точку $(1, 1)$ кривую, у которой отрезок касательной в произвольной точке этой касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания в отношении 2:3, считая от оси абсцисс.

97. Найти проходящую через точку $(1, 1)$ кривую, у которой отрезок нормали в произвольной точке, заключенный между осями координат, делится точкой касания в отношении 2:3, считая от оси абсцисс.

98. Найти кривые, нормаль в каждой точке которых проходит через точку (a, b).

99. Найти кривые, у которых величина поднормали во всех точках кривой одинакова и равна a, $a > 0$. (У к а з а н и е. При решении полученного дифференциального уравнения рассматривать $x = x(y)$.)

100. Найти кривые, у которых подкасательная во всех точках имеет постоянную длину, равную a.

101. Найти кривые, для которых площадь фигуры, заключенной между осями координат, кривой и прямой, параллельной оси ординат, проходящей через произвольную точку кривой, равна кубу ординаты этой точки. (У к а з а н и е. Воспользоваться формулой вычисления площади криволинейной трапеции с помощью интеграла.)

Простейшие математические модели естественных процессов. При решении задач естествознания с помощью дифференциальных уравнений необходимо сначала составить дифференциальное уравнение задачи, т.е. соотношение, связывающее независимую переменную t, трактуемую чаще всего как время, искомую функцию $x(t)$ и скорость ее изменения $Dx(t) = dx / dt.$ Затем найти его общее решение и, наконец, учесть условия, с помощью которых можно определить значения постоянных, входящих в общее решение дифференциального уравнения.

Задача 4.2. Точечный заряд q находится на продолжении оси тонкого стержня длиной l на расстоянии a от его левого конца. Определить силу притяжения стержня и точечного заряда, если на стержне равномерно распределен заряд Q.

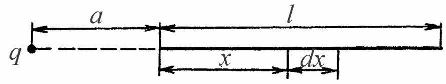


Рис. 1

Р е ш е н и е. По закону Кулона модуль силы притяжения F между двумя точечными зарядами q_1 и q_2, расположенными на расстоянии r друг от друга, выражается зависимостью $F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$, где k – коэффициент пропорциональности (коэффициент притяжения). Определим силу притяжения dF данного точечного заряда элементом dx (рис. 1). Пусть Q_1 – заряд стержня длиной dx, тогда $Q_1 = Q\,dx / l$, где Q / l – заряд стержня единичной длины. Расстояние r между точечным зарядом и зарядом элемента dx стержня равно $a + x.$ Применив закон Кулона, получим дифференциальное уравнение $dF = k\frac{qQdx}{l(a+x)^2}$, проинтегрировав которое найдем общее решение $F = -k\frac{qQ}{l}\frac{1}{a+x} + C.$ Так как при $x = 0$ сила F равна нулю, то $C = k\frac{qQ}{l}\frac{1}{a}.$ Тогда сила притяжения F точечного заряда отрезком стержня длиной x равна $k\frac{qQ}{l}\frac{x}{a(a+x)}.$ При $x = l$ определяем силу притяжения точки всем стержнем: $F = k\frac{qQ}{a(a+1)}.$

102. Найти зависимость пути s от времени t при равномерном прямолинейном движении со скоростью v_0, если $s\big|_{t=t_0} = s_0$.

103. Материальная точка движется прямолинейно с постоянным ускорением a. Найти закон движения точки, если начальная скорость ее v_0, а путь, пройденный к началу движения, равен s_0.

104. Найти закон движения материальной точки при свободном падении с заданной высоты h_0 с начальной скоростью v_0.

105. Тело движется по прямой с ускорением, равным $a_0 / (1+t)^2$ (a_0 – постоянная). Движение начинается из состояния покоя при $t = 0$. Найти закон движения тела.

106. Скорость изменения концентрации $c(t)$ препарата с изотопным индикатором в момент времени t равна 2^{-t} (где t – время в часах). Найти концентрацию в момент $t = 3$, если начальная концентрация составляет 1 г/л.

107. Скорость роста популяции насекомых в момент времени t (время выражено в днях) задается величиной $9000 / (1+t)^2$. Найти численность популяции насекомых в момент времени t, если вначале популяция состояла из 1000 насекомых.

108. Дрожжи в растворе сахара растут таким образом, что их масса увеличивается со скоростью $1{,}03^t \ln 1{,}03$ (t – время в часах). Пусть начальная масса дрожжей составляет 1 г. Составить математическую модель процесса и найти значение массы дрожжей после:

а) 10 мин роста; б) 20 мин роста.

109. Скорость роста популяции бактерий в момент времени t равна $10^4 - 2 \cdot 10^3 t$ (где t – время в часах). В начальный момент численность популяции равна 10^6. Найти численность популяции после:

а) 1 ч; б) 5 ч; в) 10 ч.

Указать момент времени, в который популяция будет максимальной.

110. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает со скоростью

$$v = 1000 \frac{100 + 3t^2}{\left(100 + t^2\right)^2},$$

где t – время в часах. Найти размер этой популяции: а) в момент времени t; б) максимальный.

111. Судно водоизмещением m, движущееся прямым курсом, в момент включения двигателя имело скорость $\overline{v}_0$. Считая, что модуль силы упора винтов $\overline{Q}$ пропорционален времени с коэффициентом пропорциональности k, а сила сопротивления воды $\overline{T}$ постоянна, составить математическую модель движения, определить путь s, пройденный судном за время t_1, если за это время его скорость увеличилась в два раза.

111.1. В ультрацентрифугах скорость смещения молекул исследуемого полимера в направлении от оси вращения выражается формулой $v = b\omega^2 x$, где b – постоянная величина, характеризующая данный полимер, ω – угловая скорость вращения, x – расстояние от оси вращения до движущейся границы оседающего полимера. Найти закон движения границы полимера, если в момент времени $t = 0$ она находилась на расстоянии x_0 от оси вращения.

111.2. Скорость изменения пороговой силы тока выражается формулой $I'(t) = 1{,}12 / t^2$. Найти закон изменения тока, если в момент времени $t = t_0 > 0$ соответствующее значение тока равно I_0.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

III. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5. Линейные уравнения со стационарным оператором

Общее решение однородного уравнения. *Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами* в основной форме имеет вид

$$D^n x + a_{n-1}D^{n-1}x + \ldots + a_1 D x + a_0 x = f(t),\ t \in I, \tag{5.1}$$

где $a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0, n-1},$ а f непрерывна на I. Если $f \equiv 0,$ то уравнение называют *однородным*, при $f \not\equiv 0$ – *неоднородным*.

Уравнение

$$D^n x + a_{n-1}D^{n-1}x + \ldots + a_1 D x + a_0 x = 0 \tag{5.2}$$

есть однородное уравнение, соответствующее исходному неоднородному, где $a_0, \ldots, a_{n-1}$ те же, что и в исходном уравнении (5.1).

Стационарный дифференциальный оператор n-го порядка

$$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0, \tag{5.3}$$

определенный на множестве функций с непрерывной производной порядка $n,$ является *линейным оператором*, т.е.

$$L_n(\alpha x + \beta y) = \alpha L_n x + \beta L_n y, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Линейное уравнение (5.1) со стационарным оператором L_n (иногда называемое *стационарным уравнением*) записывается в виде

$$\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0\right)x = f(t), \quad t \in I, \tag{5.5}$$

или кратко:

$$L_n x = f(t), \quad t \in I. \tag{5.6}$$

Для стационарного линейного оператора L_n алгебраическое относительно v уравнение

$$v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \ldots + a_1 v + a_0 = 0 \tag{5.7}$$

называется *характеристическим уравнением оператора* L_n. Корни его $v_1, v_2, \ldots, v_m$ кратностей $d_1, d_2, \ldots, d_m$ соответственно $(d_1 + d_2 + \ldots + d_m = n)$ называются *характеристическими числами* линейного однородного дифференциального уравнения или *собственными значениями оператора* L_n, при этом *характеристический полином* оператора L_n может быть записан в виде

$$v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \ldots + a_1 v + a_0 = (v - v_1)^{d_1}(v - v_2)^{d_2} \ldots (v - v_m)^{d_m}.$$

Над операторами производятся обычные действия, как над полиномами от D, поэтому оператор L_n можно разложить на множители, т.е. *факторизовать*:

$$L_n = \left(D - v_1 D^0\right)^{d_1} \left(D - v_2 D^0\right)^{d_2} \cdots \left(D - v_m D^0\right)^{d_m}. \qquad (5.8)$$

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения со стационарным оператором имеет вид

$$x(t) = \sum_{l=1}^{r} \left(Q_l(t)\cos \mu_l t + R_l(t)\sin \mu_l t\right)\exp(\lambda_l t) + \sum_{j=2r+1}^{m} P_j(t)\exp(v_j t), \qquad (5.9)$$

где $v_{2l-1} = \lambda_l + i\mu_l$, $v_{2l} = \lambda_l - i\mu_l$, $l = \overline{1, r}$, – попарно комплексно-сопряженные корни характеристического полинома; v_j, $j = 2r+1, \ldots, m$, – действительные корни; Q_l, R_l, P_j – полиномы с произвольными действительными коэффициентами. Степень Q_l, равная степени R_l, на единицу меньше кратности корня $v_{2l-1} = \lambda_l + i\mu_l$. Степень P_j на единицу меньше кратности действительного корня v_j. Каждое слагаемое первой суммы общего решения строится для пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения. Каждому действительному корню характеристического уравнения соответствует слагаемое второй суммы.

Совокупность решений однородного уравнения $L_n x = 0$ является *n*-мерным линейным пространством. Базис этого пространства называют *базисом пространства решений* или *фундаментальной системой решений* однородного уравнения.

Задача 5.1. Построить общее решение однородного уравнения $L_n x = 0$.

А л г о р и т м р е ш е н и я.

- Составить характеристическое уравнение (5.7), найти его корни и их кратности.
- Определить степени многочленов Q_l, R_l, P_j.
- Записать общее решение уравнения, используя формулу общего решения (5.9).

Задание 5.1.1. Построить общее решение для следующих однородных уравнений:

а) $x'' - 4x' = 0$;

б) $D^3 x - 3Dx + 2x = 0$;

в) $x'' + 2x' + 10x = 0$;

г) $D^4 x + 2D^2 x - 8Dx + 5x = 0$;

д) $D^5 x - 8D^4 x + 26D^3 x - 40D^2 x + 25Dx = 0$.

Р е ш е н и е.

а)

$\nu^2 - 4 \cdot \nu$ solve $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad x(t) = C_1 + C_2 e^{4t}$

б)

$\nu^3 - 3 \cdot \nu + 2$ solve $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad x(t) = \left(C_1 + C_2 \cdot t\right)e^{t} + C_3 \cdot e^{-2t}$

в)

$$v^2 + 2 \cdot v + 10 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} -1 - 3i \\ -1 + 3i \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \left(C_1 \cdot \cos(3t) + C_2 \cdot \sin(3t)\right)e^{-t}$$

г)

$$v^4 + 2 \cdot v^2 - 8 \cdot v + 5 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 - 2i \\ -1 + 2i \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 \cdot t\right)e^{t} + \left(C_3 \cdot \cos(2t) + C_4 \cdot \sin(2t)\right) \cdot e^{-t}$$

д)

$$v^5 - 8 \cdot v^4 + 26 \cdot v^3 - 40 \cdot v^2 + 25 \cdot v \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - i \\ 2 - i \\ 2 + i \\ 2 + i \end{pmatrix}$$

$$x(t) = C_1 + \left[\left(C_2 + C_3 \cdot t\right)\cos(t) + \left(C_4 + C_5 \cdot t\right) \cdot \sin(t)\right] \cdot e^{2t}$$

В данном листинге мы использовали символьное преобразование MathCad, а именно из палитры Symbolic команду Solve (решить), которая решает уравнение или неравенство относительно выделенной переменной. Напомним, что для решения уравнения нужно ввести выражение, выделить в нем переменную и щелкнуть по строке Solve пункта Variable меню Symbolics или, как сделали мы, воспользоваться панелью Symbolic.

Построить общие решения уравнений:

112. $D^2x + Dx - 2x = 0.$

113. $x'' + 4x' + 3x = 0.$

114. $D^2x - 2Dx = 0.$

115. $2x'' - 5x' + 2x = 0.$

116. $D^2x + 7Dx = 0.$

117. $x'' - 4x' + 5x = 0.$

118. $D^3x - 3D^2x + 4Dx - 2x = 0.$

119. $D^2x - Dx + x = 0.$

120. $D^4x - x = 0.$

121. $D^4x - 5D^2x + 10Dx - 6x = 0.$

122. $D^4x + 2D^3x + 4D^2x + 6Dx + 3x = 0.$

123. $D^3x + 5D^2x + 7Dx + 3x = 0.$

Задача 5.2. Для уравнения $D^n x + a_{n-1}D^{n-1}x + \ldots + a_1Dx + a_0x = 0$ выписать и факторизовать оператор L_n. Построить общее решение однородного уравнения $L_n x = 0$.

Алгоритм решения.

- Записать L_n по формуле (5.3).
- Найти собственные значения оператора L_n и их кратности, составив и решив характеристическое уравнение (5.7).
- Записать оператор L_n в факторизованном виде по формуле (5.8).
- Записать общее решение уравнения.

Задание 5.2.1. Для уравнения

$$D^7x - 5D^6x + 11D^5x - 15D^4x + 19D^3x - 15D^2x + 9Dx - 5x = 0$$

выписать и факторизовать оператор L_7. Построить общее решение уравнения $L_7 x = 0$.

Решение.

$$\nu^7 - 5\cdot\nu^6 + 11\cdot\nu^5 - 15\cdot\nu^4 + 19\cdot\nu^3 - 15\cdot\nu^2 + 9\cdot\nu - 5 \text{ solve } \to \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -i \\ i \\ i \\ 2-i \\ 2+i \end{pmatrix}$$

$$L_7 = \left(D - D^0\right)\cdot\left(D - i\cdot D^0\right)^2\cdot\left(D + i\cdot D^0\right)^2\cdot\left\lceil D - (2-i)\cdot D^0\right\rceil\cdot\left\lceil D - (2+i)\cdot D^0\right\rceil$$

Окончательно $x(t) = C_1e^t + (C_2t + C_3)\cos t + (C_4t + C_5)\sin t + (C_6\cos t + C_7\sin t)e^{2t}$.

Для данных уравнений выписать и факторизовать оператор L_n. Построить общие решения уравнений:

124. $D^2x - 2Dx + x = 0.$

125. $x'' - 6x' + 13x = 0.$

126. $D^2x + 4x = 0.$

127. $4x'' + 4x' + x = 0.$

128. $D^2x + 3x = 0.$

129. $x'' + 4x' + 4x = 0.$

130. $D^3x + 4D^2x - Dx - 4x = 0.$

131. $D^3x + 4D^2x - Dx - 4x = 0.$

132. $D^3x - 2D^2x = 0.$

133. $D^4x - 5D^2x + 4x = 0.$

134. $D^4x + 4D^2x + 3x = 0.$

135. $D^4x + 2D^2x - 8Dx + 5x = 0.$

136. $D^5x - 10D^3x + 9Dx = 0.$

137. $D^7x + 4D^6x - D^3x - 4D^2x = 0.$

138. $D^4x - 8D^3x + 26D^2x - 40Dx + 25x = 0.$

Построить общее решение уравнения $L_n x = 0$:

139. $L_9 = \left(D - 3D^0\right)^2\left(D - iD^0\right)\left(D + iD^0\right)\left(D - \frac{1+i}{3}D^0\right)^2\left(D - \frac{1-i}{3}D^0\right)^2 D.$

140. $L_6 = \left(D - D^0\right)^3\left(D - (2+i)D^0\right)\left(D - (2-i)D^0\right)\left(D - \sqrt{7}D^0\right).$

141. $L_8 = \left(D + \left(1 + i\sqrt{3}\right)D^0\right)^3\left(D + \left(1 - i\sqrt{3}\right)D^0\right)^3 D\left(D + D^0\right).$

142. $L_8 = \left(D + \left(1 + i\sqrt{2}\right)D^0\right)^2\left(D + \left(1 - i\sqrt{2}\right)D^0\right)^2 D^3\left(D - \frac{1}{2}D^0\right).$

143. $L_8 = \left(D - i\sqrt{5}D^0\right)^4\left(D + i\sqrt{5}D^0\right)^4.$

144. $L_7 = \left(D - i\sqrt{5}D^0\right)^2 \left(D + i\sqrt{5}D^0\right)^2 \left(D + \sqrt{5}D^0\right)^3.$

145. $L_9 = \left(D - \sqrt{3}D^0\right)^3 \left(D + \sqrt{3}D^0\right)^3 \left(D - (3-i)D^0\right) D \left(D - (3+i)D^0\right).$

146. $L_{10} = D^5 \left(D + D^0\right)^2 \left(D - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)D^0\right)\left(D - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)D^0\right)\left(D + 0{,}7D^0\right).$

147. $L_5 = \left(D - 0{,}1D^0\right)^2 \left(D - \left(\sqrt{3} + \frac{i}{2}\right)D^0\right)\left(D - \left(\sqrt{3} - \frac{i}{2}\right)D^0\right)D.$

148. $L_{10} = \left(D + 0{,}1D^0\right)^4 \left(D + iD^0\right)^2 \left(D - iD^0\right)^2 \left(D - (i+2)D^0\right)\left(D + (i-2)D^0\right).$

149. Составить линейное однородное уравнение со стационарным оператором по его характеристическому уравнению:

а) $9v^2 - 6v + 1 = 0;$ в) $(v^2+1)^2 = 0;$

б) $v(v+1)(v+2) = 0;$ г) $v^2(v-1) = 0.$

150. Составить линейное однородное уравнение со стационарным оператором и записать его общее решение по заданным корням его характеристического уравнения:

а) $v_1 = 1,\ d_1 = 1;\ v_2 = 2,\ d_2 = 1;$

б) $v_1 = 1,\ d_1 = 3;$

в) $v_1 = 3 + 2i,\ d_1 = 1;\ v_2 = 3 - 2i,\ d_2 = 1;$

г) $v_1 = 2,\ d_1 = 1;\ v_2 = i,\ d_2 = 1;\ v_3 = -i,\ d_3 = 1.$

151. При каких значениях параметра λ уравнение $D^2x + \lambda x = 0$ имеет ненулевые решения, удовлетворяющие граничным условиям $x\big|_{t=0} = 0,\ x\big|_{t=\pi} = 0$? Найти эти решения.

152. Решить граничные задачи:

а) $D^2x + x = 0, \quad x\big|_{t=0} = 1, \quad x\big|_{t=\pi/2} = 1;$

б) $D^2x + x = 0, \quad x\big|_{t=0} = 1, \quad x\big|_{t=\pi} = 2;$

в) $D^2x + x = 0, \quad x\big|_{t=0} = 1, \quad x\big|_{t=2\pi} = 1.$

153. При каких значениях α граничная задача для уравнения $D^2 x + \alpha x = 0$ имеет ненулевое решение, если:

а) $Dx\big|_{t=0} = Dx\big|_{t=\pi} = 0;$ б) $x\big|_{t=0} = x\big|_{t=\pi},\quad Dx\big|_{t=0} = Dx\big|_{t=\pi}$?

154. Решить граничную задачу

$$D^4x - \alpha^4 x = 0, \quad x\big|_{t=0} = D^2 x\big|_{t=0} = 0, \quad x\big|_{t=\pi} = D^2x\big|_{t=\pi} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Дифференциальное уравнение радиоактивного распада. Атомы радиоактивных элементов с течением времени распадаются. Опытным путем установлено, что скорость распада пропорциональна числу нераспавшихся в данный момент атомов. Поэтому дифференциальное уравнение, описывающее процесс радиоактивного распада, имеет вид

$$N'(t) = -\lambda N(t),$$

где λ – постоянная распада, дающая вероятность распада атома данного радиоактивного вещества в единицу времени; $N(t)$ – число нераспавшихся атомов в момент времени t. Если в момент времени $t = t_0$ число нераспавшихся атомов равно N_0, то закон, по которому происходит процесс радиоактивного распада, имеет вид

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

154.1. За 15 ч распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через какое время останется 1% от первоначального количества этого радиоактивного вещества?

154.2. Определить период полураспада (т.е. интервал времени, в течение которого распадается половина атомов радиоактивного вещества) радиоактивных изотопов серебра ${}_{47}Ag^{110}$ и ${}_{47}Ag^{111}$, если их постоянные распада равны $2{,}97 \cdot 10^{-8}$ с$^{-1}$ и $1{,}07 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$ соответственно.

154.3. Сколько ядер радиоактивного йода ${}_{53}J^{131}$ из каждого миллиарда распадается за 1 с, если период полураспада йода равен 8,14 сут?

154.4. Определить, какая доля ядер радиоактивного изотопа стронция ${}_{38}Sr^{89}$ распадается за 2 ч, если период полураспада этого изотопа равен 51 сут.

Дифференциальное уравнение роста народонаселения. В простейшего типа математических моделях роста народонаселения предполагается, что скорость изменения количества населения пропорциональна количеству народонаселения в данный момент времени. Поэтому дифференциальное уравнение, описывающее процесс роста народонаселения, имеет вид

$$P'(t) = \lambda\, P(t),$$

где $\lambda -$ постоянная роста; $P(t) -$ количество народонаселения в момент времени t. Если в момент времени $t = t_0$ количество народонаселения равно P_0, то закон роста народонаселения имеет вид

$$P(t) = P_0\, e^{\lambda(t-t_0)}.$$

154.5. Население земли в 1990 г. составляло 5 млрд 264 млн человек, а в 2000 г. – 6 млрд 71 млн. Какое количество населения ожидается на земле в 2020 и в 2050 гг., если предположить, что скорость его роста остается все время постоянной?

154.6. Прирост народонаселения стран Океании начиная с 1980 г. приближенно равен 1,48% в год. Какое количество народонаселения в странах Океании ожидается в 2050 г., если в 1980 г. оно было равно 22 млн 830 тыс. человек?

154.7. Из статистических данных известно, что для рассматриваемого региона скорость изменения количества населения пропорциональна количеству населения в данный момент времени. Найти численность населения через 10 лет, если в начале года оно составляло 10 млн человек, а за год число умерших превысило число родившихся на 35 тыс.

Дифференциальное уравнение колебательного движения. Простейшие случаи колебательных движений материальной точки имеют большое значение как в технических приложениях, так и при рассмотрении различных явлений природы. Таков, например, закон движения груза, подвешенного на упругой пружине, движение часового маятника, движение отдельных точек струн музыкальных инструментов, движение отдельных предметов на корабле при боковой качке, изменение силы тока в электрической цепи, сезонное размножение популяций и т.д. Все эти движения имеют некоторые общие черты и характеристики. К ним относятся: положение равновесия; максимальное отклонение от положения равновесия (*амплитуда колебаний*); время, в течение которого совершается полный цикл колебательного движения (*период*).

Для описания закона движения материальной точки используется *второй закон Ньютона*: при постоянной массе m произведение массы точки на ее абсолютное ускорение равно приложенной к материальной точке силе $\vec{F}$, т.е. $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$, где $\vec{v}$ – вектор скорости.

Рассмотрим, к примеру, очень важную с точки зрения приложений механическую систему, изображенную на рис. 2. Движение материальной точки массой m описывается дифференциальным уравнением

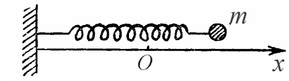


Рис. 2

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k_1\frac{dx}{dt}-k_2x+f\left(t\right).$$

где x – отклонение материальной точки от положения равновесия; $-k_1\dfrac{dx}{dt}$ – сила сопротивления среды, которую считаем пропорциональной скорости; $-k_2\,x$ – сила упругости пружины; $f(t)$ – вынуждающая внешняя сила. В случае, когда сила сопротивления среды и вынуждающая сила отсутствуют, уравнение принимает вид $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k_2x$ или $D^2\,x+k^2\,x=0,$ где $k^2=k_2\,/\,m.$ Это уравнение называют *уравнением свободных колебаний*. Его общее решение имеет вид

$$x=C_1\cos k\,t+C_2\sin k\,t\ \text{ или }\ x=A\cos(k\,t+\varphi),$$

где $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$ – *амплитуда*; $\varphi=\operatorname{arctg}(C_2\,/\,C_1)$ – *начальная фаза* свободных колебаний. Число k называют *частотой колебания*. Движение такой материальной точки называют *гармоническим*; $T=2\pi/k$ – *период* свободных колебаний.

В случае, когда сопротивлением среды пренебречь нельзя, а вынуждающая сила отсутствует, движение рассматриваемой механической системы описывается уравнением вида $D^2\,x+2\,a\,D\,x+$ $+\,k^2\,x=0.$ При $k^2-a^2>0$ решение этого уравнения

$$x=e^{-at}\left(C_1\cos\sqrt{k^2-a^2}\,t+C_2\sin\sqrt{k^2-a^2}\,t\right)$$

может быть представлено в виде

$$x=Ae^{-at}\cos\left(\sqrt{k^2-a^2}\,t+\varphi\right),\quad A,\,\varphi\in\mathbb{R}.$$

Амплитуда этого гармонического колебания равна $A\,e^{-a\,t}$, при $a>0$ с увеличением времени t она уменьшается, а рассматриваемое уравнение описывает *затухающее гармоническое колебание*. Промежуток времени между двумя последовательными максимальными отклонениями от положения равновесия называется *периодом затухающего колебания* $T=2\pi\Big/\sqrt{k^2-a^2}$. При $a^2-k^2>0$ решение дифференциального уравнения $x=C_1\exp\left(-a+\sqrt{a^2-k^2}\right)t+C_2\exp\left(-a-\sqrt{a^2-k^2}\right)t$ не носит колебательного характера и называется *апериодическим*. Апериодическое движение описывается уравнением и при $a^2-k^2=0.$ В этом случае $x=(C_1+C_2t)e^{-a\,t}$.

155. При каких значениях h все ненулевые решения уравнения $D^2\,x+h\,x=0$ представляют собой гармонические колебания? Указать их вид и период.

156. При каких значениях b все ненулевые решения уравнения $D^2 x + 2Dx + bx = 0$ представляют собой:

а) затухающие гармонические колебания;

б) затухающие апериодические движения?

157. При каких значениях a все ненулевые решения уравнения $D^2 x + 2aDx + x = 0$ представляют собой затухающие гармонические колебания?

158. При каких значениях k все ненулевые решения уравнения $x'' + 2x' + k^2 x = 0$ представляют собой затухающие гармонические колебания?

159. Определить период колебаний, описываемых уравнениями:

а) $x'' + 2x' + 10x = 0$;
в) $x'' - x' + x = 0$;

б) $x'' + 3x = 0$;
г) $x'' + 4x' + 5x = 0$.

160. При каких a и b все решения уравнения $D^2 x + aDx + bx = 0$ ограничены на всей числовой оси $-\infty < t < +\infty$?

161. При каких a и b все решения уравнения $D^2 x + aDx + bx = 0$ стремятся к нулю, если: а) $t \to +\infty$; б) $t \to -\infty$?

162. При каких a и b уравнение $D^2 x + aDx + bx = 0$ имеет хотя бы одно отличное от нулевого решение, стремящееся к нулю при $t \to +\infty$?

163. При каких a и b каждое решение уравнения $D^2 x + aDx + bx = 0$ обращается в нуль на бесконечном множестве точек t?

164. При каких a и b каждое решение уравнения $x'' + ax' + bx = 0$ монотонно?

165. При каких a и b хотя бы одно решение уравнения $x'' + ax' + bx = 0$, кроме нулевого, монотонно?

166. Найти условие, при котором общее решение уравнения $m\dfrac{d^2s}{dt^2} + k\dfrac{ds}{dt} + cs = 0$ (где m, k, c – постоянные):

а) содержит тригонометрические функции;

б) не содержит тригонометрических функций.

167. Доказать, что если за счет малости k величиной k^2/m^2 можно пренебречь по сравнению с $4\dfrac{c}{m}$, то решение уравнения $m\dfrac{d^2s}{dt^2} + k\dfrac{ds}{dt} + cs = 0$ приближенно равно решению уравнения, которое получилось бы в случае $k = 0$, умноженному на $e^{-\frac{kt}{2m}}$.

З а м е ч а н и е. Данное уравнение описывает движение частицы массы m, притягиваемой к неподвижной точке, находящейся на линии движения этой частицы, с силой, пропорциональной расстоянию от неподвижной точки до частицы, в среде с трением, пропорциональным скорости частицы (c и k – коэффициенты пропорциональности). Полученное утверждение показывает, что небольшая сила трения оставляет движение частицы практически неизменным, но при этом происходит уменьшение в геометрической прогрессии амплитуд следующих друг за другом колебаний.

168. *Математическим маятником* называется материальная точка массой m, подвешенная на невесомом стержне длиной l и движущаяся в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Уравнение движения математического маятника имеет вид $\theta'' + p\theta' + q\sin\theta = 0,$ где $p = b/m$ (постоянная b характеризует сопротивление среды); $q = g/l,$ $g-$ ускорение свободного падения; $\theta = \theta(t)-$ угол отклонения стержня от вертикали. Для малых отклонений маятника от вертикали, т.е. для малых величин угла θ, учитывая, что $\sin\theta = \theta + o(\theta^2)$ при $\theta \to 0,$ получаем приближенное линейное уравнение движения математического маятника $\theta'' + p\theta' + q\theta = 0.$ Для малых отклонений маятника выделить случаи, когда маятник:

а) стремится занять вертикальное положение: двигаясь апериодически; совершая затухающие колебания;

б) совершает периодические колебания.

169. Угловое ускорение при кручении описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k^2\varphi - 2n\frac{d\varphi}{dt}.$$

Пусть $\varphi = \varphi_0$ при $t = 0$ и угловая скорость кручения равна нулю. Найти зависимость угла кручения φ от времени t в следующих случаях:

а) $k^2 > n^2$; б) $k^2 = n^2$; в) $k^2 < n^2$.

170. Уравнение движения стрелки гальванометра для малых колебаний имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2k\frac{d\theta}{dt} + \omega^2\left(\theta - \alpha\right) = 0,$$

где $\theta-$угол, на который стрелка поворачивается в момент времени t (k, ω, α – заданные постоянные). Решить это уравнение, если:

а) $k > \omega$; б) $k = \omega$; в) $k < \omega$.

171. Уравнение поперечных колебаний упругого тонкого стержня имеет вид

$$\frac{d^4u}{dz^4} + 2\beta\frac{d^2u}{dz^2} + \gamma^2 u = 0,$$

где β, γ – постоянные. Построить общее решение уравнения при $2\beta = -13,$ $\gamma = 6.$

172. Уравнение свободных колебаний упругого кольца имеет вид

$$\frac{d^6\omega}{d\theta^6} + r\frac{d^4\omega}{d\theta^4} + \left(1 - \alpha^2\right)\frac{d^2\omega}{d\theta^2} + \alpha^2\omega = 0,$$

где $r, \alpha-$ постоянные. Построить общее решение при $r = -2,$ $\alpha^2 = 2.$

173. Конденсатор емкостью C разряжается через цепь с сопротивлением R и коэффициентом самоиндукции $L.$ Задача Коши $U'' + pU' + qU = 0,$ $U(t_0) = U_0,$ $U'(t_0) = -I_0/2,$ определяет закон изменения напряжения $U = U(t)$ на обкладках конденсатора; $p = R/L;$ $q = l/(LC);$ I_0 – сила тока в цепи в момент $t_0.$ Указать случаи:

а) когда $U(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ без колебаний;

б) когда $U(t)$ совершает периодические колебания;

в) когда $U(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty,$ совершая колебания.

6. Базис пространства решений

Совокупность решений $\psi_k(t),\ k=\overline{0,\,n-1},$ линейного однородного уравнения линейно независима на I тогда и только тогда, когда *определитель Вронского*

$$W(t)=\begin{vmatrix}\psi_0 & \dots & \psi_{n-1}\\ D\psi_0 & \dots & D\psi_{n-1}\\ \dots & \dots & \dots\\ D^{n-1}\psi_0 & \dots & D^{n-1}\psi_{n-1}\end{vmatrix}$$

не обращается в нуль ни в одной точке I. Из *формулы Лиувилля – Остроградского* $W(t)=$ $=W(t_0)e^{-a_{n-1}t}$, $t_0,t\in I$, следует, что если $W(t_0)\neq 0$, то $W(t)\neq 0$ на I.

Совокупность n линейно независимых решений $\psi_k(t),\ k=\overline{0,n-1},$ однородного уравнения $L_n x=0$ образует *базис пространства его решений*.

Общее решение однородного уравнения строится с помощью базиса по формуле

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_k\psi_k(t),\quad C_k\in\mathbb{R},\quad k=\overline{0,n-1}. \tag{6.1}$$

Задача 6.1. Показать, что данные решения $\psi_k(t),\ k=\overline{0,n-1},$ однородного уравнения $L_n x=0$ образуют базис пространства решений. Построить это уравнение и записать его общее решение.

Алгоритм решения.

- Найти $D^j\psi_k(t),\ j=\overline{0,n-1}.$
- Вычислить $D^j\psi_k(t),\ j=\overline{0,n-1}$ при $t=0.$
- Вычислив определитель Вронского, установить, что система функций $\psi_k(t),\ k=\overline{0,n-1},$ образует базис пространства решений дифференциального уравнения n-го порядка.
- Записать общее решение уравнения по формуле (6.1). Восстановить собственные значения оператора $L_n x$ и их кратности.

Задание 6.1.1. Показать, что решения $\psi_0(t)=t^2e^{3t}$, $\psi_1(t)=te^{3t}$, $\psi_2(t)=e^{3t}$, $\psi_3(t)=\cos 2t$, $\psi_4(t)=\sin 2t$, $\psi_5(t)=t\sin t$, $\psi_6(t)=\sin t$, $\psi_7(t)=t\cos t$, $\psi_8(t)=\cos t$ однородного уравнения $L_9 x=0$ образуют базис пространства его решений. Построить это уравнение и записать его общее решение.

Решение. При помощи MathCad выполним некоторые вычисления.

Определим вектор-строку $\psi(t)$, компонентами которой будут заданные функции $\psi_k(t),\ k=\overline{0,n-1}.$ Построим далее функцию, вычисляющую $D^j\psi_k(t),\ j=\overline{1,n-1},$ в любой точке t, а затем функцию $M(j)$, значениями которой будут $D^j\psi_k(0),\ j=\overline{1,n-1}.$ По этим значениям, открыв шаблон матрицы размером 9×9, построим матрицу $W0$ и далее вычислим ее определитель.

$$\psi(t):=\left(t^2\cdot e^{3\cdot t}\quad t\cdot e^{3\cdot t}\quad e^{3\cdot t}\quad \cos(2\cdot t)\quad \sin(2\cdot t)\quad t\cdot\sin(t)\quad \sin(t)\quad t\cdot\cos(t)\quad \cos(t)\right)$$

$$D\psi(t,j):=\frac{d^j}{dt^j}\psi(t) \qquad\qquad M(j):=D\psi(0,j)$$

$$\psi(0)\rightarrow(0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$$

$M(1) \rightarrow (0\ \ 1\ \ 3\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0)$

$M(2) \rightarrow (2\ \ 6\ \ 9\ \ -4\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ -1)$

$M(3) \rightarrow (18\ \ 27\ \ 27\ \ 0\ \ -8\ \ 0\ \ -1\ \ -3\ \ 0)$

$M(4) \rightarrow (108\ \ 108\ \ 81\ \ 16\ \ 0\ \ -4\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$

$M(5) \rightarrow (540\ \ 405\ \ 243\ \ 0\ \ 32\ \ 0\ \ 1\ \ 5\ \ 0)$

$M(6) \rightarrow (2430\ \ 1458\ \ 729\ \ -64\ \ 0\ \ 6\ \ 0\ \ 0\ \ -1)$

$M(7) \rightarrow (10206\ \ 5103\ \ 2187\ \ 0\ \ -128\ \ 0\ \ -1\ \ -7\ \ 0)$

$M(8) \rightarrow (40824\ \ 17496\ \ 6561\ \ 256\ \ 0\ \ -8\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$

$$W0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 18 & 27 & 27 & 0 & -8 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 108 & 108 & 81 & 16 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 540 & 405 & 243 & 0 & 32 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2430 & 1458 & 729 & -64 & 0 & 6 & 0 & 0 & -1 \\ 10206 & 5103 & 2187 & 0 & -128 & 0 & -1 & -7 & 0 \\ 40424 & 17496 & 6561 & 256 & 0 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку определитель Вронского не равен нулю, то заданная система образует базис. Далее выпишем общее решение по формуле (6.1):

$$x(t) = C_0 t^2 e^{3t} + C_1 t e^{3t} + C_2 e^{3t} + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t + C_5 t \sin t + C_6 \sin t + C_7 t \cos t + C_8 \cos t.$$

Перегруппировав слагаемые, построим решение в виде (5.9)

$$x(t) = (C_0 t^2 + C_1 t + C_2) e^{3t} + (C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t) + (C_5 t + C_6) \sin t + (C_7 t + C_8) \cos t.$$

Отсюда видно, что

$$\nu_1 = 3,\ d_1 = 3,\quad \nu_2 = 2i,\ d_2 = 1,\quad \nu_3 = -2i,\ d_3 = 1,\quad \nu_4 = i,\ d_4 = 2,\quad \nu_5 = -i,\ d_5 = 2.$$

При помощи MathCad выполним следующие символьные преобразования, чтобы получить характеристический полином, его коэффициенты и, следовательно, само однородное уравнение. При этом для символьных преобразований используем две операции палитры Symbolic:

- collect – результатом является многочлен заданной переменной;
- coeffs – находятся коэффициенты многочлена.

$v_1 := 3 \qquad d_1 := 3 \qquad v_2 := 2i \qquad d_2 := 1 \qquad v_3 := -2i \qquad d_3 := 1$

$v_4 := i \qquad d_4 := 2 \qquad v_5 := -i \qquad d_5 := 2$

$$g(\nu) := (\nu - v_1)^{d_1} \cdot (\nu - v_2)^{d_2} \cdot (\nu - v_3)^{d_3} \cdot (\nu - v_4)^{d_4} \cdot (\nu - v_5)^{d_5}$$

$$g(\nu)\ \text{collect} \ \rightarrow \nu^9 - 9 \cdot \nu^8 + 33 \cdot \nu^7 - 81 \cdot \nu^6 + 171 \cdot \nu^5 - 243 \cdot \nu^4 + 247 \cdot \nu^3 - 279 \cdot \nu^2 + 108 \cdot \nu - 108$$

$$\mathrm{g}(\nu)\ \mathrm{coeffs} \rightarrow \begin{pmatrix} -108 \\ 108 \\ -279 \\ 247 \\ -243 \\ 171 \\ -81 \\ 33 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

По полученным коэффициентам восстановим однородное уравнение, используя формулу (5.5):

$$D^9 x - 9D^8 x + 33D^7 x - 81D^6 x + 171D^5 x - 243D^4 x + 247D^3 x - 278D^2 x + 108Dx - 108x = 0.$$

Задача решена.

Показать, что данные решения $\psi_k(t),\ k = \overline{0, n-1}$, однородного линейного уравнения порядка n образуют базис пространства решений. Построить это уравнение и записать для него общее решение:

174. $\psi_0(t) = t^2 e^{2t},\ \psi_1(t) = te^{2t},\ \psi_2(t) = e^{2t}$.

175. $\psi_0(t) = e^{2t},\ \psi_1(t) = e^{-3t},\ \psi_2(t) = 1$.

176. $\psi_0(t) = \sin t,\ \psi_1(t) = \cos t$.

177. $\psi_0(t) = \operatorname{ch} t,\ \psi_1(t) = \operatorname{sh} t$.

178. $\psi_0(t) = \sin t,\ \psi_1(t) = \cos t,\ \psi_2(t) = e^t$.

179. $\psi_0(t) = t\sin t,\ \psi_1(t) = t\cos t,\ \psi_2(t) = \sin t,\ \psi_3(t) = \cos t$.

180. $\psi_0(t) = t^2,\ \psi_1(t) = t,\ \psi_2(t) = 1,\ \psi_3(t) = e^t$.

181. $\psi_0(t) = te^{-t},\ \psi_1(t) = e^{-t},\ \psi_2(t) = e^t \sin 2t,\ \psi_3(t) = e^t \cos 2t$.

182. $\psi_0(t) = te^{2t} \sin\dfrac{t}{2},\ \psi_1(t) = te^{2t}\cos\dfrac{t}{2},\ \psi_2(t) = e^{2t}\sin\dfrac{t}{2},\ \psi_3(t) = e^{2t}\cos\dfrac{t}{2}$.

183. $\psi_0(t) = te^{-t},\ \psi_1(t) = e^{-t},\ \psi_2(t) = \operatorname{ch} 2t,\ \psi_3(t) = \operatorname{sh} 2t$.

Составить линейное однородное уравнение со стационарным оператором по его общему решению:

184. $x = C_1 e^{t/4} + C_2 e^{-2t}$.

185. $x = (C_1 + C_2 t)e^{-t/3}$.

186. $x = C_1 e^{(-1+\sqrt{5})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{5})t}$.

187. $x = (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)e^{2t}$.

188. $x = C_1 e^{t/4} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^t$.

189. $x = (C_1 + C_2 t)e^{t/4} + (C_3 + C_4 t)e^{-2t}$.

190. $x = C_1 + \left(C_2 \cos\sqrt{5}t + C_3 \sin\sqrt{5}t\right)e^{-t}.$

191. $x = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)e^{-2t}.$

192. $x = (C_1 + C_2 t)\cos t + (C_3 + C_4 t)\sin t.$

193. $x = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 + C_4 t.$

Базис пространства решений $\varphi_k(t),\ k = \overline{0, n-1},$ уравнения $L_n x = 0$ называется *нормированным* в точке $t = 0,$ если

$$D^j \varphi_k|_{t=0} = \delta_{jk}, \quad j, k = \overline{0, n-1},$$

где $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$ т.е. каждая функция $\varphi_k(t),\ k = \overline{0, n-1},$ является решением задачи Коши

$$L_n \varphi_k = 0, \quad D^j \varphi_k|_{t=0} = \delta_{jk}, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Базис, нормированный в точке $t = s \neq 0,$ получается из базиса, нормированного в точке $t = 0,$ сдвигом на $s,$ т.е. если $\varphi_k(t),\ k = \overline{0, n-1},$ – базис, нормированный в точке $t = 0,$ то $\varphi_k(t, s) = = \varphi_k(t - s),\ k = \overline{0, n-1},$ – базис, нормированный в точке $t = s.$

Задача 6.2. Построить нормированный в точке $t = s$ базис пространства решений однородного уравнения $L_n x = 0.$

А л г о р и т м р е ш е н и я.

• Построить общее решение $x(t)$ однородного уравнения $L_n x = 0,$ найдя характеристические числа оператора L_n и их кратности (см. алгоритм решения задачи 5.1).

• Найти $Dx(t), \ldots, D^{n-1}x(t).$

• Составить n специальных задач Коши:

$$1)\ \begin{aligned} & L_n x = 0, \\ & x|_{t=0} = 1, \\ & D^k x|_{t=0} = 0, \\ & \quad k = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \qquad 2)\ \begin{aligned} & L_n x = 0, \\ & x|_{t=0} = 0, \\ & Dx|_{t=0} = 1, \\ & D^k x|_{t=0} = 0, \\ & \quad k = \overline{2, n-1}, \end{aligned} \qquad \ldots, \qquad n)\ \begin{aligned} & L_n x = 0, \\ & D^k x|_{t=0} = 0, \\ & k = \overline{0, n-2}, \\ & D^{n-1} x|_{t=0} = 1. \end{aligned}$$

Решениями этих задач будут соответственно функции $\varphi_k(t),\ k = \overline{0, n-1}.$

• Построить решения $\varphi_k(t),\ k = \overline{0, n-1}.$ Для этого, используя начальные условия n специальных задач Коши, составить n систем линейных уравнений для нахождения произвольных постоянных. Подставляя найденные для каждой задачи значения C_k в общее решение, получим $\varphi_k(t),\ k = \overline{0, n-1}.$ Полученные решения $\varphi_k(t),\ k = \overline{0, n-1},$ образуют нормированный в точке $t = 0$ базис пространства решений уравнения $L_n x = 0.$

• Вычислить значения функций $\phi_k(t, s) = \varphi_k(t - s),\ k = \overline{0, n-1},$ и получить нормированный в точке $t = s$ базис пространства решений однородного уравнения $L_n x = 0.$

Задание 6.2.1. Построить базис пространства решений однородного уравнения $D^2 x + 3x = 0$, нормированный в точке $t = 1$.

Р е ш е н и е.

$$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$v^2 + 3 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\cdot i \\ \sqrt{3}\cdot i \end{pmatrix}$$

$$x(t) := C1\cdot\cos(\sqrt{3}\,t) + C2\cdot\sin(\sqrt{3}\,t)$$

$$Dx(t) := \frac{d}{dt}x(t) \text{ simplify } \rightarrow \sqrt{3}\cdot C2\cdot\cos(\sqrt{3}\cdot t) - \sqrt{3}\cdot C1\cdot\sin(\sqrt{3}\cdot t)$$

Решаем следующие задачи Коши :

1) $L_2\, x = 0,$ $\quad x\big|_{t=0} = 1,$ $\quad D^k\, x\big|_{t=0} = 0,\ k = \overline{1, n-1},$

2) $L_2\, x = 0,$ $\quad x\big|_{t=0} = 0,$ $\quad D\,x\big|_{t=0} = 1.$

$$x(0) \text{ simplify } \rightarrow C1$$

$$Dx(0) \text{ simplify } \rightarrow \sqrt{3}\cdot C2$$

Given

$$C1 = 1$$

$$\sqrt{3}\cdot C2 = 0$$

$$\mathrm{Find}(C1, C2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Phi0(t) := \cos(\sqrt{3}\cdot t)$$

Given

$$C1 = 0$$

$$\sqrt{3}\cdot C2 = 1$$

$$\mathrm{Find}(C1, C2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \qquad \Phi1(t) := \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sin(\sqrt{3}\cdot t)$$

$$\Phi0(t-1) \text{ simplify } \rightarrow \cos\left[\sqrt{3}\cdot(t-1)\right]$$

$$\Phi1(t-1) \text{ simplify } \rightarrow \frac{\sqrt{3}\cdot\sin\left[\sqrt{3}\cdot(t-1)\right]}{3}$$

Задание 6.2.2. Построить базис пространства решений однородного уравнения $D^6 x - 6D^5 x + 16 D^4 x -$ $-24 D^3 x +\ 24 D^3 x + 25 D^2 x - 18 D x + 10 x = 0,$ нормированный в точке $t = 3$.

Р е ш е н и е.

$$V := v^6 - 6\cdot v^5 + 16\cdot v^4 - 24\cdot v^3 + 25\cdot v^2 - 18\cdot v + 10 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1-i \\ 1+i \\ 2-i \\ 2+i \end{pmatrix} \qquad \text{ORIGIN} \equiv 1$$

$$x(t) := C1\cdot\cos(t) + C2\cdot\sin(t) + (C3\cdot\cos(t) + C4\cdot\sin(t))\cdot e^t + (C5\cdot\cos(t) + C6\cdot\sin(t))\cdot e^{2t}$$

$$Dx(t) := \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow e^t\cdot(C3\cdot\cos(t) + C4\cdot\sin(t)) + e^t\cdot(C4\cdot\cos(t) - C3\cdot\sin(t)) + 2\cdot e^{2\cdot t}\cdot(C5\cdot\cos(t) + C6\cdot\sin($$

$$D2x(t) := \frac{d}{dt}Dx(t) \rightarrow 2\cdot e^t\cdot(C4\cdot\cos(t) - C3\cdot\sin(t)) + 3\cdot e^{2\cdot t}\cdot(C5\cdot\cos(t) + C6\cdot\sin(t)) + 4\cdot e^{2\cdot t}\cdot(C6\cdot\cos(t) -$$

$$D3x(t) := \frac{d}{dt}D2x(t) \rightarrow 2\cdot e^t\cdot(C4\cdot\cos(t) - C3\cdot\sin(t)) - 2\cdot e^t\cdot(C3\cdot\cos(t) + C4\cdot\sin(t)) + 2\cdot e^{2\cdot t}\cdot(C5\cdot\cos(t) +$$

$$D4x(t) := \frac{d}{dt}D3x(t) \rightarrow 24\cdot e^{2\cdot t}\cdot(C6\cdot\cos(t) - C5\cdot\sin(t)) - 7\cdot e^{2\cdot t}\cdot(C5\cdot\cos(t) + C6\cdot\sin(t)) - 4\cdot e^t\cdot(C3\cdot\cos(t)$$

$$D5x(t) := \frac{d}{dt}D4x(t) \rightarrow 41\cdot e^{2\cdot t}\cdot(C6\cdot\cos(t) - C5\cdot\sin(t)) - 4\cdot e^t\cdot(C4\cdot\cos(t) - C3\cdot\sin(t)) - 38\cdot e^{2\cdot t}\cdot(C5\cdot\cos($$

$x(0)$ simplify $\rightarrow C1 + C3 + C5$

$Dx(0)$ simplify $\rightarrow C2 + C3 + C4 + 2\cdot C5 + C6$

$D2x(0)$ simplify $\rightarrow 2\cdot C4 - C1 + 3\cdot C5 + 4\cdot C6$

$D3x(0)$ simplify $\rightarrow 2\cdot C4 - 2\cdot C3 - C2 + 2\cdot C5 + 11\cdot C6$

$D4x(0)$ simplify $\rightarrow C1 - 4\cdot C3 - 7\cdot C5 + 24\cdot C6$

$D5x(0)$ simplify $\rightarrow C2 - 4\cdot C3 - 4\cdot C4 - 38\cdot C5 + 41\cdot C6$

$$X(t,C) := C_1\cdot\cos(t) + C_2\cdot\sin(t) + \left(C_3\cdot\cos(t) + C_4\cdot\sin(t)\right)\cdot e^t + \left(C_5\cdot\cos(t) + C_6\cdot\sin(t)\right)\cdot e^{2t}$$

Решая соответствующие задачи Коши, приходим к следующим системам :

Given

$C1 + C3 + C5 = 1$

$C2 + C3 + C4 + 2\cdot C5 + C6 = 0$

$2\cdot C4 - C1 + 3\cdot C5 + 4\cdot C6 = 0$

$2\cdot C4 - 2\cdot C3 - C2 + 2\cdot C5 + 11\cdot C6 = 0$

$C1 - 4\cdot C3 - 7\cdot C5 + 24\cdot C6 = 0$

$C2 - 4\cdot C3 - 4\cdot C4 - 38\cdot C5 + 41\cdot C6 = 0$

$c_1 := \text{Find}(C1, C2, C3, C4, C5, C6)$

$c_1{}^T \rightarrow \left(-\frac{1}{4} \quad -\frac{3}{4} \quad 1 \quad -1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \right)$

$\Phi0(t) := X(t, c_1)$ simplify $\rightarrow \frac{e^{2\cdot t} \cdot \cos(t)}{4} - \frac{3 \cdot \sin(t)}{4} - \frac{\cos(t)}{4} + \frac{e^{2\cdot t} \cdot \sin(t)}{4} + e^t \cdot \cos(t) - e^t \cdot \sin(t)$

Given

$C1 + C3 + C5 = 0$

$C2 + C3 + C4 + 2 \cdot C5 + C6 = 1$

$2 \cdot C4 - C1 + 3 \cdot C5 + 4 \cdot C6 = 0$

$2 \cdot C4 - 2 \cdot C3 - C2 + 2 \cdot C5 + 11 \cdot C6 = 0$

$C1 - 4 \cdot C3 - 7 \cdot C5 + 24 \cdot C6 = 0$

$C2 - 4 \cdot C3 - 4 \cdot C4 - 38 \cdot C5 + 41 \cdot C6 = 0$

$c_2 := \mathrm{Find}(C1, C2, C3, C4, C5, C6)$

$c_2{}^T \rightarrow \left(\frac{6}{5} \quad \frac{11}{10} \quad -\frac{4}{5} \quad \frac{9}{5} \quad -\frac{2}{5} \quad -\frac{3}{10} \right)$

$\Phi1(t) := X(t, c_2)$ simplify $\rightarrow \frac{6 \cdot \cos(t)}{5} + \frac{11 \cdot \sin(t)}{10} - \frac{2 \cdot e^{2\cdot t} \cdot \cos(t)}{5} - \frac{3 \cdot e^{2\cdot t} \cdot \sin(t)}{10} - \frac{4 \cdot e^t \cdot \cos(t)}{5} + \frac{9 \cdot e^t \cdot}{5}$

Given

$C1 + C3 + C5 = 0$

$C2 + C3 + C4 + 2 \cdot C5 + C6 = 0$

$2 \cdot C4 - C1 + 3 \cdot C5 + 4 \cdot C6 = 1$

$2 \cdot C4 - 2 \cdot C3 - C2 + 2 \cdot C5 + 11 \cdot C6 = 0$

$C1 - 4 \cdot C3 - 7 \cdot C5 + 24 \cdot C6 = 0$

$C2 - 4 \cdot C3 - 4 \cdot C4 - 38 \cdot C5 + 41 \cdot C6 = 0$

$c_3 := \mathrm{Find}(C1, C2, C3, C4, C5, C6)$

$c_3{}^T \rightarrow \left(-\frac{69}{40} \quad -\frac{27}{40} \quad \frac{6}{5} \quad -2 \quad \frac{21}{40} \quad \frac{17}{40} \right)$

$\Phi2(t) := X(t, c_3)$ simplify $\rightarrow \frac{21 \cdot e^{2\cdot t} \cdot \cos(t)}{40} - \frac{27 \cdot \sin(t)}{40} - \frac{69 \cdot \cos(t)}{40} + \frac{17 \cdot e^{2\cdot t} \cdot \sin(t)}{40} + \frac{6 \cdot e^t \cdot \cos(t)}{5} - 2 \cdot e$

Given

$C1 + C3 + C5 = 0$

$C2 + C3 + C4 + 2 \cdot C5 + C6 = 0$

$2 \cdot C4 - C1 + 3 \cdot C5 + 4 \cdot C6 = 1$

$2 \cdot C4 - 2 \cdot C3 - C2 + 2 \cdot C5 + 11 \cdot C6 = 0$

$$C1 - 4 \cdot C3 - 7 \cdot C5 + 24 \cdot C6 = 0$$

$$C2 - 4 \cdot C3 - 4 \cdot C4 - 38 \cdot C5 + 41 \cdot C6 = 0$$

$$c_4 := \mathrm{Find}(C1, C2, C3, C4, C5, C6)$$

$$c_4^{T} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{51}{40} & \frac{3}{40} & -\frac{4}{5} & 2 & -\frac{19}{40} & -\frac{13}{40} \end{pmatrix}$$

$$\Phi3(t) := X(t, c_4) \text{ simplify } \rightarrow \frac{51 \cdot \cos(t)}{40} + \frac{3 \cdot \sin(t)}{40} - \frac{19 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \cos(t)}{40} - \frac{13 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \sin(t)}{40} - \frac{4 \cdot e^{t} \cdot \cos(t)}{5} + 2 \cdot e^{t}$$

Given

$$C1 + C3 + C5 = 0$$

$$C2 + C3 + C4 + 2 \cdot C5 + C6 = 0$$

$$2 \cdot C4 - C1 + 3 \cdot C5 + 4 \cdot C6 = 0$$

$$2 \cdot C4 - 2 \cdot C3 - C2 + 2 \cdot C5 + 11 \cdot C6 = 0$$

$$C1 - 4 \cdot C3 - 7 \cdot C5 + 24 \cdot C6 = 1$$

$$C2 - 4 \cdot C3 - 4 \cdot C4 - 38 \cdot C5 + 41 \cdot C6 = 0$$

$$c_5 := \mathrm{Find}(C1, C2, C3, C4, C5, C6)$$

$$c_5^{T} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{19}{40} & \frac{3}{40} & \frac{1}{5} & -1 & \frac{11}{40} & \frac{7}{40} \end{pmatrix}$$

$$\Phi4(t) := X(t, c_5) \text{ simplify } \rightarrow \frac{3 \cdot \sin(t)}{40} - \frac{19 \cdot \cos(t)}{40} + \frac{11 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \cos(t)}{40} + \frac{7 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \sin(t)}{40} + \frac{e^{t} \cdot \cos(t)}{5} - e^{t} \cdot \sin(t)$$

Given

$$C1 + C3 + C5 = 0$$

$$C2 + C3 + C4 + 2 \cdot C5 + C6 = 0$$

$$2 \cdot C4 - C1 + 3 \cdot C5 + 4 \cdot C6 = 0$$

$$2 \cdot C4 - 2 \cdot C3 - C2 + 2 \cdot C5 + 11 \cdot C6 = 0$$

$$C1 - 4 \cdot C3 - 7 \cdot C5 + 24 \cdot C6 = 0$$

$$C2 - 4 \cdot C3 - 4 \cdot C4 - 38 \cdot C5 + 41 \cdot C6 = 1$$

$$c_6 := \mathrm{Find}(C1, C2, C3, C4, C5, C6)$$

$$c_6^{T} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{40} & -\frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{40} & -\frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

$$\Phi5(t) := X(t, c_6) \text{ simplify } \rightarrow \frac{3 \cdot \cos(t)}{40} - \frac{\sin(t)}{40} - \frac{3 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \cos(t)}{40} - \frac{e^{2 \cdot t} \cdot \sin(t)}{40} + \frac{e^{t} \cdot \sin(t)}{5}$$ èëè

$$\Phi0(t-3) \text{ simplify } \rightarrow \frac{\cos(t-3) \cdot e^{2 \cdot t - 6}}{4} - \frac{3 \cdot \sin(t-3)}{4} - \frac{\cos(t-3)}{4} + \frac{\sin(t-3) \cdot e^{2 \cdot t - 6}}{4} + \cos(t-3) \cdot e^{t-3} - \text{si}$$

$$\Phi1(t-3) \text{ simplify } \to \frac{6\cdot\cos(t-3)}{5} + \frac{11\cdot\sin(t-3)}{10} - \frac{2\cdot\cos(t-3)\cdot e^{2\cdot t-6}}{5} - \frac{3\cdot\sin(t-3)\cdot e^{2\cdot t-6}}{10} - \frac{4\cdot\cos(t-}{5}$$

$$\Phi2(t-3) \text{ simplify } \to \frac{21\cdot\cos(t-3)\cdot e^{2\cdot t-6}}{40} - \frac{27\cdot\sin(t-3)}{40} - \frac{69\cdot\cos(t-3)}{40} + \frac{17\cdot\sin(t-3)\cdot e^{2\cdot t-6}}{40} + \frac{6\cdot\cos}{}$$

$$\Phi3(t-3) \text{ simplify } \to \frac{51\cdot\cos(t-3)}{40} + \frac{3\cdot\sin(t-3)}{40} - \frac{19\cdot\cos(t-3)\cdot e^{2\cdot t-6}}{40} - \frac{13\cdot\sin(t-3)\cdot e^{2\cdot t-6}}{40} - \frac{4\cdot\cos(t}{}$$

$$\Phi4(t-3) \text{ simplify } \to \frac{3\cdot\sin(t-3)}{40} - \frac{19\cdot\cos(t-3)}{40} + \frac{11\cdot\cos(t-3)\cdot e^{2\cdot t-6}}{40} + \frac{7\cdot\sin(t-3)\cdot e^{2\cdot t-6}}{40} + \frac{\cos(t-3}{5}$$

$$\Phi5(t-3) \text{ simplify } \to \frac{3\cdot\cos(t-3)}{40} - \frac{\sin(t-3)}{40} - \frac{3\cdot\cos(t-3)\cdot e^{2\cdot t-6}}{40} - \frac{\sin(t-3)\cdot e^{2\cdot t-6}}{40} + \frac{\sin(t-3)\cdot e^{t-3}}{5}$$

Построить базис пространства решений однородного дифференциального уравнения, нормированный в точке $t = s$, для следующих уравнений:

194. $D^4 x - 2D^2 x = 0,\ s = 0.$

195. $D^4 x - x = 0,\ s = 1.$

196. $D^4 x + x = 0,\ s = 0.$

197. $D^4 x + 4x = 0,\ s = -2.$

198. $2x'' + x' - x = 0,\ s = -0{,}1.$

199. $D^3 x + x = 0,\ s = 0.$

200. $D^3 x - 3D^2 x + 3Dx - x = 0,\ s = -1.$

201. $D^4 x + 2D^3 x - D^2 x - 2Dx = 0,\ s = 0.$

202. $x'' + 9x = 0,\ s = 3.$

203. $D^2 x + Dx + x = 0,\ s = -3.$

204. $D^2 x - 2Dx + x = 0,\ s = -1.$

205. $x'' + 2x' + x = 0,\ s = 1.$

206. $D^4 x + 4D^2 x + 3x = 0,\ s = 0.$

207. $D^4 x + 2D^2 x + x = 0,\ s = 0.$

IV. НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7. Структура общего решения. Метод вариации произвольных постоянных

Общее решение неоднородного уравнения

$$L_n x = f(t),\ t \in I,$$

представляет собой сумму общего решения $x_{\text{оо}}$ однородного уравнения $L_n x = 0$, соответствующего данному неоднородному, и частного решения $x_{\text{чн}}$ неоднородного уравнения: $x_{\text{он}} = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}$.

Метод вариации произвольных постоянных (*правило Лагранжа*) отыскания частного решения неоднородного уравнения основан на аналогии в представлении решений неоднородного и соответствующего однородного уравнений.

Пусть

$$x_{\text{оо}}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \psi_k(t),$$

где ψ_k, $k = \overline{0, n-1}$, – базис пространства решений однородного дифференциального уравнения. *Частное решение неоднородного уравнения* по правилу Лагранжа записывают в следующем виде:

$$x_{\text{чн}}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}u_k(t)\psi_k(t),$$

где $Du_0,\ Du_1,\ldots,Du_{n-1}$ удовлетворяют системе линейных уравнений – системе Лагранжа

$$\begin{cases} \psi_0 Du_0+\ldots+\psi_{n-1}Du_{n-1}=0,\\ D\psi_0 Du_0+\ldots+D\psi_{n-1}Du_{n-1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ D^{n-2}\psi_0 Du_0+\ldots+D^{n-2}\psi_{n-1}Du_{n-1}=0,\\ D^{n-1}\psi_0 Du_0+\ldots+D^{n-1}\psi_{n-1}Du_{n-1}=f. \end{cases} \tag{7.1}$$

Для записи частного решения неоднородного уравнения достаточно использовать одну из первообразных каждой функции множества $Du_0,\ Du_1,\ldots,Du_{n-1}$. Если C_k – произвольные постоянные, то формула

$$x=\sum_{k=0}^{n-1}(u_k(t)+C_k)\psi_k(t)$$

дает общее решение неоднородного уравнения.

Задача 7.1. Построить общее решение неоднородного уравнения $L_n x=f(t),\ t\in I.$

Алгоритм решения.

- Построить общее решение $x(t)$ однородного уравнения $L_n x=0,$ соответствующего данному неоднородному уравнению: $x_{\text{оо}}(t)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_k\,\psi_k(t).$
- Записать базис пространства решений $\psi_k(t),\ k=\overline{0,\ n-1},$ однородного уравнения $L_n x=0.$
- Составить систему Лагранжа (7.1) и найти ее решение $DU_0(t),\ldots,DU_{n-1}(t).$
- Найти одну из первообразных $U_k(t)$ для $DU_k(t),\ k=\overline{0,n-1}.$
- Записать частное решение неоднородного уравнения $L_n x=f(t)$: $x_{\text{чн}}(t)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}U_k(t)\psi_k(t).$
- Записать общее решение данного уравнения: $x(t)=x_{\text{оо}}(t)+x_{\text{чн}}(t).$

Задание 7.1.1. Построить общее решение уравнения $D^2x+2Dx=\sin t,\ \ I=\mathbb{R}$.

Решение.

$\begin{pmatrix} v1\\ v2\end{pmatrix} := v^2+2\cdot v \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 0\\ -2\end{pmatrix}$ $\qquad f(t):=\sin(t)$

$\psi0(t):=e^{v1\cdot t}$ $\qquad \psi1(t):=e^{v2\cdot t}$

$x00(t):=C_1\cdot\psi0(t)+C_2\,\psi1(t) \text{ simplify } \rightarrow e^{-2\cdot t}\cdot C_2+C_1$

$Du0\cdot\psi0(t)+Du1\cdot\psi1(t)=0 \text{ simplify } \rightarrow Du0+Du1\cdot e^{-2\cdot t}=0$

$$Du0\cdot\frac{d}{dt}\psi0(t) + Du1\cdot\frac{d}{dt}\psi1(t) = f(t) \text{ simplify } \rightarrow -2\cdot Du1\cdot e^{-2\cdot t} = \sin(t)$$

Given

$$Du0 + Du1\cdot e^{-2\cdot t} = 0$$

$$-2\cdot Du1\cdot e^{-2\cdot t} = \sin(t)$$

$$Du(t) := \text{Find}(Du0, Du1) \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(t)}{2} \\ -\dfrac{e^{2\cdot t}\cdot\sin(t)}{2} \end{pmatrix}$$

$$Du(t)_0 \rightarrow \frac{\sin(t)}{2} \qquad Du(t)_1 \rightarrow -\frac{e^{2\cdot t}\cdot\sin(t)}{2}$$

$$u(t) := \int Du(t)\,dt \text{ simplify } \rightarrow \begin{bmatrix} -\dfrac{\cos(t)}{2} \\ \dfrac{e^{2\cdot t}\cdot(\cos(t) - 2\cdot\sin(t))}{10} \end{bmatrix}$$

$$x2(t) := u(t)_0\cdot\psi0(t) + u(t)_1\cdot\psi1(t) \text{ simplify } \rightarrow -\frac{2\cdot\cos(t)}{5} - \frac{\sin(t)}{5}$$

$$x(t) := x00(t) + x2(t) \text{ simplify } \rightarrow e^{-2\cdot t}\cdot C_2 - \frac{\sin(t)}{5} - \frac{2\cdot\cos(t)}{5} + C_1$$

Задание 7.1.2. Построить общее решение уравнения $D^3x + Dx = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$, предварительно выбрав промежуток I.

Р е ш е н и е.

Поскольку функция $f(t) = \sin t / \cos^2 t$ должна быть непрерывной на I, то в качестве I можно выбрать, например, интервал $(-\pi/2, \pi/2)$.

$$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{pmatrix} := v^3 + v \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ i \end{pmatrix} \qquad f(t) := \frac{\sin(t)}{\cos(t)^2}$$

$$\psi0(t) := e^{v1\cdot t} \text{ simplify } \rightarrow 1$$

$$\psi1(t) := \text{Im}\left(e^{v3\cdot t}\right) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume}, t = \text{real} \end{array} \right. \rightarrow \sin(t)$$

$$\psi2(t) := \text{Re}\left(e^{v3\cdot t}\right) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume}, t = \text{real} \end{array} \right. \rightarrow \cos(t)$$

$$x00(t) := C_0\cdot\psi0(t) + C_1\,\psi1(t) + C_2\cdot\psi2(t) \text{ simplify } \rightarrow \cos(t)\cdot C_2 + \sin(t)\cdot C_1 + C_0$$

$$Du0\cdot\psi0(t) + Du1\cdot\psi1(t) + Du2\cdot\psi2(t) = 0 \text{ simplify } \rightarrow Du0 + Du2\cdot\cos(t) + Du1\cdot\sin(t) = 0$$

$$Du0\cdot\frac{d}{dt}\psi0(t) + Du1\cdot\frac{d}{dt}\psi1(t) + Du2\cdot\frac{d}{dt}\psi2(t) = 0 \text{ simplify } \rightarrow Du1\cdot\cos(t) - Du2\cdot\sin(t) = 0$$

$$Du0\cdot\frac{d^2}{dt^2}\psi0(t) + Du1\cdot\frac{d^2}{dt^2}\psi1(t) + Du2\cdot\frac{d^2}{dt^2}\psi2(t) = f(t) \text{ simplify } \rightarrow -Du2\cdot\cos(t) - Du1\cdot\sin(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)^2}$$

Given

$$Du0 + Du2\cdot\cos(t) + Du1\cdot\sin(t) = 0$$

$$Du1\cdot\cos(t) - Du2\cdot\sin(t) = 0$$

$$-Du2\cdot\cos(t) - Du1\cdot\sin(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)^2}$$

$$Du(t) := \text{Find}(Du0, Du1, Du2) \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin(t)}{\sin(t)^2 - 1} \\ 1 - \dfrac{1}{\cos(t)^2} \\ -\tan(t) \end{pmatrix}$$

$$u(t) := \int Du(t)\,dt \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cos(t)} \\ t - \tan(t) \\ \ln(\cos(t)) \end{pmatrix}$$

$$x2(t) := u(t)_0\cdot\psi0(t) + u(t)_1\cdot\psi1(t) + u(t)_2\cdot\psi2(t)$$

$$x2(t) \rightarrow \sin(t)\cdot(t - \tan(t)) + \frac{1}{\cos(t)} + \cos(t)\cdot\ln(\cos(t))$$

$$x(t) := x00(t) + x2(t)$$

$$x(t) \text{ simplify } \rightarrow \cos(t) + \cos(t)\cdot C_2 + \sin(t)\cdot C_1 + t\cdot\sin(t) + \cos(t)\cdot\ln(\cos(t)) + C_0$$

Задание 7.1.3. Построить общее решение уравнения $x'' - x = 1/t$, указать промежуток I.

Р е ш е н и е. Поскольку функция $f(t) = 1/t$, то положим, например, $I = (0, +\infty)$.

$$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} := \left(v^2 - 1\right) \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(t) := \frac{1}{t}$$

$$\psi0(t) := e^{v1\cdot t} \qquad \psi1(t) := e^{v2\cdot t}$$

$$x00(t) := C_0\cdot\psi0(t) + C_1\,\psi1(t) \text{ simplify } \rightarrow e^t\cdot C_1 + e^{-t}\cdot C_0$$

$$Du0\cdot\psi0(t) + Du1\cdot\psi1(t) = 0 \text{ simplify } \rightarrow Du0\cdot e^{-t} + Du1\cdot e^t = 0$$

$$\mathrm{Du0}\cdot\frac{d}{dt}\psi0(t) + \mathrm{Du1}\cdot\frac{d}{dt}\psi1(t) = f(t)\ \mathrm{simplify}\ \rightarrow \mathrm{Du1}\cdot e^{t} - \mathrm{Du0}\cdot e^{-t} = \frac{1}{t}$$

Given

$$\mathrm{Du0}\cdot\psi0(t) + \mathrm{Du1}\cdot\psi1(t) = 0$$

$$\mathrm{Du0}\cdot\frac{d}{dt}\psi0(t) + \mathrm{Du1}\cdot\frac{d}{dt}\psi1(t) = f(t)$$

$$\mathrm{Du}(t) := \mathrm{Find}(\mathrm{Du0},\mathrm{Du1}) \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{e^{t}}{2\cdot t} \\ \dfrac{e^{-t}}{2\cdot t} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Du}(t)_0 \rightarrow -\frac{e^{t}}{2\cdot t} \qquad\qquad \mathrm{Du}(t)_1 \rightarrow \frac{e^{-t}}{2\cdot t}$$

$$u(t) := \int \mathrm{Du}(t)\,dt \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{Ei}(1,-t)}{2} \\ -\dfrac{\mathrm{Ei}(1,t)}{2} \end{pmatrix}$$

$$x2(t) := u(t)_0\cdot\psi0(t) + u(t)_1\cdot\psi1(t) \rightarrow \frac{\mathrm{Ei}(1,-t)\cdot e^{-t}}{2} - \frac{e^{t}\cdot\mathrm{Ei}(1,t)}{2}$$

$$x(t) := x00(t) + x2(t)\ \mathrm{simplify}\ \rightarrow e^{t}\cdot C_1 + e^{-t}\cdot C_0 + \frac{\mathrm{Ei}(1,-t)\cdot e^{-t}}{2} - \frac{e^{t}\cdot\mathrm{Ei}(1,t)}{2}$$

З а м е ч а н и е. Здесь $Ei(1,t)=\int\limits_1^t \frac{e^{\tau}}{\tau}d\tau$. После некоторых преобразований получаем решение исходного уравнения:

$$x(t)=C_0e^{-t}+C_1e^{t}+\int\limits_1^t\frac{\mathrm{sh}(t-\tau)}{\tau}d\tau.$$

Задача решена.

Применить правило Лагранжа для разрешения уравнения, предварительно выбрав промежуток I:

208. $D^2x+2Dx+x=3e^{-t}\sqrt{t+1}$.

209. $D^2x+3Dx+2x=1/(e^t+1)$.

210. $D^2x-2Dx+x=(t^2+2t+2)/t^3$.

211. $x''-2x'+x=e^t/(t^2+1)$.

212. $D^3x+Dx=\cos t/\sin^2 t$.

213. $D^2x-Dx=1/(1+e^t)$.

214. $D^2x-6Dx+6x=(2+6t+9t^2)/t^3$.

215. $x''+4x=f(t)$: а) $f(t)=1/\cos 2t$; б) $f(t)=2\,\mathrm{tg}\,t$.

216. $D^2x-x=f(t)$: а) $f(t)=4\sqrt{t}+t^{-3/2}$; б) $f(t)=1/t^2$.

217. $x'' + x = f(t)$:

а) $f(t) = -\sin^{-3/2} t$;

б) $f(t) = \cos^{-3/2} t$;

в) $f(t) = 1/\cos t$;

г) $f(t) = \operatorname{tg}^2 t$;

д) $f(t) = \sin^{-5/2} t \cos^{-1/2} t$;

е) $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin^7 t \cos^8 t}}$;

ж) $f(t) = -\operatorname{ctg}^2 t$;

з) $f(t) = 1/t$;

и) $f(t) = 1/\sin t$;

к) $f(t) = 2/\cos^3 t$;

л) $f(t) = \operatorname{tg} t$.

218. $D^2 x - Dx = f(t)$:

а) $f(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t}$;

б) $f(t) = e^{2t}\sqrt{1-e^{2t}}$;

в) $f(t) = e^{2t} \cos e^t$;

г) $f(t) = \dfrac{2-t}{t^3} e^t$.

8. Функция Коши линейного оператора. Разрешение уравнений по правилу Коши

Функцией Коши оператора L_n называют функцию $\varphi_{n-1}(t)$, являющуюся решением *начальной задачи* (*задачи Коши*)

$$L_n x = 0,\ D^k x\big|_{t=0} = 0,\ k = \overline{0, n-2},\ D^{n-1} x\big|_{t=0} = 1.$$

Решение начальной задачи

$$L_n x = f(t),\ t \in I,\ D^k x\big|_{t=s} = \xi_k,\ k = \overline{0, n-1},$$

с помощью функции Коши записывается в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s) + \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

где $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$ – нормированный в точке $t = 0$ базис пространства решений уравнения $L_n x = 0$.

Первое слагаемое решения $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s)$ является решением начальной задачи

$$L_n x = 0,\ D^k x\big|_{t=s} = \xi_k,\ k = \overline{0, n-1}.$$

Слагаемое $\int\limits_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau$ служит решением *нулевой начальной задачи* (начальной задачи с нулевыми начальными данными) для неоднородного уравнения

$$L_n x = f(t),\ t \in I,\ D^k x\big|_{t=s} = 0,\ k = \overline{0, n-1}.$$

Формула

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \psi_k(t) + \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

где C_k – произвольные постоянные, а $\psi_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, – некоторый базис пространства решений однородного уравнения $L_n x = 0$, составляет *правило Коши интегрирования уравнения* $L_n x = f(t)$, $t \in I$.

Задача 8.1. Построить общее решение уравнения $D^2 x + 2Dx = \sin t$.

Р е ш е н и е. Общее решение уравнения $D^2 x + 2Dx = 0$ имеет вид $x_{\text{оо}} = C_1 e^{-2t} + C_2$. Для нахождения частного решения данного уравнения построим функцию Коши $\varphi_1(t)$, решив начальную задачу $D^2 x + 2Dx = 0$, $x\big|_{t=0} = 0$, $Dx\big|_{t=0} = 1$. Функция Коши имеет вид $\varphi_1(t) = -0{,}5e^{-2t} + 0{,}5$. Тогда

$$x_{\text{чн}}(t) = \int_0^t \left(0{,}5 - 0{,}5e^{-2(t-\tau)}\right) \sin \tau d\tau = -0{,}2\sin t - 0{,}4\cos t - 0{,}1e^{-2t} + 0{,}5.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 - 0{,}2\sin t - 0{,}4\cos t - 0{,}1e^{-2t} + 0{,}5.$$

З а м е ч а н и е. Правило Коши удобнее всего применять для построения решений различных начальных задач с одним и тем же оператором L_n и с одной и той же неоднородностью *f*.

Построить функцию Коши для операторов:

219. $L_2 = D^2 + \omega^2 D^0$.
220. $L_2 = D^2 - \omega^2 D^0$.
221. $L_2 = D^2 + 2D + D^0$.
222. $L_2 = D^2 - 2D + D^0$.
223. $L_3 = D^3 - 6D^2 + 11D - 6D^0$.
224. $L_3 = D^3 + 4D^2 - D - 4D^0$.
225. $L_4 = D^4 - 5D^2 + 4D^0$.
226. $L_4 = D^4 + 4D^2 + 3D^0$.
227. $L_5 = D^5 - 10D^3 + 9D$.
228. $L_2 = D^2 - 2D + 2D^0$.
229. $L_2 = D^2 - D + D^0$.
230. $L_3 = D^3 - 2D^2 + 2D$.
231. $L_3 = D^3 - 2D^2 + D$.
232. $L_4 = D^4 - 4D^2$.

Записать решения нулевых при $t = s$ начальных задач (функция *f* непрерывна на *I* и $s \in I$):

233. $D^2x + \omega^2 x = f$, $s = 1$.
234. $D^2x - \omega^2 x = f$, $s = 10$.
235. $D^2x + 2Dx + x = f$, $s = a$.
236. $x'' - 2x' + x = f$, $s = 5$.
237. $D^3x - 6D^2x + 11Dx - 6x = f$, $s = 0{,}5$.
238. $D^3x + 4D^2x - Dx - 4x = f$, $s = 0$.
239. $D^4x - 5D^2x + 4x = f$, $s = -2$.
240. $D^4x + 4D^2x + 3x = f$, $s = -10$.
241. $D^5x - 10D^3x + 9Dx = f$, $s = 0$.
242. $x'' - 2x' + 2x = f$, $s = 1$.
243. $D^2x - Dx + x = f$, $s = 2$.
244. $D^3x - 2D^2x + 2Dx = f$, $s = -3$.
245. $x''' - 2x'' + x' = f$, $s = 0$.
246. $D^4x - 2D^2x = f$, $s = -0{,}5$.

Применить правило Коши для решения уравнений, указать возможный промежуток интегрирования *I*:

247. $D^2x + 2Dx + x = e^{2t}$:

а) $x|_{t=1} = 1$, $Dx|_{t=1} = 5$;
б) $x|_{t=7} = 2$, $Dx|_{t=7} = 1$;
в) $x|_{t=0} = 0$, $Dx|_{t=0} = 0$;
г) $x|_{t=1} = 1$, $Dx|_{t=1} = 0$.

248. $D^2x + x = 2(1 - t)$:

а) $x|_{t=0} = 2$, $Dx|_{t=0} = -2$;

б) $x|_{t=1} = 0$, $Dx|_{t=1} = 0$;

в) $x|_{t=0} = 1$, $Dx|_{t=0} = 0$;

г) $x|_{t=-3} = -7$, $Dx|_{t=-3} = -1$.

249. $x'' + x' + x = 2e^t$:

а) $x|_{t=0} = 0$, $x'|_{t=0} = 1$;

б) $x|_{t=0} = 1$, $x'|_{t=0} = 0$.

250. $D^2x + 4x = f(t)$, $x|_{t=0} = Dx|_{t=0} = 1$:

а) $f(t) = \sin t$;

б) $f(t) = 1/(t + 1)$;

в) $f(t) = 1/\cos 2t$;

г) $f(t) = e^t$.

251. $D^2x + 4x = 1/\sin t$, $x|_{t=\pi/2} = 1$, $Dx|_{t=\pi/2} = -2$.

252. $D^2x + x = f(t)$, $x|_{t=0} = 0$, $Dx|_{t=0} = 1$:

а) $f(t) = 4t\cos t$;

б) $f(t) = 2(1 - t)$;

в) $f(t) = \operatorname{tg} t$;

г) $f(t) = \ln(t + 1)$.

253. $D^2x + 9x = 36e^{3t}$.

254. $x'' - 4x' + 5x = 2t^2e^t$.

255. $D^2x + x = 1 + 1/\cos t$.

256. $D^2x + x = \cos t + (\cos 2t)^{-3/2}$.

257. $D^2x - 6Dx + 9x = 4e^t + (2 + 6t + 9t^2)/t^3$.

258. $x'' + 2x' + x = 8e^t + 3e^{-t}\sqrt{t+1}$.

9. Уравнение с квазиполиномиальной неоднородностью. Правило Эйлера

Квазиполиномом называется функция вида

$$\sum_l P_l(t)e^{\gamma_l t},$$

где $P_l(t)$ – полином с комплексными коэффициентами, причем $\gamma_l \neq \gamma_j$, $l \neq j$; $\gamma_l \in \mathbb{C}$. Числа γ_l – контрольные числа.

Действительный квазиполином имеет вид

$$\sum_k P_k(t)e^{\gamma_k t} + \sum_j (R_j(t)\cos\beta_j t + H_j(t)\sin\beta_j t)e^{\alpha_j t},$$

где $P_k(t)$, $R_j(t)$, $H_j(t)$ – полиномы с действительными коэффициентами; γ_k, β_j, $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

Если функции $x_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, являются соответственно решениями уравнений $L_n x = h_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, то их сумма $x(t) = \sum_{i=1}^{m} x_i(t)$ – решение уравнения $L_n x = \sum_{i=1}^{m} h_i(t)$. Поэтому построение частного решения действительного линейного уравнения с действительным квазиполиномом в правой части сводится к определению частных решений уравнений вида

$$L_n x = P(t)e^{\gamma t} \text{ и } L_n x = (R(t)\cos\beta t + H(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}.$$

Если $f(t) = P(t)e^{\gamma t}$, γ – *контрольное число*, то уравнение $L_n x = f$ имеет частное решение вида

$$x_{\text{чн}}(t) = t^r Q(t)e^{\gamma t},$$

где $Q(t)$ – полином с неопределенными коэффициентами, степень которого совпадает со степенью полинома $P(t)$; r – кратность того из корней характеристического уравнения, который совпадает с контрольным числом γ. Если γ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$.

Если $f(t)=(R(t)\cos\beta t+H(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}$, $\gamma=\alpha+i\beta$ – контрольное число, то частное решение уравнения $L_n x=f$ ищут в виде

$$x_{чн}(t)=t^r\,(M(t)\cos\beta t+N(t)\sin\beta t)e^{\alpha t},$$

где $M(t)$, $N(t)$ – полиномы с неопределенными коэффициентами, степень которых равна максимальной из степеней полиномов $R(t)$ и $H(t)$; r – кратность того из корней характеристического уравнения, который совпадает с контрольным числом $\alpha+i\beta$. Если $\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $r=0$.

Построение решений уравнений с квазиполиномиальной неоднородностью указанным выше методом называется *правилом Эйлера*.

Задача 9.1. Построить частное решение уравнения

$$D^2x+4Dx+4x=2e^{2t}.$$

Решение. Поскольку $P(t)=2$, то его степень равна нулю. Характеристическое уравнение имеет корень $v=2$ кратности $d=2$, совпадающий с контрольным числом $\gamma=2$, поэтому частное решение ищем в виде $x_{чн}(t)=t^2Ae^{2t}$. Подставив $x_{чн}(t)$, $Dx_{чн}(t)=2A(t+t^2)e^{2t}$, $D^2x_{чн}(t)= =2A(1+4t+2t^2)e^{2t}$ в уравнение, найдем $A=1$. Следовательно, $x_{чн}(t)=t^2e^{2t}$.

Задача 9.2. Построить общее решение уравнения

$$D^2x+Dx=2\cos t.$$

Решение. Так как $R(t)=2$, $H(t)=0$ $(\deg R(t)=0,\ \deg H(t)=-\infty)$ и собственные значения оператора $L_2=D^2+D$ равны $v_1=0$, $v_2=-1$, то коэффициентами при $\cos t$ и $\sin t$ являются полиномы нулевой степени, т.е. $M(t)=A$, $N(t)=B$. Контрольное число $\gamma=0+i$ не является собственным значением оператора L_2, поэтому $x_{чн}(t)$ ищем в виде $x_{чн}(t)=t^0(A\cos t+B\sin t)=A\cos t+B\sin t$. Подставляя $x_{чн}(t)$, $Dx_{чн}(t)= =-A\sin t+B\cos t$, $D^2x_{чн}(t)=-A\cos t-B\sin t$ в уравнение, получаем $(-A+B)\cos t+(-A-B)\sin t=2\cos t$. Для нахождения A и B получили систему $\begin{cases}-A+B=2,\\-A-B=0.\end{cases}$ Поэтому $A=-1$, $B=1$, т.е. $x_{чн}(t)=-\cos t+\sin t$. Тогда общее решение уравнения имеет вид $x(t)=C_1+C_2e^{-t}-\cos t+\sin t$.

Задача 9.3. Указать вид частного решения уравнения

$$D^2x+x=t^2\cos t+2\sin t+e^{2t}\sin 2t+t^3e^t.$$

Решение. Определим собственные значения оператора $L_2=D^2+D^0$: $v^2+1=0\Rightarrow v_1=i$, $d_1=1$, $v_2=-i$, $d_2=1$. Правую часть уравнения рассматриваем как сумму трех слагаемых $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, где $f_1(t)=t^2\cos t+$ $+\,2\sin t$, $\gamma_1=i$, $R_1(t)=t^2$, $H_1(t)=2$; $f_2(t)=e^{2t}\sin 2t$, $\gamma_2=2+2i$, $R_2(t)=0$, $H_2(t)=1$; $f_3(t)=t^3e^t$, $\gamma_3=1$, $P(t)=t^3$. Частное решение ищем в виде $t(M(t)\cos t+N(t)\sin t)+(K(t)\sin 2t+L(t)\cos 2t)+Q(t)e^t$. Следовательно, степень $M(t)$ равна степени $N(t)$ и равна 2, степень $K(t)$ равна степени $L(t)$ и равна 0, степень $Q(t)$ равна 3. Тогда частное решение данного уравнения имеет вид $x_{чн}(t)=t((At^2+Bt+C)\cos t+(Mt^2+Nt+D)\sin t)+(a\sin 2t+$ $+b\cos 2t)e^{2t}+(pt^3+mt^2+nt+l)e^t$.

Применить правило Эйлера для нахождения частных решений уравнений:

259. $D^2x - 2Dx - 3x = e^{4t}$.

260. $D^2x + x = 4te^t$.

261. $D^2x - x = 2e^t - t^2$.

262. $x'' + x' - 2x = 3te^t$.

263. $D^2x - 3Dx + 2x = \sin t$.

264. $D^2x - 9x = e^{3t}\cos t$.

265. $D^2x - 2Dx + x = 6te^t$.

266. $x'' + x = t\sin t$.

267. $D^2x + 4Dx + 4x = te^{2t}$.

268. $x'' - 5x' = 3t^2 + \sin 5t$.

269. $D^5x + D^2x = t$.

270. $D^4x - 4D^3x + 8D^2x - 16Dx + 16x = 96te^{2t}$.

Построить общие решения уравнений, используя правило Эйлера:

271. $D^2x + x = 4\sin t$.

272. $D^2x - 5Dx + 4x = 4t^2e^{2t}$.

273. $D^2x - 3Dx + 2x = t\cos t$.

274. $x'' + 3x' - 4x = te^{-t} + e^{-4t}$.

275. $D^2x - 4Dx + 8x = e^{2t} + \sin 2t$.

276. $D^2x + 2Dx - 3x = t^2e^t$.

277. $D^3x - D^2x = 12t^2 + 6t$.

278. $x'' + x' = 4t^2e^t$.

279. $D^2x + 10Dx + 25x = 4e^{-5t}$.

280. $D^2x + 3Dx + 2x = t\sin t$.

281. $x'' - 4x' + 4x = t^2$.

282. $D^2x + x = e^t$.

283. $D^4x + 8D^2x + 16x = \cos t$.

284. $D^2x + x = 2\cos t - 2\cos^3 t$.

285. $D^3x + D^2x + Dx + x = t^3 + 3t^2 + 6t + 6$.

286. $D^3x - 3Dx + 2x = (9t + 1)e^t + 9e^{-2t}$.

287. $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = (12t^2e^t - 1)e^{2t}$.

Пользуясь правилом Эйлера, решить начальные задачи:

288. $D^2x + x = 4e^t$, $x|_{t=0} = 4$, $Dx|_{t=0} = -3$.

289. $D^2x - 2Dx = 2e^t$, $x|_{t=1} = -1$, $Dx|_{t=1} = 0$.

290. $x'' + 2x' + 2x = te^{-t}$, $x|_{t=0} = x'|_{t=0} = 0$.

291. $D^3x - 3Dx - 2x = 9e^{2t}$, $x|_{t=0} = 0$, $Dx|_{t=0} = -3$, $D^2x|_{t=0} = 3$.

292. $D^4x + D^2x = 2\cos t$, $x|_{t=0} = -2$, $Dx|_{t=0} = 1$, $D^2x|_{t=0} = D^3x|_{t=0} = 0$.

293. $D^4x - x = 8e^t$, $x|_{t=0} = -1$, $Dx|_{t=0} = 0$, $D^2x|_{t=0} = 1$, $D^3x|_{t=0} = 0$.

294. $x'' + 4x = \sin t$, $x|_{t=0} = 1$, $x'|_{t=0} = 1$.

295. $D^3x - D^2x - Dx + x = 4(6t - 1)e^t + 3t$, $x|_{t=0} = 1$, $Dx|_{t=0} = -1$, $D^2x|_{t=0} = 0$.

Пользуясь правилом Эйлера, указать вид частных решений уравнений:

296. $D^2x - 2Dx + 2x = e^t + t\cos t$.

297. $D^2x + 6Dx + 10x = 3te^{-3t} - 2e^{3t}\cos t$.

298. $D^2x - 8Dx + 20x = 5te^{4t}\sin 2t$.

299. $x'' + 7x' + 10x = te^{-2t}\cos 5t$.

300. $D^2x - 2Dx + 5x = 2te^t + e^t\sin 2t$.

301. $D^2x - 2Dx + x = 2te^t + e^t\sin 2t$.

302. $x'' - 8x' + 17x = (t^2 - 3t\sin t)e^{4t}$.

303. $D^3x + Dx = \sin t + t\cos t + e^{-t}\cos 2t + t^2$.

304. $D^3x - 2D^2x + 4Dx - 8x = e^{2t}\sin 2t + 2t^2$.

305. $D^2x - 9x = (t^2 + \sin 3t)e^{-3t}$.

306. $x'' + 4x = \cos t\cos 3t$.

307. $D^2x - 4Dx + 5x = e^{2t}\sin^2 t$.

308. $D^4x + 5D^2x + 4x = \sin t\cos 2t$.

309. $D^2x - 3Dx + 2x = 2^t$.

310. $D^2x - x = 4\,\mathrm{sh}\,t$.

311. $x'' + 2x' + 2x = \mathrm{ch}\,t\sin t$.

312. $D^2x - 8Dx + 17x = (t - 3\sin 2t + t^2\cos 2t + \sin t)e^{3t}$.

313. $D^3x + 3D^2x + 3Dx + x = te^{-t} + t^2e^t + \sin t + \mathrm{ch}\,2t$.

314. $D^4x + 5D^2x + 6x = \sin at$, $a \in \mathbb{R}$.

315. $D^4x - a^4x = t^2 + 1 + \sin t$, $a \in \mathbb{R}$.

316. $D^5x - 2D^4x + 5D^3x - 10D^2x - 36Dx + 72x = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$.

317. $D^4x + 2a^2D^2x + a^4x = \cos at$, $a \in \mathbb{R}$.

318. Составить линейное неоднородное уравнение второго порядка, общим решением которого является функция:

а) $x = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)e^{2t} + 3e^{2t}$;

б) $x = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + 2te^{t}$;

в) $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} + te^{t}$.

319. Найти все решения уравнений, удовлетворяющие заданным условиям на бесконечности:

а) $D^2x - 4Dx + 5x = \sin t$, $x(t)$ ограничено при $t \to +\infty$;

б) $D^2x - x = 1$, $x(t)$ ограничено при $t \to \infty$; $t \to +\infty$; $t \to -\infty$;

в) $D^2x + 2Dx + 5x = 4 \cos 2t + \sin 2t$, $x(t)$ ограничено при $t \to -\infty$;

г) $D^2x - 4Dx + 4x = (9t^2 + 5t - 12)e^{t}$, $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$; $t \to -\infty$;

д) $D^2x + 4Dx + 3x = 8e^{t} + 9$, $x(t) \to 3$ при $t \to -\infty$.

320. Указать уравнения, при решении которых нельзя применить правило Эйлера:

а) $D^2x + Dx + x = e^{-t}$, $I = \mathbb{R}$;

б) $D^2x - x = \operatorname{tg} t$, $I = (-\pi/2, \pi/2)$;

в) $D^2x - Dx + x = e^{t}/t^2$, $I = (0, +\infty)$;

г) $D^2x + 9Dx + 3x = e^{2t} \cos t$, $I = \mathbb{R}$;

д) $D^2x - 10x = \sqrt{t}e^{t}$, $I = (0, +\infty)$;

е) $D^2x + 2Dx - x = \sin e^{2t}$, $I = \mathbb{R}$;

ж) $D^2x + 4Dx = e^{2t} \sin t$, $I = \mathbb{R}$;

з) $D^2x - Dx + 2x = \sin t \cos t$, $I = \mathbb{R}$.

321. Указать уравнения, для решения которых можно использовать правило Эйлера:

а) $D^2x - 2Dx - 3x = e^{t} + \sin t$, $I = \mathbb{R}$;

б) $D^2x + Dx - x = \cos^2 t$, $I = \mathbb{R}$;

в) $D^2x + 3Dx - 5x = e^{2t}\sqrt{1 - e^{2t}}$, $I = (-\infty, 0]$;

г) $D^2x - Dx + x = e^{t}/(t^2 + 1)$, $I = \mathbb{R}$;

д) $D^2x + 10x = 3t^2 + 5t + 1$, $I = \mathbb{R}$;

е) $D^2x + 10x = (3t^2 + 5t + 1)/t$, $I =]0, +\infty)$;

ж) $D^2x + 10x = \cos t \sin 2t$, $I = \mathbb{R}$;

з) $D^2x + 10x = \cos t / \sin 2t$, $I = (0, \pi/2)$.

10. Математические модели прикладных задач

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Движение материальной точки по прямой под действием силы притяжения к неподвижному центру, пропорциональной отклонению от него, и силы сопротивления среды, пропорциональной скорости движения точки, описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + k^2x = 0,$$

что следует из второго закона Ньютона. С учетом *вынуждающей внешней силы* $f(t)$ дифференциальное уравнение движения материальной точки принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + k^2x = f(t).$$

При отсутствии сопротивления среды $(a = 0)$ и наличии периодической возбуждающей силы $f(t) = H\sin(\omega t + \gamma)$ дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = H\sin(\omega t + \gamma).$$

Общее решение однородного уравнения $\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$ характеризует *собственные колебания*. Частное решение неоднородного уравнения

$$x_{\text{чн}}(t)=\frac{H}{k^2-\omega^2}\sin(\omega t+\gamma)$$

при $k\neq\omega$ характеризует *вынужденные колебания* материальной точки.

Общее решение неоднородного уравнения представляет собой наложение свободных и вынужденных колебаний (*принцип суперпозиции*), т.е.

$$x(t)=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{H}{k^2-\omega^2}\sin(\omega t+\gamma).$$

Если частота ω внешней силы близка к частоте k собственных колебаний, то амплитуда $H/(k^2-\omega^2)$ очень велика, вследствие чего может произойти разрушение всей колебательной системы. Это явление носит название *резонанса*. В чисто резонансном случае при $k=\omega$ общее решение уравнения имеет вид

$$x(t)=C_1\cos kt+C_2\sin kt-\frac{Ht}{2k}\cos(kt+\gamma).$$

При $t\to+\infty$ амплитуда вынужденных колебаний $Ht/(2k)$ неограниченно возрастает.

С учетом сопротивления среды и при синусоидальной вынуждающей силе дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2a\frac{dx}{dt}+k^2x=H\sin(\omega t+\gamma).$$

Общее решение однородного уравнения $\frac{d^2x}{dt^2}+2a\frac{dx}{dt}+k^2x=0$ при $a>0$ и $k^2-a^2>0$ описывает собственные колебания и при $t\to+\infty$ стремится к нулю. Частное решение неоднородного уравнения при больших t описывает *установившийся режим* и соответствует вынужденным колебаниям.

Задача 10.1. Тело совершает 90 колебаний в минуту, амплитуда колебаний уменьшается вдвое в течение 15 с. Составить дифференциальное уравнение движения.

Решение. Так как тело совершает затухающие гармонические колебания, то закон движения имеет вид $x(t)=Ae^{-at}\cos(\omega t+\varphi)$, где ω – частота колебаний, а период колебаний $T=2\pi/\omega$. Из условия задачи следует, что одно колебание тело совершает за 60/90 с. Следовательно, $T=2/3$ и $\omega=3\pi$. Учитывая, что при $t=0$ амплитуда колебания равна A, а при $t=15$ она равна $Ae^{-15a}=0{,}5A$, имеем $a=\ln 2/15$ и

$$x(t)=A\exp\left(-\ln 2/15t\right)\cos(3\pi t+\varphi),$$

где A, φ – произвольные постоянные. Дифференциальное уравнение второго порядка, общим решением которого является $x(t)$ и корни характеристического уравнения $v_{1,2}=-\ln 2/15\pm 3\pi i$, имеет вид

$$D^2x+\ln 4/15\,Dx+\left(\ln^2 2/225+9\pi^2\right)x=0.$$

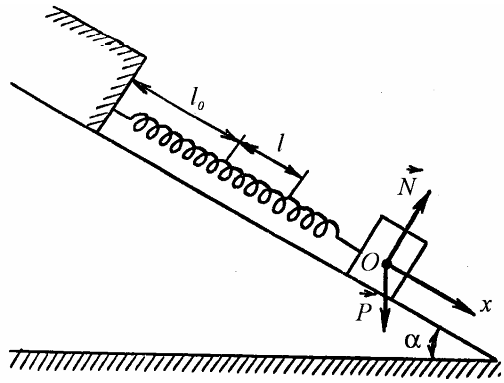


Рис. 3

Задача 10.2. На идеально гладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30°$ (рис. 3), находится груз массой $m = 1$ кг, прикрепленный к пружине, жесткость которой $c = 4{,}9 \times \times 10^3$ Н/м. Определить закон колебаний груза, если он отпущен без начальной скорости из положения, при котором пружина не деформирована.

Р е ш е н и е. Будем считать, что начало координат совпадает с точкой статического равновесия; направление оси Ox указано на рис. 3. Сила упругости пружины $F = c\Delta l$, где Δl – изменение длины пружины по сравнению с ее естественным (ненапряженным) состоянием, $\Delta l = l + x$, l – удлинение пружины при равновесии. Обозначим через l_0 длину пружины до деформации. Так как на систему кроме силы упругости действует еще вес груза $\vec{P}(P_x, P_y)$, где $P_x = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$, то дифференциальное уравнение движения имеет вид $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -c(l + x) + P\sin\alpha$. В точке $x = 0$ имеет место равновесие, т.е. при этом $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$. Из предыдущего уравнения имеем $0 = -cl + P\sin\alpha$, следовательно, $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + cx = 0$, т.е. дифференциальное уравнение закона движения груза не зависит от статического удлинения l пружины. Учитывая, что в начальный момент времени $t = 0$ пружина была не деформирована и груз был отпущен без начальной скорости, математическую модель движения груза запишем в виде $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + cx = 0,\quad x\big|_{t=0} = -l,\quad \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0,$ где $l = \dfrac{P\sin\alpha}{c} = \dfrac{mg\sin\alpha}{c}$.

Используя данные задачи, имеем $x(t) = -0{,}1\cos 70t$ см. Следовательно, амплитуда колебаний $A = 0{,}1$ см, а период колебаний $T = 2\pi\sqrt{m/c} \approx 0{,}0898$ с.

322. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + k^2x = f(t):$$

а) в случае свободных колебаний в среде без сопротивления; найти период и частоту колебаний;

б) в случае вынужденных колебаний в среде без сопротивления при наличии синусоидальной вынуждающей силы с нулевой начальной фазой;

в) в случае вынужденных колебаний в среде с сопротивлением при наличии синусоидальной вынуждающей силы с нулевой начальной фазой;

г) в случае отсутствия внешней силы; выделить случай затухающих гармонических колебаний.

323. При каком условии относительно ω общее решение уравнения $D^2x + x = \sin\omega t$ не будет иметь векового члена? (У к а з а н и е. В небесной механике *вековым членом* называется выражение, имеющее вид произведения периодической функции и степени независимой переменной.)

324. При каких значениях k общее решение уравнения $D^2x + k^2x = \sin 2t$ не имеет векового члена? (См. указание к задаче 323.)

325. При каких значениях k и ω общее решение уравнения $D^2x + kx = \cos\omega t$ имеет вековой член? (См. указание к задаче 323.)

326. При каких значениях k и ω уравнение $D^2x + k^2x = \sin\omega t$ имеет хотя бы одно периодическое решение?

327. Показать, что частное решение уравнения $D^2x + p^2x = k\cos pt$ представляет колебания с неограниченно возрастающей амплитудой.

328. Найти периодические решения уравнения $D^2x + aDx + bx = \sin \omega t$.

329. Качка корабля описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2h\frac{du}{dt} + k^2u = a\sin\omega t + b\cos\omega t,$$

где $u = u(t)$ – наклон корабля в момент времени t; h, k, a, b, ω – постоянные, $h < k$. Проинтегрировать уравнение. Исследовать наличие установившегося режима и найти в этом режиме наибольшее отклонение корабля от положения равновесия.

330. Если ось вала турбины расположена горизонтально и центр масс диска, насаженного на вал, не лежит на оси, то прогиб y (рис. 4) оси вала при его вращении удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2\right)y = g\cos\omega t + \varepsilon\omega^2,$$

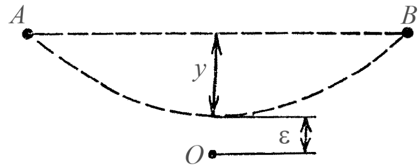


Рис. 4

где m – масса диска; α – постоянная, зависящая от способа закрепления концов A и B; ω – постоянная угловая скорость; g – ускорение свободного падения; ε – эксцентриситет центра масс диска. Найти общее решение этого уравнения.

331. Равновесный размер популяции некоторого вида в заданной среде оценивается в 1000 особей. Популяция испытывает флуктуации около этого среднего значения, что описывается уравнением $D^2x = 4\pi^2(1000 - x)$, где $x = x(t)$ – численность популяции в момент t (в годах). Найти численность популяции спустя 6, 12 и 18 месяцев, если в начальный момент времени популяция состояла из 1500 особей. Начальная скорость изменения численности равна нулю.

332. В эксперименте с голоданием масса испытуемого за 30 дней уменьшилась со 105 до 90 кг. Ежедневная потеря массы, согласно наблюдениям, пропорциональна массе испытуемого. Найти закон изменения массы как функцию времени. Определить массу испытуемого после 15 дней голодания.

333. При большой скорости вращения тонкого длинного вала длиной l с закрепленными концами под действием центробежной силы происходит искривление его формы. Прогиб вала y в зависимости от абсциссы x удовлетворяет уравнению $\frac{d^4y}{dx^4} = a^4y$, где $a^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$, m – масса единицы длины вала, ω – угловая скорость вала, E – модуль Юнга, I – момент инерции поперечного сечения вала относительно оси. Определить критическую угловую скорость вала, т.е. скорость, при которой изменяется форма вала, если на закрепленных его концах изгибающие моменты $\frac{d^2y}{dx^2}$ и прогибы равны нулю.

334. Составить уравнение движения и найти период свободных колебаний груза массой m, подвешенного к пружине, если движение происходит без сопротивления.

335. Один конец пружины закреплен неподвижно, а к другому прикреплен груз массой m. При движении груза со скоростью v сила сопротивления среды равна hv, а сила упругости пружины пропорциональна отклонению от положения равновесия и равна kx. При $t = 0$ грузу, находившемуся в положении равновесия, сообщена скорость v_0. Составить математическую модель движения.

336. Материальная точка массой 1 г движется вдоль прямой от некоторого центра под действием силы, пропорциональной расстоянию от нее до этого центра, коэффициент пропорциональности равен четырем. Сопротивление среды пропорционально скорости движения, коэффициент пропорциональности равен трем. В начале движения расстояние от центра до точки составляет 1 см, а скорость равна нулю. Найти закон движения точки.

337. Материальная точка массой m движется по прямой под действием силы $\vec{f}_1$, модуль которой пропорционален отклонению материальной точки от положения равновесия, и силы сопротивления среды $\vec{f}_2$, модуль которой пропорционален скорости движения материальной точки. Начальное отклонение материальной точки равно s_0, начальная скорость v_0. Составить математическую модель закона движения. Выделить случаи: движения без колебания; гармонических колебаний; затухающих гармонических колебаний.

338. Тело массой 1 кг подвергается действию силы упругости, стремящейся вернуть его в положение устойчивого равновесия. Сила пропорциональна смещению и равна 2 Н при смещении в 1 м. Сопротивление среды пропорционально скорости. Амплитуда после трех колебаний уменьшается в 10 раз. Составить уравнение движения и найти период колебаний.

339. Материальная точка массой m притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию. Коэффициент пропорциональности равен k. Расстояние между центрами $2b$. В начальный момент точка находится на линии соединения центров на расстоянии a от ее середины. Начальная скорость равна нулю. Найти закон движения точки.

340. К пружине подвешен груз. Статическое удлинение пружины равно l. Построить математическую модель и найти закон колебаний груза, если в начальный момент пружина была растянута из ненапряженного состояния до длины $3l$, а груз был отпущен без начальной скорости. Определить частоту собственных незатухающих колебаний и их период.

341. Сила, натягивающая пружину, пропорциональна увеличению ее длины и равна 10 Н, когда длина увеличивается на 1 см. К пружине подвешен груз массой 2 кг. Составить дифференциальное уравнение движения и найти период колебательного движения груза при условии, что он был слегка оттянут вниз и затем отпущен.

342. Статические удлинения пружины под действием двух грузов равны соответственно l_1 и l_2. Определить частоту свободных незатухающих колебаний и их период, если к концу пружины подвесить оба груза. Составить предварительно дифференциальное уравнение движения и найти закон движения.

343. Статическое удлинение пружины под действием данного груза равно 20 см. В момент $t_0 = 0$ груз, находясь в положении равновесия, получил начальную скорость и стал совершать незатухающие колебания с амплитудой, равной 4 см. Определить закон движения груза и начальную скорость, принимая ускорение свободного падения g равным 1000 см/с^2.

344. Груз массой 100 г подвесили к концу недеформированной пружины и отпустили без начальной скорости. Длина недеформированной пружины – 65 см, а при равновесии груза на пружине ее длина равна 85 см. Составить математическую модель движения и определить закон движения груза, амплитуду и период колебаний, наибольшую силу упругости пружины, учитывая, что $g = 9{,}81$ м/с^2.

345. На вертикально расположенной пружине подвешены два равных груза, в результате чего она удлинилась на l. После этого один из грузов оборвался. Составить математическую модель движения второго груза, найти закон его движения, пренебрегая массой пружины.

346. Два одинаковых груза подвешены на пружине. Составить математическую модель и найти закон движения одного из этих грузов при условии, что второй груз оборвется. Удлинение пружины за счет одного груза равно a.

347. Тело массой m подвешено на пружине с жесткостью c. При вертикальном движении тела на него действует сила сопротивления среды $\vec{R} = -2\sqrt{mc}\vec{v}$. Составить математическую модель и определить закон движения тела, если оно в начальный момент имело скорость $\vec{v}_0$, направленную вниз, удлинение пружины было равно a.

348. Статическое удлинение пружины под действием груза массой m равно l. На колеблющийся груз действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости ($\vec{R} = -b\vec{v}$). Определить наименьшее положительное b, при котором процесс движения будет апериодическим.

349. Используя условие задачи 348, определить уравнение движения груза, если в начальный момент он находился в положении равновесия и имел скорость $\vec{v}_0$, направленную вниз.

350. Материальная точка массой m совершает затухающие колебания под действием силы упругости пружины, коэффициент жесткости которой c, и силы сопротивления среды $\vec{R} = -\vec{v}\gamma$, где $\gamma > 0$. Путем демпфирования (изменения силы сопротивления среды) значение коэффициента γ изменено до такого значения γ_1, что частота колебаний точки уменьшилась вдвое. Найти γ_1.

351. Используя условие задачи 350, найти значение γ_1, при котором частота колебаний точки увеличится вдвое, и установить условие, при котором это возможно.

352. Груз массой m подвешен на пружине с жесткостью c. На него действует возмущающая сила $\vec{Q}$, направленная вдоль вертикали x, и сила сопротивления среды $\vec{R} = -b\vec{v}$. Составить дифференциальное уравнение движения груза. Определить амплитуду A вынужденных колебаний груза, если $Q_x = H \sin \sqrt{c / m} t$.

353. На груз массой m = 1 кг, подвешенный на пружине с жесткостью c = 1600 Н/м, действует возмущающая сила с амплитудой 100 Н и частотой, равной частоте свободных незатухающих колебаний. Во избежание резонанса к грузу подсоединяют демпфер, создающий силу сопротивления, пропорциональную скорости движения груза; коэффициент пропорциональности равен k. При каком значении k амплитуда вынужденных колебаний не превысит 5 см? Массой демпфера пренебречь.

354. Пружина скреплена со штоком поршня, который находится в камере (рис. 5). В эту камеру попеременно сверху и снизу поступает свежий воздух, вследствие чего сила, действующая на поршень, изменяется по закону $F = 2{,}3 \sin 8\pi t$ (t – время в секундах, F – сила в ньютонах). Составить дифференциальное уравнение и определить вынужденные колебания поршня, если его масса m = 0,5 кг, а жесткость пружины c = 200 Н/м.

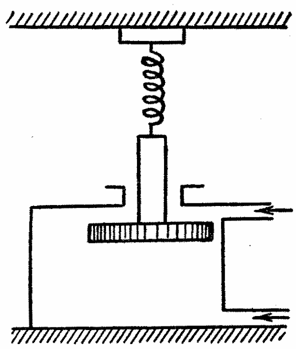


Рис. 5

355. Цилиндрический чурбан радиусом 10 см и массой 10 кг стоит вертикально в воде. Составить дифференциальное уравнение движения, найти период колебания, которое произойдет, если немного приподнять чурбан и затем отпустить его. Масса 1 м^3 воды равна 1 т. (Указание. Считаем, что $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -F$, где F – сила, выталкивающая чурбан, подчиняется закону Архимеда.)

356. Цистерна массой m = 4 т находится на поверхности воды, уровень которой в месте нахождения цистерны изменяется вследствие волнения по закону $s = \dfrac{4}{9} \sin \dfrac{3}{2} t$ (t – время в секундах, s – уровень воды в метрах). Считая площадь горизонтального сечения $S_{\text{сеч}}$ постоянной и равной 5 м^2, определить вертикальные колебания цистерны относительно уровня спокойной воды, если плотность воды ρ = 1 т/м^3. В начальный момент цистерна находилась в положении статического равновесия при спокойной воде и скорость ее была равна нулю. Сопротивлением воды пренебречь. (Указание. Возмущающая сила $F_x = sS_{\text{сеч}} g\rho$.)

Моделирование электрических цепей. Для расчета режима работы электрических цепей, содержащих любые комбинации резистивных, индуктивных и емкостных элементов с сопротивлением R, индуктивностью L и емкостью C, используется связь между падением напряжения U на элементе цепи и силой тока I в нем. Эта зависимость описывается *законом Ома* $U = RI$ для резистивного элемента, характеризующегося электрическим сопротивлением R; для индуктивного элемента – законом $U = L\frac{dI}{dt}$; для емкостного элемента – законом $U = \frac{q}{C}$; кроме того, $I = \frac{dq}{dt}$, где q – заряд емкостного элемента.

Резистивный, индуктивный и емкостный элементы цепи относятся к пассивным элементам цепи, к активным же элементам относятся так называемые источники электродвижущей силы (ЭДС) и источники тока.

Основными законами электрических цепей являются законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма всех токов, подходящих к любой точке цепи, равна нулю.

Второй закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма падений напряжений на любой последовательности элементов, образующих замкнутую цепь, равна нулю.

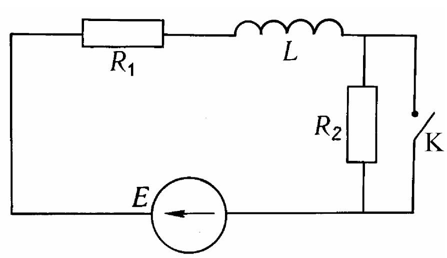


Рис. 6

Задача 10.3. Рассмотреть процесс, протекающий при размыкании электрической цепи (рис. 6). Найти напряжение между размыкающими контактами.

Р е ш е н и е. Составим дифференциальное уравнение для цепи после размыкания ключа K. По второму закону Кирхгофа имеем

$$L\frac{dI}{dt} + (R_1 + R_2)I = E, \quad I\big|_{t=0} = I_0.$$

Решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному, называется *свободным током* $I_{\text{св}}$:

$$I_{\text{св}} = A\exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L}t\right).$$

Частное решение неоднородного уравнения называется *установившимся током* $I_{\text{у}}$; для данного уравнения $I_{\text{у}} = E/(R_1 + R_2)$. Следовательно,

$$I = I_{\text{св}} + I_{\text{у}} = A\exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L}t\right) + \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Использовав начальные данные задачи, имеем

$$I(t) = \frac{E}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L}t\right)\right).$$

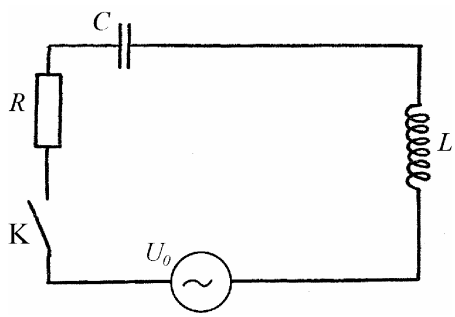


Рис. 7

357. Электрическая цепь состоит из индуктивного L, емкостного C и резистивного R элементов и источника напряжения U_0, соединенных так, как показано на рис. 7. В момент времени $t = 0$ ключ K замыкает цепь. Составить дифференциальное уравнение изменения заряда q емкостного элемента в зависимости от времени. (У к а з а н и е. Воспользоваться вторым законом Кирхгофа.)

358. Электрический контур состоит из последовательно включенных источника тока $U_0 = E_0\cos\omega t$, сопротивления R, индуктивности L и емкости C (см. рис. 7). В момент времени

$t = 0$ ключ К замыкает цепь. Составить дифференциальное уравнение тока $I = I(t)$ в цепи в зависимости от времени t.

359. К цепи, состоящей из емкости C и индуктивности L, соединенных последовательно, в момент времени $t = 0$ приложена ЭДС $E = E_0\cos(\omega t + \alpha)$. Начальный ток и заряд равны нулю. Определить силу тока в цепи в момент t при условии, что $\omega^2 \neq 1/(LC)$.

360. К описанной в задаче 359 цепи с нулевыми начальными током и зарядом в момент $t = 0$ приложена ЭДС $E = E_0\sin\nu t$ с резонансной частотой $\nu^2 = 1/(LC)$. Определить силу тока в цепи в момент t.

361. Уравнение электрического тока в цепи, содержащей индуктивность и сопротивление, имеет вид $L\dfrac{dI}{dt} + RI = E$, где L – индуктивность; I – сила тока; t – время; R – сопротивление; E – ЭДС. Определить I, предполагая, что:

а) $E = 0$, $I\big|_{t=0} = I_0$; б) $E = E_0$, E_0 – постоянная; в) $E = E_0 \sin \omega t$.

362. Уравнение электрического тока в некоторой цепи имеет вид $\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{RC}I = \dfrac{1}{R}\dfrac{dE}{dt}$, где $I = I(t)$ – сила тока в цепи в момент времени t; R, C – постоянные. Определить $I(t)$, предполагая, что $E = E_0\sin\omega t$.

363. Колебательный контур, представляющий собой замкнутую электрическую цепь, обладает емкостью C, самоиндукцией L и сопротивлением R. При переходе энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки и обратно напряжение на конденсаторе уменьшается за счет сопротивления. Составить дифференциальное уравнение изменения заряда конденсатора q, силы тока I и напряжения U на конденсаторе. Найти закон изменения заряда q конденсатора, если в начальный момент времени максимальный заряд на конденсаторе равен Q, а ток в цепи отсутствует.

364. К катушке с сопротивлением R и самоиндукцией L приложена ЭДС E, изменяющаяся со временем по закону $E = E_0\sin\omega t$. Найти силу тока I в цепи, если $I = 0$ при $t = 0$.

365. К резистору с сопротивлением R, обладающему индуктивностью L, приложена ЭДС, равная $E_0 \sin(\omega t + \alpha)$. Начальный ток равен нулю. Составить дифференциальное уравнение тока в цепи. Найти силу тока в момент времени t.

366. В цепи, состоящей из индуктивного L и емкостного C элементов (рис. 8), емкостный элемент первоначально заряжен до напряжения E. В момент $t = 0$ ключ К замыкает цепь. Найти закон изменения напряжения на емкостном элементе.

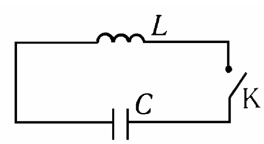


Рис. 8

367. Цепь состоит из последовательно включенных сопротивления, индуктивности и емкости. Начальные ток и заряд равны нулю. К цепи приложена ЭДС, равная E_1 при $0 < t \le T$ и E_2 при $t > T$ (E_1, E_2 – постоянные). Показать, что при $t > T$ сила тока в цепи

$$I = \frac{E_1}{nL}\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\sin nt - \frac{E_1 - E_2}{nL}\exp\left(-\frac{R}{2L}(t-T)\right)\sin n(t-T),$$

где $n^2 = 1/(LC) - R^2/(4L^2) \neq 0$.

367.1. В цепи, состоящей из индуктивного L, емкостного C и резистивного R элементов, а также из источника постоянного напряжения E (рис. 9), до размыкания ключа К протекает постоянный ток $I = E/R$. В момент $t = 0$ ключ К замыкает цепь. Найти закон изменения напряжения на емкостном элементе.

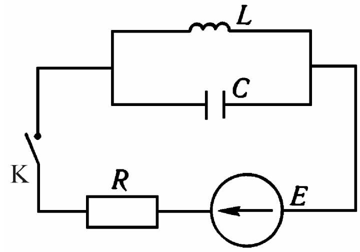


Рис. 9

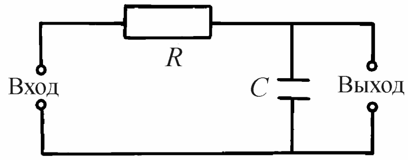


Рис. 10

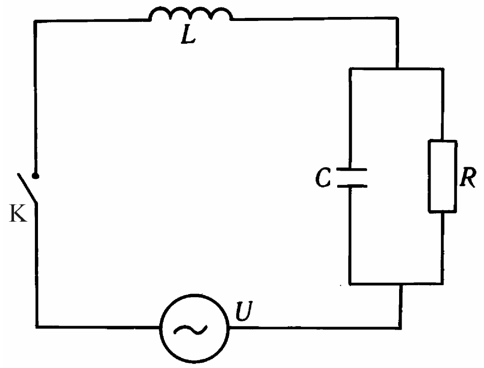


Рис. 11

367.2. Чтобы уменьшить колебания напряжения, снимаемого с выпрямительного устройства, используется так называемый «сглаживающий фильтр». Простейшая схема такого фильтра изображена на рис. 10. Найти напряжение на выходе емкостного элемента, если входное напряжение имеет постоянную компоненту U_0 и переменную компоненту $V\cos\omega t$. Оценить коэффициент k уменьшения переменной составляющей выходного напряжения по сравнению с переменной составляющей входного напряжения, если $\omega = 200\pi с^{-1}$, $R = 10^3$ Ом, $C = 10$ мкФ.

367.3. В цепи, изображенной на рис. 11, в момент $t = 0$ ключ К замыкает цепь. Показать, что величина установившегося (предельного) тока, протекающего через резистивный элемент, не зависит от его сопротивления R, если приложенное напряжение $U(t) = U_0\sin(\omega t + \varphi)$, где U_0 – амплитуда; $\omega = 1/\sqrt{LC}$ – частота; φ – начальная фаза напряжения.

Однопродуктовая динамическая макроэкономическая модель. Однопродуктовые макроэкономические модели – это модели, изучающие свойства и тенденции изменения взаимосвязанных агрегированных макроэкономических показателей. Основными факторами, характеризующими производство в некоторый момент времени t, являются интенсивности: $X(t)$ – производства валового продукта, $Y(t)$ – производства конечного продукта, $W(t)$ – производственного потребления, $I(t)$ – валовых капитальных вложений (инвестиций), $C(t)$ – непроизводственного потребления, $L(t)$ – трудовых ресурсов и т.д. Взаимосвязи указанных функций описываются следующими соотношениями. Во-первых, имеет место условие баланса $X(t) = W(t) + Y(t)$, которое при предположении, что производственные затраты пропорциональны выпуску продукции, т.е. $W(t) = aX(t)$, где a – коэффициент прямых (производственных) затрат, $0 < a < 1$, будет иметь вид

$$X(t) = aX(t) + Y(t).$$

Во-вторых, конечный продукт в свою очередь распределяется на валовые капитальные вложения и непроизводственное потребление, т.е.

$$Y(t) = I(t) + C(t).$$

При построении простейших однопродуктовых моделей обычно делают предположение, что валовые инвестиции полностью расходуются на прирост основных производственных фондов и на амортизационные расходы, т.е. величина прироста основных фондов $K(t)$ на промежутке $[t, t + \Delta t]$ будет равна $K(t+\Delta t) - K(t)$, поэтому $I(t)\Delta t = q(K(t+\Delta t) - K(t)) + \mu K(t)\Delta t$, где $q > 0$ – параметр модели, а $\mu > 0$ – коэффициент амортизации. Разделив последнее уравнение на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to +0$, получим дифференциальное уравнение движения фондов

$$I(t) = qK'(t) + \mu K(t).$$

Таким образом, однопродуктовая динамическая модель имеет вид

$$X(t) = aX(t) + qK'(t) + \mu K(t) + C(t).$$

Задача 10.4. Построить упрощенный вариант однопродуктовой динамической модели при следующих предположениях (открытая однопродуктовая динамическая модель Леонтьева): все валовые капитальные вложения идут на ввод в действие новых производственных фондов (основные фонды не изнашиваются); капитальные вложения пропорциональны приросту выпуска продукции, т.е. $I(t)\Delta t = \chi\ (X(t+\Delta t) - X(t))$, $\chi > 0$ – коэффициент приростной фондоемкости.

Р е ш е н и е. По условию коэффициент амортизации μ равен нулю, поэтому уравнения, описывающие требуемую модель, будут иметь вид: $X(t) = aX(t) + Y(t)$, $Y(t) = I(t) + C(t)$, $I(t)\Delta t = \chi\ (X(t+\Delta t) - X(t))$. Разделив последнее уравнение на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to +0$, получим дифференциальное уравнение $I(t) = \chi X'(t)$, связывающее интенсивности капитальных вложений и валового продукта. Таким образом, открытая однопродуктовая динамическая модель Леонтьева имеет вид

$$X(t) = aX(t) + \chi X'(t) + C(t).$$

367.4. Построить упрощенный вариант однопродуктовой динамической модели при следующих предположениях (замкнутая однопродуктовая модель Леонтьева): основные фонды не изнашиваются; капитальные вложения пропорциональны приросту выпуска продукции; весь объем непроизводственного потребления идет на восстановление рабочей силы, т.е. $C(t) = \gamma(t)L(t)$, $\gamma(t) > 0$ – норма потребления; затраты труда пропорциональны выпуску продукции, т.е. $L(t) = b(t)X(t)$, $b(t)$ – норма трудоемкости.

367.5. Найти закон изменения интенсивности валового продукта для открытой однопродуктовой модели Леонтьева в случае, если интенсивность производственного потребления $C(t)$ является известной функцией времени.

V. ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СТАЦИОНАРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

11. Схема расположения фазовых графиков

Решение обыкновенного дифференциального уравнения, сохраняющее постоянное значение при всех t, называется *стационарным.*

Для линейного уравнения второго порядка со стационарным оператором

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0 \tag{11.1}$$

при $a_0 \neq 0$ единственным стационарным решением является нулевое, т.е. $x(t) \equiv 0$. При $a_0 = 0$ стационарными будут решения $x(t) = C$, где $C \in \mathbb{R}$.

Общее решение уравнения (11.1) строится по корням характеристического уравнения, а именно

$$v_1,\ v_2 \in \mathbb{R},\ v_1 \neq v_2 \Rightarrow x(t) = C_1e^{v_1t} + C_2e^{v_2t}, \tag{11.2}$$

$$v_1,\ v_2 \in \mathbb{R},\ v_1 = v_2 \Rightarrow x(t) = (C_1t + C_2)e^{v_1t}, \tag{11.3}$$

$$v_1,\ v_2 \in \mathbb{C},\ v_{1,2} = \lambda \pm i\mu,\ \lambda \neq 0 \Rightarrow x(t) = C_1e^{\lambda t}\cos(\mu t + C_2), \tag{11.4}$$

$$v_1,\ v_2 \in \mathbb{C},\ v_{1,2} = \lambda \pm i\mu,\ \lambda = 0 \Rightarrow x(t) = C_1\cos(\mu t + C_2). \tag{11.5}$$

Евклидову плоскость $\mathbb{R}^2 = Oxy$ называют *фазовой* для рассматриваемого уравнения, если решения $x = x(t)$ этого уравнения изображаются на ней в виде *фазовых графиков (траекторий)*

$$l = \{(x, y) \mid x = x(t),\quad y = y(t) = Dx(t),\quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Фазовый график стационарного решения $x(t) = C$ состоит из одной точки $(C, 0)$. Графики нестационарных решений представляют собой параметрически заданные линии.

Если в рассматриваемом уравнении аргумент t заменить на $-t$, т.е. $\dfrac{d^2x(-t)}{d(t)^2}+a_1\dfrac{dx(-t)}{d(t)}+$ $+a_0x(-t)=0$, то оно перейдет в уравнение $D^2x-a_1Dx+a_0x=0$ того же типа, но с противоположным по знаку коэффициентом при Dx. Это означает, что действительные части собственных значений оператора L_2 исходного уравнения изменят знак на противоположный, направление движения по фазовым графикам изменится на противоположное и фазовые графики решений второго уравнения будут симметричны относительно прямой $y = 0$ фазовым графикам исходного уравнения.

Если фазовый график l вырождается в точку $M_0(x_0, y_0)$, то M_0 называется *точкой покоя* или *равновесия*. При $a_0 \neq 0$ стационарному решению $x(t) \equiv 0$ соответствует фазовый график $x = 0$, $y = 0$ и уравнение обладает единственной точкой покоя $O(0, 0)$. При $a_0 = 0$ уравнение обладает прямой покоя $y = 0$.

Для *невырожденного уравнения* ($a_0 \neq 0$) из соотношения $y(t) = Dx(t)$ следует, что в верхней полуплоскости $x(t)$ возрастает, движение по графикам l происходит слева направо, в нижней полуплоскости $x(t)$ убывает, движение – справа налево. Вдоль фазового графика решения $x = x(t)$ уравнения выполняется условие $Dy(t) = -a_1y(t) - a_0x(t)$, поэтому прямая $-a_1y - a_0x = 0$ делит фазовую плоскость на две части, в одной из которых $Dy > 0$, следовательно, y возрастает, а в другой $Dy < 0$, т.е. y убывает. В точках прямой $-a_1y - a_0x = 0$ фазовые графики имеют горизонтальные касательные. Угловой коэффициент касательной к графику в точке $M(x(t), y(t))$ имеет вид $y'_x(M)=\dfrac{Dy(t)}{Dx(t)}=\dfrac{-a_1y(t)-a_0x(t)}{y(t)}$. Отсюда можно сделать вывод, что графики l пересекают ось $y = 0$ с вертикальной касательной.

Говорят, что график l *примыкает* к началу координат $O(0, 0)$ при $t\to+\infty$, если $M(t) = (x(t), y(t)) \to$ $\to (0, 0)$ при $t\to+\infty$. Если же $M(t) \to (0, 0)$ при $t\to-\infty$, то говорят, что график l выходит из начала координат. Если существует $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{y(t)}{x(t)}=k$ $\left(\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{y(t)}{x(t)}=k\right)$, то говорят, что график *примыкает* к точке $O(0, 0)$ с *направлением* k, т.е. касаясь прямой $y = kx$. В этом случае k – собственное значение оператора L_2, поэтому примыкание вдоль прямой возможно только в случае наличия действительных собственных значений оператора L_2. Прямая $y = kx$, где k – собственное значение оператора, состоит из фазовых графиков решений исходного уравнения, так как если $Dx(t) = y(t) = kx(t)$, то $D^2x(t)$ $= Dy(t) = kDx(t) = k^2 x(t)$ и при подстановке в уравнение получается $(k^2 + a_1k + a_0)\, x(t) \equiv 0$.

Прямая $y = kx$ состоит из трех графиков: двух лучей, выходящих из начала координат, и точки O.

12. Определение типа точки покоя

Теорема 12.1 (*о точках покоя*). *Тип точки покоя O невырожденного линейного однородного стационарного уравнения второго порядка* $L_2x=0,\ L_2=D^2+a_1D+a_0D^0$ ($a_0 \neq 0$), *определяется видом собственных значений оператора* L_2, *а именно*:

$\nu_1,\nu_2\in\mathbb{R}$,	$\nu_1\nu_2<0$	$\Leftrightarrow$	*седло*,
$\nu_1,\nu_2\in\mathbb{R}$,	$\nu_1\nu_2>0$, $\nu_1\neq\nu_2$	$\Leftrightarrow$	*бикритический узел*,
$\nu_1,\nu_2\in\mathbb{R}$,	$\nu_1\nu_2>0$, $\nu_1=\nu_2$	$\Leftrightarrow$	*монокритический узел*,
$\nu_{1,2}=\lambda\pm i\mu$,	$\mu\neq0$, $\lambda\neq0$	$\Leftrightarrow$	*фокус*,
$\nu_{1,2}=\lambda\pm i\mu$,	$\mu\neq0$, $\lambda=0$	$\Leftrightarrow$	*центр*.

З а м е ч а н и е. При работе на компьютере систему координат будем обозначать Oxy.

Задача 12.1. Начертить схему расположения фазовых графиков

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0$$

с действительными характеристическими числами разных знаков.

Алгоритм решения.

• Составить характеристическое уравнение $v^2 + a_1v + a_0 = 0$ и найти его корни. Пусть далее $v_1 < 0,\ v_2 > 0.$

• Записать общее решение уравнения по формуле (11.2) $x(t) = C_1e^{v_1t} + C_2e^{v_2t}$ и выписать параметрическое уравнение фазовых графиков $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) = Dx(t),\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

• Определить тип точки покоя.

• Вычислить предел $x(t)$ и $y(t)$ при $t \to \pm\infty$ и установить этим направление движения по лучам на прямых $y = v_1x$ и $y = v_2x$, рассмотрев случаи:

а) $C_1 > 0, C_2 = 0;$

б) $C_1 < 0, C_2 = 0;$

в) $C_1 = 0, C_2 > 0;$

г) $C_1 = 0,\ C_2 < 0$.

• Проверить, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = v_2$, а $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = v_1$. Это означает, что фазовые графики асимптотически приближаются к лучам прямой $y = v_2x$ при $t \to +\infty$ и к лучам прямой $y = v_1x$ при $t \to -\infty$.

Если $C_1C_2 \neq 0$, то фазовый график лежит между двумя лучами прямых $y = v_1x$ и $y = v_2x$.

• На фазовой плоскости Oxy отметить точку покоя $O(0, 0)$. Нанести лучевые фазовые графики, лежащие на прямых $y = v_1x$ и $y = v_2x$. Указать направление движения по лучам.

• Нанести на плоскость прямую $-a_1y - a_0x = 0$, которую фазовые графики нестационарных решений пересекают с горизонтальной касательной, и отметить вертикальные касательные на оси $y = 0$.

• Учитывая все проведенные вычисления и рассуждения, нарисовать фазовые графики нестационарных решений и указать направление движения по ним, используя общую схему.

Задание 12.1.1. Начертить схему расположения фазовых графиков уравнения $D^2x - Dx - 2x = 0$.

Решение.

$a0 := -2 \qquad a1 := -1 \qquad r := 0.09 \qquad f(x,r) := \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2} & \text{if } |x| \le r \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$v^2 + a1\cdot v + a0 = 0$

$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} := v^2 + a1\cdot v + a0 \text{ solve } \to \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x(t, C1, C2) := C1\cdot e^{v1\cdot t} + C2\cdot e^{v2\cdot t} \to C1\cdot e^{-t} + C2\cdot e^{2\cdot t}$

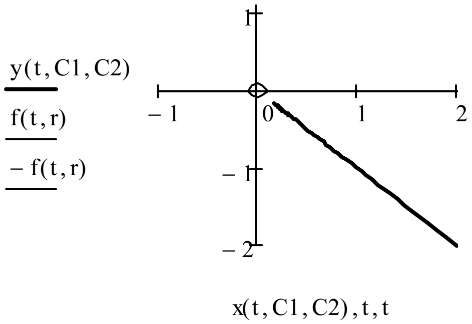
$y(t, C1, C2) := \dfrac{d}{dt}x(t, C1, C2) \to 2\cdot C2\cdot e^{2\cdot t} - C1\cdot e^{-t}$

$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{y(t, C1, C2)}{x(t, C1, C2)} \to 2 \qquad \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{y(t, C1, C2)}{x(t, C1, C2)} \to -1$

Комментарий. Точка покоя $O(0, 0)$ является седлом; лучевые фазовые графики лежат на прямых $y = -x$ и $y = 2x$; асимптотами фазовых графиков нестационарных решений являются прямые $y = -x$ и $y = 2x$.

$a := -2$ $\quad h := 0.05$ $\quad b := 2.5$ $\quad t := a, a + h .. b$

а) $C1 := 2$ $\quad C2 := 0$



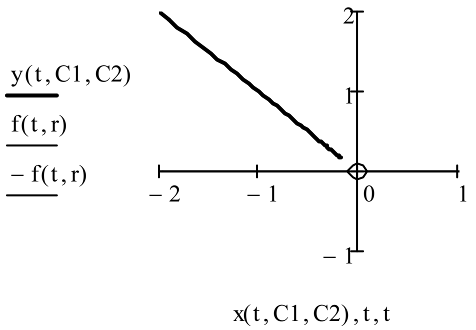
$\lim\limits_{t \to \infty} x(t, C1, C2) \to 0$

$\lim\limits_{t \to \infty} y(t, C1, C2) \to 0$

$\lim\limits_{t \to -\infty} x(t, C1, C2) \to \infty$

$\lim\limits_{t \to -\infty} y(t, C1, C2) \to -\infty$

б) $C1 := -2$ $\quad C2 := 0$



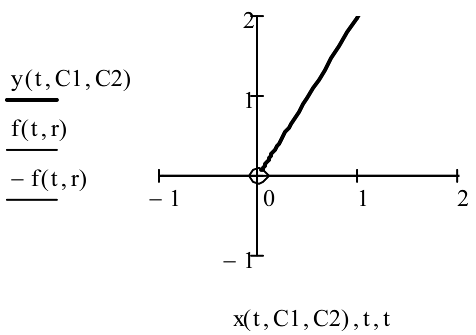
$\lim\limits_{t \to \infty} x(t, C1, C2) \to 0$

$\lim\limits_{t \to \infty} y(t, C1, C2) \to 0$

$\lim\limits_{t \to -\infty} x(t, C1, C2) \to -\infty$

$\lim\limits_{t \to -\infty} y(t, C1, C2) \to \infty$

в) $C1 := 0$ $\quad C2 := 2$



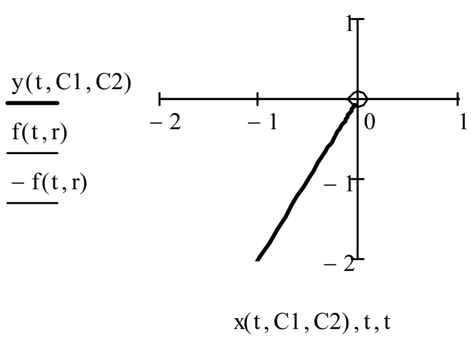
$\lim\limits_{t \to \infty} x(t, C1, C2) \to \infty$

$\lim\limits_{t \to \infty} y(t, C1, C2) \to \infty$

$\lim\limits_{t \to -\infty} x(t, C1, C2) \to 0$

$\lim\limits_{t \to -\infty} y(t, C1, C2) \to 0$

г) $C1 := 0$ $\quad C2 := -2$



$\lim\limits_{t \to \infty} x(t, C1, C2) \to -\infty$

$\lim\limits_{t \to \infty} y(t, C1, C2) \to -\infty$

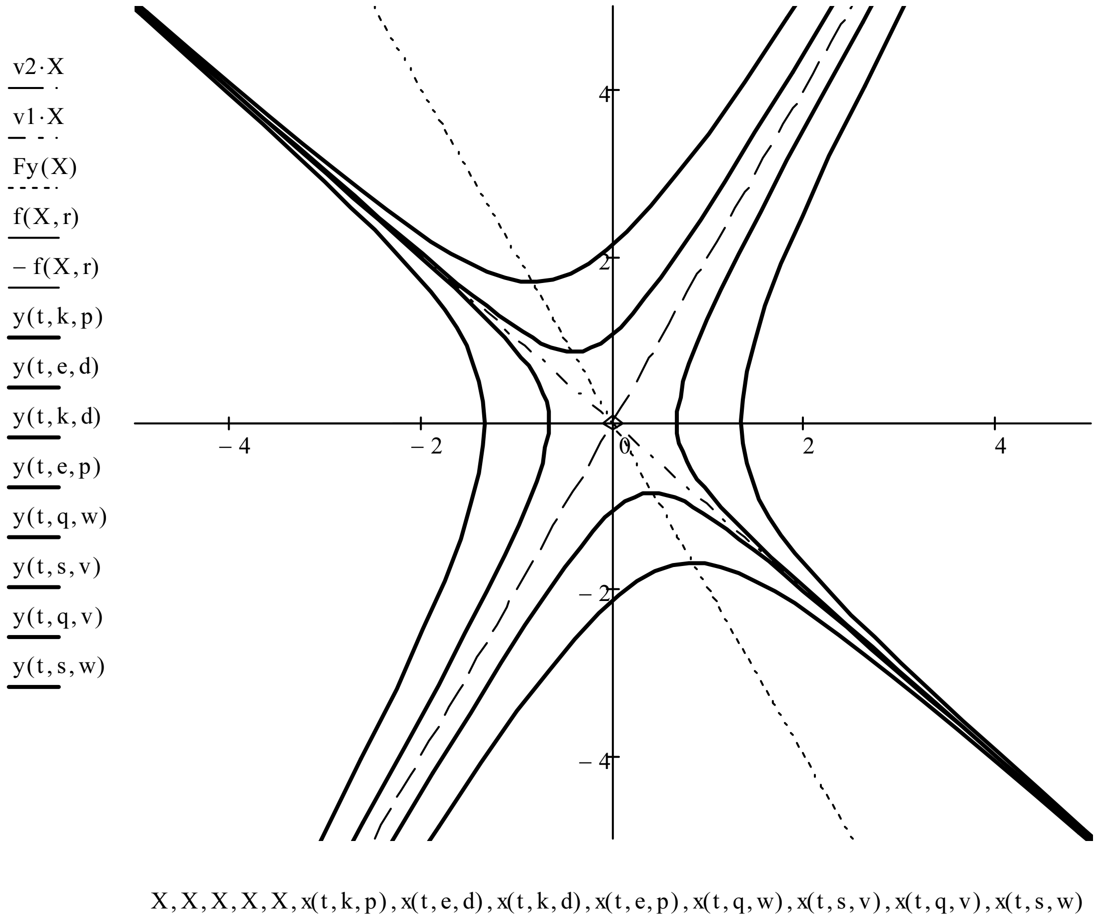
$\lim\limits_{t \to -\infty} x(t, C1, C2) \to 0$

$\lim\limits_{t \to -\infty} y(t, C1, C2) \to 0$

К о м м е н т а р и й. По лучам $y=-x,\ x>0,$ и $y=-x,\ x<0,$ прямой $y=-x$ движение происходит к точке покоя $O(0,0)$, так как соответствующие пределы стремятся к нулю при $t\to+\infty$; по лучам $y=2x,\ x>0,$ и $y=2x,\ x<0,$ прямой $y=2x$ движение происходит от точки покоя $O(0,0)$, поскольку соответствующие пределы стремятся к нулю при $t\to-\infty$.

$a1\cdot y + a0\cdot x = 0$ $\qquad Fy(x) := -\dfrac{a0\cdot x}{a1} \to -2\cdot x$

k := 0.3	p := 0.5	q := 2·k	w := 2·p
e := –k	d := –p	s := –q	v := –w
a := –4	h := 0.1	b := 4	t := a, a + h .. b
			X := a, a + h .. b



К о м м е н т а р и й. Все фазовые графики, отличные от лучевых, пересекают прямую $y=-2x$ с горизонтальной касательной, а прямую $y=0$ – с вертикальной; направление движения по фазовым графикам, лежащим между лучами $y=-x,\ x<0,$ и $y=2x,\ x>0,$ – слева направо, лежащим между лучами $y=-x,\ x>0,$ и $y=2x,\ x<0,$ – справа налево, между лучами $y=-x,\ x>0,$ и $y=2x,\ x>0,$ – снизу вверх, между лучами $y=2x,\ x<0,$ и $y=-x,$ $x<0,$ – сверху вниз.

Поведение фазовых графиков на бесконечности отражено далее в листинге.

$a := -4$ $h := 0.25$ $b := -3$ $t := a, a + h .. b$

$t =$

-4
-3.75
-3.5
-3.25
-3

$\dfrac{y(t, 0.3, -0.5)}{x(t, 0.3, -0.5)} =$

-1.00003
-1.00007
-1.00014
-1.00029
-1.00062

$y(t, 0.3, -0.5) =$

-16.38
-12.757
-9.936
-7.739
-6.028

$x(t, 0.3, -0.5) =$

16.379
12.756
9.934
7.736
6.024

$a := 4$ $h := -0.25$ $b := 3$ $t := a, a + h .. b$

$t =$

4
3.75
3.5
3.25
3

$\dfrac{y(t, 0.3, -0.5)}{x(t, 0.3, -0.5)} =$

2.00001
2.00002
2.00005
2.0001
2.00022

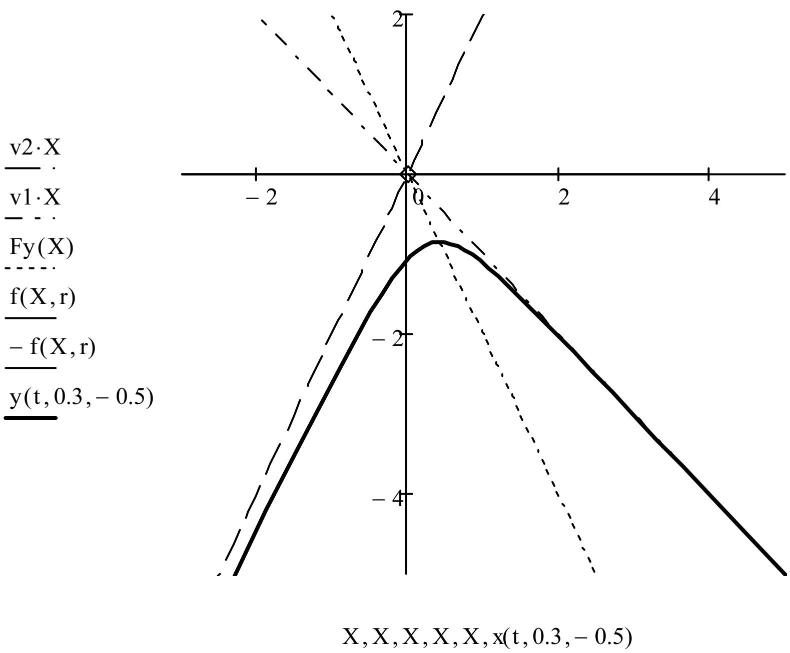
$y(t, 0.3, -0.5) =$

$-2.981 \cdot 10^3$
$-1.808 \cdot 10^3$
$-1.097 \cdot 10^3$
-665.153
-403.444

$x(t, 0.3, -0.5) =$

$-1.49 \cdot 10^3$
-904.014
-548.308
-332.559
-201.699

$a := -4$ $h := 0.1$ $b := 4$ $t := a, a + h .. b$ $X := a, a + h .. b$



Задача 12.2. Начертить схему расположения фазовых графиков дифференциального уравнения

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0$$

с действительными различными характеристическими числами одного знака.

А л г о р и т м р е ш е н и я.

• Составить характеристическое уравнение $\nu^2+a_1\nu+a_0=0$ и найти его корни.

• Записать общее решение уравнения по формуле (11.2) $x(t)=C_1e^{\nu_1 t}+C_2e^{\nu_2 t}$ и выписать параметрическое уравнение фазовых графиков $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t)=Dx(t),\ t\in\mathbb{R}. \end{cases}$

• Определить тип точки покоя.

• Пусть $\nu_1<\nu_2<0,\ a_1>0.$ Вычислить пределы $x(t)$ и $y(t)$ при $t\to+\infty$ и убедиться, что все фазовые графики, включая и лучевые, примыкают к точке покоя $O(0,0)$. (Для $\nu_1>\nu_2>0,\ a_1<0$ вычислить пределы $x(t)$ и $y(t)$ при $t\to-\infty,$ они должны быть равны нулю.)

• При $C_1C_2\neq 0$ вычислить $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{y(t)}{x(t)}$. Он должен быть равен ν_2.

• При $C_1C_2\neq 0$ вычислить $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{y(t)}{x(t)}$. Он должен быть равен ν_1.

• На фазовой плоскости Oxy отметить точку покоя $O(0,0)$. Нанести лучевые фазовые графики, лежащие на прямых $y=\nu_1x$, $y=\nu_2x,$ указать направление движения по лучам.

• Нанести на плоскость прямую $-a_1y-a_0x=0$, которую фазовые графики нестационарных решений пересекают с горизонтальной касательной, и отметить вертикальные касательные на оси $y=0$.

• Учитывая все проведенные рассуждения и вычисления, а также общую схему направления движения по фазовым графикам, нарисовать фазовые графики решений уравнения с указанием направления движения по ним.

Отметим, что если характеристические числа ν_1 и ν_2 оба положительны, т.е. $a_1<0$, то тип точки покоя не изменится, а фазовые графики отразятся симметрично относительно оси $y=0$ и направление движения по ним будет противоположным, т.е. от точки покоя $O(0,0)$.

Задание 12.2.1. Начертить схему расположения фазовых траекторий уравнения $D^2x+3Dx+2x=0$.

Р е ш е н и е.

$a0 := 2 \qquad a1 := 3 \qquad v^2 + a1\cdot v + a0 = 0$

$\begin{pmatrix} v2 \\ v1 \end{pmatrix} := v^2 + a1\cdot v + a0 \text{ solve } \to \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$x(t,C1,C2) := C1\cdot e^{v1\cdot t} + C2\cdot e^{v2\cdot t} \to C1\cdot e^{-2\cdot t} + C2\cdot e^{-t}$

$y(t,C1,C2) := \frac{d}{dt}x(t,C1,C2) \to -2\cdot C1\cdot e^{-2\cdot t} - C2\cdot e^{-t}$

$r := 0.09$

$f(x,r) := \begin{vmatrix} \sqrt{r^2-x^2} \ \text{ if } |x|\le r \\ 0 \ \text{ otherwise} \end{vmatrix}$

$\lim\limits_{t\to\infty} x(t,C1,C2) \to 0$

$\lim\limits_{t\to\infty} y(t,C1,C2) \to 0$

$a1\cdot y = -a0\cdot x \qquad Fy(x) := -\frac{a0\cdot x}{a1} \to -\frac{2\cdot x}{3}$

$\frac{y(t,C1,C2)}{x(t,C1,C2)} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume}, [(C1,C2) = \text{real}] \end{array} \right. \to \frac{C2}{C2 + C1\cdot e^{-t}} - 2 \qquad C = \frac{C1}{C2}$

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{1 + C \cdot e^{-t}} - 2 \right) \to -1$$

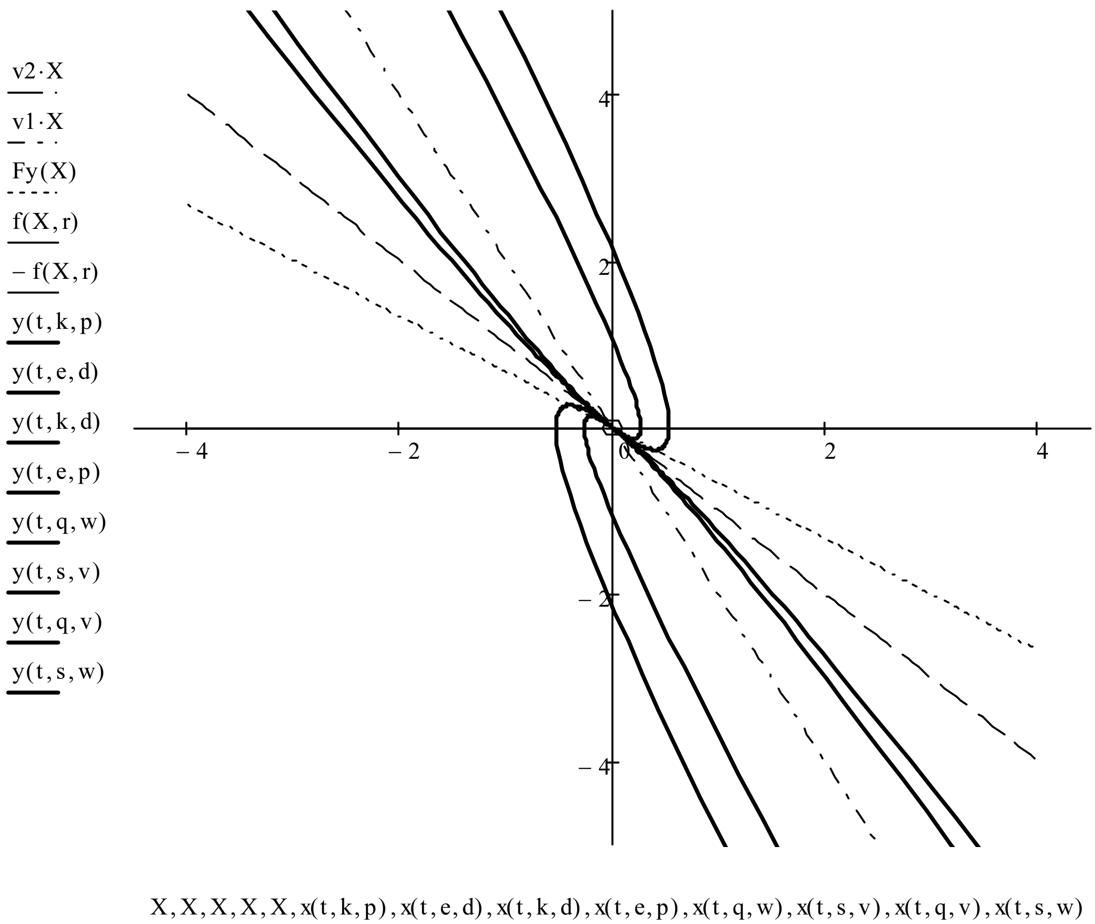
$$\lim_{t \to -\infty} \left(\frac{1}{1 + C \cdot e^{-t}} - 2 \right) \to \frac{1}{C \cdot \infty + 1} - 2$$

К о м м е н т а р и й. Точка покоя $O(0,0)$ является бикритическим узлом; все фазовые графики примыкают к точке покоя $O(0,0)$; все фазовые графики, кроме лучевых фазовых графиков $y=-2x,\ x>0,$ и $y=-2x,\ x<0,$ входят в точку покоя $O(0,0)$ с направлением $k=-1$; лучи $y=-2x,\ x>0,$ и $y=-2x,\ x<0,$ являются асимптотами фазовых графиков нестационарных решений.

$k := 0.6$ $\quad p := 0.8$ $\quad q := 2 \cdot k$ $\quad w := 2 \cdot p$

$e := -k$ $\quad d := -p$ $\quad s := -q$ $\quad v := -w$

$a := -4$ $\quad h := 0.05$ $\quad b := 4$ $\quad t := a, a+h..b$ $\quad X := a, a+h..b$



К о м м е н т а р и й. Все фазовые графики, отличные от лучевых, пересекают прямую $y=-2x/3$ с горизонтальной касательной, а прямую $y=0$ – с вертикальной; движение по всем фазовым графикам – к точке покоя $O(0,0)$; на рисунке не просматривается асимптотическое приближение фазовых графиков нестационарных решений к лучам прямой $y=-2x,$ в связи с тем что все построения проводятся в окрестности точки $O(0,0)$.

Поведение фазовых графиков на бесконечности отражено далее.

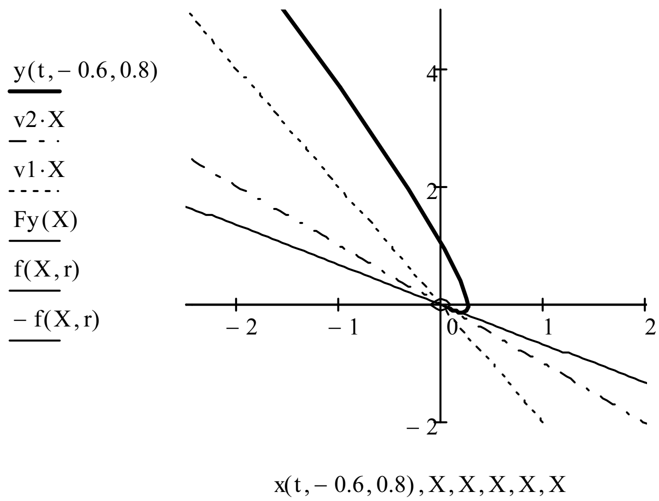
$a := -8.5 \qquad h := 0.25 \qquad b := -7.5 \qquad t := a, a + h .. b$

$t =$	$\frac{y(t,-0.6,0.8)}{x(t,-0.6,0.8)} =$	$y(t,-0.6,0.8) =$	$x(t,-0.6,0.8) =$
-8.5	-2.0003	$2.898 \cdot 10^{7}$	$-1.449 \cdot 10^{7}$
-8.25	-2.0003	$1.758 \cdot 10^{7}$	$-8.787 \cdot 10^{6}$
-8	-2.0004	$1.066 \cdot 10^{7}$	$-5.329 \cdot 10^{6}$
-7.75	-2.0006	$6.466 \cdot 10^{6}$	$-3.232 \cdot 10^{6}$
-7.5	-2.0007	$3.921 \cdot 10^{6}$	$-1.96 \cdot 10^{6}$

$a := 9 \qquad h := 0.25 \qquad b := 10 \qquad t := a, a + h .. b$

$t =$	$\frac{y(t,-0.6,0.8)}{x(t,-0.6,0.8)} =$	$y(t,-0.6,0.8) =$	$x(t,-0.6,0.8) =$
9	-0.99991	$-9.871 \cdot 10^{-5}$	$9.872 \cdot 10^{-5}$
9.25	-0.99993	$-7.688 \cdot 10^{-5}$	$7.688 \cdot 10^{-5}$
9.5	-0.99994	$-5.987 \cdot 10^{-5}$	$5.988 \cdot 10^{-5}$
9.75	-0.99996	$-4.663 \cdot 10^{-5}$	$4.663 \cdot 10^{-5}$
10	-0.99997	$-3.632 \cdot 10^{-5}$	$3.632 \cdot 10^{-5}$

$a := -2 \qquad h := 0.25 \qquad b := 2 \qquad t := a, a + h .. b$



Задание 12.2.2. Начертить схему расположения фазовых графиков уравнения $D^2x - 3Dx + 2x = 0$.

Р е ш е н и е.

$a0 := 2 \qquad a1 := -3 \qquad v^2 + a1\cdot v + a0 = 0 \qquad r := 0.09$

$\begin{pmatrix} v2 \\ v1 \end{pmatrix} := v^2 + a1\cdot v + a0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x(t, C1, C2) := C1\cdot e^{v1\cdot t} + C2\cdot e^{v2\cdot t} \rightarrow C1\cdot e^{2\cdot t} + C2\cdot e^{t} \qquad f(x, r) := \begin{vmatrix} \sqrt{r^2 - x^2} & \text{if } |x| \le r \\ 0 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$

$y(t, C1, C2) := \frac{d}{dt}x(t, C1, C2) \rightarrow 2\cdot C1\cdot e^{2\cdot t} + C2\cdot e^{t}$

$\lim_{t \to -\infty} x(t, C1, C2) \rightarrow 0 \qquad \lim_{t \to -\infty} y(t, C1, C2) \rightarrow 0 \qquad a1\cdot y = -a0\cdot x$

$\frac{y(t, C1, C2)}{x(t, C1, C2)} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume }, [(C1, C2) = \text{real}] \end{array} \right. \rightarrow 2 - \frac{C2}{C2 + C1\cdot e^{t}} \qquad C = \frac{C1}{C2} \qquad Fy(x) := -\frac{a0\cdot x}{a1} \rightarrow \frac{2\cdot x}{3}$

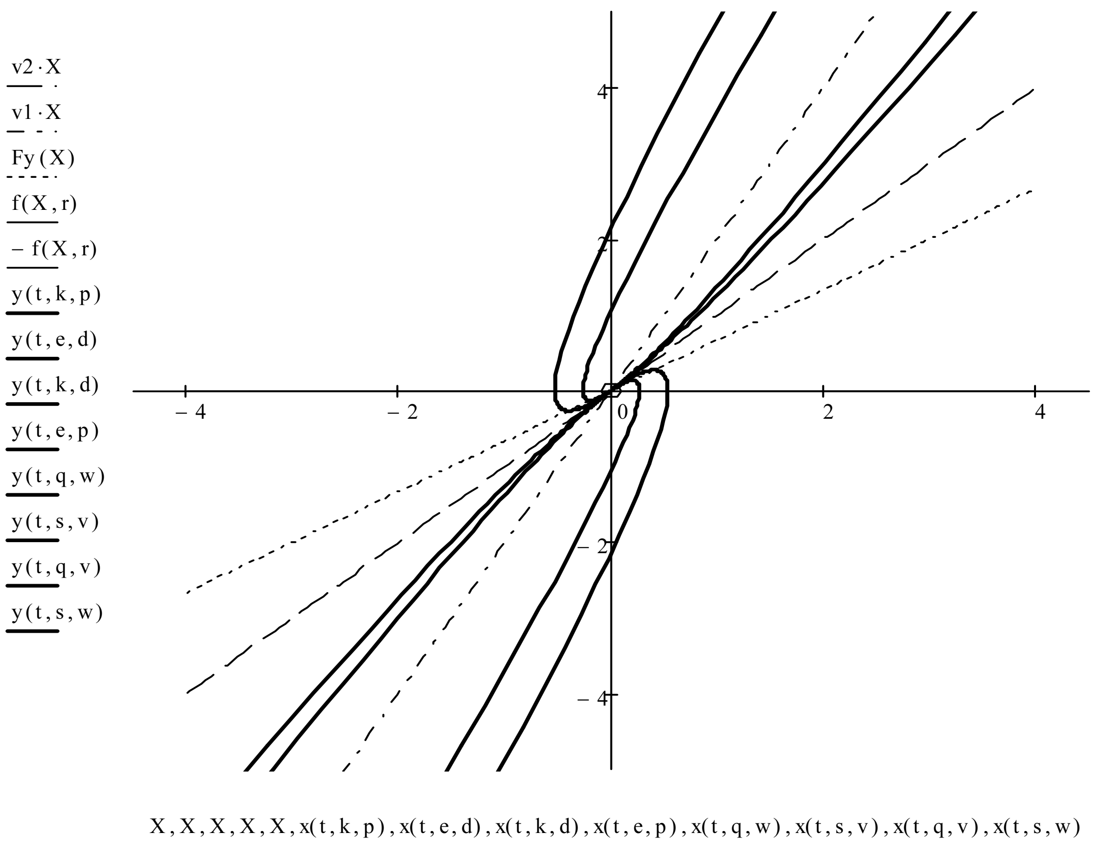
$\lim_{t \to \infty} \left(2 - \frac{1}{1 + C\cdot e^{t}}\right) \text{ assume }, C = \text{real} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & \text{if } C \ne 0 \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{vmatrix}$

$\lim_{t \to -\infty} \left(2 - \frac{1}{1 + C\cdot e^{t}}\right) \rightarrow 1$

$k := 0.6 \qquad p := 0.8 \qquad q := 2\cdot k \qquad w := 2\cdot p$

$e := -k \qquad d := -p \qquad s := -q \qquad v := -w$

$a := -4 \qquad h := 0.05 \qquad b := 4 \qquad t := a, a + h .. b \qquad X := a, a + h .. b$



К о м м е н т а р и й. Точка покоя $O(0,0)$ является бикритическим узлом; все фазовые графики выходят из точки покоя $O(0,0)$; все фазовые графики, кроме лучевых $y=2x,\ x>0$, и $y=2x,\ x<0$, выходят из точки покоя $O(0,0)$, касаясь лучей $y=x,\ x>0$, и $y=x,\ x<0$, прямой $y=x$; асимптотой фазовых графиков нестационарных решений являются лучи прямой $y=2x$; все фазовые графики, отличные от лучевых, пересекают прямую $y=2x/3$ с горизонтальной касательной, а прямую $y=0$ – с вертикальной.

Поведение фазовых графиков на бесконечности отражено далее.

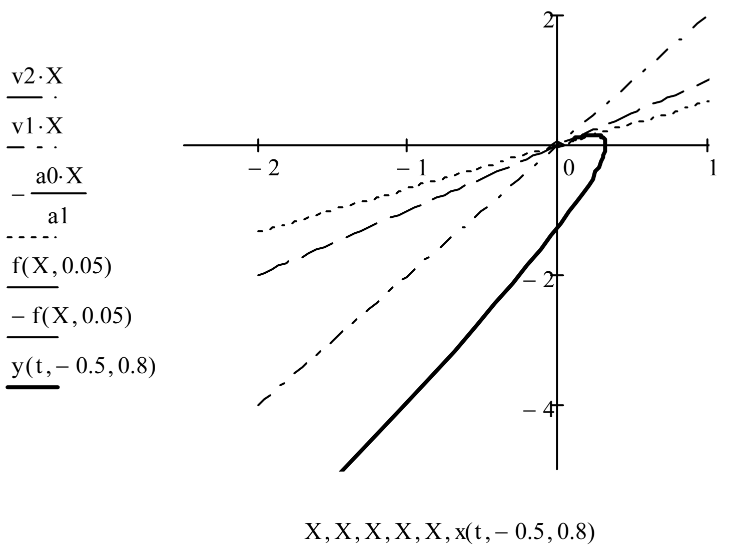
$a := -8 \qquad h := 0.3 \qquad b := -7 \qquad t := a, a+h .. b$

$t =$	$\dfrac{y(t,-0.5,0.8)}{x(t,-0.5,0.8)} =$	$y(t,-0.5,0.8) =$	$x(t,-0.5,0.8) =$
-8	0.99979	$2.683\cdot10^{-4}$	$2.683\cdot10^{-4}$
-7.7	0.99972	$3.621\cdot10^{-4}$	$3.622\cdot10^{-4}$
-7.4	0.99962	$4.886\cdot10^{-4}$	$4.888\cdot10^{-4}$
-7.1	0.99948	$6.594\cdot10^{-4}$	$6.597\cdot10^{-4}$

$a := 8 \qquad h := 0.3 \qquad b := 9 \qquad t := a, a+h .. b$

$t =$	$\dfrac{y(t,-0.5,0.8)}{x(t,-0.5,0.8)} =$	$y(t,-0.5,0.8) =$	$x(t,-0.5,0.8) =$
8	2.00054	$-8.884\cdot10^{6}$	$-4.441\cdot10^{6}$
8.3	2.0004	$-1.619\cdot10^{7}$	$-8.093\cdot10^{6}$
8.6	2.00029	$-2.95\cdot10^{7}$	$-1.475\cdot10^{7}$
8.9	2.00022	$-5.375\cdot10^{7}$	$-2.687\cdot10^{7}$

$a := -2 \qquad h := 0.05 \qquad b := 2 \qquad t := a, a+h .. b \qquad X := a, a+h .. b$



Задача 12.3. Начертить схему расположения фазовых графиков уравнения

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0$$

с кратным действительным характеристическим числом.

Алгоритм решения.

• Составить характеристическое уравнение $v^2 + a_1v + a_0 = 0$ и найти его корни.

• Записать общее решение уравнения по формуле (11.3) $x(t) = (C_1t + C_2)e^{v_1t}$ и выписать вид фазовых графиков $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) = Dx(t), \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

• Определить тип точки покоя.

• Пусть $v_1 < 0$. Вычислить пределы $x(t)$ и $y(t)$ при $t \to +\infty$ и выяснить, примыкают ли фазовые графики к точке покоя $O(0, 0)$. (Для $v_1 > 0$ вычислить пределы $x(t)$ и $y(t)$ при $t \to -\infty$ и выяснить поведение фазовых графиков в окрестности точки $O(0, 0)$.)

• Вычислить $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)}$ и установить направление, по которому фазовые графики нестационарных решений примыкают к точке покоя $O(0, 0)$.

• Вычислить $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)}$ и установить асимптоты фазовых графиков. На фазовой плоскости Oxy отметить точку покоя $O(0, 0)$. Нанести лучевые фазовые графики, лежащие на прямой $y = v_1x$, указать направление движения по лучам.

• Нанести на плоскость прямую $-a_1y - a_0x = 0$, которую фазовые графики нестационарных решений пересекают с горизонтальной касательной, и отметить вертикальные касательные на оси $y = 0$.

• Учитывая все проведенные рассуждения и вычисления, а также общую схему направления движения по фазовым графикам, нарисовать фазовые графики решений уравнения с указанием направления движения по ним.

Задание 12.3.1. Начертить схему расположения фазовых графиков уравнения $D^2x + 2Dx + x = 0$.

Решение.

$a0 := 1 \qquad a1 := 2 \qquad v^2 + a1\cdot v + a0 = 0 \qquad\qquad r := 0.08$

$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} := v^2 + a1\cdot v + a0 \text{ solve } \to \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f(x,r) := \left| \begin{array}{l} \sqrt{r^2 - x^2} \ \text{ if } |x| \le r \\ 0 \ \text{ otherwise} \end{array}\right.$

$x(t, C1, C2) := (C1\cdot t + C2)\cdot e^{v1\cdot t} \to e^{-t}\cdot(C2 + C1\cdot t)$

$y(t, C1, C2) := \dfrac{d}{dt}x(t, C1, C2) \to C1\cdot e^{-t} - e^{-t}\cdot(C2 + C1\cdot t) \qquad a1\cdot y = -a0\cdot x$

$\lim\limits_{t\to\infty} x(t, C1, C2) \to 0 \qquad \lim\limits_{t\to\infty} y(t, C1, C2) \to 0 \qquad Fy(x) := -\dfrac{a0\cdot x}{a1} \to -\dfrac{x}{2}$

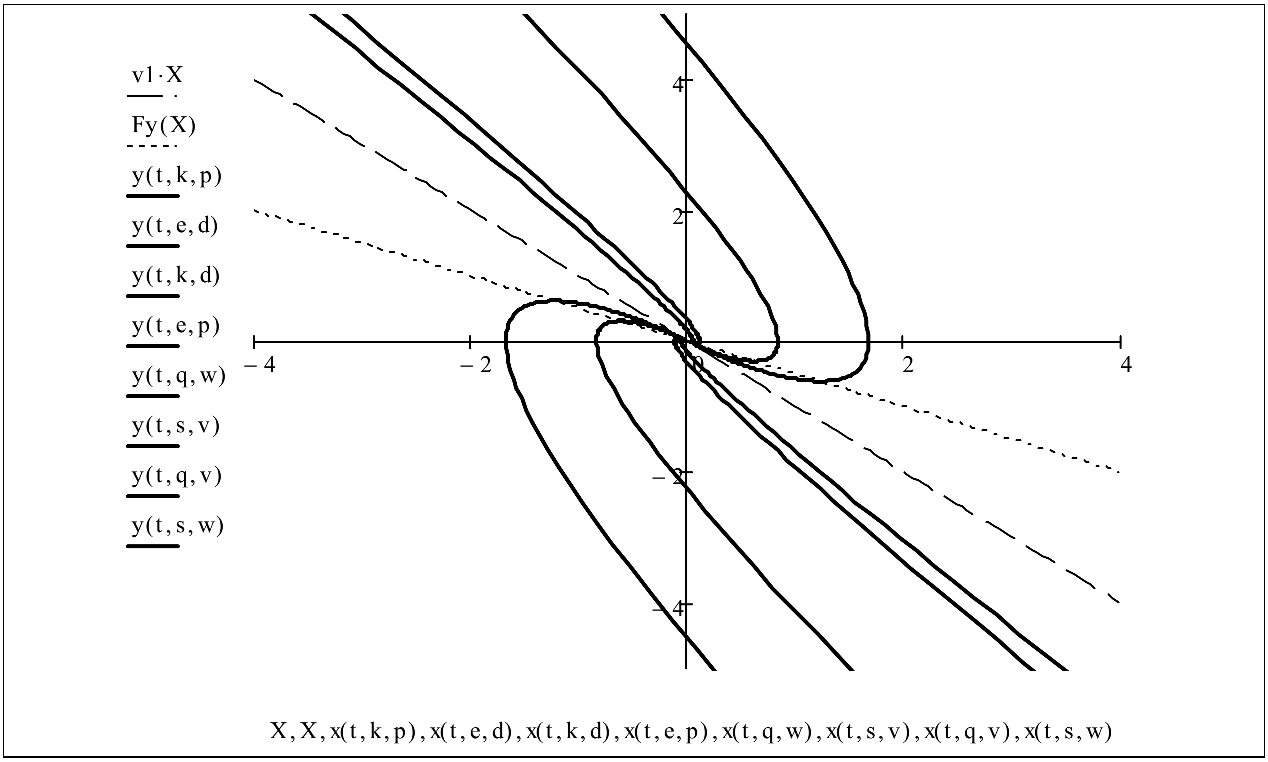
$\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{y(t, C1, C2)}{x(t, C1, C2)} \to -1 \qquad \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{y(t, C1, C2)}{x(t, C1, C2)} \to -1$

$k := 0.6 \qquad p := 0.8 \qquad q := 2\cdot k \qquad w := 2\cdot p$

$e := -k \qquad d := -p \qquad s := -q \qquad v := -w$

$a := -4 \qquad h := 0.05 \qquad b := 4 \qquad t := a, a + h .. b \qquad X := a, a + h .. b$

К о м м е н т а р и й. Точка покоя $O(0,0)$ является монокритическим узлом; все фазовые графики примыкают к точке покоя $O(0,0)$ с направлением $k=-1$, т.е. по направлению лучей прямой $y=-x$; все фазовые графики асимптотически приближаются к лучам прямой $y=-x$ при $t\to-\infty$.



К о м м е н т а р и й. Все фазовые графики, отличные от лучевых, пересекают прямую $y=-0,5x$ с горизонтальной касательной, а прямую $y=0$ – с вертикальной; движение по всем фазовым графикам – к точке покоя $O(0,0)$ с направлением $k=-1$.

Поведение фазовых графиков на бесконечности отражено далее в листинге.

a := −35   h := 0.5   b := −34   t := a, a + h .. b

$t =$ $\dfrac{y(t,-1.2,-1.6)}{x(t,-1.2,-1.6)} =$ $y(t,-1.2,-1.6) =$ $x(t,-1.2,-1.6) =$

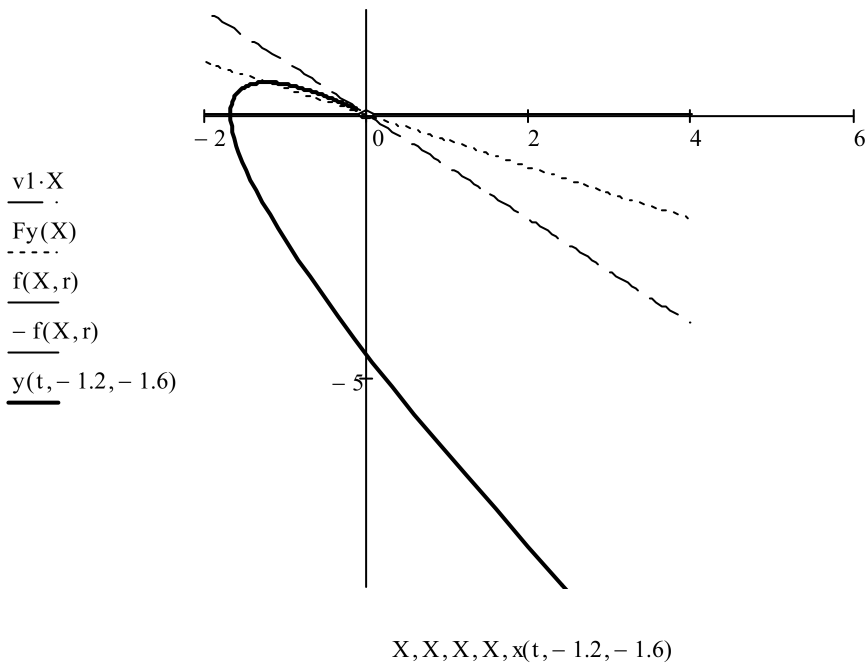
t	y/x	y	x
-35	-1.0297	$-6.598\cdot10^{16}$	$6.407\cdot10^{16}$
-34.5	-1.0302	$-3.944\cdot10^{16}$	$3.829\cdot10^{16}$
-34	-1.0306	$-2.357\cdot10^{16}$	$2.287\cdot10^{16}$

a := 33   h := 0.5   b := 34   t := a, a + h .. b

$t =$ $\dfrac{y(t,-1.2,-1.6)}{x(t,-1.2,-1.6)} =$ $y(t,-1.2,-1.6) =$ $x(t,-1.2,-1.6) =$

t	y/x	y	x
33	-0.9709	$1.864\cdot10^{-13}$	$-1.919\cdot10^{-13}$
33.5	-0.9713	$1.147\cdot10^{-13}$	$-1.181\cdot10^{-13}$
34	-0.9717	$7.061\cdot10^{-14}$	$-7.267\cdot10^{-14}$

a := −2 h := 0.05 b := 4 t := a, a + h .. b



Задача 12.4. Начертить схему расположения фазовых графиков уравнения $D^2x + a_1Dx + a_0x = 0$ с комплексными характеристическими числами с нулевой действительной частью.

А л г о р и т м   р е ш е н и я.

• Составить характеристическое уравнение $v^2 + a_1v + a_0 = 0$ и найти его корни: $v_1 = \lambda + i\mu,\ v_2 = \lambda - i\mu$.

• Определить тип точки покоя.

• Записать общее решение уравнения по формуле (11.4) $x(t) = C_1e^{\lambda t}\cos(\mu\, t + C_2)$ и выписать параметрическое задание фазовых графиков $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) = Dx(t),\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

• Вычислить $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ при $\lambda < 0$. Выяснить, примыкают ли фазовые графики к точке покоя $O(0, 0)$.

• Вычислить $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)$, $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t)$ при $\lambda > 0$. Выяснить поведение фазовых графиков в окрестности точки покоя $O(0, 0)$.

• На фазовой плоскости Oxy отметить точку покоя $O(0, 0)$.

• Нанести на плоскость прямую $-a_1y - a_0x = 0$, которую фазовые графики пересекают с горизонтальной касательной, и отметить вертикальные касательные на оси $y = 0$.

• Учитывая проведенные вычисления и рассуждения, а также общую схему направления движения, нарисовать фазовые графики решений уравнения с указанием направления движения по ним.

Задание 12.4.1. Начертить схему расположения фазовых графиков уравнений: $D^2x+\frac{4}{5}Dx+\frac{13}{5}x=0$.

Р е ш е н и е.

$$a0 := \frac{13}{5} \qquad a1 := \frac{4}{5} \qquad v^2 + a1\cdot v + a0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} v2 \\ v1 \end{pmatrix} := v^2 + a1\cdot v + a0 \text{ solve } \to \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} - \left(\frac{\sqrt{61}}{5}\right)\cdot i \\ -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\sqrt{61}\cdot i \end{bmatrix}$$

$$C1\cdot e^{Re(v1)\cdot t}\cdot\cos(Im(v1)\cdot t + C2) \to C1\cdot e^{-\frac{2\cdot t}{5}}\cdot\cos\left(C2+\frac{\sqrt{61}\cdot t}{5}\right)$$

$$x(t, C1, C2) := C1\cdot e^{-\frac{2\cdot t}{5}}\cdot\cos\left(C2+\frac{\sqrt{61}\cdot t}{5}\right)$$

$$\frac{d}{dt}x(t, C1, C2) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{combine}, \text{sincos} \\ \text{assume}, ALL > 0 \end{array} \right. \to -\frac{C1\cdot e^{-\frac{2\cdot t}{5}}\cdot\left(2\cdot\cos\left(C2+\frac{\sqrt{61}\cdot t}{5}\right)+\sqrt{61}\cdot\sin\left(C2+\frac{\sqrt{61}\cdot t}{5}\right)\right)}{5}$$

$$y(t, C1, C2) := -\frac{C1\cdot e^{-\frac{2\cdot t}{5}}\cdot\left(2\cdot\cos\left(C2+\frac{\sqrt{61}\cdot t}{5}\right)+\sqrt{61}\cdot\sin\left(C2+\frac{\sqrt{61}\cdot t}{5}\right)\right)}{5}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t, C1, C2) \text{ simplify } \to 0$$

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{C1\cdot e^{-\frac{2\cdot t}{5}}\cdot\left(2\cdot\cos\left(C2+\frac{\sqrt{61}\cdot t}{5}\right)+\sqrt{61}\cdot\sin\left(C2+\frac{\sqrt{61}\cdot t}{5}\right)\right)}{5} \text{ simplify } \to 0$$

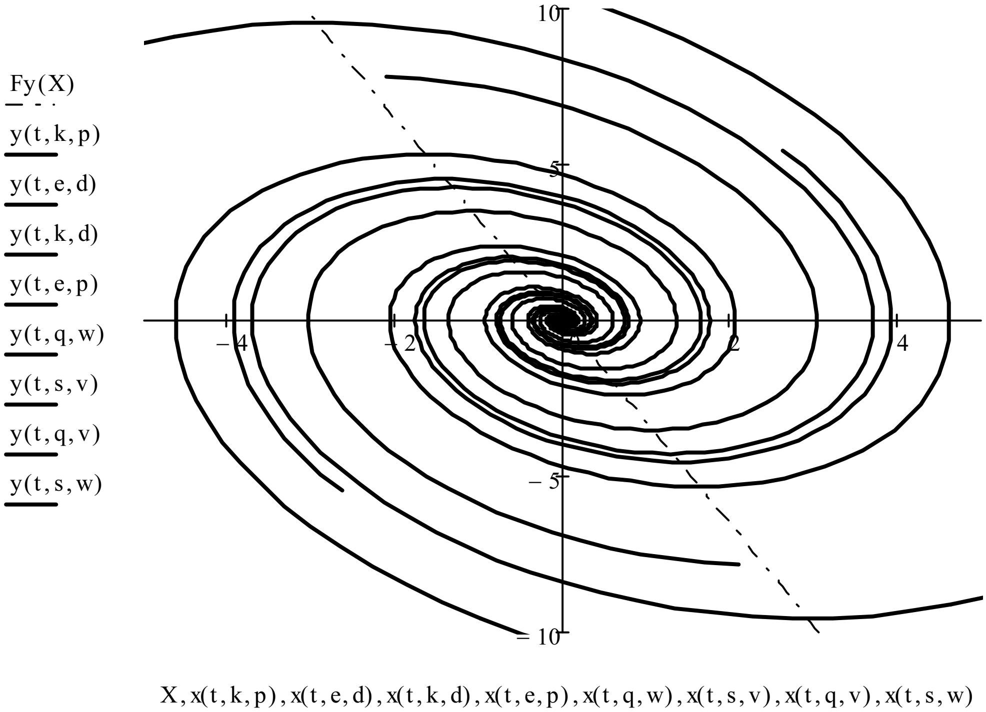
$$a1\cdot y = -a0\cdot x \qquad Fy(x) := -\frac{a0\cdot x}{a1} \to -\frac{13\cdot x}{4}$$

К о м м е н т а р и й. Точка покоя $O(0,0)$ является фокусом; все фазовые графики примыкают к точке покоя $O(0,0)$.

$k := 0.3 \qquad p := 0.5 \qquad q := 4\cdot k \qquad w := 4\cdot p$

$e := -k \qquad d := -p \qquad s := -q \qquad v := -w$

$a := -7 \qquad h := 0.05 \qquad b := 7 \qquad t := a, a+h .. b \qquad X := a, a+h .. b$



К о м м е н т а р и й. Нет лучевых траекторий; нет асимптот; все фазовые графики пересекают прямую $y=-3,25x$ с горизонтальной касательной, а прямую $y=0$ – с вертикальной; все фазовые графики примыкают к точке покоя $O(0,0)$ без определенного направления.

Задание 12.4.2. Начертить схему расположения фазовых графиков уравнений $D^2x-4Dx+13x=0$.

Р е ш е н и е.

$a0 := 13 \qquad a1 := -4 \qquad v^2 + a1\cdot v + a0 = 0$

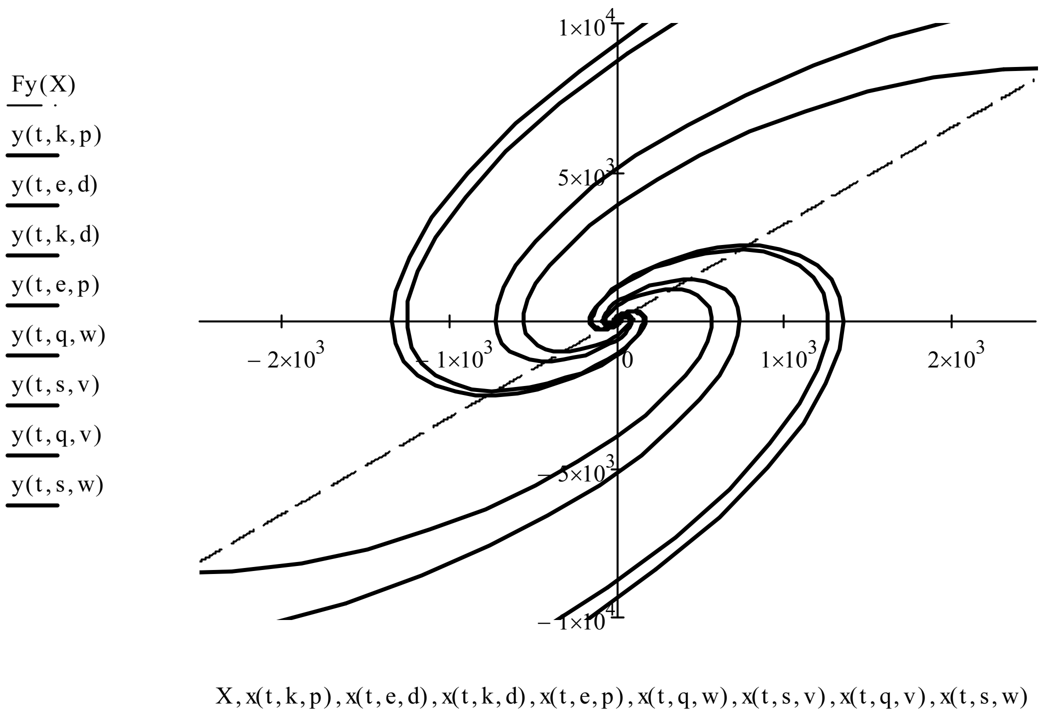
$$\begin{pmatrix} v2 \\ v1 \end{pmatrix} := v^2 + a1\cdot v + a0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 2-3i \\ 2+3i \end{pmatrix} \qquad Fy(x) := -\frac{a0\cdot x}{a1} \rightarrow \frac{13\cdot x}{4}$$

$$x(t, C1, C2) := C1\cdot e^{\mathrm{Re}(v1)\cdot t}\cdot\cos(\mathrm{Im}(v1)\cdot t + C2) \rightarrow C1\cdot\cos(C2+3\cdot t)\cdot e^{2\cdot t}$$

$$y(t, C1, C2) := \frac{d}{dt}x(t, C1, C2) \rightarrow 2\cdot C1\cdot\cos(C2+3\cdot t)\cdot e^{2\cdot t} - 3\cdot C1\cdot\sin(C2+3\cdot t)\cdot e^{2\cdot t}$$

$$\lim_{t\rightarrow -\infty} x(t, C1, C2) \text{ simplify } \rightarrow 0 \qquad \lim_{t\rightarrow -\infty} y(t, C1, C2) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume}, C1 = \text{real} \\ \text{assume}, C2 = \text{real} \end{array} \right. \rightarrow 0$$

a := −2500	h := 5	b := 2500	X := a, a + h .. b
k := 0.03	p := 0.05	q := 4·k	w := 4·p
e := −k	d := −p	s := −q	v := −w
a := −6	h := 0.05	b := 6	t := a, a + h .. b



К о м м е н т а р и й. Точка покоя $O(0, 0)$ является фокусом; все фазовые графики выходят из точки покоя $O(0, 0)$ без определенного направления; нет лучевых траекторий; все фазовые графики пересекают прямую $y = 13/4x$ с горизонтальной касательной, а прямую $y = 0$ – с вертикальной; нет асимптот.

Задача 12.5. Начертить схему расположения фазовых графиков уравнения $D^2x + a_0x = 0$ с мнимыми характеристическими числами.

А л г о р и т м   р е ш е н и я.

• Составить характеристическое уравнение $\nu^2 + a_0 = 0$ и найти его корни: $\nu_1 = i\mu,\ \nu_2 = -i\mu.$

• Определить тип точки покоя.

• Записать общее решение уравнения по формуле (11.5) $x(t) = C_1\cos(\mu\, t + C_2)$ и выписать параметрическое задание фазовых графиков $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) = Dx(t),\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

• Выяснить, существуют ли $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t)$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t)$ и примыкают ли фазовые графики к точке покоя $O(0, 0)$.

• На фазовой плоскости Oxy отметить точку покоя $O(0, 0)$.

• Нанести на плоскость прямую $-a_0x = 0$, которую фазовые графики пересекают с горизонтальной касательной, и отметить вертикальные касательные на оси $y = 0$.

• Записать неявное задание фазовых графиков, подсчитать выражение $x^2 + y^2/\mu^2$ и определить линии, которые являются фазовыми графиками.

• Учитывая проведенные рассуждения и вычисления, а также общую схему направления движения, нарисовать фазовые графики решений уравнения с указанием направления движения по ним.

Задание 12.5.1. Начертить схему расположения фазовых графиков уравнения $D^2x + 25x = 0$.

Р е ш е н и е.

$a0 := 25 \qquad a1 := 0 \qquad r := 0.04$

$v^2 + a1\cdot v + a0 = 0$

$\begin{pmatrix} v2 \\ v1 \end{pmatrix} := v^2 + a1\cdot v + a0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} -5i \\ 5i \end{pmatrix}$

$f(x,r) := \left| \begin{array}{l} 2\sqrt{r^2 - x^2} \text{ if } |x| \le r \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$

$x(t, C1, C2) := C1\cdot e^{Re(v1)\cdot t}\cdot\cos(Im(v1)\cdot t + C2) \rightarrow C1\cdot\cos(C2 + 5\cdot t)$

$y(t, C1, C2) := \frac{d}{dt}x(t, C1, C2) \rightarrow -5\cdot C1\cdot\sin(C2 + 5\cdot t)$

$\lim\limits_{t \to -\infty} x(t, C1, C2) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume}, C1 = \text{real} \\ \text{assume}, C2 = \text{real} \end{array} \right. \rightarrow \text{undefined}$

$\lim\limits_{t \to -\infty} y(t, C1, C2) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume}, C1 = \text{real} \\ \text{assume}, C2 = \text{real} \end{array} \right. \rightarrow \text{undefined}$

$\lim\limits_{t \to \infty} x(t, C1, C2) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume}, C1 = \text{real} \\ \text{assume}, C2 = \text{real} \end{array} \right. \rightarrow \text{undefined}$

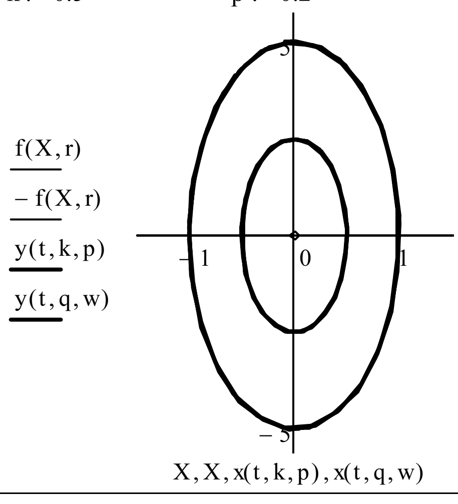
$\lim\limits_{t \to \infty} y(t, C1, C2) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume}, C1 = \text{real} \\ \text{assume}, C2 = \text{real} \end{array} \right. \rightarrow \text{undefined}$

$x(t, C1, C2)^2 + \frac{y(t, C1, C2)^2}{25} \left| \begin{array}{l} \text{combine} \\ \text{sincos} \end{array} \right. \rightarrow C1^2$

К о м м е н т а р и й. Точка покоя $O(0, 0)$ является центром; обратить внимание на несуществование $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t)$ и $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t)$.

$a := -2 \qquad h := 0.05 \qquad b := 2 \qquad t := a, a + h .. b \qquad X := a, a + h .. b$

$k := 0.5 \qquad p := 0.2 \qquad q := 2\cdot k \qquad w := 2\cdot p$



К о м м е н т а р и й. Нет лучевых траекторий; все фазовые графики пересекают прямую $x=0$ с горизонтальной касательной, а прямую $y=0$ – с вертикальной; нет асимптот; так как $x^2+y^2/25=C^2$, то фазовые графики – это эллипсы с осями симметрии $x=0$ и $y=0$; направление движения по фазовым графикам – по часовой стрелке.

Определить тип точки покоя и начертить схему расположения фазовых графиков следующих уравнений, используя соответствующие алгоритмы:

368. $D^2x+Dx-2x=0.$

369. $D^2x-4x=0.$

370. $D^2x-2Dx-3x=0.$

371. $D^2x-Dx-6x=0.$

372. $D^2x-3Dx-4x=0.$

373. $D^2x+5Dx+6x=0.$

374. $D^2x+3Dx-4x=0.$

375. $D^2x-5Dx+6x=0.$

376. $D^2x+4Dx+4x=0.$

377. $D^2x+6Dx+9x=0.$

378. $D^2x-4Dx+4x=0.$

379. $D^2x-6Dx+9x=0.$

380. $D^2x+2Dx+5x=0.$

381. $D^2x+2Dx+4x=0.$

382. $D^2x-2Dx+5x=0.$

383. $D^2x-2Dx+4x=0.$

384. $D^2x+9x=0.$

385. $D^2x+Dx-6x=0.$

385.1. $D^2x+7Dx+12x=0.$

385.2. $D^2x-7Dx+12x=0.$

385.3. $D^2x+10Dx+25x=0.$

385.4. $D^2x-2Dx+x=0.$

385.5. $D^2x+Dx+x=0.$

385.6. $D^2x-Dx+x=0.$

385.7. $D^2x+x=0.$

Исследовать расположение фазовых графиков, проходящих при $t = 0$ через точки (0,1), (1,1), (1,0), для следующих уравнений:

386. $D^2x+(5+\alpha)Dx+(6+3\alpha)x=0.$

387. $D^2x+\alpha Dx-x=0.$

388. $x''+\alpha x'+x=0.$

389. $x''+\alpha x=0.$

390. Переформулировать теорему о точках покоя, заменив условия, налагаемые на собственные числа v_1, v_2 оператора L_2, условиями на коэффициенты a_0, a_1 и дискриминант $\Delta = a_1{}^2 - 4a_0$ характеристического уравнения.

391. Является ли точка покоя $O(0,0)$ фокусом для уравнения $D^2x+\alpha Dx-\beta^2x=0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, при некоторых значениях параметров α и β? Какой тип точки покоя возможен при различных значениях параметров?

Задача 12.6. Начертить схему расположения фазовых графиков уравнения $D^2x+a_1Dx=0$.

А л г о р и т м р е ш е н и я.

Поскольку $a_0=0$, то уравнение имеет множество стационарных решений $x(t)\equiv C$, $t\in\mathbb{R}$, которым соответствуют фазовые графики $\begin{cases} x=C, \\ y=0. \end{cases}$ В этом случае ось $y=0$ – прямая покоя.

I. $a_1\neq 0.$

• Составить характеристическое уравнение $v^2+a_1v=0$ и найти его корни.

• Записать общее решение уравнения по формуле (11.2) $x(t) = C_1 e^{\nu_1 t} + C_2 e^{\nu_2 t}$ и выписать параметрическое уравнение фазовых графиков $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) = Dx(t), \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

• На фазовой плоскости Oxy изобразить прямую точек покоя $y = 0$.

• Нанести фазовые графики, указать направление движения.

II. $a_1 = 0$.

• Составить характеристическое уравнение $\nu^2 = 0$.

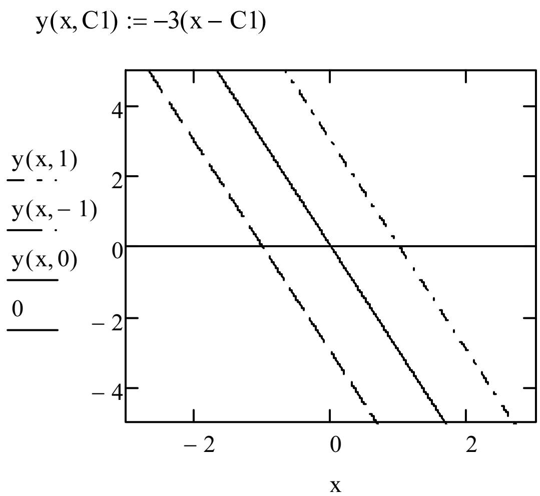
• Записать общее решение уравнения по формуле (11.3) и выписать параметрическое уравнение фазовых графиков.

• На фазовой плоскости Oxy изобразить прямую точек покоя $y = 0$.

• Нанести фазовые графики, указать направление движения.

Задание 12.6.1. Начертить схему расположения фазовых графиков уравнения $D^2x + 3Dx = 0$.

Р е ш е н и е. Поскольку $\nu_1 = 0, \nu_2 = -3$, то $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-3t}, \\ y = -3C_2 e^{-3t}. \end{cases}$ Так как $C_2 e^{-3t} = x - C_1$, то $y = -3(x - C_1)$.

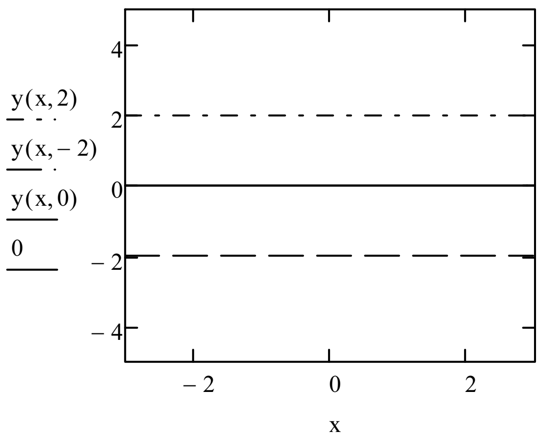


К о м м е н т а р и й. При $t \to +\infty$ $y \to 0$. Направление движения к прямой $y = 0$.

Задание 12.6.2. Начертить схему расположения фазовых графиков уравнения $D^2x = 0$.

Р е ш е н и е. Поскольку $\nu_1 = \nu_2 = 0$, то $\begin{cases} x = C_1 t + C_2, \\ y = C_1, \end{cases}$ т.е. $y = C_1$.

$y(x, C1) := C1$



К о м м е н т а р и й. Направление движения в верхней полуплоскости слева направо, в нижней – справа налево.

Начертить схему расположения фазовых графиков следующих уравнений, используя соответствующие алгоритмы:

392. $D^2x - x = 0.$

393. $4D^2\,x - 4D\,x + x = 0.$

394. $D^2\,x + D\,x = 0.$

395. $D^2x + 4Dx + 5x = 0.$

396. $D^2x - 4Dx - 5x = 0.$

397. $D^2x - 4Dx + 7x = 0.$

398. $D^2x + 4x = 0.$

399. $D^2x + 4Dx + 3x = 0.$

400. $2D^2x - 5Dx + 2x = 0.$

401. $D^2\,x + 7\,D\,x = 0.$

402. $4D^2x + 4D\,x + x = 0.$

403. $10D^2\,x = 0\,.$

Задача 12.7. Определить тип точки покоя уравнения

$$D^2x + a_1(\alpha)Dx + a_0(\beta)x = 0$$

при $a_0(\beta) \neq 0$ в зависимости от значений параметров α и β. Начертить схему расположения фазовых графиков при допустимых значениях параметров.

А л г о р и т м р е ш е н и я.

- Составить характеристическое уравнение $v^2 + a_1(\alpha)v + a_0(\beta) = 0$ и найти его корни, зависящие от параметров.
- При $a_0(\beta) \neq 0$ в зависимости от значений параметров определить тип точки покоя $O(0, 0)$.
- Начертить схему расположения фазовых графиков при допустимых значениях параметров.

Задание 12.7.1. Определить в зависимости от значений параметра α тип точки покоя уравнения $D^2x +$ $+2\alpha Dx + x = 0.$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение имеет вид $v^2 + 2\alpha v + 1 = 0;$ $v_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1},$ $v_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ – его корни.

- Если $\alpha^2 - 1 > 0$, т.е. $|\alpha| > 1$, то $v_1, v_2 \in \mathbb{R},$ $v_1v_2 = 1 > 0,$ $v_1 \neq v_2$. Точка покоя $O(0,0)$ – бикритический узел.
- Если $\alpha^2 - 1 = 0$, т.е. $|\alpha| = 1$, то $v_1 = v_2 \in \mathbb{R}$. Точка покоя $O(0,0)$ – монокритический узел.

• Если $\alpha^2-1<0$, т.е. $|\alpha|<1$, то v_1, v_2 – комплексно-сопряженные числа. И при $0<|\alpha|<1$ точка покоя $O(0,0)$ – фокус.

При $\alpha=0$ точка покоя $O(0,0)$ – центр.

Задание 12.7.2. Определить тип точки покоя уравнения $D^2x+2\alpha Dx+\beta x=0$ и начертить схему расположения фазовых графиков при допустимых значениях параметров α и β.

Р е ш е н и е.

$$a0 := \beta \qquad a1 := 2\alpha \qquad v^2 + a1\cdot v + a0 = 0 \qquad V(\alpha,\beta) := v^2 + a1\cdot v + a0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2-\beta}-\alpha \\ -\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta} \end{pmatrix}$$

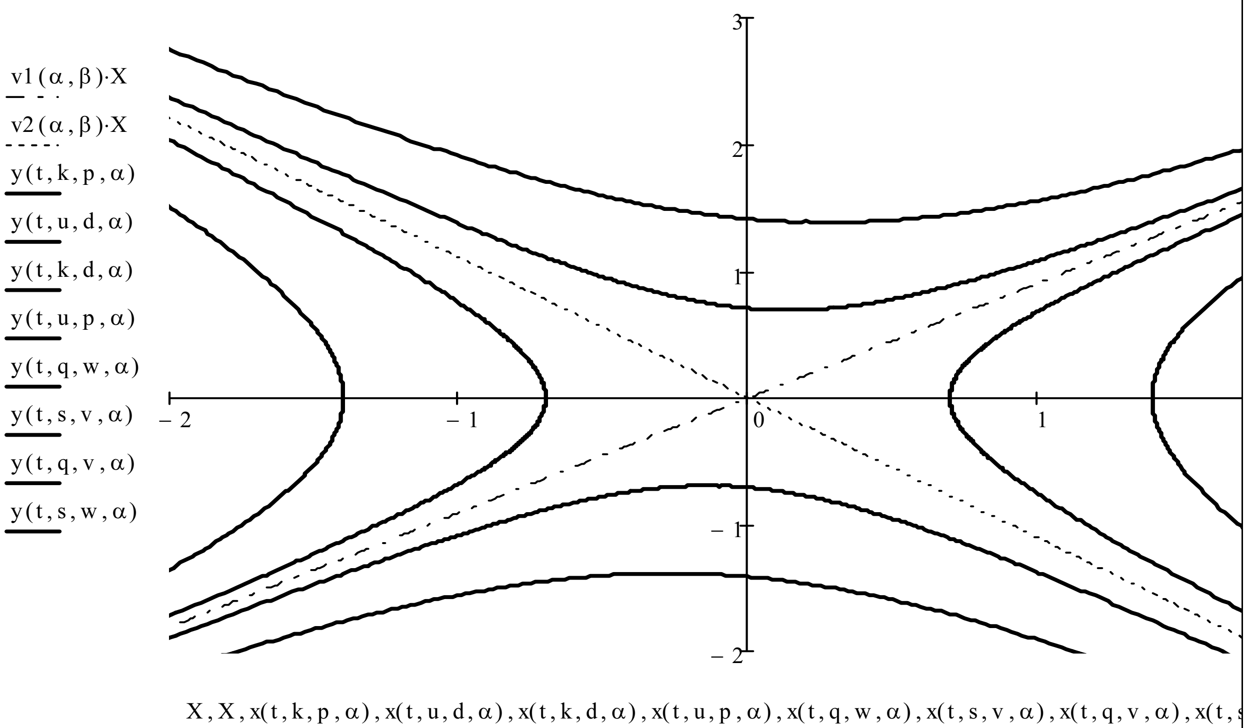
$$v1(\alpha,\beta) := V(\alpha,\beta)_0 \rightarrow \sqrt{\alpha^2-\beta}-\alpha \qquad v2(\alpha,\beta) := V(\alpha,\beta)_1 \rightarrow -\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta}$$

Случай I. Поскольку $\alpha^2-\beta>0$ при $\beta<0$, то $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, $v_1 v_2=\beta<0$, $v_1 \neq v_2$. Точка покоя $O(0,0)$ – седло. Выписав общее решение по формуле (11.2), начертим схему расположения фазовых графиков при $\alpha=-0{,}1$ и $\beta=-1$.

$$C1\cdot e^{v1(\alpha,\beta)\cdot t} + C2\cdot e^{v2(\alpha,\beta)\cdot t} \text{ simplify } \rightarrow e^{-\alpha\cdot t}\cdot\left(C1\cdot e^{t\cdot\sqrt{\alpha^2-\beta}} + C2\cdot e^{-t\cdot\sqrt{\alpha^2-\beta}}\right)$$

$$x(t,C1,C2,\alpha) := e^{-\alpha\cdot t}\cdot\left(C1\cdot e^{t\cdot\sqrt{\alpha^2+1}} + C2\cdot e^{-t\cdot\sqrt{\alpha^2+1}}\right) \qquad y(t,C1,C2,\alpha) := \frac{d}{dt}x(t,C1,C2,\alpha)$$

$k := 0.4$	$p := 0.3$	$q := 2\cdot k$	$w := 2\cdot p$	$\alpha := 0.1$	$\beta := -1$
$u := -k$	$d := -p$	$s := -q$	$v := -w$		
$a := -4$	$h := 0.01$	$b := 4$	$t := a, a+h .. b$	$X := a, a+h .. b$	



Случай II. Пусть $\beta > 0$, $\alpha^2 - \beta > 0 \Rightarrow |\alpha| > \sqrt{\beta} > 0$, тогда $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, $v_1 v_2 = \beta > 0$, $v_1 \neq v_2$. Точка покоя $O(0,0)$ – бикритический узел. Выписав общее решение по формуле (11.2), начертим схему расположения фазовых графиков при $\alpha = -1{,}5$ и $\beta = 2$.

$a0 := \beta \qquad a1 := 2\alpha \qquad v^2 + a1 \cdot v + a0 = 0$

$$V(\alpha,\beta) := v^2 + a1 \cdot v + a0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2 - \beta} - \alpha \\ -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta} \end{pmatrix}$$

$$v1(\alpha,\beta) := V(\alpha,\beta)_0 \rightarrow \sqrt{\alpha^2 - \beta} - \alpha$$

$$v2(\alpha,\beta) := V(\alpha,\beta)_1 \rightarrow -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

$$x(t, C1, C2, \alpha, \beta) := C1 \cdot e^{v1(\alpha,\beta)\cdot t} + C2 \cdot e^{v2(\alpha,\beta)\cdot t} \rightarrow C2 \cdot e^{-t\cdot\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}\right)} + C1 \cdot e^{-t\cdot\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}\right)}$$

$$y(t, C1, C2, \alpha, \beta) := \frac{d}{dt}\left(x(t, C1, C2, \alpha, \beta)\right)$$

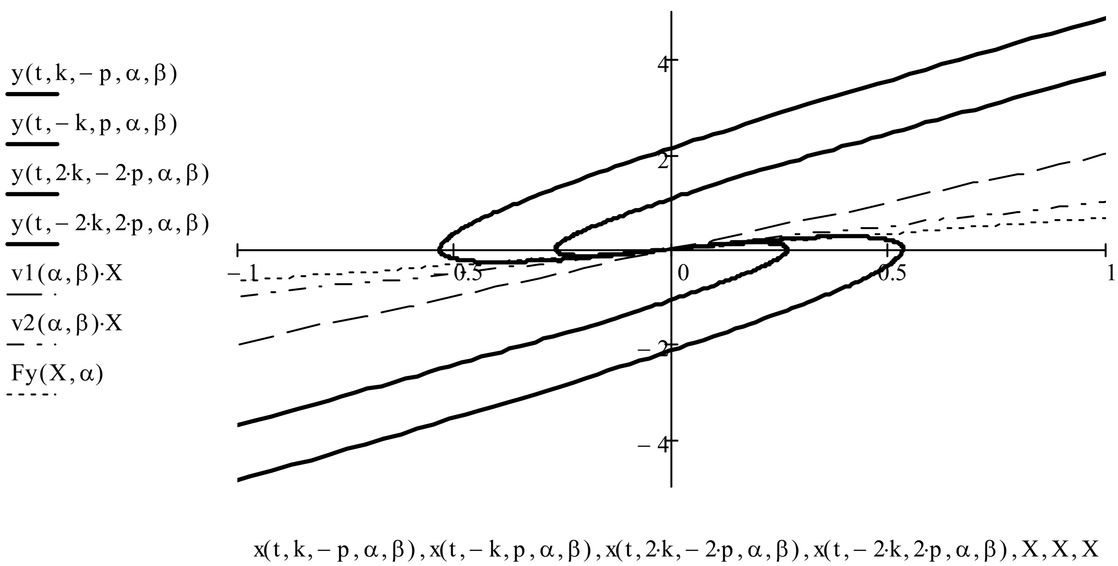
$\alpha := -1.5 \qquad \beta := 2$

$$Fy(x,\alpha) := -\frac{a0 \cdot x}{a1} \rightarrow -\frac{\beta \cdot x}{2 \cdot \alpha}$$

$a := -4 \qquad h := 0.1 \qquad b := 4 \qquad X := a, a + h .. b$

$k := 0.6 \qquad p := 0.8$

$a := -4 \qquad h := 0.01 \qquad b := 4 \qquad t := a, a + h .. b$



Случай III. Пусть $\beta > 0,\ \ \alpha^2 - \beta = 0 \ \Rightarrow\ |\alpha| = \sqrt{\beta} > 0$, тогда $v_1, v_2 \in \mathbb{R},\ \ v_1 v_2 = \beta > 0,\ v_1 = v_2$. Точка покоя $O(0,0)$ – монокритический узел. Выписав общее решение по формуле (11.3), начертим схему расположения фазовых графиков при $\beta = 3$ и $\alpha = \sqrt{3}$.

$a0 := \beta \qquad a1 := 2\alpha \qquad v^2 + a1 \cdot v + a0 = 0$

$$V(\alpha,\beta) := v^2 + a1 \cdot v + a0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2 - \beta} - \alpha \\ -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta} \end{pmatrix}$$

$v1(\alpha,\beta) := V(\alpha,\beta)_0 \rightarrow \sqrt{\alpha^2 - \beta} - \alpha \qquad v2(\alpha,\beta) := V(\alpha,\beta)_1 \rightarrow -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}$

$x(t, C1, C2, \alpha, \beta) := e^{-\alpha \cdot t} \cdot (C1 \cdot t + C2)$

$y(t, C1, C2, \alpha, \beta) := \frac{d}{dt} x(t, C1, C2, \alpha, \beta)$

$Fy(x,\alpha,\beta) := -\frac{a0 \cdot x}{a1} \rightarrow -\frac{\beta \cdot x}{2 \cdot \alpha}$

$\beta := 3 \qquad \alpha := \sqrt{\beta}$

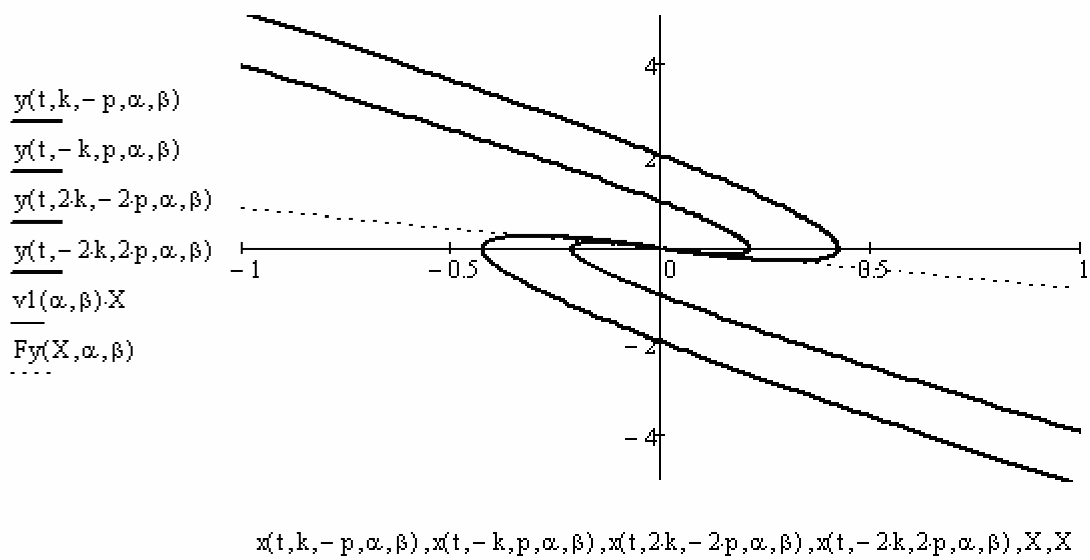
$v1(\alpha,\beta) \rightarrow -\sqrt{3} \qquad v2(\alpha,\beta) \rightarrow -\sqrt{3}$

$Fy(x,\alpha,\beta) := -\frac{a0 \cdot x}{a1} \rightarrow -\frac{\beta \cdot x}{2 \cdot \alpha}$

$a := -1 \qquad h := 0.1 \qquad b := 1 \qquad X := a, a + h .. b$

$k := 2 \qquad p := 0.8$

$a := -4 \qquad h := 0.01 \qquad b := 4 \qquad t := a, a + h .. b$



Случай IV. Пусть $\beta > 0$, $\alpha^2 - \beta < 0$, т.е. $|\alpha| < \sqrt{\beta}$, тогда v_1, v_2 – комплексно-сопряженные числа и при $0 < |\alpha| < \sqrt{\beta}$ точка покоя $O(0,0)$ – фокус. Выписав общее решение по формуле (11.4), начертим схему расположения фазовых графиков при $\alpha = -0{,}1$ и $\beta = 1$.

$a0 := \beta \qquad a1 := 2\alpha \qquad v^2 + a1\cdot v + a0 = 0$

$$V(\alpha,\beta) := v^2 + a1\cdot v + a0 \text{ solve } \to \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2-\beta} - \alpha \\ -\alpha - \sqrt{\alpha^2-\beta} \end{pmatrix}$$

$$v1(\alpha,\beta) := V(\alpha,\beta)_0 \to \sqrt{\alpha^2-\beta} - \alpha \qquad v2(\alpha,\beta) := V(\alpha,\beta)_1 \to -\alpha - \sqrt{\alpha^2-\beta}$$

$$\beta := 1 \qquad \alpha := \frac{-1}{10} \qquad v1(\alpha,\beta) \text{ simplify } \to \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\cdot\sqrt{11}\cdot i$$

$$\lambda := \frac{1}{10} \qquad \mu := \frac{3}{10}\cdot\sqrt{11}$$

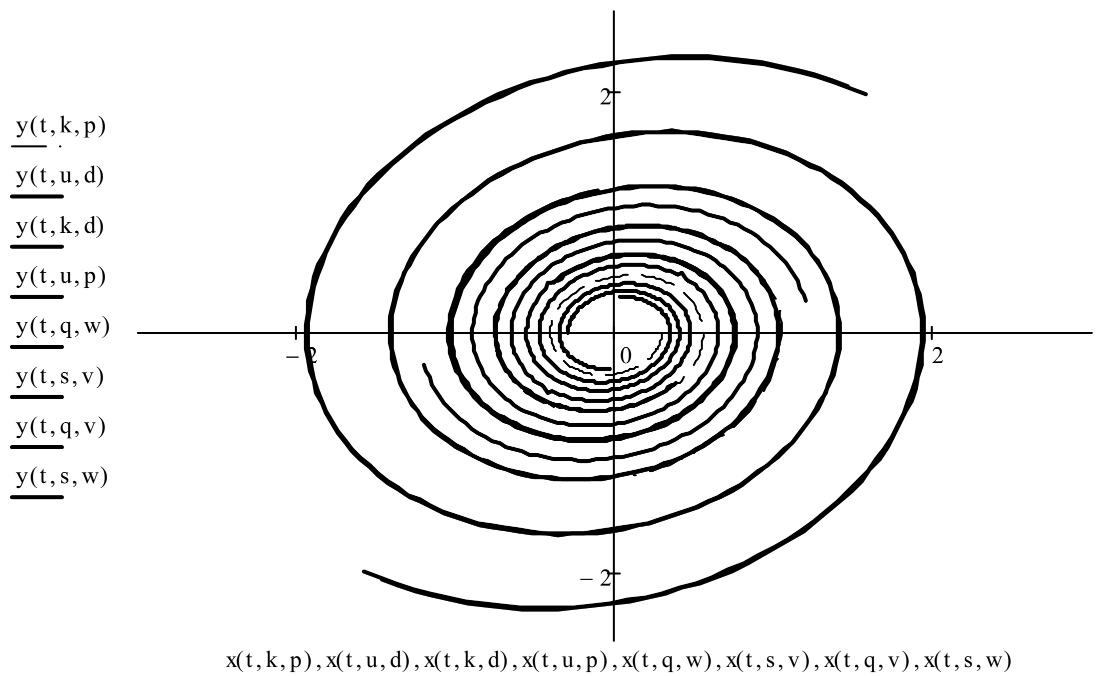
$$x(t,C1,C2) := C1\cdot e^{\lambda\cdot t}\cdot(\cos(\mu\cdot t + C2)) \to C1\cdot e^{\frac{t}{10}}\cdot\cos\left(C2 + \frac{3\cdot\sqrt{11}\cdot t}{10}\right)$$

$$y(t,C1,C2) := \frac{d}{dt}x(t,C1,C2)$$

$k := 0.6 \qquad p := 0.8 \qquad q := 2\cdot k \qquad w := 2\cdot p$

$u := -k \qquad d := -p \qquad s := -q \qquad v := -w$

$a := -7 \qquad h := 0.05 \qquad b := 7 \qquad t := a, a+h..b$



Случай V. Пусть $\beta > 0$, $\alpha^2 - \beta < 0$ и $\alpha = 0$, тогда v_1, v_2 – мнимые числа. Точка покоя $O(0,0)$ – центр. Выписав общее решение по формуле (11.5), начертим схему расположения фазовых графиков при $\beta = 1$.

$a0 := \beta \qquad a1 := 2\alpha \qquad v^2 + a1 \cdot v + a0 = 0$

$$V(\alpha,\beta) := v^2 + a1 \cdot v + a0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2 - \beta} - \alpha \\ -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta} \end{pmatrix}$$

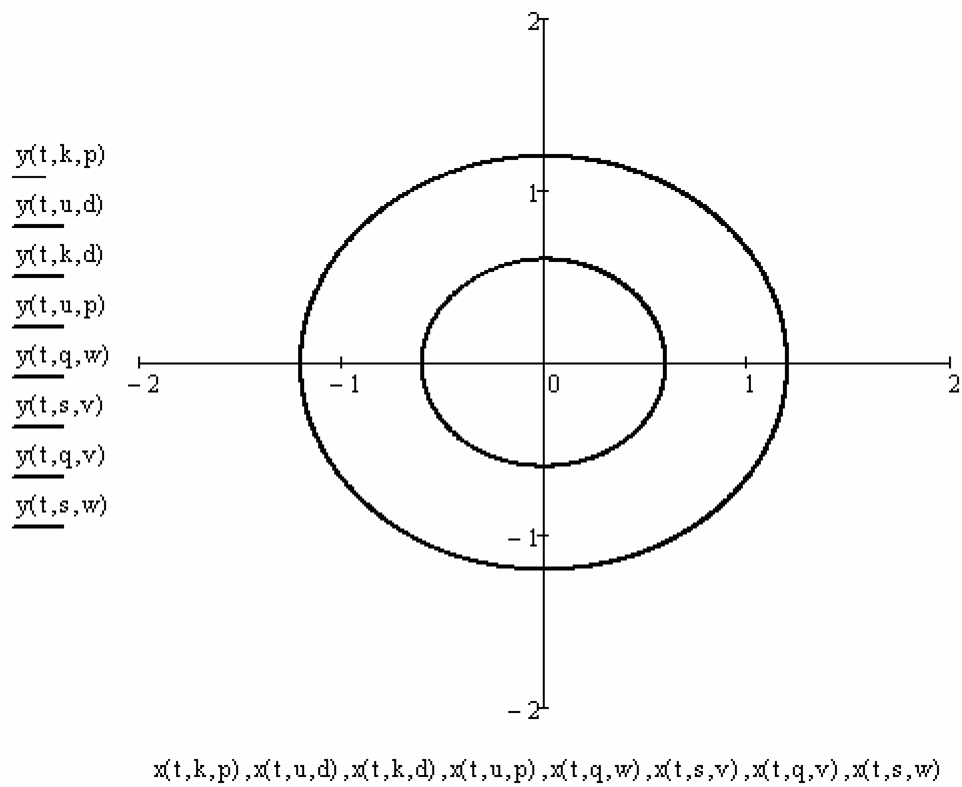
$v1(\alpha,\beta) := V(\alpha,\beta)_0 \rightarrow \sqrt{\alpha^2 - \beta} - \alpha \qquad v2(\alpha,\beta) := V(\alpha,\beta)_1 \rightarrow -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}$

$\beta := 1 \qquad \alpha := 0 \qquad v1(\alpha,\beta) \text{ simplify } \rightarrow i \qquad \mu := 1$

$x(t,C1,C2) := C1 \cdot (\cos(\mu \cdot t + C2)) \rightarrow C1 \cdot \cos(C2 + t)$

$y(t,C1,C2) := \frac{d}{dt} x(t,C1,C2)$

$k := 0.6$	$p := 0.8$	$q := 2 \cdot k$	$w := 2 \cdot p$
$u := -k$	$d := -p$	$s := -q$	$v := -w$
$a := -4$	$h := 0.01$	$b := 4$	$t := a, a + h .. b$



Определить тип точки покоя следующих уравнений в зависимости от значений параметра α. Начертить схему расположения фазовых графиков при указанных значениях параметра α:

404. $D^2x + 2\alpha Dx + x = 0.$

405. $D^2x - (1 - \alpha)Dx - \alpha x = 0.$

406. $x'' - 2\alpha^2 x' + 4x = 0.$

407. $D^2x - 2(\alpha^2 - 2)Dx + 4x = 0.$

408. $D^2x - 2\alpha Dx + (\alpha^2 + 1)x = 0.$

409. $x'' + 3\alpha x' + 3x = 0.$

410. $D^2x + \alpha Dx + (\alpha - 1)x = 0.$

411. $D^2x + (1 - \alpha^2)Dx - \alpha^2 x = 0.$

412. $x'' + 2(1 - \alpha) x' - 2\alpha x = 0.$

412.1. $D^2x + 4\alpha Dx + x = 0,\ \alpha = \frac{3}{2},\ \alpha = \frac{2}{5},\ \alpha = -\frac{1}{2}.$

412.2. $D^2x + 4\alpha Dx - x = 0,\ \alpha = 0,\ \alpha = 1,\ \alpha = -2.$

412.3. $D^2x - 4\alpha Dx + (4\alpha^2 + 4)x = 0,\ \ \alpha = 0,\ \alpha = \frac{1}{4},\ \alpha = -\frac{1}{4}.$

412.4. $D^2x + 4\alpha Dx + x = 0,\ \alpha = \frac{1}{2},\ \alpha = -\frac{1}{2}.$

412.5. $D^2x - 4\alpha^2 Dx + 4x = 0,\ \alpha = \frac{1}{2},\ \alpha = 0.$

412.6. $D^2x - (2 + 2\alpha)Dx + 4\alpha x = 0,\ \alpha = -1,\ \alpha = 1.$

412.7. $D^2x - 4\alpha Dx + (\alpha^2 + 5)x = 0,\ \alpha = \frac{1}{2},\ \alpha = -1\frac{1}{10},\ \alpha = 1\frac{3}{10}.$

412.8. $D^2x + 4\alpha Dx + \alpha x = 0,\ \alpha = -\frac{1}{10},\ \alpha = \frac{1}{2},\ \alpha = \frac{1}{4},\ \alpha = \frac{1}{8}.$

VI. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАЦИОНАРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

13. Устойчивость в смысле Ляпунова

Решение уравнения $L_n x = f(t),\ t \in I,$ с непрерывной на I функцией $f(t),$ удовлетворяющее начальным данным $D^k x\big|_{t=s} = \xi_k,\ k = \overline{0, n-1},\ \ s \in I,\ \xi_k \in \mathbb{R},$ обозначим $x(t, \xi),\ \xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}).$ *Отклонением решений* $x(t, \xi)$ и $x(t, \xi + \Delta\xi)$ называется величина

$$\rho(t, \Delta\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \left| D^k x(t, \xi + \Delta\xi) - D^k x(t, \xi) \right|,$$

где $\xi + \Delta\xi = (\xi_0 + \Delta\xi_0, \ldots, \xi_{n-1} + \Delta\xi_{n-1}),\ \Delta\xi_j \in \mathbb{R},\ \ j = \overline{0, n-1},$ – возмущения начальных данных.

Решение $x(t, \xi)$ уравнения $L_n x = f(t),\ t \in I = [s, +\infty),$ с непрерывной на I функцией $f(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову* (*устойчивым по Ляпунову в положительном направлении*), если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0,\ \forall\Delta\xi \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall t \geq s,\ \ s \in I,$ из неравенства $|\Delta\xi| \leq \delta$ следует, что $\rho(t, \Delta\xi) \leq \varepsilon.$ Аналогично определяется *устойчивость по Ляпунову в отрицательном направлении*, т.е. для $t \in (-\infty, s].$

Для линейного уравнения устойчивость одного из решений обеспечивает устойчивость и всех остальных решений. В таком случае говорят, что *уравнение устойчиво*. Устойчивость уравнения $L_n x = f(t)$ с непрерывной функцией $f(t)$ равносильна устойчивости уравнения $L_n x = 0,$ так как $\rho(t, \Delta\xi)$ не зависит от $f(t).$

Критерий устойчивости. Уравнение $L_n x = f(t),\ t \in [s, +\infty),$ устойчиво в том и только в том случае, когда характеристический полином оператора L_n является *ляпуновским*, т.е. действительные части всех собственных значений оператора неположительны и все собственные значения с нулевыми действительными частями простые, а именно имеют кратность, равную 1.

Необходимым условием устойчивости уравнения является неотрицательность коэффициентов характеристического полинома оператора L_n, т.е. условие $a_j \geq 0,\ j = \overline{0, n-1}.$

Если уравнение рассматривается на множестве $I = \mathbb{R}$, то можно говорить о *двусторонней устойчивости решения* $x(t, \xi).$

Критерий двусторонней устойчивости. Для двусторонней устойчивости уравнения $L_n x = f(t),$ $t \in \mathbb{R},$ необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического полинома оператора L_n были однократными и $\operatorname{Re} \nu_j = 0,\ \ j = \overline{1, n}.$

Задача 13.1. Исследовать устойчивость уравнений:

а) $D^3x + D^2x + 4Dx + 4x = te^t$;

б) $D^3x - D^2x + Dx - x = \sin t$;

в) $D^2x - x = 0$;

г) $D^4x + 13D^2x + 36x = t^2 - 2t.$

Р е ш е н и е. а) Поскольку $\nu_1 = -1,\ \nu_2 = 2i,\ \nu_3 = -2i,$ то уравнение устойчиво по Ляпунову на $I = [0, +\infty).$

б) Поскольку $\nu_1 = 1,\ \nu_2 = i,\ \nu_3 = -i,$ т.е. среди корней характеристического уравнения есть один ($\nu = 1$) с положительной действительной частью, то уравнение неустойчиво по Ляпунову на $I = [0, +\infty),$ но устойчиво на $I = [-\infty, 0).$

в) Корни характеристического уравнения $\nu_1 = 1,\ \nu_2 = -1.$ Наличие положительного и отрицательного корней говорит о том, что уравнение неустойчиво и на $I = [0, +\infty),$ и на $I = (-\infty, 0].$

г) Корни $\nu_1 = 2i,\ \nu_2 = -2i,\ \nu_3 = 3i,\ \nu_4 = -3i$ имеют нулевые действительные части и однократны, следовательно, уравнение обладает двусторонней устойчивостью.

413. Вывести коэффициентный критерий двусторонней устойчивости уравнения $L_2x = 0.$

414. Вывести коэффициентный критерий двусторонней устойчивости уравнения $L_4x = 0.$

415. Возможна ли двусторонняя устойчивость уравнения $L_3x = f(t),\ \ t \in \mathbb{R}$?

Исследовать устойчивость уравнений:

416. $D^2x + Dx - 2x = e^t.$

417. $D^2x + 7Dx = \sin t.$

418. $2D^2x - 5Dx + 2x = f(t), f(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}.$

419. $D^2x + 2Dx + 10x = f(t), f(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}.$

420. $D^2x + 4Dx + 3x = 0.$

421. $D^2x - 2Dx = 0.$

422. $D^4x + 4D^2x + 3x = 0.$

423. $D^3x + 4D^2x - Dx - 4x = \operatorname{ch} t.$

424. $D^5x - 10D^3x + 9Dx = 0.$

425. $D^7x - D^6x + 2D^4x + x = \operatorname{sh} t.$

426. $D^3x + 3D^2x + 2Dx = 0.$

427. $D^6x + 6D^5x + 13D^4x + 12D^3x + 4D^2x = 0.$

428. При каких значениях a уравнение $D^2x + ax = e^t$ устойчиво?

429. При каких значениях b уравнение $D^2x + 2Dx + bx = \cos t$ устойчиво?

430. При каких значениях k уравнение $D^2x + 2Dx + k^2x = 1$ устойчиво?

431. При каких значениях a и b уравнение $D^2x + 2aDx + bx = t$ двусторонне устойчиво?

431.1. Исследовать устойчивость открытой однопродуктовой динамической модели Леонтьева (задача 10.4).

14. Асимптотическая устойчивость

Решение $x(t,\xi)$ уравнения $L_n\, x = f(t),\ t\in[s,+\infty)$, с непрерывной на I функцией $f(t)$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и для любых достаточно малых $\Delta\xi$ выполняется условие $\lim\limits_{t\to+\infty}\rho(t,\Delta\xi)=0$, т.е. $\exists\eta>0,\ \forall\Delta\xi,\ |\Delta\xi|\le\eta,\ \rho(t,\Delta\xi)\to 0$ при $t\to+\infty$.

Асимптотическая устойчивость одного из решений линейного уравнения обеспечивает асимптотическую устойчивость всех решений, т.е. *асимптотическую устойчивость уравнения*. Отметим, что асимптотическая устойчивость уравнения $L_n\, x = f(t)$ с непрерывной функцией $f(t)$ равносильна асимптотической устойчивости уравнения $L_n\, x = 0$.

Критерий асимптотической устойчивости. Для асимптотической устойчивости уравнения $L_n\, x = f(t),\ t\in[s,+\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы собственные значения v_j оператора L_n удовлетворяли условию $\operatorname{Re} v_j<0$, т.е. чтобы характеристический полином был *гурвицевым*.

Критерий Гурвица. Необходимым и достаточным условием того, чтобы полином $v^n + a_{n-1}v^{n-1}+\ldots+$ $+a_1 v + a_0$ был гурвицевым, является положительность всех главных миноров *гурвициана* этого полинома, т.е. определителя порядка n

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0\\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \ldots & 0\\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n-(2n-1)} & a_{n-(2n-2)} & a_{n-(2n-3)} & \ldots & a_0 \end{vmatrix},$$

причем при $j<0$ считают $a_j=0$.

З а м е ч а н и е . Корни характеристического уравнения можно находить с помощью MathCad.

Задача 14.1. Исследовать асимптотическую устойчивость уравнений:
а) $D^3x+4D^2x+5Dx+2x=0$; б) $D^3x+D^2x+4Dx+4x=te^{-t}$; в) $D^3x+D^2x+Dx+2x=t$.

Р е ш е н и е. а) Поскольку $v_1=-1,\ d_1=2,\ v_2=-2,\ d_2=1$, т.е. все корни характеристического многочлена имеют отрицательные действительные части, то уравнение асимптотически устойчиво на $I=\left[0,+\infty\right)$.

б) Поскольку среди корней характеристического уравнения $v_1=-1,\ v_2=2i,\ v_3=-2i$ есть корни с нулевой действительной частью, то уравнение обладает устойчивостью на $I=[0,+\infty)$, но не обладает асимптотической устойчивостью.

в) Характеристическое уравнение $v^3+v^2+v+2=0$ не имеет целочисленных корней. Для исследования асимптотической устойчивости уравнения воспользуемся критерием Гурвица. Гурвициан уравнения имеет вид

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&1&1\\0&0&2\end{vmatrix},\ \Delta_1=1,\ \Delta_2=-1,\ \Delta_3=\Delta=-2.$$

Поскольку $\Delta_2<0$ и $\Delta_3<0$, то асимптотической устойчивости нет.

Задача 14.2. В электрической цепи, изображенной на рис. 12, действует синусоидальное напряжение $U_0=$ $=V_0\cos(\omega t+\varphi)$, где V_0 – амплитуда; ω – частота; φ – начальная фаза напряжения. Найти значение установившегося (предельного) напряжения на нагрузке с сопротивлением R.

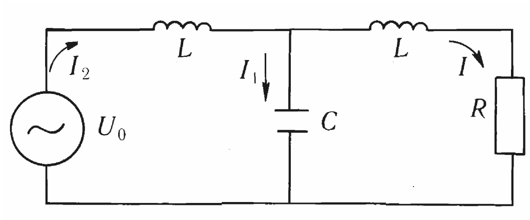


Рис. 12

Р е ш е н и е. По первому закону Кирхгофа $I_2 = I_1 + I$, где I_2, I_1, I – токи, протекающие через первый индуктивный, емкостный и резистивный элементы соответственно. По второму закону Кирхгофа $U + U_2 + U_3 = U_0$ и $U + U_3 - U_1 = 0$, где $U_2 = LI_2'$, $U_3 = LI'$, $U = IR$, $U_1 = q/C$ – падения напряжений на первом и втором индуктивных, резистивном и емкостном элементах соответственно; q – заряд емкостного элемента.

Таким образом, $RI + 2LI' + LI'_1 = U_0$ и $RI' + LI'' - I_1/C = 0$. Следовательно, дифференциальное уравнение, описывающие зависимость величины тока, проходящего через нагрузку, от времени, имеет вид $L^2CI''' + LRCI'' + 2LI' + RI = U_0$.

Решение полученного уравнения представим в виде суммы $I = I_{св} + I_у$, где так называемый свободный ток $I_{св}$ – решение соответствующего однородного уравнения, а $I_у$ – частное решение рассматриваемого неоднородного уравнения. Характеристический многочлен соответствующего однородного уравнения имеет вид $p(\nu) = \nu^3 + \frac{R}{L}\nu^2 + {}$ $+ \frac{2}{LC}\nu + \frac{R}{L^2C}$. Поскольку гурвициан этого многочлена имеет вид

$$\begin{vmatrix} R/L & 1 & 0 \\ R/(L^2C) & 2/(LC) & R/L \\ 0 & 0 & R/(L^2C) \end{vmatrix}$$

и все его главные миноры положительны, то все корни многочлена $p(\nu)$ имеют отрицательные действительные части. Следовательно, рассматриваемое дифференциальное уравнение является асимптотически устойчивым и, значит, $I_{св} \to 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому частное решение $I_у$, которое можно найти по правилу Эйлера, отвечает установившемуся режиму. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов для нахождения этого решения в виде $I_у = A\cos\omega t + B\sin\omega t$. Подставляя это решение в уравнение, находим $I_у(t) = aV_0\sin(\omega t + \varphi + \psi)$, и, следовательно, установившееся напряжение на нагрузке $U_у(t) = RI_у = aRV_0\sin(\omega t + \varphi + \psi)$, где $a = 1/\sqrt{L^2\omega^2(2 - LC\omega^2)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}$; $\sin\psi = aR(1 - LC\omega^2)$; $\cos\psi = aL\omega(2 - LC\omega^2)$. Из полученных соотношений следует, что для малых значений частот ω амплитуда установившегося напряжения близка к амплитуде входного напряжения, так как $a \approx 1/R$, а при достаточно больших значениях частот амплитуда установившегося напряжения близка к нулю, т.е. напряжения высокой частоты не проходят, «фильтруются».

Исследовать устойчивость и асимптотическую устойчивость следующих уравнений:

432. $D^3x + 6D^2x + 9Dx = te^{3t} + e^{3t}\cos 2t$.

433. $x''' + x' = \sin t + t\cos t$.

434. $D^4x + 5D^2x + 4x = \sin t \cos 2t$.

435. $D^3x - D^2x - Dx + x = 3e^t$.

436. $x''' - 2x'' + 4x' - 8x = 0$.

437. $D^2x + 2Dx + x = \sin t$.

438. $D^2x + 6Dx + 13x = 0$.

439. $D^4x + 2D^3x + 4D^2x + 6Dx + 3x = 0$.

440. $D^4x + 6D^3x + 13D^2x + 12Dx + 4x = 0$.

С помощью критерия Гурвица исследовать асимптотическую устойчивость следующих уравнений:

441. $x''' + 2x'' + 2x' + 3x = 0$.

442. $D^4x + 2D^3x + 4D^2x + 7Dx + 2x = 0$.

443. $D^4x - 2D^3x + 6D^2x - Dx = 0$.

444. $D^4x + 2D^3x + 3D^2x + 7Dx + 2x = 0$.

445. $D^3x - 2D^2x + 2Dx - 3x = 0$.

446. $D^4x + 2D^3x + 6D^2x + 5Dx + 6x = 0$.

С помощью критерия Гурвица исследовать, при каких значениях параметров a и b данные уравнения асимптотически устойчивы:

447. $x''' + ax'' + bx' + 2x = 0$.

448. $D^3x + 3D^2x + aDx + bx = 0$.

449. $D^4x + aD^3x + D^2x + 2Dx + x = 0$.

450. $D^4x + D^3x + aD^2x + Dx + bx = 0$.

451. $D^4x + 2D^3x + 3D^2x + 2Dx + ax = 0$.

452. $D^4x + aD^3x + 4D^2x + 2Dx + bx = 0$.

453. Частица массой m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы, пропорциональной смещению частицы (коэффициент пропорциональности λm), и силы сопротивления, пропорциональной ее скорости (коэффициент пропорциональности $2m\mu$). Составить дифференциальное уравнение движения частицы и исследовать его асимптотическую устойчивость.

454. Материальная точка массой m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат O с силой, пропорциональной расстоянию до точки O (коэффициент пропорциональности $4m$). На точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости движения этой точки (коэффициент пропорциональности $3m$). Составить дифференциальное уравнение движения и исследовать его устойчивость.

455. Материальная точка массой m падает в среде, сопротивление которой пропорционально скорости движения точки. Составить дифференциальное уравнение движения точки, если при скорости 1 м/с сила сопротивления равна 1/3 веса точки, начальная скорость – нуль. Исследовать устойчивость уравнения движения.

456. Материальная точка массой $m = 2$ г совершает прямолинейные колебания под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию этой точки от ее положения равновесия (коэффициент пропорциональности равен восьми), и возмущающей силы $F = 4\cos t$. Составить дифференциальное уравнение движения и исследовать его устойчивость.

Контрольная работа № 1

Вариант I

1. Построить общие решения уравнений:

а) $D^3x - 13Dx - 12x = 0$;

б) $L_9x = 0$, где $L_9 = D(D + 2iD^0)^3(D - 2iD^0)^3(D - D^0)^2$.

2. Найти одно из частных решений уравнения $D^2x + x = 2\sin t + 4\cos t$.

3. Используя функцию Коши, записать решение нулевой начальной задачи для уравнения $D^2x + Dx + x = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, при $t = 1$.

4. Определить тип точки покоя уравнения $D^2x + \alpha Dx + x = 0$ в зависимости от значений параметра α. Начертить схему расположения фазовых графиков при $\alpha = -1$.

5. Методом Лагранжа построить общее решение уравнения $D^2x + x = 2/\sin^3 t$, указав промежуток I.

6. Установить значения параметра α, при которых устойчиво уравнение $D^3x + 4\alpha Dx + (\alpha^2 + 1)x = 0$.

Вариант II

1. Построить общие решения уравнений:

а) $D^4x + 10D^2x + 9x = 0$;

б) $L_9x = 0$, где $L_9 = (D - \sqrt{3}/2\, D^0)^3(D - iD^0)^2(D + iD^0)^2(D + (1 + i)D^0)(D + (1 - i)D^0)$.

2. Указать вид частного решения уравнения $D^2x - 4x = ((4 - 4t)\cos t - (2t + 6)\sin t)e^t$.

3. Используя функцию Коши, записать решение нулевой начальной задачи для уравнения $D^2x + 2Dx + x = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, при $t = 3$.

4. Определить тип точки покоя уравнения $D^2x - \alpha^2Dx + 4x = 0$ в зависимости от значений параметра α. Начертить схему расположения фазовых графиков при $\alpha = -1$.

5. Методом Лагранжа построить общее решение уравнения $D^2x - 2Dx + x = e^t/t$, указав промежуток I.

6. Установить значения параметра α, при которых устойчиво уравнение $D^2x - 2Dx - \alpha^2x = \sin t$.

Тестовые задания

1. Дополнить выражение $D^2(D-(1+i)D^0)^2$ так, чтобы получить линейный дифференциальный оператор L_6 с действительными коэффициентами. Проинтегрировать полученное уравнение $L_6 x = 0$.

2. Среди уравнений а) $D^4 x + 5D^3 x + 4x = 0$, б) $D^4 x + 5D^2 x - 4x = 0$, в) $D^4 x + 5Dx + 4x = 0$, г) $D^4 x + 5D^2 x + 6x = 0$, д) $D^4 x + 5D^2 x - 6x = 0$, е) $D^4 x + 5D^2 x + 4x = 0$ указать то, базисом пространства решений которого является одна из систем функций: 1) $t\cos t$, $t\sin t$, $\cos 2t$, $\sin 2t$, 2) $\cos t$, $\sin t$, $\cos 2t$, $\sin 2t$.

3. Среди уравнений а) $D^2 x + 2Dx + 2x = e^t + t^2 \sin^2 t$, б) $D^3 x + 2Dx = e^t\sqrt{1-t}$, $t<1$, в) $D^4 x + x = (t^2 - 3t\sin t)e^{4t}$, г) $D^2 x + 10Dx = 3^t$, д) $D^2 x - 3Dx + x = (t^2+1)^{-3}$ указать те, при решении которых можно применить правило Эйлера.

4. Среди уравнений а) $D^2 x + x = e^t \cos^2 t$, б) $D^3 x + x = e^{-t} t^{-1}$, $t>0$, в) $D^3 x + x = 4^{-t} t^2$, г) $D^2 x + 5Dx + 6x = (t+1)\sin 2t + t^2 \cos 3t$, д) $D^5 x + 4D^4 x = 3t\ln(-t)$, $t<0$, указать те, при решении которых нельзя применить правило Эйлера.

5. Среди функций а) $e^t - e^t\cos t + e^t \sin t$, б) $1/20e^t + 1/10e^t \sin t - 1/20e^t\cos t$, в) $e^t - e^t \cos t$, г) $1/20e^t + 1/10e^t \sin 2t - 1/20e^t \cos 2t$, д) $1/2e^t + 1/4e^t \sin t - 1/2e^t \cos t$, е) $e^t + e^t \sin t$ указать функцию Коши оператора $L_3 = D^3 - 3D^2 + 4D - 2D^0$.

6. Указать все значения параметра α, при которых устойчиво уравнение $D^2 x + 4Dx + \alpha x = t$.

7. Используя критерий Гурвица или вычисления в MathCad, найти все асимптотически устойчивые уравнения среди указанных ниже $D^2 x - 4Dx + 5x = 0$, $D^3 x + D^2 x + 4Dx + x = t$, $D^4 x + 5D^2 x + 4x = \sin t$.

8. Указать все значения параметра α, при которых точка покоя $O(0,0)$ является фокусом для уравнения $D^2 x + 2\alpha Dx + (\alpha^2+1)x = 0$.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

VII. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

15. Линейные векторные уравнения

Линейные векторные уравнения. *Линейное векторное дифференциальное уравнение* первого порядка в нормальной форме для определения n-мерной функции $x = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ на промежутке $I = |a, b| \subset \mathbb{R}$ имеет вид

$$Dx = A(t)\,x + f(t), \ t \in I,$$

где квадратная матричная функция (коэффициент уравнения) $A(t) = [a_{kj}(t)]$ и векторная функция (неоднородность уравнения) $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$ заданы на промежутке I.

Данное уравнение равносильно системе n линейных относительно неизвестных скалярных функций $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, дифференциальных уравнений (n – *размерность системы*)

$$Dx_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t) x_j + f_k(t), \ k = \overline{1, n}, \ t \in I.$$

Скалярные функции $a_{kj}(t)$ называют *коэффициентами системы*, матрицу $A(t) = [a_{kj}(t)]$ – *матрицей коэффициентов системы*, $f_k(t)$ – *неоднородностями системы*.

Например, линейное векторное уравнение $Dx = A(t)\,x + f(t)$, где

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & e^t \\ 5 & 0 & \operatorname{tg} t \end{bmatrix}, \ f(t) = \left(\sqrt{t}, e^{2t}, \frac{1}{\sin t}\right)^T, \ I = (0, \pi/2),$$

равносильно системе скалярных линейных уравнений

$$\begin{cases} Dx_1 = t^2 x_1 + 2x_2 - x_3 + \sqrt{t}, \\ Dx_2 = 4x_1 - x_2 + e^t x_3 + e^{2t}, \\ Dx_3 = 5x_1 + x_3 \operatorname{tg} t + 1/\sin t, \quad t \in (0, \pi/2). \end{cases}$$

Отметим, что система рассматривается на том промежутке I, где заданы ее коэффициенты и неоднородности.

Систему уравнений в нормальной форме, т.е. разрешенную относительно старших производных искомых функций, путем введения вспомогательных переменных всегда можно привести к системе уравнений первого порядка.

Задача 15.1. Привести систему

$$\begin{cases} D^2 x = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + f(t), \\ D^2 y = b_1(t)Dx + b_2(t)Dy + a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + g(t), \quad t \in I, \end{cases}$$

к системе в нормальной дифференциальной форме размерности 4.

Р е ш е н и е. Введем вспомогательные неизвестные следующим образом: $x = x_1$, $y = x_2$, $Dx = Dx_1 = x_3$, $Dy = Dx_2 = x_4$. Тогда получим:

$$\begin{cases} Dx_1 = x_3, \\ Dx_2 = x_4, \\ Dx_3 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f(t), \\ Dx_4 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + b_1(t)x_3 + b_2(t)x_4 + g(t). \end{cases}$$

Решением линейного векторного уравнения называют дифференцируемую векторную функцию $x(t)$, заданную на промежутке I и обращающую уравнение в тождество на I. Совокупность компонент решения $x = x(t)$, $t \in I$, линейного векторного уравнения образует *решение* $x_k = x_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, $t \in I$, системы дифференциальных уравнений, и наоборот.

Если неоднородность линейного векторного уравнения отсутствует, т.е. $f(t) \equiv 0$ $\forall t \in I$, то уравнение называют *однородным*, в общем случае – *неоднородным* (аналогично для системы).

Линейное векторное дифференциальное уравнение с постоянной матрицей A называют *уравнением со стационарным оператором*. Соответствующую систему называют *системой с постоянными коэффициентами*. Иногда такие уравнения и системы для краткости называют *стационарными*.

Частные случаи линейных векторных уравнений первого порядка. Задание матрицы A и вектора $f(t)$ определяет конкретное линейное векторное уравнение. Специальный вид матрицы определяет вид уравнения. Так, диагональной матрице A соответствует диагональное линейное векторное уравнение, треугольной – треугольное. Интегрирование указанных видов сводится к последовательному интегрированию уравнений соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Задача 15.2. Проинтегрировать уравнение $Dx = Ax + f(t)$, где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ f(t) \equiv 0.$$

Р е ш е н и е. Соответствующая система имеет вид

$$\begin{cases} Dx_1 = 2x_1, \\ Dx_2 = 3x_2, \\ Dx_3 = x_3, \end{cases}$$

откуда следует, что $x_1(t) = C_1 e^{2t}$, $x_2(t) = C_2 e^{3t}$, $x_3(t) = C_3 e^{t}$ или $x(t) = (C_1 e^{2t}, C_2 e^{3t}, C_3 e^{t})^T$. Полученное решение является общим. Из способа построения решений данной системы следует, что других решений она не имеет.

Задача 15.3. Проинтегрировать уравнение $Dx = Ax + f(t)$, где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \ f(t) \equiv 0.$$

Р е ш е н и е. Соответствующая система имеет вид

$$\begin{cases} Dx_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, \\ Dx_2 = x_2 + 2x_3, \\ Dx_3 = 3x_3, \end{cases}$$

откуда следует, что $x_3(t) = C_3 e^{3t}$, $x_2(t) = C_2 e^t + C_3 e^{3t}$, $x_1(t) = C_1 e^{2t} - 3C_2 e^t + 7C_3 e^{3t}$, поэтому общее решение исходного линейного векторного уравнения $x(t) = (C_1 e^{2t} - 3C_2 e^t + 7C_3 e^{3t},\ C_2 e^t + C_3 e^{3t},\ C_3 e^{3t})^T$.

Интегрирование неоднородных диагональных и треугольных линейных векторных уравнений производится аналогичным образом.

Теорема 15.1 *(об однозначной разрешимости). Пусть векторная функция* $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$ *непрерывна на I. Тогда* $\forall s \in I$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ *задача Коши для уравнения со стационарным оператором* $Dx = Ax + f(t),\ x\big|_{t=s} = \xi,$ *однозначно разрешима на I.*

Задача 15.4. Найти решение задачи Коши $Dx = Ax + f(t),\ x\big|_{t=s} = \xi,$ где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\quad f(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 1 \end{bmatrix},\ s = 1,\ \xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ I = \mathbb{R}.$$

Р е ш е н и е. В скалярной записи задача имеет вид

$$\begin{cases} Dx_1 = 2x_1 + e^t, \\ Dx_2 = -3x_2 + 1, \quad x_1(1) = 0,\ x_2(1) = 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Система является диагональной, общее решение ее $x_1(t) = C_1 e^{2t} - e^t$, $x_2(t) = C_2 e^{-3t} + 1/3$. Используя начальные данные, получаем $x_1(t) = e^{2t-1} - e^t$, $x_2(t) = (2e^{-3(t-1)} + 1)/3$. Найденное решение поставленной задачи является частным решением уравнения.

Проинтегрировать линейные векторные уравнения вида $Dx = Ax + f(t)$, где $A, f(t)$ заданы. Указать максимально возможный промежуток существования решения:

457. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $f(t) \equiv 0$.

458. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix}$.

459. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $f(t) \equiv 0$.

460. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{t} \\ 0 \end{bmatrix}$.

461. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $f(t) \equiv 0$.

462. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $f(t) \equiv 0$.

463. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

464. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 2e^t \\ e^{-t} \end{bmatrix}$.

Решить задачи Коши для линейных векторных уравнений:

465. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$, $f(t) \equiv 0$, $s = 3$, $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

466. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ f(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \ s = 0, \ \xi = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

467. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ f(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \ s = 0, \ \xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

468. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}, \ s = 0, \ \xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

16. Сведение линейной системы к совокупности независимых уравнений

Связь между стационарными линейными системами размерности n и линейными уравнениями со стационарным оператором. Вопрос о сведении стационарных систем к стационарным уравнениям рассмотрим на примере однородной системы размерности 2

$$\begin{cases} Dx_1 = ax_1 + bx_2\,, \\ Dx_2 = cx_1 + dx_2\,, \end{cases}$$

сведя ее к уравнению второго порядка относительно переменной x_1 или x_2. Продифференцировав первое уравнение системы по t, получим $D^2x_1 = aDx_1 + bDx_2$. Подставив вместо Dx_2 его выражение из второго уравнения, будем иметь $D^2x_1 = aDx_1 + bcx_1 + bdx_2$. Если $b \neq 0$, то, исключив x_2 из полученного уравнения (для чего выразим x_2 из первого уравнения системы) и использовав первое уравнение исходной системы, определим линейное уравнение второго порядка относительно переменной x_1:

$$D^2 x_1 = aDx_1 + bcx_1 + d\,(Dx_1 - ax_1)$$

или

$$D^2x_1 - (a+d)Dx_1 + (ad - bc)x_1 = 0.$$

Таким образом, интегрирование заданной системы может быть заменено разрешением системы

$$\begin{cases} D^2x_1 - (a+d)Dx_1 + (ad - bc)x_1 = 0, \\ x_2 = \dfrac{1}{b}(Dx_1 - ax_1), \end{cases}$$

уже не имеющей нормальной формы. Исходную систему при $b = 0$ можно свести к уравнению второго порядка только относительно переменной x_2, если $c \neq 0$. При $b = c = 0$ система распадается на два независимых уравнения (имеет диагональный вид) и не может быть сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

Если неоднородность $f(t)$ дважды дифференцируема на I, то неоднородную систему размерности 2 описанным способом также можно свести к неоднородному, вообще говоря, уравнению второго порядка.

Путем сведения к уравнениям высших порядков разрешить системы:

469. $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = -x_1. \end{cases}$

470. $\begin{cases} Dx_1 = 3x_2 - x_1, \\ Dx_2 = x_2 + x_1 + e^t. \end{cases}$

471. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1 + x_2 + e^t, \\ Dx_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$

472. $\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 + \sin t, \\ x_2' = -4x_1 + 3x_2 + e^t. \end{cases}$

473. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1 + x_2, \\ Dx_2 = -4x_1 + 3x_2. \end{cases}$

474. $\begin{cases} Dx_1 = x_3 + t, \\ Dx_2 = 2x_2 + \sin t, \\ Dx_3 = -x_1. \end{cases}$

475. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 + x_3, \\ x_2' = -2x_1 - x_3, \\ x_3' = 2x_1 + x_2 + 2x_3. \end{cases}$

476. $\begin{cases} Dx_1 = x_3 + e^t, \\ Dx_2 = x_1 + 2e^{-t}, \\ Dx_3 = x_2. \end{cases}$

477. $\begin{cases} Dx_1 = -2x_1 - 2x_2 - 4x_3, \\ Dx_2 = -2x_1 + x_2 - 2x_3, \\ Dx_3 = 5x_1 + 2x_2 + 7x_3. \end{cases}$

478. $\begin{cases} x_1' = 4x - x_2, \\ x_2' = 5x_1 + 2x_2. \end{cases}$

Решить задачи Коши:

479. $\begin{cases} Dx_1 = 3x_1 - 2x_2, \\ Dx_2 = -3x_1 + 2x_2, \end{cases}$ $x_1\big|_{t=0} = x_2\big|_{t=0} = 1.$

480. $\begin{cases} Dx_1 = x_3, \\ Dx_2 = x_1, \\ Dx_3 = -x_2, \end{cases}$ $x_1\big|_{t=0} = x_2\big|_{t=0} = 0,\ x_3\big|_{t=0} = 1.$

481. $\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3, \\ x_2' = 3x_1 + x_3, \\ x_3' = 3x_1 + x_2, \end{cases}$ $x_1\big|_{t=0} = 0,\ x_2\big|_{t=0} = x_3\big|_{t=0} = 1.$

Операторный метод интегрирования дифференциальных систем. Операторный метод является модификацией метода Гаусса решения линейных систем алгебраических уравнений. Оператор D дифференцирования по t обладает свойством $D^n D^m = D^{n+m} = D^m D^n$. Линейный оператор

$$L(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0,\ a_k \in \mathbb{R},\ k = \overline{0, n},$$

будет *нулевым* тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю. Матрица $A(D)$, элементами которой являются операторы $L_{ij}(D)$, называется *D-матрицей*, определитель матрицы $A(D)$ системы – *D-определителем*.

Элементарными преобразованиями D-матриц называются следующие операции: 1) перестановка i-й и j-й строк $\left(\overleftrightarrow{S_i\ S_j}\right)$; 2) умножение элементов i-й строки на постоянный множитель, отличный от нуля (αS_i); 3) прибавление к элементам i-й строки соответствующих элементов j-й строки, умноженной на D^k слева, k – целое неотрицательное число, $i \neq j$ $\left(S_i + D^k S_j\right)$.

Система дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} L_{ij}(D)x_j = f_i(t), \quad i=\overline{1,n}, \quad t\in I,$$

где $L_{ij}(D)$ – линейный оператор некоторого порядка, а $f(t)=(f_1(t),\dots,f_n(t))^T$ – неоднородность, в векторно-матричной записи принимает вид

$$A(D)x = f(t),\ t\in I,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Отметим, что в результате элементарных преобразований приходим к равносильной системе дифференциальных уравнений. Если неоднородность $f(t)$ дифференцируема на I требуемое число раз, то с помощью элементарных преобразований матрица системы приводится к треугольному виду с точностью до расположения столбцов. Осуществляя те же элементарные преобразования над *расширенной матрицей системы*, систему часто можно свести к равносильной *системе треугольного вида*, которая содержит хотя бы одно уравнение относительно одной из компонент вектора x. Разрешение полученной системы производится последовательным интегрированием ее уравнений.

Задача 16.1. Проинтегрировать систему уравнений

$$\begin{cases} Dx_1-3D^2x_2+Dx_2+9x_1-3x_2=0,\\ Dx_1+Dx_2-x_1-x_2=0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Перепишем систему в операторном виде:

$$\begin{cases} (D+9D^0)x_1+(-3D^2+D-3D^0)x_2=0,\\ (D-D^0)x_1+(D-D^0)x_2=0.\end{cases}$$

Матрица $A(D)$ данной системы имеет вид

$$A(D)=\begin{bmatrix} D+9D^0 & -3D^2+D-3D^0\\ D-D^0 & D-D^0\end{bmatrix}.$$

Приведем матрицу $A(D)$ с помощью элементарных преобразований к треугольному виду:

$$\begin{bmatrix} D+9D^0 & -3D^2+D-3D^0\\ D-D^0 & D-D^0\end{bmatrix}\xrightarrow[S_2-S_1]{}\to\begin{bmatrix} D+9D^0 & -3D^2+D-3D^0\\ -10D^0 & 3D^2+2D^0\end{bmatrix}\xrightarrow[10S_1+DS_2]{}$$

$$\to\begin{bmatrix} 90D^0 & 3D^3-30D^2+12D-30D^0\\ -10D^0 & 3D^2+2D^0\end{bmatrix}\xrightarrow[9S_2+S_1]{}$$

$$\to\begin{bmatrix} 90D^0 & 3D^3-30D^2+12D-30D^0\\ 0 & 3D^3-3D^2+12D-12D^0\end{bmatrix}\xrightarrow[S_1/3,\ S_2/3]{}$$

$$\to\begin{bmatrix} 30D^0 & D^3-10D^2+4D-10D^0\\ 0 & D^3-D^2+4D-4D^0\end{bmatrix}\xrightarrow[S_1-S_2]{}\to\begin{bmatrix} 30D^0 & -9D^2-6D^0\\ 0 & D^3-D^2+4D-4D^0\end{bmatrix}\xrightarrow[S_1/3]{}\begin{bmatrix} 10D^0 & -3D^2-2D^0\\ 0 & D^3-D^2+4D-4D^0\end{bmatrix}.$$

Заметим, что последние три преобразования сделаны для удобства интегрирования полученной треугольной системы. Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 10x_1 - (3D^2 + 2D^0)x_2 = 0, \\ (D^3 - D^2 + 4D - 4D^0)x_2 = 0, \end{cases}$$

из второго уравнения которой получаем $x_2(t) = C_1e^t + C_2 \sin 2t + C_3 \cos\ 2t$. Тогда из первого уравнения системы следует, что $x_1(t) = (3D^2x_2 + 2x_2)/10$, т.е. $x_1(t) = C_1e^t/2 - C_2 \sin 2t - C_3 \cos 2t$.Таким образом, решение системы имеет вид $x_1(t) = C_1e^t/2 - C_2 \sin 2t - C_3 \cos 2t$, $x_2(t) = C_1e^t + C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t$.

Задача 16.2. Разрешить неоднородную систему

$$\begin{cases} Dx_1 - Dx_2 - 2x_1 + 2x_2 = t, \\ D^2x_1 + 2Dx_2 + x_1 = e^t. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{cc|c} D - 2D^0 & -D + 2D^0 & t \\ D^2 + D^0 & 2D & e^t \end{array}\right].$$

Над этой матрицей будем производить элементарные преобразования так, чтобы матрица $A(D)$ стала треугольной. Например: 1) $S_2 - DS_1$; 2) $2S_1 - S_2$; 3) $5S_2 + 2DS_1$; 4) $S_1 + S_2$; 5) $-S_2/2$. В результате исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} 5x_1 = 2D^3x_2 - D^2x_2 - 8Dx_2 + 3e^t - 1, \\ D^3x_2 - 3Dx_2 - 2x_2 = -e^t - t. \end{cases}$$

Решив второе уравнение полученной системы, имеем $x_2(t) = (C_1 + C_2t)e^{-t} + C_3e^{2t} + (e^t + 2t - 3)/4.$ Следовательно,

$$x_1(t) = (C_1 + C_2t)e^{-t} - 4C_3e^{2t}/5 + e^t/4 - 1,$$
$$x_2(t) = (C_1 + C_2t)e^{-t} + C_3e^{2t} + e^t/4 + (2t - 3)/4$$

есть общее решение исходной системы.

Задача 16.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2D^2x_1 - D^2x_2 - Dx_1 - Dx_2 + 9x_1 - 3x_2 = 0, \\ 2D^2x_1 - D^2x_2 + Dx_1 + Dx_2 + 7x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Матрица системы имеет вид

$$A(D) = \begin{bmatrix} 2D^2 - D + 9D^0 & -D^2 - D - 3D^0 \\ 2D^2 + D + 7D^0 & -D^2 + D - 5D^0 \end{bmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований матрицу $A(D)$ можно привести к треугольному виду

$$\begin{bmatrix} 10D^0 & -3D^2 - 2D^0 \\ 0 & D^3 - D^2 + 4D - 4D^0 \end{bmatrix}.$$

Общее решение уравнения $D^3x_2 - D^2x_2 + 4Dx_2 - 4x_2 = 0$ имеет вид $x_2(t) = C_1 e^t + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t$. Из первого уравнения системы $10x_1 - 3D^2x_2 - 2x_2 = 0$ находим, что $x_1(t) = C_1e^t/2 - C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t$. Следовательно, общее решение исходной системы имеет вид

$$x_1(t) = C_1 e^t/2 - C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t, \quad x_2(t) = C_1 e^t + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t.$$

Задача 16.4. Проинтегрировать неоднородную систему $A(D)x = f(t)$, $t \in I$, где

$$A(D) = \begin{bmatrix} D^0 & D^0 & D^2 & D \\ 0 & 0 & D^3 & D^0 \\ 2D^0 & 2D^0 & D^3 + 2D^2 & 2D + D^0 \\ D & D & 2D^3 & D^2 + D^0 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t+2 \\ t \end{bmatrix}, \quad I = \mathbb{R}.$$

Р е ш е н и е. Расширенная матрица системы с помощью элементарных преобразований может быть приведена к виду

$$\left[\begin{array}{cccc:c} D^0 & D^0 & D^2 & D & 1 \\ 0 & 0 & D^3 & D^0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Отсюда следует, что система совместна и ранг ее матрицы равен двум. Выберем в качестве минора, не равного тождественно нулю по D, например, минор наименьшей степени относительно D, т.е. минор $\begin{vmatrix} D^0 & D \\ 0 & D^0 \end{vmatrix}$. Исходная система равносильна следующей: $\begin{cases} x_1 + Dx_4 = 1 - x_2 - D^2 x_3, \\ x_4 = t - D^3 x_3, \end{cases}$ где x_2, x_3 – произвольные функции. Отсюда $x_4 = t - D^3 x_3$, $x_1 = D^4 x_3 - D^2 x_3 - x_2$.

З а м е ч а н и е. Общее решение совместной неоднородной системы, ранг матрицы которой равен r, содержит $n - r$ произвольных функций.

Используя операторный метод, проинтегрировать системы:

482. $\begin{cases} D^2 x_1 - Dx_2 + Dx_3 - 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2Dx_1 - D^2 x_2 + D^2 x_3 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ Dx_1 + D^2 x_2 - 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

483. $\begin{cases} Dx_1 = -2x_1 - 2x_2 - 4x_3, \\ Dx_2 = -2x_1 + x_2 - 2x_3, \\ Dx_3 = 5x_1 + 2x_2 + 7x_3. \end{cases}$

484. $\begin{cases} x_1' - x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2' + x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_3' - x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

485. $\begin{cases} Dx_1 - 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ Dx_2 - x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ Dx_3 - 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

486. $\begin{cases} Dx_1 - x_2 = 0, \\ Dx_2 - x_1 = 2\operatorname{ch} t. \end{cases}$

487. $\begin{cases} 4Dx_1 - Dx_2 + 3x_1 = \sin t, \\ Dx_1 + x_2 = \cos t. \end{cases}$

488. $\begin{cases} D^2 x_2 - x_1 = 0, \\ D^2 x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

489. $\begin{cases} x_1'' - 2x_2 = 0, \\ x_2'' + 2x_1 = 0. \end{cases}$

490. $\begin{cases} Dx_1 = x_3 + x_2 - x_1, \\ Dx_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ Dx_3 = x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$

491. $\begin{cases} x_1' + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2' + x_1 + x_3 = 0, \\ x_3' + x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

492. $\begin{cases} D^2 x_1 + 2x_1 + 4x_2 = e^t, \\ D^2 x_2 - x_1 - 3x_2 = -t. \end{cases}$

493. $\begin{cases} D^2 x_1 + 5x_1 + x_2 = \cos 2t, \\ D^2 x_2 - x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$

494. $\begin{cases} D^2x_1 + Dx_2 - 5Dx_1 + 13x_1 + 20x_2 = 0, \\ D^2x_2 + 3Dx_2 + Dx_1 + 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$

17. Метод Д'Аламбера решения линейных векторных уравнений

Линейную функцию переменных $x_1, \dots, x_n$ с дифференцируемыми на промежутке I коэффициентами $b_k(t)$ и неоднородностью $\varphi(t)$

$$F(x_1, \dots, x_n, t) = b_1(t)x_1 + \dots + b_k(t)x_k + \varphi(t)$$

называют *линейным первым интегралом* системы линейных дифференциальных уравнений

$$Dx_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)x_j + f_k(t),\ k = \overline{1, n},\ t \in \mathrm{I},$$

если F сохраняет постоянное значение вдоль любого решения $x_k = x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, системы, т.е. $F(x_1, \dots, x_n, t) = C = \text{const}\ \forall t \in I$. Систему n первых интегралов системы линейных дифференциальных уравнений $F_j(x_1, \dots, x_n, t)$, $j = \overline{1, n}$, называют *полной системой первых интегралов*, если любое решение $x_k = x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, системы может быть найдено из системы соотношений

$$F_j(x_1, \dots, x_n, t) = C_j,\ \ j = \overline{1, n},\ t \in I,$$

при подходящем выборе постоянных C_j. Полную систему первых интегралов кратко называют также *полным* или *общим интегралом дифференциальной системы* или соответствующего линейного векторного уравнения.

Правило Д'Аламбера заключается в построении полного интеграла линейной дифференциальной системы с постоянными коэффициентами путем образования *интегрируемых комбинаций*.

Задача 17.1. Проинтегрировать систему

$$\begin{cases} Dx_1 = -x_1 + x_2 + x_3 + 4t^2, \\ Dx_2 = x_1 - x_2 + x_3 + 12e^{2t}, \\ Dx_3 = x_1 + x_2 + x_3 - 4t. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Сложив два первых уравнения и отняв третье, получим уравнение $D(x_1 + x_2 - x_3) = -(x_1 + x_2 - x_3) + (4t^2 + 12e^{2t} + 4t)$, линейное относительно $x_1 + x_2 - x_3$. Разрешив его, найдем первый интеграл системы: $x_1 + x_2 - x_3 = C_1e^{-t} + 4(e^{2t} + t^2 - t + 1)$. Вычтя из первого уравнения второе, будем иметь $D(x_1 - x_2) = -2(x_1 - x_2) + 4t^2 - 12e^{2t}$. Проинтегрировав полученное линейное неоднородное уравнение относительно разности $x_1 - x_2$, определим еще один первый интеграл системы: $x_1 - x_2 = C_2e^{-2t} + 3e^{-2t} + 2t^2 - 2t + 1$. Третью интегрируемую комбинацию получим, сложив два первых уравнения с удвоенным третьим: $D(x_1 + x_2 + 2x_3) = 2(x_1 + x_2 + 2x_3) + 4t^2 + 12e^{2t} - 8t$. Отсюда $x_1 + x_2 + 2x_3 = C_3e^{2t} + 12te^{2t} + 1 + 2t - 2t^2$. Общий интеграл системы имеет вид:

$$x_1 + x_2 - x_3 = C_1e^{-t} + 4(e^{2t} + t^2 - t + 1),$$
$$x_1 - x_2 = C_2e^{-2t} + 3e^{2t} + 2t^2 - 2t + 1,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = C_3e^{2t} + 12te^{2t} + 1 + 2t - 2t^2.$$

Разрешив систему относительно x_1, x_2, x_3, получим общее решение системы:

$$x_1(t) = \frac{1}{3}C_1e^{-t} + \frac{1}{2}C_2e^{-2t} + \frac{1}{6}C_3e^{2t} + (2t + \frac{17}{6})e^{2t} + 2t^2 - 2t + 2,$$

$$x_2(t) = \frac{1}{3}C_1e^{-t} - \frac{1}{2}C_2e^{-2t} + \frac{1}{6}C_3e^{2t} + (2t - \frac{1}{6})e^{2t} + 1,$$

$$x_3(t) = -\frac{1}{3}C_1e^{-t} + \frac{1}{3}C_3e^{-2t} + (4t - \frac{4}{3})e^{2t} - t^2 + 2t - 1.$$

Задача 17.2. Составить интегрируемые комбинации для системы

$$\begin{cases} Dx_1 = a_1x_1 + b_1x_2 + f_1(t), \\ Dx_2 = a_2x_1 + b_2x_2 + f_2(t), \quad t \in I. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Прибавив к первому уравнению второе, умноженное на k, получим $D(x_1 + kx_2) = (a_1 + ka_2)\, x_1 + (b_1 + kb_2)x_2 + f_1(t) + kf_2(t)$ или

$$D(x_1 + kx_2) = (a_1 + ka_2)(x_1 + \frac{b_1 + kb_2}{a_1 + ka_2}x_2) + f_1(t) + kf_2(t).$$

Интегрируемая комбинация возможна, если $k = (b_1 + kb_2)/(a_1 + ka_2)$, т.е. если уравнение $a_2k^2 + (a_1 - b_2)k - b_1 = 0$ имеет действительные корни k_1 и k_2. При $k_1 \neq k_2$ имеем две различные интегрируемые комбинации, что позволяет построить полный интеграл системы, а значит, и общее решение. Если $k_1 = k_2$, то строим один первый интеграл системы, что дает возможность свести данную систему к одному уравнению.

Проинтегрировать системы:

495. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1 - 2x_2, \\ Dx_2 = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$

496. $\begin{cases} Dx_1 = 2x_1 - x_2, \\ Dx_2 = x_1 + 2x_2. \end{cases}$

497. $\begin{cases} Dx_1 = 3x_1 + 5x_2, \\ Dx_2 = -2x_1 - 8x_2. \end{cases}$

498. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3, \\ x_3' = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3. \end{cases}$

499. $\begin{cases} Dx_1 = 5x_1 + 4x_2 + e^t, \\ Dx_2 = 4x_1 + 5x_2 + 1. \end{cases}$

500. $\begin{cases} Dx_1 = 2x_1 + 4x_2 + \cos t, \\ Dx_2 = -x_1 - 2x_2 + \sin t. \end{cases}$

501. $\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3, \\ x_2' = x_1 + x_3, \\ x_3' = x_1 + x_2. \end{cases}$

502. $\begin{cases} Dx_1 = x_2 + x_3 + 10\cos t, \\ Dx_2 = x_1 + x_3 + 2e^t, \\ Dx_3 = x_1 + x_2 - 10\sin t. \end{cases}$

18. Экспонентное представление решений. Метод Коши

Матричный метод интегрирования однородных стационарных линейных векторных уравнений. Рассматривается однородное стационарное линейное векторное уравнение

$$Dx = Ax, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{18.1}$$

Совокупность частных решений $x_k(t) = (x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t))^T$, $k = \overline{1, n}$, уравнения $Dx = Ax$ образует *базис пространства решений*, если линейная комбинация $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, с произвольными постоянными коэффициентами, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k x_k(t)$, содержит все решения уравнения. Совокупность базисных решений уравнения образует квадратную матрицу $\Phi(t)$ размерности n:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1k}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2k}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nk}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{18.2}$$

Матрица $\Phi(t)$ называется *базисной* (*фундаментальной*) *матрицей* линейного векторного уравнения. Базисная матрица – это матрица решений, определитель которой не равен нулю хотя бы в одной точке $s \in \mathbb{R}$. Поскольку общее решение уравнения представимо в виде

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix} + \dots + C_n \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

то $x(t) = \Phi(t)C$, где $C = \left(C_1, \dots, C_n\right)^T$ – произвольный постоянный вектор.

Базисная матрица $\Phi(t)$ называется *нормированной* при $t = s$, если $\Phi(s) = E$, где E – единичная матрица, т.е. $x_{jk}(s) = 0$ при $j \neq k$ и $x_{kk}(s) = 1$.

Из представления решения однородного уравнения следует, что $\Phi(t) = e^{At} = \exp At$, где $\exp At = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m t^m$, $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(0) = E$. Таким образом, *общее решение уравнения* представимо в виде $x(t) = e^{At}\, C$.

Решение начальной задачи

$$Dx = Ax, \quad x\big|_{t=s} = \xi, \quad s \in \mathbb{R}, \ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{18.3}$$

представимо в виде

$$x(t) = e^{A(t-s)}\,\xi. \tag{18.4}$$

Задача 18.1. Найти общее решение уравнения $Dx = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x.$

Р е ш е н и е. Для записи решения в виде экспоненты определим степени матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$: $A^0 = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^1 = A$, $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^4 = E$, $A^5 = A$, $A^6 = A^2$ и т.д., т.е. $A^{4n} = E$, $A^{4n+1} = A$, $A^{4n+2} = A^2$, $A^{4n+3} = A^3$, $n \in \mathbb{N}$.

Следовательно,

$$e^{At}=E+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\ldots+\frac{1}{m!}A^mt^m+\ldots=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}+\frac{t^3}{3!}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}+\frac{t^4}{4!}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\ldots=$$

$$=\begin{bmatrix}1-\dfrac{t^2}{2!}+\ldots+\dfrac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}+\ldots & t-\dfrac{t^3}{3!}+\ldots+\dfrac{(-1)^{k+1}t^{2k-1}}{(2k-1)!}+\ldots\\ -t+\dfrac{t^3}{3!}+\ldots+\dfrac{(-1)^k t^{2k-1}}{(2k-1)!}+\ldots & 1-\dfrac{1}{2!}t^2+\ldots+\dfrac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}+\ldots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$x(t)=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1\cos t+C_2\sin t\\ -C_1\sin t+C_2\cos t\end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}.$$

Задача 18.2. Решить начальную задачу

$$Dx=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}x,\quad x\big|_{t=-1}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Решением начальной задачи является функция

$$x(t)=e^{A(t+1)}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(t+1) & \sin(t+1)\\ -\sin(t+1) & \cos(t+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что не всегда удается усмотреть закономерность образования степеней матрицы A.

Вычисление экспоненты матрицы. Вычисление экспоненты квадратной матрицы A можно проводить, используя *нормальную жорданову форму матрицы A*, не прибегая к представлению ее в виде ряда.

Приведем несколько теорем из курса алгебры.

Теорема 18.1. *Для всякой матрицы существует комплексная жорданова форма. Для действительной матрицы существует действительная жорданова форма тогда и только тогда, когда все ее собственные значения действительные.*

Теорема 18.2. *Число клеток Жордана в жордановой форме матрицы совпадает с максимальным числом линейно независимых собственных векторов этой матрицы.*

Теорема 18.3. *Пусть* v *– собственное значение (характеристическое число) матрицы A размерности n. Если r – ранг матрицы* $A-vE$, *то имеется* $n-r$ *линейно независимых собственных векторов матрицы A, соответствующих собственному значению* v.

Для матрицы A порядка $n \le 3$ теорема 18.3 дает возможность определить жорданову форму матрицы с точностью до порядка следования клеток Жордана. Для матрицы A порядка $n > 3$ количество клеток Жордана $g_h(v)$ размерности h, соответствующих действительному собственному значению v, определяется по формуле

$$g_h(v)=\operatorname{rank}(A-vE)^{h-1}-2\operatorname{rank}(A-vE)^h+\operatorname{rank}(A-vE)^{h+1}. \tag{18.5}$$

Теорема 18.4. *Если* $b_1, b_2, \ldots, b_k$ *– линейно независимые собственные векторы матрицы A, соответствующие собственному значению* v, *то любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов также является собственным вектором матрицы A с собственным значением* v.

Пусть матрица A представима в виде $A=SJS^{-1}$, где S – *трансформирующая матрица*; J – нормальная жорданова форма матрицы A.

Теорема 18.5. *Столбцами матрицы S являются собственные и присоединенные векторы матрицы A, причем расстановка собственных и присоединенных векторов в матрице S зависит от порядка следования клеток в матрице Жордана J.*

Собственный вектор $a_0 = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$, соответствующий собственному значению ν кратности d, определяется из системы $(A - \nu E)a_0 = 0$, а каждый из *присоединенных векторов* a_l – из системы $(A - \nu E)a_l = a_{l-1}$, $1 \le l \le k-1$, где k – размерность соответствующей клетки Жордана. Например, если матрица Жордана имеет вид $J = \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \end{bmatrix}$, т.е. имеет три клетки размерностей 1, 1, 2 соответственно, то трансформирующая матрица $S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix}$, где $a_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T$, $a_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^T$ – линейно независимые собственные векторы матрицы A, отвечающие собственному значению ν_1; $a_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)^T$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению ν_2; $a_4 = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)^T$ – ему присоединенный. Поскольку $A = SJS^{-1}$, то $e^{At} = e^{SJS^{-1}t} = Se^{Jt}S^{-1}$.

Для $J = \mathrm{diag}(J_{l_1}(\nu_1), \dots, J_{l_r}(\nu_r))$, где $J_{l_k}(\nu_k) = \begin{bmatrix} \nu_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \nu_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \nu_k \end{bmatrix}$, $k = \overline{1, r}$, есть клетка Жордана размерности l_k, соответствующая собственному значению ν_k, $e^{Jt} = \mathrm{diag}(\exp J_{l_1}(\nu_1)t$, $\dots$, $\exp J_{l_r}(\nu_r)t)$, причем

$$\exp(J_{l_k}(\nu_k)t) = \exp \nu_k t \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{l_k-1}/(l_k-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{l_k-2}/(l_k-2)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (18.6)$$

Приведение матрицы A к нормальной жордановой форме J используется при решении стационарных линейных векторных уравнений. Общее решение однородного стационарного линейного векторного уравнения имеет вид

$$x(t) = \Phi(t)C = e^{At}C = Se^{Jt}S^{-1}C, \qquad (18.7)$$

а решение задачи Коши

$$Dx = Ax, \quad x\big|_{t=s} = \xi - x(t) = Se^{J(t-s)}S^{-1}\xi. \qquad (18.8)$$

Задача 18.3. Найти общее решение уравнения $Dx = Ax$.

Алгоритм решения.

- Составить характеристическое уравнение: $\det(A - \nu E) = 0$.
- Найти собственные значения матрицы A.
- Определить число линейно независимых собственных векторов матрицы A (теорема 18.3).
- Определить число клеток Жордана в жордановой форме матрицы (теорема 18.2).
- Установить размерность клеток Жордана по формуле (18.5):

$$g_h(\nu) = \operatorname{rank}(A - \nu E)^{h-1} - 2\operatorname{rank}(A - \nu E)^h + \operatorname{rank}(A - \nu E)^{h+1}.$$

- Записать матрицу Жордана J.
- Найти собственные векторы a_{0k}, соответствующие собственным значениям ν_k (теорема 18.4), которые определяются из системы $(A - \nu_k E)a_{0k} = 0$.
- Найти присоединенные векторы, если это необходимо, к собственному вектору a_{0k} с собственным числом ν_k, решив неоднородные алгебраические системы $\left(A - \nu_k E\right)a_{lk} = a_{l-1k}$, $1 \le l \le \rho - 1$, где ρ – размерность соответствующей клетки Жордана.
- Выписать матрицу S (теорема 18.5).
- Найти обратную матрицу S^{-1}.
- Построить матрицу e^{Jt}, используя формулу (18.6).
- Найти $e^{At} = S e^{Jt} S^{-1}$.
- Выписать общее решение $x(t)$ по формуле (18.7).

Задание 18.3.1. Найти общее решение уравнения

$$Dx = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. При выполнении данного задания будем использовать следующие функции системы MathCad:

- $\operatorname{augment}(A,B)$ – формирует матрицу, в первых столбцах которой расположена матрица A, а в последних – матрица B (матрицы A и B должны иметь одинаковое число строк);
- $\operatorname{identity}(n)$ – создание единичной матрицы порядка n;
- $\operatorname{rank}(A)$ – вычисление ранга матрицы A;
- $\operatorname{rref}(A)$ – приведение матрицы к ступенчатому виду с единичным базисным минором (выполняются элементарные операции со строками матрицы, аналогичные преобразованиям в прямом и обратном ходе метода Гаусса);
- $\operatorname{lsolve}(A,b)$ – решение системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E := \operatorname{identity}(3) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ORIGIN} \equiv 1$$

$$|A - v\cdot E| \text{ factor } \rightarrow -(v-1)^3 \qquad v := 1 \qquad \operatorname{rank}(A - E) \rightarrow 2 \qquad J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W(t) := \exp(J\cdot t)\ \begin{vmatrix}\text{factor}\\ \text{simplify}\end{vmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^t & t\cdot e^t & \frac{t^2\cdot e^t}{2} \\ 0 & e^t & t\cdot e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \qquad Y := A - v\cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rref}(Y) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(Y, a0) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(Y, a1) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$S := \mathrm{augment}(a0, a1, a2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \qquad S1 := S^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверка: $A - S\cdot J\cdot S1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$eA(t) := S\cdot W(t)\cdot S1 \rightarrow \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 3\cdot t^2\cdot e^t - t\cdot e^t & e^t & 2\cdot t\cdot e^t \\ 3\cdot t\cdot e^t & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

$$eA(t)\cdot \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c1\cdot e^t \\ c2\cdot e^t - c1\cdot\left(t\cdot e^t - 3\cdot t^2\cdot e^t\right) + 2\cdot c3\cdot t\cdot e^t \\ c3\cdot e^t + 3\cdot c1\cdot t\cdot e^t \end{bmatrix}$$

$$x(t, c1, c2, c3) := \begin{bmatrix} c1\cdot e^t \\ c2\cdot e^t - c1\cdot\left(t\cdot e^t - 3\cdot t^2\cdot e^t\right) + 2\cdot c3\cdot t\cdot e^t \\ c3\cdot e^t + 3\cdot c1\cdot t\cdot e^t \end{bmatrix}$$

Задание 18.3.2. Найти общее решение уравнения $Dx = Ax$, если

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. При выполнении данного задания будем использовать дополнительно следующие функции системы MathCad:

- eigenvals (A) – вычисление собственных значений квадратной матрицы A;
- eigenvecs (A) – вычисление собственных векторов квадратной матрицы A; значением функции является матрица, столбцы которой есть собственные векторы матрицы A, причем порядок следования векторов отвечает порядку следования собственных значений, вычисленных функцией eigenvals(A).

$$\mathrm{A} := \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E} := \mathrm{identity}(3) \qquad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$\mathrm{v} := \mathrm{eigenvals}(\mathrm{A}) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}\left(\mathrm{A} - \mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{E}\right) \to 1 \qquad 3 - 1 = 2$$

$$\mathrm{J} := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{W}(t) := \exp(\mathrm{J} \cdot t) \;\left|\begin{matrix} \text{factor} \\ \text{simplify} \end{matrix}\right. \to \begin{pmatrix} e^{-2 \cdot t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S} := \mathrm{eigenvecs}(\mathrm{A}) \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{S1} := \mathrm{S}^{-1} \to \begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{eA}(t) := \mathrm{S} \cdot \mathrm{W}(t) \cdot \mathrm{S1} \to \begin{pmatrix} 4 \cdot e^{t} - 3 \cdot e^{-2 \cdot t} & e^{-2 \cdot t} - e^{t} & 3 \cdot e^{-2 \cdot t} - 3 \cdot e^{t} \\ 6 \cdot e^{-2 \cdot t} - 6 \cdot e^{t} & 3 \cdot e^{t} - 2 \cdot e^{-2 \cdot t} & 6 \cdot e^{t} - 6 \cdot e^{-2 \cdot t} \\ 6 \cdot e^{t} - 6 \cdot e^{-2 \cdot t} & 2 \cdot e^{-2 \cdot t} - 2 \cdot e^{t} & 6 \cdot e^{-2 \cdot t} - 5 \cdot e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{eA}(t) \cdot \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} c2 \cdot \left(e^{-2 \cdot t} - e^{t}\right) + c1 \cdot \left(4 \cdot e^{t} - 3 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) - c3 \cdot \left(3 \cdot e^{t} - 3 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) \\ c2 \cdot \left(3 \cdot e^{t} - 2 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) - c1 \cdot \left(6 \cdot e^{t} - 6 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) + c3 \cdot \left(6 \cdot e^{t} - 6 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) \\ c1 \cdot \left(6 \cdot e^{t} - 6 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) - c2 \cdot \left(2 \cdot e^{t} - 2 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) - c3 \cdot \left(5 \cdot e^{t} - 6 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) \end{bmatrix}$$

$$x(t) := \begin{bmatrix} c2 \cdot \left(e^{-2 \cdot t} - e^{t}\right) + c1 \cdot \left(4 \cdot e^{t} - 3 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) - c3 \cdot \left(3 \cdot e^{t} - 3 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) \\ c2 \cdot \left(3 \cdot e^{t} - 2 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) - c1 \cdot \left(6 \cdot e^{t} - 6 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) + c3 \cdot \left(6 \cdot e^{t} - 6 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) \\ c1 \cdot \left(6 \cdot e^{t} - 6 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) - c2 \cdot \left(2 \cdot e^{t} - 2 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) - c3 \cdot \left(5 \cdot e^{t} - 6 \cdot e^{-2 \cdot t}\right) \end{bmatrix}$$

Задание 18.3.3. Найти общее решение уравнения

$$Dx = Ax,\ \ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$\mathrm{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E} := \mathrm{identity}(4) \qquad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$\mathrm{v} := \mathrm{eigenvals}(\mathrm{A}) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(\mathrm{A} - 2\mathrm{E}) \rightarrow 2 \qquad 4 - 2 = 2$$

$$\mathrm{g}(\mathrm{h}, \mathrm{v}) := \mathrm{rank}\left[(\mathrm{A} - \mathrm{v}\,\mathrm{E})^{(\mathrm{h}-1)}\right] - 2\cdot\mathrm{rank}\left[(\mathrm{A} - \mathrm{v}\,\mathrm{E})^{(\mathrm{h})}\right] + \mathrm{rank}\left[(\mathrm{A} - \mathrm{v}\,\mathrm{E})^{(\mathrm{h}+1)}\right]$$

$$\mathrm{g}\left(1, \mathrm{v}_1\right) \rightarrow 0 \qquad \mathrm{g}\left(2, \mathrm{v}_1\right) \rightarrow 2 \qquad \mathrm{g}\left(3, \mathrm{v}_1\right) \rightarrow 0$$

$$\mathrm{J} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{W}(\mathrm{t}) := \exp(\mathrm{J}\cdot\mathrm{t}) \ \Big|\begin{matrix}\text{factor} \\ \text{simplify}\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{2\cdot t} & t\cdot e^{2\cdot t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\cdot t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\cdot t} & t\cdot e^{2\cdot t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\cdot t} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{a0} := \mathrm{eigenvecs}(\mathrm{A}) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Y} := \mathrm{A} - \mathrm{v}_1\cdot\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}\left(\mathrm{Y}, \mathrm{a0}^{\langle 1\rangle}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{b1} := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}\left(\mathrm{Y}, \mathrm{a0}^{\langle 2\rangle}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{b2} := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S := \text{augment}\left(a0^{\langle 1\rangle}, b1, a0^{\langle 2\rangle}, b2\right) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{4}{3} & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S1 := S^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$ Проверка: $$A - S \cdot J \cdot S1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$eA(t) := S \cdot W(t) \cdot S1 \rightarrow \begin{pmatrix} e^{2\cdot t} + t \cdot e^{2\cdot t} & -t \cdot e^{2\cdot t} & 0 & 0 \\ t \cdot e^{2\cdot t} & e^{2\cdot t} - t \cdot e^{2\cdot t} & 0 & 0 \\ 3 \cdot t \cdot e^{2\cdot t} & 0 & e^{2\cdot t} + 3 \cdot t \cdot e^{2\cdot t} & -3 \cdot t \cdot e^{2\cdot t} \\ 4 \cdot t \cdot e^{2\cdot t} & -t \cdot e^{2\cdot t} & 3 \cdot t \cdot e^{2\cdot t} & e^{2\cdot t} - 3 \cdot t \cdot e^{2\cdot t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) := eA(t) \cdot \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \end{pmatrix} \text{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} e^{2\cdot t} \cdot (C1 + C1 \cdot t - C2 \cdot t) \\ e^{2\cdot t} \cdot (C2 + C1 \cdot t - C2 \cdot t) \\ e^{2\cdot t} \cdot (C3 + 3 \cdot C1 \cdot t + 3 \cdot C3 \cdot t - 3 \cdot C4 \cdot t) \\ e^{2\cdot t} \cdot (C4 + 4 \cdot C1 \cdot t - C2 \cdot t + 3 \cdot C3 \cdot t - 3 \cdot C4 \cdot t) \end{bmatrix}$$

Задание 18.3.4. Построить общее решение уравнения $Dx = Ax$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е.

$$\text{ORIGIN} \equiv 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E := \text{identity}(2) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v := \text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix}$$

$$J := \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \qquad S := \text{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W(t) := \exp(J \cdot t) \;\Big|\begin{matrix}\text{factor}\\ \text{simplify}\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-t\cdot i} & 0 \\ 0 & e^{t\cdot i} \end{pmatrix}$$

$$S1 := S^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}\right)\cdot i & \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2}\right)\cdot i & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad A - S \cdot J \cdot S1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(t) := S \cdot W(t) \cdot S1 \text{ rectangular } \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$x(t, c1, c2) := H(t) \cdot \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c1 \cdot \cos(t) + c2 \cdot \sin(t) \\ c2 \cdot \cos(t) - c1 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Задание 18.3.5. Построить общее решение уравнения $Dx = Ax$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad E := \text{identity}(3) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ORIGIN} \equiv 1$$

$$v := \text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 - i \\ 3 + i \\ 2 \end{pmatrix} \qquad J := \begin{pmatrix} v_3 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$S := \text{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)\cdot i & \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot i \\ 0 & \frac{1}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)\cdot i & \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\cdot i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S1 := S^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot i & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot i & \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)\cdot i \\ -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)\cdot i & \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)\cdot i & \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot i \end{bmatrix}$$

$$A - S\cdot J\cdot S1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad W(t) := e^{J\cdot t} \rightarrow \begin{bmatrix} e^{2\cdot t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\cdot(3-i)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\cdot(3+i)} \end{bmatrix}$$

$$eA(t) := S\cdot W(t)\cdot S1 \qquad eA(t)\ \text{simplify} \rightarrow \left(\begin{matrix} \frac{3\cdot e^{2\cdot}}{2} \\ \\ \frac{3\cdot e^{2\cdot t}}{2} \end{matrix} \right.$$

$$\left(\begin{matrix} \frac{3\cdot e^{2\cdot t}}{2} - \frac{e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} + \frac{e^{3\cdot t}\cdot\sin(t)}{2} & \frac{e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} - \frac{e^{2\cdot t}}{2} + \frac{e^{3\cdot t}\cdot\sin(t)}{2} & \frac{e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} - \frac{e^{2\cdot t}}{2} - \frac{e^{3\cdot t}\cdot \mathrm{si}}{2} \\ e^{3\cdot t}\cdot\sin(t) & e^{3\cdot t}\cdot\cos(t) & -e^{3\cdot t}\cdot\sin(t) \\ \frac{3\cdot e^{2\cdot t}}{2} - \frac{3\cdot e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} + \frac{e^{3\cdot t}\cdot\sin(t)}{2} & \frac{e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} - \frac{e^{2\cdot t}}{2} + \frac{3\cdot e^{3\cdot t}\cdot\sin(t)}{2} & \frac{3\cdot e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} - \frac{e^{2\cdot t}}{2} - \frac{e^{3\cdot t}\cdot}{2} \end{matrix} \right.$$

$$x(t) := eA(t)\cdot\begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix}$$

Известно, что базисную матрицу можно находить с использованием свойств корневых подпространств линейного оператора, матрица которого в каноническом базисе совпадает с матрицей A. В частности, если собственное значение v квадратной матрицы A размерности n является n-кратным, то

$$e^{At} = e^{vt}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(A - vE)^m\, t^m}{m!}, \qquad (18.9)$$

где E – единичная матрица.

Задача 18.4. Проинтегрировать уравнение

$$Dx = Ax,$$

где квадратная матрица A размерности n имеет собственное значение v кратности n.

Алгоритм решения.

- Составить характеристический многочлен $\det(A - vE) = 0$ и найти собственное значение v матрицы A.
- Найти степени матриц $(A - vE)^k$, $0 \le k \le n-1$.
- Вычислить e^{At}, используя формулу (18.9).
- Выписать общее решение $x(t)$ по формуле $x(t) = e^{At}C$, где C – произвольный n-мерный вектор.

Задание 18.4.1. Проинтегрировать уравнение

$$Dx = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E := \text{identity}(3) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ORIGIN} \equiv 0$$

$$|A - v \cdot E| \ \text{factor} \ \to -(v-1)^3 \qquad v := 1$$

$$AE_0 := (A - v \cdot E)^0 \qquad AE_0 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AE_1 := (A - v \cdot E)^1 \qquad AE_1 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AE_2 := (A - v \cdot E)^2 \qquad AE_2 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$eA(t) := e^t \cdot \sum_{m=0}^{2} \left(\frac{AE_m \cdot t^m}{m!} \right) \to \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ -e^t \cdot \left(t - 3 \cdot t^2\right) & e^t & 2 \cdot t \cdot e^t \\ 3 \cdot t \cdot e^t & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$x(t, c1, c2, c3) := eA(t) \cdot \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} c1 \cdot e^t \\ c2 \cdot e^t - c1 \cdot e^t \cdot \left(t - 3 \cdot t^2\right) + 2 \cdot c3 \cdot t \cdot e^t \\ c3 \cdot e^t + 3 \cdot c1 \cdot t \cdot e^t \end{bmatrix}$$

З а м е ч а н и е. Данный пример был решен в задании 18.3.1 другим способом.

Задача 18.5. Найти решение задачи Коши

$$Dx = Ax, \ x\big|_{t=s} = \xi.$$

А л г о р и т м   р е ш е н и я.

- Вычислить e^{At} .
- Записать решение задачи Коши по формуле (18.8).

Задание 18.5.1. Найти решение задачи Коши $Dx = Ax,\ x\big|_{t=s} = \xi,$ где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix},\ s = 1,\ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad E := \mathrm{identity}(4) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$v := \mathrm{eigenvals}(A) \to \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 \\ 2 \\ 2 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A - 2E) \to 3 \qquad 4 - \mathrm{rank}(A - 2E) = 1$$

$$g(v,h) := \mathrm{rank}\left[(A - v\,E)^{(h-1)}\right] - 2\cdot\mathrm{rank}\left[(A - v\,E)^{(h)}\right] + \mathrm{rank}\left[(A - v\,E)^{(h+1)}\right]$$

$$g\left(1, v_2\right) \to 0 \qquad g\left(2, v_2\right) \to 1$$

$$J := \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad W(t) := \exp(J\cdot t) \ \Big|\begin{matrix}\text{factor}\\ \text{simplify}\end{matrix} \to \begin{bmatrix} e^{t\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\cdot t} & t\cdot e^{2\cdot t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\cdot t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)} \end{bmatrix}$$

$$a0 := \mathrm{eigenvecs}(A) \to \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y := A - v_2\cdot E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}\left(Y, a0^{\langle 2\rangle}\right) \to \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S := \mathrm{augment}\left(a0^{\langle 1\rangle}, a0^{\langle 2\rangle}, b1, a0^{\langle 3\rangle}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 & \frac{4}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S1 := S^{-1}\ \mathrm{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Проверка: $A - S\cdot J\cdot S1\ \mathrm{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$eA(t) := S\cdot W(t)\cdot S1$$

$$x(t) := eA(t-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5\cdot e^{(t-1)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)}}{3} + \frac{5\cdot e^{-(t-1)\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}}{3} - \frac{7\cdot e^{2\cdot t-2}}{3} + e^{2\cdot t-2}\cdot(t-1) \\ \frac{5\cdot e^{(t-1)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)}}{3} + \frac{5\cdot e^{-(t-1)\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}}{3} - \frac{10\cdot e^{2\cdot t-2}}{3} + e^{2\cdot t-2}\cdot(t-1) \\ 2\cdot e^{2\cdot t-2} - e^{2\cdot t-2}\cdot(t-1) + \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot e^{(t-1)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)}}{3} - \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot e^{-(t-1)\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}}{3} \\ \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot e^{(t-1)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)}}{3} - \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot e^{-(t-1)\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}}{3} \end{bmatrix}$$

Если среди собственных значений матрицы A имеются комплексные $\nu = \alpha + i\beta,\ \beta \neq 0,$ то жорданова форма матрицы A существует только над полем комплексных чисел и матрица S в этом случае – комплексная. Совокупность частных решений $x_k(t) = (x_{1k}(t), \ldots, x_{nk}(t))^T$, образующих базис пространства решений уравнения $Dx = Ax,\ x \in \mathbb{R}_n,$ представляет собой множество комплексно-значных функций. Поскольку $\mathrm{Re}\, x_k(t)$ и $\mathrm{Im}\, x_k(t)$ комплекснозначного решения $x_k(t)$ также являются линейно независимыми решениями, отвечающими комплексно-сопряженным собственным значениям матрицы A, то и в этом случае строится базисная матрица над полем $\mathbb{R}$.

Задача 18.6. Построить общее решение уравнения $Dx = Ax$ при $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е. Поскольку $\det(A - vE) = v^2 + 1$, то $v_{1,2} = \pm i -$ собственные значения матрицы A. Следовательно, $J = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

Трансформирующая матрица состоит из собственных векторов матрицы A, т.е. $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$.

Базисная матрица

$$\Phi(t) = Se^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + i\sin t & \cos t - i\sin t \\ -\sin t + i\cos t & -\sin t - i\cos t \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что действительная и мнимая части решений, образующих базис, также являются решениями, в качестве базисной матрицы возьмем матрицу $\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$, так как $\det \tilde{\Phi}(t) = 1$.

Общее решение уравнения запишется в виде

$$x(t) = \tilde{\Phi}(t)\, C = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{bmatrix},$$

где C – произвольный постоянный действительный вектор.

Второй способ построения действительного решения дает формула $x(t) = Se^{Jt}S^{-1}C$. Так как $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$, то

$$x(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

Способ построения действительного общего решения системы при наличии комплексных собственных значений матрицы, не требующий оперирования с комплексными матрицами, состоит в том, что указанное решение находится по формуле

$$x(t) = \tilde{S} \exp(\tilde{J}t)\, C,$$

где $\tilde{S}$ – действительная матрица, трансформирующая A к $\tilde{J}$; $\tilde{J}$ – действительная матрица специального вида; $C \in \mathbb{R}^n$. В этом случае $A = \tilde{S}\tilde{J}\tilde{S}^{-1}$ и $e^{At} = \tilde{S} e^{\tilde{J}t} \tilde{S}^{-1}$.

Если $v = \alpha + i\beta$, $\bar{v} = \alpha - i\beta$ – собственные значения матрицы A, которым в нормальной жордановой форме матрицы A соответствуют две клетки Жордана $J_h(v) = \begin{pmatrix} v & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & v \end{pmatrix}$ и

$$J_h(\bar{v}) = \begin{pmatrix} \bar{v} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{v} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{v} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{v} \end{pmatrix} \qquad (18.10)$$

размерности h, то в матрице $\tilde{J}$ им соответствует одна клетка размерности $2h$ вида

$$\tilde{J}_{2h} = \begin{bmatrix} J_h(\alpha) & -\beta E_h \\ \beta E_h & J_h(\alpha) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta \\ - & - & - & \cdots & - & - & - & - & - & \cdots & - & - \\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{array}\right), \tag{18.11}$$

где $\alpha = \mathrm{Re}(v)$, $\beta = \mathrm{Im}(v)$; E_h – единичная матрица порядка h. С помощью выражения для экспоненты матрицы J_{2h}, где $J_{2h} = \begin{bmatrix} J_h(v) & O_h \\ O_h & J_h(\bar{v}) \end{bmatrix}$ (O_h – нулевая матрица порядка h), экспонента матрицы $\tilde{J}_{2h}$ определяется следующим образом:

$$e^{\tilde{J}_{2h} t} = \begin{bmatrix} e^{J_h(\alpha)t} \cos \beta t & -e^{J_h(\alpha)t} \sin \beta t \\ e^{J_h(\alpha)t} \sin \beta t & e^{J_h(\alpha)t} \cos \beta t \end{bmatrix}, \tag{18.12}$$

где

$$e^{J_h(\alpha)t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2} & \cdots & \dfrac{t^{h-1}}{(h-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{h-2}}{(h-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{18.13}$$

Блоки, из которых состоит матрица $\tilde{J}$, строятся отдельно для действительных и комплексных собственных значений матрицы A. Действительному собственному значению v матрицы A в $\tilde{J}$ соответствует $n - \mathrm{rank}(A - vE)$ жордановых блоков, причем количество $g_h(\nu)$ блоков размерности h с собственным значением ν определяется по формуле (18.5).

Двойной блок строится по одному из пары комплексно-сопряженных собственных значений v матрицы A; число этих блоков равно $n - \mathrm{rank}(A - vE)$. Число блоков порядка $2h$ также определяется по формуле (18.5).

Задача 18.7. Для квадратной матрицы A размерности n с действительными коэффициентами при наличии комплексно-сопряженных собственных значений построить матрицы $\tilde{J}$ и $e^{\tilde{J}t}$.

А л г о р и т м р е ш е н и я.

• Составить характеристическое уравнение $\det(A - vE) = 0$ и найти его корни. Пусть это $v_1 = \lambda_1 + i\mu_1$, $\overline{v}_1 = \lambda_1 - i\mu_1$, d_1; $v_l = \lambda_l + i\mu_l$, $\overline{v}_l = \lambda_l - i\mu_l$, d_l; $v_{2l+1} \in \mathbb{R}$, d_{2l+1}, $v_m \in \mathbb{R}$, d_m.

• Для каждого собственного значения v_k определить число линейно независимых собственных векторов матрицы A (теорема 18.3).

• Для каждого собственного значения v_k определить количество клеток Жордана размерности h по формуле (18.5).

Задание 18.7.1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ построить матрицы $\widetilde{J}$ и $e^{\widetilde{J}t}$.

Р е ш е н и е.

$$\text{ORIGIN} \equiv 1 \qquad \text{A} := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{v} := \text{eigenvals}(\text{A}) \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2-\text{i} \\ -2+\text{i} \end{pmatrix}$$

Поскольку все собственные значения различны, то матрица $J = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-i \end{pmatrix}$, где $J_1(v_3) = (-2+i)$, $J_1(\overline{v_3}) = (-2-i)$. Следовательно (см. (18.11)), $\widetilde{J}_{2\cdot 1} = \begin{pmatrix} J_1(-2) & -1\cdot E_1 \\ 1\cdot E & J_1(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Таким образом, $\widetilde{J} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

а исходя из формулы (18.13) $e^{\widetilde{J}t} = \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t}\cos t & -e^{-2t}\sin t \\ 0 & 0 & e^{-2t}\sin t & e^{-2t}\cos t \end{pmatrix}$.

Задание 18.7.2. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ построить матрицы $\widetilde{J}$ и $e^{\widetilde{J}t}$.

Р е ш е н и е.

$$\text{ORIGIN} \equiv 1$$

$$\text{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{E} := \text{identity}(4) \qquad \text{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v := \text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} -i \\ -i \\ i \\ i \end{pmatrix} \qquad \text{rank}(A - iE) \rightarrow 3$$

Поскольку $v_1 = i,\ d_1 = 2,\ \ v_2 = -i,\ d_2 = 2$ и $\text{rank}(A - v_1 E) = 3$, то собственному значению v_1 (см. теорему 18.3) соответствует один собственный вектор, а следовательно, и v_2 – тоже один собственный вектор. В матрице Жордана будет две клетки размерности 2: $J_2(v_1) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ \ J_2(\bar{v}_1) = \ = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Следовательно, $\tilde{J}_{2\cdot 2} = \begin{bmatrix} J_2(0) & -1E_2 \\ 1E_2 & J_2(0) \end{bmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{J}$. А так как $e^{J_2(0)t} = e^{0t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (см. (18.13)), то (см. (18.12)) $e^{\tilde{J}t} = \begin{pmatrix} \cos t & t\cos t & -\sin t & -t\sin t \\ 0 & \cos t & 0 & -\sin t \\ \sin t & t\sin t & \cos t & t\cos t \\ 0 & \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}$.

Задача решена.

Матрицу $\tilde{S}$, трансформирующую матрицу A к специальной матрице $\tilde{J}$, можно строить одним из следующих способов.

I. Исходя из равенства $A\tilde{S} = \tilde{S}\tilde{J}$.

II. Если матрица $\tilde{S}$ трансформирует матрицу A к матрице $\tilde{J}$, то в качестве столбцов матрицы $\tilde{S}$ можно брать собственные и присоединенные векторы, соответствующие действительным собственным значениям матрицы A, и действительные и мнимые части собственных и присоединенных векторов, соответствующих одному из пары комплексно-сопряженных собственных значений матрицы A.

Задача 18.8. Используя экспонентное представление решения, построить общее решение уравнения $Dx = Ax$.

Алгоритм решения.

- Составить характеристическое уравнение $\det(A - vE) = 0$ и найти его корни.
- Если все собственные значения действительные, то $x(t) = e^{At}C = Se^{Jt}S^{-1}C$ (построение матриц $J,\ S,\ e^{Jt}$ см. в задаче 18.3).
- Если среди собственных значений есть комплексно-сопряженные, то по алгоритму задачи 18.4 построить матрицы $\tilde{J},\ e^{\tilde{J}t}$, матрицу $\tilde{S}$, используя один из способов. Записать решение $x(t) = e^{At}C = \tilde{S}e^{\tilde{J}t}\tilde{S}^{-1}C$.

Задание 18.8.1. Используя экспонентное представление решения, проинтегрировать уравнение $Dx = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{ORIGIN} \equiv 1$$

$$v := \mathrm{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 3-i \\ 3+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$J := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3+i & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \end{pmatrix} \qquad Jw := \begin{pmatrix} v_3 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Re}(v_2) & -\mathrm{Im}(v_2) \\ 0 & \mathrm{Im}(v_2) & \mathrm{Re}(v_2) \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$eJw(t) := e^{Jw\cdot t} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} e^{2\cdot t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3\cdot t}\cdot\cos(t) & -e^{3\cdot t}\cdot\sin(t) \\ 0 & e^{3\cdot t}\cdot\sin(t) & e^{3\cdot t}\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$S := \mathrm{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)\cdot i & \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot i \\ 0 & \frac{1}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)\cdot i & \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\cdot i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad I1 := \mathrm{eigenvec}(A, v_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I2 := \mathrm{Re}\left(\mathrm{eigenvec}(A, v_1)\right) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad I3 := \mathrm{Im}\left(\mathrm{eigenvec}(A, v_1)\right) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Sw := \mathrm{augment}(I1, I2, I3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Sw1 := Sw^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad eA(t) := Sw\cdot eJw(t)\cdot Sw1$$

$$eA(t) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3\cdot e^{2\cdot t}}{2} - \frac{e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} + \frac{e^{3\cdot t}\cdot\sin(t)}{2} & \frac{e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} - \frac{e^{2\cdot t}}{2} + \frac{e^{3\cdot t}\cdot\sin(t)}{2} & \frac{e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} - \frac{e^{2\cdot t}}{2} - \cdots \\ e^{3\cdot t}\cdot\sin(t) & e^{3\cdot t}\cdot\cos(t) & -e^{3\cdot t}\cdot\sin(t) \\ \frac{3\cdot e^{2\cdot t}}{2} - \frac{3\cdot e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} + \frac{e^{3\cdot t}\cdot\sin(t)}{2} & \frac{e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} - \frac{e^{2\cdot t}}{2} + \frac{3\cdot e^{3\cdot t}\cdot\sin(t)}{2} & \frac{3\cdot e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} - \frac{e^{2\cdot t}}{2} - \cdots \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{pmatrix} \qquad x(t) := eA(t)\cdot C$$

$$x(t)\ \text{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{3\cdot C1\cdot e^{2\cdot t}}{2} - \dfrac{C2\cdot e^{2\cdot t}}{2} - \dfrac{C3\cdot e^{2\cdot t}}{2} - \dfrac{C1\cdot e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} + \dfrac{C2\cdot e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} + \dfrac{C3\cdot e^{3\cdot t}\cdot\cos(t}{2} \\ e^{3\cdot t}\cdot(C2\cdot\cos(t) + C1\cdot\sin(t) - C3\cdot \mathrm{si} \\ \dfrac{3\cdot C1\cdot e^{2\cdot t}}{2} - \dfrac{C2\cdot e^{2\cdot t}}{2} - \dfrac{C3\cdot e^{2\cdot t}}{2} - \dfrac{3\cdot C1\cdot e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} + \dfrac{C2\cdot e^{3\cdot t}\cdot\cos(t)}{2} + \dfrac{3\cdot C3\cdot e^{3\cdot t}\cdot\cos(}{2} \end{bmatrix}$$

Задание 18.8.2. Используя экспонентное представление решения, построить фундаментальную матрицу уравнения $Dx = Ax$, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad E := \mathrm{identity}(7) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$\mathrm{rank}(A - 2E) \rightarrow 5 \qquad 7 - \mathrm{rank}(A - 2E) = 2 \qquad v := \mathrm{eigenvals}(A)$$

$$g(v,h) := \mathrm{rank}\left[(A - v\,E)^{(h-1)}\right] - 2\cdot\mathrm{rank}\left[(A - v\,E)^{(h)}\right] + \mathrm{rank}\left[(A - v\,E)^{(h+1)}\right]$$

$$g(v_1, 1) \rightarrow 1 \qquad g(v_1, 2) \rightarrow 1 \qquad v \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -i \\ -i \\ i \\ i \end{pmatrix}$$

$$7 - \mathrm{rank}(A - v_4 E) \rightarrow 1 \qquad 7 - \mathrm{rank}(A - v_6 E) \rightarrow 1$$

$$a0 := \mathrm{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & -1+i & -1-i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y := A - v_1\cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Y\cdot\begin{pmatrix} b1\\ b2\\ b3\\ b4\\ b5\\ b6\\ b7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -b3 - b4 - b5 - b6 - b7\\ b3 + b4 + b5 + b6 + b7\\ 2\cdot b4 + b5\\ 2\cdot b5 - b4\\ -b4 - 3\cdot b5 - b6 - b7\\ 2\cdot b7 - b6\\ -b6 - 3\cdot b7 \end{pmatrix}$$

Очевидно, система $Yb = a$ будет совместна, если взять собственный вектор (1, -1, 0, 0, 0, 0,0).

$q := -1 \qquad p := -q \qquad a1 := q\cdot a0^{\langle 1\rangle} + p\cdot a0^{\langle 2\rangle}$

$$a1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(\mathrm{augment}(Y, a1)) \rightarrow 5$$

Given

$$-b3 - b4 - b5 - b6 - b7 = q$$

$$b3 + b4 + b5 + b6 + b7 = p$$

$$2\cdot b4 + b5 = 0$$

$$2\cdot b5 - b4 = 0$$

$$-b4 - 3\cdot b5 - b6 - b7 = 0$$

$$2\cdot b7 - b6 = 0$$

$$-b6 - 3\cdot b7 = 0$$

$$a1pr := \mathrm{Find}(b1, b2, b3, b4, b5, b6, b7) \rightarrow \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

$Y := A - v_4\cdot E$

$$\mathrm{lsolve}\left(Y, a0^{\langle 3\rangle}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{22}{25} - \left(\frac{4}{25}\right)\cdot i\\ \frac{22}{25} + \frac{4}{25}\cdot i\\ -\frac{3}{5} - \left(\frac{6}{5}\right)\cdot i\\ i\\ 0\\ -2i\\ -1 + i \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -i\\ -1 + i\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \qquad a03pr := \begin{bmatrix} -\frac{22}{25} - \left(\frac{4}{25}\right)\cdot i\\ \frac{22}{25} + \frac{4}{25}\cdot i\\ -\frac{3}{5} - \left(\frac{6}{5}\right)\cdot i\\ i\\ 0\\ -2i\\ -1 + i \end{bmatrix}$$

$Y := A - v_6\cdot E$

$$\mathrm{lsolve}\left(Y, a0^{\langle 4\rangle}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{22}{25}+\frac{4}{25}\cdot i \\ \frac{22}{25}-\left(\frac{4}{25}\right)\cdot i \\ -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\cdot i \\ -i \\ 0 \\ 2i \\ -1-i \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ -1-i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a04pr := \begin{bmatrix} -\frac{22}{25}+\frac{4}{25}\cdot i \\ \frac{22}{25}-\left(\frac{4}{25}\right)\cdot i \\ -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\cdot i \\ -i \\ 0 \\ 2i \\ -1-i \end{bmatrix}$$

$$S := \mathrm{augment}\left(a0^{\langle 1\rangle}, a1, a1pr, a0^{\langle 3\rangle}, a03pr, a0^{\langle 4\rangle}, a04pr\right)$$

$$S \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{22}{25}-\left(\frac{4}{25}\right)\cdot i & 0 & -\frac{22}{25}+\frac{4}{25}\cdot i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{22}{25}+\frac{4}{25}\cdot i & 0 & \frac{22}{25}-\left(\frac{4}{25}\right)\cdot i \\ 0 & 0 & 1 & -i & -\frac{3}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)\cdot i & i & -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\cdot i \\ 0 & 0 & 0 & -1+i & i & -1-i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2i & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+i & 0 & -1-i \end{bmatrix}$$

$$S1 := S^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{25} & \frac{22}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)\cdot i & \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)\cdot i & -\left(\frac{1}{4}\right)\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot i & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)\cdot i & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i & \left(\frac{1}{4}\right)\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)\cdot i & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$J := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Проверка: $A - S \cdot J \cdot S1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$Jw := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Sw := \mathrm{augment}\left(a0^{\langle 1 \rangle}, a1, a1pr, \mathrm{Re}\left(a0^{\langle 3 \rangle}\right), \mathrm{Re}(a03pr), \mathrm{Im}\left(a0^{\langle 3 \rangle}\right), \mathrm{Im}(a03pr)\right)$$

$$Sw \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{22}{25} & 0 & -\frac{4}{25} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{22}{25} & 0 & \frac{4}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -1 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S1w := Sw^{-1}$$

Проверка: $A - Sw \cdot Jw \cdot S1w \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$eJw(t) := \exp(Jw \cdot t)\ \mathrm{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{2\cdot t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\cdot t} & t \cdot e^{2\cdot t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\cdot t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(t) & t \cdot \cos(t) & -\sin(t) & -t \cdot \sin(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(t) & t \cdot \sin(t) & \cos(t) & t \cdot \cos(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$
\mathrm{eA(t)} := \mathrm{Sw}\cdot\mathrm{eJw(t)}\cdot\mathrm{S1w}\rightarrow
\begin{pmatrix}
e^{2\cdot t} & 0 & -t\cdot e^{2\cdot t} & -t\cdot e^{2\cdot t} & -t\cdot e^{2\cdot t} & \frac{13\cdot\cos(t)}{25}-\frac{13\cdot e}{25} \\
0 & e^{2\cdot t} & t\cdot e^{2\cdot t} & t\cdot e^{2\cdot t} & t\cdot e^{2\cdot t} & \frac{13\cdot e^{2\cdot t}}{25}-\frac{13\cdot\cos(}{25} \\
0 & 0 & e^{2\cdot t} & e^{2\cdot t}-\cos(t) & e^{2\cdot t}-\cos(t)-\sin(t) & \frac{2\cdot\cos(t)}{5}-\frac{2\cdot e^{2\cdot t}}{5}+\frac{3}{} \\
0 & 0 & 0 & \cos(t)+\sin(t) & 2\cdot\sin(t) & - \\
0 & 0 & 0 & -\sin(t) & \cos(t)-\sin(t) & \frac{t\cdot\sin(t)}{2}- \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{pmatrix}
$$

В заключение рассмотрим еще один метод построения матричной экспоненты, не требующий знания нормальной жордановой формы матрицы.

Предположим, что $P(v)=v^m+b_{m-1}v^{m-1}+\ldots+b_1v+b_0$ – аннулирующий многочлен матрицы A, т.е. $P(A)$ – нулевая матрица. Поэтому любая степень матрицы, начиная с m-й, линейно выражается через $E=A^0, A, A^2, \ldots, A^{m-1}$. Следовательно, экспонента матрицы At может быть представлена в виде

$$e^{At}=\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k(t)A^k, \tag{18.14}$$

где функции α_k являются суммами сходящихся степенных рядов, при этом функция α_{m-1} является функцией Коши стационарного оператора

$$L_m=D^m+b_{m-1}D^{m-1}+\ldots+b_1D+b_0,$$

т.е. оператора, для которого рассматриваемый многочлен $P(v)$ является характеристическим. Остальные функции α_k, $k=m-2, m-1, \ldots, 0$, определяются из соотношений

$$\alpha_k=b_{k+1}\,\alpha_{m-1}+D\alpha_{k+1}\,.$$

Отметим, что если в качестве аннулирующего многочлена использовать минимальный многочлен матрицы, то коэффициенты α_k, $k=0,1,\ldots,m-1$, разложения экспоненты матрицы находятся однозначно, хотя для получения матричной экспоненты можно использовать любой аннулирующий многочлен, в частности характеристический многочлен матрицы, который в силу теоремы Гамильтона – Кели является аннулирующим многочленом.

Задача 18.9. Построить фундаментальную матрицу решений уравнения $Dx=Ax$ в виде $\exp(At)$.

Алгоритм решения.

- Записать характеристический многочлен матрицы A:

$$\det(A-vE)=p(v)\Leftrightarrow v^n+b_{n-1}\,v^{n-1}+\ldots+b_1\,v+b_0=p(v).$$

- Найти корни характеристического многочлена.
- Составить специальную задачу Коши

$$D^n x + b_{n-1}D^{n-1}x + \ldots + b_1 Dx + b_0 x = 0,$$
$$D^k x\big|_{t=0} = 0,\ k = \overline{0, n-2},\ D^{n-1}x\big|_{t=0} = 1$$

и найти функцию Коши $\alpha_{n-1}(t)$.

- Найти функции $\alpha_k(t)$, $k = \overline{n-2, 0}$, по формуле

$$\alpha_k = b_{k+1}\alpha_{n-1} + D\alpha_{k+1}.$$

- Записать фундаментальную матрицу $\Phi(t) = e^{At}$ по формуле (18.14).

Задание 18.9.1. Построить фундаментальную матрицу решений уравнения $Dx = Ax$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е.

$ORIGIN \equiv 1$

$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad E := \mathrm{identity}(3) \qquad E \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$v := \mathrm{eigenvals}(A) \to \begin{pmatrix} 2 - i \\ 2 + i \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |A - V\cdot E|\ \text{series} \ \to 5 - 9\cdot V + 5\cdot V^2 - V^3$

$b := -\left(5 - 9\cdot V + 5\cdot V^2 - V^3\right)\ \text{coeffs} \ \to \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x(t) := C1\cdot e^t + (C2\cdot\cos(t) + C3\cdot\sin(t))\cdot e^{2t}$

$Dx(t) := \dfrac{d}{dt}x(t) \to 2\cdot e^{2\cdot t}\cdot(C2\cdot\cos(t) + C3\cdot\sin(t)) + e^{2\cdot t}\cdot(C3\cdot\cos(t) - C2\cdot\sin(t)) + C1\cdot e^t$

$D2x(t) := \dfrac{d}{dt}Dx(t)\ \text{simplify} \to C1\cdot e^t + 3\cdot C2\cdot e^{2\cdot t}\cdot\cos(t) + 4\cdot C3\cdot e^{2\cdot t}\cdot\cos(t) - 4\cdot C2\cdot e^{2\cdot t}\cdot\sin(t) + 3\cdot C3\cdot e^{2\cdot t}\cdot\sin(t)$

$x(0)\ \text{simplify} \to C1 + C2$

$Dx(0)\ \text{simplify} \to C1 + 2\cdot C2 + C3$

$D2x(0)\ \text{simplify} \to C1 + 3\cdot C2 + 4\cdot C3$

$X(t, C) := C_1\cdot e^t + \left(C_2\cdot\cos(t) + C_3\cdot\sin(t)\right)\cdot e^{2t}$

Решая соответствующую задачу Коши, приходим к системе:

Given

$C1 + C2 = 0$

$C1 + 2 \cdot C2 + C3 = 0$

$C1 + 3 \cdot C2 + 4 \cdot C3 = 1$

$$c_1 := \mathrm{Find}(C1, C2, C3) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X(t, c_1) \rightarrow \frac{e^t}{2} - e^{2 \cdot t} \cdot \left(\frac{\cos(t)}{2} - \frac{\sin(t)}{2} \right)$$

$$\alpha2(t) := \frac{e^t}{2} - e^{2 \cdot t} \cdot \left(\frac{\cos(t)}{2} - \frac{\sin(t)}{2} \right)$$

$$\alpha1(t) := b_3 \cdot \alpha2(t) + \frac{d}{dt}\alpha2(t) \text{ simplify } \rightarrow 2 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \cos(t) - 2 \cdot e^t - e^{2 \cdot t} \cdot \sin(t)$$

$$\alpha0(t) := b_2 \cdot \alpha2(t) + \frac{d}{dt}\alpha1(t) \text{ simplify } \rightarrow \frac{5 \cdot e^t}{2} - \frac{3 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \cos(t)}{2} + \frac{e^{2 \cdot t} \cdot \sin(t)}{2}$$

$$\Phi(t) := \alpha0(t) \cdot E + \alpha1(t) \cdot A + \alpha2(t) \cdot A^2$$

$$\Phi(t) \text{ simplify } \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \cos(t) - e^t - 2 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \sin(t) & 2 \cdot e^t - 2 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \cos(t) + 4 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \sin(t) & 2 \cdot e^t - 2 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \mathrm{co} \\ -2 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \sin(t) & e^{2 \cdot t} \cdot (\cos(t) + 3 \cdot \sin(t)) & 2 \cdot e^{2 \cdot} \\ e^{2 \cdot t} \cdot \cos(t) - e^t + e^{2 \cdot t} \cdot \sin(t) & 2 \cdot e^t - 2 \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \cos(t) - e^{2 \cdot t} \cdot \sin(t) & 2 \cdot e^t - e^{2 \cdot t} \cdot \mathrm{co} \end{bmatrix}$$

В заключение отметим, что поскольку для нахождения функции Коши α_{m-1} приходится записывать не только ее вид с неопределенными коэффициентами $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$, но также и вид всех ее производных до порядка $m-1$ включительно, то после нахождения значений $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$ легко выписывается не только сама функция α_{m-1}, но и все ее производные $D\alpha_{m-1}$, $D^2\alpha_{m-1}$, ..., $D^{m-1}\alpha_{m-1}$. Поэтому иногда бывает более удобным использовать для вычисления функций α_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, не сами приведенные выше формулы, а их следствия:

$$\alpha_k = b_{k+1}\alpha_{m-1} + b_{k+2}D\alpha_{m-1} + \ldots + b_{m-1}D^{m-k-2}\alpha_{m-1} + D^{m-k-1}\alpha_{m-1}, \quad k = m-2, m-3, \ldots, 0.$$

Используя представление $\exp At$ в виде ряда, найти общее решение уравнений:

503. $Dx = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x.$

504. $Dx = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x.$

505. $Dx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x.$

506. $Dx = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x.$

507. $\dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}x.$

508. $Dx=\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}x.$

509. $\dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&2\\3&0&1\end{bmatrix}x.$

510. $Dx=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}x.$

511. $\dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}x.$

512. $\dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}x.$

Используя экспонентное представление решения, найти общее решение линейного векторного уравнения $Dx=Ax$ с заданной матрицей A:

513. $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-2&-1\end{bmatrix}$

($v_1=1,\ v_2=2,\ v_3=1$).

514. $\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$

($v_1=-2,\ v_2=1,\ d_2=2$).

515. $\begin{bmatrix}13&16&16\\-5&-7&-6\\-6&-8&-7\end{bmatrix}$

($v_1=-3,\ v_2=1,\ d_2=2$).

516. $\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$

($v=-1,\ d=3$).

517. $\begin{bmatrix}-4&2&10\\-4&3&7\\-3&1&7\end{bmatrix}$

($v=2,\ d=3$).

518. $\begin{bmatrix}7&-12&-2\\3&-4&0\\-2&0&-2\end{bmatrix}$

($v_1=2,\ v_2=-1,\ v_3=0$).

519. $\begin{bmatrix}-2&8&6\\-4&10&6\\4&-8&-4\end{bmatrix}$

($v_1=2,\ d_1=2;\ v_2=0$).

520. $\begin{bmatrix}0&3&3\\-1&8&6\\2&-14&-10\end{bmatrix}$

($v_1=-1,\ d_1=2;\ v_2=0$).

521. $\begin{bmatrix}-1&1&1\\-5&21&17\\6&-26&-21\end{bmatrix}$

($v_1=-1,\ v_2=0,\ d_2=2$).

522. $\begin{bmatrix}1&-1\\1&3\end{bmatrix}.$

523. $\begin{bmatrix}4&5&-2\\-2&-2&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$

($v=1,\ d=3$).

524. $\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&2&0\\-1&0&-3\end{bmatrix}$

($v_1=2,\ v_2=-2,\ d_2=2$).

524.1. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

($v_1 = 3,\ v_{2,3} = \pm i\sqrt{3}$).

524.2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

($v_1 = 0,\ v_{2,3} = 2 \pm i$).

524.3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

($v_1 = -2,\ v_{2,3} = -2 \pm 2i$).

524.4. $\begin{bmatrix} -7 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

($v_1 = -7,\ v_{2,3} = -5 \pm i\sqrt{5}$).

524.5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

($v_1 = 0,\ v_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{7}$).

524.6. $\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{bmatrix}$

($v_1 = -2,\ v_{2,3} = \pm 4i$).

524.7. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

($v_1 = v_2 = 2,\ v_{3,4} = 2 \pm i\sqrt{5}$).

524.8. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

($v_1 = 0,\ v_2 = -1,\ v_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{2}$).

524.9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

($v_{1,2} = \pm i,\ v_{3,4} = 1/2 \pm i\sqrt{7}/2$).

524.10. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

($v_{1,2} = 2,\quad v_{3,4} = 2 \pm i\sqrt{8}$).

524.11. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

($v_{1,2} = 2,\quad v_{3,4} = 2 \pm i\sqrt{6}$).

524.12. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

($v_{1,2} = 2,\quad v_{3,4} = 2 \pm 3i$).

524.13. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

($v_{1,2} = 3 \pm i\sqrt{5},\quad v_{3,4} = 1 \pm i$).

524.14. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

($v_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{2},\quad v_{3,4} = 2 \pm i\sqrt{6}$).

525. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

($v=1,\ d=4$).

526. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

($v_1=1,\ d_1=2;\ v_2=0,\ v_3=2$).

527. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

($v=1,\ d=4$).

528. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

($v=2,\ d=4$).

529. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

($v_1=1,\ v_{2,3}=1\pm 2i$).

530. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

($v_1=i,\ d_1=2;\ v_2=-i,\ d_2=2$).

531. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

($v_{1,2}=2\pm i$).

532. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

($v_{1,2}=2\pm i$).

532.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -15 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $(v_{1,2}=\pm 4, v_{3,4,5}=2, v_{6,7}=\pm i)$.

532.2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $(v_{1,2}=i,\ v_{3,4,5}=2,\ v_{6,7}=-i)$.

532.3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $(v_{1,2}=\pm i,\ v_{3,4,5}=2,\ v_{6,7}=\pm i\sqrt{8})$.

Решить начальные задачи $Dx = Ax,\ x\big|_{t=s}=\xi$:

533. $A=\begin{bmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{bmatrix},\ \xi=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, s = 2 ($v_1=3,\ v_2=-2,\ v_3=-1$).

534. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix},\ \xi=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s=0$ ($v_1=2,\ v_2=0,\ d_2=2$).

535. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix},\ \xi=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, s = – 1 ($v=0,\ d=3$).

536. $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ \xi=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, s = 1 ($v=1,\ d=3$).

537. $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix},\ \xi=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, s = – 5 ($v=-1,\ d=3$).

538. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ \xi=\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$, s = 0 ($v_1=1,\ v_2=2,\ v_3=-1$).

539. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},\ \xi=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s=1$.

540. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \xi=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $s=0$.

540.1. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \xi=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s=1$.

540.2. $A=\begin{bmatrix}2 & 6 & -15\\ 1 & 1 & -5\\ 1 & 2 & -6\end{bmatrix}$, $\xi=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$, $s=-1$.

540.3. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\xi=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$, $s=0$.

540.4. $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 6 & -3 & 2\\ 8 & -6 & 5\end{bmatrix}$, $\xi=\begin{bmatrix}3\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$, $s=0{,}5$.

540.5. $A=\begin{bmatrix}4 & 7 & -5\\ -4 & 5 & 0\\ 1 & 9 & -4\end{bmatrix}$, $\xi=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$, $s=-2$.

Метод Коши интегрирования неоднородных линейных векторных уравнений. Общее решение неоднородного уравнения по *правилу Коши* записывается в виде

$$x(t)=e^{At}C+\int_s^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau,\quad s\in I, \tag{18.15}$$

где C – произвольный n-мерный вектор; $e^{A(t-\tau)}=K(t,\tau)$ – *матрица Коши.* Следует обратить внимание на то, что первое слагаемое правой части равенства доставляет общее решение однородного уравнения, соответствующего данному, а второе – частное решение *нулевой начальной задачи* $Dx=Ax+f(t),\ x\big|_{t=s}=0,$ неоднородного уравнения.

Решение начальной задачи (задачи Коши)

$$Dx=Ax+f(t),\quad t\in I,\quad x\big|_{t=s}=\xi,\quad s\in I,$$

имеет вид

$$x(t)=e^{A(t-s)}\xi+\int_s^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau,\quad s\in I. \tag{18.16}$$

Задача 18.10. Построить общее решение уравнения $Dx=Ax+f(t),\ t\in I$.

А л г о р и т м р е ш е н и я.

- Определить промежуток I непрерывности функции $f(t)$.
- Построить e^{At} , используя рассмотренный ранее соответствующий алгоритм.
- Производя сдвиг, получить $e^{A(t-\tau)}$.
- Найти произведение $e^{A(t-\tau)}f(\tau)$.
- Вычислить $\int_s^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau,$ где s – любая фиксированная точка из промежутка I.
- Записать общее решение $x(t)$ по формуле (18.15).

Задание 18.10.1. Найти общее решение векторного уравнения $Dx = Ax + f(t)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Р е ш е н и е.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s := 0 \qquad \text{ORIGIN} \equiv 1$$

$$v := \text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E := \text{identity}(3) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}\left(A - v_1 \cdot E\right) \rightarrow 1 \qquad 3 - \text{rank}\left(A - v_1 \cdot E\right) = 2$$

$$J := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad W(t) := \exp(J \cdot t) \rightarrow \begin{pmatrix} e^{2 \cdot t} & t \cdot e^{2 \cdot t} & 0 \\ 0 & e^{2 \cdot t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2 \cdot t} \end{pmatrix}$$

$$a0 := \text{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y := A - v_1 \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{lsolve}\left(Y, a0^{\langle 1 \rangle}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S := \text{augment}\left(a0^{\langle 1 \rangle}, b1, a0^{\langle 2 \rangle}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S1 := S^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S \cdot W(t) \cdot S1 \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} e^{2 \cdot t} & 0 & 0 \\ t \cdot e^{2 \cdot t} & e^{2 \cdot t} & -t \cdot e^{2 \cdot t} \\ 0 & 0 & e^{2 \cdot t} \end{pmatrix}$$

$$eA(t) := \begin{pmatrix} e^{2 \cdot t} & 0 & 0 \\ t \cdot e^{2 \cdot t} & e^{2 \cdot t} & -t \cdot e^{2 \cdot t} \\ 0 & 0 & e^{2 \cdot t} \end{pmatrix} \qquad x0(t) := \int_s^t eA(t - \tau) \cdot f(\tau)\, d\tau \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ t \cdot e^{2 \cdot t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x(t, c1, c2, c3) := eA(t) \cdot \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix} + x0(t)$$

$$x(t, c1, c2, c3) \text{ simplify } \rightarrow \begin{bmatrix} c1 \cdot e^{2 \cdot t} \\ e^{2 \cdot t} \cdot (c2 + t + c1 \cdot t - c3 \cdot t) \\ c3 \cdot e^{2 \cdot t} \end{bmatrix}$$

Задача 18.11. По правилу Коши решить начальную задачу $Dx = Ax + f(t), \quad t \in I, \quad x\big|_{t=s} = \xi.$

Алгоритм решения.

- Установить промежуток I существования решения.
- Вычислить e^{At} .
- Производя сдвиг, получить $e^{A(t-\tau)}$, $e^{A(t-s)}$.
- Найти произведения $e^{A(t-s)}\xi$ и $e^{A(t-\tau)} f(\tau)$.
- Вычислить $\int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau$, где s – заданная точка из промежутка I.
- Выписать решение $x(t)$ начальной задачи по формуле (18.16).

Задание 18.11.1. Построить решение задачи Коши $Dx = Ax + f(t), \quad x\big|_{t=s} = \xi,$ где $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s = -2, \; t \in I = \mathbb{R}.$

Решение.

ORIGIN≡ 1

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix} \qquad s := -2$$

$$x0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(t) := \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v := \text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad E := \text{identity}(3) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}\left(A - v_1 \cdot E\right) \to 2$ $\qquad$ $3 - \mathrm{rank}\left(A - v_1 \cdot E\right) = 1$

$J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $W(t) := \exp(J \cdot t) \to \begin{pmatrix} e^t & t \cdot e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

$a0 := \mathrm{eigenvecs}(A) \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $Y := A - v_1 \cdot E = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -12 & 4 & 12 \\ 10 & -3 & -10 \end{pmatrix}$

$\mathrm{lsolve}\left(Y, a0^{\langle 2 \rangle}\right) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S := \mathrm{augment}\left(a0^{\langle 2 \rangle}, b1, a0^{\langle 1 \rangle}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $S1 := S^{-1} \to \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$eA(t) := S \cdot W(t) \cdot S1$

$$eA(t) \to \begin{pmatrix} 4 \cdot e^t - 3 \cdot e^{-t} - 2 \cdot t \cdot e^t & e^{-t} - e^t + t \cdot e^t & 3 \cdot e^{-t} - 3 \cdot e^t + 2 \cdot t \cdot e^t \\ 6 \cdot e^{-t} - 6 \cdot e^t & 3 \cdot e^t - 2 \cdot e^{-t} & 6 \cdot e^t - 6 \cdot e^{-t} \\ 6 \cdot e^t - 6 \cdot e^{-t} - 2 \cdot t \cdot e^t & 2 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^t + t \cdot e^t & 6 \cdot e^{-t} - 5 \cdot e^t + 2 \cdot t \cdot e^t \end{pmatrix}$$

$$eAts(t,s) := eA(t-s) \cdot x0 \text{ simplify } \to \begin{pmatrix} e^{s-t} - e^{t-s} - s \cdot e^{t-s} + t \cdot e^{t-s} \\ 3 \cdot e^{t-s} - 2 \cdot e^{s-t} \\ t \cdot e^{t-s} - s \cdot e^{t-s} - 4 \cdot \sinh(t-s) \end{pmatrix}$$

$$x0(t) := \int_s^t eA(t-\tau) \cdot f(\tau)\, d\tau \text{ simplify } \to \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot e^{-t-4}}{2} + \frac{5 \cdot e^t}{2} - t^2 \cdot e^t \\ -3 \cdot e^{-t-4} - 9 \cdot e^t - 6 \cdot t \cdot e^t \\ 3 \cdot e^{-t-4} + 5 \cdot e^t - t^2 \cdot e^t + 2 \cdot t \cdot e^t \end{pmatrix}$$

$x(t) := eAts(t,s) + x0(t)$

$$x(t) \to \begin{pmatrix} e^{t+2} + e^{-t-2} + \frac{3 \cdot e^{-t-4}}{2} + \frac{5 \cdot e^t}{2} + t \cdot e^{t+2} - t^2 \cdot e^t \\ 3 \cdot e^{t+2} - 2 \cdot e^{-t-2} - 3 \cdot e^{-t-4} - 9 \cdot e^t - 6 \cdot t \cdot e^t \\ 2 \cdot e^{t+2} - 4 \cdot \sinh(t+2) + 3 \cdot e^{-t-4} + 5 \cdot e^t + t \cdot e^{t+2} - t^2 \cdot e^t + 2 \cdot t \cdot e^t \end{pmatrix}$$

Проинтегрировать по методу Коши неоднородное векторное уравнение $Dx = Ax + f(t),\ t \in I$, при заданных A и $f(t)$:

541. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\nu_1 = 1,\ \nu_2 = 2,\ \nu_3 = -1)$.

542. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(\nu = 1,\ d = 3)$.

543. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix},\ f(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 2e^t \\ 0 \end{bmatrix}$ $(\nu = -1,\ d = 3)$.

544. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{bmatrix},\ f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ t \end{bmatrix}$ $(\nu_1 = 0,\ d_1 = 2;\ \nu_2 = -1)$.

544.1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{pmatrix},\ I = \mathbb{R}$.

544.2. $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 1+4t \\ 3t^2/2 \end{pmatrix},\ I = \mathbb{R}$.

544.3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix},\ I = \mathbb{R}$.

544.4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ 0 \end{pmatrix},\ I = (0, \infty)$.

544.5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix},\ I = \mathbb{R}$.

544.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \\ e^t \end{pmatrix},\ I = \mathbb{R}$.

544.7. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix},\ I = \mathbb{R}$.

544.8. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix},\ I = \mathbb{R}$.

Решить начальные задачи $Dx = Ax + f(t), \quad t \in I, \quad x\big|_{t=s} = \xi$, по методу Коши:

545. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ x\big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ (v_1 = 1, \ v_2 = 2, \ v_3 = -1).$

546. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ x\big|_{t=s} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \ (v = 1, \ d = 3).$

547. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \ f(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{t} \\ 0 \\ t^2 \end{bmatrix}, \ x\big|_{t=1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \ (v = 0, \ d = 3).$

547.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \ f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ s = 1.$

547.2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \ \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ s = 2.$

547.3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \ f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s = \dfrac{\pi}{2}.$

547.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \ f(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \ \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ s = 0.$

547.5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \ f(t) = \begin{pmatrix} 8t \\ 0 \end{pmatrix}, \ \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ s = 0.$

19. Метод Эйлера интегрирования однородных линейных векторных уравнений

Метод Эйлера интегрирования однородных линейных векторных уравнений состоит в построении базисной матрицы $\Phi(t)$, т.е. в построении n линейно независимых решений уравнения $Dx = Ax$ (A – постоянная матрица размерности n) в виде $x(t) = be^{vt}$ с неопределенными составляющими вектора b (v – собственное значение матрицы A). Если независимых решений $x(t)$, соответствующих собственному значению v_k матрицы A, меньше, чем его кратность d_k, то пополнение совокупности построенных линейно независимых решений производится с помощью решений вида $x(t) = \left(a_0 + a_1 t + \ldots + a_l t^l\right) e^{v_k t}$, где $a_0, a_1, \ldots, a_l$ – векторы с неопределенными координатами.

I. Все собственные значения v_j матрицы A действительные и различные, т.е. $v_j \in \mathbb{R}$, $d_j = 1$, $j = \overline{1, n}$. Из алгебраической системы

$$(A - v_j E) b_j = 0 \tag{19.1}$$

находят n собственных векторов $b_1, \dots, b_n$, отвечающих собственным значениям $v_1, \dots, v_n$ соответственно и строят базис n линейно независимых решений вида: $x_1(t) = b_1 e^{v_1 t}, \dots, x_n(t) = b_n e^{v_n t}$. Матрица $\Phi(t)$ в этом случае имеет вид: $\Phi(t) = \left[b_1 e^{v_1 t}, \dots, b_n e^{v_n t} \right]$.

II. Все собственные значения v_j матрицы A действительные $(v_j \in \mathbb{R})$, но существуют и кратные. Пусть собственное значение v_k имеет кратность $d_k = q$. Для однократных собственных значений решение строят, как указано в пункте I. Для кратного собственного значения поступают следующим образом. Из системы (19.1) находят все линейно независимые собственные векторы, отвечающие собственному значению v_k. Пусть их количество равно r: $\alpha_0, \dots, \alpha_r$. Записывают r решений вида $x_1(t) = \alpha_1 e^{v_k t}, \dots, x_r(t) = \alpha_r e^{v_k t}$. В случае $r = q$ базис построен.

Если $r < q$, то совокупность решений вида $x(t) = \alpha e^{v_k t}$ пополняют решениями вида

$$x(t) = \left(\beta_0 + \beta_1 t \right) e^{v_k t}, \tag{19.2}$$

где β_0, β_1 – векторы с неопределенными координатами. После подстановки указанного $x(t)$ в уравнение $Dx = Ax$ из систем $A\beta_1 = v_k \beta_1$, $A\beta_0 = v_k \beta_0 + \beta_1$ определяются векторы β_0, β_1.

Если количество решений вида (19.2) равно r_1 и $r_1 + r = q$, то базис построен.

Если же $r_1 + r < q$, то построенная совокупность решений для кратного собственного значения v_k пополняется решениями вида

$$x(t) = \left(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 \right) e^{v_k t}, \tag{19.3}$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ – векторы с неопределенными координатами, которые находятся из систем, полученных после подстановки $x(t)$ вида (19.3) в уравнение $Dx = Ax$.

III. Если среди собственных значений v_j матрицы A есть комплексно-сопряженные, то в соответствии с пунктом I или II строим комплекснозначные решения $z_l(t)$, а затем выделяем $\operatorname{Re} z_l(t)$ и $\operatorname{Im} z_l(t)$. Из полученного набора решений строим базисную матрицу, т.е. матрицу решений, определитель которой отличен от нуля, например при $t = 0$.

В итоге общее решение запишется в виде $x(t) = \Phi(t) C$, где C – n-мерный вектор с произвольными координатами.

Замечание. Решения можно искать и в виде $x(t) = \left(\alpha_0 + \dfrac{\alpha_1 t}{1!} + \ldots + \dfrac{\alpha_l t^l}{l!} \right) e^{vt}$. В этом случае базисная матрица $\Phi(t)$ совпадает с e^{At}.

Задача 19.1. Используя метод Эйлера, проинтегрировать уравнение $Dx = Ax$.

Алгоритм решения.

- Составить характеристическое уравнение $\det(A - vE) = 0$, найти собственные значения v_k матрицы A и их кратности.
- Если все $v_k \in \mathbb{R}$ и $d_k = 1$, то построить базисную матрицу $\Phi(t)$, используя пункт I метода Эйлера.
- Если среди действительных собственных значений матрицы A есть кратные, то построить базисную матрицу $\Phi(t)$, используя пункты I и II метода Эйлера.

• Если среди собственных значений матрицы A есть комплексно-сопряженные, то построить базисную матрицу $\Phi(t)$, используя пункты I–III метода Эйлера.

• Записать общее решение по формуле $x(t) = \Phi(t)C, \ C \in \mathbb{R}^n$.

Задание 19.1.1. Найти базис пространства решений уравнения $Dx = Ax$, если $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е.

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E := \mathrm{identity}(3) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$v := \mathrm{eigenvals}(A) \to \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}\left(A - v_1 \cdot E\right) \to 2 \qquad b := \mathrm{eigenvecs}(A) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x1(t) := b \cdot e^{v_1 \cdot t} \ \mathrm{simplify} \ \to \begin{pmatrix} e^{2\cdot t} \\ 2 \cdot e^{2\cdot t} \\ e^{2\cdot t} \end{pmatrix} \qquad Y := A - v_1 \cdot E$$

$$\mathrm{lsolve}(Y, b) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a1 := b \qquad a0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x2(t) := (a0 + a1 \cdot t) \cdot e^{v_1 t} \ \mathrm{simplify} \ \to \begin{bmatrix} e^{2\cdot t} \cdot (t + 1) \\ e^{2\cdot t} \cdot (2 \cdot t + 1) \\ t \cdot e^{2\cdot t} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} b2 := b \\ b1 := a0 \end{matrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(Y, b1) \to \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b0 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x3(t) := \left(b0 + b1 \cdot t + b2 \cdot t^2\right) \cdot e^{v_1 t} \to \begin{bmatrix} e^{2\cdot t} \cdot \left(t^2 + t\right) \\ e^{2\cdot t} \cdot \left(2 \cdot t^2 + t - 1\right) \\ t^2 \cdot e^{2\cdot t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) := \mathrm{augment}(x1(t), x2(t), x3(t))$$

$$\Phi(t) \ \mathrm{combine} \ \to \begin{bmatrix} e^{2\cdot t} & e^{2\cdot t} \cdot (t + 1) & e^{2\cdot t} \cdot \left(t^2 + t\right) \\ 2 \cdot e^{2\cdot t} & e^{2\cdot t} \cdot (2 \cdot t + 1) & e^{2\cdot t} \cdot \left(2 \cdot t^2 + t - 1\right) \\ e^{2\cdot t} & t \cdot e^{2\cdot t} & t^2 \cdot e^{2\cdot t} \end{bmatrix}$$

Задание 19.1.2. Найти общее решение уравнения $Dx = Ax$, где $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е.

$$\text{ORIGIN} \equiv 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad E := \text{identity}(3) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v := \text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad r := \text{rank}\left(A - v_1 \cdot E\right) \rightarrow 1 \qquad 3 - r \rightarrow 2$$

$$b := \text{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x1(t) := b^{\langle 1 \rangle} \cdot e^{v_1 \cdot t} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y := A - v_1 \cdot E$$

$$q := 2 \qquad p := -1$$

$$Y \cdot \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b1 - b2 - b3 \\ 2 \cdot b1 - 2 \cdot b2 - 2 \cdot b3 \\ b2 - b1 + b3 \end{pmatrix} \qquad a1 := q \cdot b^{\langle 1 \rangle} + p \cdot b^{\langle 2 \rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, система $Yb = a$ будет совместна, если взять собственный вектор (1, 2, -1).

Given

$$b1 - b2 - b3 = a1_1$$

$$2 \cdot b1 - 2 \cdot b2 - 2 \cdot b3 = a1_2$$

$$b2 - b1 + b3 = a1_3$$

$$a0 := \text{Find}(b1, b2, b3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x2(t) := a1 \cdot e^{v_1 \cdot t} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} e^t \\ 2 \cdot e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \qquad x3(t) := (a0 + t\,a1) \cdot e^{v_1 \cdot t} \rightarrow \begin{bmatrix} e^t \cdot (t+1) \\ 2 \cdot t \cdot e^t \\ -t \cdot e^t \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) := \text{augment}(x1(t), x2(t), x3(t))$$

$$\Phi(t)\ \text{combine}\ \rightarrow \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} & e^{t}\cdot(t+1) \\ e^{t} & 2\cdot e^{t} & 2\cdot t\cdot e^{t} \\ 0 & -e^{t} & -t\cdot e^{t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) := \Phi(t)\cdot\begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{pmatrix}$$

$$x(t)\ \text{simplify}\ \rightarrow \begin{bmatrix} e^{t}\cdot(C1+C2+C3+C3\cdot t) \\ e^{t}\cdot(C1+2\cdot C2+2\cdot C3\cdot t) \\ -e^{t}\cdot(C2+C3\cdot t) \end{bmatrix}$$

Задание 19.1.3. Проинтегрировать уравнение $Dx = Ax$, где $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix} \qquad E := \text{identity}(3) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ORIGIN} \equiv 1$$

$$v := \text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix} \qquad b := \text{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{2}-i & -\frac{1}{2}+i \\ 1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i & \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)\cdot i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x1(t) := b^{\langle 1\rangle}\cdot e^{v_1\cdot t} \rightarrow \begin{pmatrix} -2\cdot e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix} \qquad x2(t) := b^{\langle 2\rangle}\cdot e^{v_2\cdot t} \rightarrow \begin{bmatrix} e^{-t\cdot i}\cdot\left(-\frac{1}{2}-i\right) \\ e^{-t\cdot i}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right) \\ e^{-t\cdot i} \end{bmatrix}$$

$$x3(t) := b^{\langle 3\rangle}\cdot e^{v_3\cdot t} \rightarrow \begin{bmatrix} e^{t\cdot i}\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\right) \\ e^{t\cdot i}\cdot\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)\cdot i\right] \\ e^{t\cdot i} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) := \text{augment}(x1(t), 2\,\text{Re}(x2(t)), 2\,\text{Im}(x2(t)))$$

$$\Phi(0) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left|\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right| \text{ simplify } \rightarrow 1$$

$$\Phi(t) \left|\begin{matrix}\text{simplify} \\ \text{assume}, t = \text{real}\end{matrix}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \cdot e^{t} & -\cos(t) - 2 \cdot \sin(t) & \sin(t) - 2 \cdot \cos(t) \\ e^{t} & \cos(t) + \sin(t) & \cos(t) - \sin(t) \\ e^{t} & 2 \cdot \cos(t) & -2 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$x(t) := \begin{pmatrix} -2 \cdot e^{t} & -\cos(t) - 2 \cdot \sin(t) & \sin(t) - 2 \cdot \cos(t) \\ e^{t} & \cos(t) + \sin(t) & \cos(t) - \sin(t) \\ e^{t} & 2 \cdot \cos(t) & -2 \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{pmatrix}$$

$$x(t) \text{ combine } \rightarrow \begin{bmatrix} C3 \cdot (\sin(t) - 2 \cdot \cos(t)) - C2 \cdot (\cos(t) + 2 \cdot \sin(t)) - 2 \cdot C1 \cdot e^{t} \\ C2 \cdot (\cos(t) + \sin(t)) + C1 \cdot e^{t} + C3 \cdot (\cos(t) - \sin(t)) \\ 2 \cdot C2 \cdot \cos(t) + C1 \cdot e^{t} - 2 \cdot C3 \cdot \sin(t) \end{bmatrix}$$

Проинтегрировать по методу Эйлера линейное векторное уравнение $Dx = Ax$ с заданной матрицей:

548. $\begin{bmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

($v_1 = 2,\ v_2 = -1,\ v_3 = 0$).

549. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

($v_1 = -2,\ v_2 = 1,\ d_2 = 2$).

550. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

($v_1 = 2,\ d_1 = 2;\ v_2 = 0$).

551. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

($v = -1,\ d = 3$).

552. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

($v = -1,\ d = 3$).

553. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

($v_1 = -2,\ d_1 = 2;\ v_2 = 2$).

554. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

($v = 1,\ d = 3$).

555. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

($v = 1,\ d = 3$).

556. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

$(v_1 = 1,\ v_{2,3} = 2 \pm i)$.

557. $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$(v_1 = 1,\ v_{2,3} = 2 \pm 3i)$.

558. $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

$(v_1 = 1,\ v_{2,3} = 2 \pm 3i)$.

559. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

559.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $(v_{1,2} = \pm i,\ v_{3,4,5} = 2,\ v_{6,7} = -\sqrt{6})$.

559.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -15 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $(v_{1,2} = \pm 4,\ v_{3,4,5} = 2,\ v_{6,7} = \pm i)$.

559.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $(v_{1,2} = i,\ v_{3,4,5} = 2,\ v_{6,7} = -i)$.

20. Метод Лагранжа интегрирования неоднородных линейных векторных уравнений

Метод Лагранжа интегрирования неоднородных линейных векторных уравнений (*метод вариации произвольных постоянных*) состоит в отыскании частного решения неоднородного линейного векторного уравнения первого порядка $Dx = Ax + f(t),\ t \in I,$ в таком же виде, какой имеет общее решение однородного линейного векторного уравнения $Dx = Ax$, соответствующего исходному неоднородному, т.е. в виде

$$x_{\text{чн}}(t) = \Phi(t)u(t),$$

где $\Phi(t)-$ базисная матрица уравнения $Dx = Ax$; $u(t)-$ вспомогательная векторная функция, подлежащая определению. Для определения $u(t)$ подставляем $x_{\text{чн}}(t)$ в уравнение с ненулевой правой частью, после чего имеем

$$D\Phi(t)u(t) + \Phi(t)Du(t) = A\Phi(t)u(t) + f(t),\ t \in I.$$

Учитывая, что $D\Phi(t) \equiv A\Phi(t)$, получаем систему простейших дифференциальных уравнений $Du(t) = \Phi^{-1}(t)f(t),\ t \in I.$ Отсюда

$$u(t) = \int_s^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad s \in I.$$

В качестве $u(t)$ берется одна из первообразных. Следовательно,

$$x_{\text{чн}}(t) = \Phi(t)\int_s^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

или

$$x_{\text{чн}}(t) = \int_s^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) = K(t,\tau)-$ матрица Коши.

Задача 20.1. Используя метод Лагранжа, найти общее решение уравнения $Dx = Ax + f(t),\ t \in I.$

Алгоритм решения.

- Построить базисную матрицу $\Phi(t)$ соответствующего однородного уравнения $Dx = Ax$ по методу Эйлера или Коши.
- Записать общее решение $x_{\text{оо}}(t) = \Phi(t)C,\ C \in \mathbb{R}^n,$ однородного уравнения $Dx = Ax.$
- Построить обратную матрицу $\Phi^{-1}(t)$.
- Найти $u(t) = \int_s^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,\ s \in I.$
- Найти частное решение $x_{\text{чн}}(t)$ исходного уравнения по формуле $x_{\text{чн}}(t) = \Phi(t)u(t).$
- Построить общее решение исходного уравнения $x(t) = x_{\text{оо}}(t) + x_{\text{чн}}(t).$

Задание 20.1.1. Используя результаты задания 19.1.2, найти общее решение уравнения $Dx = Ax + f(t),\ t \in I,$ где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = e^t \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/\sqrt{t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I = (0, +\infty).$$

Р е ш е н и е.

$$ORIGIN \equiv 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \cdot e^{t} \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad E := \text{identity}(3) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v := \text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{rank}(A - E) \rightarrow 1 \qquad 3 - \text{rank}(A - 1E) = 2$$

$$\Phi(t) := e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & t+1 \\ 1 & 2 & 2t \\ 0 & -1 & -t \end{pmatrix}$$

$$\Phi1(t) := \Phi(t)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} & 2 \cdot e^{-t} \\ -t \cdot e^{-t} & t \cdot e^{-t} & t \cdot e^{-t} - e^{-t} \\ e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$Du(t) := \Phi1(t) \cdot f(t) \rightarrow \begin{pmatrix} t^{\frac{-1}{2}} \\ \sqrt{t} - 1 \\ \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

$$u(t) := \int Du(t)\, dt \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{t} \\ \frac{2 \cdot t^{\frac{3}{2}}}{3} - t \\ \ln(t) - 2 \cdot \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

$$xcn(t) := \Phi(t) \cdot u(t) \text{ combine } \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \cdot \sqrt{t} \cdot e^{t} - e^{t} \cdot \left(t - \frac{2 \cdot t^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + e^{t} \cdot (t+1) \cdot \left(\ln(t) - 2 \cdot \sqrt{t} \right) \\ 2 \cdot \sqrt{t} \cdot e^{t} - 2 \cdot e^{t} \cdot \left(t - \frac{2 \cdot t^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + 2 \cdot t \cdot e^{t} \cdot \left(\ln(t) - 2 \cdot \sqrt{t} \right) \\ e^{t} \cdot \left(t - \frac{2 \cdot t^{\frac{3}{2}}}{3} \right) - t \cdot e^{t} \cdot \left(\ln(t) - 2 \cdot \sqrt{t} \right) \end{bmatrix}$$

$$xoo(t) := \Phi(t)\cdot\begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix}$$

$$x(t) := xoo(t) + xcn(t)$$

$$x(t)\ \text{simplify}\ \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{e^{t}\cdot\left(3\cdot c1 + 3\cdot c2 + 3\cdot c3 - 3\cdot t + 3\cdot \ln(t) - 4\cdot t^{\frac{3}{2}} + 3\cdot c3\cdot t + 3\cdot t\cdot \ln(t)\right)}{3} \\ \dfrac{e^{t}\cdot\left(3\cdot c1 + 6\cdot c2 - 6\cdot t + 6\cdot\sqrt{t} - 8\cdot t^{\frac{3}{2}} + 6\cdot c3\cdot t + 6\cdot t\cdot \ln(t)\right)}{3} \\ -\dfrac{e^{t}\cdot\left(3\cdot c2 - 3\cdot t - 4\cdot t^{\frac{3}{2}} + 3\cdot c3\cdot t + 3\cdot t\cdot \ln(t)\right)}{3} \end{bmatrix}$$

Задание 20.1.2. Используя метод Эйлера, найти общее решение уравнения $Dx = Ax + f(t),\ t \in I,$ где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad f(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1/t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad I = (0, +\infty).$$

Р е ш е н и е.

$$\text{ORIGIN} \equiv 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{t}\cdot e^{t} \\ t^{2}\cdot e^{t} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E := \text{identity}(3)$$

$$v := \text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad r := \text{rank}\left(A - v_2\cdot E\right) \rightarrow 2 \qquad 3 - r \rightarrow 1$$

$$b := \text{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot b^{\langle 1\rangle} - v_2\cdot b^{\langle 1\rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\cdot b^{\langle 2\rangle} - v_1\cdot b^{\langle 2\rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x1(t) := b^{\langle 1\rangle}\cdot e^{v_2\cdot t} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} -e^t \\ -2\cdot e^t \\ e^t \end{pmatrix} \qquad v_2 \rightarrow 1 \qquad b^{\langle 1\rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y := A - v_2\cdot E \qquad \text{lsolve}\left(Y, b^{\langle 1\rangle}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a0 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x2(t) := \left(a0 + t\,b^{\langle 1\rangle}\right)\cdot e^{v_2\cdot t} \rightarrow \begin{bmatrix} -e^t\cdot(t+1) \\ -2\cdot t\cdot e^t \\ t\cdot e^t \end{bmatrix}$$

$$x3(t) := b^{\langle 2\rangle}\cdot e^{v_1\cdot t} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} -e^{3\cdot t} \\ 0 \\ e^{3\cdot t} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) := \text{augment}(x1(t), x2(t), x3(t))$$

$$\Phi(t) \text{ combine } \rightarrow \begin{bmatrix} -e^t & -e^t\cdot(t+1) & -e^{3\cdot t} \\ -2\cdot e^t & -2\cdot t\cdot e^t & 0 \\ e^t & t\cdot e^t & e^{3\cdot t} \end{bmatrix} \qquad \Phi1(t) := \Phi(t)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} t\cdot e^{-t} & -\frac{e^{-t}}{2} & t\cdot e^{-t} \\ -e^{-t} & 0 & -e^{-t} \\ 0 & \frac{e^{-3\cdot t}}{2} & e^{-3\cdot t} \end{pmatrix}$$

$$Du(t) := \Phi1(t)\cdot f(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} \\ -\frac{1}{t} \\ \frac{t^2\cdot e^{-2\cdot t}}{2} \end{pmatrix}$$

$$u(t) := \int Du(t)\,dt \text{ simplify } \rightarrow \begin{bmatrix} t - \frac{t^3}{6} \\ -\ln(t) \\ -\frac{e^{-2\cdot t}\cdot\left(2\cdot t^2 + 2\cdot t + 1\right)}{8} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{xcn}(t) := \Phi(t)\cdot u(t)\ \text{simplify}\ \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{e^{t}\cdot\left(24\cdot\ln(t) - 18\cdot t + 6\cdot t^{2} + 4\cdot t^{3} + 24\cdot t\cdot\ln(t) + 3\right)}{24} \\ \dfrac{t\cdot e^{t}\cdot\left(6\cdot\ln(t) + t^{2} - 6\right)}{3} \\ -\dfrac{e^{t}\cdot\left(6\cdot t^{2} - 18\cdot t + 4\cdot t^{3} + 24\cdot t\cdot\ln(t) + 3\right)}{24} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{xoo}(t) := \Phi(t)\cdot\begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix}$$

$$x(t) := \mathrm{xoo}(t) + \mathrm{xcn}(t)$$

$$x(t) \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{e^{t}\cdot\left(24\cdot\ln(t) - 18\cdot t + 6\cdot t^{2} + 4\cdot t^{3} + 24\cdot t\cdot\ln(t) + 3\right)}{24} - c3\cdot e^{3\cdot t} - c1\cdot e^{t} - c2\cdot e^{t}\cdot(t+1) \\ \dfrac{t\cdot e^{t}\cdot\left(6\cdot\ln(t) + t^{2} - 6\right)}{3} - 2\cdot c1\cdot e^{t} - 2\cdot c2\cdot t\cdot e^{t} \\ c3\cdot e^{3\cdot t} - \dfrac{e^{t}\cdot\left(6\cdot t^{2} - 18\cdot t + 4\cdot t^{3} + 24\cdot t\cdot\ln(t) + 3\right)}{24} + c1\cdot e^{t} + c2\cdot t\cdot e^{t} \end{bmatrix}$$

Методом Лагранжа можно отыскивать и решение начальной задачи $Dx = Ax + f(t),\ x|_{t=s} = \xi,$ $t \in I.$ Для этого, используя начальные данные, из общего решения

$$x(t) = \Phi(t)C + \Phi(t)\int_{s}^{t}\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

определяют постоянный вектор C. Положив $\xi = \Phi(s)C,$ получают $C = \Phi^{-1}(s)\xi.$ Тогда решение начальной задачи запишется в виде

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\xi + \int_{s}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Если в качестве $\Phi(t)$ использовать e^{At}, то решение рассматриваемой задачи примет вид

$$x(t) = e^{A(t-s)}\xi + \int_{s}^{t}e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau.$$

Задача 20.2. Используя метод Лагранжа, найти решение начальной задачи $Dx = Ax + f(t),\ x|_{t=s} = \xi,\ s,\ t \in I.$

Алгоритм решения.

• Построить базисную матрицу $\Phi(t)$ соответствующего однородного уравнения $Dx = Ax$ по методу Эйлера или Коши.

• Построить общее решение исходного уравнения $x(t) = x_{oo}(t) + x_{чн}(t)$.

• Используя представление $x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\xi + \int_s^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau$, получить решение начальной задачи.

Задание 20.2.1. Найти решение начальной задачи $Dx = Ax + f(t),\ x|_{t=s} = \xi,\ s,\ t \in I$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad f(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2t \\ -1 \end{pmatrix},\quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad s = 1,\ I = \mathbb{R}.$$

Р е ш е н и е.

ORIGIN≡ 1

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad f(t) := \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2 \cdot t \\ -1 \end{pmatrix} \qquad E := \mathrm{identity}(3)$$

$$\xi := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad s := 1$$

$$v := \mathrm{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b := \mathrm{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -2 & -1 \\ -\frac{8}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot b^{\langle 1 \rangle} - v_3 \cdot b^{\langle 1 \rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \cdot b^{\langle 2 \rangle} - v_2 \cdot b^{\langle 2 \rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot b^{\langle 3 \rangle} - v_1 \cdot b^{\langle 3 \rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x1(t) := b^{\langle 3 \rangle} \cdot e^{v_1 \cdot t} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} -e^{3 \cdot t} \\ 0 \\ e^{3 \cdot t} \end{pmatrix} \qquad x2(t) := b^{\langle 2 \rangle} \cdot e^{v_2 \cdot t} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \cdot e^{2 \cdot t} \\ -e^{2 \cdot t} \\ e^{2 \cdot t} \end{pmatrix}$$

$$x3(t) := b^{\langle 1 \rangle} \cdot e^{v_3 \cdot t} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{e^{-t}}{5} \\ -\frac{8 \cdot e^{-t}}{5} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) := \text{augment}(x1(t), x2(t), x3(t))$$

$$\Phi(t) \text{ combine } \to \begin{pmatrix} -e^{3\cdot t} & -2\cdot e^{2\cdot t} & -\dfrac{e^{-t}}{5} \\ 0 & -e^{2\cdot t} & -\dfrac{8\cdot e^{-t}}{5} \\ e^{3\cdot t} & e^{2\cdot t} & e^{-t} \end{pmatrix} \qquad \Phi1(t) := \Phi(t)^{-1}$$

$$x(t) := \Phi(t)\cdot\Phi1(s)\cdot\xi + \Phi(t)\cdot\int_s^t \Phi1(\tau)\cdot f(\tau)\,d\tau$$

$$x(t) \text{ simplify } \to \begin{bmatrix} \dfrac{e^{3\cdot t}\cdot\left(48\cdot e^{-2}\cdot e^{-t} - 64\cdot e\cdot e^{-t} - 12\cdot t + e^{4}\cdot e^{-4\cdot t} + 75\right)}{48} \\ t + \dfrac{e^{3\cdot t}}{2} + \dfrac{e^{4-t}}{6} - \dfrac{2\cdot e\cdot e^{2\cdot t}}{3} + \dfrac{e^{-2}\cdot e^{2\cdot t}}{2} - \dfrac{1}{2} \\ e^{3\cdot t}\cdot\left(\dfrac{t}{4} - \dfrac{13}{16}\right) - \dfrac{5\cdot e^{4-t}}{48} - t + \dfrac{2\cdot e\cdot e^{2\cdot t}}{3} - \dfrac{e^{-2}\cdot e^{2\cdot t}}{2} + \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Применить метод Лагранжа для интегрирования линейного векторного уравнения $Dx = Ax + f(t)$, $t \in I$, при заданных A и $f(t)$:

453. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{bmatrix}$, $I = (-\pi/2, \pi/2)$.

454. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} -e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{bmatrix}$, $I = \mathbb{R}$.

455. $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 1+4t \\ 3t^2/2 \end{bmatrix}$, $I = \mathbb{R}$.

456. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\cos t \end{bmatrix}$, $I = (\pi/2, 3\pi/2)$.

457. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix}$, $x|_{t=0} = (1, -2)^T$.

458. $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 8t \\ 0 \end{bmatrix}$, $x|_{t=0} = (0, 0)^T$.

459. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$, $I = \mathbb{R}$.

460. $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\ f(t)=\begin{bmatrix}1/t\\ 0\end{bmatrix},\ I=(0,+\infty).$

461. $A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix},\ f(t)=\begin{bmatrix}e^{t}\\ e^{-t}\\ 0\end{bmatrix},\ I=\mathbb{R}\ (\nu_1=-2,\ \nu_2=1,\ d_2=2).$

462. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ f(t)=\begin{bmatrix}e^{t}\\ te^{t}\\ e^{t}\end{bmatrix},\ I=\mathbb{R}\ (\nu=1,\ d=3).$

463. $A=\begin{bmatrix}7 & -12 & -2\\ 3 & -4 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{bmatrix},\ f(t)=\begin{bmatrix}0\\ t\\ 0\end{bmatrix},\ I=\mathbb{R}\ (\nu_1=2,\ \nu_2=-1,\ \nu_3=0).$

464. $A=\begin{bmatrix}4 & 7 & -5\\ -4 & 5 & 0\\ 1 & 9 & -4\end{bmatrix},\ f(t)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ e^{2t}\end{bmatrix},\ I=\mathbb{R}\ (\nu_1=1,\ \nu_{2,3}=2\pm 3i).$

VIII. ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

21. Устойчивость решений линейных векторных уравнений в смысле Ляпунова. Асимптотическая устойчивость

Если $x(t,\xi)$ – решение начальной задачи

$$Dx=Ax+f(t),\ x\big|_{t=s}=\xi,\ s,\ t\in I,$$

а $x(t,\xi+\Delta\xi)$ – решение начальной задачи

$$Dx=Ax+f(t),\ x\big|_{t=s}=\xi+\Delta\xi,\ \ t\in I,$$

где A – постоянная квадратная матрица порядка n, $f(t)=(f_1(t),\dots,f_n(t))^T$ – непрерывная векторная функция, $x\in\mathbb{R}^n$, ξ – начальный n-мерный вектор, $\Delta\xi$ – приращение начального вектора, то *отклонением решений* $x(t,\xi)$ и $x(t,\xi+\Delta\xi)$ называется величина $\rho(t,\Delta\xi)=\|x(t,\xi+\Delta\xi)-x(t,\xi)\|$, где $\|\bullet\|$ – некоторая векторная норма, в частности евклидова.

Отклонение не зависит от неоднородности f и определяется только матрицей A и приращением $\Delta\xi$, поэтому при исследовании устойчивости неоднородных векторных уравнений можно рассматривать только однородные стационарные линейные уравнения вида

$$Dx=Ax.$$

Если $I=[s,+\infty)$ и $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,\ \forall t\in I,\forall\|\Delta\xi\|\le\delta$ выполняется условие $\rho(t,\Delta\xi)\le\varepsilon$, то решение $x(t,\xi)$ уравнения $Dx=Ax+f(t),\ t\in I,$ называется *устойчивым по Ляпунову в положительном направлении.*

Решение $x(t,\xi)$ уравнения $Dx = Ax + f(t),\ t \in I,$ *асимптотически устойчиво* на I, если:

1) оно устойчиво по Ляпунову на I;

2) $\exists \eta > 0,\ \forall \Delta\xi,\ \|\Delta\xi\| \le \eta,\ \rho(t,\Delta\xi) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Отметим, что в случае линейных уравнений первое условие следует из второго и ограничение $\|\Delta\xi\| \le \eta$ можно опустить.

Устойчивость (асимптотическая устойчивость) одного из решений линейного уравнения влечет за собой устойчивость (асимптотическую устойчивость) всех его решений, т.е. устойчивость (асимптотическую устойчивость) уравнения. Так как $\rho(t,\Delta\xi)$ не зависит от неоднородности f, то устойчивость (асимптотическая устойчивость) неоднородного линейного уравнения эквивалентна устойчивости (асимптотической устойчивости) однородного линейного уравнения, соответствующего неоднородному.

Критерий устойчивости. Для устойчивости решений линейного векторного уравнения $Dx = Ax + f(t)$ необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Re} v_j \le 0,\ j = 1,\ldots,n,$ где v_j – собственные значения матрицы A, причем тем собственным значениям v_k, для которых $\operatorname{Re} v_k = 0$, в матрице Жордана соответствовали клетки размерности 1.

Критерий асимптотической устойчивости. Для асимптотической устойчивости решений линейного уравнения $Dx = Ax + f(t)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\operatorname{Re} v_j < 0,\ j = 1,\ldots,n,$ где v_j – собственные значения матрицы A, или, что равносильно, чтобы характеристический многочлен $v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \ldots + a_1 v + a_0$ матрицы был *гурвицевым*, т.е. чтобы все главные миноры гурвициана этого полинома

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-(2n-1)} & a_{n-(2n-2)} & a_{n-(2n-3)} & \ldots & a_0 \end{vmatrix}$$

были положительными (здесь при $j < 0$ имеем $a_j = 0$).

З а м е ч а н и е . При $n = 3$ гурвициан для многочлена $v^3 + a_2 v^2 + a_1 v + a_0$ имеет вид $\begin{pmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$.

Задача 21.1. Исследовать устойчивость и асимптотическую устойчивость линейного векторного уравнения $Dx = Ax$, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; г) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е. а) Так как $v = -1,\ d = 3,$ то все решения уравнения асимптотически устойчивы.

б) Поскольку $v_1 = -1,\ v_2 = -3,\ v_3 = 0,$ то все решения устойчивы, но не асимптотически.

в) Поскольку $v_1 = -2,\ v_2 = 0,\ d_2 = 2,\ \ \operatorname{rank}(A - v_2 E) = \operatorname{rank} A = 1,$ то нулевому корню в матрице Жордана $J = A$ соответствуют две клетки. Следовательно, все решения уравнения устойчивы.

г) Поскольку $v_1 = -1,\ v_2 = 0,\ d_2 = 2,\ \ \operatorname{rank}(A - v_2 E) = \operatorname{rank} A = 2$ и $J = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, то все решения уравнения неустойчивы.

Задача 21.2. Определить область на плоскости параметров $\alpha,\ \beta$, для точек которой асимптотически устойчиво уравнение $Dx = Ax,$ где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ \beta & -1 & \alpha \\ 0 & \beta & -1 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Характеристический полином матрицы A имеет вид

$$(1+v)^3 - 2\alpha\beta(1+v).$$

Корень $v_1 = -1;$ корни v_2, v_3 удовлетворяют соотношениям (теорема Виета) $v_2 + v_3 = -2,\ v_2 v_3 = 1 - 2\alpha\beta.$ Так как необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости решений является отрицательность характеристических корней, то при данных условиях $v_2 v_3 > 0,$ т.е. $1 - 2\alpha\beta > 0.$ Отсюда $\alpha\beta < 1/2.$

Задача 21.3. Исследовать асимптотическую устойчивость уравнения $Dx = Ax,$ где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Характеристический полином $v^3 + 2v^2 + 2v + 3$ матрицы A не имеет целочисленных корней. Для исследования устойчивости воспользуемся критерием Гурвица. Гурвициан имеет вид $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ и $\Delta_1 = 2 > 0,$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} > 0,\ \Delta_3 = 3\Delta_2 > 0.$ Следовательно, уравнение асимптотически устойчиво.

Задача 21.4. Исследовать асимптотическую устойчивость уравнения $Dx = Ax + f(t),$ где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -6 & 1 & -1 \end{bmatrix},\quad f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad E := \mathrm{identity}(3) \qquad \mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$v := \mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -4.32393381 \\ 0.1619669 + 2.71559111i \\ 0.1619669 - 2.71559111i \end{pmatrix}$$

В ы в о д . Уравнение неустойчиво на $[0, +\infty).$

Исследовать устойчивость и асимптотическую устойчивость линейных векторных уравнений вида $Dx = Ax$ с заданной матрицей A:

572. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$

573. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$

574. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

575. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$

576. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$

577. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

578. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$

579. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$

580. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$

581. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}.$

582. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$

583. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

584. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

585. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

586. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$

Определить область пространства параметров асимптотической устойчивости линейных уравнений вида $Dx = Ax$ с заданной матрицей:

587. $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}.$

588. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & -3 \end{bmatrix}.$

589. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -b & -a \end{bmatrix}.$

590. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b & -a & -3 \end{bmatrix}.$

591. $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$.

592. $\begin{bmatrix} -1 & a & b \\ -a & -1 & a \\ -b & -a & -1 \end{bmatrix}$.

593. $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix}$.

594. $\begin{bmatrix} a & c \\ b & a \end{bmatrix}$.

595. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5a & -a^2 \end{bmatrix}$.

596. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ a & -a^2 \end{bmatrix}$.

597. $\begin{bmatrix} a^2 & -3 \\ a & 4 \end{bmatrix}$.

598. $\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

599. $\begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ -1 & 0 & a \end{bmatrix}$.

600. $\begin{bmatrix} a & b-2ab-1 \\ 1 & -b \end{bmatrix}$.

Двухпродуктовая динамическая макроэкономическая модель. Пусть экономика представлена двумя отраслями, каждая из которых выпускает валовую продукцию и затрачивает на воспроизводство труд, средства труда и предметы труда. Обозначим (см. задачу 10.4) интенсивности производства валового продукта, конечного продукта, производственного потребления, валовых капитальных вложений, непроизводственного потребления как $X_i(t)$, $Y_i(t)$, $W_i(t)$, $I_i(t)$, $C_i(t)$ соответственно для i-й отрасли. Для составления простейшей двухпродуктовой модели предположим, что производственное потребление линейно зависит от валовых продуктов и валовые капитальные вложения, полностью идущие на развитие экономики (амортизационные отчисления отсутствуют), пропорциональны приросту валовых продуктов. Тогда

$$X_i(t) = W_i(t) + Y_i(t),\ Y_i(t) = I_i(t) + C_i(t),$$
$$W_i(t) = W_{i1}(t) + W_{i2}(t),\ I_i(t) = I_{i1}(t) + I_{i2}(t),\ i = 1, 2.$$

С одной стороны, межотраслевые потоки производственного потребления из i-й отрасли в j-ю отрасль пропорциональны валовому продукту j-й отрасли, т.е. $W_{ij}(t) = a_{ij} X_j(t)$, где a_{ij} – коэффициенты прямых затрат; с другой стороны, межотраслевые потоки капитальных вложений из i-й отрасли в j-ю пропорциональны приросту валового продукта j-й отрасли, т.е. $I_{ij}(t)\Delta t = \chi_{ij}(X_j(t+\Delta t) - X_j(t))$, где χ_{ij} – коэффициенты приростной фондоемкости. Таким образом, открытая двухпродуктовая модель имеет вид

$$\begin{cases} X_1(t) = a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t) + \chi_{11}X_1'(t) + \chi_{12}X_2'(t) + C_1(t), \\ X_2(t) = a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t) + \chi_{21}X_1'(t) + \chi_{22}X_2'(t) + C_2(t). \end{cases}$$

Отметим, что в экономических моделях на параметры получающихся дифференциальных уравнений накладываются дополнительные ограничения, следующие из экономического смысла всех рассматриваемых функций. Во-первых, все параметры и функции должны быть неотрицательными. В связи с этим, например, на матрицу прямых затрат $A = (a_{ij})$ накладывается, кроме условия $0 \le a_{ij} < 1$, дополнительное ограничение, называемое продуктивностью. Это условие порождено требованием неотрицательной разрешимости системы уравнений $X = AX + Y$, где $X = (X_1, X_2)^T$,

$Y=(Y_1, Y_2)^T$, и с математической точки зрения заключается в обратимости матрицы $(E-A)$, а также в неотрицательности всех элементов обратной матрицы $(E-A)^{-1}$, элементы которой характеризуют затраты валовой продукции *i*-й отрасли на производство единицы продукции *j*-й отрасли, $i, j=1, 2$.

Задача 21.5. Исследовать устойчивость решений двухпродуктовой модели развития экономики в случае, когда из двух рассматриваемых отраслей первая производит только средства производства, а вторая – только предметы потребления.

Р е ш е н и е. При сформулированных условиях нет инвестиций из второй отрасли ни в первую отрасль, ни во вторую, т.е. $\chi_{21}=0$, $\chi_{22}=0$. Следовательно, двухпродуктовая динамическая модель развития экономики имеет вид

$$\begin{cases} X_1(t)=a_{11}X_1(t)+a_{12}X_2(t)+\chi_{11}X_1'(t)+\chi_{12}X_2'(t)+C_1(t), \\ X_2(t)=a_{21}X_1(t)+a_{22}X_2(t)+C_2(t). \end{cases}$$

Поэтому

$$X_1'(t)=\frac{1-a_{11}-a_{22}+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{\chi_{11}(1-a_{22})+\chi_{12}a_{21}}X_1(t)-\frac{C_1(t)(1-a_{22})+a_{12}C_2(t)+\chi_{12}C_2'(t)}{\chi_{11}(1-a_{22})+\chi_{12}a_{21}}.$$

Исследование устойчивости этого уравнения сводится к определению знака числа $\dfrac{1-a_{11}-a_{22}+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{\chi_{11}(1-a_{22})+\chi_{12}a_{21}}$, который в силу положительности знаменателя рассматриваемой дроби совпадает со знаком числа $1-a_{11}-a_{22}+$ $+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Для определения знака этого числа воспользуемся свойством продуктивности матрицы прямых затрат. Так как

$$\det(E-A)=\det\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{21} \\ -a_{12} & 1-a_{22} \end{pmatrix}=1-a_{11}-a_{22}+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

то

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{1-a_{11}-a_{22}+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} 1-a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & 1-a_{11} \end{pmatrix}.$$

Условие продуктивности матрицы прямых затрат, равносильное существованию и неотрицательности всех элементов матрицы $(E-A)^{-1}$, влечет в силу неравенств $0\le a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}<1$ выполнение неравенства $1-a_{11}-a_{22}+$ $+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$, откуда следует неустойчивость решений двухпродуктовой модели развития экономики.

Одна из модификаций макроэкономической модели Леонтьева (см. § 10), учитывающая запаздывание капиталовложений, т.е. разницу между моментом τ ввода инвестиций и моментом t их освоения, описывается следующими соотношениями

$$X(t)=aX(t)+Y(t),\ Y(t)=I(t)+C(t),$$

$$K'(t)=-\mu K(t)+V(t),\ V'(t)=-\lambda V(t)+\lambda I(t),$$

где, как и ранее, $X(t)$, $Y(t)$, $I(t)$, $C(t)$ – интенсивности производства валового продукта, конечного продукта, валовых капитальных вложений, непроизводственного потребления соответственно; $K(t)$ – основные фонды; $V(t)$ – ввод в действие основных фондов; $\mu>0$ – коэффициент амортизации основных фондов; $\lambda>0$ – параметр модели. Данная модель предполагает стационарность процесса ввода инвестиций в действие, т.е. тот факт, что доля инвестиций, выделенных в момент τ и вводимых в действие в момент *t*, зависит лишь от разности $t-\tau$, причем функция, определяющая эту долю, имеет вид $N(t-\tau)=\lambda e^{-\lambda(t-\tau)}$ (экспоненциальный закон запаздывания).

Задача 21.6. Составить дифференциальную модель движения основных фондов для однопродуктовой макроэкономической модели в предположении, что связь между основными фондами $K(t)$ и валовым продуктом $X(t)$ линейна, т.е. $X(t) = fK(t)$, где $f > 0$ – фондоемкость продукции. Исследовать полученную дифференциальную систему на устойчивость, считая интенсивность потребления $C(t)$ заранее заданной функцией времени.

Р е ш е н и е. Из условия следует, что $I(t) = (1-a)fK(t) - C(t)$. Поэтому искомая дифференциальная система, описывающая движение основных фондов, имеет вид

$$\begin{cases} K'(t) = -\mu K(t) + V(t), \\ V'(t) = \lambda(1-a) f\, K(t) - \lambda V(t) - \lambda C(t). \end{cases}$$

Устойчивость этой системы зависит от собственных чисел матрицы коэффициентов, для которой характеристический полином имеет вид $v^2 + (\lambda+\mu)v + \lambda(\mu - (1-a)f)$. Из теоремы Виета следует, что при $\mu - (1-a)f < 0$ оба собственных числа матрицы коэффициентов – действительные числа разных знаков, следовательно, в этом случае рассматриваемая система неустойчива; если $\mu - (1-a)f = 0$, то одно из собственных чисел матрицы коэффициентов равно $-(\lambda+\mu) < 0$, а второе -0 и, следовательно, система устойчива; если же $\mu - (1-a)f > 0$, то в силу положительности коэффициента $(\lambda+\mu)$ оба собственных числа матрицы коэффициентов имеют отрицательную действительную часть и в этом случае рассматриваемая система асимптотически устойчива.

22. Фазовая плоскость однородного стационарного линейного векторного уравнения

Уравнение $Dx = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – постоянная двумерная матрица, в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ Dx_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\ a_{kj} \in \mathbb{R},\ k,\ j = 1, 2. \end{cases} \tag{22.1}$$

Плоскость Ox_1x_2 называется фазовой для системы (22.1) или уравнения $Dx = Ax$. Решения $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t)\right)^T$ изображаются на ней в виде фазовых графиков (траекторий)

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t),\quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Ее характеристический полином имеет вид

$$v^2 - (a+d)v + (ad - bc) = v^2 - \operatorname{tr} Av + \Delta,$$

где $\operatorname{tr} A$ – след матрицы A; $\Delta = \det A$. Так как у матрицы $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta & \operatorname{tr} A \end{bmatrix}$ характеристический полином $\det(B - vE)$ совпадает с характеристическим полином матрицы A, то матрицы A и B подобны, если $A \neq \lambda E$, где E – единичная матрица. Преобразованию матрицы A к подобной матрице B соответствует аффинное преобразование $y = Sx$, $\det S \neq 0$, плоскости $\mathbb{R}^2$. Изучение поведения фазовых графиков данного векторного уравнения сводится, таким образом, к изучению поведения фазовых графиков уравнения $Dx = Bx$, $x \in \mathbb{R}^2$. Уравнение $Dx = Bx$ в координатной форме имеет вид $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = -x_1\Delta + x_2 \operatorname{tr} A. \end{cases}$ Эта система определяет фазовые графики уравнения $D^2 x_1 - \operatorname{tr} A \cdot Dx_1 + {}$ $+\Delta x_1 = 0$. Таким образом, изучение фазовых графиков векторного уравнения $Dx = Ax$ при $A \neq \lambda E$ сводится к рассмотрению поведения фазовых графиков полученного стационарного уравнения; при этом тип точки покоя $O(0, 0)$ линейного векторного уравнения такой же, как и у линейного однородного стационарного уравнения второго порядка $D^2 x - \operatorname{tr} A \cdot Dx + \Delta \cdot x = 0$.

Если $A = \lambda E$, то система (22.1) имеет вид $\begin{cases} Dx_1 = \lambda x_1, \\ Dx_2 = \lambda x_2, \end{cases}$ где $x_1(t) = C_1 e^{\lambda t}$, $x_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$ – ее общее решение, а $\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\lambda t}, \\ x_2 = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$ – фазовые графики. При $C_1 = C_2 = 0$ это точка покоя $O(0, 0)$. При $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ фазовые графики представляют собой лучи, примыкающие к точке покоя $O(0, 0)$ и лежащие на прямых $x_2 = \dfrac{C_2}{C_1} x_1$ при $C_1 \neq 0$ и $x_1 = 0$ при $C_1 = 0$. Схема расположения фазовых графиков приведена на рис. 13, 14. Точку покоя $O(0, 0)$ при таком расположении фазовых графиков называют *дикритическим узлом*, неустойчивым в случае $\lambda > 0$ и устойчивым при $\lambda < 0$.

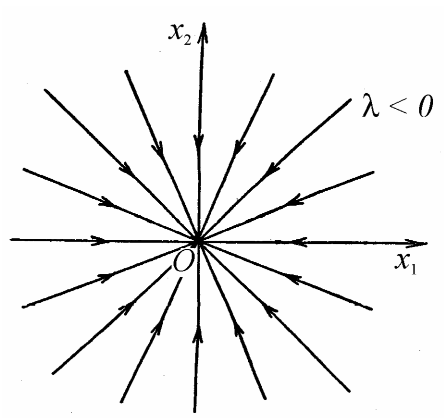


Рис. 13

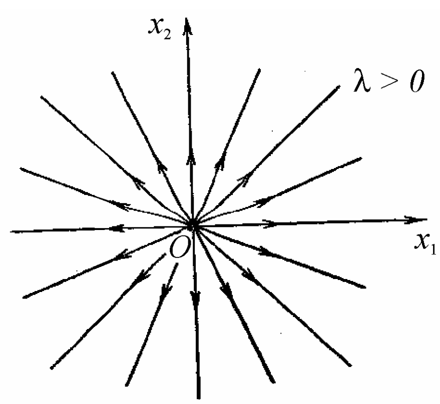


Рис. 14

Отметим, что на фазовой плоскости однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами дикритических узлов не возникает.

При $\lambda = 0$ система (22.1) принимает вид $\begin{cases} Dx_1 = 0, \\ Dx_2 = 0, \end{cases}$ и $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$ – ее фазовые графики, где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Это означает, что любая точка фазовой плоскости Ox_1x_2 является точкой покоя. Этот случай для одного уравнения второго порядка также не возникает.

Задача 22.1. Установить тип точки покоя и начертить схему расположения фазовых графиков линейной однородной дифференциальной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ Dx_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица системы и $A \neq \lambda E$.

А л г о р и т м   р е ш е н и я.

• Составить характеристический многочлен матрицы A: $\det(A - \lambda E)$ и найти его корни.

• Установить тип точки покоя.

• По данной матрице A записать матрицу $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det A & a_{11} + a_{22} \end{pmatrix}$.

• На фазовой плоскости Oy_1y_2 построить фазовые графики системы

$$\begin{cases} Dy_1 = y_2, \\ Dy_2 = -\det A \cdot y_1 + (a_{11} + a_{22})y_2, \end{cases}$$

которые совпадают с фазовыми графиками уравнения

$$D^2y_1 - (a_{11} + a_{22})Dy_1 + \det A \cdot y_1 = 0 .$$

• Построить невырожденную матрицу S такую, что $B = S^{-1}AS$. Для этого, например, переходя к координатной форме записи, можно решить систему

$$SB = AS,$$

где $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ – искомая матрица, и выбрать $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ таким образом, чтобы $\det S \neq 0$.

• Применить линейное невырожденное преобразование $x = Sy$, при котором вектор $a = (a_1, a_2)$ переходит в вектор $b = (b_1, b_2)$, определяемый равенством $Sa = b$, и нарисовать на плоскости Ox_1x_2 фазовые графики исходной системы. Для этого посмотреть, например, куда переходят векторы, определяющие координатные оси, лучевые фазовые графики и т.д.

Задание 22.1.1. Начертить схему расположения фазовых графиков системы

$$Dx = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Р е ш е н и е. Для данной системы уравнение $D^2x_1 - \mathrm{tr}A \cdot Dx_1 + \Delta \cdot x_1 = 0$ имеет вид $D^2x_1 + x_1 = 0.$ Так как корни характеристического уравнения $\nu_1 = i,\ \nu_2 = -i,$ то точка покоя $O(0, 0)$ – центр. Решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$x_1(t) = C_1\cos t + C_2\sin t, \qquad x_2(t) = Dx_1(t) = -C_1\sin t + C_2\cos t,$$

следовательно, фазовыми графиками являются окружности $x_1^2 + x_2^2 = C_1^2 + C_2^2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Матрица B совпадает с исходной матрицей A, следовательно, аффинное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$ в данном случае является тождественным, и поэтому фазовые графики исходной системы задаются уравнением $x_1^2 + x_2^2 = C^2,\ C \in \mathbb{R}.$ Схема расположения фазовых графиков системы приведена на рис. 15.

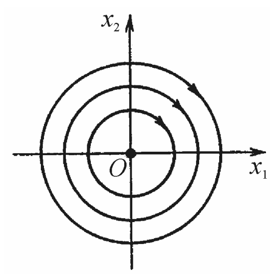


Рис. 15

Задание 22.1.2. Установить тип точки покоя и начертить схему расположения фазовых графиков системы

$$\begin{cases} Dx_1 = -x_1 + 4x_2, \\ Dx_2 = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

ORIGIN ≡ 1

$a11 := -1$ $\quad a12 := 4$ $\quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a21 := 1$ $\quad a22 := 2$

$$A := \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -|A| & a11 + a22 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} := |A - \lambda \cdot E| \left| \begin{matrix} \text{solve} \\ \lambda \end{matrix} \right. \to \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ Точка покоя - седло

$$y1(t, C1, C2) := C1 \cdot e^{v1 \cdot t} + C2 \cdot e^{v2 \cdot t} \to C1 \cdot e^{-2 \cdot t} + C2 \cdot e^{3 \cdot t}$$

$$y2(t, C1, C2) := \frac{d}{dt} y1(t, C1, C2) \to 3 \cdot C2 \cdot e^{3 \cdot t} - 2 \cdot C1 \cdot e^{-2 \cdot t}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y2(t, C1, C2)}{y1(t, C1, C2)} \to 3$$

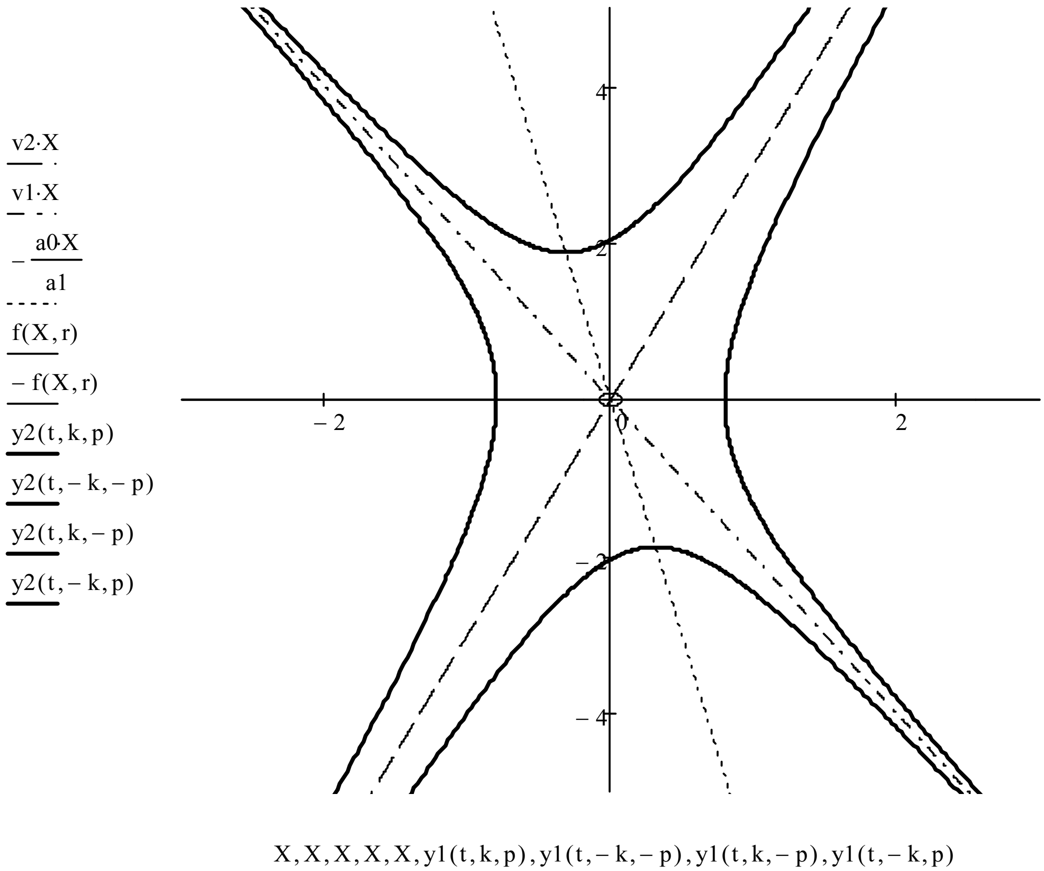
$$\lim_{t \to -\infty} \frac{y2(t, C1, C2)}{y1(t, C1, C2)} \to -2$$

$a0 := |A|$ $\quad a1 := -a11 - a22$ $\quad Fy(x) := -\frac{a0 \cdot x}{a1} \to -6 \cdot x$

$r := 0.079$ $\quad f(x, r) := \left| \begin{matrix} \sqrt{r^2 - x^2} & \text{if } |x| \le r \\ 0 & \text{otherwise} \end{matrix} \right.$

$a := -3$ $\quad h := 0.005$ $\quad b := 3$ $\quad t := a, a + h .. b$ $\quad X := a, a + h .. b$

$k := 0.5$ $\quad p := 0.3$



$$A\cdot\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot B \rightarrow \begin{pmatrix}4\cdot\gamma-6\cdot\beta-\alpha & 4\cdot\delta-\alpha-2\cdot\beta\\ 2\cdot\gamma+\alpha-6\cdot\delta & \beta-\gamma+\delta\end{pmatrix}$$

Given

$$0 = 4\cdot\gamma - 6\cdot\beta - \alpha$$

$$0 = 2\cdot\gamma + \alpha - 6\cdot\delta$$

$$0 = 4\cdot\delta - \alpha - 2\cdot\beta$$

$$0 = \beta - \gamma + \delta$$

$$\left|\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\right| = -1$$

$$\mathrm{Find}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

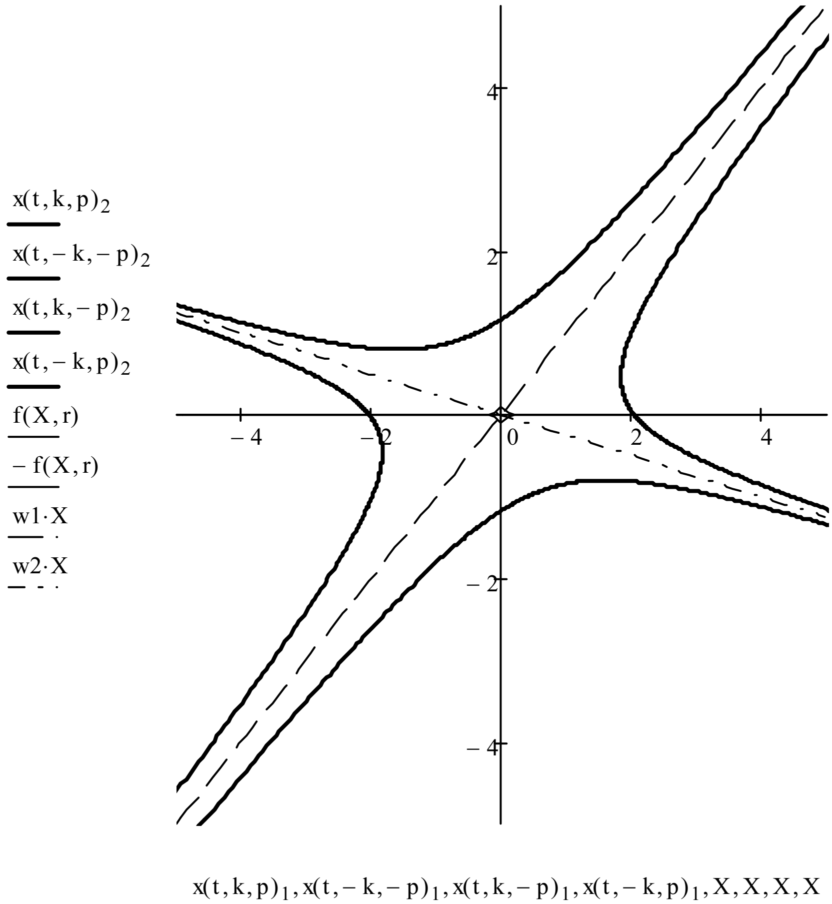
$$S := \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$x(t,C1,C2) := S\cdot\begin{pmatrix}y1(t,C1,C2)\\ y2(t,C1,C2)\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}C2\cdot e^{3\cdot t}-4\cdot C1\cdot e^{-2\cdot t}\\ C1\cdot e^{-2\cdot t}+C2\cdot e^{3\cdot t}\end{pmatrix}$$

$$w1 := \lim_{t\to\infty}\frac{x(t,C1,C2)_2}{x(t,C1,C2)_1}\rightarrow 1 \qquad w2 := \lim_{t\to-\infty}\frac{x(t,C1,C2)_2}{x(t,C1,C2)_1}\rightarrow -\frac{1}{4}$$

$a := -5 \qquad h := 0.1 \qquad b := 5 \qquad X := a, a + h .. b$

$a := -2 \qquad h := 0.005 \qquad b := 2 \qquad t := a, a + h .. b \qquad r := 0.105$



Задание 22.1.3. Установить тип точки покоя и начертить схему расположения фазовых графиков системы

$$\begin{cases} Dx_1 = -x_1 - 2x_2, \\ Dx_2 = 6x_1 + x_2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

$a11 := -1 \qquad a12 := -2 \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ORIGIN \equiv 1$

$a21 := 6 \qquad a22 := 1$

$A := \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -|A| & a11 + a22 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -11 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} := |A - \lambda \cdot E| \ \Big|\begin{matrix} \text{solve} \\ \lambda \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{11} \cdot i \\ \sqrt{11} \cdot i \end{pmatrix}$$

$$y1(t, C1, C2) := C1 \cdot e^{Re(v1) \cdot t} \cdot \cos(Im(v1) \cdot t + C2) \rightarrow C1 \cdot \cos\left(C2 - \sqrt{11} \cdot t\right)$$

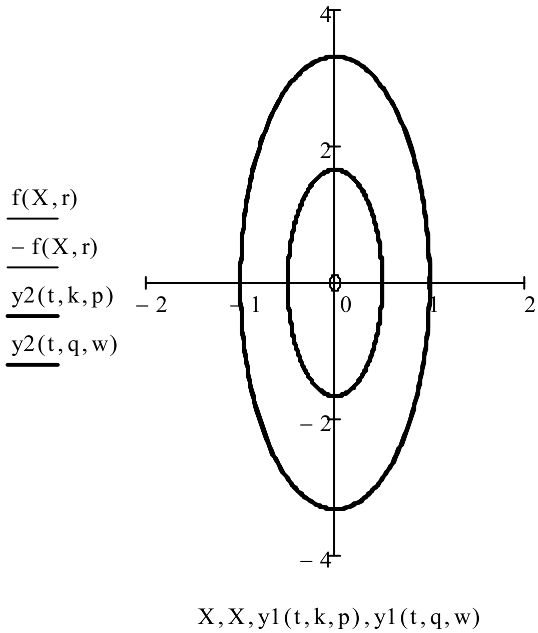
$$y2(t, C1, C2) := \frac{d}{dt} y1(t, C1, C2) \rightarrow \sqrt{11} \cdot C1 \cdot \sin\left(C2 - \sqrt{11} \cdot t\right)$$

$r := 0.06$

$$f(x, r) := \begin{vmatrix} 2\sqrt{r^2 - x^2} & \text{if } |x| \le r \\ 0 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

$a := -2$ $\quad h := 0.01$ $\quad b := 2$ $\quad t := a, a + h .. b$ $\quad X := a, a + h .. b$

$k := 0.5$ $\quad p := 0.2$ $\quad q := 2 \cdot k$ $\quad w := 2 \cdot p$



$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} -11 \cdot \beta & \alpha \\ -11 \cdot \delta & \gamma \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \cdot \gamma - \alpha & -\beta - 2 \cdot \delta \\ \gamma + 6 \cdot \alpha & 6 \cdot \beta + \delta \end{pmatrix}$$

Given

$-11 \cdot \beta = -2 \cdot \gamma - \alpha$ $\qquad \gamma = 6 \cdot \beta + \delta$

$\alpha = -\beta - 2 \cdot \delta$ $\qquad \alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta = -1$

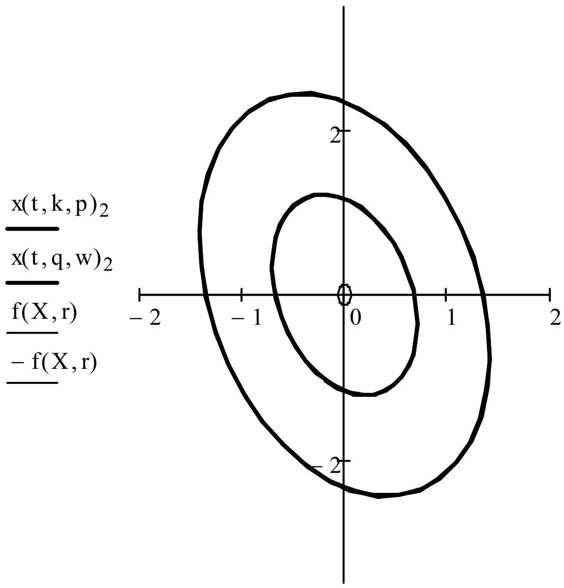
$-11 \cdot \delta = \gamma + 6 \cdot \alpha$

$$\text{Find}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

$$x(t, C1, C2) := \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{6}\cdot C1\cdot\cos\left(C2 - \sqrt{11}\cdot t\right)}{6} - \dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}\cdot C1\cdot\sin\left(C2 - \sqrt{11}\cdot t\right)}{6} \\ -\sqrt{6}\cdot C1\cdot\cos\left(C2 - \sqrt{11}\cdot t\right) \end{pmatrix}$$

$a := -2$ $\quad h := 0.05$ $\quad b := 2$ $\quad t := a, a + h .. b$

$k := 0.5$ $\quad p := 0.2$ $\quad q := 2\cdot k$ $\quad w := 2\cdot p$



Задание 22.1.4. Установить тип точки покоя и начертить схему расположения фазовых графиков системы

$$\begin{cases} Dx_1 = -x_1 - 2x_2, \\ Dx_2 = 4x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

$a11 := -1$ $\quad a12 := -2$ $\quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad ORIGIN \equiv 1$

$a21 := 4$ $\quad a22 := 3$

$A := \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$ $\quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -|A| & a11 + a22 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} := |A - \lambda\cdot E| \ \Big|\begin{matrix} solve \\ \lambda \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 1 + 2i \end{pmatrix}$$

$$y1(t,C1,C2) := C1\cdot e^{Re(v1)\cdot t}\cdot\cos(Im(v1)\cdot t + C2) \rightarrow C1\cdot\cos(C2 - 2\cdot t)\cdot e^{t}$$

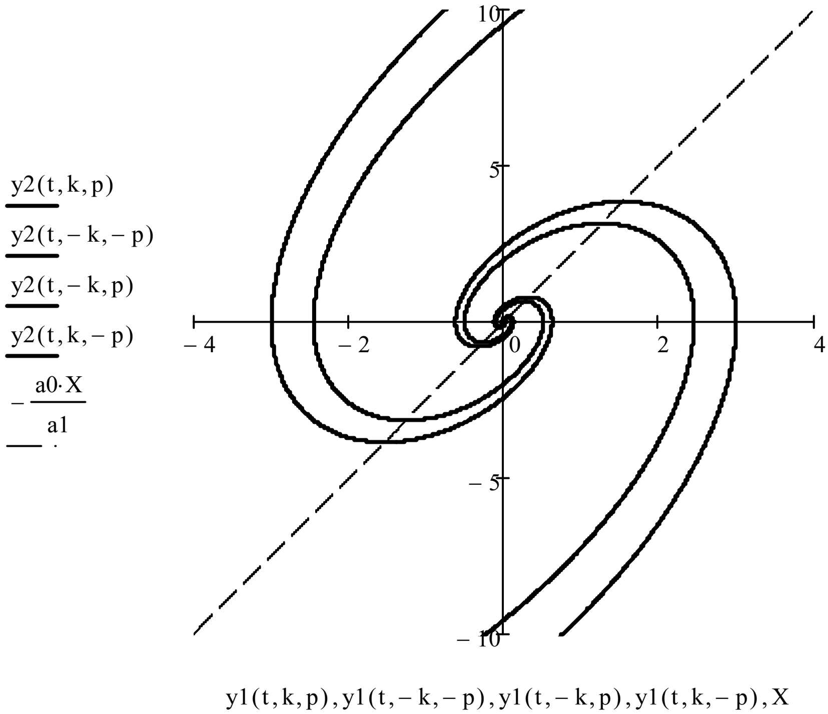
$$y2(t,C1,C2) := \frac{d}{dt}y1(t,C1,C2) \rightarrow C1\cdot\cos(C2 - 2\cdot t)\cdot e^{t} + 2\cdot C1\cdot\sin(C2 - 2\cdot t)\cdot e^{t}$$

$a0 := |A|$ $\quad a1 := -a11 - a22$ $\quad Fy(x) := -\frac{a0\cdot x}{a1} \rightarrow \frac{5\cdot x}{2}$

$a := -4$ $\quad h := 0.001$ $\quad b := 4$ $\quad t := a, a + h .. b$

$X := a, a + h .. b$

$k := 0.5$ $\quad p := 0.2$



$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot B \rightarrow \begin{pmatrix}-5\cdot\beta & 2\cdot\beta + \alpha\\ -5\cdot\delta & \gamma + 2\cdot\delta\end{pmatrix} \qquad A\cdot\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-2\cdot\gamma - \alpha & -\beta - 2\cdot\delta\\ 3\cdot\gamma + 4\cdot\alpha & 4\cdot\beta + 3\cdot\delta\end{pmatrix}$$

Given

$-5\cdot\beta = -2\cdot\gamma - \alpha$ $\qquad \gamma + 2\cdot\delta = 4\cdot\beta + 3\delta$

$2\cdot\beta + \alpha = -\beta - 2\cdot\delta$ $\qquad \alpha\cdot\delta - \gamma\cdot\beta = -1$

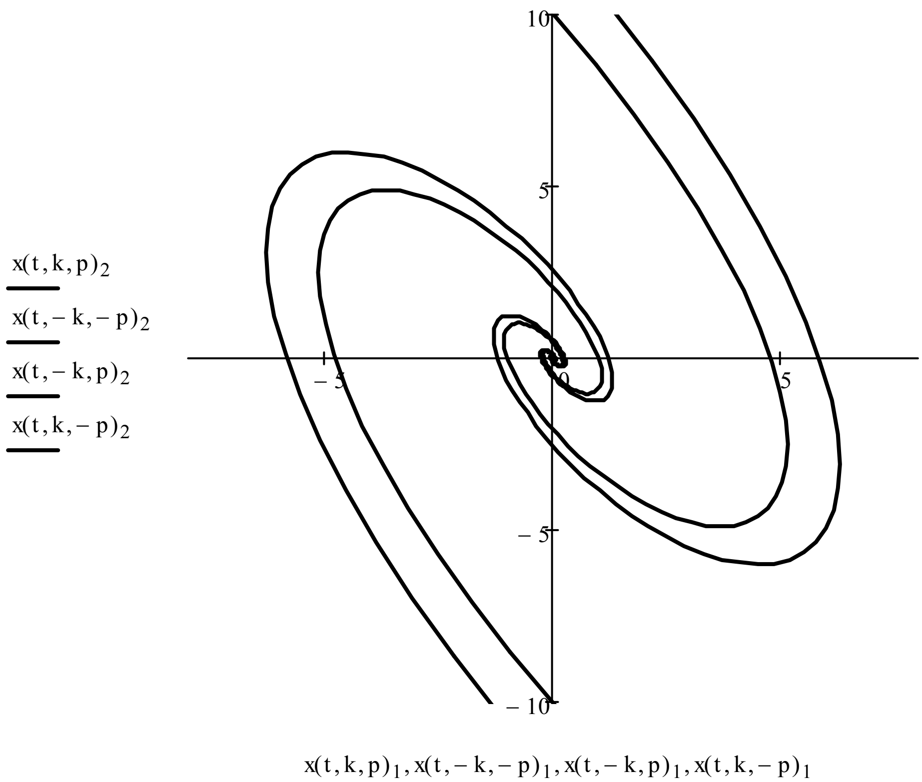
$-5\cdot\delta = 3\gamma + 4\cdot\alpha$

$$Find(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \rightarrow \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad S := \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$x(t, C1, C2) := S\cdot\begin{pmatrix} y1(t, C1, C2) \\ y2(t, C1, C2) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C1\cdot\cos(C2 - 2\cdot t)\cdot e^{t} - C1\cdot\sin(C2 - 2\cdot t)\cdot e^{t} \\ -2\cdot C1\cdot\cos(C2 - 2\cdot t)\cdot e^{t} \end{pmatrix}$$

$a := -4$ $\quad h := 0.05$ $\quad b := 4$ $\quad t := a, a + h .. b$

$k := 0.5$ $\quad p := 0.2$



Задача 22.2. Установить тип точки покоя и начертить схему расположения фазовых графиков линейной однородной дифференциальной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} Dx_1 = \lambda x_1, \\ Dx_2 = \lambda x_2 \end{cases} \quad (\, A = \lambda E, \quad \lambda \neq 0\,).$$

А л г о р и т м р е ш е н и я.

- Установить тип точки покоя.
- Записать общее решение $x_1(t) = C_1 e^{\lambda t}$, $x_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$.
- На фазовой плоскости Ox_1x_2 построить фазовые графики $x_1 = C_1 e^{\lambda t}$, $x_2 = C_2 e^{\lambda t}$ исходной системы.
- Установить направление движения по фазовым графикам.

Задание 22.2.1. Установить тип точки покоя и начертить схему расположения фазовых графиков системы

$$\begin{cases} Dx_1 = -3x_1, \\ Dx_2 = -3x_2 \end{cases} \quad (A = -3E).$$

Установить направление движения по фазовым графикам.

Р е ш е н и е.

$$a11 := -3 \qquad a12 := 0 \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$a21 := 0 \qquad a22 := -3$$

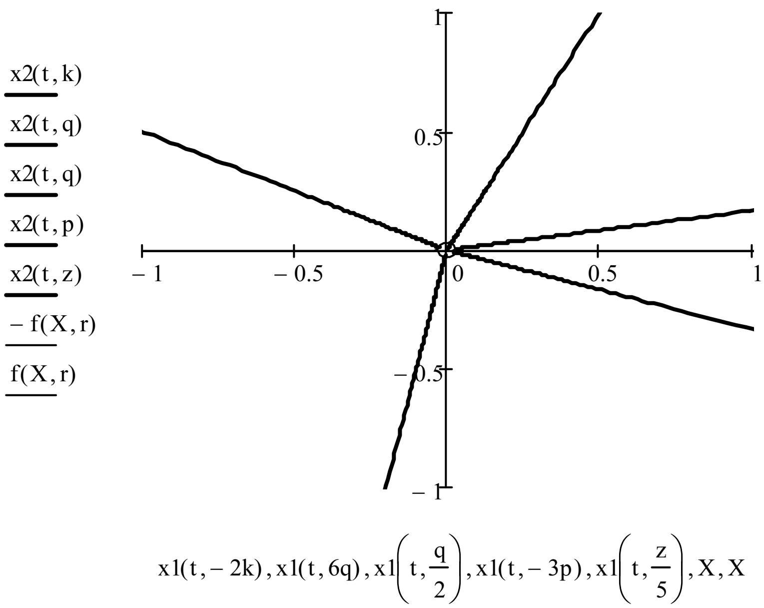
$$A := \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} := |A - \lambda \cdot E| \ \begin{vmatrix} \text{solve} \\ \lambda \end{vmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad f(x,r) := \left| \begin{array}{l} \sqrt{r^2 - x^2} \ \text{ if } \ |x| \le r \\ 0 \ \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

$$x1(t, C1) := C1 \cdot e^{-3 \cdot t} \qquad x2(t, C2) := C2 \cdot e^{-3 \cdot t}$$

$$\lim_{t \to \infty} \left(C1 \cdot e^{-3 \cdot t}\right) \rightarrow 0 \qquad \lim_{t \to \infty} \left(C2 \cdot e^{-3 \cdot t}\right) \rightarrow 0$$

$$k := 5 \qquad p := -3 \qquad q := 2 \qquad z := -10 \qquad r := 0.03$$

$$a := -2 \qquad h := 0.01 \qquad b := 2 \qquad t := a, a + h .. b \qquad X := a, a + h .. b$$



К о м м е н т а р и й. Так как $v_1 = v_2 = -3$, то точка покоя $O(0, 0)$ – устойчивый дикритический узел и движение по фазовым графикам происходит в направлении к точке O.

Установить тип точки покоя и начертить схему расположения фазовых графиков однородных уравнений вида $Dx = Ax$ с заданной матрицей:

601. $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

602. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

603. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

604. $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

605. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

606. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

607. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

608. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

609. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Установить тип точки покоя и начертить схему расположения фазовых графиков следующих однородных систем дифференциальных уравнений:

609.1. $\begin{cases} Dx_1 = 3x_1 + 2x_2, \\ Dx_2 = -2x_1 - 2x_2. \end{cases}$

609.2. $\begin{cases} Dx_1 = 3x_1 - 2x_2, \\ Dx_2 = 5x_1 - 4x_2. \end{cases}$

609.3. $\begin{cases} Dx_1 = x_1 + 4x_2, \\ Dx_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$

609.4. $\begin{cases} Dx_1 = 2x_1 + 6x_2, \\ Dx_2 = -2x_1 - 5x_2. \end{cases}$

609.5. $\begin{cases} Dx_1 = 5x_1 + 3x_2, \\ Dx_2 = -3x_1 - x_2. \end{cases}$

609.6. $\begin{cases} Dx_1 = -5x_1 + 3x_2, \\ Dx_2 = -4x_1 + 2x_2. \end{cases}$

609.7. $\begin{cases} Dx_1 = 4x_1 + 2x_2, \\ Dx_2 = -x_1 + x_2. \end{cases}$

609.8. $\begin{cases} Dx_1 = -5x_1 - 3x_2, \\ Dx_2 = 3x_1 + x_2. \end{cases}$

609.9. $\begin{cases} Dx_1 = -4x_1 + x_2, \\ Dx_2 = -x_1 - 2x_2. \end{cases}$

609.10. $\begin{cases} Dx_1 = -3x_1 - 2x_2, \\ Dx_2 = 4x_1 + x_2. \end{cases}$

609.11. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1 - 2x_2, \\ Dx_2 = 2x_1 - x_2. \end{cases}$

609.12. $\begin{cases} Dx_1 = x_1 - 2x_2, \\ Dx_2 = 5x_1 - x_2. \end{cases}$

609.13. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1 + 10x_2, \\ Dx_2 = -x_1 + x_2. \end{cases}$

609.14. $\begin{cases} Dx_1 = -3x_1 - 2x_2, \\ Dx_2 = 2x_1 + 2x_2. \end{cases}$

609.15. $\begin{cases} Dx_1 = x_1 + x_2, \\ Dx_2 = 4x_1 + x_2. \end{cases}$

609.16. $\begin{cases} Dx_1 = 4x_1 + 2x_2, \\ Dx_2 = -x_1 + x_2. \end{cases}$

609.17. $\begin{cases} Dx_1 = -5x_1 - 2x_2, \\ Dx_2 = 2x_1 - x_2. \end{cases}$

609.18. $\begin{cases} Dx_1 = x_1 - 2x_2, \\ Dx_2 = 4x_1 - 3x_2. \end{cases}$

609.19. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1 + 4x_2, \\ Dx_2 = -x_1 - x_2. \end{cases}$

609.20. $\begin{cases} Dx_1 = x_1 + x_2, \\ Dx_2 = -10x_1 - x_2. \end{cases}$

609.21. $\begin{cases} Dx_1 = x_1 + 5x_2, \\ Dx_2 = -2x_1 - x_2. \end{cases}$

609.22. $\begin{cases} Dx_1 = 2x_1 - x_2, \\ Dx_2 = x_1 - 2x_2. \end{cases}$

609.23. $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = x_1. \end{cases}$

609.24. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1, \\ Dx_2 = -x_2. \end{cases}$

В зависимости от значений параметра α $(\alpha \in \mathbb{R})$ определить тип точки покоя систем дифференциальных уравнений. Начертить схему расположения фазовых графиков при указанных значениях параметра α:

609.25. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + x_2, \\ Dx_2 = -x_1 + \alpha x_2, \end{cases}$ $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

609.26. $\begin{cases} Dx_1 = x_1, \\ Dx_2 = x_1 + \alpha x_2, \end{cases}$ $\alpha = -\dfrac{1}{10}$.

609.27. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 - x_2, \\ Dx_2 = -2x_1 + 3x_2, \end{cases}$ $\alpha = \dfrac{1}{3}.$

609.28. $\begin{cases} Dx_1 = x_1 + \alpha x_2, \\ Dx_2 = x_1 + x_2, \end{cases}$ $\alpha = -1.$

609.29. $\begin{cases} Dx_1 = 2x_1 + \alpha x_2, \\ Dx_2 = 2x_1 + x_2, \end{cases}$ $\alpha = 2.$

609.30. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + 2x_2, \\ Dx_2 = 2x_1, \end{cases}$ $\alpha = 0.$

609.31. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 - x_2, \\ Dx_2 = x_1 + \alpha x_2, \end{cases}$ $\alpha = \dfrac{1}{10}.$

609.32. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 - 2x_2, \\ Dx_2 = 2x_1, \end{cases}$ $\alpha = 0.$

609.33. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + x_2, \\ Dx_2 = x_1 - \alpha x_2, \end{cases}$ $\alpha = \dfrac{1}{2}.$

609.34. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + 2x_2, \\ Dx_2 = -2x_1, \end{cases}$ $\alpha = -\dfrac{1}{2}.$

609.35. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1, \\ Dx_2 = \alpha x_1 + x_2, \end{cases}$ $\alpha = -1.$

609.36. $\begin{cases} Dx_1 = 2x_2, \\ Dx_2 = \alpha x_1 + 2x_2, \end{cases}$ $\alpha = -\dfrac{1}{2}.$

609.37. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + 4x_2, \\ Dx_2 = x_1, \end{cases}$ $\alpha = 0.$

Определить и изобразить графически область плоскости параметров α и β $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, при которых следующие однородные линейные системы дифференциальных уравнений имеют указанный тип точки покоя:

609.38. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ Dx_2 = \alpha x_1 + x_2, \end{cases}$ монокритический узел.

609.39. $\begin{cases} Dx_1 = (\alpha + 1)x_1 + \beta x_2, \\ Dx_2 = x_1 + \alpha x_2, \end{cases}$ центр.

609.40. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ Dx_2 = \alpha x_1 + x_2, \end{cases}$ фокус.

609.41. $\begin{cases} Dx_1 = x_1 + \beta x_2, \\ Dx_2 = \alpha x_1 + \alpha x_2, \end{cases}$ фокус.

609.42. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ Dx_2 = \alpha x_1 + x_2, \end{cases}$ бикритический узел.

609.43. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + x_2, \\ Dx_2 = x_1 + \beta x_2, \end{cases}$ седло.

609.44. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ Dx_2 = x_1 + (\alpha - 1)x_2, \end{cases}$ центр.

609.45. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + x_2, \\ Dx_2 = x_1 + \beta x_2, \end{cases}$ бикритический узел.

609.46. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ Dx_2 = x_1 + (\alpha - 1)x_2, \end{cases}$ фокус.

609.47. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + x_2, \\ Dx_2 = -x_1 + \beta x_2, \end{cases}$ центр.

609.48. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ Dx_2 = x_1 + (\alpha - 1)x_2, \end{cases}$ седло.

609.49. $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + x_2, \\ Dx_2 = -x_1 + \beta x_2, \end{cases}$ седло.

609.50. $\begin{cases} Dx_1 = (\alpha + 1)x_1 + \beta x_2, \\ Dx_2 = x_1 + \alpha x_2, \end{cases}$ бикритический узел.

609.51. $\begin{cases} Dx_1 = (\alpha + 1)x_1 + \beta x_2, \\ Dx_2 = x_1 + \alpha x_2, \end{cases}$ седло.

Исследовать устойчивость линейных векторных уравнений вида $Dx = Ax$ с заданной матрицей и указать тип точек покоя $(\alpha \in \mathbb{R})$:

610. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

611. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

612. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

613. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

614. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$.

615. $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}$.

616. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$.

617. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

618. $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

619. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

620. $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

621. $\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$.

23. Разные задачи

622. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} Dx_1 = 2x_1 - x_2, \\ Dx_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

описывает взаимное влияние популяций двух конкурирующих видов на скорость их роста. Допустим, что вначале популяции $x_1(0)$ и $x_2(0)$ состоят соответственно из 100 и 200 особей. Найти численность обоих видов в момент времени t.

623. Допустим, что $x_1(t)$ – численность вида-хищника, а $x_2(t)$ – численность вида-жертвы в момент времени t. Скорость роста их популяций описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} Dx_1 = x_1 + x_2, \\ Dx_2 = -x_1 + x_2. \end{cases}$$

Определить численность популяций в момент времени t, если начальные популяции $x_1(0) = x_2(0) = 1000$ особей. Когда наступит вымирание вида-жертвы?

624. Составить математическую модель кооперации двух видов популяций, если численность популяции каждого вида возрастает пропорционально численности популяции другого вида (коэффициенты пропорциональности – соответственно 4 и 1) и убывает пропорционально собственной численности (коэффициент пропорциональности 2). Найти численность популяций в момент времени t, если начальные популяции состояли соответственно из 100 и 300 особей.

625. Популяции некоторого вида в момент времени t содержат $x_1(t)$ самцов и $x_2(t)$ самок. Система, предлагаемая в качестве модели роста такой популяции, имеет вид

$$\begin{cases} Dx_1 = -ax_1 + bx_2, \\ Dx_2 = cx_2, \end{cases}$$

где a, b, c – положительные постоянные. Определить количество самцов и самок в момент времени t, если $x_1(0) = \alpha$, $x_2(0) = \beta$.

626. Колония бактерий увеличивается пропорционально ее численности, но выделяемый бактериями яд истребляет их пропорционально числу бактерий и массе яда. Предполагая, что скорость выработки яда пропорциональна численности колонии, составить математическую модель процесса. Показать, что число бактерий, сначала возрастающее до некоторого значения, затем убывающее до нуля, в момент времени t определяется формулой $N = M / \operatorname{ch}^2 kt$, M – наибольшее число бактерий, а время t измеряется с того момента, когда $N = M$.

627. Преобразование радиоактивного вещества происходит со скоростью, пропорциональной его массе. При этом скорость преобразования такова, что половина массы изменяется по истечении 27 мин. В свою очередь половина полученной массы преобразуется в другое вещество в течение 19,5 мин. Приняв первоначальную массу за единицу, найти массы двух новых веществ, полученных по истечении 1 ч.

628. В некоторой химической реакции вещество x преобразуется в вещество y со скоростью, пропорциональной массе вещества x, в то же время образовавшееся вещество y посредством обратной реакции переходит в вещество x со скоростью, пропорциональной массе вещества y. Химический анализ дал такие результаты: $x = 10$, $y = 0$ при $t = 0$; $x = 6$, $y = 4$ при $t = 3$; $x = 5{,}5$, $y = 4,5$ при $t \to +\infty$. Найти зависимость x и y от t.

629. По горизонтальной хорде вертикально расположенного круга движется точка массой 1 кг, на которую действует упругая сила, пропорциональная расстоянию от точки до центра круга и направленная все время к центру. Коэффициент пропорциональности $k = 16$ Н/м. Вертикальная составляющая этой силы уравновешивается силой реакции. Кроме того, на точку действует сила сопротивления, пропорциональная скорости, причем коэффициент пропорциональности $\gamma = 10$ Н · с/м. Определить закон движения точки, если в начальный момент она находилась в крайнем левом положении и была отпущена без начальной скорости. Расстояние от центра до хорды 30 см, радиус круга 50 см. (Указание. Систему координат Oxy выбрать так, чтобы ось Ox совпадала с хордой, а ось Oy – с диаметром, рис. 16.)

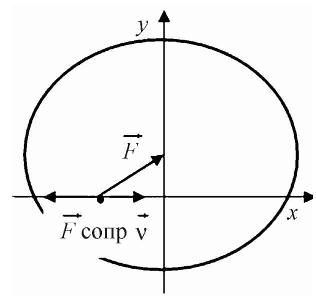


Рис. 16

630. Решить задачу 629, если масса точки равна 2 кг.

631. Материальная точка массой m притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной их расстоянию до точки. Коэффициент пропорциональности равен k. Расстояние между центрами $2b$. В начальный момент точка находится на линии соединения центров на расстоянии c от ее середины. Начальная скорость равна v_0 и направлена перпендикулярно к прямой, соединяющей центры. Составить математическую модель движения точки.

631.1. В некоторой области пространства создано магнитное поле с индукцией $B = (0,\ 0,\ B_0)$, причем электрических полей и токов в этой области пространства нет. Из начала координат со скоростью $V(0) = V_0\ (v_0,\ 0,\ 0)$ вылетает частица массой m и с положительным зарядом q. Найти траекторию движения частицы, предполагая ее движение нерелятивистским. (Указание. При составлении модели движения воспользоваться тем фактом, что на движущуюся частицу действует сила Лоренца $F = q[V, B]$, которая вследствие предположения о нерелятивистском характере движения будет равна, по второму закону Ньютона, $F = mV'$; здесь через $[\ \cdot\ ,\ \cdot\ ]$ обозначено векторное произведение векторов.)

631.2. В момент $t = 0$ частица массой m и с положительным зарядом q покоится в начале координат. На частицу действует однородное электрическое поле, напряженность которого $E = (0,\ E_0,\ 0)$, и однородное магнитное поле с индукцией $B = (0,\ 0,\ B_0)$. Найти траекторию движения частицы, предполагая ее движение нерелятивистским. (Указание. При составлении модели движения воспользоваться тем фактом, что на движущуюся частицу действует сила Лоренца $F = qE + q[V, B]$.)

632. Солевой раствор переливается из одного сосуда в другой со скоростью, пропорциональной объему раствора. Коэффициент пропорциональности a. Раствор вытекает с постоянной скоростью b, где $a > 0$, $b > 0$. Составить математическую модель процесса и определить объемы солевого раствора в сосудах в момент времени t, если в начальный момент времени сосуды содержали соответственно 1000 и 100 см^3 солевого раствора. Показать, что если $b \to a > 1000$, то солевой раствор во втором сосуде накапливается до максимального объема, а затем убывает.

633. Сообщество из n индивидуумов подвергается воздействию редкого инфекционного заболевания. В момент времени t оно состоит из $x_1(t)$ восприимчивых индивидуумов, $x_2(t)$ заражаемых, контактирующих с другими, и $x_3(t)$ изолированных или обладающих иммунитетом. Математическая модель распространения этого заболевания задается системой

$$\begin{cases} Dx_1 = -ax_1(0)x_2, \\ Dx_2 = (ax_1(0) - b)x_2, \\ Dx_3 = bx_2, \end{cases}$$

где a, b – положительные постоянные, отражающие скорости, с какими заражаются восприимчивые индивидуумы и зараженные изолируются или приобретают иммунитет. Построить решение системы, если $x_2\big|_{t=0} = x_2(0)$.

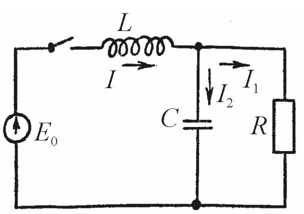


Рис. 17

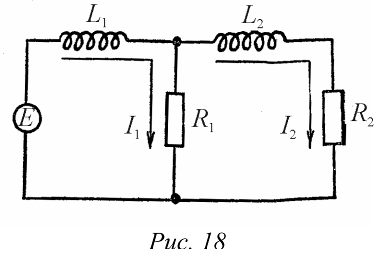


Рис. 18

634. Вещество A разлагается на два вещества X_1 и X_2. Скорость образования каждого из них пропорциональна массе неразложившегося вещества A. Найти законы изменения массы веществ X_1 и X_2 в зависимости от времени t, если через 1 ч после начала процесса они равны соответственно $a/8$, $3a/8$, где a – первоначальная масса вещества A.

635. Индуктивность, емкость и сопротивление соединены по схеме, приведенной на рис. 17. Цепь подключается к источнику с постоянной ЭДС, равной E_0. До включения ток и заряд в цепи отсутствовали. Составить математическую модель тока в цепи.

636. Электрическая цепь, включающая два индуктивных элемента и два элемента сопротивления, соединена по схеме, показанной на рис. 18. Цепь подключается к источнику с ЭДС, равной E. Составить математическую модель тока в цепи.

636.1. а) Построить и исследовать на устойчивость дифференциальную систему, описывающую движение основных фондов в однопродуктовой модели Леонтьева (см. задачу 21.5) при условии, что потребление определяется как фиксированная часть u (доля накопления) конечного продукта, т.е. $C(t) = uY(t)$, где $C(t)$, $Y(t)$ – интенсивности потребления и конечного продукта соответственно; $0 < u < 1$.

б) Показать, что при достаточно близкой к 1 доле накопления величина основных фондов стремится к 0 при $t \to +\infty$, т.е. происходит «проедание фондов».

в) Найти максимальное значение доли потребления, при котором не происходит «проедание фондов».

636.2. Для марковского случайного процесса с непрерывным временем $t \geq 0$ и дискретным множеством значений $\{0, 1, 2, ..., N-1\}$ обозначим через $\pi_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t процесс находится в состоянии k, $0 \leq k \leq N-1$. Если $p_{ij}\Delta t$ – вероятности перехода процесса из состояния i в состояние j, $i \neq j$, за бесконечно малый промежуток времени Δt, $0 \leq i, j \leq N-1$, то вектор вероятностей $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), ..., \pi_{N-1}(t))^T$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$D\pi(t) = P^T\pi(t), \text{ где } P = (p_{ij}),$$

причем $p_{ii} = -(p_{i0} + p_{i1} + ... + p_{ii-1} + p_{ii+1} + ... + p_{iN-1})$. В частности, система Колмогорова – Маркова для процесса случайного блуждания частицы на прямой в случае трех состояний (частица находится на числовой прямой либо в точке с координатой -1, либо с координатой 0, либо с координатой $+1$) имеет вид

$$\begin{cases} D\pi_-(t) = -\mu\pi_-(t) + \lambda\pi_0(t), \\ D\pi_0(t) = \mu\pi_-(t) - (\lambda+\mu)\pi_0(t) + \lambda\pi_+(t), \\ D\pi_+(t) = \mu\pi_0(t) - \lambda\pi_+(t), \end{cases}$$

где $\pi_-(t)$, $\pi_0(t)$, $\pi_+(t)$ – вероятности нахождения частицы в момент времени t в точках с координатами -1, 0, $+1$ соответственно; $\lambda\Delta t$ и $\mu\Delta t$ – вероятности перехода частицы за промежуток времени Δt на единицу влево и вправо соответственно.

Найти вероятности $\pi_-(t)$, $\pi_0(t)$, $\pi_+(t)$ случайного марковского процесса, описываемого системой Колмогорова – Маркова, если в момент времени $t = 0$ нахождение частицы в любом из возможных состояний равновероятно, т.е. $\pi_-(0) = \pi_0(0) = \pi_+(0) = 1/3$, и $\lambda = 1/6$, $\mu = 2/3$.

636.3. Частным случаем марковского процесса с непрерывным временем и дискретным множеством значений является процесс функционирования n-канальной системы массового обслуживания с отказами, система дифференциальных уравнений для которого имеет вид

$$\begin{cases} D\pi_0(t) = -\lambda\pi_0(t) + \mu\pi_1(t), \\ D\pi_k(t) = \lambda\pi_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)\pi_k(t) + (k+1)\mu\pi_{k+1}(t), \quad 1 \leq k \leq n-1, \\ D\pi_n(t) = \lambda\pi_{n-1}(t) - n\mu\pi_n(t), \end{cases}$$

где $\pi_k(t)$ – вероятность того, что k каналов заняты обслуживанием в момент времени t; λ – интенсивность входящего потока заявок; μ – интенсивность обслуживания заявок.

Проинтегрировать систему, соответствующую двухканальной системе массового обслуживания с отказами в случае, когда $\lambda = 2$, $\mu = 1$.

636.4. Если на фондовом рынке действуют N трейдеров (продавцов или покупателей ценных бумаг) и α_k – актив k-го трейдера, $1 \leq k \leq N$, в момент времени $t \geq 0$, то активы трейдеров удовлетворяют дифференциальной системе $D\alpha = Q\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)^T$; $Q = (q_{ij})$ – матрица интенсивности торговли, q_{ij} – интенсивность торговли между i-м и j-м трейдерами, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq N$, причем $q_{ii} = -(q_{1i} + q_{2i} + \ldots + q_{i-1i} + q_{i+1i} + \ldots + q_{Ni})$. Найти зависимость активов каждого трейдера от времени, если матрица интенсивности торговли имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

а начальные активы трейдеров $\alpha_1(0) = a$, $\alpha_2(0) = b$, $\alpha_3(0) = c$.

Контрольная работа № 2

Вариант I

1. Сведением к стационарному уравнению проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} Dx = 2x + y, \\ Dy = 3x + 4y. \end{cases}$$

2. Используя экспонентное представление решения, найти общее решение линейного векторного уравнения $Dx = Ax$, где

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Используя матрицу Коши, записать решение нулевой задачи Коши $Dx = Ax + f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, при $t = 1$, где A – матрица задачи 2.

4. Используя метод Лагранжа, проинтегрировать систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} Dx = y - 5\cos t, \\ Dy = 2x + y. \end{cases}$

5. Определить тип точки покоя системы $\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 - x_2, \\ Dx_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$ в зависимости от значений параметра α. Исследовать устойчивость системы при $\alpha = -4$.

Вариант II

1. Сведением к стационарному уравнению проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} Dx = x + y, \\ Dy = 3y - 2x. \end{cases}$$

2. Используя экспонентное представление решения, найти общее решение линейного векторного уравнения $Dx = Ax$, где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Используя матрицу Коши, записать решение нулевой задачи Коши $Dx = Ax + f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, при $t = 2$, где A – матрица задачи 2.

4. Используя метод Лагранжа, проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} Dx = y + 2e^t, \\ Dy = x + t^2. \end{cases}$$

5. Определить тип точки покоя системы $\begin{cases} Dx_1 = 2x_1 + x_2, \\ Dx_2 = x_1 + \alpha x_2 \end{cases}$ в зависимости от значений параметра α. Исследовать устойчивость системы при $\alpha = 1$.

Тестовые задания

1. Сводя систему к уравнению, найти решение $(x_1(t), x_2(t))$ задачи Коши

$$\begin{cases} Dx_1 = x_2, & x_1|_{t=0} = 1, \\ Dx_2 = x_1 + 2e^t - t^2, & x_2|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

Значение выражения $2x_1(1) - 3\ x_2(1)$ равно:

а) 1; б) 3; в) $-3e$; г) e; д) $1-3e$.

2. Используя экспоненту матрицы, вычислив матрицы J и S, построить решение задачи Коши

$$Dx = Ax + f(t),\ t \in I,\ x|_{t=2} = \xi,\ 2 \in I,\ A = \begin{pmatrix} -33 & 54 & 75 \\ 0 & -1 & -3 \\ -16 & 32 & 39 \end{pmatrix},\ v_1 = -1,\ v_2 = 3,\ d_2 = 2.$$

Правильный ответ указан в:

а) $x(t) = S e^{J(t-2)} S^{-1}\xi + \int\limits_2^t S \begin{pmatrix} e^{-t+\tau} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3(t-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3(t-\tau)} \end{pmatrix} S^{-1} f(\tau)d\tau, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix};$

б) $x(t) = S e^{J(t-2)} S^{-1}\xi + \int\limits_2^t S \begin{pmatrix} e^{-t+\tau} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3(t-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3(t-\tau)} \end{pmatrix} S^{-1} f(\tau)d\tau, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix};$

в) $x(t)=S\,e^{J(t-2)}S^{-1}\xi+\int\limits_2^t S\begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 & 0\\ 0 & e^{3\tau} & \tau e^{3\tau}\\ 0 & 0 & e^{3\tau}\end{pmatrix}S^{-1}f(\tau)d\tau, \quad S=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 3\\ 0 & 4 & -3\end{pmatrix};$

г) $x(t)=S\,e^{J(t-2)}S^{-1}\xi+\int\limits_2^t S\begin{pmatrix} e^{-t+\tau} & 0 & 0\\ 0 & e^{3(t-\tau)} & (t-\tau)e^{3(t-\tau)}\\ 0 & 0 & e^{3(t-\tau)}\end{pmatrix}S^{-1}f(\tau)d\tau, \quad S=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 3\\ 0 & 4 & -3\end{pmatrix}.$

3. Базисная матрица $\Phi(t)$ пространства решений уравнения $Dx=Ax$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8\\ -4 & 7 & -4\\ -8 & -4 & 1\end{pmatrix}$, $v_1=9,\ d_1=2;\ v_2=-9,\ d_2=1,$ построенная по правилу Эйлера, имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} e^{9t} & 0 & 2e^{-9t}\\ -2e^{9t} & -2e^{9t} & e^{-9t}\\ 0 & e^{9t} & 2e^{-9t}\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} e^{9t} & 0 & e^{-9t}\\ e^{9t} & e^{9t} & 0\\ e^{9t} & 0 & e^{-9t}\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & e^{9t} & 2e^{-9t}\\ -2e^{9t} & -2e^{9t} & e^{-9t}\\ e^{9t} & 0 & 2e^{-9t}\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} e^{9t} & 1 & e^{-9t}\\ e^{9t} & e^{9t} & 2\\ e^{9t} & 1 & e^{-9t}\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} e^{-9t} & 0 & 2e^{9t}\\ e^{-9t} & e^{-9t} & 4e^{9t}\\ e^{-9t} & 0 & 3e^{9t}\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 2e^{-9t} & e^{9t} & 0\\ e^{-9t} & -2e^{9t} & -2e^{9t}\\ 2e^{-9t} & 0 & e^{9t}\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} e^{-9t} & e^{-9t} & e^{9t}\\ 2e^{-9t} & 2e^{-9t} & 2e^{9t}\\ 3e^{-9t} & 3e^{-9t} & 3e^{9t}\end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 2e^{-9t} & 0 & e^{9t}\\ e^{-9t} & -2e^{9t} & -2e^{9t}\\ 2e^{-9t} & e^{-9t} & 0\end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} e^{-9t} & 0 & e^{9t}\\ 0 & 0 & e^{9t}\\ e^{-9t} & 0 & e^{9t}\end{pmatrix}$.

Указать все правильные ответы.

4. Точка покоя $O(0,0)$ уравнения $Dx=Ax$, $A=\begin{pmatrix} \alpha & -10\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, будет седлом при значении α, указанном в: а) $\varnothing$; б) $\alpha<0$; в) $\alpha=1$; г) $\alpha>0$.

5. Уравнение $Dx=\begin{pmatrix} 3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} e^t\\ \sin t\end{pmatrix}$ на $[0,+\infty)$ является: а) асимптотически устойчивым; б) устойчивым, но не асимптотически; в) неустойчивым.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

IX. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

24. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнение вида

$$P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = 0, \tag{24.1}$$

где коэффициенты P и Q определены и непрерывны в некоторой области $E \subset \mathbb{R}^2$, называют *уравнением первого порядка в нормальной дифференциальной форме.* Если существует точка $(\alpha,\ \beta) \in E$ такая, что $P(\alpha,\ \beta) = Q(\alpha,\ \beta) = 0$, то она называется *особой точкой* уравнения (24.1).

Решением в явном виде уравнения (24.1) называется непрерывно дифференцируемая функция $y = y(x)$, определенная на промежутке I оси Ox и обращающая уравнение (24.1) в тождество на I. Аналогично определяется решение $x = x(y)$.

Пара непрерывно дифференцируемых функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $|x'(t)| + |y'(t)| \neq 0$, заданных на некотором промежутке T изменения параметра t и обращающих уравнение (24.1) в тождество

$$P(x(t),\ y(t))dx(t) + Q(x(t),\ y(t))dy(t) = 0 \quad \forall\, t \in T,$$

называется *решением* уравнения (24.1) *в параметрическом виде.*

1) Решения уравнения (24.1) в явном и параметрическом видах определяют в области E кривую, которая называется интегральной кривой уравнения.

2) Если соотношение $u(x,\ y) = 0$ определяет интегральную кривую или объединение интегральных кривых уравнения (24.1), то его называют *решением в неявном виде* или интегралом этого уравнения.

Гладкая кривая, являющаяся графиком некоторого решения уравнения (24.1) или состоящая из таких графиков, называется *интегральной кривой* уравнения (24.1).

Соотношения: 1) $y = y(x,\ C)$ или $x = x(y,\ C)$; 2) $x = x(t,\ C)$, $y = y(t,\ C)$; 3) $\Phi(x,\ y,\ C) = 0$ – называются соответственно: 1) *общим решением в явном виде*; 2) *общим решением в параметрическом виде*; 3) *общим решением в неявном виде* уравнения (24.1), если при любых $C \in \Gamma \subset \mathbb{R}$ они доставляют решения этого уравнения.

Совокупность всех решений уравнения (24.1) дает *полное решение* этого уравнения.

Решение уравнения (24.1), которое получается при конкретном значении постоянной C, называют *частным решением.*

Если при любом $C \in \Gamma$ соотношение $u(x,\ y) = C$ дает решение уравнения (24.1) в неявном виде, то его называют *общим интегралом* уравнения (24.1).

Задача Коши (*начальная задача*) для уравнения (24.1) имеет вид

$$P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = 0,\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \ (\text{или } x\big|_{y=y_0} = x_0),\ (x_0,\ y_0) \in E\,. \tag{24.2}$$

Решить задачу Коши (24.2) – это значит из всех интегральных кривых уравнения (24.1) указать ту, которая проходит через точку $(x_0,\ y_0)$.

Если функция $Q(x,\ y) \neq 0$ в области E, то уравнение (24.1) равносильно уравнению $y' = -P(x,\ y)\,/\,Q(x,\ y)$.

Уравнение

$$y' = f(x, y), \ (x, y) \in E \subset \mathbb{R}^2, \tag{24.3}$$

называется *уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.* Задача Коши в этом случае имеет вид

$$y' = f(x, y), \ y\big|_{x=x_0} = y_0, \ (x_0, y_0) \in E, \ (x, y) \in E. \tag{24.4}$$

Точка $(x, y) \in E$, через которую проходит хотя бы одна интегральная кривая уравнения (24.1) (или (24.3)), называется *точкой существования.*

Точка существования $(x, y) \in E$, обладающая окрестностью, в которой все интегральные кривые уравнения (24.1), проходящие через эту точку, совпадают, называется *точкой единственности*; в противном случае – *точкой неединственности.*

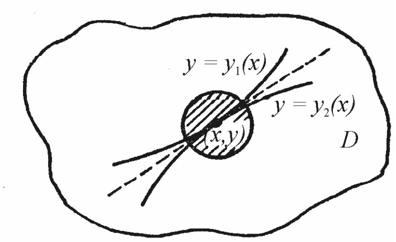


Рис. 19

Точка существования $(x, y) \in E$, через которую проходят, по крайней мере, две интегральные кривые (рис. 19), имеющие общую касательную и отличные друг от друга в любой окрестности точки (x, y), называется *точкой ветвления.* Каждая точка ветвления является точкой неединственности.

Решение уравнения (24.1), график которого состоит из точек ветвления, называется *особым.*

Уравнения вида (24.1) или (24.3), все решения которых выражаются через функции, задающие уравнения, с помощью алгебраических операций, а также операций дифференцирования и интегрирования, называются *интегрируемыми в квадратурах* или *элементарными*.

Уравнение в полных дифференциалах. Уравнение первого порядка в нормальной дифференциальной форме (24.1), заданное на односвязной области E, называется *уравнением в полных дифференциалах*, если на E существует непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$ такая, что

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \ \ \forall \ (x, y) \in E.$$

Уравнение в полных дифференциалах (24.1) равносильно уравнению $du(x, y) = 0$ относительно функции двух переменных $u(x, y)$.

Общий интеграл $u(x, y) = C$ уравнения в полных дифференциалах задает его полное решение.

Необходимым и достаточным условием того, что уравнение (24.1) с непрерывно дифференцируемыми функциями P и Q в односвязной области E есть уравнение в полных дифференциалах, является выполнение *условия Эйлера*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in E. \tag{24.5}$$

Для отыскания функции $u(x, y)$ можно воспользоваться формулой

$$u(x, y) = \int\limits_{(\xi, \eta)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

где (ξ, η) – любая фиксированная точка области E, а (x, y) – произвольная точка области E. Тогда

$$\int\limits_{(\xi,\,\eta)}^{(x,\,y)} P(x,\,y)dx + Q(x,\,y)dy = C \tag{24.6}$$

есть общий интеграл уравнения в полных дифференциалах (24.1).

Криволинейный интеграл второго рода может быть вычислен следующим образом:

$$\int\limits_{(\xi,\,\eta)}^{(x,\,y)} P(x,\,y)dx + Q(x,\,y)dy = \int\limits_{\xi}^{x} P(x,\,\eta)dx + \int\limits_{\eta}^{y} Q(x,\,y)dy \tag{24.7}$$

или

$$\int\limits_{(\xi,\,\eta)}^{(x,\,y)} P(x,\,y)dx + Q(x,\,y)dy = \int\limits_{\xi}^{x} P(x,\,y)dx + \int\limits_{\eta}^{y} Q(\xi,\,y)dy. \tag{24.8}$$

Какую из формул, (24.7) или (24.8), применять, зависит от структуры функций $P(x,\,y)$, $Q(x,\,y)$.

Решение задачи Коши (24.2) для уравнения в полных дифференциалах определяется формулой

$$\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} P(x,\,y)dx + Q(x,\,y)dy = 0. \tag{24.9}$$

Отметим, что задачу Коши (24.2) в этом случае можно решить, используя общий интеграл (24.6) уравнения в полных дифференциалах. Для этого надо найти значение C, при котором выполняется начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Среди уравнений в полных дифференциалах простейшими являются *уравнения с разделенными переменными* $P(x)dx + Q(y)dy = 0$, для которых общий интеграл находится по формуле

$$\int\limits_{\xi}^{x} P(x)dx + \int\limits_{\eta}^{y} Q(y)dy = C, \tag{24.10}$$

а решение задачи Коши $P(x)dx + Q(y)dy = 0$, $y(x_0) = y_0$, $-$ по формуле

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(y)dy = 0 \tag{24.11}$$

или исходя из общего интеграла.

Задача 24.1. Проверить, является ли данное уравнение

$$P(x,\,y)dx + Q(x,\,y)dy = 0$$

уравнением в полных дифференциалах. Указать область E. Найти общий интеграл и графически изобразить несколько интегральных кривых полученного семейства.

А л г о р и т м   р е ш е н и я.

- Определить область E задания уравнения.
- Проверить выполнимость условия Эйлера (24.5): $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall (x,\,y) \in E.$

• Построить общий интеграл уравнения, используя формулу (24.6).
• Графически изобразить несколько интегральных кривых полученного семейства.

Задание 24.1.1. Проинтегрировать уравнение

$$(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy=0.$$

Р е ш е н и е. Поскольку $P(x, y)=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}$, $Q(x, y)=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$, то в качестве области E можно использовать правую полуплоскость, т.е. $E=\{(x,y)\big|\, x>0,\ y\in\mathbb{R}\}$.

Производные $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$. Следовательно, данное уравнение – это уравнение в полных дифференциалах. Строим общий интеграл уравнения по формуле (24.6), положив $(\xi,\eta)=(1,1)$:

$$\int\limits_{(1,1)}^{(x,y)}(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy=C.$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся формулой (24.7). Получим:

$$\int\limits_{(1,1)}^{(x,y)}(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy=\int\limits_1^x(1-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x})dx+\int\limits_1^y(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy=x-1-\sin 1+y\sin\frac{y}{x}.$$

Входящие сюда постоянные отнесем в постоянную C. Следовательно, $x+y\sin\frac{y}{x}=C$ – общий интеграл данного уравнения.

Если положить $u(x,y)=x+y\sin\frac{y}{x}-C$, то

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy.$$

Это означает, что $x+y\sin\frac{y}{x}-C-$ общий интеграл уравнения.

Р е ш е н и е с и с п о л ь з о в а н и е м MathCad.

$$P(x,y):=1-\frac{y^2}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)\qquad Q(x,y):=\sin\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{d}{dy}P(x,y)\to\frac{y^2\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{x^3}-\frac{2\cdot y\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}Q(x,y)\to\frac{y^2\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{x^3}-\frac{2\cdot y\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}$$

$\xi := 1 \qquad\qquad \eta := 1$

$$\int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + \int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)} Q(x,y)\,dy = C$$

$$u(x,y) := \left(\int_{\xi}^{x} P(x,\eta)\,dx + \int_{\eta}^{y} Q(x,y)\,dy\right) \rightarrow x - \sin(1) + y\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right) - 1$$

$$x + y\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right) = C$$

$$\frac{d}{dx}u(x,y)\ \text{simplify}\ \rightarrow 1 - \frac{y^2\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}$$

$$\frac{d}{dy}u(x,y)\ \text{simplify}\ \rightarrow \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x}$$

Задание 24.1.2. Проинтегрировать уравнение

$$(e^{x+y}(x-y+2)+ye^x)dx+(e^{x+y}(x-y)+e^x)dy=0.$$

Р е ш е н и е. Поскольку P и Q определены на $\mathbb{R}^2$, то $E=\mathbb{R}^2$.

$$P(x,y) := e^{x+y}\cdot(x-y+2) + y\cdot e^x$$

$$Q(x,y) := e^{x+y}\cdot(x-y) + e^x$$

$$\frac{d}{dy}P(x,y) \rightarrow e^x - e^{x+y} + e^{x+y}\cdot(x-y+2)$$

$$\frac{d}{dx}Q(x,y) \rightarrow e^{x+y} + e^x + e^{x+y}\cdot(x-y)$$

$\xi := 0 \qquad\qquad \eta := 0$

$$\int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + \int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)} Q(x,y)\,dy = C$$

$$\int_{\xi}^{x} P(x,\eta)\,dx + \int_{\eta}^{y} Q(x,y)\,dy\ \text{simplify}\ \rightarrow y\cdot e^x + e^x\cdot e^y + x\cdot e^x\cdot e^y - y\cdot e^x\cdot e^y - 1$$

$$e^{x}\cdot\left(y+e^{y}+x\cdot e^{y}-y\cdot e^{y}\right)=C$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{x}\cdot\left(y+e^{y}+x\cdot e^{y}-y\cdot e^{y}\right)\right]\ \begin{vmatrix}\text{simplify}\\ \text{expand}\end{vmatrix}\rightarrow y\cdot e^{x}+2\cdot e^{x}\cdot e^{y}+x\cdot e^{x}\cdot e^{y}-y\cdot e^{x}\cdot e^{y}$$

$$\frac{d}{dy}\left[e^{x}\cdot\left(y+e^{y}+x\cdot e^{y}-y\cdot e^{y}\right)\right]\ \begin{vmatrix}\text{simplify}\\ \text{expand}\end{vmatrix}\rightarrow e^{x}+x\cdot e^{x}\cdot e^{y}-y\cdot e^{x}\cdot e^{y}$$

Задание 24.1.3. Проинтегрировать уравнение

$$e^{x}\cos y\,dx-e^{x}\sin y\,dy=0.$$

Графически изобразить несколько интегральных кривых полученного семейства.

Р е ш е н и е. Поскольку P и Q определены на $\mathbb{R}^2$, то $E=\mathbb{R}^2$.

$$P(x,y):=e^{x}\cdot\cos(y)\qquad\qquad Q(x,y):=-e^{x}\cdot\sin(y)$$

$$\frac{d}{dy}P(x,y)\rightarrow -e^{x}\cdot\sin(y)\qquad\qquad \frac{d}{dx}Q(x,y)\rightarrow -e^{x}\cdot\sin(y)\qquad\qquad \text{ORIGIN}\equiv 1$$

$$\xi:=0\qquad\qquad \eta:=0$$

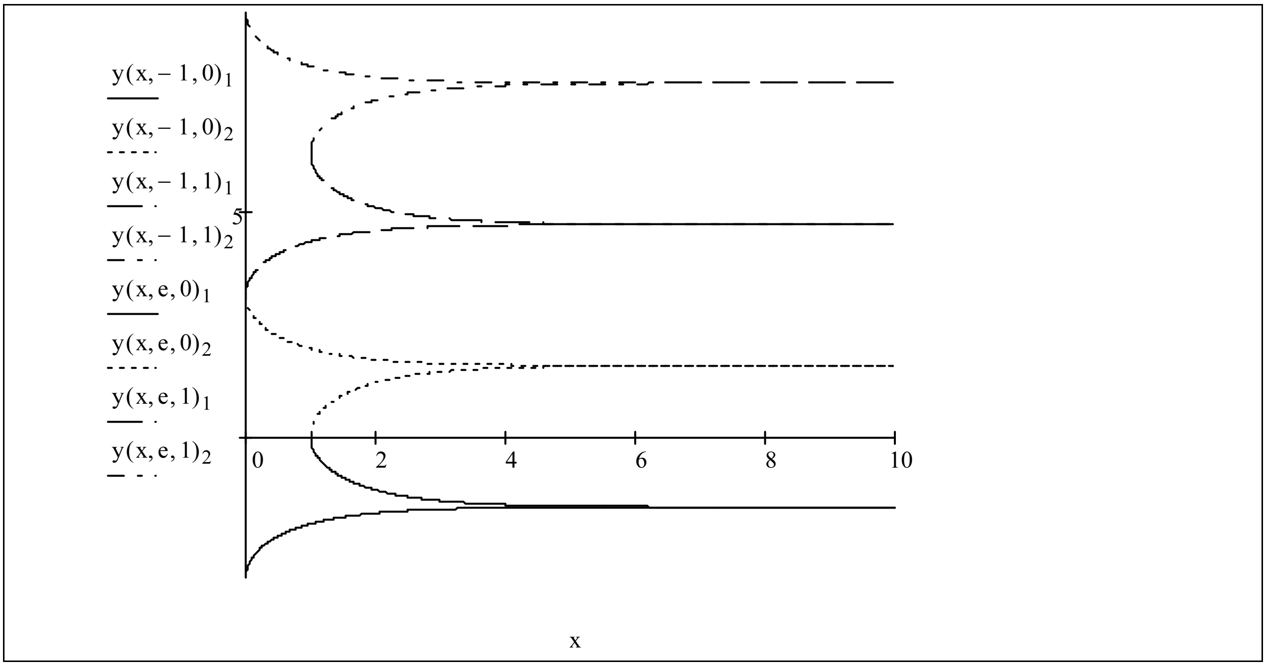
$$\int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)}P(x,y)\,dx+\int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)}Q(x,y)\,dy=C$$

$$u(x,y):=\left(\int_{\xi}^{x}P(x,\eta)\,dx+\int_{\eta}^{y}Q(x,y)\,dy\right)\text{simplify}\ \rightarrow e^{x}\cdot\cos(y)-1$$

$$e^{x}\cdot\cos(y)=C\qquad \frac{d}{dx}u(x,y)\ \text{simplify}\ \rightarrow e^{x}\cdot\cos(y)\qquad \frac{d}{dy}u(x,y)\ \text{simplify}\ \rightarrow -e^{x}\cdot\sin(y)$$

$$e^{x}\cdot\cos(y)=C\ \begin{vmatrix}\text{solve},y\\ \text{assume},\text{fully}\\ \text{assume},C=\text{real}\end{vmatrix}\ \rightarrow \left|\begin{array}{l}\begin{pmatrix}\text{acos}\left(C\cdot e^{-x}\right)+2\cdot\pi\cdot\_n\\ 2\cdot\pi\cdot\_n-\text{acos}\left(C\cdot e^{-x}\right)\end{pmatrix}\ \text{ if }\ \_n\in Z\ \wedge\ \_n\in Z\\ \text{undefined}\quad\text{otherwise}\end{array}\right.$$

$$y(x,C,n):=\begin{pmatrix}-\text{acos}\left(C\cdot e^{-x}\right)+2\cdot\pi\cdot n\\ \text{acos}\left(C\cdot e^{-x}\right)+2\cdot\pi\cdot n\end{pmatrix}\qquad \left|e^{-x}\cdot C\right|\le 1\ \begin{vmatrix}\text{solve},x\\ \text{assume},C=\text{real}\end{vmatrix}\rightarrow -\ln\left(\frac{1}{|C|}\right)\le x$$



Задача 24.2. Решить задачу Коши

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad y\big|_{x=x_0} = y_0,$$

изобразить несколько интегральных кривых полученного семейства и график решения задачи Коши.

Алгоритм решения.

- Выбрать область E задания уравнения таким образом, чтобы точка (x_0, y_0) принадлежала E.
- Проверить выполнимость условия Эйлера (24.5) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ $\forall (x, y) \in E$.
- Найти решение задачи Коши, используя формулу (24.9) $\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ или, используя общий интеграл $\int\limits_{(\xi, \eta)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = C$, найти C, полагая $y(x_0) = y_0$.
- Изобразить график решения задачи Коши.

Задание 24.2.1. Решить задачу Коши

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0, \quad y\big|_{x=1} = 1,$$

изобразить несколько интегральных кривых полученного семейства и график решения задачи Коши.

Решение. В данном случае в качестве области E задания уравнения можно рассматривать либо верхнюю полуплоскость ($y > 0$), либо нижнюю ($y < 0$). Так как точка (1, 1) лежит в верхней полуплоскости, то в качестве области E рассматриваем верхнюю полуплоскость: $E = \{(x, y) | y > 0, \ x \in \mathbb{R}\}$.

Для $P(x, y) = \dfrac{2x}{y^3}$, $Q(x, y) = \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ производные $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-6x}{y^4}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-6x}{y^4}$. Следовательно, данное уравнение – уравнение в полных дифференциалах.

С п о с о б I. Построим решение задачи Коши по формуле (24.9):

$$\int_{(1,1)}^{(x,y)} \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0.$$

Используя (24.7), получаем

$$\int_1^x 2xdx + \int_1^y (y^{-2}-3x^2y^{-4})dy = 0 \Rightarrow x^2\Big|_1^x + \left(\frac{y^{-1}}{-1} - 3x^2\frac{y^{-3}}{-3}\right)\Bigg|_1^y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 + \left(-\frac{1}{y} + 1 + \frac{x^2}{y^3} - x^2\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y = x.$$

С п о с о б II. По формуле (24.6) построим общий интеграл уравнения, применяя формулу (24.8):

$$\int_{(0,1)}^{(x,y)} \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = C \Rightarrow \int_1^y \frac{1}{y^2}dy + \int_0^x \frac{2x}{y^3}dx = C \Rightarrow -\frac{1}{y} + 1 + \frac{x^2}{y^3} = C \Rightarrow \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

В полученном общем решении положим $x=1,\ y=1$: $1-1=C \Rightarrow C=0 \Rightarrow y=x$ – решение задачи Коши.

Р е ш е н и е с и с п о л ь з о в а н и е м M a t h C a d.

$$P(x,y) := \frac{2x}{y^3} \qquad Q(x,y) := \frac{y^2-3x^2}{y^4} \qquad \text{ORIGIN} := 1$$

$$\frac{d}{dy}P(x,y) \to -\frac{6\cdot x}{y^4} \qquad \frac{d}{dx}Q(x,y) \to -\frac{6\cdot x}{y^4}$$

$$\xi := 1 \qquad \eta := 1$$

$$\int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + \int_{(\xi,\eta)}^{(x,y)} Q(x,y)\,dy = C$$

$$\omega(x,y) := \int_\xi^x P(x,\eta)\,dx + \int_\eta^y Q(x,y)\,dy \text{ simplify } \to \frac{x^2-y^2}{y^3}$$

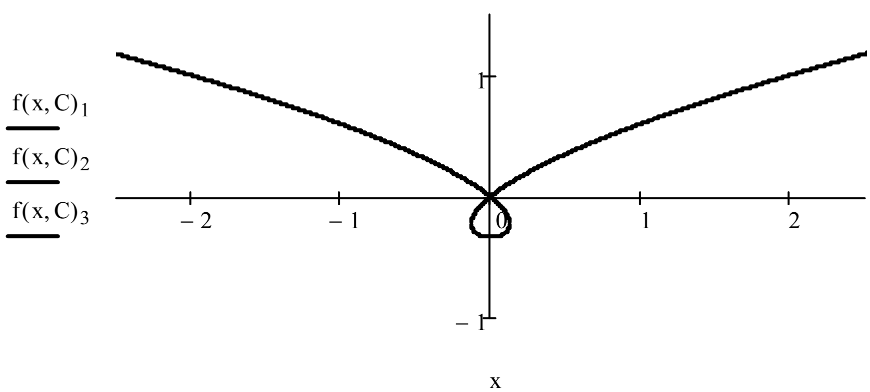
$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = 0 \text{ solve}, y \to \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix} \qquad g(x) := x$$

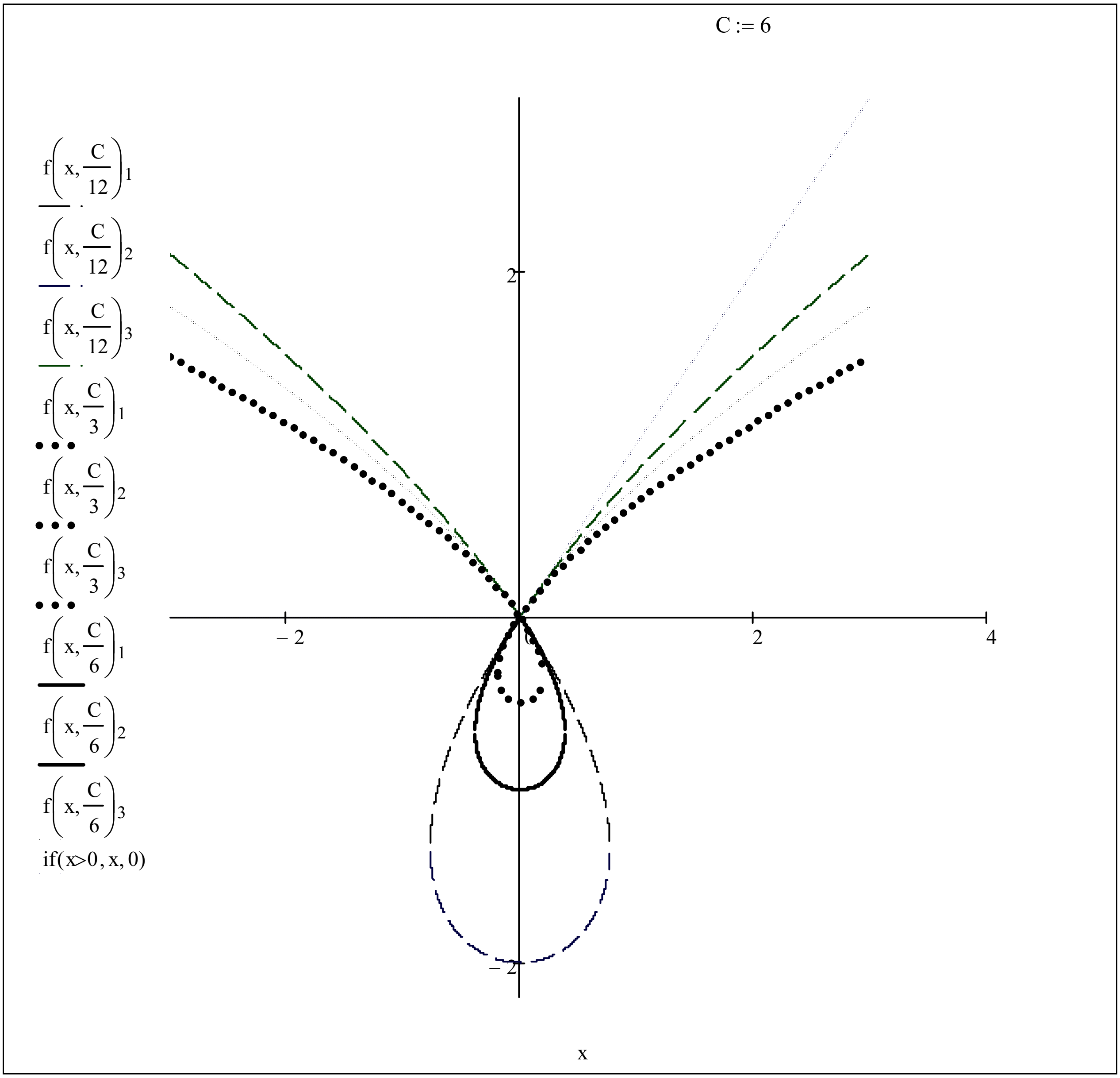
$$\frac{d}{dx}\frac{x^2-y^2}{y^3} \to \frac{2\cdot x}{y^3}$$

$$\frac{d}{dy}\frac{x^2-y^2}{y^3} \text{ expand } \to \frac{1}{y^2} - \frac{3\cdot x^2}{y^4}$$

$$f(x,C) := \omega(x,y) - C \;\Big|\; \begin{matrix}\text{assume}, C = \text{real}\\ \text{solve}, y\end{matrix} \rightarrow \left[\begin{matrix} -\dfrac{1}{18\cdot C^2\cdot\left(\dfrac{x^2}{2\cdot C} - \dfrac{1}{27\cdot C^3} + \sqrt{\dfrac{x^4}{4\cdot C^2} - \dfrac{x^2}{27\cdot C^4}}\right)^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{1}{3\cdot C} - \dfrac{\left(\dfrac{x^2}{2\cdot C} - \right.}{} \\ -\dfrac{1}{18\cdot C^2\cdot\left(\dfrac{x^2}{2\cdot C} - \dfrac{1}{27\cdot C^3} + \sqrt{\dfrac{x^4}{4\cdot C^2} - \dfrac{x^2}{27\cdot C^4}}\right)^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{1}{3\cdot C} - \dfrac{\left(\dfrac{x^2}{2\cdot C} - \right.}{} \\ \dfrac{}{9\cdot C^2\cdot\left(\dfrac{x^2}{2\cdot C} - \right.} \end{matrix}\right.$$

$C := 3 \qquad a := -3 \qquad h := 0.0005 \qquad b := 3 \qquad x := a, a + h .. b$





Проверить, являются ли данные уравнения уравнениями в полных дифференциалах. Указать область E. Найти общий интеграл. Изобразить несколько интегральных кривых:

637. $\dfrac{dx}{1+x^2}+\dfrac{dy}{1+y^2}=0.$

638. $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=0.$

639. $\dfrac{dx}{x}+\dfrac{ydy}{1+y^2}=0.$

640. $\dfrac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0.$

641. $(4y^2-6x^3)y\,dy+(2-9xy^2)x\,dx=0.$

642. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0.$

643. $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0.$

644. $x\sin x\,dx+\cos^2 y\,dy=0.$

645. $\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy+\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx=0.$

646. $2xydx+x^2dy=0.$

647. $f(xy)(y\,dx+x\,dy)=0,\ f-$ непрерывно дифференцируемая функция.

648. $(f(x+y)+f(x-y))dx+(f(x+y)-f(x-y))dy=0,\ \ f-$ непрерывно дифференцируемая функция.

649. $f\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=0,\ f-$ непрерывно дифференцируемая функция.

649.1. $(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy=0.$

649.2. $(5x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=0.$

649.3. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0.$

649.4. $(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=0.$

Решить задачи Коши. Изобразить несколько интегральных кривых общего семейства и график решения задачи Коши:

650. $(\sin x\,y+x\,y\cos y)\,dx+x^2\cos x\,y\,dy=0,\ \ y\big|_{x=1}=0.$

651. $(1+y^2\sin 2x)\,dx-2y\cos^2 x\,dy=0,\ \ y\big|_{x=0}=0.$

652. $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}dy=0,\ \ y\big|_{x=1}=1.$

653. $\dfrac{dy}{y}-\operatorname{ctg} x\,dx=0,\ \ x\big|_{y=1}=\pi/2.$

654. $\dfrac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}=0,\ \ y\big|_{x=0}=-1.$

655. $4(x^2-y^2)(xdx-ydy)=0,\ \ x\big|_{y=0}=1.$

656. $x^2dx+y^2dy=0,\ \ x\big|_{y=1}=1.$

657. $(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy=0,\ \ y\big|_{x=\pi/2}=\pi/2.$

Интегрирующий множитель. Функция $\mu(x,\,y)$, заданная на некоторой области $G\subset E$ и отличная от тождественного нуля, называется *интегрирующим множителем* уравнения в нормальной дифференциальной форме (24.1), если уравнение

$$\mu(x,\,y)P(x,\,y)dx+\mu(x,\,y)Q(x,\,y)dy=0 \tag{24.12}$$

является уравнением в полных дифференциалах на G.

Если функция $\mu(x,\,y)$ непрерывна на области G, то каждое решение уравнения (24.1) будет и решением уравнения (24.12). Если, кроме того, функция $\mu(x,\,y)$ не обращается в нуль на области G, то полные решения уравнений (24.1) и (24.12) совпадают.

В случае, если интегрирующий множитель $\mu(x,\,y)$ обращается в нуль на некотором подмножестве множества G, полученное уравнение в полных дифференциалах (24.12) может иметь дополнительные решения по отношению к решениям исходного уравнения (24.1).

Пусть коэффициенты $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ уравнения (24.1) непрерывно дифференцируемы на области E. Непрерывно дифференцируемая функция $\mu = \mu(\omega)$, $\omega = \omega(x, y)$, будет интегрирующим множителем уравнения (24.1), если выполняется условие

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Bigg/ \left(Q\frac{\partial \omega}{\partial x} - P\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \equiv \Psi(\omega). \tag{24.13}$$

В этом случае

$$\mu = \mu(\omega) = e^{\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \Psi(\tau)d\tau}. \tag{24.14}$$

Если $\mu = \mu(x, y)$ – интегрирующий множитель уравнения в нормальной дифференциальной форме, то $C\mu(x, y)$, где $C \neq 0$ – постоянная, также является интегрирующим множителем этого уравнения.

Задача 24.3. Проинтегрировать уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

найдя интегрирующий множитель указанного вида. Указать область E задания исходного уравнения и множество задания уравнения в полных дифференциалах.

Изобразить несколько интегральных кривых полученного семейства.

А л г о р и т м р е ш е н и я.

- Определить E – область задания уравнения.
- Используя формулу (24.13) $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Big/ \left(Q\frac{\partial \omega}{\partial x} - P\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \equiv \Psi(\omega)$, установить существование интегрирующего множителя указанного вида.
- Построить, используя формулу (24.14), интегрирующий множитель $\mu = \mu(\omega) = e^{\int_{\omega_0}^{\omega} \Psi(\tau)d\tau}$.
- Привести данное уравнение к уравнению в полных дифференциалах.
- Определить множество задания уравнения в полных дифференциалах.
- Изучить случаи: $\mu(x, y) = 0$ и $1/\mu(x, y) = 0$, т.е. не появятся ли дополнительные решения или не потеряется ли решение.
- Построить общий интеграл уравнения в полных дифференциалах.
- Записать полное решение исходного уравнения.
- Изобразить несколько интегральных кривых полученного семейства.

Задание 24.3.1. Найдя интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$, проинтегрировать уравнение $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$. Указать область E. Изобразить несколько интегральных кривых полученного семейства.

Р е ш е н и е. Поскольку $P(x, y) = 2xy^2 - 3y^3$, $Q(x, y) = 7 - 3xy^2$, то они непрерывно дифференцируемы на области $E = \mathbb{R}^2$.

Проверим, существует ли для данного уравнения интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$. Для этого воспользуемся формулой (24.13), полагая $\omega = x$:

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{4xy - 6y^2}{7 - 3xy^2} \neq \Psi(x).$$

Следовательно, данное уравнение интегрирующего множителя вида $\mu=\mu(x)$ не имеет. Пусть теперь $\omega=y$. Так как

$$\frac{P'_y-Q'_x}{-P}=\frac{4xy-6y^2}{-2xy^2+3y^2}=-\frac{2}{y}\equiv\Psi(y),\quad \text{то}\quad \mu(y)=e^{-\int\limits_{y_0}^{y}\frac{2}{\tau}d\tau}=e^{-2\ln\frac{y}{y_0}}=\frac{y_0^2}{y^2}.$$

В качестве $\mu(y)$ можно взять $1/y^2$. Умножив исходное уравнение на $\mu=1/y^2$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$(2x-3y)dx+(7/y^2-3x)dy=0,$$

которое должны рассматривать в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$. Далее, так как $\mu=1/y^2\neq 0$, то дополнительных решений не появится, а поскольку $1/\mu=y^2=0$ при $y=0$ и $y=0$ – решение исходного уравнения, то можем потерять решение.

Пусть $y>0$. Тогда (см. (24.6)) общий интеграл имеет вид

$$\int\limits_{(0,1)}^{(x,y)}(2x-3y)dx+(7/y^2-3x)dy=C_1.$$

На основании формул (24.7), (24.8) получаем $x^2-3xy-7/y=C_1$.

Пусть $y<0$. Тогда общий интеграл имеет вид

$$\int\limits_{(0,-1)}^{(x,y)}(2x-3y)dx+(7/y^2-3x)dy=C_2,$$

т.е. $x^2-3xy-7/y=C_2$.

Решение $y=0$ не получается из общего ни при каком значении *C*. Следовательно, $y=0$ не является частным решением.

Таким образом, полное решение исходного уравнения имеет вид

$$\left[\begin{array}{l} x^2-3xy-7/y=C,\\ y=0.\end{array}\right.$$

Р е ш е н и е с и с п о л ь з о в а н и е м MathCad.

$P(x,y):=2x\cdot y^2-3y^3$ $\qquad Q(x,y):=7-3\cdot x\cdot y^2$ $\qquad$ ORIGIN:= 1

$P(x,y)\cdot dx+Q(x,y)\cdot dy=0$

$$\frac{\frac{d}{dy}P(x,y)-\frac{d}{dx}Q(x,y)}{Q(x,y)}\rightarrow\frac{6\cdot y^2-4\cdot x\cdot y}{3\cdot x\cdot y^2-7}\qquad \frac{\frac{d}{dy}P(x,y)-\frac{d}{dx}Q(x,y)}{-P(x,y)}\ \text{simplify}\rightarrow-\frac{2}{y}$$

$$e^{-\int_{y0}^{y}\frac{2}{t}dt}\ \text{simplify}\rightarrow\left|\begin{array}{ll}\frac{y0^2}{y^2} & \text{if } 0>y\vee y0>0\\ \text{undefined} & \text{otherwise}\end{array}\right.\qquad \mu(y):=\frac{1}{y^2}$$

$P(x,y)\cdot\mu(y)\cdot dx+Q(x,y)\cdot\mu(y)\cdot dy=0$

$P1(x,y) := P(x,y)\cdot\mu(y)$ simplify $\rightarrow 2\cdot x - 3\cdot y$ $\qquad Q1(x,y) := Q(x,y)\cdot\mu(y)$ simplify $\rightarrow \frac{7}{y^2} - 3\cdot x$

$\xi := 0 \qquad \eta := 1$

$$\int_{\xi}^{x} P1(x,\eta)\,dx + \int_{\eta}^{y} Q1(x,y)\,dy \ \Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{assume }, y>0\end{matrix} \rightarrow \frac{7\cdot y - 7}{y} + x^2 - 3\cdot x\cdot y$$

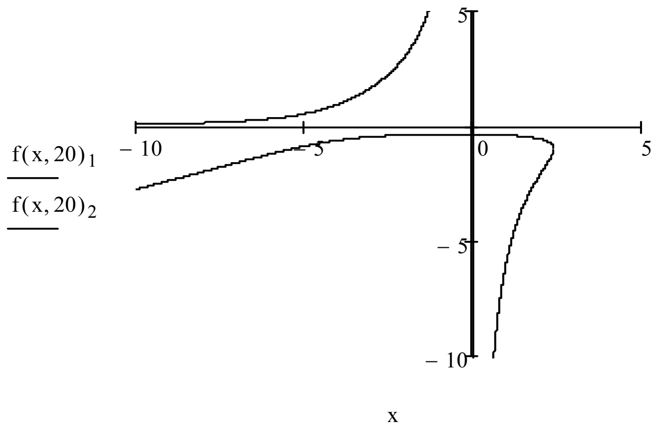
$\xi := 0 \qquad \eta := -1$

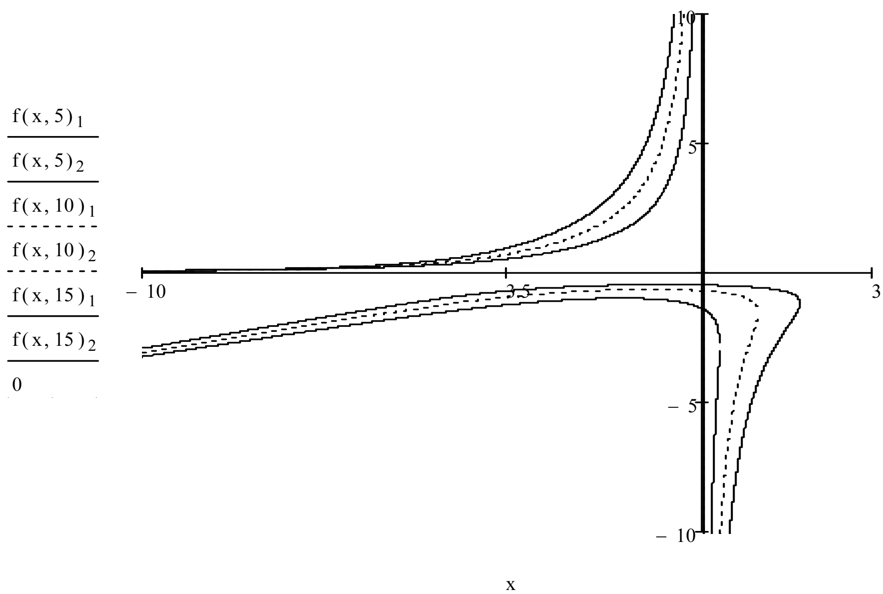
$$\int_{\xi}^{x} P1(x,\eta)\,dx + \int_{\eta}^{y} Q1(x,y)\,dy \ \Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{assume }, y<0\end{matrix} \rightarrow x^2 - \frac{7}{y} - 3\cdot x\cdot y - 7$$

$$\omega(x,y) := -\frac{7}{y} + x^2 - 3\cdot x\cdot y$$

$$f(x,C) := \omega(x,y) - C \text{ solve }, y \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{C - x^2 + \sqrt{C^2 - 2\cdot C\cdot x^2 + x^4 - 84\cdot x}}{6\cdot x} \\ \dfrac{x^2 - C + \sqrt{C^2 - 2\cdot C\cdot x^2 + x^4 - 84\cdot x}}{6\cdot x} \end{pmatrix}$$

$a := -10$
$h := 0.001$
$b := 3$
$x := a, a+h .. b$





Задание 24.3.2. Для уравнения $(x^2y^3+y)dx+(x^3y^2-x)dy=0$ найти все существующие интегрирующие множители вида $\mu=\mu(x+y)$, $\mu=\mu(x^2-y^2)$, $\mu=\mu(x^2+y^2)$, $\mu=\mu(x\,y)$. Свести уравнение к уравнению в полных дифференциалах. Построить полное решение исходного уравнения.

Р е ш е н и е.

$P(x,y) := x^2\cdot y^3 + y \qquad Q(x,y) := x^3\cdot y^2 - x \qquad \text{ORIGIN} := 1$

$P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$

1. $w(x,y) := x + y$

$$G(x,y) := \frac{\frac{d}{dy}P(x,y) - \frac{d}{dx}Q(x,y)}{Q(x,y)\cdot\frac{d}{dx}w(x,y) - P(x,y)\cdot\frac{d}{dy}w(x,y)} \to -\frac{2}{x^2\cdot y^3 - x^3\cdot y^2 + x + y}$$

$G(x,y) \ne \Psi(x+y)$

2. $w(x,y) := x^2 - y^2$

$$G(x,y) := \frac{\frac{d}{dy}P(x,y) - \frac{d}{dx}Q(x,y)}{Q(x,y)\cdot\frac{d}{dx}w(x,y) - P(x,y)\cdot\frac{d}{dy}w(x,y)} \to -\frac{2}{2\cdot x\cdot\left(x - x^3\cdot y^2\right) - 2\cdot y\cdot\left(x^2\cdot y^3 + y\right)}$$

$G(x,y) \ne \Psi\left(x^2 - y^2\right)$

3. $w(x,y) := x^2 + y^2$

$$G(x,y) := \frac{\frac{d}{dy}P(x,y) - \frac{d}{dx}Q(x,y)}{Q(x,y)\cdot\frac{d}{dx}w(x,y) - P(x,y)\cdot\frac{d}{dy}w(x,y)} \to -\frac{2}{2\cdot x\cdot\left(x - x^3\cdot y^2\right) + 2\cdot y\cdot\left(x^2\cdot y^3 + y\right)}$$

$G(x,y) \ne \Psi\left(x^2 + y^2\right)$

4. $w(x,y) := x\cdot y$

$$G(x,y) := \frac{\frac{d}{dy}P(x,y) - \frac{d}{dx}Q(x,y)}{Q(x,y)\cdot\frac{d}{dx}w(x,y) - P(x,y)\cdot\frac{d}{dy}w(x,y)} \text{ simplify } \to -\frac{1}{x\cdot y}$$

$G(x,y) = \Psi(xy)$

$$e^{-\int_{w0}^{\omega} \frac{1}{t}\,dt} \text{ simplify } \rightarrow \begin{cases} \frac{w0}{\omega} & \text{if } 0 > \omega \vee w0 > 0 \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu(x,y) := \frac{1}{x \cdot y}$$

$$P(x,y) \cdot \mu(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot \mu(x,y) \cdot dy = 0$$

$$P1(x,y) := P(x,y) \cdot \mu(x,y) \text{ simplify } \rightarrow x \cdot y^2 + \frac{1}{x}$$

$$Q1(x,y) := Q(x,y) \cdot \mu(x,y) \text{ simplify } \rightarrow x^2 \cdot y - \frac{1}{y}$$

$\xi := 1$ $\qquad\qquad$ $\eta := 1$

$$\int_{\xi}^{x} P1(x,\eta)\,dx + \int_{\eta}^{y} Q1(x,y)\,dy \text{ simplify } \rightarrow \ln(x) - \ln(y) + \frac{x^2 \cdot y^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\ln(x) - \ln(y) + \frac{x^2 \cdot y^2}{2} = C$$

$\xi := -1$ $\qquad\qquad$ $\eta := -1$

$$\int_{\xi}^{x} P1(x,\eta)\,dx + \int_{\eta}^{y} Q1(x,y)\,dy \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume}, x < 0 \\ \text{assume}, y < 0 \end{array} \right. \rightarrow \ln(-x) - \ln(-y) + \frac{x^2 \cdot y^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\ln(-x) - \ln(-y) + \frac{x^2 \cdot y^2}{2} = C$$

$\xi := 1$ $\qquad\qquad$ $\eta := -1$

$$\int_{\xi}^{x} P1(x,\eta)\,dx + \int_{\eta}^{y} Q1(x,y)\,dy \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume}, y < 0 \end{array} \right. \rightarrow \ln(x) - \ln(-y) + \frac{x^2 \cdot y^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\ln(x) - \ln(-y) + \frac{x^2 \cdot y^2}{2} = C$$

$\xi := -1$ $\qquad\qquad$ $\eta := 1$

$$\int_{\xi}^{x} \mathrm{P1}(x,\eta)\,dx + \int_{\eta}^{y} \mathrm{Q1}(x,y)\,dy \;\Big|\begin{array}{l}\text{simplify}\\ \text{assume}, x<0\end{array} \to \ln(-x)-\ln(y)+\frac{x^2\cdot y^2}{2}-\frac{1}{2}$$

$$\ln\left(-\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2\cdot y^2}{2}=C$$

Поскольку $\frac{1}{\mu(x,y)}=xy$ обращается в нуль при $x=0,\ \forall y$ и $y=0,\ \forall x$ и $x=0,\quad y=0$ – решения исходного уравнения, которые не являются частными решениями, то полное решение исходного уравнения имеет вид

$$\left[\begin{array}{l}\ln\frac{x}{y}+\frac{x^2y^2}{2}=C,\ xy>0,\\ \ln\left(-\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2y^2}{2}=C,\ xy<0,\\ x=0 \qquad \forall y\in\mathbb{R},\\ y=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.\end{array}\right.$$

Представим далее полное решение в другом виде. Выполним следующие преобразования: $\ln\frac{x}{y}=C-\frac{x^2y^2}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{x}{y}=e^C e^{-\frac{x^2y^2}{2}}=C_1e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ и $\ln\left(-\frac{x}{y}\right)=C-\frac{x^2y^2}{2}\Rightarrow-\frac{x}{y}=e^C e^{-\frac{x^2y^2}{2}}=C_1e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\Rightarrow\frac{x}{y}=C_2e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$. Теперь общее решение имеет вид $x=yCe^{-\frac{x^2y^2}{2}}$. Отсюда видно, что при $C=0$ получается $x=0$ как частное решение, а при $C=\frac{1}{C_3}$ и $C_3=0$ получим $y=0$ как частное решение.

Таким образом, полное решение исходного уравнения: $x=yCe^{-\frac{x^2y^2}{2}}$, $C\in[-\infty,+\infty]$.

Проинтегрировать уравнения, найдя интегрирующий множитель указанного вида. Указать область E задания исходного уравнения и множество задания уравнения в полных дифференциалах:

658. $(x^2+y)\,dx-x\,dy=0,\ \ \mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$.

659. $2xy\ln y\,dx+(x^2+y^2\sqrt{y^2+1})\,dy=0,\ \ \mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$.

660. $(x+\sin x+\sin y)\,dx+\cos y\,dy=0,\ \ \mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$.

661. $(xy^2+y)\,dx-x\,dy=0,\ \ \mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$.

662. $(2xy^2-y)\,dx+(y^2+x+y)\,dy=0,\ \ \mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$.

663. $(x^2+y^2+1)\,dx-2xy\,dy=0,\ \ \mu=\mu(y^2-x^2)$ или $\mu=\mu(x)$.

664. $x\,dx+y\,dy+x(x\,dy-y\,dx)=0,\ \ \mu=\mu(x^2+y^2)$.

665. $\left(2\frac{x^2}{y}+y\right)dx+\left(x+2\frac{y^2}{x}\right)dy=0.$

666. $\frac{1}{x}dx+\left(x-\frac{1}{y}\right)dy=0,\ \ \mu=\mu\left(\frac{y}{x}\right)$.

667. $3x\sin\left(\frac{y}{x}\right)dx=(x\,dy-y\,dx)\cos\left(\frac{y}{x}\right)=0,\ \ \mu=\mu\left(\frac{y}{x}\right)$.

668. $(x+y^2)\,dx+y(1-x)\,dy=0,\ \ \mu=\mu(x^2+y^2)$.

669. $(x^2-y^2+1)\,x\,dx+y(x^2-y^2)\,dy=0,\ \ \mu=\mu(x^2-y^2)$.

669.1. $(x^3\,y^4+x\,y^2)\,x\,dx+(x^4\,y^3-x^2\,y)\,dy=0, \mu=\mu(x+y), \mu=\mu(x^2y^2)$.

669.2. $\left(y^3+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(x\,y^2-\frac{1}{x}\right)dy=0,\ \ \mu=\mu(x\,y),\ \ \mu=\mu(\frac{y}{x})$.

669.3. $(y\,e^{-x^2\,y}\sin 2x+1+2x^2y+2x\,y^2)dx+(e^{-x^2\,y}\sin^2 x+1+x^3+x^2\,y)\,dy=0,\ \ \mu=\mu(x^2y)$.

670. Найти кривую, для которой площадь фигуры, ограниченной осями координат, данной кривой и ординатой произвольной точки кривой, равна четвертой степени ординаты этой точки.

671. Найти кривые, у которых отрезок касательной в любой точке кривой, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, равен расстоянию от точки пересечения касательной оси абсцисс до точки $(0, a)$.

672. Найти кривые, обладающие следующим свойством: квадрат расстояния от произвольной точки кривой до начала координат, умноженный на длину отрезка, отсекаемого на оси абсцисс нормалью к кривой в данной точке, равен кубу абсциссы этой точки.

673. Найти кривую, для которой площадь сектора, ограниченного этой кривой, полярной осью и радиусом-вектором любой точки кривой, равна шестой части куба этого радиуса-вектора.

674. Найти кривую, для которой площадь сектора, ограниченного кривой, полярной осью и радиусом-вектором любой точки кривой, равна четвертой степени этого радиуса-вектора.

25. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*. С помощью интегрирующего множителя $\mu(x,y)=\dfrac{1}{Q_1(y)P_2(x)}$ в любой области G , где $Q_1(y)P_2(x)\neq 0$, оно сводится к уравнению

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0,$$

которое является *уравнением с разделенными переменными* и, следовательно, уравнением в полных дифференциалах.

Решения исходного уравнения есть все решения полученного уравнения и действительные решения функционального уравнения $Q_1(y)P_2(x)=0$.

Задача 25.1. Проинтегрировать уравнение

$$P_1(x)Q_1(y)\ dx+P_2(x)Q_2(y)\,dy=0,$$

указав область E.

Изобразить несколько интегральных кривых полученного семейства.

А л г о р и т м   р е ш е н и я.

- Определить E – область задания уравнения.
- Привести уравнение к уравнению с разделенными переменными.
- Построить общий интеграл по формуле (24.10).
- Решить функциональное уравнение $P_2(x)Q_1(y)=0$.
- Записать полное решение исходного уравнения.
- Изобразить несколько интегральных кривых полученного семейства.

Задание 25.1.1. Проинтегрировать уравнение

$$\sqrt{y^2+1}\,dx - x\,y\,dy = 0,$$

указав область E. Изобразить несколько интегральных кривых полученного семейства.

Р е ш е н и е. Поскольку $P(x,y)=\sqrt{y^2+1},\quad Q(x,y)=-x\,y$, то $E=\mathbb{R}^2$.

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$P(x,y) := \sqrt{y^2+1} \qquad Q(x,y) := -x\cdot y \qquad P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$$

$$\mu(x,y) := \frac{1}{x\cdot\sqrt{y^2+1}} \qquad P(x,y)\cdot\mu(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot\mu(x,y)\cdot dy = 0$$

$$P1(x,y) := P(x,y)\cdot\mu(x,y)\ \text{simplify} \ \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$Q1(x,y) := Q(x,y)\cdot\mu(x,y)\ \text{simplify} \ \rightarrow -\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\xi := 1 \qquad \eta := 0$$

$$\int_{\xi}^{x} P1(x,\eta)\,dx + \int_{\eta}^{y} Q1(x,y)\,dy\ \text{simplify} \ \rightarrow \ln(x) - \sqrt{y^2+1} + 1$$

$$\ln(x) - \sqrt{y^2+1} - C\ \text{solve}, x \ \rightarrow e^{C+\sqrt{y^2+1}}$$

$$x = C1\cdot e^{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\xi := -1 \qquad \eta := 0$$

$$\int_{\xi}^{x} P1(x,\eta)\,dx + \int_{\eta}^{y} Q1(x,y)\,dy \ \left|\begin{array}{l}\text{simplify}\\ \text{assume}, x<0\end{array}\right. \rightarrow \ln(-x) - \sqrt{y^2+1} + 1$$

$$\ln(-x) - \sqrt{y^2+1} - C\ \text{solve}, x \ \rightarrow -e^{C+\sqrt{y^2+1}}$$

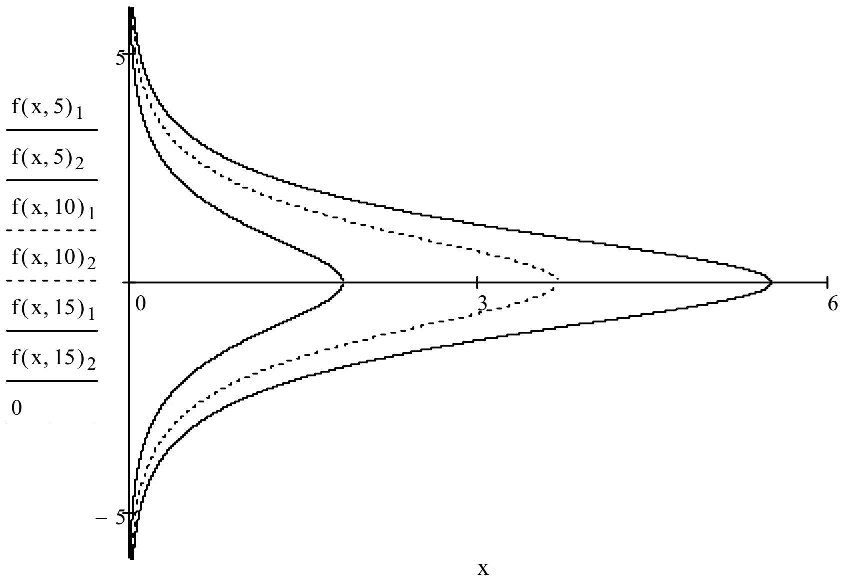
$$x = C2\cdot e^{\sqrt{y^2+1}}$$

Полное решение: $x = C \cdot e^{\sqrt{y^2+1}}$

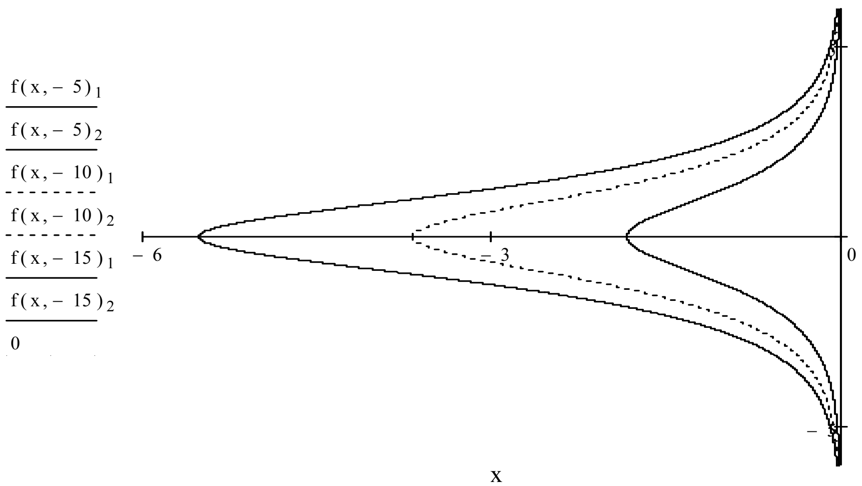
$$x = C \cdot e^{\sqrt{y^2+1}} \;\left|\begin{array}{l}\text{solve }, y\\ \text{assume }, x > 0\end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{x}{C}\right) - 1} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{x}{C}\right) + 1} \\ -\sqrt{\ln\left(\frac{x}{C}\right) - 1} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{x}{C}\right) + 1} \end{pmatrix}$$

$$f(x, C) := \begin{pmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{x}{C}\right) - 1} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{x}{C}\right) + 1} \\ -\sqrt{\ln\left(\frac{x}{C}\right) - 1} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{x}{C}\right) + 1} \end{pmatrix}$$

$a := 0$ $\qquad h := 0.001$ $\qquad b := 6$ $\qquad x := a, a + h .. b$



$a := -6$ $\qquad h := 0.001$ $\qquad b := 0$ $\qquad x := a, a + h .. b$



Решение функционального уравнения $x\sqrt{y^2+1}=0$ дает $x=0$, а эта функция является частным решением уравнения, так как получается из общего решения $x=Ce^{\sqrt{y^2+1}}$ при $C=0$. Поэтому $x=Ce^{\sqrt{y^2+1}}$ – полное решение исходного уравнения с разделяющимися переменными.

Задача 25.2. Проинтегрировать уравнение $dy-\sqrt[3]{y^2}\,dx=0$.

Р е ш е н и е. Уравнение задано на $\mathbb{R}^2$ и является уравнением с разделяющимися переменными. После умножения его на интегрирующий множитель $\mu(y)=y^{-2/3}$ получаем уравнение с разделенными переменными $y^{-2/3}dy-$ $-dx=0,$ которое определено при $y>0$ или при $y<0.$ Общий интеграл последнего уравнения имеет вид $3\sqrt[3]{y}-$ $-x=C$ или $y=\left(\dfrac{x+C}{3}\right)^3$. Так как $y=0$ – решение исходного уравнения и не является частным, то полное решение записывается в виде

$$\left[\begin{array}{l} y=\left(\dfrac{x+C}{3}\right)^3, \\ y=0. \end{array}\right.$$

Поскольку указанные кубические параболы пересекают ось Ox с горизонтальной касательной, то $y=0$ – особое решение исходного уравнения. В этом случае уравнение имеет составные решения. Например,

$$y=\begin{cases} \left(\dfrac{x+1}{3}\right)^3, & -\infty<x\le -1, \\ 0, & -1<x\le 2, \\ \left(\dfrac{x-2}{3}\right)^3, & 2<x<+\infty \end{cases}$$

представляет одно из таких решений.

Задача 25.3. Найти кривые, у которых отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

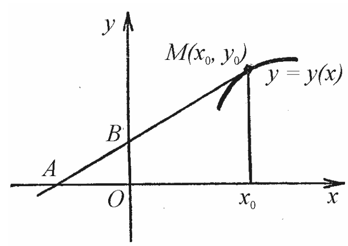


Рис. 20

Р е ш е н и е. Пусть $y=y(x)$ – искомая кривая (рис. 20). Возьмем на ней произвольную точку $M(x_0,y_0)$. Тогда $y'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой в точке (x_0,y_0) и $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ – уравнение касательной. Координаты точек пересечения касательной с координатными осями можно найти из следующих систем:

$$\begin{cases} y-y_0=y'(x_0)(x-x_0), \\ y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y-y_0=y'(x_0)(x-x_0), \\ x=0. \end{cases}$$

Тогда $A(x_0-y_0\,/\,y'(x_0),\ 0)$ и $B(0,\ y_0-y'(x_0)x_0)$.

По условию задачи отрезок AM делится точкой B пополам, поэтому $2x_0-y_0\,/\,y'(x_0)=0.$ Так как полученное соотношение должно выполняться для всех точек искомой кривой, то для определения функции $y(x)$ имеем дифференциальное уравнение $2xy'-y=0.$ Уравнение $2xdy-y\,dx=0$ с помощью интегрирующего множителя $\mu(x,y)=$ $=(x\,y)^{-1}$ сводится к уравнению в полных дифференциалах $\dfrac{2dy}{y}-\dfrac{dx}{x}=0.$ Его общий интеграл $\ln y^2-\ln x=C_1^*$ при $x>0$ и $\ln y^2-\ln(-x)=C_2^*$ при $x<0,$ т.е. $y^2=\begin{cases} C_1x,\ C_1>0, \\ -C_2x,\ C_2>0, \end{cases}$ или $y^2=C\,x,\ C\ne 0.$ Поскольку функциональное уравнение $xy=0$ имеет решения $x=0$ и $y=0$, причем $y=0$ является решением уравнения $2xy'-y=0$, то кривыми, обладающими требуемым свойством, будут $y^2=Cx,\ C\in\mathbb{R}$.

Задача 25.4. Решить задачу Коши

$$P_1(x)Q_1(y)\,dx+P_2(x)Q_2(y)\,dy=0,\ \ y\big|_{x=x_0}=y_0.$$

Алгоритм решения.
• Определить E – область задания уравнения, которой принадлежит точка (x_0,y_0).
• Привести уравнение к уравнению с разделенными переменными.
• Используя формулу (24.11), построить решение задачи Коши полученного уравнения с разделенными переменными.
• Решить функциональное уравнение $Q_1(y)P_1(x)=0$ и проверить, не будет ли решение функционального уравнения являться решением поставленной задачи Коши.
• Записать ответ.

Задание 25.4.1. Построить решение задачи Коши

$$\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0,\quad y\big|_{x=0}=1,$$

указав область E задания задачи Коши.

Решение. Поскольку $P(x,y)=\sqrt{1-y^2},\ Q(x,y)=\sqrt{1-x^2}$, то $E=\{(x,y)\big|\,|x|\le 1,\ |y|\le 1\}$.

$P(x,y):=\sqrt{1-y^2}$ $\qquad$ $Q(x,y):=\sqrt{1-x^2}$

$\mu(x,y):=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}}$

$P(x,y)\cdot dx+Q(x,y)\cdot dy=0$ $\qquad$ $P(x,y)\cdot\mu(x,y)\cdot dx+Q(x,y)\cdot\mu(x,y)\cdot dy=0$

$P1(x,y):=P(x,y)\cdot\mu(x,y)$ simplify $\rightarrow\left(1-x^2\right)^{\frac{-1}{2}}$

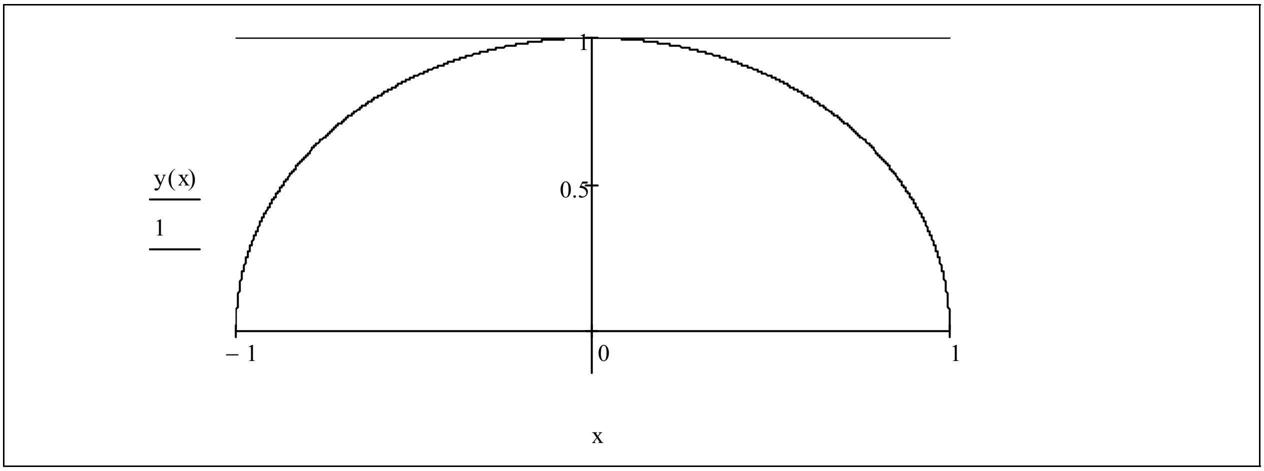
$Q1(x,y):=Q(x,y)\cdot\mu(x,y)$ simplify $\rightarrow\left(1-y^2\right)^{\frac{-1}{2}}$

$\xi:=0$ $\qquad$ $\eta:=1$

$\displaystyle\int_\xi^x P1(x,\eta)\,dx+\int_\eta^y Q1(x,y)\,dy$ simplify $\rightarrow \operatorname{asin}(x)-\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{asin}(y)$

$y(x):=\sin\left[-\left(\operatorname{asin}(x)-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]\rightarrow\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{asin}(x)\right)$ - решение поставленной задачи

$a:=-1$ $\qquad$ $h:=0.0005$ $\qquad$ $b:=1$ $\qquad$ $x:=a,a+h\,..\,b$



Решения функционального уравнения $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}=0 \Rightarrow x=\pm1,\ y=\pm1$ являются решением исходного дифференциального уравнения, но только $y=1$ удовлетворяет начальному условию, поэтому $y=1$ также решение задачи Коши. Таким образом, $\arcsin x+\arcsin y=\dfrac{\pi}{2}$ и $y=1$ – решения поставленной задачи Коши.

Проинтегрировать уравнения:

675. $2x^2y\,dy-(y^2-2)dx=0.$

676. $\cos(y-x)dx-dy=0.$

677. $(x+2y)dy=dx.$

678. $xy(1+y^2)dx-(1+x^2)dy=0.$

679. $(x^3+1)y\,dx+x(y^2-1)dy=0.$

680. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,y'=0.$

681. $x^2(y+1)dx+(x^3-1)(y-1)dy=0.$

682. $y^2(x+1)dx+x^2(1-y)dy=0.$

683. $\dfrac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 x}dx+\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 y}dy=0.$

684. $(1+y^2)(e^{2x}dx-e^y dy)-(1+y)dy=0.$

685. $\operatorname{tg} x\sin^2 y\,dx+\cos^2 x\operatorname{ctg} y\,dy=0.$

686. $(1+x^2)dy-xy\,dx=0.$

687. $(x-2y-1)dx+(3x-6y+2)dy=0.$

Решить начальные задачи:

688. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\,dy=0,\ \ y|_{x=1}=0.$

689. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\,dy=0,\ \ y|_{x=0}=-1.$

690. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\,dy=0,\ \ y|_{x=0}=1.$

691. $(x^2-1)dy+2xy^2dx=0,\ x|_{y=1}=0.$

692. $x\,dy+(y-y^2)dx=0,\ y|_{x=1}=0{,}5.$

693. $\cos x\,dy+(y-2)\sin x\,dx=0,\ x|_{y=-1}=0.$

694. $y' = e^{x+y}$, $y|_{x=0} = 0$.

695. $y' = \dfrac{y(x-1)}{(1+y)x}$, $y|_{x=e} = 1$.

696. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$, $y\big|_{x=0} = 1$.

697. $yx\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$, $x|_{y=1} = 0$.

698. $y'\sin x - y\cos x = 0$, $y|_{x=\pi/2} = 1$.

699. Найти кривые, у которых подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

699.1. Найти расположенные в первой координатной четверти отличные от вертикальных кривые, проходящие через точку $(\sqrt{2}, 0)$, у которых сумма длин отрезков касательной и подкасательной равна произведению координат точки касания.

700. Найти кривые, у которых угол, образованный касательной и радиусом-вектором точки касания, имеет постоянную величину для всех точек кривой. (Указание. Для решения полученного уравнения ввести полярные координаты.)

701. Найти кривые, у которых отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

702. Найти кривые, у которых абсцисса центра масс площадки, ограниченной осями координат, кривой и ординатой любой точки кривой, равна 3/4 абсциссы этой точки. (Указание. $x_c = M_{Oy}/M$, где $M_{Oy} = \iint\limits_D x dx dy$ статический момент площадки D относительно оси Oy.)

702.1. Скорость укорочения мышцы описывается уравнением $x'(t) = B(x_0 - x(t))$, где B – постоянная, зависящая от нагрузки, x_0 – полное укорочение мышцы, $x(t)$ – укорочение мышцы в момент времени t. Найти закон сокращения мышцы, если в момент времени $t = 0$ величина сокращения мышцы равна 0.

26. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Линейные уравнения первого порядка. *Линейное относительно* y *дифференциальное уравнение* первого порядка в нормальной дифференциальной форме имеет вид

$$(p(x)\,y + q(x))\,dx + r(x)\,dy = 0, \quad x \in I,$$

где функции $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ непрерывны на $I \subset \mathbb{R}$, $r(x) \neq 0$ на I.

Это уравнение можно проинтегрировать, используя интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$ (см. соответствующий алгоритм): $\mu(x) = \dfrac{1}{r(x)} \exp\left(\int\limits_s^x \dfrac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau\right)$, $s \in I$.

Линейное относительно y уравнение, разрешенное относительно производной, имеет вид

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{26.1}$$

где функции $P(x)$, $Q(x)$ непрерывны на $I \subset \mathbb{R}$. В этом случае общее решение уравнения задается формулой

$$y(x) = e^{-\int\limits_s^x P(\tau)d\tau}\left(C + \int\limits_s^x Q(t)e^{\int\limits_s^t P(\tau)d\tau}\,dt\right), \tag{26.2}$$

где $s \in I$.

Отметим, что если $Q(x) \equiv 0,$ то уравнение (26.1) называется линейным однородным (и является уравнением с разделяющимися переменными); в противном случае – неоднородным. Линейное однородное уравнение имеет вид

$$y' + P(x)y = 0 \tag{26.3}$$

и

$$y(x) = Ce^{-\int_s^x P(\tau)d\tau}, \ s \in I, \ C \in \mathbb{R}, - \tag{26.4}$$

его общее решение.

Решение задачи Коши $y' + P(x)y = Q(x), \ y\Big|_{x=x_0} = y_0, \ x_0 \in I,$ получается из общего решения (26.2) при $s = x_0$, $C = y_0$, т.е. по формуле

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x P(\tau)d\tau}\left(y_0 + \int_{x_0}^x Q(t)e^{\int_{x_0}^t P(\tau)d\tau}dt\right). \tag{26.5}$$

Отметим, что решение уравнения (26.1) можно построить по методу Лагранжа (методу вариации произвольной постоянной)

Задача 26.1. Построить общее решение линейного уравнения первого порядка $y' + P(x)y = Q(x).$ Указать промежуток *I*.

А л г о р и т м р е ш е н и я.

- Указать промежуток $I \subset \mathbb{R},$ на котором непрерывны функции $P(x)$ и $Q(x)$.
- Используя формулу (26.2), построить общее решение.

Задание 26.1.1. Проинтегрировать уравнение $(2y + 4x)dx - (2x + 1)dy = 0.$

Р е ш е н и е. Отметим, что данное уравнение определено $\forall x \in \mathbb{R}$. Приведем его к виду (26.1), разделив на $2x + 1$. Чтобы не потерять решение при этом преобразовании, рассмотрим уравнение $2x + 1 = 0$, решением которого будет $x = -1/2.$ Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $x = -1/2$ – решение. Используя формулу (26.2), построим общее решение для $x \in (-1/2, +\infty)$ и $x \in (-\infty, -1/2)$.

$P(x) := \dfrac{-2}{2x+1}$ $\qquad$ $Q(x) := \dfrac{4x}{2x+1}$

1. I=(-1/2,∞): $\qquad$ $s := 0$

$$g(x) := -\int_s^x P(\tau)\,d\tau \ \Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{combine, ln}\end{matrix} \to \ln(2\cdot x + 1)$$

$$d(x) := e^{g(x)} \text{ simplify } \to 2\cdot x + 1$$

$$h(x) := \int_s^x \frac{Q(t)}{d(t)}\,dt \ \Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{combine, ln}\end{matrix} \to \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{\ln(2) - 2\cdot x + x\cdot\ln(4)}{2\cdot x + 1}$$

$$d(x)\cdot(C+h(x)) \;\Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{collect}, C\end{matrix} \to (2\cdot x+1)\cdot C+\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-2\cdot x+\ln(2)+2\cdot x\cdot\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+2\cdot x\cdot\ln(2)$$

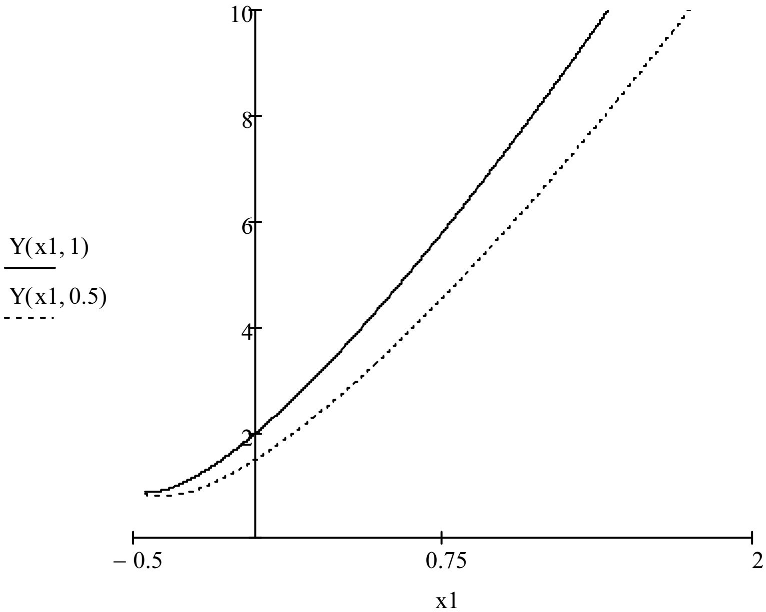
$$y1(x,C) := (2\cdot x+1)\cdot C+\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-2\cdot x+\ln(2)+2\cdot x\cdot\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+2\cdot x\cdot\ln(2)$$

$$(2x+1)\cdot\frac{d}{dx}y1(x,C)-2\cdot y1(x,C)\ \text{simplify}\ \to 4\cdot x$$

Решение - $Y(x,C) := (2\cdot x+1)\cdot(C+\ln(2x+1))+1$

Проверка: $(2x+1)\cdot\frac{d}{dx}Y(x,C)-2\cdot Y(x,C)\ \text{simplify}\ \to 4\cdot x$

$a := -0.45$ $h := 0.001$ $b := 3$ $x1 := a, a+h \,..\, b$



2. I=(-∞, -1/2): $s := -1$

$$g(x) := -\int_s^x P(\tau)\,d\tau \;\Bigg|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{combine}, \ln\\ \text{assume}, x = \text{RealRange}(-\infty, -0.5)\end{matrix} \to \ln(-2\cdot x-1)$$

$$d(x) := e^{g(x)}\ \text{simplify}\ \to -2\cdot x-1$$

$$h(x) := \int_s^x \frac{Q(t)}{d(t)}\,dt \;\Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{assume}, x = \text{RealRange}(-\infty, -0.5)\end{matrix} \to -\ln\left(-x-\frac{1}{2}\right)-\frac{2\cdot x+\ln(2)+2\cdot x\cdot\ln(2)+2}{2\cdot x+1}$$

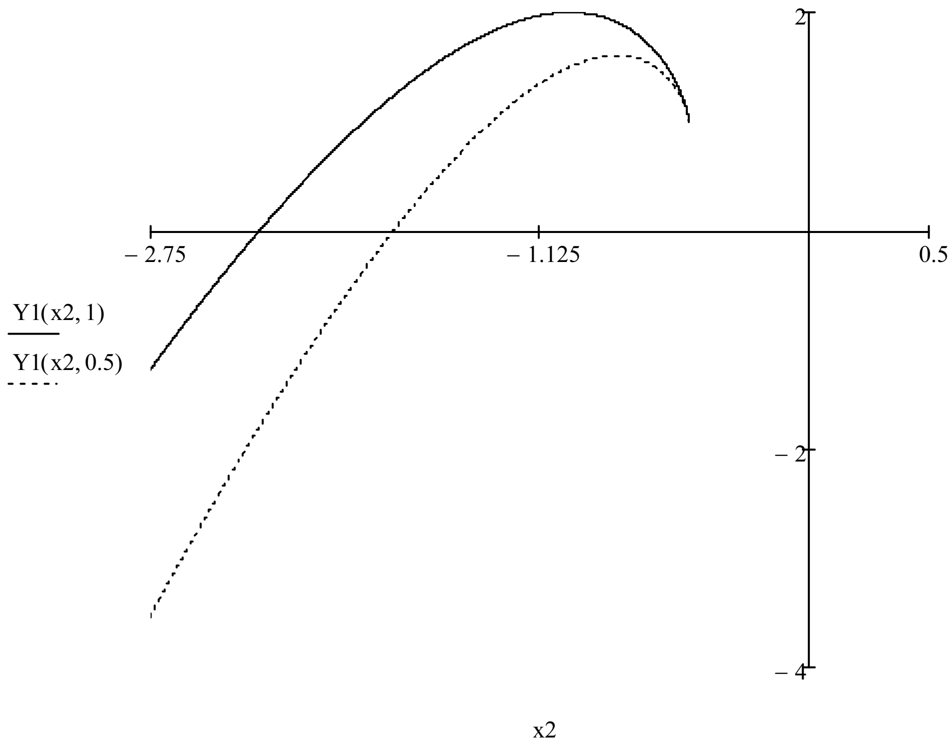
$$d(x)\cdot(C+h(x)) \;\Big|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{collect}, C\end{matrix} \to (-2\cdot x-1)\cdot C+2\cdot x+\ln(2)+\ln\left(-x-\frac{1}{2}\right)+2\cdot x\cdot\ln(2)+2\cdot x\cdot\ln\left(-x-\frac{1}{2}\right)+2$$

$$y2(x,C) := (-2\cdot x-1)\cdot C+2\cdot x+\ln(2)+\ln\left(-x-\frac{1}{2}\right)+2\cdot x\cdot\ln(2)+2\cdot x\cdot\ln\left(-x-\frac{1}{2}\right)+2$$

Решение - $Y1(x,C) := -(2\cdot x+1)\cdot(C-\ln(-2x-1))+1$

Проверка: $(2x+1)\cdot\frac{d}{dx}Y1(x,C) - 2\cdot Y1(x,C)$ simplify $\to 4\cdot x$

$a := -3$ $\quad h := 0.001$ $\quad b := -0.5$ $\quad x2 := a, a+h..b$



Задание 26.1.2. Проинтегрировать уравнение $x' - x/y = y$. Указать промежуток I.

Р е ш е н и е. Отметим, что это – линейное уравнение относительно x. Функции $P(y) = -\frac{1}{y}$ и $Q(y) = y$ непрерывны для $y>0$ и $y<0$. Используя формулу (26.2), которая принимает вид $x(y) = e^{-\int_s^y P(\tau)d\tau}\left(C + \int_s^y Q(t)e^{\int_s^t P(\tau)d\tau}dt\right)$, построим общее решение на промежутках $I=(0,\infty)$ и $I=(-\infty,0)$.

$P(y) := \frac{-1}{y}$ $\qquad Q(y) := y$

1. $I=(0,\infty)$: $\qquad s := 1$

$$g(y) := -\int_s^y P(\tau)\, d\tau \text{ simplify } \rightarrow \ln(y)$$

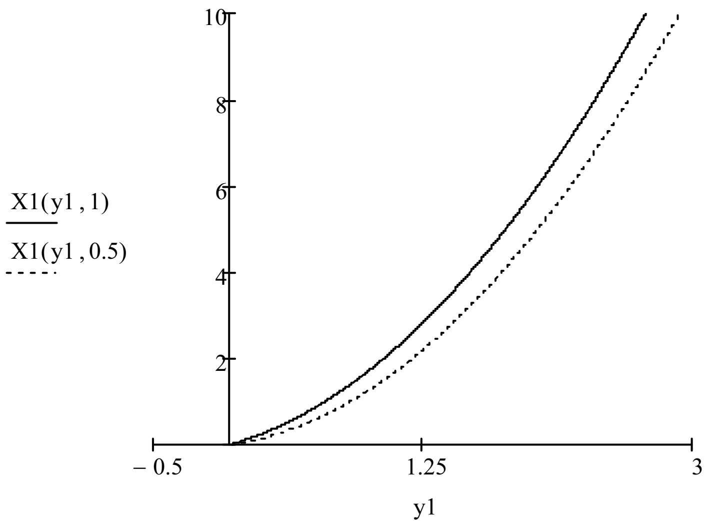
$$d(y) := e^{g(y)} \text{ simplify } \rightarrow y$$

$$h(y) := \int_s^y \frac{Q(t)}{d(t)}\, dt \text{ simplify } \rightarrow y - 1$$

$$d(y)\cdot(C + h(y)) \text{ simplify } \rightarrow y\cdot(C + y - 1)$$

$$X1(y, C) := y\cdot(C + y)$$

$a := 0.001$ $\quad$ $h := 0.001$ $\quad$ $b := 3$ $\quad$ $y1 := a, a + h .. b$



2. I=$(-\infty\ , 0)$: $\quad$ $s := -1$

$$g(y) := -\int_s^y P(\tau)\, d\tau \ \left|\begin{array}{l}\text{simplify}\\ \text{assume}, y = \text{RealRange}(-\infty, 0)\end{array}\right. \rightarrow \ln(-y)$$

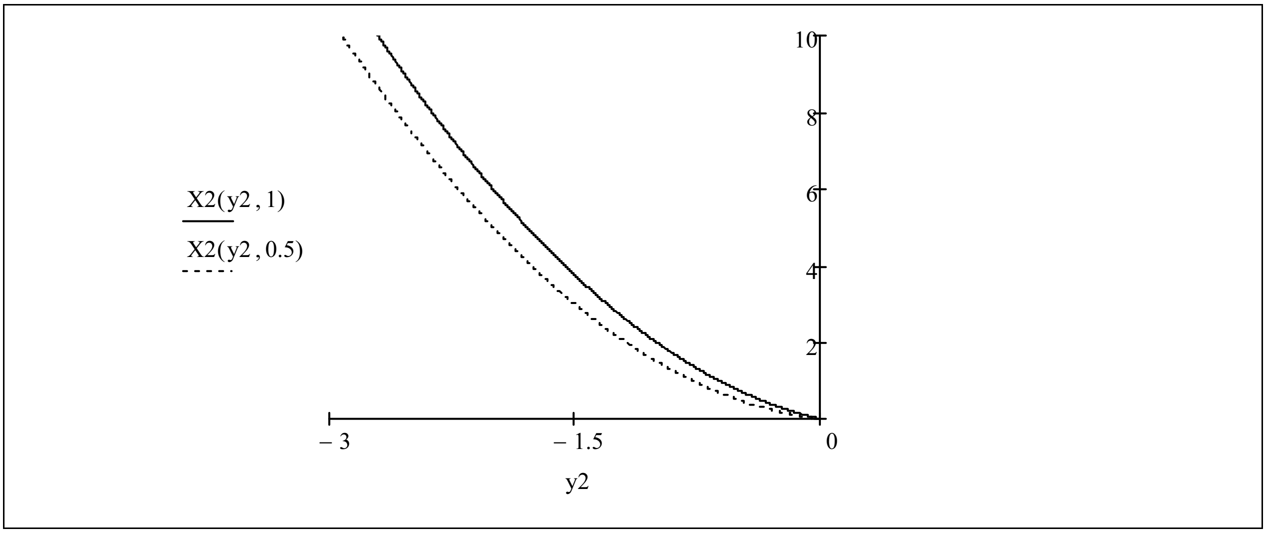
$$d(y) := e^{g(y)} \text{ simplify } \rightarrow -y$$

$$h(y) := \int_s^y \frac{Q(t)}{d(t)}\, dt \text{ simplify } \rightarrow -y - 1$$

$$d(y)\cdot(C + h(y)) \text{ simplify } \rightarrow y\cdot(y - C + 1)$$

$$X2(y, C) := y\cdot(y - C)$$

$a := -3$ $\quad$ $h := 0.001$ $\quad$ $b := -0.01$ $\quad$ $y2 := a, a + h .. b$



Задача 26.2. Решить задачу Коши $y' + P(x)y = Q(x),\ y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Алгоритм решения.

- Указать промежуток $I \subset \mathbb{R}$, содержащий x_0, на котором непрерывны функции $P(x)$ и $Q(x)$.
- Используя формулу (26.5) $y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{\int_{x_0}^{t} P(\tau)d\tau} dt\right)$, построить решение задачи Коши.

Задание 26.2.1. Решить задачу Коши $y' - y\cos x = \cos x,\ y\big|_{x=0} = 1$.

Решение. Функции $P(x) = -\cos x$ и $Q(x) = \cos x$ непрерывны на $\mathbb{R}$, следовательно, $I = \mathbb{R}$. Для нахождения решения задачи Коши применим формулу (26.5).

$x0 := 0 \qquad y0 := 1 \qquad s := x0$

$P(x) := -\cos(x) \qquad Q(x) := \cos(x)$

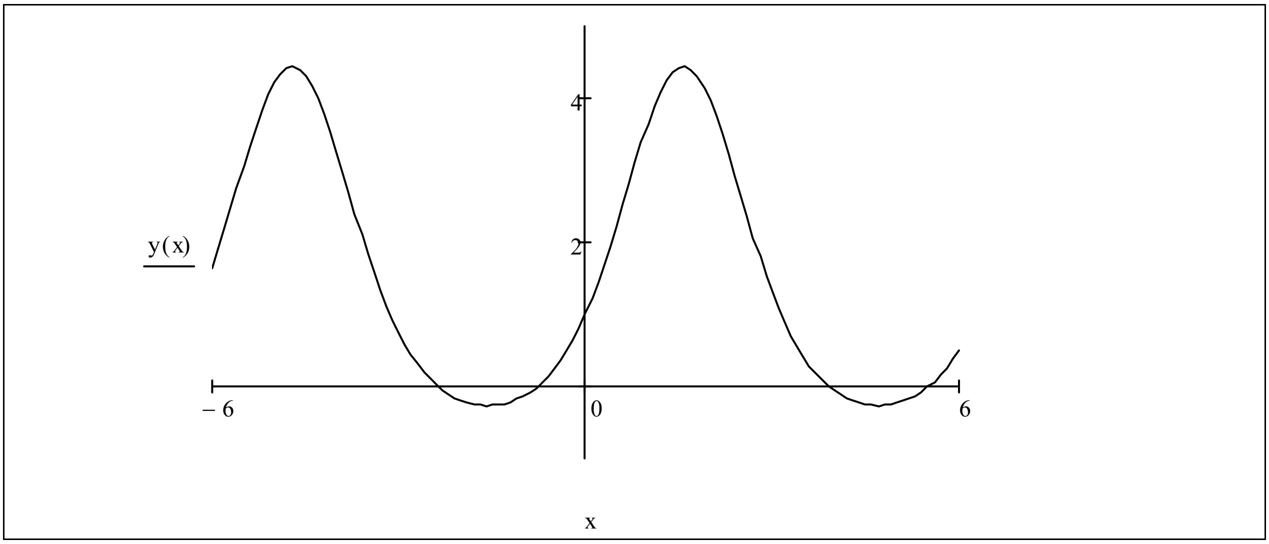
$$g(x) := -\int_s^x P(\tau)\, d\tau \text{ simplify } \to \sin(x)$$

$$d(x) := e^{g(x)} \text{ simplify } \to e^{\sin(x)}$$

$$h(x) := \int_s^x \frac{Q(t)}{d(t)}\, dt \text{ simplify } \to 1 - e^{-\sin(x)}$$

$$y(x) := d(x)\cdot(y0 + h(x)) \text{ simplify } \to 2\cdot e^{\sin(x)} - 1$$

$a := -6 \qquad h := 0.1 \qquad b := 6 \qquad x := a, a + h .. b$



Задача 26.3. Используя метод Лагранжа, проинтегрировать уравнение $y' + P(x)y = Q(x),\ x \in I.$

Алгоритм решения.

- Выписать однородное уравнение (26.3) и построить его общее решение по формуле (26.4).
- Записать частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ неоднородного уравнения (26.1) в виде $y_{\text{чн}}(x) = u(x)e^{-\int_s^x P(\tau)d\tau}$.
- Найти функцию $u(x)$, подставив $y_{\text{чн}}(x)$ в уравнение (26.1).
- Записать общее решение $y_{\text{он}}(x)$ уравнения (26.1) в виде $y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$

Задание 26.3.1. Проинтегрировать уравнение

$$y' - y\cos x = \sin 2x.$$

Решение. Линейное однородное уравнение $y' - y\cos x = 0$, соответствующее данному, имеет общее решение $y_{\text{оо}}(x) = Ce^{\int_0^x \cos t\,dt} = Ce^{\sin x}$. Частное решение исходного уравнения ищем в виде $y_{\text{чн}}(x) = u(x)e^{\sin x}$. Подставим $y_{\text{чн}}(x)$ в уравнение $u'e^{\sin x} + ue^{\sin x}\cos x - ue^{\sin x}\cos x = \sin 2x$, т.е. $u' = e^{-\sin x}\sin 2x$. Отсюда $u(x) = -2(\sin x + 1)e^{-\sin x}$, $y_{\text{чн}}(x) = -2(\sin x + 1)$. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $y = Ce^{\sin x} - 2(\sin x + 1)$.

Проинтегрировать линейные уравнения. Указать промежуток I:

703. $x^2y' - 2xy = 3y.$

704. $(y - y^3)dx + (2xy^2 - x - y^2)dy = 0.$

705. $dy + \left(y\,\mathrm{tg}\,x - \dfrac{1}{\cos x}\right)dx = 0.$

706. $y' + 2xy = \exp(-x^2).$

707. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y dy.$

708. $(2e^y - x)\,y' = 1.$

709. $x' - x\cos y = \sin 2y.$

710. $(2x - y^2)y' = 2y.$

711. $2(x^4 + y)dx - xdy = 0.$

712. $y' + 2xy = 0.$

713. $y' + f'(x)y = f(x)f'(x)$, где f – любая непрерывно дифференцируемая функция.

713.1. $y' - 3x^2y = x^2.$

713.2. $y' - 3x^2y = x^5.$

713.3. $y' + 3x^2y = x^5 + x^2.$

Уравнение Бернулли. Уравнение вида

$$(p(x)y + q(x)y^m)\,dx + r(x)dy = 0, \quad x \in I \subset \mathbb{R},$$

или вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m, \quad x \in I \subset \mathbb{R},$$

при $m \neq 0$ и $m \neq 1$ называется *уравнением Бернулли*.

С помощью подстановки $u = y^{1-m}$, $u = u(x)$ уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению первого порядка относительно функции $u(x)$.

Задача 26.4. Проинтегрировать уравнение Бернулли $y' + P(x)y = Q(x)\,y^m$. Указать промежуток I.

Алгоритм решения.

- Указать промежуток $I \subset \mathbb{R}$, на котором непрерывны функции $P(x)$ и $Q(x)$.
- Записать уравнение Бернулли в виде $\dfrac{y'}{y^m} + P(x)\dfrac{1}{y^{m-1}} = Q(x)$. При этом проследить, чтобы не терялось решение $y = 0$, если оно существует.
- Провести замену переменной $y(x)$ на $u(x)$ по формуле $u = y^{1-m}$, $u' = (1-m)\,y^{-m}y'$.
- Построить общее решение полученного линейного уравнения.
- Записать общее решение уравнения Бернулли.

Задание 26.4.1. Проинтегрировать уравнение Бернулли $y' - y\cos x = y^2\cos x$. Указать промежуток I. Изобразить несколько интегральных кривых.

Решение. Поскольку функции $P(x) = -\cos x$ и $Q(x) = \cos x$ непрерывны на $\mathbb{R}$, то $I = \mathbb{R}$. Запишем исходное уравнение в виде $\dfrac{y'}{y^2} - \dfrac{1}{y}\cos x = \cos x$. Отметим, что $y = 0$ – решение исходного уравнения. Произведем замену: $u = \dfrac{1}{y}$, $u' = -\dfrac{y'}{y^2}$. Получим $u' + u\cos x = -\cos x$. Общее решение данного уравнения получим по формуле (26.2):

$$u(x) = e^{-\int_s^x P(\tau)d\tau}\left(C + \int_s^x Q(t)e^{\int_s^t P(\tau)d\tau}dt\right).$$

Общее решение исходного уравнения: $y(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

$$P(x) := \cos(x) \qquad Q(x) := -\cos(x) \qquad s := 0$$

$$g(x) := -\int_s^x P(\tau)\,d\tau \text{ simplify } \to -\sin(x) \qquad d(x) := e^{g(x)} \text{ simplify } \to e^{-\sin(x)}$$

$$h(x) := \int_s^x \frac{Q(t)}{d(t)}\,dt \text{ simplify } \to 1 - e^{\sin(x)}$$

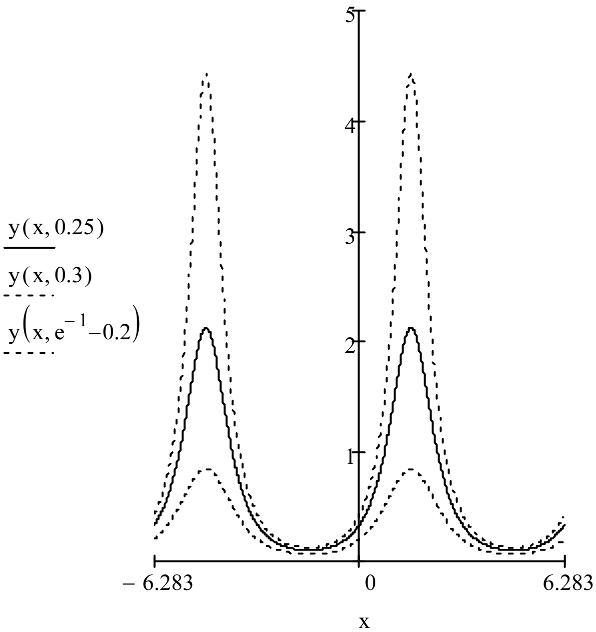
$d(x)\cdot(C1+h(x))$ simplify $\rightarrow e^{-\sin(x)} + C1\cdot e^{-\sin(x)} - 1$

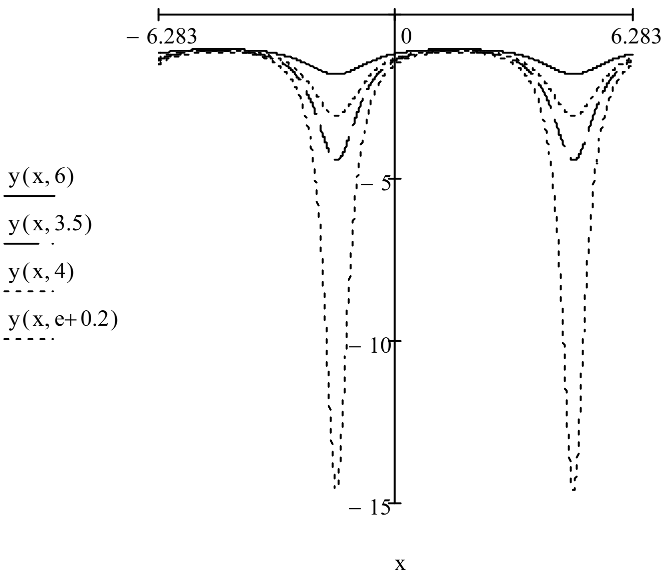
$u(x,C) := C\cdot e^{-\sin(x)} - 1$ $\qquad \dfrac{1}{u(x,C)}$ simplify $\rightarrow \dfrac{1}{C\cdot e^{-\sin(x)} - 1}$

$y(x,C1) := \dfrac{C1\cdot e^{\sin(x)}}{1 - C1\cdot e^{\sin(x)}}$ $\qquad y(x,0) \rightarrow 0$

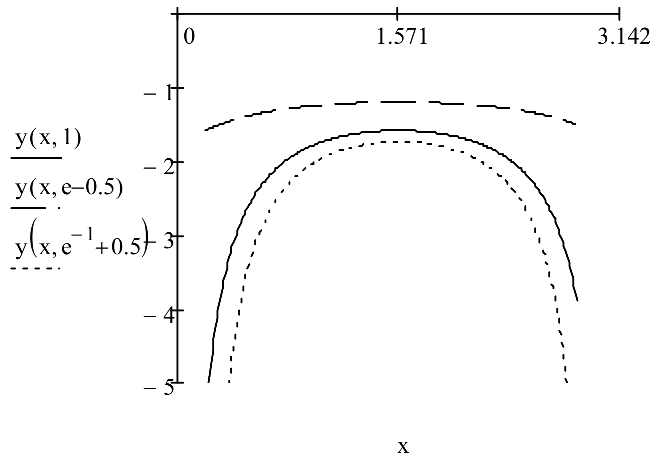
Полное решение: $\qquad y(x,C) := \dfrac{C\cdot e^{\sin(x)}}{1 - C\cdot e^{\sin(x)}}$

$a := -2\cdot\pi \qquad h := 0.01 \qquad b := 2\cdot\pi \qquad x := a, a+h .. b$

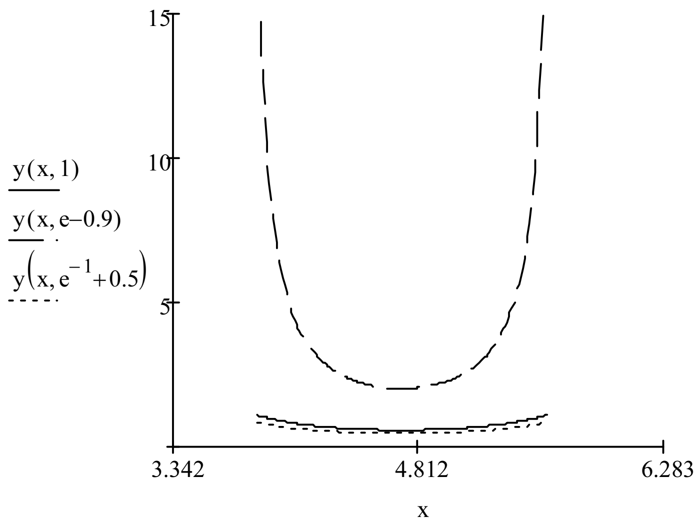




$a := 0.2 \qquad h := 0.01 \qquad b := \pi - 0.3 \qquad x := a, a + h .. b$



$a := \pi + 0.7 \qquad h := 0.01 \qquad b := 2\pi - 0.7 \qquad x := a, a + h .. b$



Проинтегрировать уравнения Бернулли. Указать промежуток I:

714. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0.$

715. $(x^3 + e^y)dy = 3x^2dx.$

716. $2y' \sin x + y \cos x = y^3 \sin^2 x.$

717. $y' - sy/x = -x^3 y^2.$

718. $y' + 2y/x = y^3/x^3.$

719. $x^2y^2y' + xy^3 = a^2.$

720. $y' \operatorname{tg} x + 2y \operatorname{tg}^2 x = ay^2.$

721. $xdy + ydx = y^2dx.$

722. $3y^2dy = (x + y^3 + 1)dx.$

723. $xy^3dx = (x^2y + 2)dy.$

Решить задачи Коши:

724. $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1),\ y|_{x=2} = 4.$

725. $x' + x\cos y = \cos y,\ x|_{y=0} = 1.$

726. $(2x \exp x^2 + 2xy)dx - dy = 0,\ y|_{x=0} = 0.$

727. $y' + y/x^2 = e^{1/x},\ y|_{x=1} = 0.$

728. $y' + xy - xy^3 = 0,\ y|_{x=0} = 1.$

729. $2ydy = (x + y^2)dx,\ y|_{x=0} = 0.$

730. Найти кривые, у которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси абсцисс, равна квадрату ординаты точки касания.

731. Найти кривые, у которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, равна квадрату абсциссы точки касания.

732. Найти кривые, у которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, равна среднему геометрическому постоянной a и абсциссы точки касания.

733. Найти кривые, у которых площадь трапеции, образованной касательной к кривой в произвольной ее точке, осями координат и прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку касания, равна a^2.

734. Найти кривые, у которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, пропорциональна квадрату ординаты точки касания.

735. Найти кривые, у которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси абсцисс, пропорциональна квадрату абсциссы точки касания.

735.1. Найти возрастающую функцию, график которой расположен в верхней полуплоскости, проходит через точку (0, 2) и в каждой точке графика поднормаль является средним арифметическим квадратов координат этой точки.

736. Найти кривые, у которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси абсцисс, пропорциональна кубу абсциссы точки касания.

737. Найти кривые, у которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, пропорциональна кубу ординаты точки касания.

737.1. Найти убывающую функцию, график которой расположен в первой координатной четверти и проходит через точку $(a^2, 1)$, если площадь треугольника, образованного касательной, осью абсцисс и радиусом-вектором точки касания, постоянна и равна a^2.

737.2. Найти закон изменения интенсивности валового продукта для замкнутой однопродуктовой модели Леонтьева (см. 367.4).

27. Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным

Однородные уравнения. Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{27.1}$$

называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются *однородными функциями* одной степени, т.е. если для любых $(x, y),\ (tx, ty) \in E$ выполнено условие: $P(tx, ty) = t^k P(x, y),\ \ Q(tx, ty) = t^k Q(x, y)$.

Уравнение $y' = f(x, y)$ будет однородным, если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию $f(x, tx) = f(1, t)$.

Подстановка $y = ux,\ u = u(x)$, преобразует однородное уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Задача 27.1. Проинтегрировать уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Алгоритм решения.

- Указать область E задания уравнения.
- Проверить свойство однородности функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.
- Провести в уравнении подстановку $y = ux,\ u = u(x),\ \ dy = u\,dx + x\,du$ или $y' = u + xu'$.
- Проинтегрировать полученное уравнение. При выполнении требуемых преобразований следить за тем, чтобы не потерять решений исходного уравнения.
- Записать полное решение исходного уравнения.

Задание 27.1.1. Проинтегрировать уравнение $y^2 - 2xy + x^2 y' = 0$.

Р е ш е н и е. Поскольку $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то уравнение запишем в виде $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$. Функции $y^2 - 2xy$ и x^2 определены и непрерывны на области $E = \mathbb{R}^2$.

$p(x,y) := y^2 - 2\cdot x\cdot y$ $\qquad\qquad$ $q(x,y) := x^2$

$p(t\cdot x, t\cdot y)$ collect, t $\to (y^2 - 2\cdot x\cdot y)\cdot t^2$

$q(t\cdot x, t\cdot y)$ collect, t $\to x^2\cdot t^2$

$p(x, u\cdot x)$ | simplify, expand $\to u^2\cdot x^2 - 2\cdot u\cdot x^2$

$q(x, u\cdot x)$ simplify $\to x^2$

Подстановка: y = ux

Следовательно: dy = xdu + udx

$p(x,u\cdot x) + u\cdot q(x,u\cdot x)$ | simplify, expand $\to u^2\cdot x^2 - u\cdot x^2$

$x\cdot q(x,u\cdot x)$ | simplify, expand $\to x^3$

$$p1(x,u) := \frac{p(x,u\cdot x) + u\cdot q(x,u\cdot x)}{x^2} \;\Big|\; \text{simplify, expand} \to u^2 - u$$

$$q1(x,u) := \frac{x\cdot q(x,u\cdot x)}{x^2} \;\Big|\; \text{simplify, expand} \to x$$

A)

$u^2 - u \neq 0$ $\qquad$ $x \neq 0$ $\qquad$ Отметим, что $x = 0$ не является решением исходного уравнения

$P(x) := \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $Q(u) := \dfrac{1}{(u^2 - u)}$

$P(x)\,dx + Q(u)\,du = 0$

1. $\xi := 1$ $\qquad\qquad$ $\eta := 2$

$$\int_{\xi}^{x} P(x)\,dx + \int_{\eta}^{u} Q(u)\,du \;\Big|\; \begin{array}{l}\text{assume}, u = \text{RealRange}(1,\infty)\\ \text{assume}, x > 0\\ \text{combine}, \ln\end{array} \to \ln\left[\frac{2\cdot x\cdot(u-1)}{u}\right]$$

$$\ln\left[\frac{2\cdot x\cdot(u-1)}{u}\right] - \ln(C1) \text{ solve}, C1 \to \frac{2\cdot x\cdot(u-1)}{u} \qquad C1 = \frac{2\cdot x\cdot(u-1)}{u}$$

2. $\xi := 1$ $\qquad \eta := \frac{1}{2}$

$$\int_{\xi}^{x} P(x)\,dx + \int_{\eta}^{u} Q(u)\,du \;\left|\begin{array}{l}\text{assume}, u = \text{RealRange}(0,1)\\ \text{assume}, x > 0\\ \text{combine}, \ln\end{array}\right. \rightarrow \ln\left[-\frac{x\cdot(u-1)}{u}\right]$$

$$\ln\left[-\frac{x\cdot(u-1)}{u}\right] - \ln(C2) \text{ solve}, C2 \rightarrow -\frac{x\cdot(u-1)}{u} \qquad C2 = -\frac{x\cdot(u-1)}{u}$$

3. $\xi := 1$ $\qquad \eta := -1$

$$\int_{\xi}^{x} P(x)\,dx + \int_{\eta}^{u} Q(u)\,du \;\left|\begin{array}{l}\text{assume}, u = \text{RealRange}(-\infty,0)\\ \text{assume}, x > 0\\ \text{combine}, \ln\end{array}\right. \rightarrow -\ln\left(\frac{\frac{2\cdot u}{x}}{u-1}\right)$$

$$-\ln\left(\frac{\frac{2\cdot u}{x}}{u-1}\right) - \ln(C3) \text{ solve}, C3 \rightarrow \frac{x\cdot(u-1)}{2\cdot u} \qquad C3 = \frac{x\cdot(u-1)}{2\cdot u}$$

4. $\xi := -1$ $\qquad \eta := 2$

$$\int_{\xi}^{x} P(x)\,dx + \int_{\eta}^{u} Q(u)\,du \;\left|\begin{array}{l}\text{assume}, u = \text{RealRange}(1,\infty)\\ \text{assume}, x < 0\\ \text{combine}, \ln\end{array}\right. \rightarrow \ln\left[-\frac{2\cdot x\cdot(u-1)}{u}\right]$$

$$\ln\left[-\frac{2\cdot x\cdot(u-1)}{u}\right] - \ln(C4) \text{ solve}, C4 \rightarrow -\frac{2\cdot x\cdot(u-1)}{u} \qquad C4 = -\frac{2\cdot x\cdot(u-1)}{u}$$

5. $\xi := -1$ $\qquad \eta := \frac{1}{2}$

$$\int_{\xi}^{x} P(x)\,dx + \int_{\eta}^{u} Q(u)\,du \;\left|\begin{array}{l}\text{assume}, u = \text{RealRange}(0,1)\\ \text{assume}, x < 0\\ \text{combine}, \ln\end{array}\right. \rightarrow \ln\left[\frac{x\cdot(u-1)}{u}\right]$$

$$\ln\left[\frac{x\cdot(u-1)}{u}\right] - \ln(C5) \text{ solve}, C5 \rightarrow \frac{x\cdot(u-1)}{u} \qquad C5 = \frac{x\cdot(u-1)}{u}$$

6. $\xi := -1$ $\qquad \eta := -1$

$$\int_{\xi}^{x} P(x)\,dx + \int_{\eta}^{u} Q(u)\,du \;\left|\begin{array}{l}\text{assume}, u = \text{RealRange}(-\infty,0)\\ \text{assume}, x < 0\\ \text{combine}, \ln\end{array}\right. \rightarrow \ln\left[-\frac{x\cdot(u-1)}{2\cdot u}\right]$$

$$\ln\left[-\frac{x\cdot(u-1)}{2\cdot u}\right]-\ln(C6)\ \text{solve},C6\ \rightarrow -\frac{x\cdot(u-1)}{2\cdot u} \qquad C6=-\frac{x\cdot(u-1)}{2\cdot u}$$

Решение:

$$C=-\frac{x\cdot(u-1)}{u}$$

$$-\frac{x\cdot(u-1)}{u}\ \Bigg|\begin{array}{l}\text{substitute},u=\dfrac{y}{x}\\ \text{combine},\ln\end{array}\rightarrow \frac{x^2-x\cdot y}{y}$$

Общее решение:

$$Cy=x^2-x\cdot y$$

или

$$y=C1\cdot\left(x^2-x\cdot y\right)$$

Б) $u^2-u=0\ \text{substitute},u=\dfrac{y}{x}\ \rightarrow -\dfrac{y\cdot(x-y)}{x^2}=0$

$$-\frac{y\cdot(x-y)}{x^2}=0\ \text{solve},y\ \rightarrow \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$$

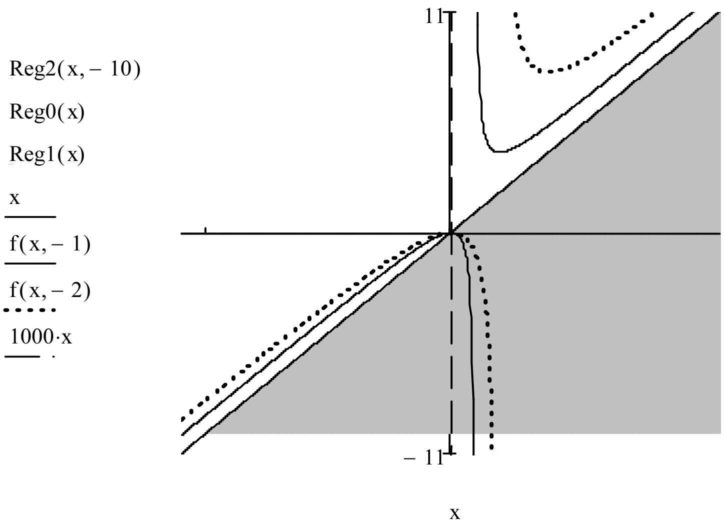
$y=x$ получается из общего решения при C=0

$y=0$ получается из общего решения при C1=0

$$x^2-x\cdot y-C\cdot y\ \text{solve},y\ \rightarrow \frac{x^2}{C+x} \qquad f(x,C):=\frac{x^2}{C+x}$$

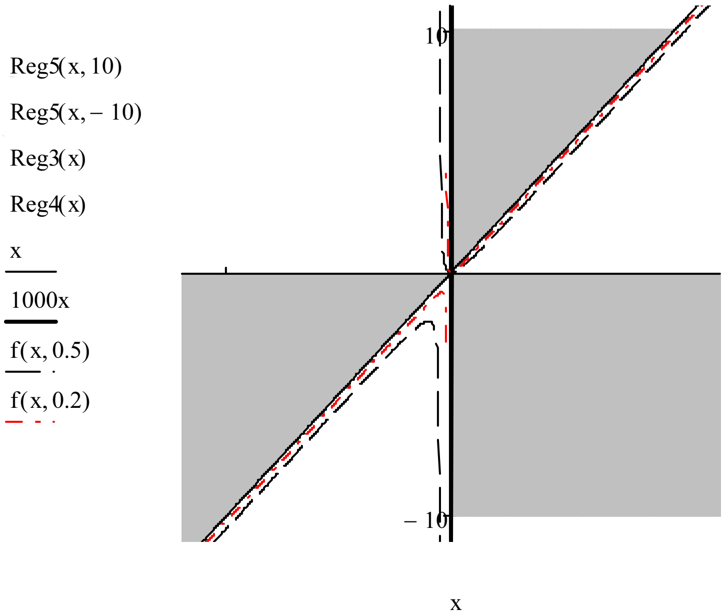
Области: $C<0$ $\quad x>0\wedge y<x\wedge x>0\wedge y<0\vee x<0\vee y<x$

$Reg0(x):=\text{if}(x\neq 0,x,0)$ $\quad Reg1(x):=\text{if}(x>0,x,0)$ $\quad Reg2(x,c):=\text{if}(x\neq 0,c,0)$



$C > 0 \qquad x > 0 \wedge y > x \wedge x > 0 \wedge y < 0 \vee x < 0 \vee y < x \wedge y > x$

$\text{Reg3}(x) := \text{if}(x < 0, x, 0) \qquad \text{Reg4}(x) := \text{if}(x > 0, x, 0) \qquad \text{Reg5}(x, c) := \text{if}(x > 0, c, 0)$



Ответ: $\quad x^2 - x \cdot y = C \cdot y$

$0 < x < -C$

$C < 0$

Проинтегрировать уравнения:

738. $x y' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

739. $y^2 dx + x^2 dy = xydy$.

740. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\varphi(y/x)}{\varphi'(y/x)}$.

741. $xdy - \left(y - x\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}\right)dx = 0$.

742. $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}\cos^2\dfrac{y}{x}$.

743. $xy' - y\ln\dfrac{y}{x} = 0$.

744. $\left(\sqrt{x^2 - y^2} + y\right)dx - xdy = 0$.

745. $xdy - \left(y + x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}\right)dx = 0$.

Уравнения, приводящиеся к однородным. Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(ax + by + c)\,dx + f_2(Ax + By + C)\,dy = 0 \qquad (27.2)$$

или

$$y' = f\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right) \qquad (27.3)$$

при $Ab - aB \neq 0$ приводится к однородному уравнению с помощью подстановки $x = \xi + \alpha,\ y = \eta + \beta$, где $\xi,\ \eta$ – новые переменные; $\alpha,\ \beta$ – постоянные, удовлетворяющие алгебраической системе уравнений

$$\begin{cases} A\alpha + B\beta + C = 0, \\ a\alpha + b\beta + c = 0. \end{cases} \tag{27.4}$$

Если $Ab - aB = 0$, то подстановка $Ax + By = u$ сводит исходное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача 27.2. Проинтегрировать уравнение

$$f_1(ax + by + c)\,dx + f_2(Ax + By + C)\,dy = 0\ .$$

Алгоритм решения.

- Указать область E задания уравнения.
- Пусть выполняется условие $Ab - aB \neq 0$.
- Решить систему (27.4) $\begin{cases} A\alpha + B\beta + C = 0, \\ a\alpha + b\beta + c = 0 \end{cases}$ и привести исходное уравнение к однородному с помощью подстановки $x = \xi + \alpha,\ y = \eta + \beta$.
- Проверить свойство однородности функций $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$.
- Провести в уравнении подстановку $y = ux,\ u = u(x),\ \ dy = u\,dx + x\,du.$
- Пусть выполняется условие $Ab - aB = 0$.
- Выполнить подстановку $Ax + By = u,\ \ du = A\,dx + B\,dy.$
- Свести исходное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.
- Проинтегрировать полученное уравнение. При выполнении требуемых преобразований следить за тем, чтобы не потерять решений исходного уравнения.
- Записать полное решение исходного уравнения.

Задание 27.2.1. Проинтегрировать уравнение

$$(x + y - 1)\,dy + (2x - y + 3)\,dx = 0\ .$$

Решение.

$f1 \cdot dx + f2 \cdot dy = 0$

$f1(x, y) := 2 \cdot x - y + 3$ $\qquad$ $f2(x, y) := y + x - 1$

$a := 2$ $\qquad$ $b := -1$ $\qquad$ $c := 3$

$A := 1$ $\qquad$ $B := 1$ $\qquad$ $C := -1$ $\qquad$ $A \cdot b - a \cdot B = -3$

Given $\quad A \cdot \alpha + B \cdot \beta + C = 0$

$a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c = 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(\alpha, \beta) \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Значит: $x = \xi + \alpha$

$y = \eta + \beta$

$$2 \cdot x - y + 3 \;\Big|\; \begin{matrix} \text{substitute}, x = \xi + \alpha \\ \text{substitute}, y = \eta + \beta \end{matrix} \rightarrow 2 \cdot \xi - \eta$$

$$y + x - 1 \;\Big|\; \begin{matrix} \text{substitute}, x = \xi + \alpha \\ \text{substitute}, y = \eta + \beta \end{matrix} \rightarrow \xi + \eta$$

$$p \cdot d\xi + q \cdot d\eta = 0$$

$p(\xi,\eta) := 2 \cdot \xi - \eta$

$q(\xi,\eta) := \xi + \eta$

$p(t \cdot \xi, t \cdot \eta)$ collect, t $\rightarrow (2 \cdot \xi - \eta) \cdot t$

$q(t \cdot \xi, t \cdot \eta)$ collect, t $\rightarrow (\xi + \eta) \cdot t$

Подстановка: $\eta = u\xi$

Следовательно: $d\eta = \xi \cdot du + u \cdot dx$

$p(\xi, u \cdot \xi)$ simplify $\rightarrow -\xi \cdot (u - 2)$

$q(\xi, u \cdot \xi)$ simplify $\rightarrow \xi \cdot (u + 1)$

$p(\xi, u \cdot \xi) + u \cdot q(\xi, u \cdot \xi)$ simplify $\rightarrow \xi \cdot \left(u^2 + 2\right)$

$\xi \cdot q(\xi, u \cdot \xi)$ simplify $\rightarrow \xi^2 \cdot (u + 1)$

$$p1(\xi,u) := \frac{p(\xi, u \cdot \xi) + u \cdot q(\xi, u \cdot \xi)}{\xi} \;\Big|\; \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{expand} \end{matrix} \rightarrow u^2 + 2$$

$$q1(\xi,u) := \frac{\xi \cdot q(\xi, u \cdot \xi)}{\xi} \;\Big|\; \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{expand} \end{matrix} \rightarrow \xi + \xi \cdot u$$

$u^2 + 2 \neq 0$ $\quad$ $\xi \neq 0$ $\quad$ Отметим, что $\xi = 0$ не является решением данного уравнения

$P(\xi) := \dfrac{1}{\xi}$ $\quad$ $Q(u) := \dfrac{u + 1}{u^2 + 2}$ $\quad$ $u = \dfrac{\eta}{\xi}$ $\quad$ $u = \dfrac{y - \beta}{x - \alpha}$

$P(\xi)\, d\xi + Q(u)\, du = 0$

1. $\xi0 := 1$ $\quad$ $\eta := 0$

$$\int_{\xi0}^{\xi} P(\xi)\, d\xi + \int_{\eta}^{u} Q(u)\, du \;\Big|\; \begin{matrix} \text{assume}, \xi > 0 \\ \text{combine}, \ln \end{matrix} \rightarrow \ln\left(\frac{\sqrt{2} \cdot \xi \cdot \sqrt{u^2 + 2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot u}{2}\right)}{2}$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\xi\cdot\sqrt{u^2+2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}\cdot u}{2}\right)}{2} \;\Bigg|\; \begin{array}{l}\text{substitute}, u=\dfrac{y-\beta}{x-\alpha}\\ \text{substitute}, \xi = x-\alpha\\ \text{combine}, \ln\end{array} \rightarrow \ln\left[\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{6\cdot x^2+8\cdot x+3\cdot y}{(3\cdot x+}}}{2}\right.$$

Общее решение: $x > \alpha \rightarrow x > -\frac{2}{3}$

$$\ln\left[(3x+2)\cdot\sqrt{\frac{6\cdot x^2+8\cdot x+3\cdot y^2-10\cdot y+11}{(3\cdot x+2)^2}}\right]+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{atan}\left[\frac{3\cdot\left(y-\frac{5}{3}\right)}{\sqrt{2}\cdot(3\cdot x+2)}\right] = C1$$

2. $\xi 0 := -1$ $\qquad\qquad$ $\eta := 0$

$$\int_{\xi 0}^{\xi} P(\xi)\,d\xi + \int_{\eta}^{u} Q(u)\,du \;\Bigg|\; \begin{array}{l}\text{assume}, \xi < 0\\ \text{combine}, \ln\end{array} \rightarrow \ln\left(-\frac{\sqrt{2}\cdot\xi\cdot\sqrt{u^2+2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}\cdot u}{2}\right)}{2}$$

$$\ln\left(-\frac{\sqrt{2}\cdot\xi\cdot\sqrt{u^2+2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}\cdot u}{2}\right)}{2} \;\Bigg|\; \begin{array}{l}\text{substitute}, u=\dfrac{y-\beta}{x-\alpha}\\ \text{substitute}, \xi = x-\alpha\\ \text{combine}, \ln\end{array} \rightarrow \ln\left[-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{}\right.$$

$$\ln\left[-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{6\cdot x^2+8\cdot x+3\cdot y^2-10\cdot y+11}{(3\cdot x+2)^2}}}{2}\right]+\frac{\sqrt{2}\cdot\operatorname{atan}\left[\frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\left(y-\frac{5}{3}\right)}{2\cdot(3\cdot x+2)}\right]}{2}$$

Общее решение: $x < \alpha \rightarrow x < -\frac{2}{3}$

$$\ln\left[-(3x+2)\cdot\sqrt{\frac{6\cdot x^2+8\cdot x+3\cdot y^2-10\cdot y+11}{(3\cdot x+2)^2}}\right]+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{atan}\left[\frac{3\cdot\left(y-\frac{5}{3}\right)}{\sqrt{2}\cdot(3\cdot x+2)}\right] = C2$$

Проверка:

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left[-(3x+2)\cdot\sqrt{\frac{6\cdot x^2+8\cdot x+3\cdot y^2-10\cdot y+11}{(3\cdot x+2)^2}}\right]+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{atan}\left[\frac{3\cdot\left(y-\frac{5}{3}\right)}{\sqrt{2}\cdot(3\cdot x+2)}\right]\right] \;\Bigg|\; \begin{array}{l}\text{simplify}\\ \text{factor}\end{array} \rightarrow \frac{3\cdot(2\cdot x}{6\cdot x^2+8\cdot x+3}$$

$$\frac{3\cdot(2\cdot x-y+3)}{6\cdot x^2+8\cdot x+3\cdot y^2-10\cdot y+11} \qquad f1(x,y) := 2\cdot x - y + 3$$

$$\frac{d}{dy}\left[\ln\left[-(3x+2)\cdot\sqrt{\frac{6\cdot x^2+8\cdot x+3\cdot y^2-10\cdot y+11}{(3\cdot x+2)^2}}\right]+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot \operatorname{atan}\left[\frac{3\cdot\left(y-\frac{5}{3}\right)}{\sqrt{2}\cdot(3\cdot x+2)}\right]\right] \begin{vmatrix} \text{simplify} \\ \text{factor} \end{vmatrix} \rightarrow \frac{3\cdot(x}{6\cdot x^2+8\cdot x+3}$$

$$\frac{3\cdot(x+y-1)}{6\cdot x^2+8\cdot x+3\cdot y^2-10\cdot y+11} \qquad f2(x,y) := y+x-1$$

Задание 27.2.2. Проинтегрировать уравнение

$$(y-2x+1)dy+(2y-4x+3)dx=0 .$$

Р е ш е н и е.

$f1\cdot dx + f2\cdot dy = 0$

$f1(x,y) := 2\cdot y - 4\cdot x + 3$ $\qquad$ $f2(x,y) := y - 2x + 1$

$a := -4$ $\qquad$ $b := 2$ $\qquad$ $c := 3$

$A := -2$ $\qquad$ $B := 1$ $\qquad$ $C := 1$ $\qquad$ $A\cdot b - a\cdot B = 0$

Подстановка: $u = A\cdot x + B\cdot y$

Следовательно: $du = A\cdot dx + B\cdot dy$

$$y = \frac{1}{B}\cdot(u - A\cdot x)$$

$$dy = \frac{1}{B}\cdot(du - A\cdot dx)$$

$$f\_1(u) := 2\cdot y - 4\cdot x + 3 \text{ substitute }, y = \frac{1}{B}\cdot(u - A\cdot x) \rightarrow 2\cdot u + 3$$

$$f\_2(u) := y - 2x + 1 \text{ substitute }, y = \frac{1}{B}\cdot(u - A\cdot x) \rightarrow u + 1$$

$$f\_1(u)\cdot dx + f\_2(u)\cdot\left[\frac{1}{B}\cdot(du - A\cdot dx)\right] = 0 \qquad p(u)\,dx + q(u)\cdot du = 0$$

$$p(u) := f\_1(u) - \frac{A}{B}\cdot f\_2(u) \rightarrow 4\cdot u + 5$$

$$q(u) := \frac{f\_2(u)}{B} \rightarrow u + 1$$

$$Q(u) := \frac{q(u)}{p(u)} \rightarrow \frac{u+1}{4\cdot u+5} \qquad P(x) := 1$$

A)

$4u + 5 \neq 0$

$P(x)\,dx + Q(u)\,du = 0$

1. $\xi := 0$ $\eta := 0$

$$\int_{\xi}^{x} P(x)\,dx + \int_{\eta}^{u} Q(u)\,du \;\Bigg|\begin{matrix}\text{combine}, \ln \\ \text{assume}, u > \frac{-5}{4}\end{matrix} \rightarrow \frac{u}{4} + x + \ln\left[\frac{4^{\frac{15}{16}} \cdot 5^{\frac{1}{16}}}{4 \cdot \left(u + \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{16}}}\right]$$

$$\left[\frac{u}{4} + x + \ln\left[\frac{4^{\frac{15}{16}} \cdot 5^{\frac{1}{16}}}{4 \cdot \left(u + \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{16}}}\right] - 1\right] \cdot 16 \text{ substitute }, u = y - 2 \cdot x \;\rightarrow 8 \cdot x + 4 \cdot y - \ln\left(y - 2 \cdot x + \frac{5}{4}\right) - 2 \cdot \ln(2) +$$

Решение:

$$8 \cdot x + 4 \cdot y - \ln(4y - 8 \cdot x + 5) = C1$$

$$4y - 8 \cdot x + 5 > 0$$

2. $\xi := 0$ $\eta := -2$

$$\int_{\xi}^{x} P(x)\,dx + \int_{\eta}^{u} Q(u)\,du \;\Bigg|\begin{matrix}\text{combine}, \ln \\ \text{assume}, u < \frac{-5}{4}\end{matrix} \rightarrow \frac{u}{4} + x + \ln\left[\frac{3^{\frac{1}{16}} \cdot 4^{\frac{15}{16}}}{4 \cdot \left(-u - \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{16}}}\right] + \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{u}{4} + x + \ln\left[\frac{3^{\frac{1}{16}} \cdot 4^{\frac{15}{16}}}{4 \cdot \left(-u - \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{16}}}\right] + \frac{1}{2}\right] \cdot 16 \text{ substitute }, u = y - 2 \cdot x \;\rightarrow 8 \cdot x + 4 \cdot y - 2 \cdot \ln(2) + \ln(3) - \ln\left(2 \cdot x - y -\right.$$

Решение:

$$8 \cdot x + 4 \cdot y - \ln[-(4y - 8 \cdot x + 5)] = C2$$

$$4y - 8 \cdot x + 5 < 0$$

Б)

$4u + 5 = 0$ является решением приведенного уравнения,

значит, $4y - 8 \cdot x + 5 = 0$ является решением исходного уравнения

Полное решение:

$$8 \cdot x + 4 \cdot y - \ln(4y - 8 \cdot x + 5) = C1$$

$$4y - 8 \cdot x + 5 > 0$$

$$8 \cdot x + 4 \cdot y - \ln[-(4y - 8 \cdot x + 5)] = C2$$

$$4y - 8 \cdot x + 5 < 0$$

$$4y - 8 \cdot x + 5 = 0$$

Проинтегрировать уравнения:

746. $(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$.

747. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

748. $(x + 2y + 1)dx + (3 - 2x)dy = 0$.

749. $(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$.

750. $(x - 5y + 7)dx + (4x - 2y + 10)dy = 0$.

751. $(2x - y - 1)dx + (2y - x + 1)dy = 0$.

752. $(x - y + 3)dx + (3x + y + 1)dy = 0$.

753. $(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0$.

754. $(x + 2y + 1)dy - (2x + 4y + 3)dx = 0$.

755. $(x + y)^2 y' = a^2$.

756. Показать, что уравнение

$$(ay^2 + by(kx^2 + lx + m) + c(kx^2 + lx + m)^2)(2kx + l) = (kx^2 + lx + m)^2 y'$$

приводится к однородному уравнению подстановкой $kx^2 + lx + m = u$.

757. Показать, что уравнение

$$(2ky + l)x^2 y' = a(ky^2 + ly + m)^2 + b(ky^2 x + lyx + mx) + cx^2$$

приводится к однородному уравнению подстановкой $ky^2 + ly + m = u$.

758. Показать, что уравнение

$$(ay^3 + bxy^2 + cxy^3)dx + (a_1 x^2 y + b_1 x^3 + c_1 x^3 y)dy = 0$$

приводится к уравнению $(au + bv + c)du + (a_1 u + b_1 v + c_1)dv = 0$ заменой переменных $x = 1/u$, $y = 1/v$.

759. Найти кривые, для которых длина отрезка, отсекаемого нормалью на оси ординат в какой-нибудь точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат.

760. Найти кривые, для которых произведение абсциссы произвольной точки на длину отрезка, отсекаемого нормалью на оси абсцисс, равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

761. Найти кривые, для которых площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, кривой и двумя ординатами, из которых одна постоянная, а другая переменная, равна отношению куба ординаты к абсциссе.

762. Найти кривые, для которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, равна абсциссе точки касания.

762.1. Найти расположенные в первой координатной четверти кривые, для которых треугольник, одна сторона которого лежит на оси ординат, вторая – на касательной, а основание на радиусе-векторе точки касания, является равнобедренным.

28. Случаи интегрируемости уравнения Риккати

Дифференциальное уравнение

$$(p(x)y^2 + q(x)y + r(x))dx + s(x)dy = 0,\ x \in I,$$

где $p(x)$, $s(x)$ не обращаются в нуль на I, называется *уравнением Риккати.* Записанное с помощью производной искомой функции, оно имеет вид

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),\ x \in I.$$

Уравнение Риккати не является элементарным. Оно интегрируется в квадратурах в исключительных случаях. С помощью подстановки $y = \alpha(x)u$ за счет выбора функции $\alpha(x)$ уравнение Риккати сводится к уравнению вида

$$\frac{du}{dx} = \pm u^2 + \left(Q + \frac{P'}{P}\right)u \pm PR,$$

причем $\alpha(x) = \pm 1/P(x)$, а с помощью подстановки $y = \beta(x) + u$ – к уравнению вида

$$\frac{du}{dx} = Pu^2 + R + P\beta^2 + Q\beta - \beta',$$

причем $\beta(x) = -Q/(2P)$. Комбинируя обе подстановки, уравнение Риккати можно привести к виду $y' = \pm y^2 + R(x)$.

Если известно частное решение $y = y_1(x)$ уравнения Риккати, то подстановка $y = y_1 + 1/u$ приводит его к линейному относительно функции u уравнению.

Отметим, что уравнение Риккати

$$y' = Ay^2 + B\frac{y}{x} + \frac{C}{x^2},$$

где $A, B, C \in \mathbb{R}$, допускает частное решение вида $y_1(x) = a/x$, $a \in \mathbb{R}$, если алгебраическое относительно a уравнение $Aa^2 + (B + 1)a + C = 0$ имеет действительные корни.

Уравнение Риккати вида

$$y' = A\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} + \frac{C}{x}$$

подстановкой $y = u\sqrt{x}$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Уравнение Риккати вида $y' = ay^2 + b/x^2$ заменой $y = 1/u$ сводится к однородному уравнению.

Задача 28.1. Привести уравнение Риккати $y' - y^2 - xy - x + 1 = 0$, которое имеет частное решение $y = -1$, к линейному уравнению.

Р е ш е н и е. Сделаем в уравнении Риккати подстановку $y = -1 + 1/u$, где $u = u(x)$. Поскольку $y' = -u'/u^2$, то уравнение примет вид

$$-\frac{1}{u^2}u' - \left(\frac{1}{u} - 1\right)^2 - x\left(\frac{1}{u} - 1\right) - x + 1 = 0.$$

Получившееся после умножения на u^2 и приведения подобных уравнение $u' + (x - 2)u + 1 = 0$ является линейным.

Задача 28.2. Привести уравнение Риккати $y' - y^2 + y\sin x - \cos x = 0$ к линейному уравнению, если $y = a\sin x$ – вид его частного решения.

Р е ш е н и е. Найдем значение a, при котором функция $a\sin x$ будет решением исходного уравнения. Для этого подставим функцию $y = a\sin x$:

$$a\cos x - a^2\sin^2 x + a\sin^2 x - \cos x \equiv 0.$$

Отсюда $(a - 1)\cos x \equiv 0$ и $(a - a^2)\sin^2 x \equiv 0$. Следовательно, $a = 1$. Поскольку $y = \sin x$ – частное решение данного уравнения, то сделаем подстановку $y = \sin x + \dfrac{1}{u}$, тогда $\cos x - \dfrac{1}{u^2}u' - \left(\sin x + \dfrac{1}{u}\right)^2 + \left(\sin x + \dfrac{1}{u}\right)\sin x - \cos x = 0.$ После преобразований получаем линейное уравнение $u' + u\sin x + 1 = 0$.

Задача 28.3. Проинтегрировать уравнение Риккати $y' + 2y^2 - 1/x^2 = 0$.

Р е ш е н и е. Частное решение данного уравнения ищем в виде $y = a/x$. При подстановке его в уравнение получаем $-a/x^2 + 2a^2/x^2 - 1/x^2 = 0$. Имеем квадратное относительно a уравнение, корни которого $a_1 = 1$, $a_2 = -1/2$ определяют два частных решения $y_1 = 1/x$ и $y_2 = -(2x)^{-1}$ указанного вида данного уравнения Риккати. Подстановка $y = 1/x + 1/u$ сводит его к линейному уравнению $u' - 4u/x - 2 = 0$, общее решение которого имеет вид $u = Cx^4 - 2x/3$. Тогда $y = x^{-1} + (Cx^4 - 2x/3)^{-1}$ – общее решение исходного уравнения.

Проинтегрировать уравнения:

763. $y' = y^2 + 3\dfrac{y}{x} + 4\dfrac{1}{x^2}$.

764. $y' = \dfrac{1}{3}y^2 + \dfrac{2}{3x^2}$.

765. $y' + y^2 + \dfrac{1}{x}y - \dfrac{4}{x^2} = 0$.

766. $y' + y^2 = -\dfrac{1}{4x^2}$.

767. $y' = y^2 - xy - x$, $y_1 = ax + b$.

768. $(x^2y^2 + xy + 1)dx - x^2dy = 0$, $y_1 = a/x$.

769. $(y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x)dx - xdy = 0$, $y_1 = ax + b$.

770. $y' + ay^2 - ayx = 1$, $y_1 = Ax + B$.

771. $dy + (y^2 - 2/x^2)dx = 0$.

771.1. $y' = y^2 - 5\dfrac{y}{x} + 4\dfrac{1}{x^2}$.

771.2. $y' = y^2 + 5\dfrac{y}{x} + 9\dfrac{1}{x^2}$.

771.3. $y' = y^2 - 7\dfrac{y}{x} + 9\dfrac{1}{x^2}$.

771.4. $y' = y^2 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

771.5. $y' = y^2 - 3\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

771.6. $y' = y^2 + \dfrac{1}{2x^2}$.

772. Проинтегрировать уравнение $xdy = (x^2y^2 - (2x + 1)y + 1)dx$, приведя его к уравнению Риккати с коэффициентом при квадрате неизвестной функции, равным единице.

773. Проинтегрировать уравнение $(4y^2 - 4x^2y + x^4 + x + 4)dx - y = 0$, приведя его к уравнению Риккати, не содержащему явно искомой функции.

774. Проинтегрировать уравнение $(x^2y^2 - y + 1)dx - xdy = 0$, приведя его к уравнению Риккати с коэффициентом при квадрате искомой функции, равным единице.

775. Проинтегрировать уравнение $(y^2 - x^2y + x^4 + 2x + 4)dx - dy = 0$, приведя его к уравнению Риккати, не содержащему явно искомой функции.

776. Построить общее решение уравнения Риккати, если известны три его частных решения.

777. Привести уравнение Риккати $xy' + f(x)(y^2 - x^2) - y = 0$ к линейному уравнению, если частное решение его имеет вид $y_1 = ax + b$.

Преобразовать уравнения Риккати с помощью указанных подстановок и указать тип полученных уравнений:

778. $y' + y^2 - 2x^2y + x^4 - 2x - 1 = 0$, $u(x) = y - x^2$.

779. $y' + y^2 + (xy - 1)f(x) = 0$, $y = 1/x + 1/u(x)$.

780. $y' = (y + x)^2$, $u(x) = y + x$.

781. $y' - y^2 + (x^2 + 1)y - 2x = 0$, $u(x) = y - x^2 - 1$.

782. $y' + ay(y - x) = 1$, $u(x) = y - x$.

783. $y' + xy^2 - x^3y - 2x = 0$, $u(x) = x^2 - y$.

784. $x^2(y' - y^2) - ax^2y + ax + 2 = 0$, $u(x) = xy - 1$.

785. $x^2(y' + ay^2) = b$, $u(x) = xy$.

Определить тип дифференциальных уравнений и указать метод их интегрирования:

786. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2ydy) = 0$.

787. $y' + \sin\dfrac{x + y}{2} = \sin\dfrac{x - y}{2}$.

788. $(x^2 - y^2)dy = 2xydy$.

789. $y' = x/y + y/x$.

790. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$.

791. $x' + x = \cos y$.

792. $(1 + x^2)dy - (2xy + (1 + x^2)^2)dx = 0$.

793. $(x + y)dx + (x + y - 1)dy = 0$.

794. $y' - 2xy = 3x^3y^2$.

795. $y' = \dfrac{2x-1}{x^2}y + 1$.

796. $y' = y^2 - x^2 + 1$.

797. $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (-1 + \sqrt{x^2 + y^2})ydy = 0$.

798. $xdy + ydx + y^2(xdy - ydx) = 0$.

799. $(x\cos\dfrac{y}{x} + y\sin\dfrac{y}{x})ydx + (x\cos\dfrac{y}{x} - y\sin\dfrac{y}{x})xdy = 0$.

Проинтегрировать уравнения с помощью указанных подстановок:

800. $(x - 2y^3)dx + 3y^2(2x - y^3)dy = 0$, $y^3 = u(x)$.

801. $xy' + 1 = xe^{x-y}$, $e^y = u(x)$.

802. $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$, $\mathrm{tg}(y/2) = u(x)$.

803. $y' = \dfrac{y - x^2\sqrt{x^2 - y^2}}{xy\sqrt{x^2 - y^2 + x}}$, $y = xu(x)$.

804. $y' - e^{x-y} + e^x = 0$, $y = \ln u(x)$.

Используя указанную подстановку, преобразовать данные уравнения и указать тип и метод интегрирования полученных уравнений:

453. $y(x + \ln y) + (x - \ln y)y' = 0$, $\ln y = u(x)$.

454. $y' = \cos(ay + bx)$, $a \neq 0$, $u(x) = ay + bx$.

455. $y' + \alpha\sin(ay + bx) + \beta = 0$, $u(x) = ay + bx$.

456. $y' = f(ax + by)$, $u(x) = ax + by$.

457. $y' = (\sqrt{x^2 + y^2} - x)/y$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

458. $xy^3 - (x^2y^2 - y^8)y' = 0$, $y^3 = u(x)$.

459. $xy + 1 + (x^2 - x^3y)y' = 0$, $x = 1/t$.

460. $(ay^3 + bxy^2 + cxy^3) + (a_1x^2y + b_1x^3 + c_1x^3y)y' = 0$, $x = 1/t$, $y = 1/u$.

461. $a\varphi'(y)y' + P(x)\varphi(y) = Q(x)$, $u(x) = \varphi(y)$.

462. $xy' - y(\ln xy - 1) = 0$, $u(x) = xy$.

463. $xy' - y(x\ln(x^2/y) + 2) = 0$, $u(x) = x^2/y$.

464. $xy' + \sin(y - x) = 0$, $u(x) = x\,\mathrm{tg}((y - x)/2)$.

465. $(x^2 + 1)y' + x\sin y\cos y - x(x^2 + 1)\cos^2 y = 0$, $u(x) = \mathrm{tg}\,y$.

466. Доказать, что линейное уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$ остается линейным при любой замене независимой переменной $x = \varphi(t)$.

467. Доказать, что линейное уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$ остается линейным при любом линейном преобразовании искомой функции $y = f(x)u + \varphi(x)$.

468. Доказать, что уравнение Бернулли $y' + P(x)y = Q(x)y^m$ не меняет типа при преобразовании $y = f(x)u$, где $f(x)$ – любая заданная дифференцируемая функция.

469. Доказать, что уравнение Риккати $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ не меняет типа при любой замене независимой переменной $x = \varphi(t)$.

470. Доказать, что уравнение Риккати $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ не меняет типа при любом дробно-линейном преобразовании искомой функции $y = \dfrac{\alpha(x)u + \beta(x)}{a(x)u + b(x)}$, где $\alpha(x)b(x) - a(x)\beta(x) \neq 0$.

471. Найти кривую, для которой площадь фигуры, ограниченной осями координат, самой кривой и прямой, проходящей через произвольную точку параллельно оси ординат, равна произведению квадрата ординаты этой точки и ее абсциссы.

472. Найти кривые, для которых площадь сектора, ограниченного кривой, полярной осью и радиусом-вектором любой точки кривой, равна произведению полярных координат этой точки.

473. Найти кривую, для которой площадь сектора, ограниченного кривой, полярной осью и радиусом-вектором любой точки кривой, равна четвертой степени полярного радиуса этой точки.

474. Найти кривые, у которых любая касательная пересекается с осью ординат в точке, одинаково удаленной от точки касания и от начала координат.

475. Найти кривую, проходящую через точку (4, 3), если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке в два раза меньше углового коэффициента радиуса-вектора точки касания.

476. Найти кривые, у которых площадь трапеции, образованной осями координат, ординатой произвольной точки кривой (прямой, параллельной оси ординат) и касательной кривой в этой точке, равна половине квадрата абсциссы данной точки.

477. Найти кривую, для которой площадь фигуры, ограниченной осями координат, самой кривой и ординатой (прямой, параллельной оси ординат) произвольной точки кривой, равна кубу этой ординаты.

478. Найти кривые, для которых длина отрезка, отсекаемого на оси абсцисс нормалью к кривой в произвольной ее точке, на a единиц больше абсциссы этой точки.

479. Найти кривые, у которых сумма абсциссы и расстояния до начала координат любой точки равна подкасательной кривой в этой точке.

29. Особые решения уравнений в нормальной дифференциальной форме

Однозначная разрешимость задачи Коши. Функция $f(x,y)$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяет на E *условию Липшица* по аргументу y, если существует постоянная L, которую называют *постоянной Липшица*, такая, что для любых точек (x, y_1) и (x, y_2) из E выполняется неравенство $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$. Отметим, что если функция $f(x, y)$ непрерывна вместе с $f'_y(x, y)$ на компакте $V \subset \mathbb{R}^2$, то заведомо удовлетворяет условию Липшица по y на V.

Теорема 29.1 (*Пикара – Линделёфа*). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных (x, y) и удовлетворяет условию Липшица по переменной y на области $D \subset \mathbb{R}^2$, то задача Коши $y' = f(x, y)$, $y|_{x=x_0} = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$, однозначно разрешима в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).*

Различные примеры, приведенные далее, показывают, что нарушение условий теоремы Пикара – Линделёфа часто приводит либо к неоднозначной разрешимости задачи Коши, т.е. к существованию у рассматриваемого уравнения более одного решения, удовлетворяющего данным начальным условиям, либо к неразрешимости задачи Коши.

Задача 29.1. Проинтегрировать уравнение $2x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\,dy = 0$. Указать особые решения. Выделить решения, проходящие через точки $M_1(1, 1)$ и $M_2(1, 0)$.

Р е ш е н и е. Так как уравнение определено при $|y| \le 1$, то в качестве области D берется полоса $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in [-1, 1]$. Внутри полосы уравнение приводится к уравнению с разделенными переменными $2x\,dx + \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = 0$.

Общее решение его имеет вид $x^2 - \sqrt{1-y^2} = C$, $C \in \mathbb{R}$. Оно является общим решением и для исходного уравнения в D. Функции $y = 1$ и $y = -1$ также являются решениями исходного уравнения. Отметим, что эти решения не могут быть получены из общего ни при каком $C \in \mathbb{R}$. Любая точка $(x_0, 1)$, принадлежащая кривой $y = 1$, будет принадлежать также и одной из кривых семейства $x^2 - \sqrt{1-y^2} = C$, а именно кривой $x^2 - \sqrt{1-y^2} = x_0^2$. Таким образом, через каждую точку $(x_0, 1)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, проходят по крайней мере две интегральные кривые исходного уравнения. Следовательно, точки прямой $y = 1$ – это точки неединственности. Покажем, что они являются точками ветвления, для чего определим угловые коэффициенты касательных к интегральным кривым в точке $(x_0, 1)$. Угловой коэффициент прямой $y = 1$ равен нулю. Угловой коэффициент каждой интегральной кривой семейства $x^2 - \sqrt{1-y^2} = C$ определяется из дифференциального уравнения с разделенными переменными $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x\sqrt{1-y^2}}{y}$. Тогда $y'(x_0) = 0$. Таким образом, точки $(x_0, 1)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, являются точками ветвления, а прямая $y = 1$ – особым решением уравнения. Исследование точек прямой $y = -1$, т.е. точек $(x_0, -1)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, проводится аналогично. Прямая $y = -1$ также является особым решением исходного уравнения. Через точку $M_1(1, 1)$ проходят две интегральные кривые $y = 1$ и $y = x\sqrt{2-x^2}$ уравнения, через точку $M_2(1, 0)$ – одна интегральная кривая $x = \sqrt[4]{1-y^2}$.

Огибающая семейства решений. Общее решение уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ имеет вид $\Phi(x, y, C) = 0$. При каждом фиксированном C это соотношение задает интегральную кривую, т.е. данное соотношение задает однопараметрическое семейство интегральных кривых уравнения.

Огибающей однопараметрического семейства кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ называется кривая $y = \varphi(x)$, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства и не имеет общих дуг ни с одной кривой семейства. Таким образом, если $\Phi(x, y, C) = 0$ – общее решение уравнения, то огибающая $y = \varphi(x)$ является особым решением этого уравнения, так как состоит из точек ветвления. Система уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

определяет *дискриминантные кривые*, к которым принадлежит и огибающая. Отметим, что дискриминантная кривая будет огибающей, если кривые семейства не имеют на дискриминантной кривой *особых точек*, т.е. точек, в которых $\Phi_x'^2 + \Phi_y'^2 = 0$.

Задача 29.2. По виду общего решения $(x - C)^2 + y^2 = 4$, $x \le C$, уравнения $yy' = \sqrt{4-y^2}$ исследовать наличие особых решений.

Р е ш е н и е. Определим дискриминантные кривые заданного семейства

$$\begin{cases} (x-C)^2 + y^2 = 4, \\ -2(x-C) = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 4, \text{ т.е. } y = 2 \text{ и } y = -2.$$

Подстановкой в уравнение убеждаемся, что найденные дискриминантные кривые являются решениями приведенного уравнения. Поскольку

$$\Phi'_x = 2(x - C),\ \Phi'_y = 2y$$

и особые точки $(C, 0)$ кривых семейства $(x - C)^2 + y^2 = 4$ не принадлежат ни одной из дискриминантных кривых, то линии $y = 2$ и $y = -2$ являются огибающими. Следовательно, решения $y = 2$ и $y = -2$ – особые решения уравнения. Графики частных решений уравнения и особых решений приведены на рис. 21.

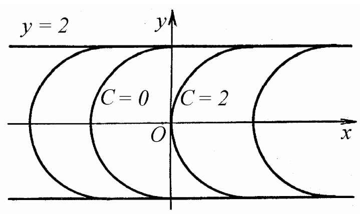


Рис. 21

Задача 29.3. Для уравнения $y' = \sqrt{y - x} + a$ найти кривые, которые могут соответствовать особым решениям, и проверить, будут ли они особыми решениями.

Р е ш е н и е. Так как $f_y'(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\sqrt{y - x} + a) = \dfrac{1}{2\sqrt{y - x}}$ и в точках прямой $y = x$ функция $f_y'(x, y)$ не ограничена, то на этой прямой могут быть нарушены условия теоремы Пикара – Линделёфа. Проверим, будет ли $y = x$ решением исходного уравнения, для чего подставим $y = x$ в уравнение. Полученное соотношение $1 = a$ показывает, что $y = x$ может быть особым решением уравнения $y' = \sqrt{y - x} + 1$.

Проверим, будет ли прямая $y = x$ огибающей общего решения этого уравнения. Проинтегрируем уравнение, полагая $y - x = u$. В результате получим уравнение с разделяющимися переменными $u' = \sqrt{u}$. Общее решение исходного уравнения имеет вид $4(y - x) = (x + C)^2$.

Из системы

$$\begin{cases} 4(y - x) = (x + C)^2, \\ 0 = 2(x + C) \end{cases}$$

определяется дискриминантная кривая $y = x$. Поскольку

$$\Phi'_x = \frac{\partial}{\partial x}\Big(4(y - x) - (x + C)^2\Big) = -4 - 2(x + C), \quad \Phi'_y = \frac{\partial}{\partial y}\Big(4(y - x) - (x + C)^2\Big) = 4$$

и Φ'_x, Φ'_y в точках прямой $y = x$ одновременно не обращаются в нуль, то $y = x$ – огибающая однопараметрического семейства кривых $4(y - x) = (x + \mathrm{C})^2$. Следовательно, $y = x$ – особое решение уравнения $y' = \sqrt{y - x} + 1$.

Проинтегрировать уравнения и указать особые решения:

832. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$.

833. $(1 + y^2)dx + xydy = 0$.

834. $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$.

835. $x\sqrt{1 - y^2}\,dx + ydy = 0$.

836. $xdx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$.

837. $x\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$.

838. $e^{-y}(1 + y') = 1$.

839. $y' = 3y^{2/3}$.

840. $2yy' = 3y^{4/3}$.

841. $3yy' = 2\sqrt{y}$.

842. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

843. $xy' = y + x\cos^2(y / x)$.

844. $yy' = -\sqrt{1 - y^2}$.

Построить дифференциальные уравнения заданных семейств интегральных кривых и исследовать наличие у них особых решений.

845. $y = kx + 1/k$.

846. $y^2 = 2px + p^2$.

847. $(x - \mathrm{C})^2 + y^2 = C^2/2$.

848. $(x - \mathrm{C})^2 + y^2 = 1$.

849. $y = Ce^x + 1/C$.

850. $y = x(C - 1/x)^2$, $x \neq 0$, $C - 1/x \geq 0$.

По виду уравнений найти кривые, которые могут соответствовать особым решениям, или показать, что уравнение не имеет особых решений:

851. $y' = \dfrac{3}{2}y^{1/3}$.

852. $y' = 1 + \dfrac{3}{2}(y - x)^{1/3}$.

853. $y' = \sqrt{y}$.

854. $y' = x^2 + y^2$.

855. $y' = \cos(xy)$.

856. $y' = \sqrt[3]{x-y} - 1$.

857. $y' = \sqrt[3]{x-y} + 1$.

858. $y' = \sin x + y\cos x$.

859. $y' = y + \sqrt[3]{2y}$.

860. $y' = y + \sqrt{x^2+y^2}$.

861. $y' = y\sin x + y^2\cos x$.

862. $y' = y\sin x + \sqrt{y}\cos x$.

863. $y' = \sin y + \cos x$.

864. $y' = \sqrt{1+x^2}\,y^2 + y\sin x + \cos x$.

865. Может ли линейное уравнение $y' = p(x)y + q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции для всех $x \in \mathbb{R}$, иметь особое решение?

866. Может ли уравнение Бернулли $y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}$, где функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, иметь особое решение?

867. Может ли уравнение Риккати $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$, где функции $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}$, иметь особое решение?

30. Составление математических моделей прикладных задач

Истечение жидкости из резервуара. Заполненный жидкостью резервуар имеет в дне отверстие, через которое вытекает жидкость. Скорость истечения жидкости определяется формулой $v = c\sqrt{2gh}$, где c – постоянная, зависящая от типа жидкости (для воды, например, $c = 0,6$); g – ускорение свободного падения; h – высота уровня жидкости над отверстием.

Задача 30.1. Коническая воронка высотой H с углом раствора при вершине, равным α (рис. 22), заполнена водой. Вода вытекает через отверстие, площадь которого σ. Найти время, за которое вся вода вытечет из воронки.

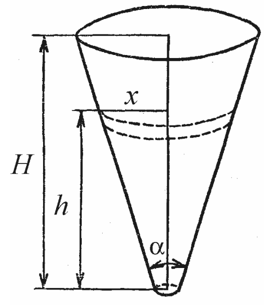


Рис. 22

Решение. Пусть в момент времени t высота уровня жидкости над отверстием $h = h(t)$. Предположим, что за время dt уровень воды в воронке понизился на dh. Тогда для малого dt объем вытекшей жидкости будет равен объему цилиндра высотой dh и радиусом основания $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}h$, т.е. $dV = -\pi h^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}dh$. За это же время dt через отверстие вытечет объем воды, равный объему цилиндра, площадь основания которого σ и высота $vdt = cdt\sqrt{2gh}$, т.е. $dV = cdt\sigma\sqrt{2gh}$. Приравнивая полученные выражения, приходим к дифференциальному уравнению $-\pi h^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}dh = c\sigma\sqrt{2gh}dt$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Используя начальные данные $h\big|_{t=0} = H$, получаем математическую модель (задачу Коши) рассматриваемого процесса: $-\pi h^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}dh = c\sigma\sqrt{2gh}dt, h\big|_{t=0} = H$. Решив задачу Коши, будем иметь:

$$t = \frac{2\pi \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{3\sigma\sqrt{2g}}\left(H^{5/2} - h^{5/2}\right).$$

Время T, за которое жидкость вытечет из воронки, определяется соотношением $T = \frac{2}{3}\pi\frac{\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{\sigma\sqrt{2g}}H^{5/2}$.

868. Вода вытекает из отверстия в дне цилиндрического сосуда. Высота цилиндра H, площадь основания S, площадь отверстия σ. Составить математическую модель истечения воды и определить время, за которое вытечет вся жидкость.

869. В дне котла, имеющего форму полушара радиусом 1 м и наполненного водой, образовалась щель площадью 0,25 см^2. Найти время истечения жидкости из котла.

870. За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметром 2 м, вытечет из нее через круглое отверстие радиусом 0,1 м, вырезанное в дне?

871. Высота цилиндрического резервуара с вертикальной осью равна 6 м, а диаметр 4 м. За какое время вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через имеющееся в дне круглое отверстие радиусом 1/12 м?

872. Длина цилиндрического резервуара с горизонтальной осью равна 6 м, а диаметр 4 м. За какое время вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через имеющееся в дне круглое отверстие радиусом 1/12 м?

873. Вертикально стоящий резервуар имеет в дне небольшое отверстие. Предполагая, что скорость истечения воды пропорциональна давлению, найти, за какое время вытечет половина первоначального объема воды, если известно, что 1/10 этого объема вытечет за первые сутки.

874. В резервуар глубиной 4 м, поперечное сечение которого – квадрат со стороной 6 м, поступает вода со скоростью 10 м^3/мин. За какое время резервуар будет наполнен, если в то же время вода вытекает из него через имеющееся в дне квадратное отверстие со стороной 1/12 м?

Распространение теплоты. Если на каждой из поверхностей, ограничивающих какое-либо тело, поддерживать постоянную температуру, то по истечении некоторого времени тело приходит в состояние, при котором температура в каждой его определенной точке постоянна (не зависит от времени). Если температура T является функцией только одной координаты, например x, то, согласно закону Ньютона для теплопроводности, в этом случае проходящее за 1 с через площадку A перпендикулярно оси Ox количество теплоты $Q = -kA\dfrac{dT}{dx}$, где k – постоянная величина, называемая *теплопроводностью* данного вещества.

Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха: $dT/d\tau = -k(T - t)$, где T – температура тела в момент времени τ; k – положительный коэффициент пропорциональности; t – температура воздуха.

Задача 30.2. Полый железный шар (k = 58, 66 Дж/(м · с · К)), внутренний радиус которого 6 см, а внешний 10 см, находится в стационарном тепловом состоянии, причем температура на внутренней поверхности 200 °С, а на внешней 20 °С. Найти температуру на расстоянии r (6 см < r < 10 см) от центра шара и количество теплоты, которое шар отдает в окружающую среду за 1 с.

Р е ш е н и е. Температура тела на поверхности A, представляющей собой сферу радиусом r, где 6 см < r < <10 см, зависит только от r, $T = T(r)$. Площадь поверхности A равна $4\pi r^2$. Количество теплоты, проходящее через поверхность A, определяется законом Ньютона $Q = -4\pi r^2 k\dfrac{dT}{dr}$. Поскольку источников теплоты между поверхностями шара нет, приходим к следующему выводу: через поверхность A для любого r проходит одно и то же количество теплоты, т.е. Q = const. Интегрируя записанное выше уравнение, получаем $4\pi kT = Q/r + C$. Подставляя сюда T = 20 °С, $r = 10 \cdot 10^{-2}$ м и T = 200 °С, $r = 6 \cdot 10^{-2}$ м, находим: $C = -1000\pi k$, $Q = 108\pi k$, $T = 27/r - 250$. Тогда $Q = 108\pi k \approx$ 19 892, 78 Дж/с.

875. Паропроводная труба диаметром 20 см защищена слоем магнезии толщиной 10 см. Теплопроводность магнезии k = 0,71 Дж/(м · с · К). Допустив, что температура трубы 160 °С, а внешней поверхности слоя магнезии 30 °С, найти распределение температуры внутри покрытия, а также количество теплоты, отдаваемое трубой в окружающую среду в течение суток на протяжении трубы в 1 м.

876. Толщина кирпичной стены 30 см, k = 0,63 Дж/(м · с · К). Установить, как зависит температура от расстояния точки до наружного края стены, если температура равна 20 °С на внутренней и 0 °C на внешней поверхности стены. Найти также количество теплоты, которое стена площадью 1 м^2 отдает в окружающую среду в течение суток.

877. Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна 20 °C и тело в течение 20 мин охлаждается от 100 до 60 °C, то через какое время температура его понизится до 30 °C?

878. Определить время совершения преступления, если в момент обнаружения тела его температура равнялась 31 °C, а час спустя составляла 29 °C (считать, что в момент смерти человека температура его тела равна 37 °C, а температура воздуха 21 °C).

879. Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 мин понижается от 100 до 60 °C. Температура окружающего воздуха 25 °C. Через какое время с момента начала охлаждения температура хлеба понизится до 30 °C ?

Движение материальной точки. При решении задач динамики материальной точки используют *второй закон Ньютона* $\vec{F} = m\vec{a}$.

Задача 30.3. Материальная точка массой m с начальной скоростью $\vec{v}_0$ движется прямолинейно. На точку действует сила сопротивления $\vec{F}$, направленная в сторону, противоположную направлению движения, и по модулю равная $k\sqrt[3]{v}$ (k – размерный постоянный коэффициент). Определить время t_1 от начала движения точки до остановки и путь s, пройденный точкой.

Р е ш е н и е. Примем за ось Ox прямую, вдоль которой происходит движение, а за начало координат – начальное положение точки. На точку действует только одна сила $\vec{F}$, следовательно, дифференциальное уравнение движения точки имеет вид $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\sqrt[3]{v}$. Поскольку точка движется по прямой, то $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt}$ и уравнение принимает вид $m\dfrac{dv}{dt} = -k\sqrt[3]{v}$. Его общее решение $\dfrac{3}{2}mv^{2/3} = -kt + C_1$. Поскольку $\vec{v} = \vec{v}_0$ при $t = 0$, то $C_1 = \dfrac{3}{2}mv_0^{2/3}$. Следовательно, $v^{2/3} = v_0^{2/3} - 2kt/(3m)$. Так как в момент t_1 остановки точки ее скорость $v(t_1) = 0$, то $t_1 = \dfrac{3m}{2k}v_0^{2/3}$. Для того чтобы найти x как функцию t, полученное частное решение исходного уравнения перепишем в виде $\dfrac{dx}{dt} = \left(v_0^{2/3} - \dfrac{2kt}{3m}\right)^{3/2}$. Проинтегрировав его, будем иметь $x = -\dfrac{3m}{5k}\left(v_0^{2/3} - \dfrac{2kt}{3m}\right)^{5/2} + C_2$. Поскольку при $t = 0$ имеем $x = 0$, то $C_2 = \dfrac{3m}{5k}v_0^{5/3}$. Таким образом, $x = \dfrac{3m}{5k}v_0^{5/3} - \dfrac{3m}{5k}\left(v_0^{2/3} - \dfrac{2kt}{3m}\right)^{5/3}$. Следовательно, в момент остановки $t = t_1$ пройденный путь $x\big|_{t=t_1} = \dfrac{3m}{5k}v_0^{5/3}$.

880. Вычислить путь, пройденный поездом, и время его движения до полной остановки, если замедляющая сила есть линейная функция скорости.

881. Найти скорость v движения материальной точки массой m при свободном горизонтальном полете под действием первоначального толчка и силы сопротивления среды $\vec{F}$, модуль которой в зависимости от скорости движения v определяется формулой $F = -k_1v^{\alpha} - k_2v$, где k_1, k_2, α – размерные постоянные.

882. Материальная частица массой m падает в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости частицы (km – коэффициент пропорциональности). Найти закон изменения скорости в зависимости от времени. Показать, что при $t \to +\infty$ скорость приближается к $\sqrt{g/k}$, где g – ускорение свободного падения.

883. Материальной точке, находящейся на поверхности Земли (радиус Земли R), сообщена начальная скорость $v_0 = \sqrt{2gR}$ (вторая космическая скорость). Определить закон движения точки (силой сопротивления воздуха пренебречь).

884. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/с, пробивает стену толщиной $h = 20$ см и вылетает из нее со скоростью $v_1 = 100$ м/с. Полагая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время T движения пули в стене.

885. Судно водоизмещением 12 000 т движется прямолинейно со скоростью $v_0 = 20$ м/с. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости судна и равно 36 000g Н при скорости 1 м/с. Какое расстояние пройдет судно после остановки двигателя, прежде чем скорость v станет равной 5 м/с?

Растворение веществ. Скорость растворения твердого вещества в жидкости при постоянной температуре пропорциональна наличной в данный момент массе нерастворенного вещества и разности между концентрацией насыщенного вещества и концентрацией в данный момент.

Задача 30.4. Нерастворимое вещество содержит в своих порах $x_0 = 10$ кг соли. Подвергая его действию воды объемом $V_0 = 90$ л, установили, что в течение 1 ч растворилась половина содержавшейся в нем соли. Сколько соли растворится в течение того же времени, если объем V воды удвоить? Концентрация насыщенного раствора равна 1/3.

Решение. Пусть $x = x(t)$ – масса нерастворенной соли в момент времени t. Процесс растворения веществ описывается уравнением $\dfrac{dx}{dt} = kx\left(c - \dfrac{m-x}{V}\right)$, где k – коэффициент пропорциональности; m – первоначальная масса соли.

В условиях рассматриваемой задачи имеем задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(\frac{1}{3} - \frac{10-x}{90}\right), \quad x\big|_{t=0} = 10,$$

решение которой $\dfrac{x}{x+20} = \dfrac{1}{3}e^{2kt/9}$. Для определения коэффициента k учитываем, что в течение $t = 1$ ч растворилось $x = x_0/2$ соли. В результате получим $k = \dfrac{9}{2}\ln\dfrac{3}{5}$. Если $V = 2V_0$, то задача Коши имеет вид $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{9}{2}\ln\dfrac{3}{5}x\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{10-x}{180}\right)$, $x\big|_{t=0} = 10$. Ее решение представимо в виде $\dfrac{x}{x+50} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{5t/4}$. Полагая $t = 1$ ч, получим, что осталось $x = 5,2$ кг соли.

886. Нерастворимое вещество, содержащее в своих порах 2 кг соли, подвергается действию 30 л воды. Через 5 мин растворяется 1 кг соли. Через сколько времени растворяется 99% первоначальной массы соли, если концентрация насыщенного раствора равна 1/3?

887. Из некоторого химически недеятельного вещества добывают серу, растворяя ее в бензоле. Найти, сколько серы можно растворить в течение 6 ч, если в данном веществе содержится 6 г серы и если взято 100 г бензола (масса, в которой при насыщении растворяется 11 г серы). Известно, что коэффициент пропорциональности $k = -0,42 \cdot 10^{-4}$ м^3/(с · кг).

888. Дно резервуара вместимостью 0,3 м^3 покрыто смесью соли и нерастворимого вещества. Допуская, что скорость растворения соли пропорциональна разности между концентрацией в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (равной 1/3) и что данная масса чистой воды растворяет 1/3 кг соли за 1 мин, найти, сколько соли будет содержать раствор по истечении 1 ч.

889. В резервуаре вместимостью 0,1 м^3 находится рассол, содержащий 10 кг растворенной соли. В резервуар вливается вода со скоростью $3 \cdot 10^{-3}$ м^3/мин, а из него вытекает с такой же скоростью смесь, причем концентрация поддерживается однородной (например, посредством перемешивания). Сколько соли останется в резервуаре по истечении 1 ч?

890. В резервуаре находится 0,1 м^3 рассола, содержащего 10 кг растворенной соли. В резервуар вливается вода со скоростью $3 \cdot 10^{-3}$ м^3/мин, а из него вытекает смесь со скоростью $2 \cdot 10^{-3}$ м^3/мин, причем концентрация поддерживается однородной посредством перемешивания. Сколько соли будет содержаться в резервуаре по истечении 1 ч?

891. Воздух в помещении вместимостью $V = 10\,800$ м^3 содержит 0,12% CO_2. В помещение равномерно поступает чистый воздух, содержащий 0,04% CO_2. Сколько кубических метров воздуха ежеминутно поступает в помещение, если по истечении 10 мин содержание CO_2 падает до 0,06%? Найти закон изменения объема CO_2 с течением времени. (Указание. Считать, что в единицу времени в помещение поступает q м^3 воздуха.)

892. Во фляжку вместимостью 1 л по одной трубке поступает кислород, а по другой вытекает смесь его с содержавшимся во фляжке воздухом. Допуская, что концентрация смеси поддерживается равномерной и воздух содержит 21% кислорода, построить математическую модель рассматриваемого процесса.

Математическая модель биологической популяции. Скорость роста популяции представляет собой разность между рождаемостью и смертностью ее представителей за единицу времени в момент времени t. При ограниченных пространстве и пищевых ресурсах рождаемость пропорциональна количеству особей, а смертность – квадрату этого количества. Математическая модель роста популяции в этом случае описывается дифференциальным уравнением $\frac{dx}{dt} = \beta x - \delta x^2$, где $x(t)$ – количество особей в популяции в момент времени t (размер популяции); β, δ – соответственно средняя рождаемость и средняя смертность в данной популяции. Приведенное уравнение называется *логистическим*, а функция $x(t)$ описывает *логистический рост* популяции. При логистическом росте популяция с течением времени приближается к предельному (*равновесному)* размеру, определяемому как $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$.

893. Определить равновесный размер популяции, если на 1000 особей в единицу времени 100 особей рождается, а гибнет одна. Предполагается при этом, что начальная численность популяции равна 10 особям. Построить график логистической кривой.

894. Для популяции $x(t)$, изменяющейся согласно уравнению логистического роста, доказать, что скорость роста максимальна тогда, когда популяция достигает численности, равной половине равновесного значения.

895. Популяция бактерий возрастает от начального размера в 100 единиц до равновесного размера в 100 000 единиц. Предполагается, что в течение первого часа она увеличилась до 120 единиц. Считая, что рост популяции подчиняется логистическому уравнению, определить ее размер в момент времени t.

896. Проинтегрировать модифицированное логистическое уравнение $\frac{dx}{dt} = x(\beta - \delta x)\left(1 - \frac{m}{x}\right)$ для $\beta = 100$, $\delta = 1$, $m = 10$. Построить графики $x(t)$ для $t > 0$ при $x(0) = 20$ и $x(0) = 5$.

897. Рост, выживание и деление клеток определяются потоком питательных веществ через оболочку клетки. Это означает, что на ранних стадиях клеточного роста увеличение массы клетки в момент времени t пропорционально квадрату радиуса клетки, а масса клетки пропорциональна его кубу. Построить дифференциальное уравнение, описывающее изменение массы клетки в зависимости от времени t, если начальная масса клетки равна a.

Моделирование электрических цепей. Если параметры резистивных, индуктивных и емкостных элементов, из которых состоит электрическая цепь, являются функциями тока, заряда или напряжения, то соответствующие элементы называются нелинейными, а зависимость между напряжением и током задается, аналитически или графически, с помощью так называемых вольтамперных, веберамперных и т.п. характеристик (ср. § 10, причем $U = \Psi' = LI'$, где Ψ – собственное потокосцепление индуктивного элемента). Это обстоятельство приходится учитывать при составлении дифференциальных моделей, описывающих процессы в таких электрических цепях.

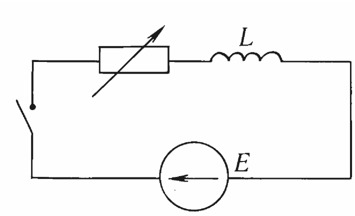


Рис. 23

Задача 30.5. Найти закон изменения тока в цепи, состоящей из постоянной ЭДС, равной E, линейного индуктивного элемента с индуктивностью L и нелинейного резистивного элемента, вольтамперная характеристика которого задана соотношением $U = aI^2$ (рис. 23). В момент $t = 0$ ключ К замыкает цепь. Вычислить, через сколько секунд величина тока в цепи достигнет 95% от значения установившегося тока, если $E = 220$ В, $L = 0{,}1$ Г, $a = 2{,}2$ В/А^2.

Р е ш е н и е. Дифференциальное уравнение, описывающее процесс в цепи, имеет вид $LI' + U = E$, где I – ток в цепи, а U – падение напряжения на резистивном элементе. Поскольку до замыкания цепи ток в цепи отсутствовал, то по закону коммутации $I|_{t=0} = 0$. Учитывая вольтамперную характеристику нелинейного резистивного элемента, получаем задачу Коши $LI' + aI^2 = E$, $I|_{t=0} = 0$. Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, интегрируя которое находим $I(t) = \sqrt{\dfrac{E}{a}}\,\mathrm{th}\dfrac{\sqrt{aE}}{L}t$. Из полученной формулы нетрудно видеть, что $I(t) \to \sqrt{\dfrac{E}{a}}$ при $t \to +\infty$, т.е. стремится к значению установившегося тока $I_{\text{у}}(t) = \sqrt{\dfrac{E}{a}}$. Подставляя числовые данные, получим $I_{\text{у}} = 10$ А. Для определения момента времени t_0, при котором $I(t_0) = 0{,}95I_{\text{у}}$, достаточно подставить числовые данные в соотношение $0{,}95\sqrt{\dfrac{E}{a}} = \sqrt{\dfrac{E}{a}}\,\mathrm{th}\dfrac{\sqrt{aE}}{L}t_0$. Отсюда $t_0 \approx 0{,}008$ с.

897.1. Составить дифференциальное уравнение, описывающее процесс, протекающий при замыкании накоротко катушки с замкнутым сердечником из листовой трансформаторной стали, если сопротивление обмотки равно R и нисходящая ветвь кривой намагничивания при убывании потокосцепления Ψ от значения Ψ_0 до остаточного значения Ψ_1 задана приближенно в виде $I = a(\Psi - \Psi_1) + b(\Psi - \Psi_1)^n$, где I – ток, протекающий через катушку. Найти закон изменения потокосцепления Ψ, если в момент $t = 0$ она замыкается накоротко. Вычислить значения потокосцепления через 0,1 с, 0,5 с и 1 с, если $R = 8{,}5$ Ом, $\Psi_0 = 1{,}1$ Вб, $\Psi_1 = 0{,}2$ Вб, $a = 0{,}21$ А/Вб, $b = 1{,}45$ А/Вб, $n = 7$.

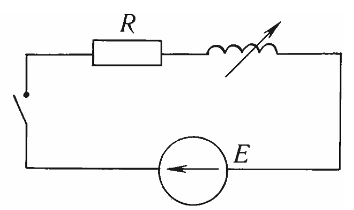


Рис. 24

897.2. Составить дифференциальное уравнение, описывающее процесс в цепи, изображенной на рис. 24, если веберамперная характеристика нелинейного индуктивного элемента задана соотношением $I = k\Psi^4$, сопротивление резистивного элемента равно R и в момент времени $t = 0$ в цепь включают постоянную ЭДС, равную E.

Экономическая модель Солоу. Уравнения

$$X = aX + Y,\ Y = I + C,$$

$$K' = -\mu K + I,\ X = F(K, L)$$

описывают однопродуктовую модель развития экономики (см. также § 10, 21). Здесь X – валовой продукт, Y – конечный продукт, I – инвестиции в развитие производства, C – непроизводственное потребление, K – основные производственные фонды, μ – норма выбытия основных фондов, $F(K, L)$ – производственная функция (одним из требований, предъявляемых к производственным функциям, является их однородность по своим аргументам), L – трудовые ресурсы. Предположим, что трудовые ресурсы $L(t)$ растут с постоянным темпом n, т.е. $L'(t) = nL(t)$, а доля потребления u – постоянна, т.е. $C(t) = uY(t)$. Перейдем в приведенных выше соотношениях к относительным переменным: $x = X/L$ – производительность труда (количество произведенной продукции в расчете на одного рабочего), $k = K/L$ – фондовооруженность труда, $c = C/L$ – потребление на одного рабочего. Используя свойство однородности производственной функции

$$F(K, L) = LF(K/L,1) = Lf(k),$$

получим дифференциальное уравнение, описывающее модель Солоу:

$$k' = -(\mu + n)k + (1 - u)(1 - a)f(k).$$

897.3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение, задающее модель Солоу, если функция $f(k)$ соответствует производственной функции Кобба – Дугласа $F(K, L) = \sigma K^{\alpha} L^{\beta}$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$.

897.4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение, задающее модель Солоу, если функция $f(k)$ соответствует производственной функции Солоу $F(K, L) = \gamma(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{-1/\rho}$.

Временная структура процентных ставок. Основными процедурами при оценивании процентных ставок непредсказуемых потоков платежей являются создание соответствующего семейства траекторий или сценариев, дисконтирование проектируемых потоков платежей вдоль траекторий и усреднение. Ключевой этап – моделирование будущих изменений временной структуры процентных ставок.

Временная структура процентных ставок – это соотношение между доходностями свободных от неуплат дисконтированных облигаций и их сроками погашения. Бескупонные ценные бумаги казначейства могут рассматриваться как пример свободной от неуплаты дисконтированной облигации.

Свободная от неуплаты дисконтированная облигация, погашаемая в момент t, $t \geq 0$, является ценной бумагой, которая выплачивает единицу стоимости в момент t и ничего в любое другое время. Обозначим цену такой облигации в момент s, $0 \leq s \leq t$, через $P(s, t)$. В момент погашения $P(t, t) = 1$.

Для $s \leq t$ *доходность* $y(s, t)$ (*доходность до погашения*) в момент времени s становится непрерывно конвертируемой ставкой дохода этой облигации по интервалу $[s, t]$:

$$y(s, t) = -\ln P(s, t)/(t - s).$$

Для $t \geq s$ доходность $y(s, t)$, как функция t, обычно называется *временной структурой процентных ставок* в момент времени s.

Цена облигации связана с *краткосрочной ставкой* $r(\tau)$ (*мгновенной спот-ставкой*) в момент τ, $0 \leq \tau \leq t$, дифференциальным уравнением

$$dP(\tau, t) = r(\tau)P(\tau, t)d\tau.$$

Одна из моделей изменений временной структуры процентных ставок в простейшей ситуации отсутствия неопределенности предполагает детерминированное развитие во времени мгновенной спот-ставки, причем ее текущее значение приближается к установившемуся значению таким образом, что $dr(t) = \alpha(\gamma - r(t))dt$, где α – положительный параметр, характеризующий скорость стремления r к установившемуся значению γ.

Задача 30.6. Определить временную структуру процентных ставок в s-м году в случае детерминированной модели, если мгновенная спот-ставка в s-м году $r(s) = 8\%$, $\gamma = 5\%$ в год, $\alpha = 0{,}3$ в год.

Р е ш е н и е. Проинтегрировав уравнение, которому удовлетворяет краткосрочная ставка r, получим закон изменения краткосрочной ставки во времени:

$$r(t) = \gamma - (\gamma - r(s))e^{-\alpha(t-s)}.$$

Поскольку цена свободной от неуплаты дисконтированной облигации, погашаемой в момент t, удовлетворяет линейному уравнению

$$dP(\tau, t) = r(\tau)P(\tau, t)d\tau,$$

то

$$P(\tau,t) = Ce^{\int_s^\tau r(u)\,du}.$$

Учитывая условие $P(t, t) = 1$, получаем $P(\tau,t) = e^{-\int_\tau^t r(u)\,du}$. Следовательно,

$$y(s,t) = \gamma + \frac{r(s)-\gamma}{\alpha(t-s)}\left(1 - e^{-\alpha(t-s)}\right).$$

Подставляя числовые данные, получим временную структуру процентных ставок в s-м году: $y(s, t) = 0{,}06 + 0{,}1(1 - e^{-\alpha(t-s)})/(t-s)$.

В данной модели цена облигации определяется посредством будущей эволюции одной детерминированной переменной состояния $r(t)$. Модель обобщается для ситуации, в которой рассматриваются две детерминированные переменные состояния (модель Ричарда): краткосрочная ставка равна сумме значений реальной процентной ставки $R(t)$ и предвидимой нормы инфляции $I(t)$, т.е. $r(t) = R(t) + I(t)$. Функции $R(t)$ и $I(t)$ изменяются во времени таким образом, что их текущие значения с ростом t приближаются к своим установившимся значениям γ_R, γ_I и определяются как решения дифференциальных уравнений $R'(t) = \alpha_R(\gamma_R - R(t))$, $I'(t) = \alpha_I(\gamma_I - I(t))$, где α_R и α_I – положительные параметры, характеризующие скорость стремления значений R и I к γ_R и γ_I соответственно.

К недетерминированным моделям временной структуры процентных ставок относятся модели Вашичека и Кокса – Ингерссола – Росса. В этих моделях цена облигации, в предположении, что временную структуру процентных ставок можно получить из поведения краткосрочной ставки $r = r(t)$, определяется по формуле

$$P(s, t) = P(s, r, t) = \exp(A(t-s) - r\,B(t-s)),$$

где функции A и B находятся как решения стационарных дифференциальных систем:

для модели Вашичека

$$\begin{cases} \dfrac{dB(\tau)}{d\tau} = 1 - kB(\tau), & B(0) = 0, \\ \dfrac{dA(\tau)}{d\tau} = \dfrac{1}{2}\sigma^2 B^2(\tau) - (k\theta + \lambda\sigma)B(\tau), & A(0) = 0, \end{cases}$$

для модели Кокса – Ингерссола – Росса

$$\begin{cases} \dfrac{dB(\tau)}{d\tau} = 1 - (k - \lambda\sigma)B(\tau) - \dfrac{1}{2}\sigma^2 B^2(\tau), & B(0) = 0, \\ \dfrac{dA(\tau)}{d\tau} = -k\theta B(\tau), & A(0) = 0 \end{cases}$$

(здесь k, σ, θ, λ – постоянные параметры моделей, $\tau = t - s$).

897.5. Найти общую формулу для определения доходности при погашении свободной от неуплаты дисконтируемой облигации для модели Ричарда.

897.6. Определить доходность при погашении свободной от неуплаты дисконтируемой облигации в случае детерминированной модели, если реальная процентная ставка в s-м году $R(s) = 2\%$, предвидимая норма инфляции $I(s) = 5\%$, $\gamma_R = 3\%$ в год, $\gamma_I = 4\%$ в год, $\alpha_R = 0{,}1$ в год, $\alpha_I = 0{,}2$ в год. Годы до погашения облигации 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, ∞.

897.7. Найти функции A и B, определяющие цену свободной от неуплаты дисконтируемой облигации для модели Вашичека.

897.8. Найти функции A и B, определяющие цену свободной от неуплаты дисконтируемой облигации для модели Кокса – Ингерссола – Росса.

Контрольная работа № 3

Вариант I

1. Указать тип и метод интегрирования дифференциальных уравнений:

а) $(2xy^2 + 3x^2 + 1/x^2 + 3x^2/y^2)dx + (2x^2y + 3y^2 + 1/y^2 - 2x^3/y^3)dy = 0$;

б) $xy(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$;

в) $2xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$;

г) $y'\operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x \operatorname{ctg} x$;

д) $x^2y^2y' + xy^3 = a^2$, $a \in \mathbb{R}$;

е) $y' = 4y^2 - 4x^2y + x^4 + x + 4$;

ж) $yx' - 2x + y^2 = 0$.

2. Проинтегрировать уравнение, установив вид интегрирующего множителя: $(x^3(1 + \ln x) + 2y)dx + x(3y^2x^2 - 1)dy = 0$; $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$.

3. Преобразовать уравнение $y(x + \ln y) + (x - \ln y)y' = 0$ с помощью подстановки $\ln y = \eta$. Указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

4. Решить задачу Коши $dy = (y-2)^{2/3}dx$, $y\big|_{x=1} = 2$.

Вариант II

1. Указать тип и метод интегрирования дифференциальных уравнений:

а) $xy(1 + y^2)dx - (1 + x^2)dy = 0$;

б) $\dfrac{x^2dy - y^2dx}{(x-y)^2} = 0$;

в) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$;

г) $(4 - x^2)y' + xy = 4$;

д) $y'\operatorname{tg} x + 2y\operatorname{tg}^2 x = ay^2$, $a \in \mathbb{R}$;

е) $xy' = x^2y^2 - y + 1$;

ж) $dx + (x + y^2)dy = 0$.

2. Проинтегрировать уравнение, установив вид интегрирующего множителя: $y^2(x - y)dx + (1 - xy^2)dy = 0$; $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$.

3. Преобразовать уравнение $y' = x + e^{x+2y}$ с помощью подстановки $\eta = e^{-2y}$. Указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

4. Решить задачу Коши $dy = x\sqrt{y}\,dx$, $y\big|_{x=1} = 0$.

X. УРАВНЕНИЯ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

31. Приведение уравнений в общей форме к уравнениям в нормальной дифференциальной форме

Обыкновенное дифференциальное *уравнение первого порядка* для определения функции $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *в общей форме* имеет вид $F(x, y, y') = 0$, где F – заданная функция на области $E \subset \mathbb{R}^3$. Это уравнение называют также *уравнением, не разрешенным относительно производной*.

Непрерывно дифференцируемая функция $y = y(x),\ x \in I,$ обращающая уравнение в общей форме в тождество на I, называется *решением* этого *уравнения*.

Если уравнение, разрешенное относительно производной $y' = f(x, y),\ (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$ в каждой точке области D задает единственное значение y', т.е. единственное направление касательной к интегральной кривой, проходящей через точку (x, y), то уравнение, не разрешенное относительно производной $F(x, y, y') = 0$, каждой точке $(x, y) \in D = \text{пр}_{Oxy}E$ ставит в соответствие, вообще говоря, не одно значение y', т.е. через точку (x, y) может проходить несколько интегральных кривых с различными касательными.

Задача Коши для уравнения в общей форме имеет вид

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0.$$

Теорема 31.1 (*существования и единственности решения задачи Коши*). *Если точка* $(x_0, y_0, y_0') \in E$ *такова, что* $F(x_0, y_0, y_0') = 0$ *и функция* F *непрерывно дифференцируема в окрестности этой точки, причем* $F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$, *то задача Коши имеет единственное решение* $y = y(x)$, *причем* $y'(x_0) = y_0'$.

Условие $y'(x_0) = y_0'$ задает направление касательной к интегральной кривой $y = y(x)$ в точке (x_0, y_0). Решение $y = y(x)$ уравнения в общей форме является частным решением, если в каждой точке сохраняется единственность решения задачи Коши.

Наряду с частными решениями могут быть особые решения, графики которых состоят из точек ветвления, т.е. *особые решения* – это огибающие однопараметрического семейства интегральных кривых. Особому решению может соответствовать дискриминантная кривая, определяемая системой $\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0, \end{cases}$ где $\Phi(x, y, C) = 0$ – общее решение уравнения.

Поскольку в точках особого решения нарушаются условия теоремы существования и единственности, то кривую, которая может соответствовать особому решению, найдем исключением y' из системы

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0. \end{cases}$$

Одним из методов интегрирования уравнения $F(x, y, y') = 0$ является разрешение его относительно производной y'. В результате получается одно или несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$, каждое из которых интегрируют отдельно.

Полное решение уравнения в общей форме будет, вообще говоря, объединением полных решений полученных уравнений, разрешенных относительно производной. Указанным методом решают, как правило, *уравнения*, *алгебраические относительно производной*, т.е. уравнения вида

$$(y')^n + a_{n-1}(x, y)(y')^{n-1} + \ldots + a_1(x, y)y' + a_0(x, y) = 0,$$

являющиеся уравнениями первого порядка n-й степени.

Задача 31.1. Проинтегрировать уравнение $(y')^2 = y$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение распадается на два: $y' = \sqrt{y}$ и $y' = -\sqrt{y}$. Общее решение первого уравнения есть $2\sqrt{y} = x + C_1$, второго $2\sqrt{y} = -x + C_2$. Тогда общее решение исходного уравнения представимо в виде $4y = (x - C)^2$ и определяет семейство парабол с вершинами на оси Ox. Для отыскания особого решения исключим y' из системы $\begin{cases}(y')^2 - y = 0,\\ 2y' = 0.\end{cases}$ Решением данной системы является прямая $y = 0$. Очевидно, что $y(x) \equiv 0$ является решением рассматриваемого уравнения. Так как через каждую точку $(C, 0)$ проходят три решения $\sqrt{y} = (x - C)/2$, $\sqrt{y} = (-x + C)/2$ и $y = 0$ с горизонтальной касательной, то решение $y = 0$ является особым решением исходного уравнения. На рис. 25 штриховой линией изображен график *склеенного* решения.

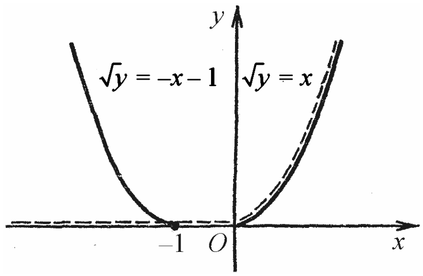


Рис. 25

Задача 31.2. Проинтегрировать уравнение $y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение приводится к уравнению $(y'^2 - 4y)(y' - x) = 0$, которое распадается на три: $y' = x$, $y' = 2\sqrt{y}$, $y' = -2\sqrt{y}$. Решая полученные уравнения при $y \neq 0$, имеем: $y = x^2/2 + \mathrm{C}$, $\sqrt{y} = x + C$, $-\sqrt{y} = x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Общее решение заданного уравнения можно записать в виде $\left(y - x^2/2 - C\right) \times \left(\sqrt{y} - x - C\right)\left(\sqrt{y} + x + C\right) = 0.$ Функция $y = 0$ также является решением исходного уравнения. Это особое решение дифференциального уравнения, так как интегральные кривые представляют три однопараметрических семейства кривых, причем, как видно из рис. 26, прямая $y = 0$ является огибающей двух из этих семейств.

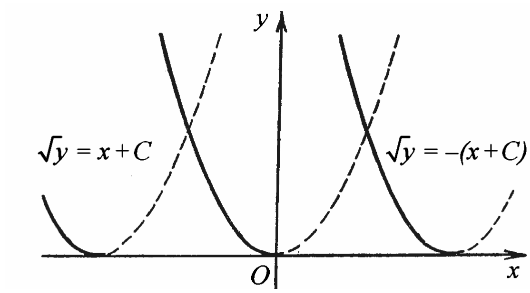


Рис. 26

Уравнение в общей форме можно свести к уравнению, разрешенному относительно производной, продифференцировав по x исходное уравнение. Полученное уравнение $F'_x + F'_y\, y' + F'_{y'}\, y'' = 0$ разрешается относительно y''. Неудобство этого метода состоит в том, что он повышает порядок уравнения, а следовательно, расширяет множество решений.

Задача 31.3. Проинтегрировать уравнение $(y')^2 + y^2 = 1$.

Р е ш е н и е. Продифференцировав исходное уравнение по x, получим $y'(y'' + y) = 0$. Это уравнение распадается на два: $y' = 0$ и $y'' + y = 0$. Общее решение первого уравнения $y = C$, второго $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Полученное множество решений будет шире множества решений исходного уравнения. Выделим из множества те функции, которые удовлетворяют исходному уравнению. Подстановка $y = C$ в исходное уравнение дает $C^2 = 1$. Следовательно, решениями исходного уравнения будут прямые $y = 1$ и $y = -1$. Подстановка $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ дает $C_1^2 + C_2^2 = 1$, т.е. $C_1 = \sin C$, $C_2 = \cos C$. Следовательно, решениями исходного уравнения являются функции $y = \sin(x + C)$. Таким образом, полное решение исходного уравнения имеет вид $\left[\begin{array}{l} y = \sin(x + C), \quad C \in \mathbb{R},\\ y = 1,\\ y = -1.\end{array}\right.$

Решения $y = 1$ и $y = -1$ – особые решения, так как являются огибающими семейства $y = \sin(x + C)$.

Разрешив уравнения относительно y', построить полные решения:

898. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$.

899. $y'^3 + (x + 2)e^y = 0$.

900. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$.

901. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$.

902. $y'^4 - 2y^2 y'^2 = -y^4$.

903. $y'^3 - yy'^2 - x^2 y' + x^2 y = 0$.

904. $x^2 y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.

905. $y'^3 - \dfrac{1}{4x} y' = 0$.

906. $y'^2 - 4y = 0.$

907. $y'^2 - xy / a^2 = 0.$

908. $y'^2 - x^2 y^2 = 0.$

909. $y'^3 - (x^2 + xy + y^2)(y'^2 - xyy') - x^3 y^3 = 0.$

Найти интегральные кривые, проходящие через заданную точку $M(x_0, y_0)$:

910. $y^2 y'^2 = a^2,\ \ M(0,0).$

911. $y'^2 + 3\dfrac{y}{x}y' + \dfrac{2y^2}{x^2} = 0,\ \ M(1,1);\ M(1,0).$

912. $yy'^2 + 2xy' - y = 0,\ \ M(1,0).$

913. $(1 - x^2)(y'^3 + 4xy'^2) = y' + 4x,\ \ M(1,0).$

914. $y^2 y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0,\ \ M(1,1);\ M(0,0);\ M(1,0).$

32. Метод введения параметра

Одним из методов интегрирования уравнений $F(x, y, y') = 0$, не разрешенных относительно производной, является *метод введения параметра*. Предположим, что известны функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $p = p(u, v)$, для которых $F(x(u, v), y(u, v), p(u, v)) \equiv 0$, u и v – новые переменные. Используя *основное соотношение* $dy = y'dx$, которое в данном случае имеет вид $dy(u, v) = p(u, v)dx(u, v)$, где $p(u,v) = y'_x$, уравнение $F(x, y, y') = 0$ сводим к уравнению, разрешенному относительно производной:

$$\frac{dv}{du} = \left(p\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \right) \Big/ \left(\frac{\partial y}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ имеет вид $y = \varphi(x, y')$, т.е. разрешено относительно y, то, полагая $y' = p$, получаем $y = \varphi(x, p)$. Вычисляя отсюда dy и используя основное соотношение, имеем $\varphi'_x dx + \varphi'_p dp = pdx$. Отсюда $\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{\varphi'_p}{p - \varphi'_x}$, если $p - \varphi'_x \ne 0$. Полученное уравнение есть уравнение, разрешенное относительно x'. Решением его является функция $x = x(p, C)$. Решение исходного уравнения получаем в параметрической форме: $x = x(p, C)$, $y = \varphi(x(p, C), p)$. Случай $p - \varphi'_x = 0$ исследуется отдельно, так как могут быть потеряны решения.

Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешено относительно x, т.е. имеет вид $x = \psi(y, y')$, то, полагая $y' = p$ и используя основное соотношение $dy = pdx$, получаем $dy = p(\psi'_y dy + \psi'_p dp)$.

Задача 32.1. Проинтегрировать уравнение $y = x(e^{y'} + y')$.

Р е ш е н и е. Полагая $y' = p$, получаем $y = x(e^p + p)$, откуда $dy = (e^p + p)dx + x(e^p + 1)dp$. Основное соотношение в этом случае приводит к уравнению с разделяющимися переменными $e^p dx + x(e^p + 1)\,dp = 0$, общим решением которого будет $x = C\exp(-p + e^{-p})$. Общее решение исходного уравнения в параметрической форме представимо в виде $x = C\exp(-p + e^{-p})$, $y = C(e^p + p)\exp(-p + e^{-p})$.

Задача 32.2. Проинтегрировать уравнение $y'^2 + 4xy' - 2y + 2x^2 = 0.$

Р е ш е н и е. Данное уравнение линейно относительно y. Разрешив его относительно y, получим $y = x^2 + 2xy' + y'^2/2$. Полагая $y' = p$, имеем $y = x^2 + 2xp + p^2/2$, откуда $dy = (2x + 2p)dx + (2x + p)dp$. Используя основное соотношение, приходим к уравнению $pdx = (2x + 2p)dx + (2x + p)dp$, т.е. к уравнению $(dx + dp)(2x + p) = 0$. Общее решение уравнения $dx + dp = 0$ имеет вид $x + p = C$, т.е. $p = C - x$. Подставляя полученное значение p в выражение для y, получаем общее решение исходного уравнения $x^2 + 2y = C(C + 2x)$. Случай $2x + p = 0$ приводит к решению

$y = -x^2$, которое является особым. Таким образом, полное решение исходного уравнения записывается в виде $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2y = C(C + 2x), \\ y + x^2 = 0. \end{array}\right.$

Частными случаями уравнения $F(x, y, y') = 0$ являются *неполные уравнения* $F(x, y') = 0$, $F(y, y') = 0$ и $F(y') = 0$.

Уравнение $F(x, y') = 0$ интегрируется путем введения параметра $x = \varphi(t)$, $y' = p(t)$ так, чтобы $F(\varphi(t), p(t)) \equiv 0$. Тогда общее решение уравнения в параметрическом виде

$$x = \varphi(t), \quad y = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\varphi'(\tau)d\tau + C.$$

Если существует $x_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $\lim\limits_{\substack{y' \to +\infty \\ (y' \to -\infty)}} F(x_0, y') = 0,$ то $x = x_0$ является решением уравнения $F(x, y') = 0$. Это решение может быть и особым.

В случае $F(y, y') = 0$ подбираем $y = \varphi(t)$, $y' = p(t)$ так, чтобы $F(\varphi(t), p(t)) \equiv 0$. Тогда общее решение рассматриваемого уравнения в параметрическом виде $x = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(\tau)}{p(\tau)} d\tau + C$, $y = \varphi(t)$. Уравнение $F(y, y') = 0$ может иметь решения вида $y = y_0$, если $F(y_0, 0) = 0$.

Неполное уравнение $F(y') = 0$ имеет общее решение вида $F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0$, если уравнение $F(p) = 0$ имеет изолированные корни.

Задача 32.3. Проинтегрировать уравнение $x = y' \ln y'$.

Р е ш е н и е. Введем параметр, положив $y' = p$. Тогда $x = p \ln p$, откуда $dx = (\ln p + 1)dp$. Учитывая, что $dy = pdx$, имеем $dy = p(\ln p + 1)dp$. Тогда $y = \int_1^p \tau(\ln\tau + 1)d\tau + C_1 = \frac{p^2}{2}\ln p + \frac{p^2}{4} + C.$ Общее решение исходного уравнения в параметрической форме $\begin{cases} x = p\ln p, \\ y = \frac{p^2}{2}\ln p + \frac{p^2}{4} + C. \end{cases}$

Задача 32.4. Проинтегрировать уравнение $y\Big/\sqrt{1 + y'^2} = 2.$

Р е ш е н и е. Введем параметр, положив $y' = \operatorname{sh} t$, тогда $y = 2\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}$ или $y = 2 \operatorname{ch} t$. Учитывая, что $dy = \operatorname{sh} t\, dx$, имеем $2 \operatorname{sh} t dt = \operatorname{sh} t dx$. Отсюда $2dt = dx$ при условии $\operatorname{sh} t \neq 0$, т.е. $2t = x + C$. Общим решением уравнения в явной форме будет $y = 2\operatorname{ch}\frac{x + C}{2}$.

Проверим условие $\operatorname{sh} t = 0$ или $y' = 0$. Решением полученного уравнения служит функция $y = 2$. Так как кривые семейства $y = 2\operatorname{ch}\frac{x + C}{2}$ не имеют особых точек, то система $\begin{cases} y = 2\operatorname{ch}\frac{x + C}{2}, \\ \operatorname{sh}\frac{x + C}{2} = 0 \end{cases}$ определит огибающую семейства. Этой огибающей служит прямая $y = 2$. Следовательно, решение $y = 2$ – особое решение уравнения. Полное решение исходного уравнения запишется следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} y = 2\,\mathrm{ch}\dfrac{x+C}{2}, \\ y = 2. \end{array}\right.$$

Задача 32.5. Проинтегрировать уравнение $y' + \sin y' = \mathrm{tg}\, 2y'$.

Р е ш е н и е. Решением уравнения $y' + \sin y' - \mathrm{tg}\, 2y' = 0$ служит $y' = \alpha$, где α – изолированный корень. Тогда $y = \alpha x + C$, т.е. $\alpha = (y - C)/x$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид $\dfrac{y-C}{x} + \sin\dfrac{y-C}{x} = \mathrm{tg}\, 2\dfrac{y-C}{x}$.

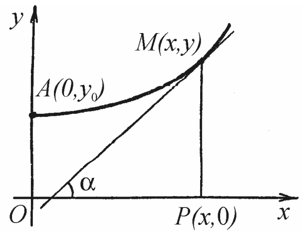


Рис. 27

Задача 32.6. Световой луч выходит из точки $A(0, y_0)$. Используя *закон преломления света* $\dfrac{\cos\alpha_1}{v_1} = \dfrac{\cos\alpha_2}{v_2} = \mathrm{const}$ (здесь α_1, α_2 – углы наклона к оси Ox касательных в любых двух точках траектории луча; v_1, v_2 – скорости луча в этих точках), найти уравнение формы луча в оптической среде, в которой скорость луча обратно пропорциональна ординате.

Р е ш е н и е. Возьмем на луче произвольную точку $M(x, y)$ (рис. 27). Полагая $\alpha_1 = \alpha$, $v_1 = v$, где α – угол наклона касательной, а v – скорость луча в этой точке, на основании закона преломления света будем иметь, что $\cos\alpha = Cv$ (C – некоторая постоянная, не зависящая от выбора точки M). По условию задачи $v = k/y$, где k – коэффициент пропорциональности. Следовательно, $y\cos\alpha = kC$ или $y\cos\alpha = a$, где $a = kC$. Зная, что $1/\cos\alpha = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \sqrt{1+y'^2}$, получаем дифференциальное уравнение $y = a\sqrt{1+y'^2}$.

Положим $p = y' = \mathrm{sh}\, t$. Тогда $y = a\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t} = a\,\mathrm{ch}\, t$, а $dx = dy/p$. Поскольку $dy = a\,\mathrm{sh}\, t\, dt$ и $p = \mathrm{sh}\, t$, то $dx = a\, dt$ и $x = at - C$. Общее решение в параметрической форме имеет вид $x = at - C$, $y = a\,\mathrm{ch}\, t$. Исключая параметр t, получаем общее решение в явном виде: $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x+C}{a}$. Из начального условия $y(0) = y_0$ находим, что $C = a \cdot \mathrm{arch}(y_0 / a)$. Следовательно, уравнение формы луча в оптической среде имеет вид $y = a\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{a} + \mathrm{arch}\dfrac{y_0}{a}\right)$.

Путем введения параметра построить полное решение следующих уравнений:

915. $xy'^3 = 1 + y'$.

916. $y = y'^2/2 + \ln y'$.

917. $x = 1/(1+y'^2)$.

918. $x = y' + \ln y'$.

919. $x = y' \sin y' + \cos y'$.

920. $y = x + y' - \ln y'$.

921. $\arcsin\dfrac{x}{y'} = y'$.

922. $x = \ln y' + \sin y'$.

923. $y' = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{y'^2}$.

924. $y' \ln y' - y = 0$.

925. $y\sqrt{1+y'^2} = y'$.

926. $y' = e^{y'/y}$.

927. $y' = e^{xy'/y}$.

928. $y = 2xy' + y^2 y'^3$.

929. $x^2 y'^2 = xyy' + 1$.

930. $5y + y'^2 = x(x + y')$.

931. $2xy' - y = y' \ln yy'$.

932. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$.

933. $y'^3 - 7y' - 6 = 0$.

934. $y'^3 - (a+b+1)y'^2 + (ab+a+b)y' - ab = 0$.

935. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

936. $y = y'^2 - y'x + x^2/2$.

936.1. Найти расположенные в верхней полуплоскости кривые, у которых длина отрезка нормали между осью абсцисс и точкой M, через которую проходит нормаль, равна квадрату ординаты точки M.

936.2. Найти кривые с постоянной: а) поднормалью; б) подкасательной; в) длиной отрезка нормали между осью абсцисс и точкой, через которую проходит нормаль; г) длиной отрезка касательной между осью абсцисс и точкой касания.

33. Уравнения Лагранжа и Клеро

Уравнение вида $y = x\psi(y') + \varphi(y')$ называется *уравнением Лагранжа*. Введение параметра $y' = p$ и использование основного соотношения $dy = y'dx$ приводит его к линейному относительно x уравнению

$$\frac{dx}{dp} = x\frac{\psi'}{p-\psi} + \frac{\varphi'}{p-\psi}.$$

Для $p = \alpha$ таких, что $p - \psi(p) = 0$, получаем дополнительные решения вида $y = \alpha x + C$.

Уравнение вида $y = xy' + \varphi(y')$ называется *уравнением Клеро*. Оно является частным случаем уравнения Лагранжа. Вводя параметр $y' = p$, получаем $y = xp + \varphi(p)$. Используя основное соотношение $dy = y'dx$, приходим к уравнению $(x + \varphi'(p))dp = 0$, откуда $dp = 0$ или $x + \varphi'(p) = 0$. Таким образом, $y = xC + \varphi'(C)$ – общее решение, а система $x + \varphi'(p) = 0$, $y = xp + \varphi(p)$, вообще говоря, приводит к особому решению уравнения Клеро. Отметим, что общее решение уравнения Клеро представляет семейство прямых, особое решение – огибающую семейства.

Задача 33.1. Проинтегрировать уравнение $y = 2xy' + y'^2$.

Р е ш е н и е. Это уравнение является уравнением Лагранжа. Полагая $y' = p$, получаем $y = 2xp + p^2$. Используя основное соотношение $dy = pdx$, имеем $pdx = 2pdx + 2(x + p)dp$, т.е. $\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - 2$. Решение полученного уравнения имеет вид $x = C/p^2 - 2p/3$. Общее решение уравнения Лагранжа в параметрическом виде запишется следующим образом:

$$\begin{cases} x = C/p^2 - 2p/3p, \\ y = 2C/p - p^2/3. \end{cases}$$

Поскольку $p = 0$ – решение уравнения $pdx = -2(x + p)dp$, то $y = C$ может быть потерянным решением исходного уравнения. Подставим $y = C$ в данное уравнение Лагранжа. Отсюда следует, что $C = 0$, т.е. $y = 0$ – решение, не являющееся частным. Полное решение уравнения Лагранжа имеет вид

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = C/p^2 - 2p/3, \\ y = 2C/p - p^2/3, \end{cases} \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Задача 33.2. Проинтегрировать уравнение $y = xy' + y'(1 + y')$.

Р е ш е н и е. Это уравнение является уравнением Клеро. Его общее решение имеет вид $y = Cx + C(1 + C)$. Для построения особого решения составляем систему

$$\begin{cases} y = Cx + C(1+C), \\ x + 1 + 2C = 0. \end{cases}$$

Исключая параметр C, получаем $y=-\frac{(x+1)x}{2}-\frac{x+1}{2}\left(1-\frac{x+1}{2}\right)$, т.е. $4y+(x+1)^2=0$. Полное решение исходного уравнения имеет вид

$$\left[\begin{array}{l} y=Cx+C(1+C), \\ 4y+(x+1)^2=0. \end{array}\right.$$

Задача 33.3. Найти кривую, у которой полуразность длин подкасательной и поднормали в любой ее точке равна абсциссе точки касания.

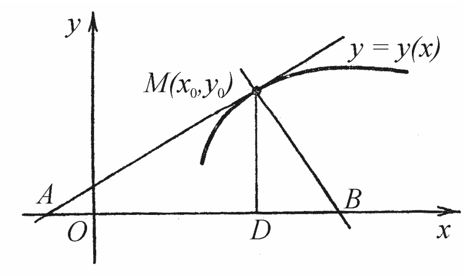


Рис. 28

Р е ш е н и е. Уравнения касательной и нормали к кривой $y = y(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ (рис. 28) имеют вид:

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0), \quad y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0).$$

Подкасательная и поднормаль представляют собой отрезки AD и DB соответственно. Согласно условию задачи, составляем дифференциальное уравнение $y_0/y_0'-y_0y_0'=2x_0$, где $y'(x_0)=y_0'$. Учитывая, что это условие должно выполняться в любой точке кривой, перепишем полученное уравнение в виде $y=\frac{2y'}{1-y'^2}x$. Это уравнение является уравнением Лагранжа. Для удобства интегрирования перепишем его в виде, разрешенном относительно x, т.е. $x = yx'/2 - y/(2x')$. Положим $x' = p$, тогда $x=\frac{1}{2}py-\frac{1}{2}\frac{y}{p}$ или $x=\frac{y}{2}(p-\frac{1}{p})$, откуда $dx=\frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)dy+\frac{y}{2}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)dp$. Воспользовавшись основным соотношением $dx=p\,dy$, получим $-0{,}5\left(p+1/p\right)dy+0{,}5y\left(1+1/p^2\right)dp=0$. После преобразования имеем $\frac{dy}{y}-\frac{dp}{p}=0$, откуда $y = Cp$. Общее решение в параметрической форме $x=\frac{Cp}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)$, $y=Cp$, или в явной форме $x = y^2/(2C) - C/2$. Окончательно имеем $2Cx=y^2-C^2$.

При построении кривых, заданных свойствами их касательных, часто искомые кривые оказываются особым решением уравнения Клеро.

Задача 33.4. Найти кривую, касательные к которой образуют вместе с прямоугольными осями координат треугольник постоянной площади, равной двум.

Р е ш е н и е. Уравнение касательной к кривой $y = y(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Так как касательная отсекает на осях координат отрезки $y_0 - y'(x_0)x_0$ и $x_0 - y_0/y'(x_0)$, то, согласно условию задачи, получаем дифференциальное уравнение $(y - y'x)^2 = -4y'$, откуда $y=xy'\pm2\sqrt{-y'}$. Полученное уравнение является уравнением Клеро. Его общее решение $y=Cx\pm2\sqrt{-C}$. Огибающая полученного однопараметрического семейства прямых – кривая $xy = 1$. Следовательно, искомой кривой является гипербола $xy = 1$.

Проинтегрировать уравнения Лагранжа и Клеро:

937. $y+xy'=4\sqrt{y'}$.

938. $y=xy'^2-2y'^3$.

939. $y=xy'+a\sqrt{1+y'^2}$.

940. $x=y/y'+1/y'^2$.

941. $x+y/y'=4/\sqrt{y'}$.

942. $xy'^2-yy'-y'+1=0$.

943. $y=2xy'+\sin y'$.

944. $y=2xy'+\ln y'$.

945. $y = x(1+y') + y'^2$.

946. $y = xy' + y'^2$.

947. $y = xy' + a / y'^2$.

948. $xy'\ (y'+2) = y$.

949. $2y'^2(y - xy') = 1$.

950. $y'^3 = 3(xy' - y)$.

951. $y = xy'^2 + y'^2$.

952. $y = xy' + y' - y'^2$.

953. Найти кривую, у которой сумма квадратов чисел, обратных длинам отрезков, отсекаемых касательной к кривой в любой ее точке на осях координат, была бы постоянна.

954. Найти кривую, у которой отрезок касательной в любой ее точке, заключенной между координатными осями, имеет постоянную длину a.

955. Найти кривую, у которой отрезок касательной, отсекаемый координатными осями, делится пополам параболой $y^2 = 2x$.

956. Найти кривую, у которой произведение длин отрезков, отсекаемых касательной на осях координат, имеет постоянную величину $4a^2$.

957. Найти кривую, у которой отрезок нормали, отсекаемый осями координат, имеет постоянную длину a.

958. Найти кривую, если расстояние от данной точки до любой касательной к этой кривой постоянно и равно a.

959. Найти кривую, если произведение длин перпендикуляров, проведенных из двух данных точек на касательную в любой точке кривой, имеет постоянную величину a^2. (У к а з а н и е. Считать данные точки лежащими на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат $A(c, 0)$ и $B(-c, 0)$.)

960. Найти кривую, если произведение длин перпендикуляров, проведенных из двух данных точек на касательную в любой точке кривой, имеет постоянную величину, равную $-a^2$. (См. указание к задаче 959.)

961. Найти кривую, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, составляющие в сумме $2a$.

962. Найти кривую, касательные к которой образуют с осями координат треугольник площадью $2a^2$.

34. Ортогональные и изогональные траектории

Задача о траекториях на плоскости в случае декартовых координат. *Ортогональной траекторией* однопараметрического семейства плоских кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ называется кривая L, пересекающая все линии семейства под прямым углом. Для определения уравнения траектории L составляется система

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C)y' = 0, \end{cases}$$

из которой исключается параметр C. Полученное уравнение $F(x, y, y') = 0$ есть дифференциальное уравнение заданного семейства. Используя условие ортогональности, дифференциальное уравнение траектории L можно записать в виде $F(x, y, -1/y') = 0$.

Задача 34.1. Найти ортогональные траектории семейства кривых $y = C_1x^2$.

Р е ш е н и е. Составим дифференциальное уравнение данного семейства: $\begin{cases} y = C_1x^2, \\ y' = 2C_1x, \end{cases}$ т.е. $C_1 = y'/(2x)$, следовательно, $y = xy'/2$. Дифференциальное уравнение ортогональной траектории имеет вид $y = -\dfrac{1}{2}x\dfrac{1}{y'}$ или $2yy' + x = 0$.

Решив полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $2ydy + xdx = 0$, получим $y^2 + x^2/2 =$ $= C$. Итак, ортогональными траекториями семейства парабол $y = C_1x^2$ служит семейство эллипсов $x^2/2 + y^2 = C$.

Задача 34.2. Показать, что *силовые* (*векторные*) *линии поля*, создаваемого силой $\vec{F}(F_x(x,y),F_y(x,y))$, имеющей потенциал $u(x, y)$, ортогональны линиям уровня поля $u(x, y)$.

Р е ш е н и е. Дифференциальное уравнение силовых линий имеет вид $\dfrac{dx}{F_x} = \dfrac{dy}{F_y}$, где $\vec{F} = \operatorname{grad} u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_1 + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_2$, т.е. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u'_y}{u'_x}$. Следовательно, угловой коэффициент касательной к силовой линии в произвольной ее точке $k_1 = u'_y/u'_x$. Линии уровня поля $u(x, y)$ имеют вид $u(x, y) = C$. Их дифференциальное уравнение $u'_x dx + u'_y dy = 0$, т.е. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{u'_x}{u'_y}$. В точке (x, y) угловой коэффициент касательной к линии уровня равен $k_2 = -\dfrac{u'_x}{u'_y}$. Так как $k_1k_2 = -1$ в произвольной точке поля $u(x, y)$, то этим доказана ортогональность.

Изогональной траекторией однопараметрического семейства плоских кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ называется кривая L, пересекающая все линии семейства под постоянным углом α. Если $F(x, y, y') = 0$ – дифференциальное уравнение заданного семейства, то, используя условие изогональности

$$y' = (y'_L - \operatorname{tg}\alpha) / (1 + y'_L \operatorname{tg}\alpha),$$

где y'_L – угловой коэффициент касательной к кривой L, получаем дифференциальное уравнение изогональной траектории в виде

$$F\left(x,\ y,\ \frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + y' \operatorname{tg}\alpha}\right) = 0.$$

Задача 34.3. Найти траектории, пересекающие под постоянным углом α семейство прямых, проходящих через начало координат.

Р е ш е н и е. Семейство прямых $y = C_1x$. Его дифференциальное уравнение $y = y'x$. Тогда дифференциальное уравнение изогональной траектории имеет вид $y = x\dfrac{y' - k}{1 + ky'}$, т.е. $(y + kx)dx + (ky - x)dy = 0$, где $k = \operatorname{tg}\alpha$. Полученное уравнение является однородным, и его общее решение имеет вид $\sqrt{x^2 + y^2} = C\exp\left(\dfrac{1}{k}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$.

Найти ортогональные траектории семейства кривых:

963. $xy = C^2$.

964. $y^2 = 2Cx$.

965. $Cy^2 = x^3$.

966. $x^2 + y^2 + 2Cy = 0$.

967. $x^3 - 3xy^2 + C = 0$.

968. $y^2 + 2Cx = C^2$.

969. $(x - C)^2 + y^2 = R^2,\ R \in \mathbb{R}$.

970. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = C^2$.

Найти изогональные траектории семейства кривых:

971. $x^2 = 2C(y - x\sqrt{3}),\ \alpha = 60°$.

972. $y^2 = 4Cx,\ \alpha = 45°$.

Найти силовые линии поля, создаваемого силой, имеющей потенциал $u(x, y)$:

973. $u = x^2 + y^2$.

974. $u = y^2 + x^2/2$.

975. $u = q/r,\ \ r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

976. $u = xy$.

Задача о траекториях на плоскости в случае полярных координат. В некоторых случаях при отыскании изогональной траектории решение задачи упрощается, если однопараметрическое семейство кривых задано в полярной системе координат $\Phi(\varphi, r, C) = 0$. Если $F\left(\varphi, r, \frac{dr}{d\varphi}\right) = 0$ – дифференциальное уравнение заданного семейства, то при замене $dr/d\varphi$ выражением

$$\left(1+\frac{r}{r'}\,\mathrm{tg}\alpha\right)\Big/\left(\frac{r}{r'}-\mathrm{tg}\alpha\right)$$

в случае $\alpha \neq \pi/2$ получаем дифференциальное уравнение изогональной траектории

$$F\left(\varphi, r, \frac{1+(r/r')\,\mathrm{tg}\alpha}{r/r'-\mathrm{tg}\alpha}\right) = 0.$$

Если же $\alpha = \pi/2$, то дифференциальное уравнение ортогональной траектории получим при замене $dr/d\varphi$ на $-r^2/r'$, т.е. дифференциальное уравнение ортогональной траектории в полярной системе координат имеет вид $F(\varphi, r, -r^2/r') = 0$.

Задача 34.4. Найти ортогональные траектории семейства кривых $r = 2C_1 \sin\varphi$.

Р е ш е н и е. Для получения дифференциального уравнения искомой траектории исключаем параметр C_1 из системы $\begin{cases} r = 2C_1\sin\varphi, \\ r' = 2C_1\cos\varphi. \end{cases}$ При этом $r' = r\,\mathrm{ctg}\,\varphi$. Заменяя в полученном уравнении r' на $-r^2/r'$, приходим к дифференциальному уравнению $r'/r = -\mathrm{tg}\,\varphi$ ортогональной траектории. Общим решением этого уравнения является семейство кривых $r = 2C\cos\varphi$.

Задача 34.5. Записать дифференциальное уравнение изогональных траекторий ($\varphi = \pi/4$) к семейству кривых $r = 2C_1\sin\varphi$.

Р е ш е н и е. Дифференциальное уравнение заданного семейства $r' = r\,\mathrm{ctg}\,\varphi$. Заменяя r' на $(1 + r/r')/(-1 + r/r')$, получаем дифференциальное уравнение семейства изогональных траекторий $r'(1 + r\,\mathrm{ctg}\,\varphi) = r^2\,\mathrm{ctg}\,\varphi - r$.

Найти ортогональные траектории семейства кривых (в задачах 978–981 перейти к полярным координатам):

977. $r^2 = C\sin 2\varphi$.

978. $x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2/a^2$.

979. $(x^2 + y^2)^2 + C(x^2 - y^2)^2 = 0$.

980. $(x^2 + y^2)^3 + C(x^3 - 3xy^2) = 0$.

981. $(x^2 + y^2)^2 = C^2xy$.

982. Найти ортогональные траектории семейства окружностей радиусом R, проходящих через начало координат.

982.1. Найти ортогональные траектории семейства окружностей, проходящих через две фиксированные точки A и B.

983. Найти траектории, пересекающие кривые $r = C\cos\varphi$ под углом α. (У к а з а н и е. Перейти к декартовой системе координат.)

984. Найти траектории, пересекающие под углом α семейство кардиоид $r = C(1 + \cos\varphi)$.

35. Уравнения n-го порядка, допускающие понижение порядка

Уравнение n-го порядка в общей форме имеет вид

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

где функция $F(x, y_0, y_1, ..., y_n)$ определена на области $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$. *Решением* этого *уравнения* называется функция $y = y(x)$, дифференцируемая n раз на промежутке $I \subset \mathbb{R}$ и обращающая это уравнение в тождество на I.

Уравнения, не содержащие искомой функции и ее производных до k-го порядка. Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}) = 0$ допускает понижение порядка. Произведем замену искомой функции, положив $y^{(k)} = z(x)$. Учитывая, что $y^{(k+1)} = z', ..., y^{(n)} = z^{(n-k)}$, приводим данное уравнение к дифференциальному уравнению $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0$ порядка $n - k$. Если $z = \varphi(x, C_1, ..., C_{n-k})$ – общее решение полученного уравнения, то общее решение исходного уравнения получается при интегрировании простейшего уравнения k-го порядка

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, ..., C_{n-k}).$$

Задача 35.1. Проинтегрировать уравнение $xy''' = y'' - xy''$.

Решение. Положив $y'' = z(x)$, получим $xz' = z - xz$. Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{z} = \frac{1-x}{x}dx, \quad z \neq 0, x \neq 0,$$

приходим к общему решению $z = C_1xe^{-x}$. Учитывая, что $y'' = z$, получаем $y'' = C_1xe^{-x}$. Следовательно, $y = C_1(x + 2)e^{-x} + C_2x + C_3$ – общее решение исходного уравнения. Случай $z = 0$, т.е. $y'' = 0$, не приводит к новым решениям.

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной. Уравнение вида $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ допускает понижение порядка на единицу с помощью замены искомой функции $y' = z(y)$. Действительно, имеем

$$y'' = z'_y y'_x = zz'_y, \quad y''' = z'^2_y y'_x + zz''_{y^2} y'_x = z^2 z''_{y^2} + zz'^2_y,$$

и с помощью метода математической индукции можно показать, что и $y^{(n)} = \Phi(z, z', ..., z^{(n-1)})$, $k = \overline{2, n}$. Следовательно, указанная замена приводит исходное уравнение к уравнению $(n-1)$-го порядка относительно функции $z(y)$, т.е. к уравнению $F_1(y, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0$. Если $z = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1})$ – общее решение полученного уравнения, то общее решение исходного уравнения получится при интегрировании уравнения первого порядка $y' = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1})$.

Задача 35.2. Проинтегрировать уравнение $yy'' = y'^3$.

Решение. Положим $y' = z(y)$, тогда $y'' = z'_y z$. Относительно z получаем уравнение $yzz' = z^3$. Отсюда $z = \dfrac{1}{C_1 - \ln|y|}$ при $z \neq 0, y \neq 0$, т.е. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{C_1 - \ln y}$ при $y > 0$ и $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{C_1 - \ln(-y)}$ при $y < 0$. Итак, полное решение исходного уравнения $\left[\begin{array}{l} y\ln y + x + C_1y + C_2 = 0, \\ y\ln(-y) + x + C_1y + C_2 = 0, \\ y = C. \end{array}\right.$

Уравнения в точных производных. Уравнение $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ называется *уравнением в точных производных*, если существует такая функция $\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, что $\dfrac{d}{dx}\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \equiv$ $\equiv F(x, y, y', ..., y^{(n)})$.

В этом случае исходное уравнение равносильно уравнению $\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = C$, где C – произвольная постоянная. Таким образом, уравнение сводится к уравнению порядка $n - 1$.

Задача 35.3. Проинтегрировать уравнение $2yy' + y'' = 0$.

Р е ш е н и е. Так как $2yy' + y'' = \dfrac{d}{dx}(y^2 + y')$, то данное уравнение равносильно уравнению с разделяющимися переменными $y^2 + y' = C_1$. Полное решение исходного уравнения имеет вид

$$\left[\begin{array}{ll} -\dfrac{1}{\sqrt{-C_1}}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{\sqrt{-C_1}} = x + C_2 & \text{при } C_1 < 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{C_1}}\ln\dfrac{C_1 + y}{C_1 - y} = x + C_2 & \text{при } C_1 > 0, \\ y^2 = C. & \end{array}\right.$$

Уравнения, однородные относительно искомой функции и ее производных. *Уравнение* $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ называется *однородным относительно искомой функции и ее производных*, если функция F обладает свойством $F(x, ty_0, ty_1, ..., ty_n) \equiv t^k F(x, y_0, y_1, ..., y_n)$ $\forall\ t > 0$.

В этом случае исходное уравнение с помощью подстановки $y' = yz$ сводится к уравнению порядка $n - 1$ относительно новой искомой функции $z = z(x)$.

Задача 35.4. Проинтегрировать уравнение $x^2yy'' - (y - xy')^2 = 0$.

Р е ш е н и е. Поскольку $F(x, y_0, y_1, y_2) = x^2y_0y_2 - (y_0 - xy_1)^2$, то $F(x, ty_0, ty_1, ty_2) \equiv t^2(x^2y_0y_2 - (y_0 - xy_1)^2)$. Следовательно, исходное уравнение – однородное относительно искомой функции $y(x)$ и ее производных y', y''. С помощью подстановки $y' = yz$, $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$ исходное уравнение приводится к виду $y^2(x^2z' - 1 + 2xz) = 0$. Отсюда $x^2z' - 1 + 2xz = 0$. Потери решения $y = 0$ не будет, так как оно является решением уравнения $y' = yz$. Общее решение полученного линейного уравнения первого порядка $z' + 2z/x = 1/x^2$ имеет вид $z = C_1/x^2 + 1/x$. Отсюда $y' = (C_1/x^2 + 1/x)y$. Следовательно, $y = C_2xe^{-C_1/x}$ – общее решение исходного уравнения.

Уравнения, однородные относительно независимой переменной и ее дифференциала, искомой функции и ее дифференциалов. Уравнение $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ в дифференциальной форме имеет вид

$$H(x, y, dx, dy, d^2y, ..., d^ny) = 0.$$

Уравнение в дифференциальной форме называется *однородным*, если $H(x_0, y_0, x_1, y_1, ..., y_n)$ является *однородной функцией* своих аргументов, т.е. $H(tx_0, ty_0, tx_1, ty_1, ..., ty_n) \equiv t^k H(x_0, y_0, x_1, y_1, ..., y_n)$ $\forall\ t > 0$. Это равносильно тому, что

$$F(t\,x, t^1y, t^0y', t^{-1}y'', ..., t^{1-n}\,y^{(n)}) \equiv t^k F(x, y, y', ..., y^{(n)})\ \forall\ t > 0.$$

Введение новых переменных $\tau = \ln x$, $x > 0$ ($\tau = \ln(-x)$, $x < 0$), $z = y/x$ позволяет свести указанное уравнение к уравнению, не содержащему явно независимой переменной.

Задача 35.5. Проинтегрировать уравнение $x^2(yy''+y'^2)-y^2=0,\ \ x>0.$

Р е ш е н и е. Данное уравнение в дифференциальной форме имеет вид $x^2(yd^2y+(dy)^2)-y^2(dx)^2=0$. Так как $H(x_0,y_0,x_1,y_1,y_2)=x_0^2(y_0y_2+y_1^2)-y_0^2x_1^2$, то

$$H(tx_0,ty_0,tx_1,ty_1,ty_2)\equiv t^4(x_0^2(y_0y_2+y_1^2)-y_0^2x_1^2).$$

Следовательно, H – однородная функция, $k=4$, а исходное уравнение является однородным уравнением указанного типа. Введем новые переменные $\tau=\ln x$, $z=y/x$, т.е. $y=e^{\tau}z$. Так как

$$y'_x=y'_\tau\tau'_x=(e^\tau z+e^\tau z'_\tau)e^{-\tau}=z+z'_\tau,\quad y''_{x^2}=(y'_x)'_x=(z+z'_\tau)'_\tau e^{-\tau}=(z'_\tau+z''_{\tau^2})e^{-\tau},$$

то исходное уравнение принимает вид $zz''_{\tau^2}+3zz'_\tau+z'^2_\tau=0.$ Полученное уравнение подстановкой $z'=u(z)$, $z''=u'_zu$ сводится к линейному уравнению первого порядка $zuu'_z+3zu+u^2=0$ или $u'_z+\dfrac{1}{z}u=-3$, $u\neq 0$, общее решение которого $u=C_1\dfrac{1}{z}-\dfrac{3}{2}z.$ Относительно z получаем уравнение $z'_\tau=C_1\dfrac{1}{z}-\dfrac{3}{2}z$, общее решение которого $z=$ $=\pm\sqrt{(2C_1-C_2e^{-3\tau})/3}.$ Следовательно, $y=\pm e^\tau\sqrt{(2C_1-C_2e^{-3\tau})/3}.$ Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид $y(x)=\pm\sqrt{(2C_1x^3-C_2)/(3x)}.$ Случай $u=0$ приводит к решению $y=Cx$ исходного уравнения, содержащемуся в общем.

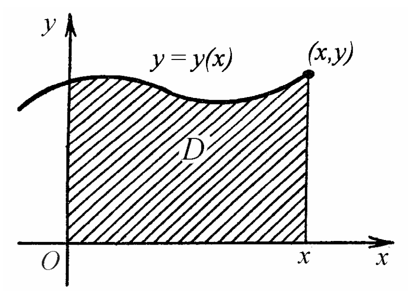


Рис. 29

Задача 35.6. Составить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет кривая, обладающая тем свойством, что ордината любой ее точки равна ординате центра масс однородной криволинейной трапеции, ограниченной кривой, осями координат и ординатой (прямой, параллельной оси ординат) этой точки кривой.

Р е ш е н и е. Пусть $y=y(x)$ – искомая кривая. Так как ордината центра масс указанной криволинейной трапеции (рис. 29) определяется по формуле $y_c=\iint\limits_D ydxdy\Big/\iint\limits_D dxdy$, то имеем соотношение $\int\limits_0^x dx\int\limits_0^{y(x)}ydy=y(x)\int\limits_0^x dx\int\limits_0^{y(x)}dy,$ которое записывается в виде $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^x y^2(x)dx=y(x)\int\limits_0^x y(x)dx.$ Дифференцируя полученное равенство по x, приходим к соотношению $\dfrac{1}{2}y^2=y'\int\limits_0^x y(x)dx+y^2$, т.е. $\int\limits_0^x y(x)dx=-\dfrac{1}{2}\dfrac{y^2}{y'}.$ Повторное дифференцирование приводит к дифференциальному уравнению $4y'^2=yy''.$

Задача 35.7 (*«задача о погоне»*). Пусть точка P движется по оси Ox (рис. 30) с постоянной скоростью $v>0$, а точка M – по некоторой кривой L в плоскости Oxy с постоянной скоростью $u(u>v)$, причем вектор скорости точки M в каждый момент времени направлен в точку P. Кривая L называется *линией погони*. Предполагая, что в начальный момент времени точка P находится в начале координат, а точка M – на оси Oy в точке $M_0(0,y_0)$ $(y_0>0)$, найти уравнение линии погони L, точку $B(x,0)$, в которой точка M догонит точку P, и продолжительность погони T.

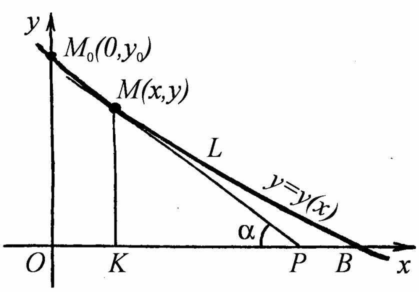


Рис. 30

Р е ш е н и е. Составим дифференциальное уравнение линии погони. Учитывая, что вектор скорости направлен по касательной к траектории движения, имеем $\operatorname{tg}\alpha=-y'(x)$; с другой стороны, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{|KM|}{|KP|}=\dfrac{y}{vt-x}.$ Следовательно, $y'=y/(x-vt)$. Дифференцируя обе части полученного равенства по x, найдем, что $\frac{dt}{dx}=\frac{yy''}{vy'^2}$. Кроме того, $u=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{dt}dx$, откуда $\frac{dt}{dx}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{u}$. Приравняв полученные выражения для dt/dx, получим дифференциальное уравнение линии погони $\frac{yy''}{vy'^2}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{u}$ или $yy''=ky'^2\sqrt{1+y'^2}$, где $k=\frac{v}{u}<1$. Требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y_0$ и $y'\to-\infty$ при $x\to+0$. Полученное уравнение относится к типу уравнений, допускающих понижение порядка с помощью введения новой функции $y'=z(y)$. Задача Коши для функции z имеет вид $yz\frac{dz}{dy}=kz^2\sqrt{1+z^2}$, $z\to-\infty$ при $y\to y_0$. Решая эту задачу, получаем $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{y_0}\right)^k-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-k}\right)$, откуда $dx=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{y_0}\right)^k-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-k}\right)dy$. Решая данное уравнение при начальных данных $x(y_0)=0$, находим

$$x=\frac{y_0}{2}\left(\frac{1}{k+1}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{k+1}-\frac{1}{1-k}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-k}\right)+\frac{y_0k}{1-k^2}.$$

Точка B имеет абсциссу $x=y_0uv/(u^2-v^2)$, а продолжительность погони $T=y_0u/(u^2-v^2)$.

Проинтегрировать уравнения:

985. $xy''+xy'^2=y'$.

986. $xyy''-xy'^2-yy'=0$.

987. $x^3y''-x^2y'^2+2xyy'-y^2=0$.

988. $yy'''-y'y''=0$.

989. $(y''')^2-y''y^{(4)}=0$.

990. $xyy''+xy'^2-yy'=0$.

991. $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$.

992. $y'''-(y'')^3=0$.

993. $y'''-2y''=0$.

994. $y^3y''+1=0$.

995. $y^4-y^3y''=1$.

Понизить порядок уравнений:

996. $y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=1$.

997. $y''(e^x+1)+y'=0$.

998. $y^3y''=1$.

999. $y'^2+2yy''=0$.

1000. $y''+y'\cos x-y\sin x=0$.

1001. $y''=2yy'$.

1002. $2xy'y''=y'^2-1$.

1003. $2y'(y''+2)=x(y'')^2$.

1004. $xy''=y'+x\sin(y'/x)$.

1005. $(y'')^3+xy''=2y'$.

1006. $y'''y'^2=(y'')^3$.

1007. $\frac{y'''}{y''}+3\frac{y'}{y}=0$.

1008. $y''=xy'+y+1$.

1009. $\frac{y'''}{y''}=2\frac{y''}{y'}$.

1010. $yy''+y'^2=1$.

1011. $xyy''-xy'^2-2yy'=0$.

1012. $y^4y''+(xy'-y)^3=0$.

1013. $yy''=y'^2+y'$.

1014. $yy'' - y'^2 = \dfrac{y}{1+x} y'$.

1015. $\dfrac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} + xy' + y = 0$.

1016. Найти кривые, у которых радиус кривизны есть постоянная величина a. (У к а з а н и е. *Радиус кривизны* определяется формулой $R = (y'^2 + 1)^{3/2} / y''$.)

1017. Найти кривые, у которых радиус кривизны равен длине отрезка нормали, заключенного между осью абсцисс и прямой $y = a$.

1018. Найти кривые постоянной кривизны a ($k = 1/R$, k – кривизна кривой).

1019. Найти кривые, радиус кривизны которых пропорционален кубу длины отрезка нормали между точкой касания и осью Ox.

1020. Найти кривые, радиус кривизны которых равен длине отрезка нормали между точкой касания и осью Ox.

1021. Найти кривые, радиус кривизны которых в каждой точке равен угловому коэффициенту касательной к кривой в этой точке.

1022. Дифференциальное уравнение, определяющее форму каната, укрепленного в двух точках и подверженного действию только своего собственного веса, имеет вид $Hy'' = s\sqrt{1+y'^2}$, где H – горизонтальное натяжение (постоянная величина); s – линейная плотность каната. Определить форму каната.

1023. Масса одного километра телеграфной проволоки равна 40 кг. Если между укрепленными концами проволоки расстояние 200 м, а середина проволоки опустилась на 5 м, то как велико горизонтальное натяжение? (У к а з а н и е. Воспользоваться уравнением задачи 1022.)

1024. Материальная точка массой m брошена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Составить математическую модель движения точки, если сопротивление воздуха пропорционально кубу скорости.

1025. Найти закон движения тела, свободно падающего без начальной скорости, считая, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и что предельная скорость (при $t \to +\infty$) равна 75 м/с.

Контрольная работа № 4

Вариант I

1. Проинтегрировать уравнения Лагранжа и Клеро:

а) $2xy' - y = \ln y'$; б) $y = xy' - y'^2$.

2. Проинтегрировать уравнение $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$.

3. Понизить порядок уравнения $2x^3y''' - y''x^2 = (y'')^3$ и указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

4. Проинтегрировать уравнение в точных производных $y'' + y'/x - y/x^2 = 3x^2$.

Вариант II

1. Проинтегрировать уравнения Лагранжа и Клеро:

а) $2xy' - y = \cos y'$; б) $y = xy' - (2 + y'^2)$.

2. Проинтегрировать уравнение $2yy'' + y'^2 = 0$.

3. Понизить порядок уравнения $(y'')^2 + y' = xy''$ и указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

4. Проинтегрировать уравнение в точных производных $yy'' + y'^2 = 1$.

Тестовые задания

1. После применения подстановки $\ln y = u(x)$ уравнение $y(x+\ln y)+(x-\ln y)y' = 0$ принимает вид (указать все правильные ответы):

а) $(x+u)u' + (x-u) = 0$; б) $(x+u)+(x-u)u' = 0$;

в) $(x+u)x' + (x-u) = 0$; г) $(x+u)dx + (x-u)du = 0$.

2. Понизить порядок уравнений

а) $y''' = (y'')^2 \ln x + y'' \cos x + x^2$; б) $y'' = (x^2+1)y' + e^x \cos x (y')^2$;

в) $y'' = xy''' + \operatorname{tg} y'''$; г) $yy'' = 3(y')^2 + yy'$.

Полученные уравнения являются соответственно уравнениями:

1) Бернулли, Риккати, УПД, линейным;
2) Риккати, Бернулли, Клеро, линейным;
3) УПД, Бернулли, Лагранжа, линейным;
4) Риккати, Бернулли, Лагранжа, УПД.

3. Понизить порядок уравнения $(1+(y')^2 \sin 2x) - 2y'y'' \cos^2 x = 0$. Решение задачи Коши для полученного уравнения с новой искомой функцией $z(x)$ и начальным условием $z(0)=0$ содержится в:

а) $x^2 - z^2 \cos^2 x = 0$; б) $x - z^2 \cos^2 x = 0$;

в) $x + z \cos x = 0$; г) $x - z^2 \cos x = 0$.

4. Определить тип уравнений:

а) $(x^3 + y^3)dx - 3x^2 y dy = 0$; б) $(2+x^2)y' + xy = 4$;

в) $(4y^2 - 6x^3)ydy + (2-9xy^2)xdx = 0$; г) $xy' + 2x^2 y = 7y^4$;

д) $x^2 dy = (x^2 y^2 - y^2 + x)dx$; е) $xy^2 dx + (1+x^2)dy = 0$;

ж) $xdy + ydx = 0$.

Указать наиболее полный перечень типов:

1) а) однородное, б) линейное, в) с разделяющимися переменными, УПД, г) Бернулли, д) Риккати, е) с разделяющимися переменными, ж) с разделяющимися переменными;

2) а) однородное, б) линейное, в) УПД, г) Бернулли, д) Риккати, е) с разделяющимися переменными, ж) с разделяющимися переменными, УПД;

3) а) однородное, б) линейное, в) УПД, г) Риккати, д) Бернулли, е) с разделяющимися переменными, ж) с разделяющимися переменными;

4) а) однородное, б) с разделяющимися переменными, в) УПД, г) Бернулли, д) Риккати, е) с разделяющимися переменными, ж) с разделяющимися переменными.

ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

XI. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

36. Понижение порядка уравнения с известным частным решением

Линейным уравнением n-го порядка с переменными коэффициентами называется уравнение вида

$$D^n x + a_{n-1}(t)D^{n-1}x + \ldots + a_1(t)Dx + a_0(t)x = f(t), \quad t \in I,$$

где $a_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, и $f(t)$ – функции, непрерывные на I.

Частным случаем линейных уравнений являются стационарные уравнения, интегрирование которых принципиально не представляет больших трудностей. Если заменой переменных можно линейное уравнение с переменными коэффициентами преобразовать в уравнение с постоянными коэффициентами, то с помощью обратного преобразования получим решение данного уравнения в элементарных функциях.

Теорема 36.1 (*существования и единственности решения задачи Коши*). *Если коэффициенты* $a_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, *и неоднородность* $f(t)$ *непрерывны на* I, *то задача Коши*

$$D^n x + a_{n-1}(t)D^{n-1}x + \ldots + a_1(t)Dx + a_0(t)x = f(t), \quad t \in I,$$

$$D^j x\big|_{t=s} = \xi_j, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \forall s \in I, \quad \forall \xi_j \in \mathbb{R},$$

имеет единственное решение $x = x(t)$, *определенное на всем* I.

Однородное линейное *уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами* имеет вид

$$D^n x + a_{n-1}(t)D^{n-1}x + \ldots + a_1(t)Dx + a_0(t)x = 0, \quad t \in I.$$

Совокупность n линейно независимых частных решений $x_0(t)$, ..., $x_{n-1}(t)$ однородного уравнения с непрерывными коэффициентами образует *базис пространства решений*. Базис нормирован в точке $t = s$, если $D^k x_j(t)\big|_{t=s} = \delta_{kj}$, где δ_{kj} – *символ Кронекера*, $j, k = \overline{0, n-1}$. Совокупность решений $x_0(t)$, ..., $x_{n-1}(t)$ образует базис, если *определитель Вронского*

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_0(t) & \ldots & x_{n-1}(t) \\ Dx_0(t) & \ldots & Dx_{n-1}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-1}x_0(t) & \ldots & D^{n-1}x_{n-1}(t) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля хотя бы в одной точке промежутка I. Если $x_0(t)$, ... , $x_{n-1}(t)$ – линейно независимые на I частные решения линейного однородного уравнения n-го порядка, то его общее решение $x(t)$ представимо в виде

$$x(t) = C_0 x_0(t) + C_1 x_1(t) + \ldots + C_{n-1}\, x_{n-1}(t),$$

где C_i, $i = \overline{0, n-1}$, – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного линейного уравнения n-го порядка представляет собой сумму общего решения однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному, и частного решения неоднородного уравнения.

Для определения частного решения неоднородного уравнения можно использовать *метод вариации произвольных постоянных* (*метод Лагранжа*). В этом случае частное решение $x_{чн}(t)$ ищут в виде

$$x_{чн}(t) = u_0(t)x_0(t) + \ldots + u_{n-1}(t)\, x_{n-1}(t),$$

где $u_i(t)$, $i = \overline{0, n-1}$, – функции, подлежащие отысканию.

Производные $Du_i(t)$ должны удовлетворять следующей алгебраической системе (системе Лагранжа):

$$\begin{cases} Du_0(t)x_0(t) \quad + \ldots + Du_{n-1}(t)x_{n-1}(t) = 0, \\ Du_0(t)Dx_0(t) \quad + \ldots + Du_{n-1}(t)Dx_{n-1}(t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Du_0(t)D^{n-2}x_0(t) + \ldots + Du_{n-1}(t)D^{n-2}x_{n-1}(t) = 0, \\ Du_0(t)D^{n-1}x_0(t) + \ldots + Du_{n-1}(t)D^{n-1}x_{n-1}(t) = f(t). \end{cases}$$

Общего метода интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами нет. Однако в некоторых случаях эти уравнения с помощью подстановки приводимы к уравнениям, решения которых можно построить.

Если известно частное решение $x_1(t)$ линейного однородного уравнения n-го порядка, то порядок уравнения можно понизить на единицу, сохраняя линейность уравнения. Для этого надо подставить в уравнение $x(t) = x_1(t)z(t)$, а затем произвести замену $Dz(t) = u(t)$.

Пусть $x_1(t)$ – частное решение линейного однородного уравнения второго порядка $D^2x + p(t)Dx + q(t)x = 0$. Произведем в этом уравнении замену $x = x_1z$. Определив $Dx = zDx_1 + x_1Dz$, $D^2x = zD^2x_1 + 2Dx_1Dz + x_1D^2z$ и подставив их в уравнение, получим $zD^2x_1 + zpDx_1 + zqx_1 + 2DzDx_1 + x_1D^2z + px_1Dz = 0$. Так как $x_1(t)$ – решение исходного уравнения, то $D^2x_1 + p(t)Dx_1 + q(t)x_1 \equiv 0$. Теперь имеем уравнение второго порядка, не содержащее искомой функции z: $(2Dx_1 + px_1)Dz + x_1D^2z = 0$. Положив $Dz = u$, $D^2z = Du$, придем к уравнению $x_1Du + (2Dx_1 + px_1)u = 0$, которое является линейным однородным уравнением первого порядка относительно искомой функции u, а также уравнением с разделяющимися переменными.

Задача 36.1. Проинтегрировать уравнение $D^2x - \dfrac{2t}{t^2+1}Dx + \dfrac{2}{t^2+1}x = 0$, если известно его частное решение $x_1 = t$.

Р е ш е н и е. Делаем замену $x = tz$. Определив Dx и D^2x, подставляем их в уравнение, в результате чего получаем $tD^2z + \dfrac{2}{t^2+1}Dz = 0$. Положив $Dz = u$, приходим к уравнению $tDu + \dfrac{2}{t^2+1}u = 0$, общее решение которого имеет вид $u = C_1(1 + t^{-2})$. Возвращаясь к функции z, получаем простейшее уравнение первого порядка $Dz = C_1(1 + t^{-2})$, откуда $z(t) = C_1(t - t^{-1}) + C_2$ или $z(t) = C_1(t^2 - 1) / t + C_2$. В результате имеем общее решение исходного уравнения $x(t) = C_1(t^2 - 1) + C_2t$.

Задача 36.2. Проинтегрировать уравнение $D^2x - \dfrac{2t}{t^2+1}Dx + \dfrac{2}{t^2+1}x = \dfrac{1}{t}$, $t > 0$.

Р е ш е н и е. Использовав предыдущую задачу, выпишем общее решение однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному: $x_{оо}(t) = C_0(t^2 - 1) + C_1t$. Так как $(t^2 - 1)$ и t образуют базис пространства решений однородного уравнения, то частное решение $x_{чн}(t)$ данного неоднородного уравнения ищем в виде $x_{чн}(t) = u_0(t)(t^2 - 1) + u_1(t)t$, используя метод Лагранжа. Система для $Du_0(t)$, $Du_1(t)$ имеет вид

$$\begin{cases}(t^2-1)Du_0+tDu_1=0,\\ 2tDu_0+Du_1=1/t.\end{cases}$$

Отсюда $Du_0 = 1/(1 + t^2)$, $Du_1 = 1/t - 2t/(1 + t^2)$. Следовательно, $u_0(t) = \operatorname{arctg} t$, $u_1(t)=\ln\dfrac{t}{1+t^2}$, $x_{\text{чн}}(t) =$ $=(t^2-1)\operatorname{arctg} t+t\ln\dfrac{t}{1+t^2}$. Тогда общее решение исходного уравнения $x(t)=C_0(t^2-1)+C_1t+(t^2-1)\operatorname{arctg} t+t\ln\dfrac{t}{1+t^2}$.

Общего метода отыскания частных решений линейного однородного уравнения второго порядка не существует. Иногда частное решение можно найти в виде полинома некоторой степени n: $t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0$.

Отыскание частного решения в виде полинома проводится методом неопределенных коэффициентов.

Задача 36.3. Найти частное решение уравнения $(1 - 2t^2)D^2x + 2Dx + 4x = 0$.

Р е ш е н и е. Будем искать частное решение уравнения в виде полинома степени n, т.е. в виде $x_1(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$. Подставляя $x_1(t)$ в уравнение, получаем $(1 - 2t^2)(n(n-1)t^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}t^{n-3} + \ldots +2a_2) + 2(nt^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2} + \ldots + a_1) + 4(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots +a_1t + a_0) \equiv 0$.

Получено тождество относительно t. Коэффициенты при t^n в левой и правой частях тождества равны соответственно $4 - 2n(n - 1)$ и 0. В результате для нахождения степени многочлена получаем уравнение второй степени относительно n: $n^2 - n - 2 = 0$. Его решения $n_1 = 2$, $n_2 = -1$. Следовательно, решением данного дифференциального уравнения может быть полином второй степени. Таким образом, частное решение ищем в виде $x_1(t) = t^2 + at + b$. Подставив этот полином в исходное уравнение, получим $2(1 - 2t^2) + 2(2t + a) + 4(t^2 + at + b) \equiv 0$ или $(2a + 2)t + a +2b + 1 \equiv 0$. Отсюда $2a + 2 = 0$, $a + 2b + 1 = 0$, т.е. $a = -1$, $b = 0$. Следовательно, $x_1(t) = t^2 - t$ является частным решением исходного дифференциального уравнения.

Построив частное решение в виде полинома $x_1(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$, проинтегрировать уравнения:

1026. $(2t+1)D^2x+4tDx-4x=0$.

1027. $(t-1)x''-(t+1)x'+2x=0$.

1028. $(1-t^2)D^2x-tDx+9x=0$.

1029. $(1-t^2)x''-tx'+x=0$.

Построив частное решение указанного вида, проинтегрировать уравнения:

453. $tD^2x-(2t+1)Dx+(t+1)x=0$, $x_1(t)=e^{at}$.

454. $(2t+1)D^2x+2(2t-1)Dx-8x=0$, $x_1(t)=e^{at}$.

455. $(t^2-1)x''-6x=0$, $x_1(t)=a_0t^3+a_1t^2+a_2t+a_3$.

456. $(1-t^2)D^2x-2tDx+6x=0$, $x_1(t)=a_0t^2+a_1t+a_2$.

457. $t^2(t^2+1)D^2x+(2t^3+t)Dx-x=0$, $x_1(t)=a/t$.

458. $(1-t^2)x''-tx'+x/4=0$, $x_1(t)=\sqrt{a_0t+a_1}$.

Проинтегрировать уравнения с известным частным решением:

459. $t^2(t+1)x''-2x=0$, $x_1(t)=1+1/t$, $t>0$.

460. $tD^2x+2Dx-tx=0$, $x_1(t)=e^t/t$, $t>0$.

461. $(e^t+1)D^2x-2Dx-e^tx=0$, $x_1(t)=e^t-1$.

462. $x''+\dfrac{2}{t}x'+x=0$, $x_1(t)=\dfrac{\sin t}{t}$, $t>0$.

463. $x''+\dfrac{2}{t}x'+x=\dfrac{1}{t}$, $t>0$.

464. $t(1-t)^2 D^2x - 2x = 0, \quad x_1(t) = t/(1-t), \quad t > 1.$

465. $t^2D^2x + 4tDx + 2x = 0, \quad x_1(t) = 1/t, \quad t > 0.$

466. $(1+t^2)D^2x + tDx - x + 1 = 0,$ $x_1(t) = t$ – частное решение соответствующего однородного уравнения.

467. $t^2(t^2+1)D^2x + (2t^3+t)Dx - x = -t + 2/t,$ $x_1(t) = 1/t$ – частное решение соответствующего однородного уравнения.

468. $t^2x'' + tx' - x = 2t,$ $x_1(t) = t$ – частное решение соответствующего однородного уравнения.

469. Доказать, что если $x_1(t)$ – ненулевое частное решение уравнения $D^2x + p(t)Dx + q(t)x = 0,$ $t \in I,$ то второе частное решение этого уравнения можно найти по формуле

$$x_2(t) = x_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{\exp(-\int_{t_0}^{\tau} p(\sigma)d\sigma)}{x_1^2(\tau)}d\tau, \quad t_0 \in I.$$

1047. Подобрав одно частное решение уравнения $D^2x - Dx + x/t = 0$, построить его общее решение.

1048. Подобрав одно частное решение уравнения $D^2x - \operatorname{tg} t\, Dx + 2x = 0$, построить его общее решение.

1049. Найти решение задачи Коши $(2t - t^2)x'' + (t^2 - 2)x' + 2(1-t)x = 0,$ $x|_{t=1} = 0,$ $x'|_{t=1} = 1$, если уравнение имеет частное решение $x_1(t) = e^t$.

1050. Уравнение $(1 + t^2)D^2x + 2tDx - 2x = 4t^2 + 2$ допускает частное решение $x_1(t) = t^2$. Подобрав одно частное решение однородного уравнения, найти решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $x|_{t=-1} = 0$, $Dx|_{t=-1} = 0$.

37. Приведение линейного уравнения к стационарному

Линейное уравнение второго порядка $D^2x + p(t)Dx + q(t)x = 0$ с непрерывными на I коэффициентами в некоторых случаях можно свести к стационарному линейному уравнению. Этого иногда можно добиться за счет введения независимой переменной $\tau = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – любая из первообразных $\int c\sqrt{q(t)}dt$. Указанная замена независимой переменной всегда приводит линейное уравнение второго порядка к уравнению того же вида, у которого коэффициент при искомой функции постоянен.

Преобразование зависимой переменной $x(t)$ подстановкой $x = \alpha(t)y$ при $\alpha(t) = e^{-0{,}5\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}$ приводит к уравнению с нулевым коэффициентом при Dy.

Для приведения неоднородного уравнения с непрерывными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами пользуются теми же подстановками, что и для однородного уравнения, причем иногда оказывается необходимым применение комбинации обеих подстановок.

Задача 37.1. Проинтегрировать уравнение $t^4D^2x + 2t^3Dx + n^2x = 0,$ $n > 0,$ $t > 0.$

Р е ш е н и е. Так как $\int c\sqrt{q(t)}dt = \int c\sqrt{\frac{n^2}{t^4}}dt = \int c\frac{n}{t^2}dt = -c\frac{n}{t} + a,$ то в качестве функции $\varphi(t)$ возьмем n/t $(c = -1,$ $a = 0).$ Полагая $\tau = \varphi(t) = n/t$, вычислим Dx и D^2x:

$$Dx = D_\tau x\frac{d\tau}{dt} = -\frac{n}{t^2}D_\tau x, \quad D^2x = D(D_\tau x\frac{d\tau}{dt}) = -n(-\frac{n}{t^4}D_\tau^2 x - \frac{2}{t^3}D_\tau x) = \frac{n^2}{t^4}D_\tau^2 x + \frac{2n}{t^3}D_\tau x,$$

где $D_\tau = \dfrac{d}{d\tau}$ – оператор дифференцирования по τ. Данное уравнение принимает вид $t^4(\frac{n^2}{t^4}D_\tau^2 x + \frac{2n}{t^3}D_\tau x) - 2tnD_\tau x +$ $+ n^2 x = 0.$

В результате получили стационарное линейное уравнение второго порядка $D_\tau^2 x + x = 0.$ Так как характеристическое уравнение $v^2 + 1 = 0$ имеет корни $v_1 = i$, $v_2 = -i$, то $x(\tau) = C_1\cos\tau + C_2\sin\tau$. Поэтому

$$x(t) = C_1\cos\frac{n}{t} + C_2\sin\frac{n}{t}, \quad t > 0.$$

Задача 37.2. Проинтегрировать уравнение

$$t^2D^2x + tDx + (t^2 - 1/4)x = 0.$$

Р е ш е н и е. Положим $x = \alpha(t)y$. Потребуем, чтобы в полученном уравнении коэффициент при Dy равнялся нулю. Из этого условия и найдем функцию $\alpha(t)$. Так как

$$Dx = \alpha Dy + yD\alpha,\ D^2x = \alpha D^2y + 2D\alpha\cdot Dy + yD^2\alpha,$$

то, подставив x, Dx, D^2x в исходное уравнение, получим уравнение

$$t^2\alpha D^2y + 2t^2D\alpha\cdot Dy + t^2yD^2\alpha + t\alpha Dy + tyD\alpha + (t^2 - 1/4)\alpha y = 0,$$

которое после приведения подобных членов принимает вид

$$t^2\alpha D^2y + (2t^2D\alpha + t\alpha)Dy + (t^2D^2\alpha + tD\alpha + (t^2 - 1/4)\alpha)y = 0.$$

Полагаем $2t^2D\alpha + t\alpha = 0$. Этому уравнению удовлетворяет, например, функция $\alpha(t) = 1/\sqrt{t}$, $t \in (0, +\infty)$. В результате получаем уравнение $D^2y + y = 0$, решением которого является функция $y(t) = C_1\cos t + C_2\sin t$. Так как $x = y/\sqrt{t}$, то решение исходного уравнения имеет вид $x(t) = C_1\dfrac{\cos t}{\sqrt{t}} + C_2\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$.

Путем замены независимой переменной проинтегрировать уравнения:

1051. $t^4D^2x + x = 0.$

1052. $D^2x - 2(3e^{2t}x + 1)Dx + 8e^{4t}x = 4e^{6t}.$

1053. $x'' - x' + e^{2t}x = 0.$

1054. $(1 + t^2)^2D^2x + 2t(1 + t^2)Dx + x = 0.$

1055. $2tD^2x + Dx + 2x = 0.$

1056. $(1 - t^2)x'' - tx' + n^2x = 0.$

Построить общее решение уравнений, приведя их к стационарным уравнениям путем замены искомой функции:

1057. $x'' + (4t + 1)x' + (4t^2 + 2t + 2)x = 0.$

1058. $tD^2x + 2Dx - tx = e^t.$

1059. $D^2x - \dfrac{2}{t}Dx - (a^2 - \dfrac{2}{t^2})x = 0.$

1060. $t^2x'' + 2t^4x' + (t^3 + 1)^2x = 0.$

1061. $tD^2x + (1 + t)Dx + \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{2t})x = 0.$

1062. $D^2x + 4tDx + (4t^2 + 1)x = 0.$

С помощью указанных подстановок проинтегрировать уравнения:

1063. $tD^2x - (10t^2 + 1)Dx + 24t^3x = 0, \quad t^2 = \tau.$

1064. $t^4x'' + (2t^3 - 5t^2)x' + 6x = e^{1/t}, \quad t = 1/\tau.$

1065. $t^8D^2x + (6t^4 + 4t^7)Dx + 9x = 0, \quad t^{-3} = \tau.$

1066. $t^2D^2x - 3tDx + 4x = t\ln t, \quad \ln t = \tau.$

1067. $t^4D^2x - a^2x = 0, \quad t = 1/\tau.$

1068. $t^4D^2x + 2t^3Dx - 4x = 1/t, \quad t = 2/\tau.$

1069. $tx'' + 2x' + a^2tx = 0, \quad tx = y.$

1070. $D^3x + \dfrac{3}{t}D^2x - x = 0, \quad tx = y.$

1071. $x'' + \dfrac{2}{t}x' + x = 0, \quad x = \tau/t.$

38. Уравнение Эйлера

Простейшим примером линейного уравнения с переменными коэффициентами является *уравнение Эйлера*, которое имеет вид

$$(t-\alpha)^n D^n x + (t-\alpha)^{n-1} a_{n-1} D^{n-1} x + \ldots + (t-\alpha) a_1 Dx + a_0 x = f(t), \; t \in I,$$

где α, a_k, $k = \overline{0, n-1}$, – постоянные. Отметим, что $\alpha \notin I$.

Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение Эйлера является однородным дифференциальным уравнением, если $f(t) \not\equiv 0$ – неоднородным. Для определенности считают, что $f(t)$ непрерывна на *I*, где в качестве *I* взят один из лучей $I_+ = \{t \,|\, t > \alpha\}$ или $I_- = \{t \,|\, t < \alpha\}$.

В уравнении Эйлера произведем замену аргумента *t* на τ по формуле $\tau = \ln|t-\alpha|$. Если $t \in I_+$, то $\tau = \ln(t-\alpha)$, если $t \in I_-$, то $\tau = \ln(\alpha - t)$. При такой замене луч *I* переходит в прямую $I_\tau = (-\infty, +\infty)$. Обратная замена $t = \alpha + e^\tau$ переводит I_τ в I_+, а $t = \alpha - e^\tau$ переводит I_τ в I_-. Обозначим через D_τ оператор дифференцирования по τ, т.е. $D_\tau = \dfrac{d}{d\tau}$. Для определенности будем считать $t \in I_+$, т.е. $t = \alpha + e^\tau$. Установим связь между производными $D^k x$ и $D_\tau^k x$, учитывая, что $\dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{1}{dt/d\tau} = e^{-\tau}$:

$$Dx = D_\tau x \frac{d\tau}{dt} = e^{-\tau} D_\tau x,$$

$$D^2 x = D\big(Dx\big) = D_\tau\left(e^{-\tau} D_\tau x\right)\frac{d\tau}{dt} = \left(D_\tau^2 x - D_\tau x\right) e^{-2\tau},$$

$$D^3 x = D\left(D^2 x\right) = D_\tau\left(\left(D_\tau^2 x - D_\tau x\right) e^{-2\tau}\right) = \left(D_\tau^3 x - 3D_\tau^2 x + 2D_\tau x\right) e^{-3\tau}.$$

Используя метод математической индукции, можно показать, что

$$D^k x = \left(D_\tau^k x + A_{k-1} D_\tau^{k-1} x + \ldots + A_1 D_\tau x\right) e^{-k\tau},$$

где A_j – постоянные числа, $j = \overline{1, k-1}$.

Подставляя в уравнение Эйлера вместо производных Dx, D^2x, …, $D^n x$ их выражения через $D_\tau x, D_\tau^2 x, \ldots, D_\tau^n x$ и используя равенства $(t-\alpha)^k = e^{k\tau}$, получаем линейное уравнение со стационарным оператором. Производя замену $t - \alpha = e^\tau$ в уравнении Эйлера, необходимо преобразовать и правую часть уравнения, т.е. $f(t)$ заменить на $f(e^\tau + \alpha)$.

Отметим, что при $I = I_-$, т.е. при замене $t = \alpha - e^\tau$, однородное уравнение Эйлера приводится к такому же стационарному уравнению, как и при замене $t = \alpha + e^\tau$, $t \in L_+$.

Неоднородное уравнение Эйлера всегда сводится к неоднородному уравнению со стационарным оператором, а однородное – к однородному.

Однородное уравнение Эйлера

$$(t-\alpha)^n D^n x + (t-\alpha)^{n-1} a_{n-1} D^{n-1} x + \ldots + (t-\alpha) a_1 Dx + a_0 x = 0,\ t \in I_{\pm},$$

подстановкой $t = \alpha \pm e^{\tau}$ преобразуется к стационарному уравнению

$$D_\tau^n x + b_{n-1} D_\tau^{n-1} x + \ldots + b_0 x = 0,$$

характеристическое уравнение которого имеет вид

$$v^n + b_{n-1} v^{n-1} + \ldots + b_1 v + b_0 = 0.$$

Характеристическое уравнение может быть получено подстановкой $x = e^{\nu t}$ в однородное стационарное уравнение. Подстановка $x = \pm e^{\nu t}$ в однородное стационарное уравнение равносильна подстановке $x = |t-\alpha|^{\nu}$ в однородное уравнение Эйлера. Подстановка $x = |t-\alpha|^{\nu}$ при всех $t \in I_{\pm}$ приводит к *определяющему уравнению Эйлера*

$$v(v-1)\cdots(v-n+1) + v(v-1)\cdots(v-n+2) a_{n-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

которое равносильно характеристическому уравнению. Так как общее решение однородного стационарного уравнения имеет вид

$$x(\tau) = \sum_{l=1}^{r} \left(Q_l(\tau) \cos \mu_l \tau + R_l(\tau) \sin \mu_l \tau \right) e^{\lambda_l \tau} + \sum_{j=2r+1}^{m} P_j(\tau) e^{\lambda_j \tau},$$

где корень характеристического уравнения v_k имеет кратность d_k, $k = \overline{1, m}$, а P_k, Q_k, R_k – полиномы степени $d_k - 1$ и $\nu_{2l-1} = \lambda_l + i\mu_l$, $\nu_{2l} = \lambda_l - i\mu_l$, $l = \overline{1, r}$, $\nu_j = \lambda_j$, $j = 2r + 1, \ldots, m$, то общее решение однородного уравнения Эйлера представимо в виде

$$x(t) = \sum_{l=1}^{r} \left(Q_l(\ln|t-\alpha|) \cos \mu_l \ln|t-\alpha| + R_l(\ln|t-\alpha|) \sin \mu_l \ln|t-a| \right) |t-\alpha|^{\lambda_l} + \sum_{j=2r+1}^{m} P_j(\ln|t-\alpha|) |t-\alpha|^{\lambda_j}.$$

Задача 38.1. Проинтегрировать уравнения Эйлера:

а) $t^3D^3x - 3t^2D^2x + 6tDx - 6x = 0$;

б) $t^2D^2x - tDx = t\ln t$;

в) $(t-2)^2D^2x - 3(t-2)Dx + 4x = t$.

Р е ш е н и е. а) Так как $\alpha = 0$, то положим $I = I_+ = (0, +\infty)$. Произведя замену $t = e^{\tau}$, получим $D_\tau^3 x - 3D_\tau^2 x + {}$ $+ 2D_\tau x - 3D_\tau^2 x + 3D_\tau x + 6D_\tau x - 6x = 0$ или $D_\tau^3 x - 6D_\tau^2 x + 11D_\tau x - 6x = 0$.

Поскольку характеристическое уравнение $\nu^3 - 6\nu^2 + 11\nu - 6 = 0$ имеет корни $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 3$, то $x(\tau) = C_1e^{\tau} + {}$ $+ C_2e^{2\tau} + C_3e^{3\tau}$ – общее решение полученного стационарного уравнения. Произведя обратную замену $\tau = \ln t$, получим общее решение $x(t) = C_1t + C_2t^2 + C_3t^3$ рассматриваемого уравнения Эйлера.

б) Так как $\alpha = 0$ и функция $f(t) = t\ln t$ определена при $t > 0$, то $I = I_+ = (0, +\infty)$. Произведя замену $t = e^{\tau}$, получим следующее неоднородное стационарное уравнение с квазиполиномом в правой части: $D_\tau^2 x - 2D_\tau x = \tau e^{\tau}$. Корни характеристического уравнения $\nu^2 - 2\nu = 0$ равны 0 и 2. Общее решение однородного стационарного уравнения $x_{\text{оо}}(\tau) = {}$ $= C_1 + C_2e^{2\tau}$. Поскольку контрольное число правой части $\gamma = 1$, то частное решение неоднородного стационарного уравнения ищем в виде $x_{\text{чн}}(\tau) = (A\tau + B)e^{\tau}$. После подстановки $x_{\text{чн}}(\tau)$ в неоднородное стационарное уравнение получаем $A = -1$, $B = 0$. Общее решение неоднородного стационарного уравнения имеет вид $x(\tau) = C_1 + C_2e^{2\tau} - \tau e^{\tau}$. Следовательно, общее решение уравнения Эйлера представимо в виде $x(t) = C_1 + C_2t^2 - t\ln t$.

в) $\alpha = 2$, функция $f(t) = t$ определена для всех $t \in \mathbb{R}$. Положим $I = I_-$, т.е. произведем замену $t = 2 - e^{\tau}$. Тогда $Dx = D_\tau x \dfrac{d\tau}{dt} = -e^{-\tau} D_\tau x$, $D^2 x = D_\tau \left(-e^{-\tau} D_\tau x\right) \dfrac{d\tau}{dt} = \left(D_\tau^2 x - D_\tau x\right) e^{-2\tau}$.

Поэтому $D_\tau^2 x - 4D_\tau x + 4x = 2 - e^{\tau}$. Так как корень характеристического уравнения $\nu = 2$, $d = 2$ и $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ – контрольные числа правой части, то $x(\tau) = (C_1 + C_2\tau)e^{2\tau} - e^{\tau} + 0{,}5$. Учитывая, что $\tau = \ln(2 - t)$, имеем $x(t) = (t - 2)^2 \times \times (C_1 + C_2 \ln(2 - t)) + t - 1{,}5$ – общее решение рассматриваемого уравнения Эйлера.

Задача 38.2. Построить общие решения уравнений Эйлера:
а) $t^2D^2x + tDx - x = 0$, $t \in I = I_+$;
б) $t^2D^2x + 4tDx + 9x/4 = 0$, $t \in I_+$;
в) $t^2D^2x + tDx + x = 0$, $t \in I_-$.

Р е ш е н и е. а) Положим $x = t^{\nu}$, тогда $Dx = \nu t^{\nu-1}$, $D^2 x = \nu(\nu-1)t^{\nu-2}$. Подставим в уравнение вместо x, Dx, D^2x их выражения через t, получим $t^2\nu(\nu-1)t^{\nu-2} + t\nu t^{\nu-1} - t^{\nu} = 0$, т.е. $\nu(\nu-1) + \nu - 1 = 0$, откуда $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = -1$. Тогда общее решение заданного уравнения запишется в виде $x(t) = C_1 t + C_2 t^{-1}$.

б) Поскольку $\nu(\nu-1) + 4\nu + 9/4 = 0$ – определяющее уравнение и $\nu = -3/2$, $d = 2$ – его корень, то общее решение заданного уравнения имеет вид $x(t) = (C_1 + C_2 \ln t)t^{-3/2}$.

в) Определяющее уравнение $\nu(\nu-1) + \nu + 1 = 0$ имеет корни $\nu_1 = i$, $\nu_2 = -i$. Общее решение исходного уравнения $x(t) = C_1 \cos \ln(-t) + C_2 \sin \ln(-t)$.

Построить общее решение уравнений Эйлера:

1072. $(t + 2)^3D^3x + 3(t + 2)^2D^2x - 6(t + 2)Dx - 6x = 0$.

1073. $t^2D^2x + tDx + 2x = 2\cos \ln t + \sin \ln t$.

1074. $(2t + 1)^2x'' + 8(2t + 1)x' + 8x = 4t + 2$.

1075. $t^2D^2x - 7tDx + 15x = 0$.

1076. $t^2D^2x - 2tDx + 2x = 0$.

1077. $t^2D^2x - tDx + 2x = 0$.

1078. $t^2D^2x - 5tDx + 13x = 0$.

1079. $t^3x''' + 2t^2x'' + 2x = 0$.

1080. $t^2D^3x = 2Dx$.

1081. $t^2D^2x - 3tDx + 3x = 2t^3$.

1082. $t^2x'' + tx' + 4x = 2\cos \ln t + \sin \ln t$.

1083. $(2t + 3)^3D^3x + 3(2t + 3)Dx - 6x = 0$.

1084. $(2t + 1)^2D^3x + 2(2t + 1)D^2x + Dx = 0$.

1085. $(t + 1)^3D^2x + 3(t + 1)^2Dx + (t + 1)x = 6 \ln(t + 1)$.

1086. $t^2D^2x - 2x = t + 3 \ln t$.

1087. $(t - 2)^2D^2x - 3(t - 2)Dx + 4t = t$.

1088. $t^2D^2x - 9tDx + 21x = 0$.

1089. $t^2x'' - tx' - x = 0$.

1090. $t^2D^2x - tDx + 5x = t\sin(2\ln t) + \cos \ln t$.

Решить задачи Коши:

1091. $t^2D^2x - tDx - 3x = 0$, $x|_{t=1} = 0$, $Dx|_{t=1} = 2$.

1092. $t^2D^2x - 3tDx + 4x = 0$, $x|_{t=e} = e^2$, $Dx|_{t=e} = e$.

1093. $t^2x'' + tx' + 4x = 4 \sin \ln t^2$, $x|_{t=1} = 2$, $Dx|_{t=1} = 1$.

1094. $(t - 1)^2D^2x - 2(t - 1)Dx + 2x = 0$, $x|_{t=2} = 1$, $Dx|_{t=2} = 2$.

1095. $t^2x'' + tx' + 3x = t^3$, $x|_{t=-1} = 1$, $Dx|_{t=-1} = 1$.

1096. $(t + 1)^3D^3x - 3(t + 1)^2D^2x + 4(t + 1)Dx - 4x = 0$, $x|_{t=0} = 0$, $Dx|_{t=0} = 0$, $D^2x|_{t=0} = 1$.

1097. Проинтегрировать уравнение $t^2D^2x - \dfrac{t^2}{2x}\left(Dx\right)^2 + 4tDx + 4x = 0$, полагая $u = \sqrt{x}$.

1098. Сфера радиусом R окружена оболочкой, образованной концентрическими сферами, радиусы которых R_1 и R_2. Потенциал поля U в точке, расположенной на расстоянии r от центра, удовлетворяет уравнению $\dfrac{d^2U}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{dU}{dr}=0$. Найти потенциал U, если он принимает значение U_1 на сфере радиусом R и U_2 на внутренней поверхности оболочки.

1099. Круговой цилиндр радиусом R окружен оболочкой, образованной цилиндрами, радиусы которых R_1 и R_2, а длины одинаковы. Потенциал поля U в точке, расположенной на расстоянии r от оси цилиндра, удовлетворяет уравнению $\dfrac{d^2U}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dU}{dr}=0$. Найти потенциал U, если он принимает значение U_1 на цилиндре радиусом R и U_2 на внутренней стороне оболочки.

1100. Жидкость течет по трубопроводу, длина которого велика по сравнению с радиусом R поперечного сечения. Разность давлений на концах трубопровода равна $p(p>0)$. Скорость течения жидкости $v(r)$ (здесь r – расстояние от частицы жидкости до оси трубопровода) описывается дифференциальным уравнением $\dfrac{d^2v}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dv}{dr}=-\dfrac{p}{k}$, где k – некоторая заданная постоянная. Найти скорость течения жидкости, если $v|_{r=R}=0$.

1101. Толстостенная труба, внутренний радиус которой r_0, а внешний r_1, искривляется под действием нагрузки p. Считая трубу бесконечно длинной, полагаем, что радиальное смещение $u=u(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $r^2\dfrac{d^2u}{dr^2}+r\dfrac{du}{dr}-u=0$. Найти радиальное смещение при условии, что труба находится под действием постоянной внутренней нагрузки p. В этом случае смещение удовлетворяет следующим граничным условиям: $\sigma_r=0$ при $r=r_1$ и $\sigma_r+p=0$ при $r=r_0$, где σ_r – радиальное напряжение, определяемое следующим образом: $\sigma_r=\dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\mu\dfrac{u}{r}+\dfrac{du}{dr}\right)$, где E – модуль упругости; μ – коэффициент поперечного (радиального) растяжения.

1102. В условиях задачи 1101 найти радиальное смещение $u(r)$, если труба находится под действием постоянной нагрузки p на наружную стенку. В этом случае $\sigma_r=0$ при $r=r_0$ и $\sigma_r+p=0$ при $r=r_1$.

Контрольная работа № 5

Вариант I

1. Проинтегрировать уравнение $t(4t-1)D^2x+2(2t-1)Dx-4x=6t(2t-1)$ с известным частным решением $x=1/t$, $t>0$, однородного уравнения, соответствующего данному.

2. Проинтегрировать уравнение $t^2D^2x+tDx-x=t$.

Вариант II

1. Проинтегрировать уравнение $(1+t^2)D^2x+tDx-x+1=0$ с известным частным решением $x=t$ однородного уравнения, соответствующего данному.

2. Проинтегрировать уравнение $t^3D^2x+4t^2Dx+2tx=1$.

Тестовые задания

1. Найти решение задачи Коши $(x^2-1)\,y'+2\,xy^2=0,\ y\big|_{x=1}=0.$

Значение решения $y=y(x)$ при $x=0{,}5$ равно:

а) $\dfrac{2}{1+\ln 0{,}75}$; б) $\dfrac{1}{1+\ln 0{,}75}$; в) $\dfrac{1}{\ln 0{,}75-1}$; г) $\dfrac{1}{2+\ln 0{,}75}$; д) $\dfrac{2}{\ln 0{,}75-1}$.

2. Понизить порядок уравнения $yy''+y'\sin\dfrac{y''}{y'}=2(y')^2$. Тип полученного уравнения указан в варианте: а) Клеро; б) Лагранжа; в) неполное.

3. Производная $y'(x)$ особого решения $y(x)$ уравнения $y'=xy''-(y'')^2$ при $x=1$ равна: а) 0,75; б) 0,25; в) 1,25; г) –0,25.

4. Значения решения $x(t)$ и его производной $D\,x(t)$ уравнения $(t+1)^2D^2x-7(t+1)\,Dx+15x=$ $=\sin\ln(t+1)$, вычисленные при $t=0$, приведены в:

а) $x(0)=C_1+C_2+\dfrac{2}{65},\quad Dx(0)=3C_1+5C_2+\dfrac{7}{130}$;

б) $x(0)=C_1+C_2+\dfrac{7}{130},\quad Dx(0)=3C_1+5C_2-\dfrac{2}{65}$;

в) $x(0)=C_1+C_2+\dfrac{11}{30},\quad Dx(0)=3C_1+5C_2+\dfrac{3}{130}$;

г) $x(0)=C_1+C_2+\dfrac{3}{26},\ Dx(0)=3C_1+5C_2+\dfrac{1}{13}$, где C_1, C_2 – произвольные действительные постоянные.

XII. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

39. Голоморфные решения

Пусть I_0 – интервал $(t_0-R,\ t_0+R)$ или $(-\infty,+\infty)$, если $R=+\infty$. Функция $f(t)$ называется *голоморфной на промежутке* I_0, если она задана на I_0 и представима в виде сходящегося степенного ряда

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t-t_0)^k\quad \forall\, t\in I_0.$$

Пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k(t-t_0)^k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}B_k(t-t_0)^k$ – сходящиеся на I_0 степенные ряды. Тогда на промежутке I_0 имеют место следующие соотношения:

1) $\alpha\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k(t-t_0)^k+\beta\sum\limits_{k=0}^{\infty}B_k(t-t_0)^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\big(\alpha A_k+\beta B_k\big)(t-t_0)^k,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k(t-t_0)^k\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}B_k(t-t_0)^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_k(t-t_0)^k$, где $C_k=\sum\limits_{i+j=k}A_iB_j=A_0B_k+A_1B_{k-1}+\ldots+A_kB_0=$ $=\sum\limits_{j=0}^{k}A_jB_{k-j}$;

3) $D\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k (t-t_0)^k\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)A_{k+1}(t-t_0)^k$;

4) $D^j\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k (t-t_0)^k\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+j)(k+j-1)\cdots(k+1)A_{k+j}(t-t_0)^k$.

Линейное уравнение

$$D^n x + p_{n-1}(t)D^{n-1}x + ... + p_1(t)Dx + p_0(t)x = f(t),\ t \in I_0,$$

где коэффициенты $p_j(t),\ j=\overline{0,n-1}$, и неоднородность $f(t)$ являются голоморфными функциями на I_0: $p_j(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_{jk}(t-t_0)^k$, $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(t-t_0)^k$, называется *линейным уравнением с голоморфными коэффициентами.*

Теорема 39.1 (*о существовании голоморфного решения*). *Задача Коши*

$$D^n x + p_{n-1}(t)D^{n-1}x + ... + p_1(t)Dx + p_0(t)x = f(t), \quad t \in I_0, \quad D^k x\Big|_{t=t_0} = \xi_k, \quad k = \overline{0,n-1},$$

где $p_j(t),\ j=\overline{0,n-1}$, *и* $f(t)$ *– голоморфные на* I_0 *функции, при любых* $\xi_k \in \mathbb{R}$, $k=\overline{0,n-1}$, *имеет единственное голоморфное на* I_0 *решение*

$$x(t) = \xi_0 + \xi_1\frac{(t-t_0)}{1!} + ... + \xi_{n-1}\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=n}^{\infty} A_k(t-t_0)^k.$$

Коэффициенты A_n, A_{n+1}, ... однозначно выражаются через $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}$.

Таким образом, решение $x(t)$ представимо степенным рядом, отрезок которого дает приближенное решение задачи Коши.

Общее решение линейного уравнения с голоморфными на I_0 коэффициентами доставляет формула

$$x(t) = C_0 + C_1\frac{(t-t_0)}{1!} + ... + C_{n-1}\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=n}^{\infty} A_k(t-t_0)^k,$$

где C_0, C_1, ..., C_{n-1} – произвольные действительные постоянные, через которые однозначно выражаются коэффициенты A_n, A_{n+1}, ...

Зная структуру общего решения линейного уравнения с голоморфными коэффициентами, можно строить решение таких уравнений, используя метод неопределенных коэффициентов.

Если ряд, представляющий решение задачи Коши

$$D^n x + p_{n-1}(t)D^{n-1}x + ... + p_1(t)Dx + p_0(t)x = 0, \quad D^k x\Big|_{t=t_0} = \xi_k,\ k = \overline{0,n-1}, \tag{39.1}$$

для однородного линейного уравнения с голоморфными на I_0 коэффициентами удается просуммировать – выразить его сумму через элементарные функции, то в этом случае можно понизить порядок уравнения на единицу с помощью подстановки

$$x(t) = x_1(t)\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau, \tag{39.2}$$

где $x_1(t)$ – решение рассматриваемой задачи Коши, а $u(t)$ – новая неизвестная функция.

Для построения общего решения однородного линейного уравнения второго порядка $D^2x = p(t)Dx + q(t)x$ с голоморфными на I_0 коэффициентами строят в виде степенных рядов нормированный в точке $t = t_0$ базис пространства решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Для этого ищут решения следующих задач Коши:

а) $D^2x = p(t)Dx + q(t)x, \quad x\big|_{t=t_0} = 1, \quad Dx\big|_{t=t_0} = 0 \Rightarrow x_1(t) = 1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} A_k (t - t_0)^k;$

б) $D^2x = p(t)Dx + q(t)x, \quad x\big|_{t=t_0} = 0, \quad Dx\big|_{t=t_0} = 1 \Rightarrow x_2(t) = t + \sum\limits_{k=2}^{\infty} B_k (t - t_0)^k.$

Тогда $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$, где C_1, C_2 – произвольные действительные постоянные, есть общее решение рассматриваемого уравнения. Если ряд, представляющий решение задачи Коши для однородного уравнения, удается просуммировать, т.е. выразить его сумму через элементарные функции, то в этом случае рассматриваемое уравнение можно свести к уравнению первого порядка, используя формулу (39.2). При этом второе линейно независимое частное решение $x_2(t)$ определяется по формуле

$$x_2(t) = x_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} e^{\int\limits_{t_0}^{\tau} p(\sigma) d\sigma} x_1^{-2}(\tau) d\tau. \tag{39.3}$$

Задача 39.1. Построить в виде степенного ряда решение задачи Коши

$$D^2x = p(t)Dx + q(t)x + f(t), \quad x\big|_{t=t_0} = \xi_0, \quad Dx\big|_{t=t_0} = \xi_1, \tag{39.4}$$

где $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^k$, $q(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k (t - t_0)^k$, $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k (t - t_0)^k$.

Просуммировать полученный ряд, если это возможно, и, используя формулу (39.3), найти $x_2(t)$. Записать общее решение.

Алгоритм решения.

- Используя теорему о существовании голоморфного решения для $n = 2$, записать решение задачи Коши в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (t - t_0)^k, \tag{39.5}$$

где $A_0 = \xi_0, A_1 = \xi_1$.

- Найти Dx и D^2x, используя правило дифференцирования степенных рядов:

$$Dx = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) A_{k+1} (t - t_0)^k, \qquad D^2x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) A_{k+2} (t - t_0)^k.$$

- Подставить выражения для $x(t), Dx(t), D^2x(t), p(t), q(t), f(t)$ в виде степенных рядов в уравнение задачи Коши (39.4):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) A_{k+2} (t - t_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) A_{k+1} (t - t_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} q_k (t - t_0)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k A_k (t - t_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} f_k (t - t_0)^k.$$

- Выполнить требуемые действия в полученном выражении:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) A_{k+2} (t - t_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \left(p_i (j+1) A_{j+1} + j q_i A_j \right) + f_k \right) (t - t_0)^k.$$

• Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях разности $(t-t_0)$:

$$(k+2)(k+1)A_{k+2}=\sum_{i+j=k}\Big(p_i(j+1)A_{j+1}+jq_iA_j\Big)+f_k,\ k=0,1,2,\ \dots\ . \tag{39.6}$$

Эту зависимость можно записать и в таком виде:

$$(k+2)(k+1)A_{k+2}=\sum_{j=0}^{k}\Big(p_{k-j}(j+1)A_{j+1}+jq_{k-j}A_j\Big)+f_k,\quad k=0,1,2,\ \dots\ . \tag{39.7}$$

• Из полученной бесконечной системы выразить коэффициенты $A_2,\ A_3,\ \ A_4,\dots$ через ξ_0 и ξ_1 или получить рекуррентную формулу, связывающую указанные коэффициенты.

• Найденные коэффициенты $A_2,\ A_3,\ \ A_4,\dots$ подставить в (39.5). Это и есть решение задачи Коши (39.4).

• Просуммировать полученный ряд, если это возможно. Найти второе линейно независимое частное решение $x_2(t)$ по формуле (39.3).

• Записать общее решение $x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$, $C_1, C_2\in\mathbb{R}$.

Задание 39.1.1. Построить решение задачи Коши $D^2x=-tx,\ \ x\big|_{t=0}=1,\ Dx\big|_{t=0}=0,$ в виде степенного ряда.

Р е ш е н и е.

$\xi\_0 := 1$ $\quad \xi\_1 := 0$ $\quad t\_0 := 0$ $\quad N \equiv 15$

$ff(t) := 0$ $\quad fp(t) := 0$ $\quad fq(t) := -t$ $\quad M := \frac{N}{3}$

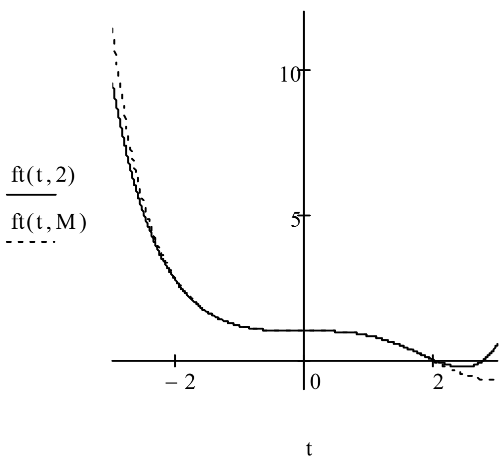
$k := 0..N$ $\quad f_k := 0$ $\quad p_k := 0$ $\quad q_k := 0$ $\quad q_1 := -1$

$A_0 := \xi\_0$ $\quad A_1 := \xi\_1$ $\quad A_2 := 0$

$k := 1..N-2$ $\quad A_{k+2} := \dfrac{q_1\cdot A_{k-1}}{(k+2)\cdot(k+1)}$

$k := 0..M$ $\quad B_k := A_{3\cdot k}$

$ft(t,n) := \sum_{k=0}^{n}\left(B_k\cdot t^{3k}\right)$



A =

	0
0	1
1	0
2	0
3	-0.16666667
4	0
5	0
6	0.00555556
7	0
8	0
9	-0.00007716
10	0
11	0
12	0.00000058
13	0
14	0
15	$-2.7835676\cdot10^{-9}$

$$Cf(n) := \prod_{m=1}^{n} [3\cdot m\cdot(3\cdot m-1)]$$

$$k := 1..5$$

$6 \text{ factor} \rightarrow 2\cdot 3$

$180 \text{ factor} \rightarrow 2^2\cdot 3^2\cdot 5$

$12960 \text{ factor} \rightarrow 2^5\cdot 3^4\cdot 5$

$1710720 \text{ factor} \rightarrow 2^7\cdot 3^5\cdot 5\cdot 11$

$359251200 \text{ factor} \rightarrow 2^8\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$

$Cf(k) =$

6
180
12960
1710720
359251200

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{180} \\ -\frac{1}{12960} \\ \frac{1}{1710720} \\ -\frac{1}{359251200} \end{pmatrix}$$

$$f(t,n) := 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k\cdot t^{3\cdot k}}{\prod_{m=1}^{k} [3\cdot m\cdot(3\cdot m-1)]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m\cdot t^{3\cdot m}}{\prod_{k=1}^{m} [3\cdot k\cdot(3\cdot k-1)]} \rightarrow \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m\cdot t^{3\cdot m}}{9^m\cdot m!\cdot\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}$$

$$x(t) = 1 + \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m\cdot t^{3\cdot m}}{9^m\cdot m!\cdot\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}$$

Задание 39.1.2. Построить нормированный при $t=0$ базис пространства решений в виде степенных рядов по степеням t и записать общее решение уравнения $D^2x = -tDx - x$.

Р е ш е н и е.

$\xi\_0 := 1$ $\quad \xi\_1 := 0$ $\quad t\_0 := 0$ $\quad N \equiv 12$

$ff(t) := 0$ $\quad fp(t) := -t$ $\quad fq(t) := -1$

$k := 0..N$ $\quad f_k := 0$ $\quad p_1 := -1$ $\quad q_0 := -1$

$p_k := 0$

$q_k := 0$

$A_0 := \xi\_0 \qquad A_1 := \xi\_1 \qquad A_2 := \frac{1}{2}$

$k := 1 .. N - 2$

$$A_{k+2} := \frac{p_1 \cdot (k) \cdot A_k + q_0 \cdot A_k}{(k+2)\cdot(k+1)}$$

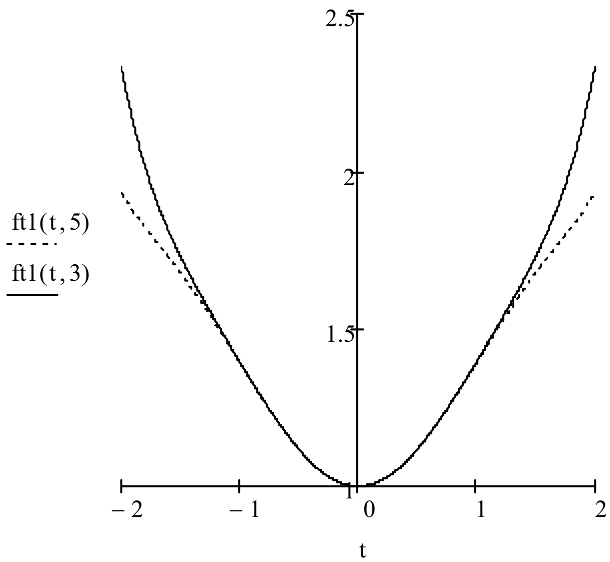
$k := 0 .. \frac{N}{2}$

$$B_k := A_{2 \cdot k}$$

$$ft1(t,n) := 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(B_k \cdot t^{2k}\right)$$

$A =$

	0
0	1
1	0
2	0.5
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0



$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{48} \\ -\frac{1}{384} \\ \frac{1}{3840} \\ -\frac{1}{46080} \end{pmatrix}$$

$8 \text{ factor} \rightarrow 2^3 \qquad 8 = 2 \cdot 4$

$48 \text{ factor} \rightarrow 2^4 \cdot 3 \qquad 48 = 2 \cdot 4 \cdot 6$

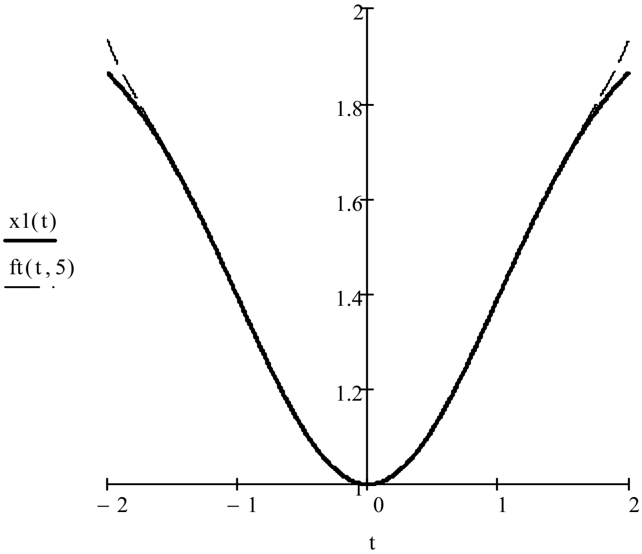
$384 \text{ factor} \rightarrow 2^7 \cdot 3 \qquad 384 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$

$3840 \text{ factor} \rightarrow 2^8 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 3840 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$

$46080 \text{ factor} \rightarrow 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \qquad 46080 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12$

$$ft(t,n) := 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(-1)^{k-1}}{2^k \cdot k!} \cdot t^{2k}\right]$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(-1)^{k-1}}{2^k \cdot k!} \cdot t^{2k} \right] \to 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} \qquad x1(t) := 2 - e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2}$$



$\xi\_0 := 0 \qquad \xi\_1 := 1 \qquad t\_0 := 0$

$ff(t) := 0 \qquad fp(t) := -t \qquad fq(t) := -1$

$k := 0..N \qquad f_k := 0 \qquad p_k := 0 \qquad q_k := 0$

$p_1 := -1 \qquad q_0 := -1$

$A_0 := \xi\_0 \qquad A_1 := \xi\_1$

$$k := 0..N-2 \qquad A_{k+2} := \frac{p_1 \cdot (k) \cdot A_k + q_0 \cdot A_k}{(k+2) \cdot (k+1)}$$

$$ft2(t,n) := \left[\sum_{k=0}^{n} \left(A_k \cdot t^k \right) \right]$$

$$A \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{15} \\ 0 \\ -\frac{1}{105} \\ 0 \\ \frac{1}{945} \\ 0 \\ -\frac{1}{10395} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k := 0..\frac{N-2}{2} \qquad B_k := A_{2 \cdot k+1}$$

$$ft2(t,n) := \left[\sum_{k=0}^{n} \left(B_k \cdot t^{2k+1} \right) \right]$$

$$B_k \to \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{105} \\ \frac{1}{945} \\ -\frac{1}{10395} \end{pmatrix}$$

$15 = 3 \cdot 5$

$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

$945 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$

$10395 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$

$$ft2(t,n) := \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot t^{2k+1}}{(2\cdot k+1)!!}\right]$$

$$x2(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot t^{2k+1}}{(2\cdot k+1)!!} \qquad x1(t) := 2 - e^{-\frac{1}{2}\cdot t^2}$$

$$x(t) = C1 \cdot x1(t) + C2 \cdot x2(t)$$

Задание 39.1.3. Построить в виде степенного ряда решение задачи Коши $D^2x = 2tDx - 2x$, $x|_{t=0} = 0$, $Dx|_{t=0} = 2$. Просуммировать этот ряд, найти второе линейно независимое частное решение $x_2(t)$ по формуле (39.3). Построить общее решение уравнения $D^2x = 2tDx - 2x$.

Р е ш е н и е.

$$\xi\_0 := 0 \qquad \xi\_1 := 2 \qquad t\_0 := 0 \qquad N := 5$$

$$ff(t) := 0 \qquad fp(t) := 2\cdot t \qquad fq(t) := -2$$

$$k := 0..N \qquad f_k := 0 \qquad p_k := 0 \qquad q_k := 0$$

$$p_1 := 2 \qquad q_0 := -2$$

$$fa(t,n) := \sum_{k=0}^{n} \left(A_k \cdot t^k\right)$$

$$A_0 := \xi\_0 \qquad A_1 := \xi\_1$$

$$k := 0..N-2 \qquad A_{k+2} := \frac{p_1 \cdot k \cdot A_k + q_0 \cdot A_k}{(k+2)\cdot(k+1)} \qquad A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x1(t) := 2 \cdot t$$

$$P(t) := -2 \cdot t$$

$$Q(t) := 2$$

$$d(\tau) := e^{\left(-\int_{t\_0}^{\tau} P(\sigma)\, d\sigma\right)} \rightarrow e^{\tau^2} \qquad H(t) := \int_1^t \frac{e^{\tau^2}}{4\tau^2}\, d\tau$$

$$x(t) = C1 \cdot x(t) + C2 \cdot x1(t) \cdot H(t)$$

Задание 39.1.4. Построить в виде степенного ряда решение задачи Коши $D^2x=-2tDx-2e^{-t^2}$, $x|_{t=0}=1$, $Dx|_{t=0}=0$, или получить рекуррентную формулу для коэффициентов ряда.

Р е ш е н и е.

Задача Коши: $D^2x + 2t\cdot Dx = -2\cdot e^{-t^2}$ $\quad t_0 = 0$

$x(t_0) = 1 \qquad Dx(t_0) = 0$

$\xi\_0 := 1 \qquad \xi\_1 := 0 \qquad t\_0 := 0$

$f(t) := -2\cdot e^{-t^2} \qquad p(t) = -2t \qquad q(t) = 0$

$$x(t) := \left[\xi\_0 + \xi\_1\cdot t + \sum_{k=2}^{\infty}\left(A(k)\cdot t^k\right)\right]$$

$$Dx(t) := \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty}\left(k\cdot t^{k-1}\cdot A(k)\right)$$

$$D2x(t) := \frac{d^2}{dt^2}x(t) \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty}\left[k\cdot t^{k-2}\cdot A(k)\cdot(k-1)\right]$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[k\cdot t^{k-2}\cdot A(k)\cdot(k-1)\right] - p(t)\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left(k\cdot t^{k-1}\cdot A(k)\right) = f(t)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[(m+2)\cdot t^m\cdot A(m+2)\cdot(m+1)\right] + \sum_{k=2}^{\infty}\left(2\cdot k\cdot t^k\cdot A(k)\right) = f(t)$$

$$2\cdot A(2) + 6\cdot A(3)\cdot t + \left[\sum_{k=2}^{\infty}\left[[(k+2)\cdot A(k+2)\cdot(k+1) + 2\cdot k\cdot A(k)]\cdot t^k\right]\right] = f(t)$$

$$f(t)\ \text{series}, 16 \rightarrow -2 + 2\cdot t^2 - t^4 + \frac{t^6}{3} - \frac{t^8}{12} + \frac{t^{10}}{60} - \frac{t^{12}}{360} + \frac{t^{14}}{2520}$$

$A(2) = -1 \qquad A(3) = 0$

$$f(t) = -2\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\cdot t^{2m}}{m!}$$

Коэффициенты при t^{2m}:

$$\frac{-2\cdot(-1)^m}{m!} = (2m+2)\cdot(2m+1)\cdot A(2m+2) + 2\cdot(2m)\cdot A(2m)$$

$A(2) = -1 \qquad m \geq 1$

$$A(2m+2) = \frac{-2m}{(m+1)\cdot(2m+1)}\cdot A(2m) + \frac{(-1)^{m+1}}{m!\cdot[(m+1)\cdot(2m+1)]}$$

$A(2\cdot m+1) = 0$

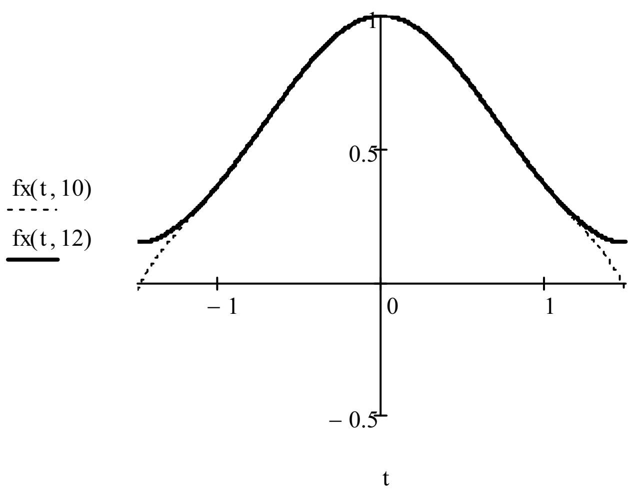
$A_0 := \xi\_0 \qquad A_1 := \xi\_1 \qquad A_2 := -1$

$m := 1..5 \qquad A_{2\cdot m+1} := 0$

$$A_{2m+2} := \frac{-2m}{(m+1)\cdot(2m+1)}\cdot A_{2m} + \frac{(-1)^{m+1}}{m!\cdot[(m+1)\cdot(2m+1)]}$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{24} \\ 0 \\ -\frac{1}{120} \\ 0 \\ \frac{1}{720} \end{pmatrix}$$

$$fx(t,n) := \sum_{k=0}^{n} \left(A_k\cdot t^k\right)$$



К о м м е н т а р и й. Получили, что $x(t) = 1 - t^2 + \frac{1}{2!}t^4 - \frac{1}{3!}t^6 + \frac{1}{4!}t^8 - \cdots$. Это напоминает разложение для e^{-t^2}. Так как функция $x(t) = e^{-t^2}$ удовлетворяет начальным условиям и является решением уравнения, то $x(t) = e^{-t^2}$ – решение задачи Коши.

Построить нормированный при $t = 0$ базис пространства решений в виде рядов по степеням t и записать общее решение уравнений:

1103. $(1 - t^2)D^2x - 4tDx - 2x = 0.$

1104. $x'' - tx' - 2x = 0.$

1105. $D^2x + t^2x = 0.$

1106. $(1 - t)x'' + x = 0.$

1107. $D^2x - t^2x = 0.$

1107.1. $D^2x - tDx + x = 0.$

1107.2. $D^2x + tx = 0.$

1107.3. $D^2x - tx = 0.$

Построить решение задач Коши в виде степенного ряда:

1108. $(2t - t^2)D^2x + (t^2 - 2)Dx + 2(1 - t)x = 0,\quad x|_{t=1} = 1,\quad Dx|_{t=1} = 1.$

1109. $x'' - tx' + x - 1 = 0,\quad x|_{t=0} = 0,\quad x'|_{t=0} = 0.$

1110. $D^2x - 2Dx + x = 0,\quad x|_{t=0} = 0,\quad Dx|_{t=0} = 1.$

1111. $D^2x - tx = 0,\quad x|_{t=0} = 0,\quad Dx|_{t=0} = 1.$

1112. $x'' + tx = 0,\quad x|_{t=0} = 0,\quad x'|_{t=0} = 1.$

1113. $D^2x + tDx + x = 0,\quad x|_{t=0} = 1,\quad Dx|_{t=0} = 0.$

1113.1. $D^2x = tDx - x + 1 - \cos t,\ \ x\big|_{t=0} = 0,\ Dx\big|_{t=0} = 1.$

1113.2. $D^2x - tx = 0,\ \ x\big|_{t=0} = 1,\ Dx\big|_{t=0} = 0.$

1113.3. $D^2x + 4t^2x = -2\sin t^2,\ \ x\big|_{t=0} = 1,\ Dx\big|_{t=0} = 0.$

1113.4. $D^2x + 2tDx - 2x = -4e^{-t^2},\ \ x\big|_{t=0} = 1,\ Dx\big|_{t=0} = 0.$

1114. Найти разложение решения $x(t)$ задачи Коши $Dx - 2tx = 1$, $x|_{t=0} = 0$, по степеням t и показать, что $x(t) = e^{t^2}\int\limits_0^t e^{-\tau 2}d\tau.$

1115. Показать, что функция $x(t) = (\arcsin t)^2$ является решением задачи Коши $(1 - t^2)x'' - tx' = 2$, $x|_{t=0} = 0$, $x'|_{t=0} = 0$, и найти разложение этой функции в степенной ряд.

Построить в виде степенного ряда решения задач Коши. Просуммировать этот ряд. Найти второе линейно независимое решение $x_2(t)$. Построить общее решение уравнений:

1116. $D^2x - 2tDx + 2x = 0,\quad x|_{t=0} = 0,\quad Dx|_{t=0} = 2.$

1117. $(1 + t)x'' - tx' - x = 0,\ x|_{t=0} = 1,\ x'|_{t=0} = 1.$

1118. $(1 - t^2)D^2x - 2tDx + 2x = 0,\quad x|_{t=0} = 0,\quad Dx|_{t=0} = 1.$

1119. $(1 - t)x'' + tx' - x = 0,\quad x|_{t=0} = 1,\quad x'|_{t=0} = 1.$

1119.1. $(1 + 2t)D^2x - 2tDx - x = 0,\quad x\big|_{t=0} = 1,\ Dx\big|_{t=0} = 1.$

1119.2. $(1 - 2t)D^2x + 2tDx - x = 0,\quad x\big|_{t=0} = 1,\ Dx\big|_{t=0} = 1.$

1119.3. $(t - 2)D^2x - tDx + 2x = 0,\quad x\big|_{t=0} = 1,\ Dx\big|_{t=0} = 1.$

40. Обобщенные степенные ряды. Уравнение Бесселя

Формальные решения. *Обобщенным степенным рядом* около $t = 0$ называется ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\rho}$, где ρ – некоторое постоянное число, причем либо $a_0 \neq 0$, либо $a_k = 0$ для всех k.

Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ имеет радиус сходимости $R > 0$, то обобщенный степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\rho}$ сходится при $0 < t < R$ (если $\rho \ge 0$, то сходится и при $t = 0$).

Наряду с обобщенными степенными рядами рассматриваются и *формальные обобщенные степенные ряды*, для которых не ставится вопрос о сходимости.

Для линейных дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются обобщенные степенные ряды, ставится вопрос о построении формальных решений в виде обобщенных степенных рядов. Для построения таких решений формальный обобщенный степенной ряд с неопределенным параметром ρ и неопределенными коэффициентами a_k подставляют в уравнения и определяют (если это возможно) величины ρ и a_k из бесконечной системы алгебраических уравнений. Если полученный формальный обобщенный степенной ряд сходится, то он и будет решением дифференциального уравнения.

Задача 40.1. Построить в виде обобщенного степенного ряда около $t = 0$ общее решение уравнения $D^2x + \frac{3t-2t^2}{2t^2}Dx - \frac{t+1}{2t^2}x = 0.$

Р е ш е н и е. Точка $t = 0$ является особой точкой данного уравнения. Решение уравнения ищем в виде формального обобщенного степенного ряда

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\rho}.$$

Поскольку $Dx = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) a_k t^{k+\rho-1}$, $D^2x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) a_k t^{k+\rho-2}$, то после подстановки в исходное уравнение будем иметь

$$2\sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) a_k t^{k+\rho} + 3\sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) a_k t^{k+\rho} - 2\sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) a_k t^{k+\rho+1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\rho+1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\rho} = 0$$

или $\sum_{k=0}^{\infty} \left(2k^2 + 4k\rho + 2\rho^2 + k + \rho - 1\right) a_k t^{k+\rho} - \sum_{k=0}^{\infty} (2k + 2\rho + 1) a_k t^{k+\rho+1} = 0.$

Приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях t, получим бесконечную алгебраическую систему

$$\begin{aligned}
&t^{\rho} &&: (2\rho^2 + \rho - 1)a_0 = 0,\\
&t^{\rho+1} &&: (2 + 5\rho + 2)a_1 - (2\rho + 1)a_0 = 0,\\
&t^{\rho+2} &&: (2\rho^2 + 9\rho + 9)a_2 - (2\rho + 3)a_1 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&t^{\rho+m} &&: (2m^2 + 4m\rho + 2\rho^2 + m + \rho - 1)a_m - (2m - 1 + 2\rho)a_{m-1} = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку $a_0 \ne 0$, то из первого уравнения получаем квадратное уравнение $2\rho^2 + \rho - 1 = 0$ для определения ρ, называемое *определяющим уравнением*. Его решения $\rho_1 = -1$ и $\rho_2 = 1/2$. Так как $\rho_1 - \rho_2 = -3/2$ не является целым числом, то можно построить два линейно независимых формальных решения уравнения. Положим $\rho = -1$, тогда формальный обобщенный степенной ряд имеет вид

$$x_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m-1},$$

где a_m определяется рекуррентным соотношением $m(2m-3)a_m - (2m-3)a_{m-1} = 0$.

Тогда $a_m = a_0/m!$, $m = 1, 2, \ldots$. Одно формальное решение представимо обобщенным степенным рядом $x_1(t) = \frac{a_0}{t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!} = a_0\frac{e^t}{t}$. Полученное решение $x_1(t)$ является неформальным решением уравнения, так как ряд сходится для всех $t \neq 0$.

Полагая $\rho = 1/2$, получаем второе решение $x_2(t) = a_0 t^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{3(2t)^m}{(2m+3)!!}$. Поскольку степенной ряд $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{3(2t)^m}{(2m+3)!!}$ сходится на $\mathbb{R}$, то, следовательно, $x_2(t)$ определяет решение уравнения для всех $t \geq 0$. Частные решения $x_1(t) = e^t/t$ и $x_2(t) = 3t^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2t)^m}{(2m+3)!!}$ линейно независимы на $(0, +\infty)$, следовательно, общее решение исходного уравнения представимо в виде

$$x(t) = C_1\frac{e^t}{t} + C_2 t^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2t)^m}{(2m+3)!!}.$$

Найти те решения уравнений, которые выражаются степенными или обобщенными степенными рядами:

1120. $tD^2x + 2Dx + tx = 0$.

1121. $9t^2x'' - (t^2 - 2)x = 0$.

1122. $t^2x'' + 2tx' - (t^2 + 2t + 2)x = 0$.

1123. $tD^2x - t^2Dx + (t - 2)x = 0$.

Уравнение Бесселя. Линейное уравнение второго порядка

$$t^2D^2x + tDx + (t^2 - \nu^2)x = 0$$

называется *уравнением Бесселя индекса* ν. Точка $t = 0$ является особой точкой. Решение уравнения Бесселя ищут в виде обобщенного степенного ряда. Определяющее уравнение для ρ имеет вид $\rho^2 - \nu^2 = 0$. При $\nu \geq 0$ решением уравнения Бесселя является

$$x(t) = a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+\nu}}{2^{2k}k!(\nu+1)\cdots(\nu+k)}.$$

Поскольку этот ряд сходится для всех $t \geq 0$, то $x(t)$ является неформальным решением уравнения. Если положить $a_0 = 1/(2^\nu\Gamma(\nu + 1))$, где $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция, то решение уравнения Бесселя

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}$$

называется *функцией Бесселя* порядка ν *первого рода*. Если ν не является целым числом, то решения $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$ линейно независимы и общим решением уравнения Бесселя будет $x(t) = C_1J_\nu(t) + C_2J_{-\nu}(t)$. Если $\nu = n$, $n \in \mathbb{Z}$, то частным решением, линейно независимым с $J_n(t)$, служит *функция Бесселя* индекса ν *второго рода* $Y_n(t)$. Для $\nu \neq n$ функция $Y_\nu(t)$ определяется соотношением

$$Y_\nu(t) = \frac{J_\nu\cos\nu\pi - J_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi}.$$

При $\nu = n$

$$Y_n(t) = \lim_{\nu\to n}Y_\nu(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to n}\left(\frac{\partial J_\nu(t)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(t)}{\partial\nu}\right).$$

Решения $J_\nu(t)$ и $Y_\nu(t)$ образуют базис пространства решений уравнения Бесселя при любом $\nu \in \mathbb{R}$. Общее решение уравнения Бесселя задается формулой

$$x(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t).$$

Задача 40.2. Проинтегрировать линейное однородное уравнение

$$t^2D^2x + tDx + (t^2 - 9)x = 0.$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение является уравнением Бесселя индекса 3. Частными линейно независимыми решениями его служат функции Бесселя первого и второго рода $J_3(t)$ и $Y_3(t)$. Общее решение представимо в виде $x(t) = C_1J_3(t) + C_2Y_3(t)$.

Задача 40.3. Показать, что $J_{1/2}(t) = \sqrt{2/(\pi t)}\sin t$.

Р е ш е н и е. По определению

$$J_{1/2}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)\sqrt{\pi}}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t.$$

Задача 40.4. Привести уравнение $D^2x + \dfrac{2p+1}{t}Dx + x = 0$ к уравнению Бесселя с помощью замены искомой функции $x = t^{-p}z$.

Р е ш е н и е. Так как

$$Dx = -pt^{-p-1}z + t^{-p}Dz, \quad D^2x = p(p+1)t^{-p-2}z - 2pt^{-p-1}Dz + t^{-p}D^2z,$$

то после выполнения подстановки уравнение примет вид

$$t^{-p}D^2z + t^{-p-1}Dz + (t^{-p} - p^2t^{-p-2})z = 0.$$

После умножения полученного уравнения на t^{p+2} приходим к уравнению Бесселя $t^2D^2z + tDz + (t^2 - p^2)z = 0$ индекса p.

1124. Показать, что $J_{-1/2}(t) = \sqrt{2/(\pi t)}\cos t$.

1125. Показать, что $Y_{1/2}(t) = -\sqrt{2/(\pi t)}\cos t$ и $Y_{-1/2}(t) = \sqrt{2/(\pi t)}\sin t$.

1126. Показать, что для любого $\nu \in \mathbb{R}$ имеют место рекуррентные соотношения для функций Бесселя:

$$\frac{1}{t}D\left(t^\nu J_\nu(t)\right) = t^{\nu-1}J_{\nu-1}(t), \quad \frac{1}{t}D\left(\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(t)}{t^{\nu+1}}.$$

(У к а з а н и е. Считать $1/(k-1)! = 0$ при $k = 0$.)

1127. Используя рекуррентные соотношения для функций Бесселя, доказать, что

$$DJ_\nu(t) = -\frac{\nu}{t}J_\nu(t) + J_{\nu-1}(t), \quad DJ_\nu(t) = \frac{\nu}{t}J_\nu(t) + J_{\nu+1}(t), \quad \frac{2\nu}{t}J_\nu(t) = J_{\nu+1}(t) + J_{\nu-1}(t).$$

1128. Доказать, что имеют место рекуррентные соотношения:

$$D\left(t^\nu Y_\nu(t)\right) = t^\nu Y_{\nu-1}(t), \quad D\left(\frac{Y_\nu(t)}{t^\nu}\right) = -\frac{Y_{\nu+1}(t)}{t^\nu}.$$

1129. Выразить $J_{3/2}(t)$ и $Y_{3/2}(t)$ через элементарные функции. (У к а з а н и е. Воспользоваться формулами из задач 1127, 1128.)

1130. Привести уравнение $t^2D^2x + tDx + (a^2t^2 - \nu^2)x = 0$, $a \neq 0$, к уравнению Бесселя с помощью замены независимой переменной $\tau = at$.

1131. Привести уравнение $D^2x - Dx/t + (1 - m^2/t^2)x = 0$ к уравнению Бесселя путем замены искомой функции $x = ty$.

Проинтегрировать уравнения:

1132. $t^2D^2x + tDx + (t^2 - 1/4)x = 0.$

1133. $t^2D^2x + tDx + (t^2 - 1/9)x = 0.$

1134. $t^2x'' + tx' + (t^2 - 81)x = 0.$

1135. $t^2D^2x + tDx + (t^2 - 8)x = 0.$

1136. $tx'' + \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{1}{4}x = 0.$

1137. $t^2D^2x + tDx + (4t^2 - 1/9)x = 0.$

1138. $t^2D^2x - 2tDx + 4(t^4 - 1)x = 0.$

1139. $x'' + \dfrac{1}{t}x' + \dfrac{1}{16}x = 0.$

1140. $D^2x + \dfrac{7}{t}Dx + x = 0.$

1141. $D^2x + \dfrac{3}{t}Dx + 4x = 0.$

1142. $t^2x'' + tx' + 4(t^4 - 2)x = 0.$

1143. Найти решение задачи Коши $t^2D^2x + tDx + (t^2 - 1/4)x = 0$, $x|_{t=\pi/2} = 1$, $Dx|_{t=\pi/2} = 0$, и исследовать его поведение при $t \to 0$.

1144. Для уравнения $t^2x'' + tx' + (t^2 - 1/4)x = 0$ указать все решения, ограниченные в некоторой окрестности $t = 0$.

1145. Для уравнения $t^2D^2x + tDx + (t^2 - 9/4)x = 0$ указать все решения, ограниченные в некоторой окрестности $t = 0$.

41. Колеблемость решений уравнения второго порядка с непрерывными коэффициентами

Решение линейного уравнения второго порядка $D^2x + p(t)Dx + q(t)x = 0$ с непрерывными на промежутке $I = |a, b|$ коэффициентами $p(t)$, $q(t)$ называют *неколеблющимся* на промежутке I, если оно имеет на I не более одного нуля. В противном случае решение называется *колеблющимся* на I.

Рассматриваемое линейное уравнение с непрерывно дифференцируемой функцией $p(t)$ заменой искомой функции

$$x = y\exp\left(-\frac{1}{2}\int_s^t p(\tau)\,d\tau\right), \qquad s \in \mathrm{I},$$

приводится к *каноническому виду* $D^2y + Q(t)y = 0$, где $Q(t) = -p^2(t)/4 - Dp(t)/2 + q(t)$. Указанное преобразование сохраняет нули соответствующих решений.

Теорема 41.1. *Если* $Q(t) \le 0$ *для любого* $t \in I$, *то все решения уравнения* $D^2x + Q(t)x = 0$ *являются неколеблющимися на промежутке* I.

Теорема 41.2. *Если* $Q(t) \ge 0$ *на* $I = (a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} Q(\tau)d\tau = \infty$, *то все решения уравнения* $D^2x + Q(t)x = 0$ *имеют бесконечное число нулей на* I.

Теорема 41.3 (*сравнения Штурма*). *Если непрерывные коэффициенты* $Q_1(t)$ *и* $Q_2(t)$ *уравнений* $D^2x + Q_1(t)x = 0$ и $D^2y + Q_2(t)y = 0$ *на промежутке* $I = |a, b|$ *удовлетворяют неравенству* $Q_1(t) \le Q_2(t)$, *то между двумя последовательными нулями решения* $x(t)$ *первого уравнения заключен по крайней мере один нуль решения* $y(t)$ *второго уравнения.*

Теорема 41.4 (*Штурма*). *Если* t_1 *и* t_2 – *два последовательных нуля решения* $x_1(t)$ *уравнения* $D^2x + Q(t)x = 0$, *то всякое другое линейно независимое решение* $x_2(t)$ *этого же уравнения имеет один нуль между* t_1 *и* t_2.

Привести уравнения к каноническому виду. Исследовать колеблемость ненулевых решений:

1146. $t^2D^2x + tDx + (t^2 - 1/4)x = 0, \quad t > 0.$

1147. $t^2x'' - 2tx' + (t^2 + 2)x = 0, \quad t > 0.$

1148. $t^2D^2x - 4tDx + (6 - t^2)x = 0, \quad t > 0.$

1149. $(1 + t^2)x'' + 4tx' + 2x = 0.$

1150. $tx'' - x' - 4t^3x = 0.$

1151. $(1 + t^2)D^2x + tDx + x = 0.$

1152. Найти условие, при котором все ненулевые решения уравнения $D^2x + pDx + qx = 0$, где p, $q \in \mathbb{R}$, неколеблющиеся на $\mathbb{R}$.

1153. Пусть непрерывная на $I = (a, +\infty)$ функция $Q(t)$ удовлетворяет неравенству $Q(t) \ge m > 0$. Доказать, что все решения уравнения $D^2x + Q(t)x = 0$ имеют бесконечное число нулей. (У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой сравнения Штурма.)

1154. Пусть непрерывная на $I = (a, +\infty)$ функция $Q(t)$ удовлетворяет неравенству $0 < m \le Q(t) \le M$ и δ – расстояние между последовательными нулями некоторого решения уравнения $D^2x + Q(t)x = 0$. Доказать, что δ удовлетворяет неравенству $\pi/\sqrt{M} \le \delta \le \pi/\sqrt{m}$.

Оценить расстояние между двумя последовательными нулями ненулевого решения уравнений на заданном промежутке:

1155. $D^2x + 2tx = 0$, $[20, 45]$.

1156. $tx'' + x = 0$, $[25, 100]$.

1157. $D^2x - 2e^tDx + e^{2t}x = 0$, $[2, 6]$.

1158. Исследовать колеблемость ненулевых решений уравнения Эйлера $t^2D^2x + a^2x = 0$ при $t > 0$.

1159. Привести уравнение Эйлера $t^2D^2x + a_1tDx + a_0x = 0$, $t > 0$, к каноническому виду и исследовать колеблемость его ненулевых решений.

1160. Доказать, что все ненулевые решения уравнения Эйри $x'' - tx = 0$ являются неколеблющимися на $(0, +\infty)$.

1161. Привести уравнение Бесселя $t^2D^2x + tDx + (t^2 - \nu^2)x = 0$ индекса ν к каноническому виду.

1162. Исследовать колеблемость ненулевых решений уравнения Бесселя $D^2x + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{t^2}\right)x = 0$, $t > 0$. (У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой сравнения Штурма и результатом задачи 1154.)

1163. Показать, что всякое решение уравнения $(1 + t^2)D^2x + t^{3/2}\cos^2 t \cdot x = 0$ имеет бесконечное число нулей.

1164. Показать, что каждое решение уравнения $x'' + \frac{\omega^2}{t^\alpha}x = 0$, $t > 0$, $\omega \ne 0$, при $\alpha \le 1$ имеет бесконечное число нулей.

XIII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

42. Дифференциальные системы в нормальной дифференциальной форме

Векторные уравнения. Векторное линейное относительно Dx уравнение $Dx = f(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, где $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, записывается в виде следующей системы:

$$Dx_k = f_k(t, x_1, \ldots, x_n), \quad k = \overline{1, n},$$

которая называется *векторным дифференциальным уравнением* или *системой обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме*. Число уравнений системы определяет ее *размерность*. Рассматриваемая система задана на области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, если в каждой точке $(t, x_1, \ldots, x_n) \in G$ определены и непрерывны функции $f_1, \ldots, f_n$.

Систему, содержащую производные любых порядков,

$$F_j(t, x_1, \ldots, x_n, Dx_1, \ldots, Dx_n, \ldots, D^k x_1, \ldots, D^l x_n) = 0, \ j = \overline{1, n}, \ k, l \in \mathbb{N},$$

можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка, введя новые переменные.

Дифференцируемая векторная функция $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, заданная на $I \subset \mathbb{R}$ и обращающая векторное уравнение $Dx = f(t, x)$ в тождество на I, называется *решением векторного уравнения*. Совокупность компонент решения $x(t)$, $t \in I$, векторного уравнения образует *решение* $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, $t \in I$, дифференциальной системы.

Задача Коши для векторного уравнения имеет вид

$$Dx = f(t, x), (t, x) \in G, \quad x|_{t=s} = \xi, \quad s \in I, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (s, \xi) \in G.$$

Теорема 42.1 (*Пеано*). *Если функция f непрерывна на области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, то задача Коши имеет решение в окрестности точки s, $s \in I$.*

Теорема 42.2 (*Пикара – Линделёфа*). *Если функция f непрерывна на области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и удовлетворяет условию Липшица по x в некоторой окрестности U точки $(s, \xi) \in G$, т.е.*

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \le L \| x - y \| \quad \forall (t, x), (t, y) \in U,$$

где L – некоторая постоянная (*постоянная Липшица*)*, то задача Коши однозначно разрешима в окрестности точки s, $s \in I$* (*локально однозначно разрешима*).

Условие Липшица будет выполнено, если функции

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x) \\ \cdots\cdots \\ f_n(t, x) \end{bmatrix}, \quad f'_x(t, x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

непрерывны на выпуклом по x компакте $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Совокупность n функций $x_k(t) = \varphi_k(t, C_1, \ldots, C_n)$, $k = \overline{1, n}$, называется общим решением системы в нормальной дифференциальной форме $Dx_k = f_k(t, x_1, \ldots, x_n)$, $k = \overline{1, n}$, на области G, если для любой точки $(t, x_1, \ldots, x_n) \in G$ система $x_k = \varphi_k(t, C_1, \ldots, C_n)$, $k = \overline{1, n}$, разрешима относительно постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и при найденных значениях постоянных совокупность $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, является решением системы.

Для линейной системы в нормальной дифференциальной форме (см. § 15)

$$Dx_k = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(t)x_j + g_k(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

с непрерывными на I коэффициентами задача Коши глобально однозначно разрешима на I.

Первые интегралы. Функция $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$, отличная от постоянной на любой непустой подобласти области G, называется *первым интегралом* системы $Dx_k = f_k(t, x_1, \ldots, x_n)$, $k = \overline{1, n}$, если она сохраняет постоянное значение вдоль решений этой системы, т.е. для любого решения $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ дифференциальной системы выполнено тождество $\Phi(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \equiv C$. Если первый интеграл не зависит от t, то он называется *стационарным*.

Задача 42.1. Проверить, что функция $\Phi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ является первым интегралом системы $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = -x_1. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Данная система является линейной стационарной системой. Построим ее общее решение сведением данной системы к системе независимых уравнений:

$$\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = -x_1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D^2x_1 = Dx_2, \\ Dx_2 = -x_1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D^2x_1 = -x_1, \\ x_2 = Dx_1. \end{cases} \Rightarrow x_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t,\ x_2(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Определим значение $\Phi(x_1, x_2)$ вдоль решений системы:

$$\Phi(x_1(t), x_2(t)) = x_1^2(t) + x_2^2(t) = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)^2 + (-C_1 \sin t + C_2 \cos t)^2 \equiv C_1^2 + C_2^2 = C.$$

Следовательно, $\Phi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ является первым интегралом рассматриваемой системы.

Теорема 42.3 (*о первом интеграле*). *Дифференцируемая функция $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ является первым интегралом системы $Dx_k = f_k(t, x_1, \ldots, x_n)$, $k = \overline{1, n}$, тогда и только тогда, когда выполняется тождество*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} f_n = 0 \quad \forall\ (t, x_1, \ldots, x_n) \in G.$$

Задача 42.2. Показать, что функция $\Phi(t, x_1, x_2) = \operatorname{arctg}(x_1/x_2) - t$ является первым интегралом системы $\begin{cases} Dx_1 = x_1^2 / x_2, \\ Dx_2 = -x_2^2 / x_1 \end{cases}$ для любых $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$.

Р е ш е н и е. Проверим справедливость тождества, указанного в теореме о первом интеграле, для данной функции $\Phi(t, x_1, x_2)$, учитывая, что $f_1 = x_1^2/x_2$, $f_2 = -x_2^2/x_1$. Так как $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = -1$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$, то

$$-1 + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\frac{x_1^2}{x_2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\left(-\frac{x_2^2}{x_1}\right) \equiv 0.$$

Следовательно, $\Phi(t, x_1, x_2)$ – первый интеграл системы.

Базис первых интегралов. Первые интегралы $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, $m \le n$, системы $Dx_k = f_k(t, x_1, \ldots, x_n)$, $k = \overline{1, n}$, независимы на некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, если на G ранг *матрицы Якоби* J равен m, т.е.

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} \\ & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\Phi_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial\Phi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = m.$$

Совокупность независимых первых интегралов $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ системы $Dx_k = f_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k = \overline{1, n}$, называется *базисом первых интегралов*, если любой первый интеграл Ψ можно представить в виде $\Psi = H(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$.

Теорема 42.3 (*существования первых интегралов*). *Пусть функция $f(t, x)$ определена в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и $\forall$ $(s, \xi) \in G$ однозначно разрешима задача Коши $Dx = f(t, x)$, $x|_{t=s} = \xi$. Тогда $\forall$ $(s, \xi) \in G$ существует окрестность, в которой система $Dx_k = f_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k = \overline{1, n}$, имеет базис первых интегралов.*

Наличие m ($m < n$) независимых первых интегралов системы $Dx_k = f_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k = \overline{1, n}$, позволяет понизить ее размерность на m единиц. Базис первых интегралов системы позволяет построить ее общее решение.

Задача 42.3. Понизить размерность системы $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = x_1, \\ Dx_3 = x_3, \end{cases}$ зная ее первый интеграл $\Phi = (x_1 + x_2)/x_3$.

Р е ш е н и е. Вдоль решений системы $\Phi(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \equiv C$, т.е. $(x_1 + x_2)/x_3 = C$. Отсюда $x_1 = -x_2 + Cx_3$. Исключая x_1 из данной системы, получаем систему $\begin{cases} Dx_2 = -x_2 + Cx_3, \\ Dx_3 = x_3 \end{cases}$ размерности 2.

Задача 42.4. Проинтегрировать систему $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = x_3, \\ Dx_3 = -k^2 x_2,\ k \neq 0, \end{cases}$ предварительно убедившись, что функции $\Phi_1 = k^2 x_1 + x_3$, $\Phi_2 = kx_2 \cos kt - x_3 \sin kt$, $\Phi_3 = kx_2 \sin kt + x_3 \cos kt$, являющиеся первыми интегралами, образуют базис первых интегралов системы.

Р е ш е н и е. Так как $\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} = k^2$, $\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} = 0$, $\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} = 1$ и $0 + k^2x_2 + 0 \cdot x_3 + 1(-k^2x_2) \equiv 0$, то тождество теоремы о первом интеграле для Φ_1 выполнено для всех $(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$. Аналогично проверяем справедливость тождества для функций Φ_2 и Φ_3: $-k^2x_2 \sin kt - kx_3 \cos kt + 0 \cdot x_2 + k \cos kt \cdot x_3 - \sin kt \cdot (-k^2x_2) \equiv 0$, $k^2x_2 \cos kt - kx_3 \sin kt + 0 \cdot x_2 + k \sin kt \cdot x_3 + \cos kt \cdot (-k^2x_2) \equiv 0$.

Матрица Якоби J функций Φ_1, Φ_2, Φ_3 имеет вид $J = \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 1 \\ 0 & k\cos kt & -\sin kt \\ 0 & k\sin kt & \cos kt \end{bmatrix}$.

Поскольку $\det J = k^3 \neq 0$, то функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 образуют базис первых интегралов. Разрешив алгебраическую систему

$$\begin{cases} k^2 x_1 + x_3 = C_1, \\ kx_2 \cos kt - x_3 \sin kt = C_2, \\ kx_2 \sin kt + x_3 \cos kt = C_3 \end{cases}$$

относительно x_1, x_2, x_3, получим общее решение исходной системы:

$$x_1(t) = (C_1 + C_2 \sin kt - C_3 \cos kt)/k^2,$$
$$x_2(t) = (C_2 \cos kt + C_3 \sin kt)/k,$$
$$x_3(t) = C_3 \cos kt - C_2 \sin kt.$$

Одним из методов построения первых интегралов системы является образование *интегрируемых комбинаций* посредством сложения, вычитания и деления данных уравнений. Иногда уравнения предварительно умножаются на некоторые функции.

Задача 42.5. Проинтегрировать систему

$$\begin{cases} Dx_1 = x_2^2 / x_1, \\ Dx_2 = x_1^2 / x_2, \end{cases} \quad G = \{(t, x_1, x_2) \mid t \in \mathbb{R}, x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

Р е ш е н и е. Так как $Dx_1 = dx_1/dt$, $Dx_2 = dx_2/dt$, то, разделив уравнения почленно, составим интегрируемую комбинацию $\dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{x_2^3}{x_1^3}$. Интегрируя полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получаем общее решение $x_2^4 = x_1^4 + C_1$. Следовательно, первый интеграл системы имеет вид $\Phi_1 = x_2^4 - x_1^4$. Подставляя $x_2^2 = \sqrt{x_1^4 + C_1}$ в систему, понижаем ее размерность на единицу и приходим к уравнению с разделяющимися переменными $\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\sqrt{x_1^4 + C_1}}{x_1}$, общее решение которого $x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + C_1} = C_2 e^{2t}$. Отсюда следует, что $C_2 = e^{-2t}(x_1^2 + x_2^2)$. Полученная совокупность первых интегралов $\Phi_1 = x_2^4 - x_1^4$, $\Phi_2 = e^{-2t}(x_1^2 + x_2^2)$ образует базис первых интегралов, так как ранг матрицы Якоби J равен двум. Разрешая функциональную систему уравнений $\begin{cases} x_2^4 - x_1^4 - C_1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - C_2 e^{2t} = 0 \end{cases}$ относительно x_1 и x_2, получаем общее решение системы

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{C_2}{2} e^{2t} - \frac{C_1}{2C_2} e^{-2t}}, \quad x_2(t) = \sqrt{\frac{C_2}{2} e^{2t} + \frac{C_1}{2C_2} e^{-2t}}.$$

Линейную систему в нормальной дифференциальной форме с переменными коэффициентами путем замены переменных иногда можно свести к линейной стационарной системе. Если линейная система имеет вид

$$Dx_k = \varphi(t) \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + g_k(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad t \in I,$$

то она сводится к линейной стационарной системе заменой независимой переменной $\tau = \int_s^t \varphi(t)\, dt$, $s \in I$.

Задача 42.6. Проинтегрировать систему

$$\begin{cases} Dx_1 = (-2x_1 + x_2)\operatorname{ctg} t + \cos t, \\ Dx_2 = (-3x_1 + 2x_2)\operatorname{ctg} t + \cos^3 t, \; t \in]0, \pi[, \end{cases}$$

приведя ее к системе с постоянными коэффициентами.

Р е ш е н и е. Введем новую переменную $\tau = \int\limits_{\pi/2}^{t} \operatorname{ctg} t\, dt$, $\tau = \ln \sin t$, т.е. $\sin t = e^{\tau}$. Так как

$$Dx_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}, \quad Dx_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{d\tau}\frac{d\tau}{dt},$$

т.е. $Dx_1 = \frac{dx_1}{d\tau}\operatorname{ctg} t$, $Dx_2 = \frac{dx_2}{d\tau}\operatorname{ctg} t$, то исходная система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = -2x_1 + x_2 + e^{\tau}, \\ \dfrac{dx_2}{d\tau} = -3x_1 + 2x_2 + e^{\tau} - e^{3\tau}. \end{cases}$$

В результате получили линейную неоднородную стационарную систему. Используя для ее разрешения метод сведения к одному уравнению, приходим к общему решению: $x_1(\tau) = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} - e^{3\tau}/8$, $x_2(\tau) = 3C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} - e^{\tau} - 5e^{3\tau}/8$.

Возвращаясь к переменной t, получаем общее решение исходной системы:

$$x_1(t) = C_1 \sin t + C_2 \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{8}\sin^3 t, \quad x_2(t) = 3C_1 \sin t + C_2 \frac{1}{\sin t} - \sin t - \frac{5}{8}\sin^3 t.$$

Проверить, являются ли первыми интегралами систем функции $\Phi_i(t, x_1, \ldots, x_n)$. Проинтегрировать системы:

1165. $$\begin{cases} Dx_1 = x_2, & \Phi_1 = x_1 \cos t - x_2 \sin t, \quad \Phi_2 = x_1 x_2, \\ Dx_2 = -x_1; & \Phi_3 = x_1 \sin t + x_2 \cos t, \quad \Phi_4 = x_1^2 - x_2^2. \end{cases}$$

1166. $$\begin{cases} Dx_1 = x_1, & \Phi_1 = x_3^2 + x_4^2 + 2k^2 x_1 x_2, \\ Dx_2 = x_4, & \Phi_2 = 2x_3 x_4 + k^2(x_1^2 + x_2^2), \\ Dx_3 = -k^2 x_2, & \Phi_3 = (k(x_1 - x_2) + x_3 - x_4)e^{-kt}, \\ Dx_4 = -k^2 x_1; & \Phi_4 = k(x_1 + x_2)\cos kt - (x_3 + x_4)\sin kt. \end{cases}$$

1167. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{(x_1^2 - t)}{x_2}, & \Phi_1 = t^2 + 2x_1 x_2, \quad \Phi_2 = x_1^2 - t x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1; & \Phi_3 = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

1168. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1, & \Phi_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{x_3 + x_1}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2, & \Phi_2 = \dfrac{x_3 - x_2}{x_1 + x_2}, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3; & \Phi_3 = \dfrac{x_1 + x_3}{x_2}. \end{cases}$$

1169. $$\begin{cases} Dx_1 = x_2, & \Phi_1 = x_1^2 - x_2^2, \\ Dx_2 = x_1, & \Phi_2 = (x_1 + x_2)/x_3, \\ Dx_3 = x_3; & \Phi_3 = x_1^2 + x_2^2. \end{cases}$$

1170. $\begin{cases} Dx_1 = 2x_1 + e^t, & \Phi_1 = x_1^2 + x_2^2, \quad \Phi_2 = x_1 e^{-2t} + e^{-t}, \\ Dx_2 = -3x_2 + 1; & \Phi_3 = x_2 e^{3t} - 3e^{3t}. \end{cases}$

1171. $\begin{cases} Dx_1 = -\dfrac{2}{t}x_1 + \dfrac{2}{t}x_2 + 1, & \Phi_1 = (x_1 + x_2)t^3 - \dfrac{1}{4}t^4 - \dfrac{1}{5}t^5, \\ Dx_2 = -\dfrac{1}{t}x_1 - \dfrac{5}{t}x_2 + t; & \Phi_2 = (x_1 + 2x_2)t^4 - \dfrac{1}{5}t^5 - \dfrac{1}{3}t^6. \end{cases}$

1172. $\begin{cases} Dx_1 = 5x_1 + 4x_2 + e^t, & \Phi_1 = (x_1 + x_2 + \dfrac{1}{8}e^t + \dfrac{1}{9})e^{-9t}, \\ Dx_2 = 4x_1 + 5x_2 + 1; & \Phi_2 = (x_1 - x_2 - te^t - 1)e^{-t}. \end{cases}$

1173. $\begin{cases} Dx_1 = x_1^2 + x_2^2, & \Phi_1 = t + 1/(x_1 + x_2), \\ Dx_2 = 2x_1 x_2; & \Phi_2 = t + 1/(x_1 - x_2). \end{cases}$

1174. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{t}{x_2}, & \Phi_1 = x_1 x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{t}{x_1}; & \Phi_2 = \ln x_2 + \dfrac{t^2}{2x_1 x_2}. \end{cases}$

1175. $\begin{cases} Dx_1 = x_1^2 / (x_2 - t), & \Phi_1 = (x_2 - t)/x_1, \\ Dx_2 = x_1 + 1; & \Phi_2 = \ln x_1 - tx_1/(x_2 - t). \end{cases}$

1176. $\begin{cases} Dx_1 = x_1^2 x_2, & \Phi_1 = x_1 x_2 / (2t), \\ Dx_2 = x_2 / t - x_1 x_2^2; & \Phi_2 = x_1 e^{-tx_1 x_2/2}. \end{cases}$

Проинтегрировать системы, построив интегрируемые комбинации:

1177. $\begin{cases} Dx_1 = 1/x_2, \\ Dx_2 = 1/x_1. \end{cases}$

1178. $\begin{cases} Dx_1 = x_1^2 / x_2, \\ Dx_2 = x_2^2 / x_1. \end{cases}$

1179. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_2}{(x_2 - x_1)^2}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_1}{(x_2 - x_1)^2}. \end{cases}$

1180. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_1^2}{x_2}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1. \end{cases}$

1181. $\begin{cases} Dx_1 = \sin x_1 \cos x_2, \\ Dx_2 = \cos x_1 \sin x_2. \end{cases}$

1182. $\begin{cases} Dx_1 = e^{-t} / x_2, \\ Dx_2 = e^{-t} / x_1. \end{cases}$

Проинтегрировать линейные системы, приведя их к линейным стационарным системам:

1183. $\begin{cases} Dx_1 = 1 + \dfrac{-x_1 + x_2 + x_3}{t}, \\ Dx_2 = t^2 + \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{t}, \\ Dx_3 = \dfrac{4 + x_1 + x_2 + x_3}{t}. \end{cases}$

1184. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{-2x_1 - 2x_2 - 4x_3}{t}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{-2x_1 + x_2 - 2x_3}{t}, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{5x_1 + 2x_2 + 7x_3}{t}. \end{cases}$

1185. $\begin{cases} Dx_1 = \dfrac{-2x_1 - 2x_2 - 4x_3}{t^2}, \\ Dx_2 = \dfrac{-2x_1 + x_2 - 2x_3}{t^2}, \\ Dx_3 = \dfrac{5x_1 + 2x_2 + 7x_3}{t^2}. \end{cases}$

1186. $\begin{cases} Dx_1 = \dfrac{-2x_1 - 2x_2 - 4x_3}{2\sqrt{t}}, \\ Dx_2 = \dfrac{-2x_1 + x_2 - 2x_3}{2\sqrt{t}}, \\ Dx_3 = \dfrac{5x_1 + 2x_2 + 7x_3}{2\sqrt{t}}. \end{cases}$

1187. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{4x_1 - x_2}{t}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{5x_1 + 2x_2}{t}. \end{cases}$

1188. $\begin{cases} Dx_1 = (-x_1 + x_2)\cos t, \\ Dx_2 = (-4x_1 + 3x_2)\cos t. \end{cases}$

1189. $\begin{cases} Dx_1 = \dfrac{3x_2 - x_1}{t}, \\ Dx_2 = 1 + \dfrac{x2 + x_1}{t}. \end{cases}$

1190. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{-x_1 + x_2 + \sin\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{-4x_1 + 3x_2 + e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}. \end{cases}$

43. Дифференциальные системы в симметрической форме

Систему $\dfrac{dx_1}{f_1(x_1, ..., x_n)} = \dfrac{dx_2}{f_2(x_1, ..., x_n)} = ... = \dfrac{dx_n}{f_n(x_1, ..., x_n)}$ называют *системой в симметрической форме*.

Отметим, что система в симметрической форме при некоторых ограничениях может быть представлена, например, в виде $\dfrac{dx_k}{dx_n} = \dfrac{f_k(x_1, ..., x_n)}{f_n(x_1, ..., x_n)}$, $k = \overline{1, n-1}$.

Для разрешения последней системы надо найти $n - 1$ независимых первых интегралов, т.е. построить базис первых интегралов. Первые интегралы системы в симметрической форме целесообразнее находить, определяя интегрируемые комбинации, для построения которых используют основное *свойство пропорций* (*равных отношений*)

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = ... = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + ... + \varphi_n dx_n}{\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + ... + \varphi_n f_n}.$$

Теорема 43.1 (*об интегрируемой комбинации*). *Если выражение*

$$\varphi_1(x_1, ..., x_n)dx_1 + \varphi_2(x_1, ..., x_n)dx_2 + ... + \varphi_n(x_1, ..., x_n)dx_n$$

является дифференциалом некоторой функции $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ *и*

$$\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + ... + \varphi_n f_n = 0 \quad \forall\ (x_1, ..., x_n) \in G,$$

то Φ *– первый интеграл системы.*

Задача 43.1. Проинтегрировать систему

$$\frac{dx_1}{x_3 - x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_3} = \frac{dx_3}{x_2 - x_1}.$$

Р е ш е н и е. Построим интегрируемые комбинации: $\frac{dx_1}{x_3-x_2}=\frac{dx_1+dx_2+dx_3}{x_3-x_2+x_1-x_3+x_2-x_1}$, $\frac{dx_1}{x_3-x_2}=$ $=\frac{x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3}{x_1(x_3-x_2)+x_2(x_1-x_3)+x_3(x_2-x_1)}$. Поскольку знаменатели правых частей равны нулю, то $dx_1 + dx_2 + dx_3$ и $x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3$ – интегрируемые комбинации. Следовательно, $x_1 + x_2 + x_3 = \Phi_1$ и $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \Phi_2$ – первые интегралы. Так как $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{bmatrix}=2,$ то Φ_1 и Φ_2 образуют базис первых интегралов. Следовательно, общее решение данной системы имеет вид $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=C_1, \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=C_2. \end{cases}$

Задача 43.2. Построить базис первых интегралов системы

$$\frac{dx_1}{x_1+x_2^2+x_3^2}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3}.$$

Р е ш е н и е. Для построения базиса найдем два независимых первых интеграла системы, используя следующие интегрируемые комбинации: $\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3}$, $\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_1-2x_2dx_2-2x_3dx_3}{x_1+x_2^2+x_3^2-2x_2^2-2x_3^2}$, т. е. $\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3}$, $\frac{dx_2}{x_2}=\frac{d\left(x_1-x_2^2-x_3^2\right)}{x_1-x_2^2-x_3^2}$. В результате получаем $x_2=C_1x_3$ и $C_2x_2=x_1-x_2^2-x_3^2$. Таким образом, $\Phi_1 = x_2/x_3$, $\Phi_2=(x_1-x_2^2-x_3^2)/x_2$ – первые интегралы. Они образуют базис, так как $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x_3} & -\frac{x_2}{x_3^2} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{x_3^2-x_2^2-x_1}{x_2^2} & \frac{-2x_3}{x_2} \end{bmatrix}=2.$

Построить базис первых интегралов систем в симметрической форме:

1191. $\frac{dx_1}{4x_2-x_3}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3}.$

1192. $\frac{dx_1}{x_1^2}=\frac{dx_2}{x_2^2+x_3^2}=\frac{dx_3}{2x_2x_3}.$

1193. $\frac{dx_1}{x_2+x_3}=\frac{dx_2}{x_1+x_3}=\frac{dx_3}{x_1+x_2}.$

1194. $\frac{dx_1}{x_2-x_1}=\frac{dx_2}{x_1+x_2+x_3}=\frac{dx_3}{x_1-x_2}.$

1195. $\frac{dx_1}{x_3}=\frac{dx_2}{x_4}=\frac{dx_3}{x_1}=\frac{dx_4}{x_2}.$

1196. $\frac{dx_1}{3(x_2-x_4)}=\frac{dx_2}{2(x_3-x_1)}=\frac{dx_3}{3(x_4-x_2)}=\frac{dx_4}{2(x_1-x_3)}.$

1197. $\frac{dx_1}{x_2}=\frac{dx_2}{x_1}=\frac{dx_3}{x_3}.$

1198. $\frac{dx_1}{x_3^2-x_2^2}=\frac{dx_2}{x_3}=\frac{dx_3}{-x_2}.$

1199. $\frac{dx_1}{x_1x_2}=\frac{dx_2}{x_2^2}=\frac{dx_3}{x_1x_2x_3-2x_1^2}.$

1200. $\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3-x_1^2-x_2^2}.$

1201. $\frac{dx_1}{x_1(x_2+x_3)}=\frac{dx_2}{x_3(x_3-x_2)}=\frac{dx_3}{x_2(x_2-x_3)}.$

1202. $\frac{dx_1}{x_1x_3}=\frac{dx_2}{x_2x_3}=\frac{dx_3}{x_1x_2}.$

1203. $\frac{dx_1}{x_1(x_3-x_2)}=\frac{dx_2}{x_2(x_2-x_1)}=\frac{dx_3}{x_2^2-x_1x_3}.$

1204. $\frac{dx_1}{x_2x_3}=\frac{dx_2}{x_1x_3}=\frac{dx_3}{x_1x_2}.$

1205. Составить систему в нормальной дифференциальной форме, эквивалентную дифференциальному уравнению $D^3x + k^2Dx = 0.$

1206. Исключив переменные, заменить систему одним дифференциальным уравнением наименьшего порядка:

$$\text{а) } \begin{cases} Dx_1 = bx_3 - cx_2, \\ Dx_2 = cx_1 - ax_3, \\ Dx_3 = ax_2 - bx_1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} Dx_1 = \alpha x_2 x_3, \\ Dx_2 = \beta x_1 x_3, \\ Dx_3 = \gamma x_1 x_2. \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} D^2x_1 + k^2x_2 = 0, \\ D^2x_2 + k^2x_1 = 0. \end{cases}$$

1207. Составить систему в нормальной дифференциальной форме, эквивалентную системе уравнений $\begin{cases} D^3x_1 = a(x_2D^2x_3 - x_3D^2x_2), \\ D^2x_2 = b(x_3Dx_1 - x_1Dx_3), \\ D^2x_3 = cx_1x_2. \end{cases}$

1208. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой, совпадающей с его центром инерции, описывается системой $\begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (C - B)qr, \\ B\dfrac{dq}{dt} = (A - C)rp, \\ C\dfrac{dr}{dt} = (B - A)pq, \end{cases}$ где A, B, C – главные моменты инерции (положительные постоянные, определяемые для каждого тела); q, r, p – проекции угловой скорости на прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с центром инерции тела, а оси – с главными осями инерции. Построить два независимых стационарных первых интеграла.

1209. Согласно закону всемирного тяготения, движение центра масс планеты, притягиваемой Солнцем, описывается уравнением $\dfrac{d^2r}{dt^2} + k^2\dfrac{r}{|r|^3} = 0$, где $r = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$; k^2 – постоянная, зависящая от масс планеты и Солнца, а также от гравитационной постоянной; начало координат совпадает с центром масс Солнца. Записать уравнение движения в координатной форме, перейти к системе в нормальной дифференциальной форме, записать ее в симметрической форме и построить три независимых стационарных первых интеграла.

44. Функции Ляпунова и устойчивость

Функция Ляпунова. Рассматривается векторное дифференциальное уравнение $Dx = f(t, x)$ с непрерывной функцией f, определенной для $t \ge s$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, которое обладает свойством однозначной разрешимости любой задачи Коши

$$Dx = f(t, x), \quad x|_{t=s} = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Предполагается, что все решения $x = x(t)$ векторного уравнения $Dx = f(t, x)$ определены для $t \ge s$.

Решение $x(t) = x(t; s, \xi)$ векторного уравнения $Dx = f(t, x)$ *устойчиво по Ляпунову в положительном направлении* (*устойчиво*), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \forall t \ge s, \forall \Delta\xi \in \mathbb{R}^n, \|\Delta\xi\| \le \delta \Rightarrow \|x(t; s, \xi + \Delta\xi) - x(t; s, \xi)\| \le \varepsilon.$$

Решение $x(t) = x(t;\, s,\, \xi)$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову*, если оно устойчиво по Ляпунову и $\exists\eta > 0$ такое, что $\forall\Delta\xi$, $\|\Delta\xi\| \le \eta \Rightarrow \|x(t;\, s,\, \xi + \Delta\xi) - x(t;\, s,\, \xi)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Вопрос об устойчивости данного решения $x(t) = x(t;\, s,\, \xi)$ векторного уравнения $Dx = f(t, x)$ сводится к вопросу об устойчивости нулевого решения векторного уравнения $Dy = g(t, y)$, полученного из данного заменой $y = x - x(t;\, s,\, \xi)$, где $g(t, 0) = 0$.

Теорема 44.1 (*Ляпунова об устойчивости*). *Если существует функция* v: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *непрерывно дифференцируемая, положительная при* $x \ne 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, *и* $v(0) = 0$, *для которой*

$$\operatorname{grad} v \cdot f = \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n \le 0 \quad \forall\, t \ge s, \quad \forall\, x, \quad \|x\| \le r,$$

где r – положительная постоянная, то нулевое решение векторного уравнения $Dx = f(t, x)$, $f(t, 0) = 0$, *устойчиво*.

Функцию v называют функцией Ляпунова.

Следствие. *Если векторное уравнение имеет стационарный первый интеграл* v, *положительный в проколотой окрестности точки* $x = 0$, *и* $v(0) = 0$, *то нулевое решение векторного уравнения устойчиво*.

Теорема 44.2 (*Ляпунова об асимптотической устойчивости*). *Если существуют функция Ляпунова* v *и непрерывно дифференцируемая функция* w: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *положительная при* $x \ne 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, *и* $w(0) = 0$, *такие, что*

$$\operatorname{grad} v \cdot f \le -w \quad \forall\, t \ge s, \quad \forall x, \quad \|x\| \le r,$$

где r – положительная постоянная, то нулевое решение векторного уравнения $Dx = f(t, x)$, $f(t, 0) = 0$, *асимптотически устойчиво*.

Задача 44.1. Исследовать устойчивость нулевого решения системы $\begin{cases} Dx_1 = x_2 \sin t - x_1^3, \\ Dx_2 = -x_1 \sin t - x_2^3, \end{cases}$ убедившись в том, что функция $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ является функцией Ляпунова.

Решение. Функция $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ непрерывно дифференцируема и положительна при всех $x_1 \ne 0, x_2 \ne 0$ и $v(0, 0) = 0$. Так как $f = \begin{bmatrix} x_2 \sin t - x_1^3 \\ -x_1 \sin t - x_2^3 \end{bmatrix}$, $f(t, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\operatorname{grad} v = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$, то $\operatorname{grad} v \cdot f = 2x_1 x_2 \sin t - 2x_1^4 - 2x_1 x_2 \sin t - 2x_2^4 = -2(x_1^4 + x_2^4)$.

Поскольку $\operatorname{grad} v \cdot f \le 0$ при всех x_1, x_2, то $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ – функция Ляпунова данной системы. Следовательно, на основании теоремы Ляпунова нулевое решение $x(t) \equiv (0, 0)^T$ устойчиво.

Если положить $w(x_1, x_2) = 2(x_1^4 + x_2^4)$, то на основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевое решение будет и асимптотически устойчивым, так как $w(x_1, x_2) > 0$ $\forall x_1 \ne 0$, $x_2 \ne 0$ и $w(0, 0) = 0$, а $\operatorname{grad} v \cdot f \le -w$.

Устойчивость по первому приближению. Для исследования нулевого решения векторного уравнения на устойчивость выделяют, если это возможно, в правой части уравнения линейную часть в окрестности точки $x = 0$, т.е. векторное уравнение $Dx = f(t, x)$, $f(t, 0) = 0$, приводят к виду $Dx = Ax + g(t, x)$, $g(t, 0) = 0$, $g(t, x) = o(\|x\|)$ при $x \to 0$.

Стационарное линейное векторное уравнение $Dx = Ax$ называют *первым приближением* векторного уравнения вдоль нулевого решения.

Теорема 44.3 (*об устойчивости по первому приближению*). *Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение векторного уравнения $Dx = Ax + g(t, x)$, $g(t, 0) = 0$, $g(t, x) = o(||x||)$ при $x \to 0$, асимптотически устойчиво для $t \geq s$. Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную действительную часть, то нулевое решение неустойчиво.*

Следствие. *Если функция f непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x = 0$ и все собственные значения матрицы Якоби $f'(0)$ имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение стационарного векторного уравнения $Dx = f(x)$, $f(0) = 0$, асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную действительную часть, то нулевое решение неустойчиво.*

Задача 44.2. Исследовать устойчивость стационарных решений $x_1 = k\pi$, $x_2 = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, системы

$$\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = -b\sin x_1 - ax_2, \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. При $b = 0$, $a \neq 0$ исходная система принимает вид $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = -ax_2. \end{cases}$ При $b = 0$, $a = 0$ система имеет вид $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = 0. \end{cases}$ В этих случаях стационарным решениям $x_1 = C$, $x_2 = 0$ соответствует прямая покоя $x_2 = 0$.

Стационарные решения первой системы устойчивы при $a > 0$ и неустойчивы при $a < 0$. Стационарные решения второй системы неустойчивы.

Исследуем устойчивость стационарных решений системы при $b \neq 0$ и $k = 0$, $k = 1$.

1. $k = 0$. Запишем разложение $\sin x_1$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_1 = 0$: $\sin x_1 = x_1 - \dfrac{x_1^3}{3!} + o(x_1^4)$.

Система первого приближения имеет вид $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = -bx_1 - ax_2. \end{cases}$ Характеристическое уравнение матрицы системы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$ имеет вид $v^2 + av + b = 0$.

При $a > 0$, $b > 0$ собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, следовательно, нулевое решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ асимптотически устойчиво.

При $a > 0$, $b < 0$ и при любом b и $a < 0$ решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ неустойчиво, так как среди собственных значений матрицы A существует значение с положительной действительной частью.

При $a = 0$, $b < 0$ собственные значения матрицы A действительные и противоположны по знаку, следовательно, решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ неустойчиво.

При $a = 0$, $b > 0$ собственные значения матрицы A имеют нулевую действительную часть. В этом случае теорема о первом приближении не дает ответа об устойчивости решения. Для исследования устойчивости нулевого решения $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ системы $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = -b\sin x_1 \end{cases}$ воспользуемся теоремой Ляпунова, положив $v = x_2^2 / 2 + b(1 - \cos x_1)$. Функция v в окрестности точки $(0, 0)$ положительна и $v(0, 0) = 0$, а $\operatorname{grad} v \cdot f = bx_2 \sin x_1 - bx_2 \sin x_1 \equiv 0$. Следовательно, решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ устойчиво.

2. $k = 1$. Запишем разложение $\sin x_1$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_1 = \pi$: $\sin x_1 = -(x_1 - \pi) + {}$ $+ \dfrac{(x_1 - \pi)^3}{3!} - o((x_1 - \pi)^4)$.

Система первого приближения имеет вид $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = b(x_1 - \pi) - ax_2. \end{cases}$ Произведя замену переменных $x_1 - \pi = y_1$, $x_2 = y_2$, получим систему $\begin{cases} Dy_1 = y_2, \\ Dy_2 = by_1 - ay_2. \end{cases}$ Характеристическое уравнение матрицы системы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & -a \end{bmatrix}$ имеет вид $v^2 + av - b = 0$.

При $a > 0$, $b < 0$ собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, следовательно, нулевое решение $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ асимптотически устойчиво, а значит, асимптотически устойчиво и решение $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$ исходной системы.

При любом b и $a < 0$ и $a > 0$, $b > 0$ решение $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$ неустойчиво, так как среди собственных значений матрицы A имеются значения с положительной действительной частью.

При $a = 0$, $b > 0$ собственные значения матрицы A действительны и противоположны по знаку, следовательно, решение $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$ неустойчиво.

При $a = 0$, $b < 0$ собственные значения матрицы A имеют нулевые действительные части. В этом случае теорема о первом приближении ответа не дает. Для исследования устойчивости нулевого решения $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ системы $\begin{cases} Dy_1 = y_2, \\ Dy_2 = b\sin y_1 \end{cases}$ воспользуемся теоремой Ляпунова, положив $v = y_2^2/2 - b(1-\cos y_1)$.

Функция v в окрестности точки (0, 0) положительная, $v(0, 0) = 0$, а $\operatorname{grad} v \cdot f = -b\sin y_1 \cdot y_2 + by_2 \sin y_1 \equiv 0$. Следовательно, решение $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$ исходной системы устойчиво.

Отметим, что вследствие 2π-периодичности правых частей системы по x_1 устойчивость решений $x_1 = k\pi$, $x_2 = 0$ определяется устойчивостью решений $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$.

В заключение заметим, что рассмотренная система соответствует уравнению $D^2x + aDx + b \sin x = 0$, которое описывает колебания маятника.

Задача 44.3. Исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} Dx_1 = e^{x_1} - e^{-3x_3}, \\ Dx_2 = 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2), \\ Dx_3 = \ln(1 + x_3 - 3x_1). \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся следствием теоремы Ляпунова об устойчивости. Так как

$$f'(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 3e^{-3x_3} \\ -3\cos(x_1+x_2) & -3\cos(x_1+x_2) & 4 \\ -3(1+x_3-3x_1)^{-1} & 0 & (1+x_3-3x_1)^{-1} \end{bmatrix}, \ f'(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и $v_1 = -3$, $v_2 = 1+3i$, $v_3 = 1-3i$ – собственные значения матрицы Якоби, среди которых два с положительной действительной частью, то нулевое решение $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$, $x_3(t) \equiv 0$ рассматриваемой системы неустойчиво.

Проверить устойчивость нулевых решений систем:

1210. $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = -x_1^3. \end{cases}$

1211. $\begin{cases} Dx_1 = x_2, \\ Dx_2 = -x_1(1+x_1^2)\exp x_1^2. \end{cases}$

1212. $\begin{cases} Dx_1 = x_2(x_1^2 + x_2^2), \\ Dx_2 = -x_1(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$

1213. $\begin{cases} Dx_1 = -x_2^3 e^t \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ Dx_2 = x_1 e^t \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{cases}$

1214. $\begin{cases} Dx_1 = x_2^3, \\ Dx_2 = -\sin 2x_1. \end{cases}$

1215. $\begin{cases} Dx_1 = -x_2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ Dx_2 = x_1\sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{cases}$

1216. $\begin{cases} Dx_1 = -x_2(x_1^4 + x_2^4), \\ Dx_2 = 4x_1(x_1^4 + x_2^4). \end{cases}$

Используя указанную функцию v, проверить устойчивость нулевого решения систем:

1217. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1 e^{x_1} - x_2^3, \\ Dx_2 = x_1^3, \end{cases}$ $\quad v = x_1^4 + x_2^4.$

1218. $\begin{cases} Dx_1 = -f(x_1) - x_2^3, \\ Dx_2 = x_1^3 - \varphi(x_2), \end{cases}$ $\quad f(0) = \varphi(0) = 0, \quad zf(z) > 0, \quad z\varphi(z) > 0, \quad v = x_1^4 + x_2^4.$

1219. $\begin{cases} Dx_1 = f(x_1) + x_2^5, \\ Dx_2 = -x_1^5 + \varphi(x_2), \end{cases}$ $\quad f(0) = \varphi(0) = 0, \quad zf(z) < 0, \quad z\varphi(z) < 0, \quad v = x_1^6 + x_2^6.$

1220. $\begin{cases} Dx_1 = 2x_2 - 2x_1 / (1 + x_1)^2, \\ Dx_2 = -\dfrac{2x_2}{(1 + x_1)^2} - \dfrac{2x_1}{(1 + x_1^2)^2}, \end{cases}$ $\quad v = x_2^2 + x_1^2 / (1 + x_1^2).$

1221. $\begin{cases} Dx_1 = x_1 x_2 - x_1^3 + x_2, \\ Dx_2 = x_1^4 - x_1^2 x_2 - x_1^3, \end{cases}$ $\quad v = x_1^4 + 2x_2^2.$

Используя указанную функцию v, проверить асимптотическую устойчивость нулевого решения систем:

1222. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1^3 - x_2^3, \\ Dx_2 = x_1^3 - x_2^3, \end{cases}$ $\quad v = x_1^4 + x_2^4.$

1223. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1 e^{x_1} - x_2^3, \\ Dx_2 = x_1^3 - x_2, \end{cases}$ $\quad v = x_1^4 + x_2^4.$

1224. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1 e^{x_1} + x_2^5, \\ Dx_2 = -x_1^5 - x_2^3, \end{cases}$ $\quad v = x_1^6 + x_2^6.$

1225. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1^3 - x_2^3, \\ Dx_2 = x_1^3 - x_2^5, \end{cases}$ $\quad v = x_1^4 + x_2^4.$

1226. $\begin{cases} Dx_1 = 2x_2 - 2x_1 / (1 + x_1)^2, \\ Dx_2 = -\dfrac{2x_2}{(1 + x_1)^2} - \dfrac{2x_1}{(1 + x_1^2)^2}, \end{cases}$ $\quad v = x_2^2 + x_1^2 / (1 + x_1^2).$

По первому приближению, если это возможно, исследовать устойчивость нулевого решения систем:

1227. $\begin{cases} Dx_1 = x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^3, \\ Dx_2 = x_1 - 4x_2^5. \end{cases}$

1228. $\begin{cases} Dx_1 = -x_2 + x_1^2 \cos x_2, \\ Dx_2 = 3x_1 - 4x_2. \end{cases}$

1229. $\begin{cases} Dx_1 = -x_2 + \sin x_1^2, \\ Dx_2 = 4x_1 - 4x_2 + \sin^2 x_2. \end{cases}$

1230. $\begin{cases} Dx_1 = -\sin\left(x_2 + x_3\right), \\ Dx_2 = -x_1 - x_3 + x_3^3, \\ Dx_3 = -x_1 - x_2 - 2x_1 x_2. \end{cases}$

1231. $\begin{cases} Dx_1 = 3x_1 + 8x_3 + x_2^2 - x_3^3, \\ Dx_2 = 3x_1 - x_2 + 6x_3, \\ Dx_3 = -2x_1 - 5x_3 + x_1^5. \end{cases}$

1232. $\begin{cases} Dx_1 = -\sin x_1 + x_3, \\ Dx_2 = 2x_2, \\ Dx_3 = -x_1 - 3x_3. \end{cases}$

1233. $\begin{cases} Dx_1 = x_1 - x_2 - x_3, \\ Dx_2 = x_1 - x_2 e^{x_2}, \\ Dx_3 = 3x_1 + \sin x_3 + x_3^2. \end{cases}$

1234. $\begin{cases} Dx_1 = x_3 + \exp x_1^2 - \cos x_1, \\ Dx_2 = \operatorname{tg} x_1, \\ Dx_3 = x_2. \end{cases}$

1235. $\begin{cases} Dx_1 = -2x_1 - x_2, \\ Dx_2 = \sin 2x_1 - 4x_2. \end{cases}$

1236. $\begin{cases} Dx_1 = 2\sqrt{1+x_2} - 2e^{x_1+x_2}, \\ Dx_2 = 2x_1 - 4x_2. \end{cases}$

1237. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1 + x_2 + 3x_1 x_2 + 5x_1^4, \\ Dx_2 = -2x_1 - 3x_2 + 10x_2^5. \end{cases}$

Определить область изменения параметров, для которых имеет место асимптотическая устойчивость нулевого решения заданной системы:

1238. $\begin{cases} Dx_1 = ax_1 + x_2 + 5x_2^2, \\ Dx_2 = -e^{x_1} + e^{ax_2}. \end{cases}$

1239. $\begin{cases} Dx_1 = ax_1, \\ Dx_2 = bx_1 - 3\operatorname{tg} x_2. \end{cases}$

1240. $\begin{cases} Dx_1 = x_2 - 7x_2^2 x_1^3, \\ Dx_2 = x_3 + x_2^2 + 3x_1^3, \\ Dx_3 = -2x_1 - bx_2 - ax_3. \end{cases}$

1241. $\begin{cases} Dx_1 = ax_1 + x_3^{10}, \\ Dx_2 = \sin ax_2, \\ Dx_3 = ax_1 + ax_3. \end{cases}$

1242. $\begin{cases} Dx_1 = -x_1 + ax_2 + bx_3, \\ Dx_2 = -ax_1 - x_2 + ax_3 - \cos 2x_1 + \cos x_3, \\ Dx_3 = -bx_1 - ax_2 - x_3. \end{cases}$

1243. $\begin{cases} Dx_1 = -\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x_2, \\ Dx_2 = ax_1 - a^2 x_2. \end{cases}$

1244. $\begin{cases} Dx_1 = a^2 x_1 - 3\ln(1 + x_2), \\ Dx_2 = ax_1 + 4x_2. \end{cases}$

1245. $\begin{cases} Dx_1 = 2\sqrt{1+x_2} - 2\exp x_2^2, \\ Dx_2 = 5ax_1 - a^2 x_2. \end{cases}$

1246. Исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} Dx_1 = ax_1^3 + x_2, \\ Dx_2 = x_1 + dx_2^3. \end{cases}$$

1247. Исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} Dx_1 = -2x_1^3 + x_2, \\ Dx_2 = -x_1 - 3x_2^3. \end{cases}$$

1248. Исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} Dx_1 = -7x_1^3 - 2x_2, \\ Dx_2 = x_1 - 4x_2^3. \end{cases}$$

1248.1. Исследовать устойчивость решения $x_1(t) = t$, $x_2(t) = -t^2$ системы

$$\begin{cases} Dx_1 = \ln(1 + 2t - 2x_1) + 3x_2 + 3t^2 + 1, \\ Dx_2 = x_1^2 - 2tx_1 - 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

1248.2. Исследовать устойчивость стационарных решений системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + 3x^5. \end{cases}$$

1248.3. Исследовать устойчивость стационарных решений системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy + 4, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 17. \end{cases}$$

1248.4. Определить область изменения параметров, для которых имеет место асимптотическая устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} Dx = \alpha x - \cos y + e^{\beta t}, \\ Dy = \beta \sin x + \ln(1 + \alpha y)^3 - xz^2, \\ Dz = x^2 \cos z + \beta y + \sin \alpha z. \end{cases}$$

1248.5. Показать, что нетривиальное стационарное решение («траектория сбалансированного роста») дифференциального уравнения, описывающего модель Солоу (см. § 30) развития экономики, в случае, когда производственная функция является функцией Кобба – Дугласа $F(K, L) = \sigma K^{\alpha} L^{\beta}$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$, является асимптотически устойчивым. Доказать, что все нетривиальные решения уравнения стремятся при $t \to +\infty$ к этому стационарному решению.

XIV. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

45. Метод Пикара

Последовательные приближения к решению дифференциального уравнения. Метод Пикара относится к *аналитическим методам* построения приближенных решений дифференциальных уравнений, т.е. построения функций, близких к истинному решению на всем промежутке существования решения или на части этого промежутка.

Теорема 45.1 (*Пеано*). *Пусть функция* $f(x, y)$ *непрерывна в прямоугольнике* $\Pi = \{(x, y) \,\big|\, |x - x_0| \le a,$ $|y - y_0| \le b\}$. *Тогда задача Коши*

$$y' = f(x, y), \quad y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad (x, y) \in \Pi, \quad (x_0, y_0) \in \Pi,$$

имеет по крайней мере одно решение на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, *где* $\delta = \min\{a, b/M\}$, *если* $|f(x, y)| \le M$ *на прямоугольнике* Π.

Задача 45.1. Найти область, через каждую точку которой проходит хотя бы одно решение уравнения $y' = x\cos y + e^{xy}$.

Р е ш е н и е. Правая часть уравнения $f(x, y) = x\cos y + e^{xy}$ непрерывна во всех точках плоскости Oxy. Поэтому, согласно теореме Пеано, через каждую точку плоскости проходит хотя бы одна интегральная кривая.

Функция $f(x, y)$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяет на E по переменной y условию Липшица, если для любых точек (x, y_1) и (x, y_2) из E выполняется неравенство

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|,$$

где L – некоторая постоянная (постоянная Липшица).

Если непрерывная на E функция $f(x, y)$ имеет на выпуклом по y множестве E ограниченную частную производную $f'_y(x, y)$, т.е. $\left|f'_y(x, y)\right| \le K \ \forall (x, y) \in E,\ K > 0$, то функция $f(x, y)$ на E удовлетворяет условию Липшица по переменной y.

Теорема 45.2 (*Пикара – Линделёфа об однозначной разрешимости*). *Пусть функция* $f(x, y)$ *непрерывна на прямоугольнике*

$$\Pi = \{(x, y) \big| \left|x - x_0\right| \le a,\ \left|y - y_0\right| \le b\}$$

и удовлетворяет условию Липшица по переменной y. Тогда задача Коши $y' = f(x, y),\ y\big|_{x=x_0} = y_0$, *локально однозначно разрешима, решение* $y(x)$ *определено по крайней мере на отрезке* $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$, *где* $\delta = \min\{a, b / M\}$, *если* $\left|f(x, y)\right| \le M \quad \forall (x, y) \in \Pi$. *Решение может быть построено по методу последовательных приближений:*

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y_{n-1}(t))dt, \quad n = 1, 2, ..., \quad y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x). \tag{45.1}$$

Задача 45.2. Найти область, через каждую точку которой проходит хотя бы одно решение уравнения $y' = 2\sqrt{|\,y\,|}$.

Р е ш е н и е. Так как правая часть уравнения $f(x,y) = 2\sqrt{|\,y\,|}$ определена и непрерывна во всех точках плоскости Oxy, то через каждую точку плоскости проходит хотя бы одна интегральная кривая (теорема 45.1 (Пеано)). Так как $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\operatorname{sgn} y}{\sqrt{|\,y\,|}}$ непрерывна в любом прямоугольнике, не содержащем точек прямой $y = 0$, то в этой области условие Липшица выполнено и исходное уравнение имеет единственное локальное решение.

В прямоугольниках, содержащих точки оси Ox, условие Липшица не выполняется. Действительно, если бы условие Липшица выполнялось, то при $y \ne t$ было бы справедливо неравенство $|f(x, y) - f(x,t)| \le L|y - t|$ или $\dfrac{\left|f(x,y) - f(x,t)\right|}{\left|y - t\right|} \le L$ (L – постоянная Липшица), тогда как $\dfrac{\left|f(x,y) - f(x,0)\right|}{\left|y - 0\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{|\,y\,|}} \to +\infty$ при $t = 0$ и $y \to 0$.

Легко проверить, что существуют два решения исходного уравнения: $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2, & x \ge x_0, \\ -(x - x_0)^2, & x < 0, \end{cases}$

удовлетворяющих начальному условию $y\big|_{x=x_0} = 0$. Следовательно, в точках прямой $y = 0$ нарушена единственность решения исходной задачи.

Задача 45.3. Используя теорему 45.2, доказать однозначную разрешимость задачи Коши $y' = f(x, y),\ y\big|_{x=x_0} = y_0$, на прямоугольнике $\Pi = \left\{(x, y) \big| \left|x - x_0\right| \le a,\ \left|y - y_0\right| \le b\right\}$. Установить промежуток существования решения. Построить n последовательных приближений к решению задачи Коши.

А л г о р и т м р е ш е н и я.

- Проверить непрерывность функции $f(x, y)$ на прямоугольнике П.

• Проверить выполнение условия Липшица по y на прямоугольнике П. Для этого, например, найти $f'_y(x, y)$ и проверить ее непрерывность на прямоугольнике П.

• Исследовать на глобальный экстремум функцию $f(x, y)$ на прямоугольнике П и найти число $M > 0$ такое, что $|f(x, y)| \le M$ на П.

• Вычислить $\delta = \min\{a, b/M\}$. Тогда $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ – промежуток существования решения.

• По формулам (45.1) провести построение приближений $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$.

• Если возможно, то вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$. Тогда $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ – решение задачи Коши.

Задание 45.3.1. Используя теорему 45.2, доказать однозначную разрешимость задачи Коши $y' = y^2 + 2x - 1$, $y|_{x=0} = 1$, на прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) \,|\, |x| \le 1/2,\ |y-1| \le 1\}$. Указать промежуток существования решения. Построить шесть последовательных приближений задачи Коши.

Решение.

x_0 := 0   y_0 := 1

a := 0.5   b := 1   h := 0.01

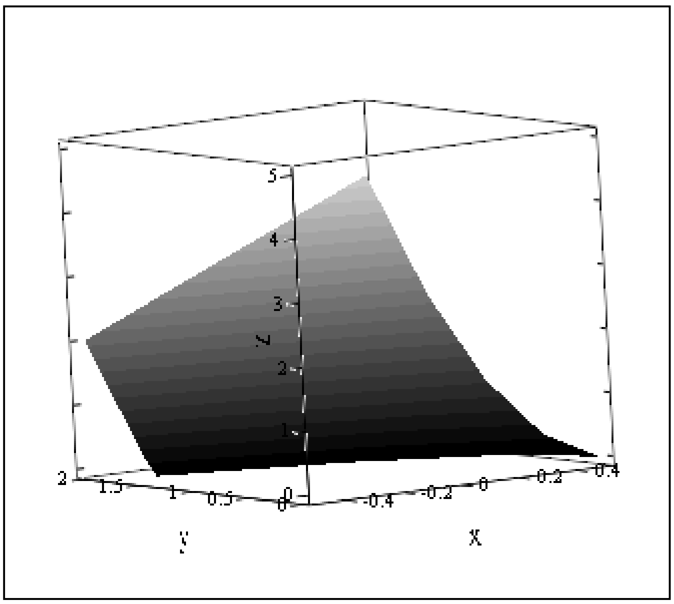
$f(x,y) := y^2 + 2 \cdot x - 1$

$\frac{d}{dy} f(x,y) \to 2 \cdot y$

x_n := x_0 – a   y_n := y_0 – b

x_k := x_0 + a   y_k := y_0 + b

x := x_n, x_n + h .. x_k   y := y_n , y_n + h .. y_k



f

$max\_f := f(x\_k, y\_k) \rightarrow 4.0$

$\delta := \min\left(a, \dfrac{b}{max\_f}\right) \rightarrow 0.25$

Промежуток существования: $\dfrac{-1}{4} \le x \le \dfrac{1}{4}$

$a1 := x\_0 - \delta \rightarrow -0.25$ $\qquad$ $b1 := x\_0 + \delta \rightarrow 0.25$

$y0(x) := y\_0$

$$y1(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y\_0)\,dt \rightarrow x^2 + 1$$

$$y2(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y1(t))\,dt \rightarrow \frac{x^2\cdot\left(3\cdot x^3 + 10\cdot x + 15\right)}{15} + 1$$

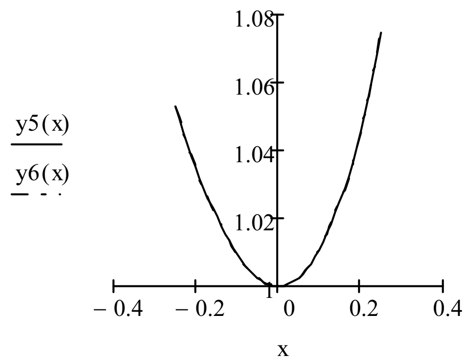
$$y3(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y2(t))\,dt \rightarrow \frac{x^{11}}{275} + \frac{4\cdot x^9}{135} + \frac{x^8}{20} + \frac{4\cdot x^7}{63} + \frac{13\cdot x^6}{45} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{3} + \frac{2\cdot x^3}{3} + x^2 + 1$$

$$y4(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y3(t))\,dt \rightarrow \frac{x^{23}}{1739375} + \frac{8\cdot x^{21}}{779625} + \frac{x^{20}}{55000} + \frac{376\cdot x^{19}}{5332635} + \frac{94\cdot x^{18}}{334125} + \frac{288787\cdot x^{17}}{636174000} + \cdots$$

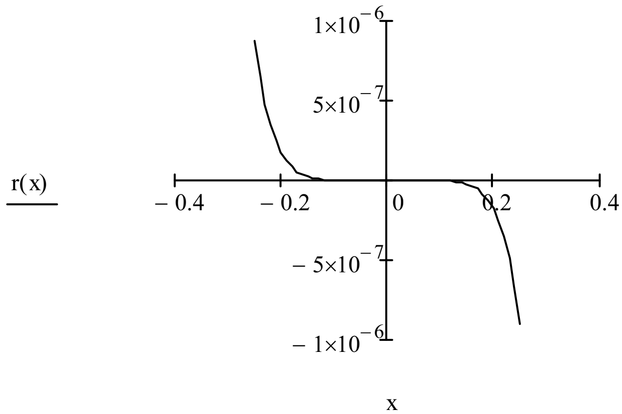
$$y5(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y4(t))\,dt \rightarrow \frac{x^{47}}{142194993359375} + \frac{16\cdot x^{45}}{61022710546875} + \frac{x^{44}}{2104643750000} + \frac{544528\cdots}{1256359973\cdots}$$

$$y6(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y5(t))\,dt$$

$x := a1, a1 + h\,..\,b1$



$r(x) := y5(x) - y6(x)$ $\qquad$ $r(-0.25) = 8.717\times 10^{-7}$



$r(0.25) = -8.999\times 10^{-7}$

Задание 45.3.2. Построить решение задачи Коши $y' = x - y,\ y|_{x=0} = 1,$ методом последовательных приближений.

Р е ш е н и е.

$x\_0 := 0 \qquad y\_0 := 1 \qquad a := \frac{-1}{2} \qquad b := \frac{1}{2}$

$f(x,y) := x - y \qquad c := 0 \qquad d := 2$

$y0(x) := y\_0$

$$y1(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y0(t))\,dt \to \frac{x\cdot(x-2)}{2} + 1$$

$$y2(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y1(t))\,dt \to x^2 - \frac{x^3}{6} - x + 1$$

$$y3(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y2(t))\,dt \to \frac{x\cdot(x-2)\cdot\left(x^2 - 6\cdot x + 12\right)}{24} + 1$$

$$y4(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y3(t))\,dt \to \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$$

$$y5(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y4(t))\,dt$$

$$y5(x)\ \text{expand} \to \frac{x^6}{720} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$$

$$y5(x) := \frac{x^6}{6!} - \frac{2\cdot x^5}{5!} + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^2}{2!} - \frac{x}{1!} + 1$$

$$Y5(x) := 2\cdot\sum_{k=0}^{5}\frac{(-1)^k\cdot x^k}{k!} - \frac{x^6}{6!} + x - 1$$

$3! = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

$6! = 720$

$7! = 5.04\times 10^3$

$8! = 4.032\times 10^4$

$9! = 3.629\times 10^5$

$10! = 3.629\times 10^6$

$$y6(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y5(t))\,dt$$

$$y6(x) \text{ expand } \rightarrow \frac{x^6}{360} - \frac{x^7}{5040} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$$

$$y6(x) := -\frac{x^7}{7!} + \frac{2x^6}{6!} - \frac{2 \cdot x^5}{5!} + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^2}{2!} - \frac{x}{1!} + 1$$

$$Y6(x) := 2 \cdot \sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k!} + \frac{x^7}{7!} + x - 1$$

$$y7(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y6(t))\,dt$$

$$y7(x) \text{ expand } \rightarrow \frac{x^8}{40320} - \frac{x^7}{2520} + \frac{x^6}{360} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$$

$$y7(x) := \frac{x^8}{8!} - \frac{2x^7}{7!} + \frac{2x^6}{6!} - \frac{2 \cdot x^5}{5!} + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^2}{2!} - \frac{x}{1!} + 1$$

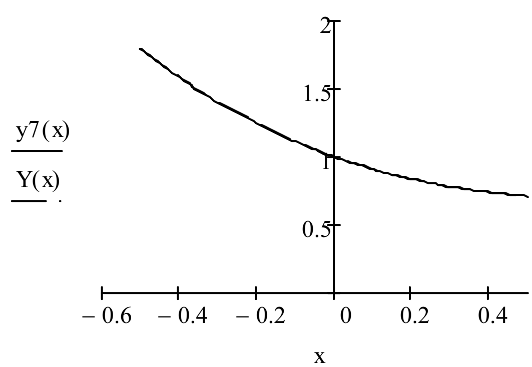
$$Y7(x) := 2 \cdot \sum_{k=0}^{7} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k!} - \frac{x^8}{8!} + x - 1$$

$$Y(x, n) := 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k!} + \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!} + x - 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left[2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k!} + x - 1 \right] \rightarrow x + 2 \cdot e^{-x} - 1$$

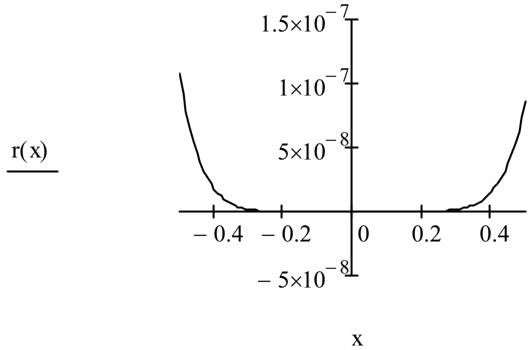
$$Y(x) := x + 2 \cdot e^{-x} - 1$$

$$x := a, a + 0.01 .. b$$



$r(x) := Y(x) - y7(x)$ $\qquad$ $r(a) = 0.00000011$

$r(b) = 8.663136808 \times 10^{-8}$



1249. Выяснить, удовлетворяют ли приведенные ниже функции условию Липшица по y в области $\Pi = \{(x, y| 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$:

а) $xy^2 + x^3$; б) $\sin(x - y)$; в) $1/(x + y)$; г) $\sqrt{y + 2x}$; д) $|y - x|$.

1250. Будет ли через любую точку плоскости Oxy проходить только одно решение уравнения $y' = 2x + x^5y^2$?

1251. Указать условия, достаточные для однозначной разрешимости задачи Коши в точке (x_0, y_0):

а) $y' = f(y/x)$; б) $y' = p(x)y + q(x)$; в) $y' = \varphi(x)/\psi(y)$.

1252. Пользуясь теоремой существования решения, указать какой-нибудь отрезок $|x| \le h$, на котором существует решение задачи Коши $y' = y^2,\ y|_{x=0} = 1$.

1253. Решить задачу Коши $y' = y^2,\ y|_{x=0} = 1$. На каком интервале существует ее решение? Сравнить с предыдущим результатом.

Используя теорему 45.2 (Пикара – Линделёфа), проверить однозначную разрешимость следующих задач Коши на указанных прямоугольниках П. Установить промежуток существования решения. Построить n последовательных приближений к задаче Коши:

1254. $y' = x - y^2,\ \ y|_{x=0} = 0;\quad \Pi = \{(x, y)|\ |x| \le 1,\ |y| \le 2\},\ n = 6.$

1255. $y' = y^2 - 3x^2 - 1,\ y|_{x=0} = 1;\quad \Pi = \{(x, y)|\ |x| \le 1/2,\ |y - 1| \le 1\},\ n = 5.$

1256. $y' = y + e^y,\ y|_{x=0} = 1;\quad \Pi = \{(x, y)|\ |x| \le 1,\ |y - 1| \le 1\},\ n = 3.$

1257. $y' = x + y^2,\ y|_{x=0} = 0;\quad \Pi = \{(x, y)|\ |x| \le 1,\ |y - 1| \le 1\},\ n = 3.$

1258. $y' = 2y - 2x^2 - 3,\ y|_{x=0} = 2;\quad \Pi = \{(x, y)|\ |x| \le 1,\ |y - 2| \le 1\},\ n = 3.$

1259. $xy' = 2x - y,\ y|_{x=1} = 2;\quad \Pi = \{(x, y)|\ |x - 1| \le 1/2,\ |y - 2| \le 1\},\ n = 3.$

1260. $y' = y^2 - x^2,\ y|_{x=0} = 0;\quad \Pi = \{(x, y)|\ |x| \le 1,\ |y| \le 1\},\ n = 9.$

1261. $y' = y^2 - x^2,\ y|_{x=0} = 1;\quad \Pi = \{(x, y)|\ |x| \le 1/2,\ |y - 1| \le 1\},\ n = 8.$

1261.1. $y' = x^2 + y^2,\ y|_{x=0} = 0;\quad \Pi = \{(x, y)|\ |x| \le 1,\ |y - 1| \le 1\},\ n = 10.$

1261.2. $y' = y^2 - 3x^2 - 1,\ y\big|_{x=0} = 1;\quad \Pi = \left\{(x,y)\,\big|\, |x| \le 2,\ |y-1| \le 2\right\},\ n = 7.$

1261.3. $y' = y^2 - 2x^2 + 1,\ y\big|_{x=1} = 1;\quad \Pi = \left\{(x,y)\,\big|\, |x-1| \le 1,\ |y-1| \le 2\right\},\ n = 9.$

1261.4. $y' = 1 + x\sin y, y\big|_{x=\pi} = 2\pi;\quad \Pi = \left\{(x,y)\,\big|\, |x-\pi| \le \pi,\ |y-2\pi| \le \pi\right\},\ n = 8.$

1261.5. $y' = (x+y)^2,\ y\big|_{x=0} = 1;\quad \Pi = \left\{(x,y)\,\big|\, |x| \le 2,\ |y-1| \le 2\right\},\ n = 5.$

1261.6. $y' = (x+y)^2,\ y\big|_{x=0} = 0;\quad \Pi = \left\{(x,y)\,\big|\, |x| \le 3,\ |y| \le 2\right\},\ n = 6.$

Методом последовательных приближений найти решения задач Коши:

1262. $y' + x^2 y = x^2,\ \ y|_{x=2} = 1.$

1263. $y' = x + y,\ \ y|_{x=0} = 0.$

1264. $y' = y,\ \ y|_{x=0} = 1.$

1265. $y' = xy,\ \ y|_{x=0} = 1.$

1266. $y' = (y-3)(x^2 + x^3),\ \ y|_{x=5} = 3.$

1266.1. $y' = x + y,\ y\big|_{x=0} = 2.$

1266.2. $y' = y^2,\ y\big|_{x=0} = 1.$

1266.3. $y' = 2xy^2,\ \ y\big|_{x=0} = 1.$

1266.4. $y' = 2xy,\ y\big|_{x=0} = 1.$

1266.5 $y' = 2xy,\ \ y\big|_{x=0} = 2.$

1266.6. $y' = 3x^2 - 3x^2 y,\ y\big|_{x=0} = 2.$

1266.7. $xy' = 2x + 1,\ y\big|_{x=1} = 2.$

Последовательные приближения к решению дифференциальной системы. Метод последовательных приближений переносится на случай задачи Коши для векторного уравнения.

Пусть E – выпуклое множество, $E \subset \mathbb{R}^n$.

Векторная функция $f(x,\,y) = \left(f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\right)^T$, определенная на множестве $G = I \cdot E,$ по переменной y удовлетворяет условию Липшица, если для любых точек $(x,\,y),\ \ (x,\,z)$ из G выполняется неравенство $\|f(x,\,y) - f(x,\,z)\| \le L\|y - z\|,$ где L – некоторая постоянная (постоянная Липшица).

Если у функции $f(x,\,y) = (f_1(x,\,y_1,\,...,\,y_n),\,...,\,f_n(x,\,y_1,\,...,\,y_n))^T$, $(x,\,y) \in G$, существуют ограниченные на G частные производные $\left|\dfrac{\partial f_k}{\partial y_j}\right| \le K,\ k,\ j = \overline{1,n},\ \forall (x,\,y) \in G,$ то функция $f(x,\,y)$ удовлетворяет на G по переменной y условию Липшица.

***Теорема* 45.3** (*Пикара – Линделёфа*). *Пусть векторная функция $f(x,\,y)$ непрерывна на множестве G и по переменной y удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $(x_0,\,y^0) \in G.$ Тогда задача Коши*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\,y),\ \ (x,\,y) \in E,\ \ y\big|_{x=x_0} = y^0,\ \ y^0 = (y_1^0,\,...,\,y_n^0)^T,$$

на некотором отрезке $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ однозначно разрешима, причем решение $y(x) = \left(y_1(x),\,...,\,y_n(x)\right)^T$ может быть построено по методу последовательных приближений:

$$y^0(x) = y^0,\ \ y^m(x) = y^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,\,y^{m-1}(t))dt,\quad y(x) = \lim_{m\to\infty} y^m(x).$$

Отметим, что допустимое значение постоянной L зависит от используемой нормы. В качестве нормы в $\mathbb{R}^n$ можно использовать евклидову норму $\|y\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}$, $y = (y_1, ..., y_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Задача 45.4. Используя теорему 45.3, доказать однозначную разрешимость задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), \\ z' = g(x, y, z), \; y\big|_{x=x_0} = y_0, \; z\big|_{x=x_0} = z_0, \end{cases}$$

на множестве $\Pi = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b, |z - z_0| \le b\right\}$.

Построить n последовательных приближений к решению задачи Коши.

Алгоритм решения.

• Проверить непрерывность функций $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ на множестве П.

• Проверить выполнение условия Липшица по (y, z) на множестве П для функции $(f(x, y, z), g(x, y, z))^T$. Для этого, например, можно найти частные производные f'_y, f'_z, g'_y, g'_z и проверить их непрерывность на множестве П.

• Построить требуемые приближения по формулам:

$$y_0(x) = y_0, \quad z_0(x) = z_0,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0, z_0)dt, \quad z_1(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, y_0, z_0)dt,$$

$$\ldots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t), z_{n-1}(t))dt,$$

$$z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, y_{n-1}(t), z_{n-1}(t))dt, \; n = 1, 2, \ldots .$$

• Найти, если это возможно, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(x)$. Тогда $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$, $z(x) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n(x)$ – решение задачи Коши.

Задание 45.4.1. Используя теорему 45.3, доказать однозначную разрешимость задачи Коши

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = x^3(y + z), \; y\big|_{x=0} = 1, \; z\big|_{x=0} = -2. \end{cases}$$

Построить пять последовательных приближений к решению задачи Коши на множестве

$$\Pi = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, |x| \le 1\right\}, \; |y - 1| \le 1, \; |z + 2| \le 1\} .$$

Если это возможно, то найти решение $y(x), z(x)$ задачи Коши.

Решение.

$x\_0 := 0 \qquad y\_0 := 1 \qquad z\_0 := -2$

$f(x, y, z) := z \qquad \frac{d}{dy} f(x, y, z) \to 0 \qquad \frac{d}{dz} f(x, y, z) \to 1$

$g(x, y, z) := x^3 \cdot (y + z) \qquad \frac{d}{dy} g(x, y, z) \to x^3 \qquad \frac{d}{dz} g(x, y, z) \to x^3$

$y0(x) := y\_0 \qquad z0(x) := z\_0$

$$y1(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y0(t), z0(t))\,dt \rightarrow 1 - 2\cdot x$$

$$z1(x) := z\_0 + \int_{x\_0}^{x} g(t, y0(t), z0(t))\,dt \rightarrow -\frac{x^4}{4} - 2$$

$$y2(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y1(t), z1(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow 1 - 2\cdot x - \frac{x^5}{20}$$

$$z2(x) := z\_0 + \int_{x\_0}^{x} g(t, y1(t), z1(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow -\frac{x^8}{32} - \frac{2\cdot x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2$$

$$y3(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y2(t), z2(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow 1 - \frac{x^6}{15} - \frac{x^5}{20} - 2\cdot x - \frac{x^9}{288}$$

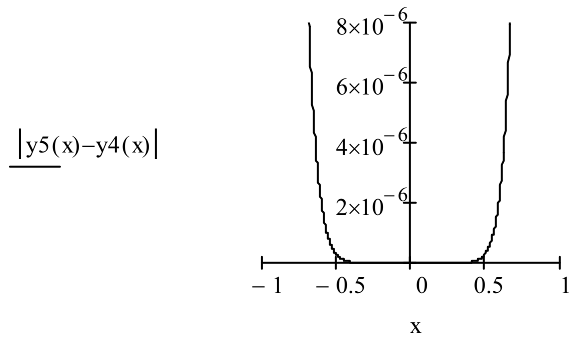
$$z3(x) := z\_0 + \int_{x\_0}^{x} g(t, y2(t), z2(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow -\frac{x^{12}}{384} - \frac{x^9}{20} - \frac{x^8}{32} - \frac{2\cdot x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2$$

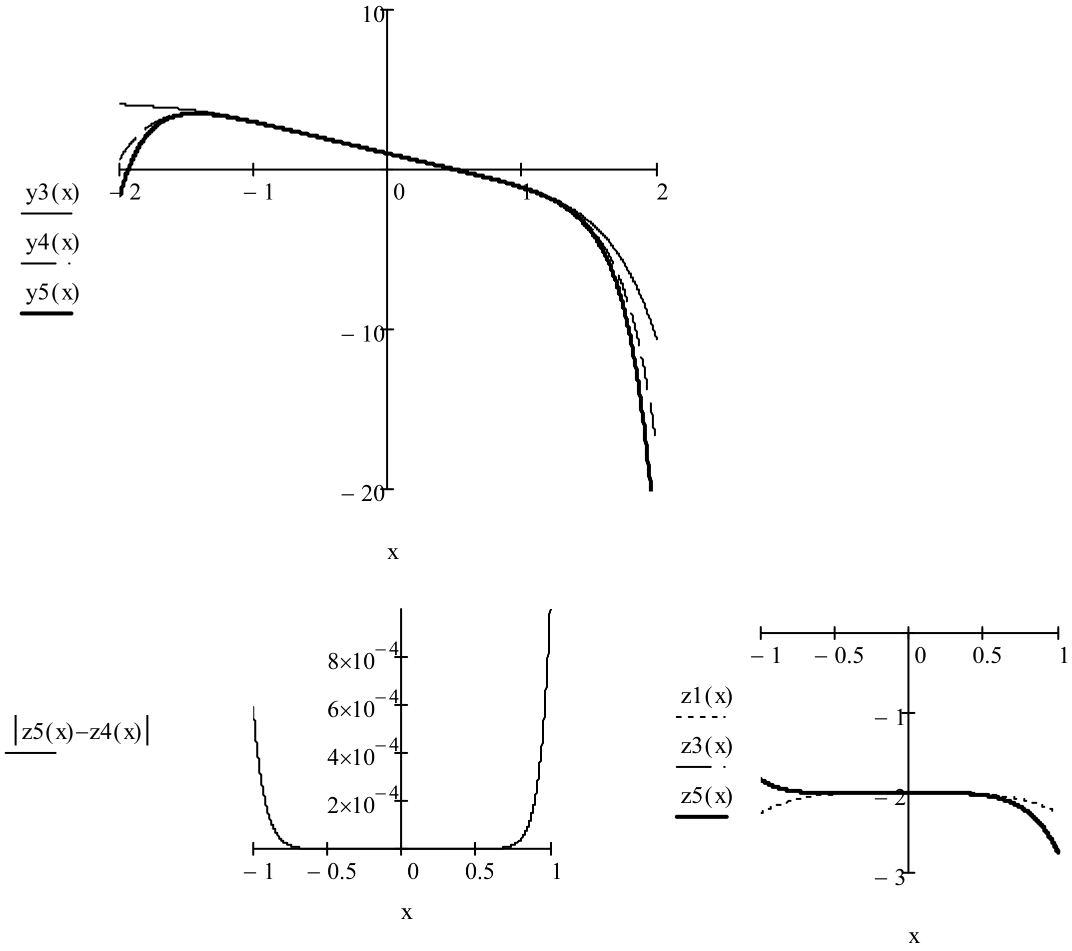
$$y4(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y3(t), z3(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow 1 - \frac{x^{10}}{200} - \frac{x^9}{288} - \frac{x^6}{15} - \frac{x^5}{20} - 2\cdot x - \frac{x^{13}}{4992}$$

$$z4(x) := z\_0 + \int_{x\_0}^{x} g(t, y3(t), z3(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow -\frac{x^{16}}{6144} - \frac{77\cdot x^{13}}{18720} - \frac{x^{12}}{384} - \frac{x^{10}}{150} - \frac{x^9}{20} - \frac{x^8}{32} - \frac{2\cdot x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2$$

$$y5(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y4(t), z4(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow 1 - \frac{11\cdot x^{14}}{37440} - \frac{x^{13}}{4992} - \frac{x^{11}}{1650} - \frac{x^{10}}{200} - \frac{x^9}{288} - \frac{x^6}{15} - \frac{x^5}{20} - 2\cdot x -$$

$$z5(x) := z\_0 + \int_{x\_0}^{x} g(t, y4(t), z4(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow -\frac{x^{20}}{122880} - \frac{19\cdot x^{17}}{74880} - \frac{x^{16}}{6144} - \frac{x^{14}}{1200} - \frac{77\cdot x^{13}}{18720} - \frac{x^{12}}{384} - \frac{x^{10}}{150} -$$





Задание 45.4.2. Методом последовательных приближений найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = -y - 2z, \\ z' = 3y + 4z, \;\; y\big|_{x=0} = 1, \;\; z\big|_{x=0} = -1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

$x\_0 := 0 \qquad y\_0 := 1 \qquad z\_0 := -1$

$f(x, y, z) := -y - 2 \cdot z \qquad g(x, y, z) := 3y + 4z$

$y0(x) := y\_0 \qquad z0(x) := z\_0$

$$y1(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y0(t), z0(t))\,dt \rightarrow x + 1$$

$$z1(x) := z\_0 + \int_{x\_0}^{x} g(t, y0(t), z0(t))\,dt \rightarrow -x - 1$$

$$y2(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y1(t), z1(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$z2(x) := z\_0 + \int_{x\_0}^{x} g(t, y1(t), z1(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow -\frac{x^2}{2} - x - 1$$

$$y3(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y2(t), z2(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$z3(x) := z\_0 + \int_{x\_0}^{x} g(t, y2(t), z2(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow -\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1$$

$$y4(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y3(t), z3(t))\,dt \rightarrow \text{ expand } \rightarrow \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$z4(x) := z\_0 + \int_{x\_0}^{x} g(t, y3(t), z3(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow -\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1$$

$$y5(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y4(t), z4(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$z5(x) := z\_0 + \int_{x\_0}^{x} g(t, y4(t), z4(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow -\frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1$$

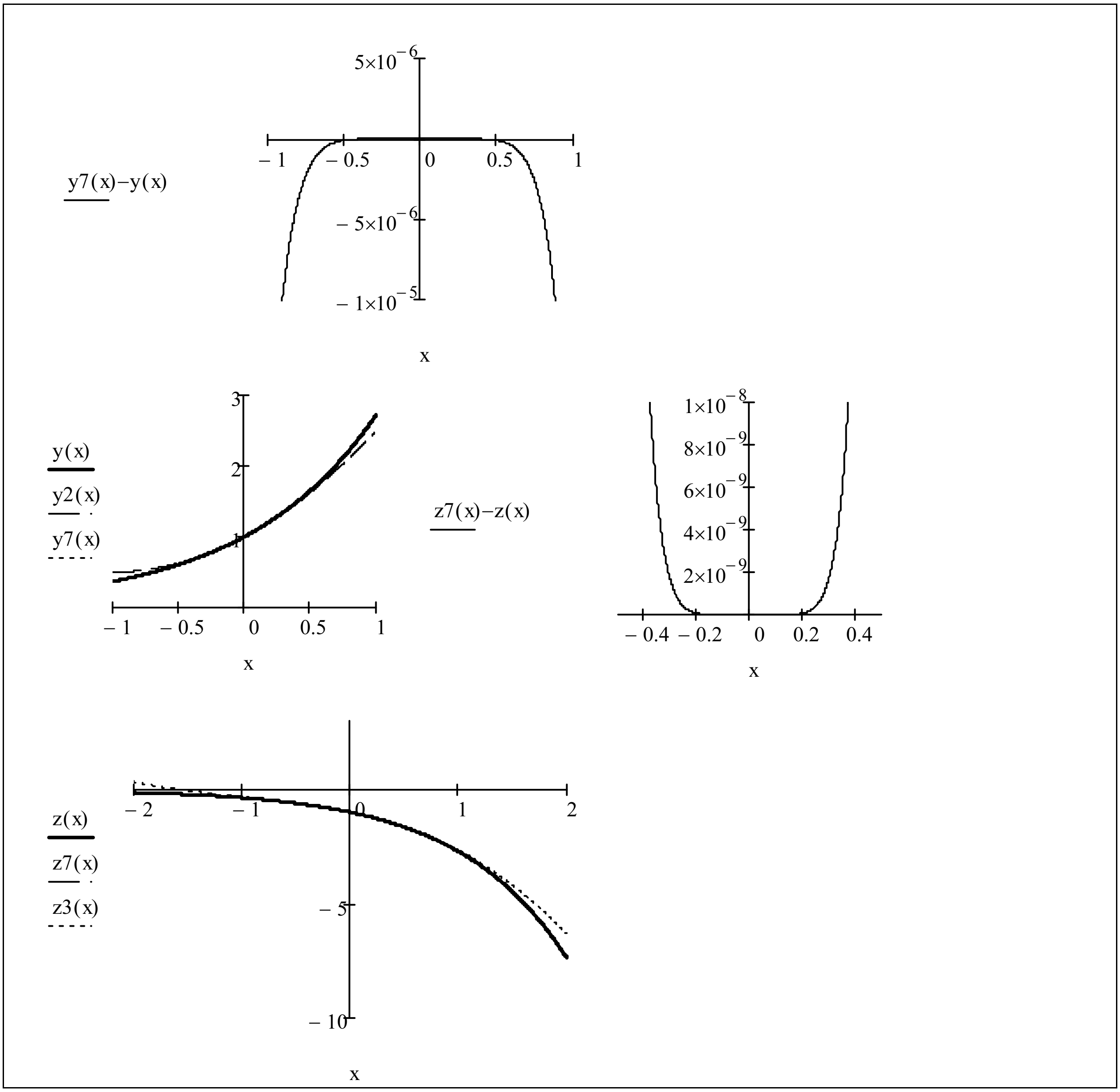
$$y6(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y5(t), z5(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$z6(x) := z\_0 + \int_{x\_0}^{x} g(t, y5(t), z5(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow -\frac{x^6}{720} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1$$

$$y7(x) := y\_0 + \int_{x\_0}^{x} f(t, y6(t), z6(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$z7(x) := z\_0 + \int_{x\_0}^{x} g(t, y6(t), z6(t))\,dt \text{ expand } \rightarrow -\frac{x^7}{5040} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1$$

$$y(x) := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \rightarrow e^x \qquad z(x) := -e^x$$



Используя теорему 45.3, доказать однозначную разрешимость задачи Коши. Построить n последовательных приближений к решению задачи Коши. Указать промежуток существования решения:

1267. $\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y + xz, \end{cases}$ $y|_{x=0} = 1,\quad z|_{x=0} = -2;\quad n = 3.$

1268. $\begin{cases} y' + 3y + z = 0, \\ z' - y + z = 0, \end{cases}$ $y|_{x=0} = 1,\quad z|_{x=0} = 1;\quad n = 3.$

1269. $\begin{cases} y' = x - z^2, \\ z' = x + y, \end{cases}$ $y|_{x=0} = 1,\quad z|_{x=0} = 1;\quad n = 2.$

1270. $\begin{cases} y' + 7y - z = 0, \\ z' + 2y + 5z = 0, \end{cases}$ $y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = 1; \quad n = 2.$

1271. $\begin{cases} y' + z = y, \\ z' = yz, \end{cases}$ $y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = 1/2; \quad n = 3.$

1272. $\begin{cases} y' = x + y + z, \\ z' = y - z, \end{cases}$ $y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = -2; \quad n = 2.$

1272.1. $\begin{cases} y' = x + y - z^2, \quad G = \{(x,\, y,\, z) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ |z| \le 1\}, \\ z' = yz + 1,\ y\big|_{x=0} = z\big|_{x=0} = 0; \quad n = 6. \end{cases}$

1272.2. $\begin{cases} y' = x^2 - y^2 + z, \quad G = \{(x,\, y,\, z) \mid |x| \le 2,\ |y| \le 1,\ |z| \le 1\}, \\ z' = y + z^2 - 1,\ y\big|_{x=0} = z\big|_{x=0} = 0; \quad n = 4. \end{cases}$

1272.3. $\begin{cases} y' = xy + z, \quad G = \{(x,\, y,\, z) \mid |x| \le 2,\ |y| \le 2,\ |z - 1| \le 2\}, \\ z' = y + xz,\ y\big|_{x=0} = 0,\ z\big|_{x=0} = 1; \quad n = 5. \end{cases}$

1272.4. $\begin{cases} y' = y - z, \quad G = \{(x,\, y,\, z) \mid |x| \le 2,\ |y| \le 2,\ |z - 1/2| \le 1\}, \\ z' = yz,\ y\big|_{x=0} = 0,\ z\big|_{x=0} = 1/2; \quad n = 6. \end{cases}$

1272.5. $\begin{cases} y' = y + z + \cos x - \sin x - x, \quad G = \{(x, y, z) \mid |x| \le \pi,\ |y| \le 1,\ |z| \le 1\}, \\ z' = y^2 + \cos^2 x,\ y\big|_{x=0} = z\big|_{x=0} = 0; \quad n = 10. \end{cases}$

1272.6. $\begin{cases} y' = z, \quad G = \{(x,\, y,\, z) \mid |x| \le 2,\ |y - 1| \le 2,\ |z - 2| \le 3\}, \\ z' = y^2,\ y\big|_{x=0} = 1,\ z\big|_{x=0} = 2; \quad n = 6. \end{cases}$

1272.7. $\begin{cases} y' = y + z - x^2, \quad G = \{(x,\, y,\, z) \mid |x| \le 2,\ |y - 1| \le 2,\ |z| \le 2\}, \\ z' = y^2 + 2x - e^{2x},\ y\big|_{x=0} = 1,\ z\big|_{x=0} = 0; \quad n = 6. \end{cases}$

1272.8. $\begin{cases} y' = z^2, \quad G = \{(x,\, y,\, z) \mid |x| \le 1,\ |y - 1| \le 3,\ |z - 2| \le 4\}, \\ z' = y^2,\ y\big|_{x=0} = 1,\ z\big|_{x=0} = 2; \quad n = 5. \end{cases}$

Методом последовательных приближений найти решение задачи Коши:

1272.9. $\begin{cases} y' = -y - 2z, \\ z' = 3y + 4z, \quad y\big|_{x=0} = 2, \quad z\big|_{x=0} = -3. \end{cases}$

1272.10. $\begin{cases} y' = -y - 2z, \\ z' = 3y + 4z, \quad y\big|_{x=0} = 3, \quad z\big|_{x=0} = -4. \end{cases}$

1272.11. $\begin{cases} y' = 3y + 5z, \\ z' = -2y - 8z, \quad y\big|_{x=0} = 5, \quad z\big|_{x=0} = -1. \end{cases}$

1272.12. $\begin{cases} y' = 3y + 5z, \\ z' = -2y - 8z, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad z\big|_{x=0} = -2. \end{cases}$

1272.13. $\begin{cases} y' = 3y + 5z, \\ z' = -2y - 8z, \quad y\big|_{x=0} = 6, \quad z\big|_{x=0} = -3. \end{cases}$

1272.14. $\begin{cases} y' = 5y + 4z, \\ z' = 4y + 5z, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad z\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

1272.15. $\begin{cases} y' = 5y + 4z, \\ z' = 4y + 5z, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad z\big|_{x=0} = -1. \end{cases}$

1272.16. $\begin{cases} y' = 5y + 4z, \\ z' = 4y + 5z, \quad y\big|_{x=0} = 2, \quad z\big|_{x=0} = 0. \end{cases}$

1272.17. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -2y - z, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad z\big|_{x=0} = -2; \end{cases}$

1272.18. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -2y - z, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad z\big|_{x=0} = 0; \end{cases}$

1272.19. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -2y - z, \quad y\big|_{x=0} = 2, \quad z\big|_{x=0} = -2; \end{cases}$

1272.20. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -2y - z, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad z\big|_{x=0} = -2; \end{cases}$

1272.21. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -2y - z, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad z\big|_{x=0} = 2. \end{cases}$

46. Метод ломаных Эйлера

Численное решение дифференциальных уравнений. *Метод ломаных Эйлера* относится к *численным методам* построения приближенных решений дифференциального уравнения, т.е. построения таблиц приближенных значений искомого решения при отдельных значениях аргумента. Метод рассматривается в предположении однозначной разрешимости задачи Коши.

Интегральный критерий. Для того чтобы непрерывная функция $y(x)$, $x \in I$, была решением задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $x_0 \in I$, необходимо и достаточно выполнение интегрального тождества

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \qquad \forall x \in I, \quad x_0 \in I.$$

Метод Эйлера приближенного решения исходной *задачи Коши* состоит в том, что на промежутке $x_i \le \tau \le x_i + h$ функцию $f(\tau, y(\tau))$ считают равной постоянной величине $f(x_i, y_i)$, которая уже известна. Тогда вместо интегрального тождества получают следующую формулу для нахождения приближенного значения $y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}$:

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i).$$

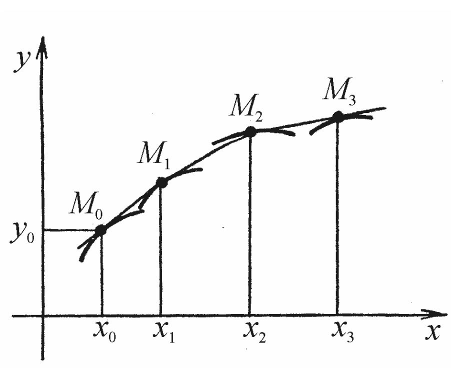


Рис. 31

Разбивая точками $x_0, x_1, \dots, x_n = X$ промежуток $[x_0, X]$ на n равных частей, $h = \dfrac{X - x_0}{n}$, последовательно вычисляют значения $y_1, \dots, y_n$ по итерационной формуле $y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)$, $i = \overline{0,\ n-1}$. При этом искомая кривая $y = y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной $M_0M_1 \dots M_n$ с вершинами M_i, $i = \overline{0,\ n}$. Каждое звено M_iM_{i+1}, $i = \overline{0,\ n-1}$, этой ломаной, называемой *ломаной Эйлера*, имеет направление, совпадающее с направлением касательной в точке $M_i(x_i, y_i)$ к той интегральной кривой исходного дифференциального уравнения, которая проходит через точку M_i (рис. 31). Ломаная Эйлера может быть построена как справа от начальной точки x_0, так и слева.

Задача 46.1. Применив метод Эйлера, составить на отрезке [0, 1] таблицу приближенных значений решения задачи Коши $y' = xy/2$, $y|_{x=0} = 1$, выбрав шаг $h = 0, 1$.

Р е ш е н и е. Приближенные значения будем вычислять последовательно, используя итерационную формулу: $y_{i+1} = y_i + 0{,}1\dfrac{y_i x_i}{2}$, $i = \overline{0, 9}$. Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$hf(x_i, y_i)$	Точное решение $y = e^{x^2/4}$
0	0,0	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000
1	0,1	1,0000	0,0500	0,0050	1,0025
2	0,2	1,0050	0,1005	0,0101	1,0100
3	0,3	1,0151	0,1523	0,0152	1,0227
4	0,4	1,0303	0,2067	0,0207	1,0408
5	0,5	1,0509	0,2626	0,0263	1,0645
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323	1,0942
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388	1,1303
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459	1,1735
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537	1,2244
10	1,0	1,2479			1,2840

Метод ломаных Эйлера дает непосредственный алгоритм построения приближенного (численного) решения, и его можно реализовать с помощью компьютера.

Методом Эйлера при указанных значениях h найти численное решение задачи Коши на заданных отрезках:

1273. $y' = x^2 + y^2$, $y|_{x=0} = 1$; $[0, 1]$; $h = 0{,}2$.
1274. $y' = 1 + xy^2$, $y|_{x=0} = 0$; $[0, 1]$; $h = 0{,}1$.
1275. $y' = -y^2 + y/x$, $y|_{x=1} = 1$; $[1, 2]$; $h = 0{,}2$.
1276. $y' = xy^3$, $y|_{x=0} = 1$; $[0; 0{,}6]$; $h = 0{,}1$.
1277. $y' = (x + y)/(y - x)$, $y|_{x=0} = 1$; $[0, 1]$; $h = 0{,}1$.
1278. $y' = y + (1 + x)y^2$, $y|_{x=0} = 1$; $[0; 0{,}5]$; $h = 0{,}1$.
1279. $y' = -y^2 + y/(x + 1)$, $y|_{x=0} = 1$; $[0, 1]$; $h = 0{,}1$.
1280. $y' = y/x$, $y|_{x=1} = 1$; $[1, 4]$; $h = 0{,}5$.
1281. $y' = x^2y + 2$, $y|_{x=0} = 0$; $[0, 1]$; $h = 0{,}1$.
1282. $y' = (6 - x^2y)/x^2$; $y|_{x=1} = 2$; $[1; 1{,}5]$; $h = 0{,}1$.

Численное решение дифференциальных систем. Метод Эйлера распространяется на решение задачи Коши для векторного уравнения. Для задачи Коши $\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z), \end{cases}$ $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $z\big|_{x=x_0} = z_0$, $x_0 \le x \le X$, приближенные значения $y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$, $z_{i+1} \approx z(x_{i+1})$ решения вычисляются последовательно по формулам:

$$y_{i+1} = y_i + hf_1(x_i, y_i, z_i), \quad z_{i+1} = z_i + hf_2(x_i, y_i, z_i), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Задача 46.2. Применив метод Эйлера, составить на отрезке [1, 2] таблицу приближенных значений решения задачи Коши

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' + y + z/x = 0, \end{cases} \quad y|_{x=1} = 0{,}77, \quad z|_{x=1} = -0{,}44,$$

с шагом $h = 0{,}1$.

Р е ш е н и е. Приближенные значения решения задачи Коши вычисляем по итерационным формулам:

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}1z_i, \; z_{i+1} = z_i + 0{,}1(-y_i - z_i/x_i), \; i = \overline{0, 9}.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

i	x_i	y_i	z_i	i	x_i	y_i	z_i
0	1,0	0,77000	–0,44000	6	1,6	0,46361	–0,58311
1	1,1	0,72600	–0,47300	7	1,7	0,40530	–0,59302
2	1,2	0,67870	–0,50260	8	1,8	0,34599	–0,59867
3	1,3	0,62844	–0,52859	9	1,9	0,28613	–0,60001
4	1,4	0,57558	–0,55077	10	2,0	0,22613	–0,59704
5	1,5	0,52050	–0,56899				

Методом Эйлера при указанном значении h найти численное решение задач Коши:

1283. $\begin{cases} y' = (z-y)x, \\ z' = (z+y)x, \end{cases}$ $y|_{x=0} = 1,\quad z|_{x=0} = 1;\quad [0,\ 1];\quad h = 0{,}1.$

1284. $\begin{cases} y' = 1 - 1/z, \\ z' = 1/(y-x), \end{cases}$ $y|_{x=0} = -1,\quad z|_{x=0} = 1;\quad [0,\ 1];\quad h = 0{,}1.$

1285. $\begin{cases} y' = -3y - z, \\ z' = y - z, \end{cases}$ $y|_{x=0} = 2,\quad z|_{x=0} = 1;\quad [0,\ 1];\quad h = 0{,}1.$ Сравнить с точным решением.

1286. $\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y - z, \end{cases}$ $y|_{x=0} = 0,\quad z|_{x=0} = 1;\quad [0;\ 0{,}5];\quad h = 0{,}1.$

1287. $\begin{cases} y' = x + z^2, \\ z' = xy, \end{cases}$ $y|_{x=0} = 1,\quad z|_{x=0} = 1;\quad [0;\ 0{,}6];\quad h = 0{,}1.$

1288. $\begin{cases} y' = 2y - x + z, \\ z' = x + 2y + 3z, \end{cases}$ $y|_{x=0} = 2,\quad z|_{x=0} = -2;\quad [0;\ 0{,}5];\quad h = 0{,}1.$ Сравнить с точным решением.

1289. $\begin{cases} y' = z - u, \\ z' = y + z, \\ u' = y + u, \end{cases}$ $y|_{x=0} = 1,\quad z|_{x=0} = 2,\quad u|_{x=0} = 3;\quad [0,\ 1];\quad h = 0{,}1.$ Сравнить с точным решением.

1290. Материальная точка массой m движется по прямой под влиянием упругой силы, стремящейся вернуть точку в положение равновесия и пропорциональной удалению точки от этого положения ($k_1 m$ – коэффициент пропорциональности). Движение происходит в среде, сопротивление которой пропорционально кубу скорости ($k_2 m$ – коэффициент пропорциональности). Составить математическую модель движения, если в момент времени $t = 0$ удаление и скорость равны единице. Применив метод Эйлера, найти численное решение задачи Коши на отрезке [0; 0,2] с шагом $h = 0{,}02$, если:

а) $k_1 = 1,\ k_2 = 0{,}1$; б) $k_1 = 0{,}1,\ k_2 = 0{,}2$.

1291. Материальная точка единичной массы брошена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Сила сопротивления среды при единичных значениях коэффициентов определяется по формуле $F = -(x + v^2)$, где x – высота подъема в момент времени t. Составить математическую модель движения точки, если в момент $t = 0$ высота подъема равнялась нулю. Применив метод Эйлера, найти численное решение задачи Коши на отрезке [0, 1] с шагом $h = 0{,}1$ и $v_0 = 10$ м/с.

47. Построение приближенного решения в виде ряда

Приближенное решение дифференциальных уравнений. К аналитическим методам построения приближенного решения задачи Коши относится метод построения решения в виде степенного ряда. Применение этого метода для линейных уравнений возможно, если коэффициенты уравнения и неоднородность голоморфны (см. гл. XI). Для уравнений вида $y' = f(x, y)$ требуется голоморфность функции $f(x, y)$.

Функция $f(x, y)$ называется *голоморфной в окрестности точки* (x_0, y_0), если она представима сходящимся степенным рядом

$$f(x, y) = \sum_{k,m=0}^{\infty} a_{km}(x-x_0)^k (y-y_0)^m$$

для $|x-x_0| < R,\ |y-y_0| < R$.

Теорема 47.1 (*Коши*). *Пусть функция* $f(x, y)$ *голоморфна в окрестности точки* (x_0, y_0). *Тогда решение задачи Коши* $y' = f(x, y),\ y|_{x=x_0} = y_0$, *существует, единственно и является голоморфной функцией на некотором интервале* $|x-x_0| < r < R$, *т.е. представимо степенным рядом* (*рядом Тейлора*)

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \qquad (47.1)$$

Отрезок ряда Тейлора дает приближенное решение задачи Коши.

Задача 47.1. Построить в виде степенного ряда решение задачи Коши $y' = f(x, y),\ y|_{x=x_0} = y_0$, с голоморфной в окрестности точки (x_0, y_0) функцией $f(x, y)$.

А л г о р и т м р е ш е н и я.

- Подсчитать $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$.
- Найти $y''(x) = f(x, y(x))' = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x)$.
- Подсчитать $y''(x_0) = f'_x(x_0, y(x_0)) + f'_y(x_0, y(x_0))y'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0)$.
- Найти $y'''(x) = f''_{x^2}(x, y(x)) + f''_{xy}(x, y(x))y'(x) + f''_{yx}(x, y(x))y'(x) + f''_{y^2}(x, y(x))y'^2(x) + f'_y(x, y(x))y''(x)$.
- Подсчитать $y'''(x_0) = f''_{x^2}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) + f''_{y^2}(x_0, y_0) \cdot f^2(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)y''(x_0)$.
- Этот процесс продолжить и далее. Если просматривается закономерность, проследить ее и просуммировать ряд. В противном случае построить n членов разложения в ряд решения задачи Коши.

Задание 47.1.1. Построить 6 членов разложения в степенной ряд решения задачи Коши $y' = e^y + xy,\ y|_{x=0} = 0$.

Р е ш е н и е.

```
x_0 := 0                y_0 := 0

y1(x) := e^y(x) + x · y(x)          y1_0 := 1
```

$$y2(x) := \frac{d}{dx}(y1(x)) \rightarrow y(x) + x\cdot\frac{d}{dx}y(x) + \frac{d}{dx}y(x)\cdot e^{y(x)} \qquad y2\_0 := 0 + 0 + 1 \rightarrow 1$$

$$y3(x) := \frac{d}{dx}y2(x) \rightarrow e^{y(x)}\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 + 2\cdot\frac{d}{dx}y(x) + x\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \frac{d^2}{dx^2}y(x)\cdot e^{y(x)}$$

$$y3\_0 := 1 + 2 + 0 + 1 \rightarrow 4$$

$$\frac{d}{dx}y3(x) \rightarrow e^{y(x)}\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^3 + 3\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x)\cdot e^{y(x)}\cdot\frac{d}{dx}y(x) + 3\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x) + x\cdot\frac{d^3}{dx^3}y(x) + \frac{d^3}{dx^3}y(x)\cdot e^{y(x)}$$

$$y4(x) := e^{y(x)}\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^3 + 3\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x)\cdot e^{y(x)}\cdot\frac{d}{dx}y(x) + 3\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x) + x\cdot\frac{d^3}{dx^3}y(x) + \frac{d^3}{dx^3}y(x)\cdot e^{y(x)}$$

$$y4\_0 := 1 + 3 + 3 + 4 \rightarrow 11$$

$$y5(x) := \frac{d}{dx}y4(x) \rightarrow e^{y(x)}\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^4 + 6\cdot e^{y(x)}\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 4\cdot\frac{d^3}{dx^3}y(x)\cdot e^{y(x)}\cdot\frac{d}{dx}y(x) + 3\cdot e^{y(x}$$

$$y5\_0 := 1 + 6 + 4\cdot 4 + 3 + 4\cdot 4 + 11 \rightarrow 53$$

$$y6(x) := \frac{d}{dx}y5(x) \rightarrow e^{y(x)}\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^5 + 10\cdot e^{y(x)}\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^3\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 10\cdot\frac{d^3}{dx^3}y(x)\cdot e^{y(x)}\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 + 1$$

$$y6\_0 := 1 + 10 + 10\cdot 4 + 15 + 5\cdot 11 + 10\cdot 4 + 5\cdot 11 + 53 \rightarrow 269$$

$$y\_0 + y1\_0\cdot x + y2\_0\cdot\frac{x^2}{2} + y3\_0\cdot\frac{x^3}{6} + y4\_0\cdot\frac{x^4}{24} + y5\_0\cdot\frac{x^5}{120} + y6\_0\cdot\frac{x^6}{720} \rightarrow \frac{269\cdot x^6}{720} + \frac{53\cdot x^5}{120} + \frac{11\cdot x^4}{24}$$

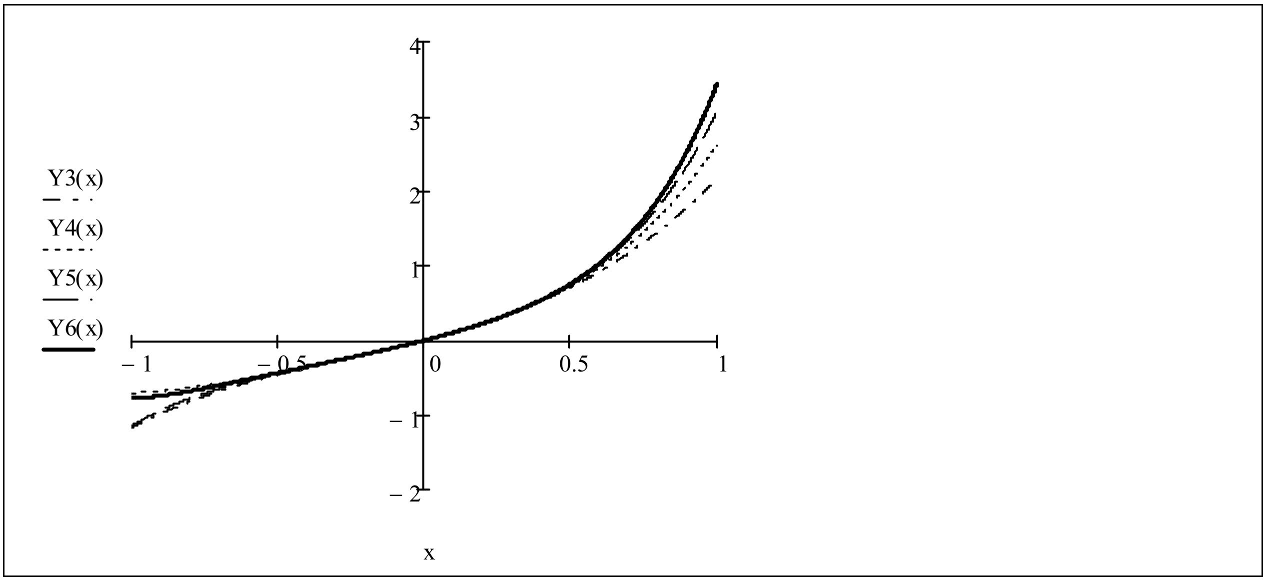
$$Y6(x) := \frac{269\cdot x^6}{720} + \frac{53\cdot x^5}{120} + \frac{11\cdot x^4}{24} + \frac{2\cdot x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

$$Y5(x) := \frac{53\cdot x^5}{120} + \frac{11\cdot x^4}{24} + \frac{2\cdot x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

$$Y4(x) := \frac{11\cdot x^4}{24} + \frac{2\cdot x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

$$Y3(x) := \frac{2\cdot x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

Следовательно: $y(x) = x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{4}{3!}\cdot x^3 + \frac{11}{4!}\cdot x^4 + \frac{53}{5!}\cdot x^5 + \frac{269}{6!}\cdot x^6 + \ldots$



Теорема 47.1 (Коши) справедлива и для уравнений высших порядков $y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ с голоморфной функцией F.

Задача 47.2. Построить в виде степенного ряда решение задачи Коши $y'' = F\left(x, y, y'\right)$, $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$, с голоморфной в окрестности точки (x_0, y_0, y_0') функцией $F(x, y, y')$.

Алгоритм решения.

Решение задачи Коши имеет вид (47.1), где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.

- Подсчитать $y''(x_0) = F(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = F(x_0, y_0, y_0')$.
- Найти $y'''(x) = F_x'(x, y(x), y'(x)) + F_y'(x, y(x), y'(x))y'(x) + F_{y'}'(x, y(x), y'(x))y''(x)$.
- Подсчитать $y'''(x_0) = F_x'(x_0, y_0, y_0') + F_y'(x_0, y_0, y_0')y_0' + F_{y'}'(x_0, y_0, y_0')y''(x_0)$.
- Этот процесс продолжить далее.
- Если возможно, то полученный ряд просуммировать. В противном случае построить n членов разложения в ряд решения задачи Коши.

Задание 47.2.1. Построить 6 членов разложения в степенной ряд решения задачи Коши

$$y'' = xy' - y^2, \quad y\big|_{x=0} = -1, \quad y'\big|_{x=0} = 1.$$

Решение.

$x\_0 := 0 \qquad y\_0 := -1 \qquad y1\_0 := 1$

$F(x, y, y1) := x \cdot y1 - y^2$

$y2\_0 := F(x\_0, y\_0, y1\_0) \to -1$

$y3(x) := \frac{d}{dx}\left(x \cdot y1(x) - y(x)^2\right) \to y1(x) + x \cdot \frac{d}{dx}y1(x) - 2 \cdot y(x) \cdot \frac{d}{dx}y(x)$

$y3\_0 := 1 + 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 \to 3$

$$y4(x) := \frac{d}{dx}y3(x) \rightarrow 2\cdot\frac{d}{dx}y1(x) - 2\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 + x\cdot\frac{d^2}{dx^2}y1(x) - 2\cdot y(x)\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x)$$

$$y4\_0 := 2\cdot(-1) - 2\cdot 1 + 0 - 2\cdot(-1)\cdot 1 \rightarrow -2$$

$$y5(x) := \frac{d}{dx}y4(x) \rightarrow 3\cdot\frac{d^2}{dx^2}y1(x) + x\cdot\frac{d^3}{dx^3}y1(x) - 2\cdot y(x)\cdot\frac{d^3}{dx^3}y(x) - 6\cdot\frac{d}{dx}y(x)\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x)$$

$$y5\_0 := 3\cdot 3 + 0 - 2\cdot(-1)\cdot 3 - 6\cdot 1\cdot(-1) \rightarrow 21$$

$$y6(x) := \frac{d}{dx}y5(x) \rightarrow 4\cdot\frac{d^3}{dx^3}y1(x) - 6\cdot\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)^2 + x\cdot\frac{d^4}{dx^4}y1(x) - 2\cdot y(x)\cdot\frac{d^4}{dx^4}y(x) - 8\cdot\frac{d}{dx}y(x)\cdot\frac{d^3}{dx^3}y(x)$$

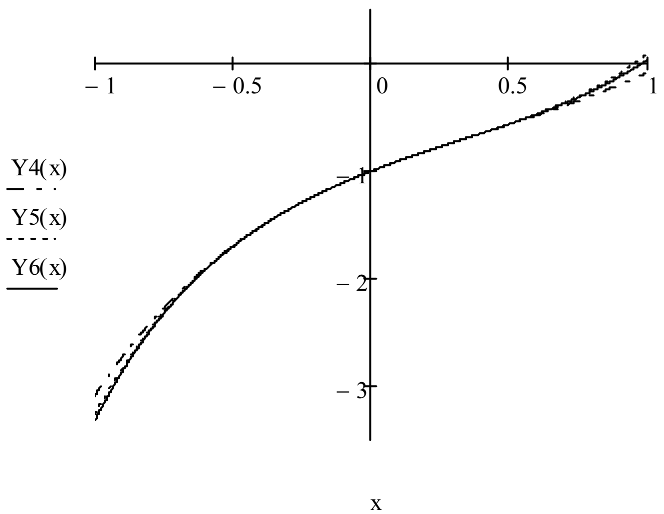
$$y6\_0 := 4\cdot(-2) - 6\cdot 1 + 0 - 2\cdot(-1)\cdot(-2) - 8\cdot 1\cdot 3 \rightarrow -42$$

$$y\_0 + y1\_0\cdot x + y2\_0\cdot\frac{x^2}{2} + y3\_0\cdot\frac{x^3}{6} + y4\_0\cdot\frac{x^4}{24} + y5\_0\cdot\frac{x^5}{120} + y6\_0\cdot\frac{x^6}{720} \rightarrow \frac{7\cdot x^5}{40} - \frac{7\cdot x^6}{120} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$Y4(x) := -\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + x - 1$$

$$Y5(x) := \frac{7\cdot x^5}{40} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + x - 1$$

$$Y6(x) := -\frac{7\cdot x^6}{120} + \frac{7\cdot x^5}{40} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + x - 1$$



Задача 47.3. Найти в виде степенного ряда решение задачи Коши

$$y'' = \sqrt{1 + (y')^2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Р е ш е н и е. Так как функция $f(x,y,y') = \sqrt{1+(y')^2}$ голоморфна в окрестности точки (0, 1, 0), то решение поставленной задачи представимо в некоторой окрестности нуля рядом Тейлора. Из уравнения и начальных условий находим $y''(0) = 1$. Для нахождения остальных значений $y^{(n)}(0)$ продифференцируем заданное уравнение: $y''' = \dfrac{y'y''}{\sqrt{1+(y')^2}}$, что с учетом исходного равенства дает $y''' = y'$. Поэтому $y^{(n+2)} = y^{(n)}$ для всех натуральных n. Таким образом, $y^{(2k)}(0) = 1$ и $y^{(2k+1)}(0) = 0$ для всех неотрицательных k. Следовательно, $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n =$
$= \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{y^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k)!} x^{2k}$.

Заметим, что полученный ряд является рядом Тейлора гиперболического косинуса, поэтому искомое решение задачи Коши имеет вид $y(x) = \operatorname{ch} x$.

Найти в виде степенного ряда решения задач Коши:

1292. $(1 - x^2)\, y'' - xy' + y = 0, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1.$

1293. $(1 - x^2)\, y'' - xy' = 0, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0.$

1294. $y' = \cos(x - y), \quad y|_{x=0} = 0.$

1295. $y'' + 2xy' = -2e^{-x^2}, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0.$

1296. $y'' + 4x^2 y = -2\sin x^2, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0.$

1297. $y' + xe^y = x^2 + 1/x, \quad y|_{x=1} = 0.$

1298. $y'' + 2xy' - 2y = -4e^{-x^2}, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0.$

1299. $y'' - xy' + y - 1 = 0, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 0.$

Построить n членов разложения в степенной ряд решений задач Коши:

1300. $y' = e^y + xy, \quad y|_{x=0} = 0; \quad n = 7.$

1301. $y' = \cos(x + y), \quad y|_{x=0} = 0; \quad n = 7.$

1302. $y'' + xy' = e^{-x^2}, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0; \quad n = 5.$

1303. $y' = e^y + x^2, \quad y|_{x=1} = 0; \quad n = 5.$

1304. $y'' = x^2 y - y', \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0; \quad n = 9.$

1304.1. $y' = x + \dfrac{1}{y}, \quad y|_{x=0} = 1; \quad n = 8.$

1304.2. $y' = y + xe^y, \quad y|_{x=0} = 0; \quad n = 6.$

1304.3. $y' = \cos(x - y), \quad y|_{x=1} = 1; \quad n = 6.$

1304.4. $y' = 2x + \cos y, \quad y|_{x=0} = 0; \quad n = 5.$

1304.5. $y' = x^2 + y^3, \quad y|_{x=1} = 1; \quad n = 6.$

1304.6. $y' = y^2 - y\sin x + \cos x, \quad y|_{x=0} = 0; \quad n = 7.$

1304.7. $y' = y^2 + y\sin 2x + \cos 2x, \quad y|_{x=0} = 0; \quad n = 7.$

1304.8. $y' = (x + y)^2, \quad y|_{x=0} = 0; \quad n = 10.$

1304.9. $y'' = xy' - y^2, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 2; \quad n = 8.$

1304.10. $y'' = y'^2 + xy, \quad y\big|_{x=0} = 4, \quad y'\big|_{x=0} = -2; \quad n = 7.$

1304.11. $y'' = xy' - y^2, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = 1; \quad n = 8.$

1304.12. $y'' = y'^2 + xy, \quad y\big|_{x=0} = 2, \quad y'\big|_{x=0} = -2; \quad n = 7.$

1304.13. $y'' = y^2 + xy', \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = 1; \quad n = 8.$

1304.14. $y'' = y^2 + xy', \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = 2; \quad n = 7.$

Приближенное решение дифференциальных систем. Построение приближенного решения в виде степенного ряда возможно и при решении задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

Теорема 47.2 (*Коши***).** *Задача Коши*

$$y' = f(x, y), \quad y\big|_{x=x_0} = y_0,\ x, x_0 \in I, y, y_0 \in \mathbb{R}^n,$$

для голоморфного в окрестности точки (x_0, y_0) *векторного уравнения имеет решение, голоморфное на некотором интервале* $|x - x_0| < r,\ r > 0$. *(Голоморфность функции означает голоморфность ее компонент.)*

З а м е ч а н и е. При построении решений в виде степенных рядов для уравнений высших порядков можно использовать стандартное приведение этих уравнений к системам.

Задача 47.4. Построить в виде степенного ряда решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), \\ z' = g(x, y, z), \quad y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad z\big|_{x=x_0} = z_0, \end{cases}$$

с голоморфными в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) функциями $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$.

А л г о р и т м р е ш е н и я.

Решение задачи имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots;$$

$$z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = z(x_0) + \frac{z'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{z''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{z^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots.$$

- Подсчитать

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0), z(x_0)) = f(x_0, y_0, z_0); \; z'(x_0) = g(x_0, y(x_0), z(x_0)) = g(x_0, y_0, z_0).$$

- Найти

$$y''(x) = f'_x(x, y(x), z(x)) + f'_y(x, y(x), z(x))y'(x) + f'_z(x, y(x), z(x))z'(x);$$
$$z''(x) = g'_x(x, y(x), z(x)) + g'_y(x, y(x), z(x))y'(x) + g'_z(x, y(x), z(x))z'(x).$$

- Подсчитать $y''(x_0)$ и $z''(x_0)$.
- Найти $y'''(x)$ и $z'''(x)$.
- Подсчитать $y'''(x_0)$ и $z'''(x_0)$.
- Этот процесс продолжить и далее.
- Если возможно, то полученные ряды просуммировать. В противном случае построить n членов разложения в ряд решения задачи Коши.

Задание 47.4.1. Найти в виде степенного ряда решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = y + z - x^3, \\ z' = y^2 + 3x^2 - e^{2x}, \end{cases} \quad y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = 0.$$

Р е ш е н и е.

$x\_0 := 0 \qquad y\_0 := 1 \qquad z\_0 := 0$

$f(x, y, z) := y + z - x^3$

$g(x, y, z) := y^2 + 3x^2 - e^{2x}$

$y1(x) := y(x) + z(x) - x^3$

$z1(x) := y(x)^2 + 3 \cdot x^2 - e^{2 \cdot x}$

$y1\_0 := f(x\_0, y\_0, z\_0) \to 1$

$z1\_0 := g(x\_0, y\_0, z\_0) \to 0$

$y2(x) := \frac{d}{dx}(y1(x)) \to \frac{d}{dx}y(x) + \frac{d}{dx}z(x) - 3 \cdot x^2$

$z2(x) := \frac{d}{dx}(z1(x)) \to 6 \cdot x - 2 \cdot e^{2 \cdot x} + 2 \cdot y(x) \cdot \frac{d}{dx}y(x)$

$y2\_0 := 1 + 0 + 0 \to 1$

$z2\_0 := 0 - 2 + 2 \to 0$

$y3(x) := \frac{d}{dx}y2(x) \to \frac{d^2}{dx^2}y(x) - 6 \cdot x + \frac{d^2}{dx^2}z(x)$

$z3(x) := \frac{d}{dx}z2(x) \to 2 \cdot \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 - 4 \cdot e^{2 \cdot x} + 2 \cdot y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}y(x) + 6$

$y3\_0 := 1 - 0 + 0 \to 1$

$z3\_0 := 2 - 4 + 2 + 6 \to 6$

$y4(x) := \frac{d}{dx}y3(x) \to \frac{d^3}{dx^3}y(x) + \frac{d^3}{dx^3}z(x) - 6$

$z4(x) := \frac{d}{dx}z3(x) \to 2 \cdot y(x) \cdot \frac{d^3}{dx^3}y(x) - 8 \cdot e^{2 \cdot x} + 6 \cdot \frac{d}{dx}y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}y(x)$

$y4\_0 := 1 + 6 - 6 \to 1$

$z4\_0 := 2 - 8 + 6 \to 0$

$$z5(x) := \frac{d}{dx}z4(x) \to 6 \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)^2 - 16 \cdot e^{2 \cdot x} + 2 \cdot y(x) \cdot \frac{d^4}{dx^4}y(x) + 8 \cdot \frac{d}{dx}y(x) \cdot \frac{d^3}{dx^3}y(x)$$

$$y5\_0 := 1 + 0 \to 1$$

$$z5\_0 := 6 - 16 + 2 + 8 \to 0$$

$$y\_0 + y1\_0 \cdot x + y2\_0 \cdot \frac{x^2}{2} + y3\_0 \cdot \frac{x^3}{6} + y4\_0 \cdot \frac{x^4}{24} + y5\_0 \cdot \frac{x^5}{120} \to \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$Y5(x) := \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$z\_0 + z1\_0 \cdot x + z2\_0 \cdot \frac{x^2}{2} + z3\_0 \cdot \frac{x^3}{6} + z4\_0 \cdot \frac{x^4}{24} + z5\_0 \cdot \frac{x^5}{120} \to x^3$$

$$Y(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \to e^x \qquad Z(x) := x^3$$

К о м м е н т а р и й. Так как $y(x)=e^x$, $z(x)=x^3$ удовлетворяют системе и начальным данным, то это и есть искомое решение задачи Коши.

Задание 47.4.2. Найти 3 первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = xy, \end{cases} \quad y|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=0} = 1.$$

Р е ш е н и е.

$$x\_0 := 0 \qquad y\_0 := 0 \qquad z\_0 := 1$$

$$f(x,y,z) := z \qquad g(x,y,z) := x \cdot y$$

$$y1(x) := z(x)$$

$$z1(x) := x \cdot y(x)$$

$$y1\_0 := f(x\_0, y\_0, z\_0) \to 1$$

$$z1\_0 := g(x\_0, y\_0, z\_0) \to 0$$

$$y2(x) := \frac{d}{dx}(y1(x)) \to \frac{d}{dx}z(x)$$

$$z2(x) := \frac{d}{dx}(z1(x)) \to y(x) + x \cdot \frac{d}{dx}y(x)$$

$$y2\_0 := 0 \qquad z2\_0 := 0 + 0 \to 0$$

$$y3(x) := \frac{d}{dx}y2(x) \to \frac{d^2}{dx^2}z(x)$$

$$z3(x) := \frac{d}{dx}z2(x) \to 2\cdot\frac{d}{dx}y(x) + x\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x)$$

$$y3\_0 := 0 \qquad z3\_0 := 2$$

$$y4(x) := \frac{d}{dx}y3(x) \to \frac{d^3}{dx^3}z(x)$$

$$z4(x) := \frac{d}{dx}z3(x) \to 3\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x) + x\cdot\frac{d^3}{dx^3}y(x)$$

$$y4\_0 := 2 \qquad z4\_0 := 0 + 0 \to 0$$

$$y5(x) := \frac{d}{dx}y4(x) \to \frac{d^4}{dx^4}z(x)$$

$$z5(x) := \frac{d}{dx}z4(x) \to 4\cdot\frac{d^3}{dx^3}y(x) + x\cdot\frac{d^4}{dx^4}y(x)$$

$$y5\_0 := 0 \qquad z5\_0 := 0 + 0 \to 0$$

$$y6(x) := \frac{d}{dx}y5(x) \to \frac{d^5}{dx^5}z(x)$$

$$z6(x) := \frac{d}{dx}z5(x) \to 5\cdot\frac{d^4}{dx^4}y(x) + x\cdot\frac{d^5}{dx^5}y(x)$$

$$y6\_0 := 0 \qquad z6\_0 := 5\cdot 2 + 0 \to 10$$

$$y\_0 + y1\_0\cdot x + y2\_0\cdot\frac{x^2}{2} + y3\_0\cdot\frac{x^3}{6} + y4\_0\cdot\frac{x^4}{24} + y5\_0\cdot\frac{x^5}{120} + y6\_0\cdot\frac{x^6}{720} \to \frac{x^4}{12} + x$$

$$Y6(x) := \frac{x^4}{12} + x$$

$$z\_0 + z1\_0\cdot x + z2\_0\cdot\frac{x^2}{2} + z3\_0\cdot\frac{x^3}{6} + z4\_0\cdot\frac{x^4}{24} + z5\_0\cdot\frac{x^5}{120} + z6\_0\cdot\frac{x^6}{720} \to \frac{x^6}{72} + \frac{x^3}{3} + 1$$

$$Z6(x) := \frac{x^6}{72} + \frac{x^3}{3} + 1$$

Найти в виде степенного ряда решения задач Коши:

1305. $\begin{cases} y' = 1/z, \\ z' = 2y - z - 2e^x, \end{cases} \quad y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = 1.$

1306. $\begin{cases} y' = y^2, \\ z' = -xy - z + x, \end{cases} \quad y|_{x=1} = -1, \quad z|_{x=1} = 1.$

1307. $y'' - 2xy' - 2y = 0, \quad y\big|_{x=0} = 1, y'\big|_{x=0} = 0.$

1308. $2y'' + xy' + 2y = x\cos x, \quad y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 1.$

1309. $\begin{cases} y' = z, \\ z' = z^2 - zy' - y, \end{cases} \quad y|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=0} = 1.$

1309.1. $\begin{cases} y' = y^2 + z - x, \\ z' = y + \dfrac{x}{x-1}, \end{cases} \quad y\big|_{x=0} = 1,\ z\big|_{x=0} = 0.$

1309.2. $\begin{cases} y' = 1/z, \\ z' = y - z - e^x, \end{cases} \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad z\big|_{x=0} = 1.$

1309.3. $\begin{cases} y' = y + z - x^2, \\ z' = y^2 + 2x - e^{2x}, \end{cases} \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad z\big|_{x=0} = 0.$

1309.4. $\begin{cases} y' = y + z - x^4, \\ z' = y^2 + 4x^3 - e^{2x}, \end{cases} \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad z\big|_{x=0} = 0.$

1309.5. $\begin{cases} y' = 2y + z - x, \\ z' = y^2 + 1 - e^{4x}, \end{cases} \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad z\big|_{x=0} = 0.$

1309.6. $\begin{cases} y' = y + z - x^2 - 1, \\ z' = y^2 + 2x - 4e^{2x}, \end{cases} \quad y\big|_{x=0} = 2, \quad z\big|_{x=0} = 1.$

1309.7. $\begin{cases} y' = y + z - x^2 + 1, \\ z' = y^2 + 2x - 4e^{2x}, \end{cases} \quad y\big|_{x=0} = 2, \quad z\big|_{x=0} = -1.$

1309.8. $\begin{cases} y' = z^2 + 3x^2 - e^{4x}, \\ z' = y + 2z - x^3, \end{cases} \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad z\big|_{x=0} = 1.$

Найти n первых отличных от нуля членов разложения в степенной ряд решений задач Коши:

1310. $\begin{cases} y' = z, \\ z' = xy, \end{cases} \quad y|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=0} = 1; \quad n = 3.$

1311. $y'' = xy' + x, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'\,|_{x=0} = 0; \quad n = 4.$

1312. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = yz, \end{cases} \quad y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = 1; \quad n = 4.$

1313. $\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y - z, \end{cases} \quad y|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=0} = -1; \quad n = 4.$

1314. $y'' = xy' - y^2, \ y|_{x=0} = 1, \ y'|_{x=0} = 2; \quad n = 4.$

1315. $\begin{cases} y' = x + z^2, \\ z' = xy, \end{cases} \quad y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = -1; \quad n = 4.$

1315.1. $\begin{cases} y' = yz, \\ z' = y^2 + z^2, \quad y|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=0} = -1; \quad n = 6. \end{cases}$

1315.2. $\begin{cases} y' = y^2, \\ z' = xy - z, \quad y|_{x=1} = 1, \quad z|_{x=0} = 0; \quad n = 7. \end{cases}$

1315.3. $\begin{cases} y' = x + y - z^2, \\ z' = yz + 1, \quad y|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=0} = 0; \quad n = 5. \end{cases}$

1315.4. $\begin{cases} y' = y^2 + z^2 - x^2, \\ z' = y + \dfrac{x-1}{x-2}, \quad y|_{x=1} = 1, \quad z|_{x=1} = 1; \quad n = 6. \end{cases}$

1315.5. $\begin{cases} y' = -y^2 - yz, \\ z' = yz + z^2, \quad y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = 1; \quad n = 7. \end{cases}$

XV. ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

48. Однородные линейные уравнения. Задача Коши

В координатной форме *линейное однородное уравнение с частными производными* первого порядка имеет вид

$$f_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+f_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0.$$

Решением линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка называется функция $u = u(x_1, ..., x_n)$, которая задана на области $G\subset\mathbb{R}^n$, дифференцируема по всем своим переменным и обращает данное уравнение в тождество на G.

Уравнения с частными производными первого порядка характеризуются тем, что задача их интегрирования сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому теория интегрирования уравнений с частными производными первого порядка излагается в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений. Общее решение уравнения с частными производными зависит от произвольной функции.

Теорема 48.1. *Дифференцируемая функция $u = u(x_1, ..., x_n)$ является решением линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка тогда и только тогда, когда эта функция – первый интеграл системы в симметрической форме*

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{f_n(x_1,...,x_n)}.$$

Построив базис первых интегралов $u_1, ..., u_{n-1}$ системы в симметрической форме, общее решение линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка записывают в виде $u = H(u_1, ..., u_{n-1})$, где H – произвольная дифференцируемая функция.

Задача 48.1. Проинтегрировать уравнение

$$(x_3-x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+(x_1-x_3)\frac{\partial u}{\partial x_2}+(x_2-x_1)\frac{\partial u}{\partial x_3}=0.$$

Р е ш е н и е. Для данного уравнения составим систему в симметрической форме: $\frac{dx_1}{x_3-x_2}=\frac{dx_2}{x_1-x_3}=\frac{dx_3}{x_2-x_1}$. Базис первых интегралов полученной системы имеет вид (см. задачу 43.1) $u_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $u_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Следовательно, общее решение исходного уравнения определяется функцией $u = H\left(x_1 + x_2 + x_3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$.

Под задачей Коши понимаем нахождение решения $u = u(x_1, ..., x_n)$ линейного однородного уравнения с частными производными, обладающего свойством $u(x_1, ..., x_{i-1}, a, x_{i+1}, ..., x_n) = \varphi(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$, где a – заданная постоянная; $\varphi(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ – заданная функция.

Задача Коши для линейного однородного уравнения записывается в виде

$$f_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+f_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0,$$

$$u(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)|_{x_i=a}=\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n).$$

Схема решения задачи Коши для линейного однородного уравнения следующая:

1) записывается соответствующая система в симметрической форме и строится базис ее первых интегралов

$$u_1(x_1,\dots,x_n),\ \dots,\ u_{n-1}(x_1,\dots,x_n);$$

2) составляется система функциональных уравнений

$$\begin{cases} u_1(x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n)=C_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ u_{n-1}(x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n)=C_{n-1},\end{cases}$$

которая разрешается относительно $x_1,\dots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\dots,x_n$:

$$x_1=F_1(C_1,\dots,C_n),\ \dots,\ x_{i-1}=F_{i-1}(C_1,\dots,C_n),$$

$$x_{i+1}=F_{i+1}(C_1,\dots,C_n),\ \dots,\ x_n=F_n(C_1,\dots,C_n);$$

3) решение задачи Коши задается формулой

$$u=\varphi(F_1(u_1,\dots,u_{n-1}),\dots,F_{i-1}(u_1,\dots,u_{n-1}),\ F_{i+1}(u_1,\dots,u_{n-1}),\dots,F_n(u_1,\dots,u_{n-1})).$$

Задача 48.2. Решить задачу Коши

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial x_3}=0,\quad u(x_1,x_2,x_3)\big|_{x_2=1}=x_1+x_3.$$

Р е ш е н и е. Составим систему в симметрической форме $\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{1}$. Базис ее первых интегралов $u_1=x_2/x_1$, $u_2=x_3-\ln x_1$. Для определения x_1, x_3 имеем систему $\begin{cases}1/x_1=C_1,\\ x_3-\ln x_1=C_2.\end{cases}$ Отсюда $x_1=1/C_1$, $x_3=C_2-\ln C_1$. Решение задачи Коши имеет вид $u=1/u_1+u_2-\ln u_1$ или $u=x_3-\ln x_2+x_1/x_2$.

1316. Убедиться, что функция $z=\varphi(xy)$, где φ – произвольная дифференцируемая функция, является решением линейного однородного уравнения $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

Построить общее решение линейных однородных уравнений с частными производными первого порядка:

1317. $(x_2+x_3)\frac{\partial u}{\partial x_1}+(x_1+x_3)\frac{\partial u}{\partial x_2}+(x_1+x_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=0.$

1318. $x_3\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_4\frac{\partial u}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial u}{\partial x_3}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_4}=0.$

1319. $\left(x_3^2 - x_2^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_2} - x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$

1320. $x_1 x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2^2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \left(x_1 x_2 x_3 - 2x_1^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$

1321. $x_1\left(x_2 + x_3\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_3\left(x_3 - x_2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_2\left(x_2 - x_3\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$

1322. $x_2 x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_1 x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$

1323. $x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$

1324. $x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$

1325. $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$

1326. $\left(x_1 + 2x_2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$

Решить задачи Коши:

1327. $\left(4x_2 - x_3\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \quad u\big|_{x_1=0} = x_2^2 + x_3^2.$

1328. $\left(4x_2 - x_3\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \quad u\big|_{x_1=0} = x_2 x_3.$

1329. $\left(4x_2 - x_3\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \quad u\big|_{x_1=0} = x_2 + x_3.$

1330. $x_1 x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_1 x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \quad u\big|_{x_3=0} = x_1 x_2.$

1331. $x_1\left(x_3 - x_2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\left(x_2 - x_1\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \left(x_2^2 - x_1 x_3\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \quad u\big|_{x_1=1} = x_2 + x_3.$

1332. $x_1\left(x_3 - x_2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\left(x_2 - x_1\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \left(x_2^2 - x_1 x_3\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \; u\big|_{x_1=1} = x_3 / x_2.$

1333. $\left(x_3^2 - x_2^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_2} - x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \quad u\big|_{x_3=0} = x_1 x_2^2.$

1334. $3\left(x_2 - x_4\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + 2\left(x_3 - x_1\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + 3\left(x_4 - x_2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_3} + 2\left(x_1 - x_3\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_4} = 0, \quad u\big|_{x_4=0} = x_1 + x_2 + x_3.$

49. Квазилинейные уравнения с частными производными. Задача Коши

В координатной форме *квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка* имеет вид

$$f_1\left(x_1, \dots, x_n, u\right)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n\left(x_1, \dots, x_n, u\right)\frac{\partial u}{\partial x_n} = g\left(x_1, \dots, x_n, u\right).$$

Для интегрирования этого уравнения составляется система в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\dots,x_n,u)}=\dots=\frac{dx_n}{f_n(x_1,\dots,x_n,u)}=\frac{du}{g(x_1,\dots,x_n,u)}.$$

Если $v_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,v_n(x_1,\dots,x_n,u)$ – базис первых интегралов системы в симметрической форме, то функциональное уравнение $G(v_1,\dots,v_n)=0$ определяет (при выполнении условия теоремы существования для неявных функций) общее решение u квазилинейного уравнения с частными производными как функцию переменных $x_1,\dots,x_n$. Функция G – произвольная дифференцируемая функция.

Задача 49.1. Построить общее решение уравнения $u\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=0.$

Р е ш е н и е. Соответствующая система в симметрической форме имеет вид $\dfrac{dx_1}{u}=\dfrac{dx_2}{1}=\dfrac{du}{0}.$

Базис ее первых интегралов $v_1 = u$, $v_2 = x_1/u - x_2$. Функциональное уравнение $G(u, x_1/u - x_2) = 0$ определяет общее решение данного уравнения как неявно заданную функцию.

Задача Коши для квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка имеет вид

$$f_1(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+f_n(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=g(x_1,\dots,x_n,u),$$
$$u_1(x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n)\big|_{x_i=a}=\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n),$$

где a – заданная постоянная; φ – заданная функция.

Схема решения задачи Коши для квазилинейного уравнения следующая:

1) составляется система в симметрической форме и строится базис ее первых интегралов $v_1(x_1, ..., x_n, u), ..., v_n(x_1, ..., x_n, u)$;

2) записывается система функциональных уравнений

$$\begin{cases} v_1(x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n,u)=C_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ v_n(x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n,u)=C_n,\end{cases}$$

которая разрешается относительно $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n,u$:

$$x_1=F_1(C_1,\dots,C_n),\dots,\ x_{i-1}=F_{i-1}(C_1,\dots,C_n),\ x_{i+1}=F_{i+1}(C_1,\dots,C_n),\dots,$$
$$x_n=F_n(C_1,\dots,C_n),\dots,\ u=F_{n+1}(C_1,\dots,C_n);$$

3) составляется функциональное уравнение

$$F_{n+1}(v_1,\dots,v_n)-\varphi(F_1(v_1,\dots,v_n),\dots,F_{i-1}(v_1,\dots,v_n),\ F_{i+1}(v_1,\dots,v_n),\dots,F_n(v_1,\dots,v_n))=0;$$

4) для записи аналитического решения задачи Коши полученное функциональное уравнение разрешается, если это возможно, относительно u.

Задача 49.2. Решить задачу Коши

$$(x_2+u)^2\frac{\partial u}{\partial x_1}-x_1(x_2+2u)\frac{\partial u}{\partial x_2}=x_1u,\quad u(x_1,x_2)|_{x_2=0}=x_1^2.$$

Р е ш е н и е. Составим систему в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{(x_2+u)^2}=\frac{dx_2}{-x_1(x_2+2u)}=\frac{du}{x_1u},$$

для которой $v_1=(x_2+u)u$, $v_2=x_1^2+x_2^2-u^2$ являются базисом первых интегралов. Система для определения x_1 и u имеет вид $\begin{cases}u^2=C_1,\\ x_1^2-u^2=C_2.\end{cases}$ Отсюда $x_1=\sqrt{C_1+C_2}$, $u=\sqrt{C_1}$. Следовательно, $F_1(C_1,C_2)=\sqrt{C_1+C_2}$, $F_3(C_1,C_2)=\sqrt{C_1}$. Так как $\varphi(x_1)=x_1^2$, то функциональное уравнение $u^2+x_2u=(x_1^2+x_2^2+x_2u)^2$ задает в неявной форме решение $u=u(x_1,x_2)$ задачи Коши.

1335. Проверить, является ли функция $z=\operatorname{arctg}\dfrac{u+v}{u-v}$ решением квазилинейного уравнения $\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{u-v}{u^2+v^2}$.

1336. Проверить, является ли функция $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$, где f – произвольная дифференцируемая функция, решением квазилинейного уравнения $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

Построить общее решение квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка:

1337. $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}-x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=x_1-x_2$.

1338. $\left(u+e^{x_1}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+\left(u+e^{x_2}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=u-e^{x_1+x_2}$.

1339. $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=x_1x_2+u$.

1340. $x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=u$.

1341. $3(x_2-u)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+2(x_3-x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+3(u-x_2)\dfrac{\partial u}{\partial x_3}-2(x_1-x_3)=0$.

1342. $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=u-x_1^2-x_2^2$.

1343. $(u+x_2-x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+(u+x_1-x_2)\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=x_1+x_2+u$.

1344. $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3}=u+\dfrac{x_1x_2}{x_3}$.

1345. $(x_2-x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+(x_1+x_2+u)\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=x_1-x_2$.

1346. $x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=u$.

Решить задачи Коши:

1347. $x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + u \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad u\big|_{x_1=1} = -x_2.$

1348. $x_1^2 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2^2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3^2 \dfrac{\partial u}{\partial x_3} = u, \quad u\big|_{x_1=1} = \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}.$

1349. $2x_1^3 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \left(3x_1^2 x_2 + x_2^3\right) \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 2x_1^2 u, \quad u\big|_{x_1=1} = x_2^2.$

1350. $2x_1^3 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \left(3x_1^2 x_2 + x_2^3\right) \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 2x_1^2 u, \quad u\big|_{x_1=1} = 1 + \dfrac{1}{x_2^2}.$

1351. $x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \dfrac{x_1 x_2}{u}, \quad u\big|_{x_1=2} = x_2.$

1352. $x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} - 2x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^2 + x_2^2, \quad u\big|_{x_2=1} = x_1^2.$

1353. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ и проходящую через кривую $x = 0,\ y^2 = 2pz$.

1354. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ и проходящую через кривую $x = a,\ y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$.

1355. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} + xy = 0$ и проходящую через кривую $z = 0,\ xy = a^2$.

1356. Среди поверхностей $z = z(x, y)$ пространства $\mathbb{R}^3$ выделить те, все нормали которых пересекают ось Oz. Найти ту из поверхностей, которая проходит через параболу $z = y^2,\ x = -1$. (Указание. Воспользоваться условием, что в любой точке поверхности вектор нормали к поверхности, радиус-вектор этой точки и орт оси Oz компланарны.)

1357. Среди поверхностей $z = z(x, y)$ пространства $\mathbb{R}^3$ выделить те, все нормали которых пересекают прямую $x = t,\ y = t,\ z = 0,\ t \in \mathbb{R}.$ Найти ту из полученных поверхностей, которая в плоскости $x = 1$ проходит через параболу $z^2 = 2y$. (Указание. Воспользоваться условием, что в произвольной точке поверхности вектор нормали поверхности, радиус-вектор этой точки и направляющий вектор данной прямой компланарны.)

1358. В пространстве $Oxyz$ найти поверхности, касательные плоскости к которым отсекают на оси Oz отрезок постоянной длины a.

XVI. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

50. Уравнение Пфаффа

Уравнение Пфаффа в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет вид:

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0,$$

где P, Q, R – достаточно гладкие в области $G \subset \mathbb{R}^3$ функции.

Интегралом уравнения Пфаффа называется зависимость между x, y и z такая, что дифференциалы dx, dy и dz, вычисленные с учетом этой зависимости, обращают уравнение в тождество на G. Если указанная зависимость имеет вид $u(x, y, z) = 0$, то она называется *двумерным интегралом* или *интегральной поверхностью*.

Задача 50.1. Показать, что поверхность $z = x^2 - y$ является двумерным интегралом уравнения Пфаффа $2xdx - (1 + y + z - x^2)dy - dz = 0$.

Р е ш е н и е. Так как $dz = 2xdx - dy$, то $2xdx - (1 + y + x^2 - y - x^2)dy - (2xdx - dy) \equiv 0$. Следовательно, $z = x^2 - y$ – интегральная поверхность.

Теорема 50.1. *Уравнение Пфаффа обладает двумерным интегралом в области G в том и только в том случае, если выполнено условие интегрируемости*

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0 \quad \forall (x,y,z)\in G.$$

Условие интегрируемости заведомо выполняется, если

$$\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\equiv 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\equiv 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0,$$

т.е. если $\operatorname{rot}\vec{F}\equiv 0$, где $\vec{F}=(P,Q,R)$. В этом случае левая часть уравнения Пфаффа является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y, z)$, которая определяется криволинейным интегралом

$$u(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz,$$

где (x_0, y_0, z_0) – произвольная фиксированная точка из G. Следовательно, $u(x, y, z) = C$ задает двумерный интеграл уравнения Пфаффа. Если $\operatorname{rot}\vec{F}\equiv 0$, то векторное поле $\vec{F}$ является *потенциальным*, а функция $u(x, y, z)$ – его *потенциалом*. Если же $\operatorname{rot}\vec{F}$ отличен от тождественного нуля, а условие интегрируемости выполнено, т.е. $\vec{F}\operatorname{rot}\vec{F}\equiv 0$, то существует такая функция $\mu = \mu(x, y, z)$, называемая *интегрирующим множителем*, что выражение

$$\mu P(x,y,z)\,dx+\mu Q(x,y,z)\,dy+\mu R(x,y,z)\,dz$$

есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y, z)$, которая является двумерным интегралом уравнения Пфаффа и определяется криволинейным интегралом.

Задача 50.2. Проинтегрировать уравнение Пфаффа

$$adx+\frac{z-ax}{y+a}dy-dz=0.$$

Р е ш е н и е. Для данного уравнения Пфаффа условие интегрируемости выполнено, следовательно, существует двумерный интеграл $z(x, y) = C$. Полный дифференциал функции $z(x, y)$ имеет вид $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$ Переписав данное уравнение Пфаффа в виде $dz=adx+\frac{z-ax}{y+a}dy,$ заключаем, что функция z должна удовлетворять системе уравнений $\frac{\partial z}{\partial x} = a$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z - ax}{y + a}$. Интегрируя по x первое уравнение, получаем $z = ax + f(y)$, где $f(y)$ − произвольная дифференцируемая функция. Выберем $f(y)$ так, чтобы z была решением второго уравнения системы $f'(y) = \frac{f(y)}{y + a}$, т.е. $\frac{df(y)}{f(y)} = \frac{dy}{y + a}$. Отсюда $f(y) = b(y + a)$, $b \in \mathbb{R}$. Таким образом, двумерный интеграл уравнения Пфаффа имеет вид $ax + by + ab - z = 0$.

Геометрически получение решения уравнения Пфаффа в виде двумерного интеграла означает построение поверхностей, ортогональных заданному векторному полю $\vec{F} = (P, Q, R)$.

Уравнение Пфаффа может иметь и *одномерные интегралы*, представляющие собой зависимость между переменными x, y и z в виде

$$\begin{cases} u(x, y, z) = 0, \\ v(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Указанная зависимость описывает *интегральную кривую*.

Найти интегральные поверхности уравнения Пфаффа:

1359. $xdx + y^2 dy - z^3 dz = 0$.

1360. $yzdx + xzdy + xydz = 0$.

1361. $\varphi(x)dx + \psi(y)dy + \eta(z)dz = 0$, где φ, ψ, η − непрерывные функции.

1362. $\frac{(x + y - z)dx + (x + y - z)dy + (x + y + z)dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy} = 0$.

1363. $f(x + y + z)(dx + dy + dz) = 0$, где f − непрерывная функция.

1364. $f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)(xdx + ydy + zdz) = 0$, где f − непрерывная функция.

1365. $\left(1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz = 0$.

1366. $(x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2yz)dz = 0$.

Найти интегральные поверхности уравнений Пфаффа, используя указанный интегрирующий множитель $\mu(x, y, z)$:

1367. $yzdx + xzdy + xyzdz = 0$, $\mu = 1/(xyz)$.

1368. $(2x^2 + 2x + 2xz^2 + 1)dx + dy + 2zdz = 0$, $\mu = e^{x^2}$.

1369. $\left(yz - z^2\right)dx - xzdy + xydz = 0$, $\mu = 1/(x^2z^2)$.

1370. $z(1 - z^2)dx + zdy - (x + y + xz^2)dz = 0$, $\mu = 1/z^2$.

1371. $(y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz = 0$, $\mu = 1/(x - y)^2$.

1372. Убедиться, что векторное поле $\vec{F} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 - z\vec{e}_3$ потенциально, и найти его потенциал.

1373. Найти поверхности, которые в каждой своей точке ортогональны векторному полю $\vec{F} = \vec{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

1374. Найти поверхность, проходящую через точку (1, 1, 1) и ортогональную векторному полю $\vec{F} = (1-4x)\vec{e}_1 + (1+4y)\vec{e}_2 - 4z\vec{e}_3$ в каждой своей точке.

51. Метод Лагранжа

Метод Лагранжа (*метод Лагранжа – Шарпи*) используется для построения *двупараметрического семейства решений* $\Phi(x, y, u, \alpha, \beta) = 0$ (*полного интеграла*) нелинейного уравнения с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными $F(x, y, u, p, q) = 0$, где $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; $q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Теорема 51.1. *Пусть функция $v(x, y, u, p, q)$ является двумерным первым интегралом системы в симметрической форме*

$$\frac{dx}{F'_p} = \frac{dy}{F'_q} = \frac{du}{pF'_p + qF'_q} = \frac{dp}{-\left(F'_x + pF'_u\right)} = \frac{dq}{-\left(F'_y + qF'_u\right)},$$

а функциональная система

$$\begin{cases} F(x, y, u, p, q) = 0, \\ v(x, y, u, p, q) = \alpha \end{cases}$$

имеет решения $p = P(x, y, u, \alpha)$, $q = Q(x, y, u, \alpha)$. Тогда двумерный интеграл $\Phi(x, y, u, \alpha, \beta)$ уравнения Пфаффа

$$P(x, y, u, \alpha)dx + Q(x, y, u, \alpha)dy - du = 0$$

будет полным интегралом исходного уравнения.

Задача 51.1. Построить полный интеграл уравнения $px + qy + pq - u = 0$.

Р е ш е н и е. Система в симметрической форме для определения $v(x, y, u, p, q)$ имеет вид $\dfrac{dx}{x+q} = \dfrac{dy}{y+p} = \dfrac{du}{p(x+q)+q(y+p)} = \dfrac{dp}{0} = \dfrac{dq}{0}$. Ее первый интеграл будет $v = p$. Составляем функциональную систему $\begin{cases} px + qy + pq - u = 0, \\ p = \alpha, \end{cases}$ из которой находим: $p = \alpha$, $q = (u - \alpha x)/(y + \alpha)$. Тогда уравнение Пфаффа имеет вид

$$\alpha dx + \frac{u - \alpha x}{y + \alpha}dy - du = 0.$$

Двумерный интеграл его (задача 50.2) $u = \alpha x + \beta y + \alpha\beta$. Он является полным интегралом исходного уравнения.

Построить полный интеграл уравнений:

1375. $p^2 + q^2 = 1$.

1376. $p^2 = u^2(1 - pq)$.

1377. $p^2 + upq - u^2 = 0$.

1378. $p^2 - q^2 = 1$.

1379. $1 + p^2 + q = 0$.

1380. $p + zq^2 = 0$.

Контрольная работа № 6

Вариант I

1. Построить базис первых интегралов системы $\dfrac{dx}{2y-z}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}.$

2. Проинтегрировать уравнение $xy\dfrac{\partial z}{\partial x}-x^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz.$

3. Решить задачу Коши $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy, \qquad z(x,y)\big|_{x=2}=y^2+1.$

4. Проинтегрировать уравнение $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+yz\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

Вариант II

1. Построить базис первых интегралов системы $\dfrac{dx}{x+y^2+z^2}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}.$

2. Проинтегрировать уравнение $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}-x^2=0.$

3. Решить задачу Коши $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2, \qquad z(x,y)\big|_{y=-2}=x-x^2.$

4. Проинтегрировать уравнение $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

№ 1

Ц е л ь   р а б о т ы – исследование стационарных линейных векторных уравнений.

П о д г о т о в к а   к   в ы п о л н е н и ю   р а б о т ы – изучение теоретического материала по вопросам:

1) структура решений стационарных линейных уравнений;

2) структура решений стационарных линейных векторных дифференциальных уравнений (гл. III);

3) поведение решений при $t \to \infty$ (гл. VI);

4) качественное исследование математических моделей колебательных процессов (§ 10);

5) схема расположения фазовых графиков однородного стационарного линейного уравнения второго порядка;

6) классификация точек покоя по величинам собственных значений оператора L_2 (гл. V, § 22).

З а м е ч а н и е. Значение действительного параметра, от которого зависят коэффициенты оператора L_2, называют *бифуркационным*, если сколь угодно малым возмущением этого параметра можно изменить тип точки покоя уравнения $L_2x = 0$.

Вариант I

1. При каких значениях параметров a и b уравнение $D^2x + aDx + bx = 0$ описывает:

а) гармонические колебания (указать их вид и период);

б) затухающие гармонические колебания (указать их вид, амплитуду и период)?

2. При каких значениях параметра b уравнение $D^2x + 2Dx + bx = e^t$ неустойчиво? Установить в зависимости от параметра b тип точки покоя соответствующего однородного уравнения. Начертить схему расположения фазовых графиков однородного уравнения при $b = -3$.

3. Какие значения параметра α являются бифуркационными для оператора $L_2 = D^2 + \alpha D + D^0$?

4. Определить область устойчивости и асимптотической устойчивости системы

$$\begin{cases} Dx_1 = x_1 + \sqrt{t}, \\ Dx_2 = x_1 + \alpha x_2 + e^t. \end{cases}$$

Установить в зависимости от параметра α тип точки покоя соответствующей однородной системы.

5. Приняв модуль силы сопротивления воздуха при свободном полете планера $F = kv$ (где k – коэффициент пропорциональности, $\vec{v}$ – скорость планера), определить расстояние, которое пролетит планер за время t от момента, когда его скорость была равна $\vec{v}_0$. Считать, что движение планера происходит по горизонтальной прямой. Масса планера равна m.

6. Составить математическую модель кооперации популяции двух видов, если численность популяции каждого вида возрастает пропорционально численности популяции другого вида (коэффициенты пропорциональности соответственно 4 и 1) и убывает пропорционально собственной численности (коэффициент пропорциональности 2). Найти численность видов в произвольный момент времени t, если начальные популяции состояли соответственно из 100 и 300 особей.

Вариант II

1. При каких значениях параметров a и b все ненулевые решения уравнения $D^2x + aDx + bx = 0$ представляют собой апериодические движения? Указать их вид, выделить область изменения пара-

метров, при которых уравнение описывает затухающие апериодические движения. При каких значениях параметров a и b данное уравнение имеет только монотонные решения?

2. При каких значениях параметра a уравнение $D^2x - 2a^2Dx + 4x = \sin t + e^{2t}$ устойчиво? Установить в зависимости от параметра a тип точки покоя соответствующего однородного уравнения. Начертить схему расположения фазовых графиков однородного уравнения при $a = 1$.

3. Какие значения параметра α являются бифуркационными для оператора $L_2 = D^2 + D + \alpha D^0$?

4. Определить область устойчивости и асимптотической устойчивости системы

$$\begin{cases} Dx_1 = -x_1 - x_2 + \sin t^2, \\ Dx_2 = ax_1 - ax_2 + e^{-t}. \end{cases}$$

Установить в зависимости от параметра a тип точки покоя соответствующей однородной системы.

5. К катушке с сопротивлением и индуктивностью приложена электродвижущая сила E, изменяющаяся со временем по закону $E = E_0 \sin \omega t$. Найти силу тока I в цепи, если $I = 0$ при $t = 0$.

6. Груз массой 100 г подвесили к концу недеформированной пружины и отпустили без начальной скорости. Длина недеформированной пружины 65 см, а при равновесии груза на пружине – 85 см. Составить математическую модель движения и определить закон движения груза, амплитуду и период колебаний, наибольшую упругую силу пружины, учитывая, что $g = 9{,}81$ м/с^2.

Вариант III

1. При каких значениях параметров a и b все решения уравнения $D^2x + aDx + bx = 0$:

а) ограничены на всем $\mathbb{R}$;

б) двусторонне устойчивы и устойчивы в отрицательном направлении?

2. При каких значениях параметра α уравнение $D^2x + \alpha Dx + (\alpha - 1)\, x = t \cos t$ асимптотически устойчиво? Установить в зависимости от параметра α тип точки покоя соответствующего однородного уравнения. Начертить схему расположения фазовых графиков однородного уравнения при $\alpha = 3$.

3. Какие значения параметра α являются бифуркационными для оператора $L_2 = D^2 + 2\alpha D + \alpha^3 D^0$?

4. Определить область устойчивости и асимптотической устойчивости системы

$$\begin{cases} Dx_1 = ax_1 + x_2 + t + t^3, \\ Dx_2 = bx_1 + ax_2. \end{cases}$$

Установить в зависимости от параметров a и b тип точки покоя соответствующей однородной системы.

5. Электрическая цепь состоит из конденсатора емкостью C, катушки с сопротивлением R и индуктивностью L. Найти зависимость силы тока от времени в катушке, подверженной действию постоянной электродвижущей силы E_0, если в начальный момент времени сила тока равна нулю и $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{E_0}{L}$.

6. По горизонтальной хорде вертикального круга движется точка массой 0,5 кг. На точку действует упругая сила, пропорциональная расстоянию от точки до центра и направленная все время к центру (коэффициент пропорциональности $k = 16$ Н/м). Вертикальная составляющая этой силы уравновешивается силой реакции. Кроме того, на точку действует сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости, причем коэффициент пропорциональности $\gamma = 10$ Н · с/м. Определить уравнение движения точки, если в начальный момент она находилась в крайнем правом положении и была отпущена без начальной скорости. Принять расстояние от центра до хорды равным 30 см, а радиус круга – 50 см. (У к а з а н и е. Систему координат выбрать так, чтобы ось Ox совпадала с хордой, а ось Oy – с диаметром.)

№ 2

Ц е л ь р а б о т ы – изучение элементарных дифференциальных уравнений, использование их при решении прикладных задач естествознания.

П о д г о т о в к а к в ы п о л н е н и ю р а б о т ы – изучение теоретического материала по вопросам:

1) типы и методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной дифференциальной форме;

2) однозначная разрешимость задачи Коши (гл. IX);

3) уравнения в общей форме, возможность приведения их к элементарным;

4) особые решения и геометрическое исследование полученного результата (гл. X).

Вариант I

1. Указать тип и проинтегрировать уравнения:

а) $(3x^3+6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$; б) $(x - 2xy - y^2)dy + y^2dx = 0$;

в) $xy' + y = xy^2$.

2. Используя подстановку $y^3 = u(x)$, преобразовать уравнение $xy^3 - (x^2y^2 - y^8)y' = 0$. Указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

3. Указать особые решения уравнения $y'^2 - y^3 = 0$.

4. Найти кривые, у которых любая касательная пересекается с осью ординат в точке, одинаково удаленной от точки касания и от начала координат.

5. Скорость истечения жидкости определяется формулой $v = k\sqrt{2gh}$, где k – коэффициент трения (для воды $k = 0{,}6$); g – ускорение свободного падения; h – высота уровня жидкости над отверстием. Длина цилиндрического резервуара с горизонтальной осью – 6 м, диаметр – 4 м. За какое время вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через круглое отверстие радиусом 1/12 м, сделанное в дне резервуара?

6. Дифференциальное уравнение, определяющее форму каната, укрепленного в двух точках и подверженного действию только силы собственного веса, имеет вид $Hy'' = s\sqrt{1 + y'^2}$, где H – горизонтальное натяжение (постоянная величина); s – линейная плотность каната. Определить форму каната.

Вариант II

1. Указать тип и проинтегрировать уравнения:

а) $3y^2y' + y^3 + x = 0$; б) $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$;

в) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0$.

2. Использовав подстановку $yx = u(x)$, преобразовать уравнение $xy' - y(\ln xy - 1) = 0$. Указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

3. Указать особые решения уравнения $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$.

4. Найти кривую, проходящую через точку (4, 3), если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке в два раза меньше углового коэффициента радиуса-вектора точки касания.

5. Тело температурой 25 °С погружено в термостат, в котором поддерживается температура 0 °С. Определить, за какое время тело охладится до 10 °С, если за 20 мин оно охлаждается до 20 °С. (Скорость охлаждения тела в среде пропорциональна разности между температурой тела и температурой среды.)

6. Материальная точка массой m брошена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Сопротивление воздуха пропорционально кубу скорости точки. Составить математическую модель движения точки.

Вариант III

1. Указать тип и проинтегрировать уравнения:

а) $(x^2 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)dy = 0$; б) $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y dy$;

в) $(3x^2 - y^2)dy = 2xydx$.

2. Использовав подстановку $x\operatorname{tg}\dfrac{y-x}{2} = u(x)$, преобразовать уравнение $xy' - \sin(y - x) = 0$. Указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

3. Указать особые решения уравнения $(y' - 1)^2 - y^3 = 0$.

4. Найти кривую, для которой площадь фигуры, ограниченной осями координат, данной кривой и ординатой (прямой, параллельной оси ординат) произвольной точки кривой, равна кубу этой ординаты.

5. В резервуаре находится 0,1 м^3 рассола, содержащего 10 кг растворенной соли. В резервуар вливается вода со скоростью $3 \cdot 10^{-3}$ м^3/мин, а из него вытекает смесь со скоростью $2 \cdot 10^{-3}$ м^3/мин, причем концентрация поддерживается равномерной посредством перемешивания. Сколько соли содержит резервуар по истечении 1 ч? (Скорость растворения твердого вещества в жидкости при постоянной температуре пропорциональна массе нерастворенного вещества и разности между концентрацией насыщенного раствора и концентрацией в данный момент.)

6. Найти кривые, радиус кривизны которых в каждой точке равен угловому коэффициенту касательной к кривой в этой точке.

№ 3

Ц е л ь р а б о т ы – качественное исследование плоских систем.

П о д г о т о в к а к в ы п о л н е н и ю р а б о т ы – изучение теоретического материала по вопросам:

1) функции Ляпунова и устойчивость (§ 44);

2) дифференциальные системы в симметрической форме; базис первых интегралов (§ 43); консервативные системы.

З а м е ч а н и е. Двумерная система называется *консервативной*, если она имеет первый интеграл, определенный на всей плоскости.

Вариант I

1. Переходя к полярным координатам, проинтегрировать систему

$$\begin{cases} Dx_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ Dx_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

Исследовать устойчивость нулевого решения системы.

2. При каких значениях параметра a асимптотически устойчиво нулевое решение системы

$$\begin{cases} Dx_1 = ax_2 - x_1 + x_1^2 e^{x_1}, \\ Dx_2 = -ax_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)? \end{cases}$$

3. С помощью функции Ляпунова $v(y_1, y_2) = y_1^2 + y_1^2 y_2^2 + y_2^4$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, где $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2$, исследовать устойчивость решения $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ системы

$$\begin{cases} Dx_1 = 1 - 3x_1 + 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^3 - 2x_1 x_2^2, \\ Dx_2 = x_2 - 2x_1 x_2 + x_1^2 x_2 - x_2^3. \end{cases}$$

4. Доказать, что если какое-либо одно решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений неустойчиво, то неустойчивы все решения этой системы.

5. Будет ли консервативной система $\dfrac{dx_1}{x_2 x_3} = \dfrac{dx_2}{x_1 x_3} = \dfrac{dx_3}{x_1 x_2}$?

Вариант II

1. Переходя к полярным координатам, проинтегрировать систему

$$\begin{cases} Dx_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ Dx_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

Исследовать устойчивость нулевого решения системы.

2. При каких значениях параметра a асимптотически устойчиво нулевое решение системы

$$\begin{cases} Dx_1 = 2e^{-x_1} - \sqrt{4 + ax_2}, \\ Dx_2 = \ln(1 + 9x_1 + ax_2)? \end{cases}$$

3. С помощью функции Ляпунова $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ исследовать устойчивость решения нулевой задачи Коши для уравнения $D^2 x + (Dx)^3 + x = 0$.

4. Доказать, что если каждое решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений ограничено, то система устойчива по Ляпунову.

5. Будет ли консервативной система $\dfrac{dx_1}{x_3^2 - x_2^2} = \dfrac{dx_2}{x_3} = \dfrac{dx_3}{-x_2}$?

Вариант III

1. Переходя к полярным координатам, проинтегрировать систему

$$\begin{cases} Dx_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ Dx_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{cases}$$

Исследовать устойчивость нулевого решения системы.

2. При каких значениях параметра a асимптотически устойчиво нулевое решение системы

$$\begin{cases} Dx_1 = -ax_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2(x_1^2 + x_2^2), \\ Dx_2 = ax_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_1(x_1^2 + x_2^2)? \end{cases}$$

3. Используя функцию Ляпунова вида $v(x_1, x_2) = ax_1^4 + bx_2^4$, проверить асимптотическую устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} Dx_1 = -x_1^3 - x_2^3, \\ Dx_2 = x_1^3 - x_2^5. \end{cases}$$

4. Доказать, что если линейная однородная система асимптотически устойчива, то все решения ее стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

5. Показать, что система $Dx_1 = -x_2$, $Dx_2 = x_1$ консервативна, а система $Dx_1 = x_1$, $Dx_2 = x_2$ – нет.

№ 4

Ц е л ь р а б о т ы – построение приближенного решения задачи Коши.

П о д г о т о в к а к в ы п о л н е н и ю р а б о т ы – изучение теоретического материала по вопросам:

1) голоморфные решения линейных уравнений с голоморфными коэффициентами;
2) структура решений уравнения Бесселя (гл. XII);
3) приближенное решение дифференциальных уравнений и систем методом последовательных приближений (§ 45).

Вариант I

1. Построить в виде степенного ряда решение задачи Коши

$$(1 - t)D^2x + tDx - x = 0, \quad x|_{t=0} = 1, \quad Dx|_{t=0} = 1,$$

предварительно обосновав его существование.

2. Найти решение задачи Коши

$$t^2D^2x + tDx + (t^2 - 1/4)x = 0, x|_{t=\pi/2} = 1, \quad Dx|_{t=\pi/2} = 0,$$

и исследовать его поведение при $t \to 0$.

3. Используя теорему Пикара – Линделёфа, проверить однозначную разрешимость задачи Коши

$$xy' = 2x - y, \quad y|_{x=1} = 2; \quad \Pi = \left\{(x, y) \,\middle|\, |x-1| \le 1/2, \ |y-2| \le 1\right\}.$$

Оценить длину промежутка существования решения и построить приближения y_0, y_1, y_2 к решению $y(x)$.

Вариант II

1. Построить в виде степенного ряда решение задачи Коши

$$(1 - t^2)D^2x - tDx + x = 0, \quad x|_{t=0} = 1, \quad Dx|_{t=0} = 0,$$

предварительно обосновав его существование.

2. Для уравнения $t^2D^2x + tDx + (t^2 - 1/4)x = 0$ указать все решения, ограниченные около $t = 0$.

3. Используя теорему Пикара – Линделёфа, проверить однозначную разрешимость задачи Коши

$$y' = y^2 - x^2, \quad y|_{x=0} = 0; \quad \Pi = \left\{(x, y) \,\middle|\, |x| \le 1, \ |y| \le 1\right\}.$$

Оценить длину промежутка существования решения и построить приближения y_0, y_1, y_2 к решению $y(x)$.

Вариант III

1. Построить в виде степенного ряда решение задачи Коши

$$(1 - t^2)D^2x - tDx + 2x = 0, \quad x|_{t=0} = 0, \quad Dx|_{t=0} = 1,$$

предварительно обосновав его существование.

2. Для уравнения $t^2D^2x + tDx + (t^2 - 9/4)\,x = 0$ указать все решения, ограниченные около $t = 0$.

3. Используя теорему Пикара – Линделёфа, проверить однозначную разрешимость задачи Коши

$$y' = y^2 - x^2, \quad y|_{x=0} = 1; \quad \Pi = \left\{(x, y) \,\middle|\, |x| \le 1/2,\ |y - 1| \le 1\right\}.$$

Оценить длину промежутка существования решения и построить приближения y_0, y_1, y_2 к решению $y(x)$.

ОТВЕТЫ

1. б. **2.** б, г. **3.** в, г. **4.** а. **5.** а. **6.** б, в, г. **7.** а. **38.** $Dx + x^2 = 0$. **39.** $D^2x - x + 2\sin t = 0$. **40.** $Dx = \dfrac{x\left(t^2 + x^2\right)}{t\left(t^2 - 2t + x^2\right)}$.

41. $xdx + ydy = 0$. **42.** $Dx = -\sqrt[3]{x/t}$. **43.** $x = tDx + Dx/\sqrt{1 + (Dx)^2}$. **44.** $x = t\left(Dx - e^t\right)$. **45.** $x = tDx - t\sin t - 5t^2$.

46. $x = tDx - t\cos t + \sin t - t^3/\ln t$. **47.** $Dx = tD^2x + \left(D^2x\right)^2$. **48.** $\left(D^2x\right)^2 = 4(Dx - 1)$. **49.** $2D^3x + \left(D^2x\right)^3 = 0$.

50. $xD^2x = (Dx)^3$. **51.** $2xD^2x = 1 + (Dx)^2$. **52.** $2yy'' = (y')^2$. **53.** $2xy' - y = 0$. **54.** $y'^2(y-1)^2 = y(2-y)$.

55. $y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{1}{y}y'^2 = 0$. **56.** $x = C - t\cos t + \sin t$. **57.** $x = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k t^k + t^{n+1}/(n+1)!$ **58.** $x = \dfrac{1}{2}\ln t + C_0 + C_1 t + C_2 t^2$.

59. $x = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}\sin 2t + C$. **60.** $x = -\ln\cos t + C$. **61.** $x = C + \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$. **62.** $x = -\cos t + \dfrac{1}{3}\cos^3 t + C$.

63. $x = \dfrac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t) + C$. **64.** $x = -\dfrac{1}{4}\cos 2t + C_0 + C_1 t$. **65.** $x = C_0 + C_1 t + t\int\limits_{\pi/2}^{t}\dfrac{\sin\tau}{\tau}d\tau + \cos t$.

66. $x = \int\limits_s^t \dfrac{t-\tau}{\tau}e^\tau d\tau + C_0 + C_1 t,\ s \in I$. **67.** $x = \ln\sin t - 1$. **68.** $x = \left(\sqrt{4t^2 - 1} + 28 - \sqrt{3}\right)\Big/4$. **69.** $x = \sin t + 10$.

70. $x = \arcsin t + 93$. **71.** $x = \sin t + 1 - t + t^2\big/2$. **72.** $x = \ln(-t) + t^2 + 4t + 4$. **73.** $x = e^t + 2\sqrt{t} + (1-2e)\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{3}{2}t - \dfrac{e}{2} - \dfrac{3}{4}$.

74. а) $x = \dfrac{1}{2}t^2 + (\beta - t_0)t + \alpha - \beta t_0 + \dfrac{1}{2}t_0^2$; б) $x = t^2\big/2$; в) $x = t + t^2\big/2$; г) $x = 1 + t^2\big/2$. **75.** $x = -e^{-t} + 1 - t + t^2\big/2$.

76. $x = 1 + \left(t^2 - 1\right)^{-1}$. **77.** $x = t^2 - 1$. **78.** $x = \ln t + \left(t^2 - 13t + 12\right)\Big/18$. **79.** $x = \cos t$. **80.** Нет решения.

81. Решение существует при условии $\int\limits_s^r f(t)dt = b - a$. **82.** $x = \int\limits_s^t (t-\tau)f(\tau)d\tau - \dfrac{t-s}{r-s}\int\limits_s^r (t-\tau)f(\tau)d\tau + \dfrac{b(t-s) - a(t-r)}{r-s}$.

83. $x = 1 + \int\limits_0^2 G(t,\tau)\tau d\tau,\quad G(t,\tau) = (t-\tau)\cdot 1(t-\tau) + t(\tau - 2)/2$. **84.** $x = \int\limits_0^\pi G(t,\tau)\cos\tau d\tau,\quad G(t,\tau) = (t-\tau)\cdot 1(t-\tau) + t(\tau-\pi)/\pi$.

85. $x = \dfrac{4t}{\pi} + \int\limits_0^{\pi/4} G(t,\tau)\operatorname{tg}\tau d\tau,\quad G(t,\tau) = (t-\tau)\cdot 1(t-\tau) + 4t(\tau - \pi/4)/\pi$. **86.** $x = \int\limits_0^1 G(t,\tau)\tau d\tau,\quad G(t,\tau) = (t-\tau)\cdot 1(t-\tau) + t(\tau - 1)$.

87. $x = \begin{cases} (\alpha + C_1)\dfrac{t^2}{2} + \left(\dfrac{C_1^2 - \alpha^2}{2} + C_2\right)t + \dfrac{C_1^3 + \alpha^3}{6} + C_2(\alpha - 1) + C_3, & t < \alpha, \\ \dfrac{(t + C_1)^3}{6} + C_2 t + C_3, & t \ge \alpha. \end{cases}$ **88.** $x = \begin{cases} (C_1 - t)t + C_2, & t < 0, \\ -\sin t + C_1 t + C_2, & t \ge 0. \end{cases}$

89. $x = \begin{cases} t^3/6 + (C_1 - t)t + C_2, & t < 0, \\ -\sin t + C_1 t + C_2, & t \ge 0. \end{cases}$ **90.** $x = \begin{cases} t^2\big/2 + 2t + C, & t < 0, \\ t^4\big/4 + C, & t \ge 0. \end{cases}$ **91.** $x = \dfrac{1}{6}t^3\operatorname{sgn} t + C_0 t + C_1$.

92. $x = 2 + \dfrac{1}{2}\left(e^{2t} - 1\right)\cdot 1(t)$. **93.** а) $x = \begin{cases} 1, & t < 3, \\ \dfrac{(t-3)^2}{2} + 1, & t \ge 3; \end{cases}$ б) $x = \dfrac{(t-3)^2}{2}\cdot 1(t-3) + \dfrac{3}{2}$; в) $x = \dfrac{(t-3)^2}{2}\cdot 1(t-3)$.

94. $y = k\ln t + C$, где k – коэффициент пропорциональности. **95.** $y = C + x^3\big/3$. **96.** $y = x^{-3/2}$. **97.** $2x^2 - 3y^2 = -1$.

98. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. **99.** $y^2 = 2ax + C$. **100.** $y = Ce^{x/a}$. **101.** $3y^2 = 2x + C$. **102.** $s = v_0\left(t - t_0\right) + s_0$.

103. $s=at^2/2+v_0t+s_0$. **104.** $h=gt^2/2+v_0t+h_0$. **105.** $s=a_0\left(t-\ln(t+1)\right)$. **106.** $c(t)=C-2^{-t}/\ln 2$, $c(3)=1+7/(8\ln 2)$ г/л.

107. $p'(t)=9000/(1+t)^2$, $p(0)=1000$, $p(t)=10000-9000/(1+t)$.

108. $m''(t)=1{,}03^t\ln 1{,}03$, $m(0)=1$; а) $m(1/6)=1{,}03^{1/6}$ г; б) $m(1/3)=1{,}03^{1/3}$ г.

109. а) $1{,}009\cdot 10^6$; б) $1{,}025\cdot 10^6$; в) 10^6; $t=5$ ч. **110.** $p(t)=1000+1000t/\left(100+t^2\right)$, $p_{\max}=1050$ при $t=10$ ч.

111. $m\dfrac{d^2s}{dt^2}=kt-T$, $s\big|_{t=0}=0$; $\dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=v_0$, $s=\dfrac{4}{3}v_0t_1-\dfrac{Tt_1}{6m}$. **111.1.** $x=x_0\exp\left(b\omega^2t\right)$. **111.2.** $I=I_0+1{,}12/t-1{,}12/t_0$.

112. $x=C_1e^{-2t}+C_2e^t$. **113.** $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}$. **114.** $x=C_1+C_2e^{2t}$. **115.** $x=C_1e^{2t}+C_2e^{t/2}$. **116.** $x=C_1+C_2e^{-7t}$.

117. $x=\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right)e^{2t}$. **118.** $x=C_1e^t+\left(C_2\cos t+C_3\sin t\right)e^t$. **119.** $x=\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{t/2}$.

120. $x=C_1e^t+C_2te^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t$. **121.** $x=C_1e^t+C_2e^{-3t}+\left(C_3\cos t+C_4\sin t\right)e^t$.

122. $x=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}+C_3\cos\sqrt{3}t+C_4\sin\sqrt{3}t$. **123.** $x=\left(C_1+C_2t\right)e^{-t}+C_3e^{-3t}$. **124.** $x=\left(C_1+C_2t\right)e^t$.

125. $x=\left(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t\right)e^{3t}$. **126.** $x=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$. **127.** $x=\left(C_1+C_2t\right)e^{-t/2}$. **128.** $x=C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t$.

129. $x=\left(C_1+C_2t\right)e^{-2t}$. **130.** $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$. **131.** $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3e^{-4t}$. **132.** $x=C_1+C_2t+C_3e^{2t}$.

133. $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3e^{2t}+C_4e^{-2t}$. **134.** $x=C_1\cos t+C_2\sin t+C_3\cos\sqrt{3}t+C_4\sin\sqrt{3}t$.

135. $x=\left(C_1+C_2t\right)e^t+\left(C_3\cos 2t+C_4\sin 2t\right)e^{-t}$. **136.** $x=C_1+C_2e^t+C_3e^{-t}+C_4e^{3t}+C_5e^{-3t}$.

137. $x=C_1+C_2e^t+C_3e^{-4t}+C_4e^t+C_5e^{-t}+C_6\cos t+C_7\sin t$. **138.** $x=\left(\left(C_1+C_2t\right)\cos t+\left(C_3+C_4t\right)\sin t\right)e^{2t}$.

151. $\lambda=k^2$, $k\in\mathbb{N}$, $x=C\sin\sqrt{\lambda}t$, $C\in\mathbb{R}$. **152.** а) $x=\cos t+\sin t$; б) нет решения; в) $x=\cos t+C\sin t$, $C\in\mathbb{R}$.

153. а) $\alpha=k^2$, $k\in\mathbb{N}$, $x=C\cos\sqrt{\alpha}t$, $C\in\mathbb{R}$, или $\alpha=0$, $x=C$, $C\in\mathbb{R}$; б) $\alpha=4k^2$, $k\in\mathbb{N}$, или $\alpha=0$.

154. $\alpha\in\mathbb{R}$, $x(t)\equiv 0$. **154.1** $\approx 99{,}7$ ч. **154.2.** 270 сут, 7,5 сут. **154.3.** ≈ 986. **154.4.** $\approx 0{,}1\%$.

154.5. Приблизительно 8075 и 12 387 млн человек. **154.6.** Приблизительно 63 850 000 человек.

154.7. Приблизительно 9,655 млн человек. **155.** $x=C_1\cos\sqrt{ht}+C_2\sin\sqrt{ht}$, $h>0$. **156.** а) $b>1$; б) $0<b\le 1$.

157. $0<a<1$. **158.** $|k|>1$. **159.** а) $2\pi/3$; б) $2\pi/\sqrt{3}$; в) $4\pi/\sqrt{3}$; г) 2π. **160.** $a=0$, $b>0$.

161. а) $a>0$, $b>0$; б) $a<0$, $b>0$. **162.** $b<0$ или $b\ge 0$, $a>0$. **163.** $a^2<4b$. **164.** $a^2-4b\ge 0$, $b>0$.

165. $a^2-4b\ge 0$. **166.** а) $k^2-4mc<0$; б) $k^2-4mc\ge 0$.

173. а) $p^2-4q>0$, $q>0$, $p>0$, или $p^2-4q=0$ и $p>0$; б) $p=0$, $q>0$; в) $p^2-4q<0$, $p>0$.

174. $D^3x-6D^2x+12Dx-8x=0$. **175.** $D^3x+D^2x-6Dx=0$. **176.** $D^2x+x=0$. **177.** $D^2x-x=0$.

178. $D^3x-D^2x+Dx-x=0$. **179.** $D^4x+2D^2x+x=0$. **180.** $D^4x-D^3x=0$. **181.** $D^4x+2D^2x+8Dx+5x=0$.

182. $D^4x-8D^3x+\dfrac{51}{2}D^2x-34Dx+\dfrac{289}{16}x=0$. **183.** $D^4x+2D^3x-3D^2x-8Dx-4x=0$. **184.** $4D^2x+7Dx-2x=0$.

185. $9D^2x+6Dx+x=0$. **186.** $D^2x+2Dx-4x=0$. **187.** $D^2x-4Dx+8x=0$. **188.** $4D^3x+3D^2x-9Dx+2x=0$.

189. $16D^4x+56D^3x+33D^2x-28Dx+4x=0$. **190.** $D^3x+2D^2x-4Dx=0$. **191.** $D^3x+6D^2x+12Dx+8x=0$.

192. $D^4x+2D^2x+x=0$. **193.** $D^4x-2D^2x+D^2x=0$. **194.** $\varphi_0(t)=1$, $\varphi_1(t)=t$, $\varphi_2(t)=\dfrac{1}{2}\operatorname{ch}\sqrt{2}t-\dfrac{1}{2}$, $\varphi_3(t)=-\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{sh}\sqrt{2}t$.

195. $\varphi_0(t-1)=\dfrac{1}{2}\cos(t-1)+\dfrac{1}{2}\operatorname{ch}(t-1)$, $\varphi_1(t-1)=\dfrac{1}{2}\sin(t-1)+\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}(t-1)$, $\varphi_2(t-1)=-\dfrac{1}{2}\cos(t-1)+\dfrac{1}{2}\operatorname{ch}(t-1)$,

$\varphi_3(t-1)=-\dfrac{1}{2}\sin(t-1)+\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}(t-1)$. **196.** $\varphi_0(t)=\cos\dfrac{t}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\dfrac{t}{\sqrt{2}}$, $\varphi_1(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{t}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\dfrac{t}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{t}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\dfrac{t}{\sqrt{2}}$,

$\varphi_2(t)=\sin\dfrac{t}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\dfrac{t}{\sqrt{2}}$, $\varphi_3(t)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{t}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\dfrac{t}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{t}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\dfrac{t}{\sqrt{2}}$.

197. $\varphi_0(t+2)=\cos(t+2)\operatorname{ch}(t+2)$, $\varphi_1(t+2)=\frac{1}{2}\cos(t+2)\operatorname{sh}(t+2)+\frac{1}{2}\sin(t+2)\operatorname{ch}(t+2)$, $\varphi_2(t+2)=\frac{1}{2}\sin(t+2)\operatorname{sh}(t+2)$, $\varphi_3(t+2)=\frac{1}{4}\sin(t+2)\operatorname{ch}(t+2)-\frac{1}{4}\cos(t+2)\operatorname{sh}(t+2)$.

198. $\varphi_0(t+0,1)=\frac{2}{3}e^{(t+0,1)/2}+\frac{1}{3}e^{-(t+0,1)}$, $\varphi_1(t+0,1)=\frac{2}{3}e^{(t+0,1)/2}-\frac{2}{3}e^{-(t+0,1)}$.

199. $\varphi_0(t)=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$, $\varphi_1(t)=-\frac{1}{3}e^{-t}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{t/2}$, $\varphi_2(t)=\frac{1}{3}e^{-t}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{t/2}$.

200. $\varphi_0(t+1)=\left(t^2+1\right)e^{t+1}/2$, $\varphi_1(t+1)=-\left(t^2+t\right)e^{t+1}$, $\varphi_2(t+1)=(t+1)^2e^{t+1}/2$.

201. $\varphi_0(t)=1$, $\varphi_1(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}e^t-e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-2t}$, $\varphi_2(t)=-1+\operatorname{ch}t$, $\varphi_3(t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-2t}$.

202. $\varphi_0(t-3)=\cos 3(t-1)$, $\varphi_1(t-3)=\frac{1}{3}\sin 3(t-1)$.

203. $\varphi_1(t+3)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t+3}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t+3)$, $\varphi_0(t+3)=\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t+3)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t+3)\right)e^{-(t+3)/2}$.

204. $\varphi_0(t+1)=-te^{t+1}$, $\varphi_1(t+1)=(t+1)e^{t+1}$. **205.** $\varphi_0(t-1)=te^{-t+1}$, $\varphi_1(t-1)=(t-1)e^{-t+1}$.

206. $\varphi_0(t)=\frac{3}{2}\cos t-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t$, $\varphi_1(t)=\frac{3}{2}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\sqrt{3}t$, $\varphi_2(t)=\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t$, $\varphi_3(t)=\frac{1}{2}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\sqrt{3}t$.

207. $\varphi_0(t)=\cos t+\frac{1}{2}t\sin t$, $\varphi_3(t)=-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\sin t$. **208.** $x=\left(C_1+C_2t\right)e^{-t}+4e^{-t}(t+1)^{5/2}/5$, $I=\left]-1,+\infty\right[$.

209. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+\left(e^{-t}+e^{-2t}\right)\ln\left(e^t+1\right)$, $I=\mathbb{R}$. **210.** $x=\left(C_1+C_2t\right)e^t+1/t$, $I=(0,+\infty)$.

211. $x=\left(C_1+C_2t\right)e^t-0,5e^t\ln\left(t^2+1\right)+te^t\operatorname{arctg}t$, $I=\mathbb{R}$.

212. $x=C_1+C_2\cos t+C_3\sin t-\frac{1}{\sin t}-\sin t\ln\sin t+(t+\operatorname{ctg}t)\cos t, I=(0,\pi)$. **213.** $x=C_1+C_2e^t+\left(e^t+1\right)\left(\ln\left(e^t+1\right)-t\right)$, $I=\mathbb{R}$.

214. $x=\left(C_1+C_2t\right)e^{3t}+1/t$, $I=(0,+\infty)$. **215.** $x_{oo}=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$;

а) $x_{чн}=0,25\cos 2t\ln\cos 2t+0,5t\sin 2t$, $I=(-\pi/4,\pi/4)$; б) $x_{чн}=\sin 2t\ln\cos t-t\cos 2t$, $I=(-\pi/2,\pi/2)$.

216. $x_{oo}=C_1e^t+C_2e^{-t}$; а) $x_{чн}=-4\sqrt{t}$, $I=(0,+\infty)$; б) $x_{чн}=\int\limits_1^t\frac{\operatorname{sh}(t-\tau)}{\tau^2}d\tau$, $I=(0,+\infty)$.

217. $x_{oo}=C_1\cos t+C_2\sin t$; а) $x_{чн}=\sqrt{\sin 2t}$, $I=(0,\pi/2)$; б) $x_{чн}=-\sqrt{\cos 2t}$, $I=(-\pi/4,\pi/4)$;

в) $x_{чн}=\cos t\ln\cos t+t\sin t$, $I=(-\pi/2,\pi/2)$; г) $x_{чн}=0,5\operatorname{tg}^2t-\cos^2t-0,5\sin t\ln\operatorname{tg}(\pi/4+t/2)-1$, $I=(-\pi/2,\pi/2)$;

д) $x_{чн}=\frac{4}{3}\cos t\sqrt{\operatorname{ctg}t}$; е) $x_{чн}=\frac{9}{4}\cos t\sqrt[3]{\operatorname{ctg}t}+\frac{9}{10}\sin t\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2t}$, $I=(0,\pi/2)$; ж) $x_{чн}=2-\cos t\ln\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $I=(0,\pi)$;

з) $x_{чн}=\sin t\int\limits_1^t\frac{\cos\tau}{\tau}d\tau-\cos t\int\limits_1^t\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$, $I=(0,+\infty)$; и) $x_{чн}=\sin t\ln\sin t+t\cos t$, $I=(0,\pi)$;

к) $x_{чн}=-\frac{\cos 2t}{\cos t}$, $I=(-\pi/2,\pi/2)$; л) $x_{чн}=\cos t\ln\operatorname{tg}(\pi/4-t/2)$, $I=(-\pi/2,\pi/2)$.

218. $x_{oo}=C_1+C_2e^t$; а) $x_{чн}=te^t-\left(1+e^t\right)\ln\left(1+e^t\right)$, $I=\mathbb{R}$; б) $x_{чн}=\frac{1}{3}\left(1-e^{2t}\right)^{3/2}+\frac{1}{2}e^t\left(e^t\sqrt{1-e^{2t}}+\arcsin e^t\right)$, $I=(-\infty,0)$;

в) $x_{чн}=\cos e^t$, $I=\mathbb{R}$; г) $x_{чн}=e^t/t$, $I=(0,+\infty)$. **219.** $\varphi_1(t)=\frac{1}{\omega}\sin\omega t$. **220.** $\varphi_1(t)=\frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega t$. **221.** $\varphi_1(t)=te^{-t}$.

222. $\varphi_1(t)=te^t$. **223.** $\varphi_2(t)=e^t/2-e^{2t}+e^{3t}/2$. **224.** $\varphi_2(t)=\frac{e^t}{10}-\frac{e^{-t}}{6}+\frac{e^{-4t}}{15}$. **225.** $\varphi_3(t)=\frac{\operatorname{sh}2t}{6}-\frac{\operatorname{sh}t}{3}$.

226. $\varphi_3(t)=\dfrac{\sin t}{2}-\dfrac{\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t}{6}$. **227.** $\varphi_4(t)=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{8}\operatorname{ch}t+\dfrac{1}{72}\operatorname{ch}3t$. **228.** $\varphi_1(t)=e^t\sin t$. **229.** $\varphi_1(t)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$.

230. $\varphi_2(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(\sin t-\cos t)e^t$. **231.** $\varphi_2(t)=1+(t-1)e^t$. **232.** $\varphi_3(t)=\dfrac{1}{8}\operatorname{sh}2t-\dfrac{1}{4}t$.

247. а) $x=(6t-5)e^{-(t-1)}+e^{2t}/9-te^{-(t-3)}/3+2e^{-(t-3)}/9,\ I=\mathbb{R}$;

б) $x=(3t-19)e^{-(t-7)}+e^{2t}/9-te^{-(t-21)}/3+20e^{-(t-21)}/9,\ \ I=\mathbb{R}$; в) $x=e^{2t}/9-te^{-t}/3-e^{-t}/9,\ \ I=\mathbb{R}$;

г) $x=te^{-t+1}+e^{2t}/9-te^{-t+3}/3+2e^{-t+3}/9,\ \ I=\mathbb{R}$.

248. а) $x=2(1-t),\ I=\mathbb{R}$; б) $x=2(1-t)+2\sin(t-1),\ I=\mathbb{R}$; в) $x=2(1-t)+2\sin t-\cos t,\ I=\mathbb{R}$;

г) $x=2(1-t)-15\cos(t+3)+\sin(t+3),\ \ I=\mathbb{R}$. **249.** а) $x=\dfrac{2}{3}e^t-\dfrac{2}{3}e^{-t/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\ I=\mathbb{R}$;

б) $x=\dfrac{2}{3}e^t+\dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-t/2},\ I=\mathbb{R}$. **250.** а) $x=\cos 2t+\dfrac{1}{3}\sin 2t+\dfrac{1}{3}\sin t,\ \ I=\mathbb{R}$;

б) $x=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t\dfrac{\sin 2(t-\tau)}{\tau+1}d\tau+\cos 2t+\ \dfrac{1}{2}\sin 2t,\ \ I=(-1,+\infty)$; в) $I=(-\pi/4,\pi/4)$, $x=\cos 2t+\dfrac{1}{2}(t+1)\sin 2t+\dfrac{1}{4}\cos 2t\ln\cos 2t$;

г) $x=\dfrac{1}{5}e^t+\dfrac{4}{5}\cos 2t+\dfrac{2}{5}\sin 2t,\ \ I=\mathbb{R}$.

251. $x=\sin t+\sin 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2},\ \ I=(0,\pi)$. **252.** а) $x=t^2\sin t+t\cos t,\ \ I=\mathbb{R}$;

б) $x=2(1-t)+3\sin t-2\cos t,\ I=\mathbb{R}$; в) $x=2\sin t-\cos t\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right),\ \ I=(-\pi/2,\pi/2)$;

г) $x=\sin t+\ln(t+1)-\displaystyle\int_0^t\dfrac{\cos(t-\tau)}{\tau+1}d\tau,\ \ I=(-1,+\infty)$. **253.** $x=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+2e^{3t};\ \ I=\mathbb{R}$.

254. $x=(C_1\cos t+C_2\sin t)e^{2t}+(t^2+3t+1)e^t,\ \ I=\mathbb{R}$. **255.** $x=C_1\cos t+C_2\sin t+t\sin t+\cos t\ln\cos t+1,\ I=(-\pi/2,\pi/2)$.

256. $x=C_1\cos t+C_2\sin t-\sqrt{\cos 2t}+\dfrac{1}{2}t\sin t,\ \ I=(-\pi/4,\pi/4)$.

257. $x=(C_1+C_2\,t)\,e^{3t}-e^t+1/t,\ \ x=(C_1+C_2t)e^{3t}-e^t+1/t,\ I=(0,+\infty)$.

258. $x=(C_1+C_2t)e^{-t}+2e^t+4e^t(t+1)^{5/2}/5,\ \ I=(-1,+\infty)$. **259.** $x_{\text{чн}}=e^{4t}/5$. **260.** $x_{\text{чн}}=2(t-1)e^t$. **261.** $x_{\text{чн}}=te^t+t^2+2$.

262. $x_{\text{чн}}=\left(\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{3}t\right)e^t$. **263.** $x_{\text{чн}}=\dfrac{1}{10}\sin t+\ \dfrac{3}{10}\cos t$. **264.** $x_{\text{чн}}=\dfrac{1}{37}(6\sin t-\cos t)e^{3t}$. **265.** $x_{\text{чн}}=t^3e^t$.

266. $x_{\text{чн}}=(t\sin t-t^2\cos t)/4$. **267.** $x_{\text{чн}}=(2t-1)e^{2t}/32$. **268.** $x_{\text{чн}}=\dfrac{1}{50}(\cos 5t-\sin 5t)-\dfrac{1}{5}t^3-\dfrac{3}{25}t^2-\dfrac{6}{125}t$.

269. $x_{\text{чн}}=\dfrac{t^3}{6}$. **270.** $x_{\text{чн}}=(2t^3-3t^2)e^{2t}$. **271.** $x=C_1\cos t+C_2\sin t-2t\cos t$. **272.** $x=C_1e^t+C_2e^{4t}+(2t-2t^2-3)e^{2t}$.

273. $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+(0{,}1t+0{,}12)\cos t-(0{,}3t+0{,}34)\sin t$. **274.** $x=C_1e^t+C_2e^{-4t}-\left(\dfrac{1}{6}t+\dfrac{1}{36}\right)e^{-t}-\dfrac{te^{-4t}}{5}$.

275. $x=(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)e^{2t}+0{,}25e^{2t}+0{,}1\cos 2t+0{,}05\sin 2t$. **276.** $x=C_1e^{-3t}+C_2e^t+\left(\dfrac{1}{12}t^3-\dfrac{1}{16}t^2+\dfrac{1}{32}t\right)e^t$.

277. $x=C_1+C_2t+C_3e^t-t^4-5t^3-15t^2$. **278.** $x=C_1+C_2e^{-t}+(2t^2-6t+7)e^t$. **279.** $x=(C_1+C_2t)e^{-5t}+2t^2e^{-5t}$.

280. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+\left(\dfrac{17}{50}-\dfrac{3}{10}t\right)\cos t+\left(\dfrac{6}{50}+\dfrac{1}{10}t\right)\sin t$. **281.** $x=(C_1+C_2t)e^{2t}+0{,}25t^2+0{,}5t+0{,}375$.

282. $x=C_1\cos t+C_2\sin t+e^t/2$. **283.** $x=(C_1+C_2t)\cos 2t+(C_3+C_4t)\sin 2t+1/9\cos t$.

284. $x=C_1\cos t+C_2\sin t+(4t\sin t+\cos 3t)/16$. **285.** $x=C_1e^{-t}+C_2\cos t+C_3\sin t+t^3$.

286. $x=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{-2t}+\left(\frac{t^3}{2}-\frac{t^2}{3}\right)e^t+te^{-2t}$. **287** $x=C_1e^t+C_2e^{3t}+C_3e^{2t}+(21t-9t^2+2t^3)e^{3t}+te^{2t}$.

288. $x=2\cos t-5\sin t+2e^t$. **289.** $x=e-1+e^{2t-1}-2e^t$. **290.** $x=(t-\sin t)e^{-t}$. **291.** $x=(t-1)e^{2t}+(1-t)e^{-t}$.

292. $x=t-2\cos t-t\sin t$. **293.** $x=(2t-3)e^t+e^{-t}+\cos t+2\sin t$. **294.** $x=\cos 2t+(\sin t+\sin 2t)/3$.

295. $x=\left(2t^3-4t^2+5t-\frac{11}{2}\right)e^t+3(t+1)+\frac{7e^{-t}}{2}$.

318. а) $D^2x-4Dx+5x=3e^{2t}$; б) $D^2x+2Dx+x=8(t+1)e^t$; в) $D^2x-3Dx+2x=-e^t$.

319. а) $x=(\cos t+\sin t)/8$; б) $x=1$, $x=Ce^{-t}-1$, $x=Ce^t-1$, $C\in\mathbb{R}$; в) $x=4(\cos 2t+4\sin 2t)/17$;

г) нет решений, $x=(C_1+C_2t)e^{2t}+(9t^2+41t+52)e^t$, $C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$; д) $x=3$. **323.** $|\omega|\neq 1$. **324.** $|k|\neq 2$. **325.** $\omega^2=k$.

326. $\omega^2\neq k$. **328.** $\frac{a\omega\cos\omega t+(\omega^2-b)\sin\omega t}{a^2\omega^2+(\omega^2-b)^2}$ при $a\neq 0$;

$\frac{1}{b-\omega^2}\sin\omega t$ при $a=0,\ b<0$ и при $a=0,\ b>0,\ b\neq\omega^2,\ \sqrt{b}/\omega\notin\mathbb{Q}$;

$C_1\cos\sqrt{b}t+C_2\sin\sqrt{b}t+\frac{1}{b-\omega^2}\sin\omega t$, $C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$ при $a=0,\ b>0,\ b\neq\omega^2,\ \sqrt{b}/\omega\in\mathbb{Q}$;

периодических решений нет при $a=0,\ b>0,\ b=\omega^2$; $-\frac{\sin\omega t}{\omega^2}$ при $a=0,\ b=0$.

329. $u=e^{-ht}(C_1\sin\sqrt{k^2-h^2}t+C_2\cos\sqrt{k^2-h^2}t)+q\cos\omega t$, где $p=\frac{a(k^2-\omega^2)+2bh\omega}{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}$, $q=\frac{b(k^2-\omega^2)-2ah\omega}{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}$,

$h>0$; $u=\sqrt{p^2+q^2}$. **330.** $y=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{g}{k^2-\omega^2}\cos\omega t+\frac{\varepsilon\omega^2}{k^2}$, $k^2=\frac{1}{m\alpha}-\omega^2$, при $\frac{1}{m\alpha}>\omega^2$;

$y=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt}-\frac{g}{k^2+\omega^2}\cos\omega t-\frac{\varepsilon\omega^2}{k^2}$, $k^2=\omega^2-\frac{1}{m\alpha}$, при $\frac{1}{m\alpha}<\omega^2$; $y=C_1+C_2t-\frac{g}{\omega^2}\cos\omega t+\frac{\varepsilon\omega^2t^2}{2}$ при $\frac{1}{m\alpha}=\omega^2$.

331. $x=500\cos 2\pi t+1000$; 500; 1500; 500. **332.** $x=105\left(\frac{6}{7}\right)^{t/30}$, ≈ 97 кг. **333.** $\omega=\frac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$, $k\in\mathbb{Z}$.

334. $mD^2x+kx=0,\ k>0,\ T=2\pi\sqrt{m/k}$. **335.** $m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=0$, $x|_{t=0}=0$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=\nu_0$. **336.** $x=\left(4e^t+e^{-4t}\right)\big/5$.

337. $m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=0$, $x|_{t=0}=s_0$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=\nu_0$. **338.** $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2\sqrt{2}\ln 10}{\sqrt{36\pi^2+\ln^2 10}}\frac{dx}{dt}+2x=0$, $T=\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{36\pi^2+\ln^2 10}$.

339. $x=a\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t$. **340.** $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}x=0$, $x|_{t=0}=2l$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$; $x=2l\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$; $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$, $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

341. $\frac{d^2x}{dt^2}+500x=0$, $T=\frac{\pi\sqrt{5}}{25}$ с. **342.** $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l_1+l_2}x=0$, $x=C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l_1+l_2}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l_1+l_2}}t$, $\omega=\sqrt{\frac{g}{l_1+l_2}}$,

$T=2\pi\sqrt{(l_1+l_2)/g}$. **343.** $x=4\sin\left(t\sqrt{50}\right)$, $v_0\approx 28$ см/с.

344. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{20}x=0$, $x|_{t=0}=-20$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$; $x=-20\cos 7t$, 20 см, $2\pi/7$ с, 1,96 Н.

345. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2g}{l}x=0$, $x|_{t=0}=\frac{l}{2}$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$, $x=\frac{l}{2}\cos\sqrt{\frac{2g}{l}}t$. **346.** $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{a}x=0$, $x|_{t=0}=a$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$; $x=a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$.

347. $m\frac{d^2x}{dt^2}+2\sqrt{mc}\frac{dx}{dt}+cx=0$, $x|_{t=0}=a$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=\nu_0$; $x=(a+(\nu_0+a\sqrt{c/m})t)\exp(-\sqrt{c/m}\,t)$.

348. $b_{\min} = 2m\sqrt{g/l}$. **349.** $x = \nu_0 t\exp\left(-\sqrt{g/lt}\right)$. **350.** $\gamma_1 = \sqrt{3mc + \gamma^2/4}$. **351.** $\gamma_1 = \sqrt{4\gamma^2 - 12mc}$, $\sqrt{3mc} < \gamma < 2\sqrt{mc}$.

352. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + cx = H\sin\sqrt{\dfrac{c}{m}}t$, $A = \dfrac{H}{b}\sqrt{\dfrac{m}{c}}$. **353.** $k > 50$ кг/с. **354.** $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 400x = 4{,}6\sin 8\pi t$, $x = -1{,}98\sin 8\pi t$ см.

355. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \pi x = 0$, $T = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$. **356.** $x = -\dfrac{7}{30}\sin\dfrac{7}{2}t + \dfrac{49}{90}\sin\dfrac{3}{2}t$ м. **357.** $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q = U_0$.

358. $L\dfrac{d^2I}{dt^2} + R\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{C}I = -\omega E_0\sin\omega t$. **359.** $I = \dfrac{E_0}{L(\omega^2 - \nu^2)}$ $(\omega\sin(\omega t + \alpha) - \nu\cos\alpha\sin\nu t - \omega\sin\alpha\cos\nu t)$, где $\nu^2 = 1/(LC)$.

360. $I = \dfrac{E_0}{2L}t\sin nt$. **361.** а) $I = I_0\exp\left(-\dfrac{Rt}{L}\right)$; б) $I = \dfrac{E_0}{R} + C\exp\left(-\dfrac{Rt}{L}\right)$; в) $I = \dfrac{E_0}{R + L\omega^2}\left(\dfrac{R}{L}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right) + C\exp(-\dfrac{Rt}{L})$.

362. $I = C_1\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right) + \dfrac{CE\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}$ $(\cos\omega t + \omega RC\sin\omega t)$. **363.** $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{LC}q = 0$, $\dfrac{d^2I}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{LC}I = 0$,

$\dfrac{d^2U}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dU}{dt} + \dfrac{1}{LC}U = 0$, $q = Q\exp\left(-\dfrac{Rt}{2L}\right)\left(\cos\omega t + \dfrac{R}{2L\omega}\sin\omega t\right)$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$.

364. $I = \dfrac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2}\left(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t + L\omega\exp\left(-\dfrac{Rt}{L}\right)\right)$.

365. $I = \dfrac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2}\left((L\omega\cos\alpha - R\sin\alpha)\exp\left(-\dfrac{Rt}{L}\right) + R\sin(\omega t + \alpha) - L\omega\cos(\omega t + \alpha)\right)$, $L\dfrac{dI}{dt} + RI = E_0\sin(\omega t + \alpha)$.

366. $U(t) = E\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$. **367.1.** $U(t) = \dfrac{E}{RC}\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$.

367.2. $U(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + U_0 + \dfrac{V}{\sqrt{1 + \omega^2R^2C^2}}\sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\omega RC}\right)$, $A \in \mathbb{R}$; $k \approx 6{,}36$. **367.3.** $I(t) = U_0\sqrt{\dfrac{C}{L}}\sin\left(\omega t + \varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

367.4. $\chi X'(t) = (1-a)X(t) - \gamma(t)b(t)X(t)$. **367.5.** $X(t) = \exp\left(\dfrac{1-a}{\chi}(t - t_0)\right)\left(X_0 - \displaystyle\int_{t_0}^{t}\dfrac{C(\tau)}{\chi}\exp\left(\dfrac{a-1}{\chi}(\tau - t_0)\right)d\tau\right)$, $X(t_0) = X_0$.

392. O – седло. **393.** O – монокритический узел. **394.** $y = 0$ – прямая покоя. **395.** O – фокус. **396.** O – седло.
397. O – фокус. **398.** O – центр. **399.** O – бикритический узел. **400.** O – бикритический узел.
401. $y = 0$ – прямая покоя. **402.** O – монокритический узел. **403.** $y = 0$ – прямая покоя.
404. $0 < |\alpha| < 1$ – фокус, $\alpha = 0$ – центр, $|\alpha| > 1$ – бикритический узел, $|\alpha| = 1$ – монокритический узел.
405. $\alpha > 0$ – седло, $\alpha < 0$ и $\alpha \ne -1$ – бикритический узел, $\alpha = -1$ – монокритический узел, $\alpha = 0$ – прямая покоя.
406. $0 < |\alpha| < \sqrt{2}$ – фокус, $\alpha = 0$ – центр, $|\alpha| > \sqrt{2}$ – бикритический узел, $|\alpha| = \sqrt{2}$ – монокритический узел.
407. $\alpha = 0$ и $|\alpha| = 2$ – монокритический узел, $0 < |\alpha| < 2$, $|\alpha| \ne \sqrt{2}$ – фокус, $|\alpha| = \sqrt{2}$ – центр, $|\alpha| > 2$ – бикритический узел. **408.** $\alpha = 0$ – центр, $\alpha \ne 0$ – фокус. **409.** $\alpha = 0$ – центр, $0 < |\alpha| < 2/\sqrt{3}$ – фокус, $|\alpha| > 2/\sqrt{3}$ – бикритический узел, $|\alpha| = 2/\sqrt{3}$ – монокритический узел. **410.** $\alpha = 2$ – монокритический узел, $\alpha < 1$ – седло, $\alpha > 1$ и $\alpha \ne 2$ – бикритический узел, $\alpha = 1$ – прямая покоя. **411.** $\alpha = 0$ – прямая покоя, $\alpha \ne 0$ – седло.
412. $\alpha > 0$ – седло, $\alpha < 0$ – бикритический узел, $\alpha = 0$ – прямая покоя. **416.** Неустойчиво. **417.** Устойчиво.
418. Неустойчиво. **419.** Устойчиво. **420.** Устойчиво. **421.** Неустойчиво. **422.** Устойчиво. **423.** Неустойчиво.
424. Неустойчиво. **425.** Неустойчиво. **426.** Устойчиво. **427.** Неустойчиво. **428.** $a > 0$. **429.** $b > 0$. **430.** $k \in \mathbb{R}$.
431. $a = 0$, $b > 0$. **431.1.** Неустойчива. **432.** Устойчиво. **433.** Двусторонне устойчиво. **434.** Двусторонне устойчиво.
435. Неустойчиво. **436.** Неустойчиво. **437.** Асимптотически устойчиво. **438.** Асимптотически устойчиво.
439. Устойчиво. **440.** Асимптотически устойчиво. **441.** Асимптотически устойчиво.
442. Асимптотической устойчивости нет. **443.** Неустойчиво. **444.** Асимптотической устойчивости нет.
445. Неустойчиво. **446.** Асимптотически устойчиво. **447.** $a > 0$, $ab > 2$. **448.** $b > 0$, $3a - b > 0$.

449. Асимптотически неустойчиво при всех a. **450.** $b > 0$, $a > b + 1$. **451.** $0 < a < 2$. **452.** $a > 1/2$, $b > 0$, $8a - a^2b > 4$.

453. $D^2x+2\mu Dx+\lambda x=0,$ при отсутствии силы сопротивления $(\mu=0)$ – устойчивость, а в остальных случаях – асимптотическая устойчивость. **454.** $D^2x+3Dx-4x=0,$ неустойчиво.

455. $D^2x+\frac{g}{3}Dx=g,$ движение устойчиво, но не асимптотически.

456. $D^2x+4x=2\cos t,$ устойчиво, но не асимптотически. **457.** $x=(C_1e^{-t},C_2,C_3e^t)^T.$

458. $x=(C_1e^{-t}+0{,}5e^t,C_2,C_3e^t-\ 0{,}5\cos t-0{,}5\sin t)^T.$ **459.** $x=(C_1e^{2t},C_2e^{2t},C_3e^{7t})^T.$

460. $x=\left(C_1e^{2t}-1/2,e^{2t}\left(C_2+\int\limits_s^t\sqrt{\tau}e^{-2\tau}d\tau,\right),C_3e^{7t}\right)^T,\ t>0.$ **461.** $x=(C_1e^t,C_2e^{2t}-C_1e^t,-C_1te^t+C_2e^{2t}+C_3e^t)^T.$

462. $x=(C_1e^{2t}-3C_2e^t+7C_3e^{3t},C_2e^t+C_3e^{3t},C_3e^{3t})^T.$

463. $x=\left(2t+C_1,C_2e^t-12t-12-6C_1,C_3e^{4t}-t+\frac{11-2C_1}{4}-\frac{1}{3}C_2e^t\right)^T.$

464. $x=\left(C_1e^{5t}+2C_2e^{8t}+\frac{34}{5}C_3e^{10t}+\frac{e^{-t}}{66}+\frac{5e^t}{28},\ C_2e^{8t}+\frac{9}{2}C_3e^{10t}-\frac{2}{7}e^t+\frac{e^{-t}}{11},\ C_3e^{10t}-\frac{e^t}{11}\right)^T.$

465. $x=\left(e^{t-3},0\right)^T.$ **466.** $x=(3e^t-t-1,(3t-1)e^t+t+1)^T.$ **467.** $x=(e^t-t-1,(t-2)e^t+t+2,3e^t-3)^T.$

468. $x=(e^t,(t+t^2/2)e^t,(t+1)e^t)^T.$ **469.** $x=(C_1\cos t+C_2\sin t,-C_1\sin t+C_2\cos t)^T.$

470. $x=\left(C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}-e^t,C_1e^{2t}-\frac{1}{3}C_2e^{-2t}-\frac{2}{3}e^t\right)^T.$ **471.** $x=\left(C_1+C_2e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t,C_1-C_2e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t\right)^T.$

472. $x=\left(\left(C_1+C_2t+\frac{t^2}{2}\right)e^t-\frac{3\cos t}{2}-\frac{1}{2}\sin t,\left(2C_1+C_2+2C_2t+t+t^2\right)e^t-2\cos t\right)^T.$

473. $x=((C_1+C_2t)e^t,(2C_1+C_2+2C_2t)\,e^t)^T.$

474. $x=\left(C_1\cos t+C_2\sin t+1,\ C_3e^{2t}-\frac{1}{5}\cos t-\frac{2}{5}\sin t,\ -C_1\sin t-C_2\cos t-t\right)^T.$

475. $x_1=-C_2e^t+C_3e^{2t},\ \ x_2=(C_1+C_2t)e^t-2C_3e^{2t},\ \ x_3=(C_2-C_1-C_2t)e^t+2C_3e^{2t}.$

476. $x_1=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-t/2}+\left(C_3+\frac{1}{3}t\right)e^t-e^{-t},$

$$x_2=\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\left(\frac{C_1}{2}+\frac{\sqrt{3}C_2}{2}\right)\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)e^{-t/2}+\left(C_3+\frac{t}{3}-\frac{1}{3}\right)e^t-e^{-t},$$

$$x_3=\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_2-\frac{1}{2}C_1\right)\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_1+\frac{1}{2}C_2\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-t/2}+\left(C_3+\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}\right)e^t+e^{-t}.$$

477. $x_1=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t},\ \ x_2=\frac{1}{2}C_1e^t+\frac{1}{2}C_3e^{3t},\ \ x_3=-C_1e^t-C_2e^{2t}-\frac{3}{2}C_3e^{3t}.$

478. $x_1=(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)e^{3t},\ \ x_2=C_1(\cos 2t+2\sin 2t)e^{3t}+C_2(\sin 2t-2\cos 2t)e^{3t}.$ **479.** $x_1=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}e^{5t},\ \ x_2=\frac{6}{5}-\frac{1}{5}e^{5t}.$

480. $x_1=-\frac{1}{3}e^t+\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{\frac{t}{2}},\ \ x_2=\frac{1}{3}e^t+\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{\frac{t}{2}},\ \ x_3=\frac{1}{3}e^t+\frac{2}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$

481. $x_1=\frac{2}{5}e^{3t}-\frac{2}{5}e^{-2t},\ \ x_2=\frac{3}{5}e^{3t}+\frac{2}{5}e^{-2t},\ \ x_3=\frac{3}{5}e^{3t}+\frac{2}{5}e^{-2t}.$ **482.** $x_1=-\frac{9}{8}C_1e^{-t}+\frac{25}{24}C_2e^{-3t}-C_4e^t+C_5e^{3t}-\frac{1}{4}C_6e^{-2t},$

$x_2=\frac{3}{8}C_1e^{-t}-\frac{5}{24}C_2e^{-3t}+C_4e^t+C_5e^{3t}+C_6e^{-2t},\ \ x_3=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}+C_3e^{2t}.$

483. $x_1 = 2C_1e^t + 2C_2e^{3t} - C_3e^{2t},\ \ x_2 = C_1e^t + C_2e^{3t},\ \ x_3 = -2C_1e^t - 3C_2e^{3t} + C_3e^{2t}.$

484. $x_1 = C_1 + 3C_2e^{2t},\ \ x_2 = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t},\ \ x_3 = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}.$

485. $x_1 = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t},\ \ x_2 = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t},\ \ x_3 = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}.$

486. $x_1 = C_1e^t + C_2e^{-t} + t\,\mathrm{sh}\,t,\ \ x_2 = C_1e^t - C_2e^{-t} + \mathrm{sh}\,t + t\,\mathrm{ch}\,t.$ **487.** $x_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t},\ \ x_2 = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + \cos t.$

488. $x_1 = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t,\ \ x_2 = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t.$

489. $x_1 = (C_1\sin t - C_2\cos t)e^t - (C_3\sin t + C_4\cos t)e^{-t},\ \ x_2 = (C_1\cos t + C_2\sin t)e^t + (C_3\cos t + C_4\sin t)e^{-t}.$

490. $x_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - C_3e^{-2t},\ \ x_2 = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t},\ \ x_3 = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}.$

491. $x_1 = C_2e^{-2t} + C_3e^t,\ \ x_2 = C_2e^{-2t} + (C_1 - 2C_3)e^t,\ \ x_3 = C_2e^{-2t} + (C_3 - C_1)e^t.$

492. $x_1 = C_1e^{t\sqrt{2}} + C_2e^{-t\sqrt{2}} + C_3\cos t + C_4\sin t + e^t - 2t,\ \ x_2 = -C_1e^{t\sqrt{2}} - C_2e^{-t\sqrt{2}} - 0{,}25C_3\cos t - 0{,}25C_4\sin t - e^t/2 + t.$

493. $x_1 = \left(4C_4 - C_1 - \dfrac{1}{16} - C_2t + \dfrac{t^2}{32}\right)\cos 2t + \left(\dfrac{t}{4} - 4C_2 - C_3 - C_4t\right)\sin 2t,\ \ x_2 = \left(C_1 + C_2t - \dfrac{1}{32}t^2\right)\cos 2t + (C_3 + C_4t)\sin 2t.$

494. $x_1 = \left(C_1 + C_2t + C_3t^2\right)e^t + C_4e^{-t},\ \ x_2 = \left(-\dfrac{3}{7}C_1 + \dfrac{8}{49}C_2 - \dfrac{38}{343}C_3 + t\left(\dfrac{16}{49}C_3 - \dfrac{3}{7}C_2\right) - \dfrac{3}{7}C_3t^2\right)e^t - C_4e^{-t}.$

495. $x_1 = C_1e^t + 2C_2e^{2t},\ \ x_2 = -C_1e^t - 3C_2e^{2t}.$ **496.** $x_1 = (C_1\cos t + C_2\sin t)e^{2t},\ \ x_2 = (C_1\sin t - C_2\cos t)e^{2t}.$

497. $x_1 = 5C_1e^{2t} + C_2e^{-7t},\ \ x_2 = -C_1e^{2t} - 2C_2e^{-7t}.$ **498.** $x_1 = 4C_1e^{10t} + C_2e^{-t} - C_3e^{-3t},\ \ x_2 = 4C_1e^{10t} - C_2e^{-t} - C_3e^{-3t},$

$x_3 = 5C_1e^{10t} + 2C_3e^{-3t}.$ **499.** $x_1 = \dfrac{1}{2}C_1e^{9t} + \dfrac{1}{2}C_2e^t + \dfrac{1}{16}(8t-1)e^t + \dfrac{4}{9},\ \ x_2 = \dfrac{1}{2}C_1e^{9t} - \dfrac{1}{2}C_2e^t - \dfrac{1}{16}(8t+1)e^t - \dfrac{5}{9}.$

500. $x_1 = -3\sin t - 2\cos t + 2C_1t - C_1 - 2C_2,\ \ x_2 = 2\sin t + C_1t + C_2.$

501. $x_1 = C_1e^{2t} + (C_2 + C_3)e^{-t},\ \ x_2 = C_1e^{2t} + (C_3 - 2C_2)e^{-t},\ x_3 = C_1e^{2t} + (C_3 - 2C_2)e^{-t}.$

502. $x_1 + x_2 + x_3 = C_1e^{2t} - 2e^t + 6\sin t - 2\cos t,\ \ x_1 - x_2 = C_2e^{-t} - e^t + 5\sin t + 5\cos t,\ \ x_1 - x_3 = C_3e^{-t} + 10\sin t.$

503. $\exp At = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$ **504.** $\exp At = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$ **505.** $\exp At = e^t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}.$ **506.** $\exp At = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,t & \mathrm{sh}\,t \\ \mathrm{sh}\,t & \mathrm{ch}\,t \end{bmatrix}.$

507. $\exp At = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$ **508.** $\exp At = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$ **509.** $\exp At = e^t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t^2 - t & 1 & 2t \\ 3t & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

510. $\exp At = e^t\begin{bmatrix} 1 + t^2/2 & -t^2/2 & t \\ t^2/2 & 1 - t^2/2 & t \\ t & -t & 1 \end{bmatrix}.$ **511.** $\exp At = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$

512. $\exp At = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & te^t & e^t \end{bmatrix}.$ У к а з а н и е. Для задач 513 – 524 $x(t) = Se^{Jt}S^{-1}C.$

513. $\exp Jt = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$, вариант $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$ **514.** $\exp Jt = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$, вариант $S = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

515. $\exp Jt=\begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & te^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **516.** $\exp Jt=e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

517. $\exp Jt=e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **518.** $\exp Jt=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$.

519. $\exp Jt=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **520.** $\exp Jt=\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

521. $\exp Jt=\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -6 & -1 \\ -1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$. **522.** $\exp Jt=e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

523. $\exp Jt=e^{t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. **524.** $\exp Jt=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

У к а з а н и е. Для задач 525 – 528 $x(t)=Se^{Jt}C$. **525.** $\exp Jt=e^{t}\begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

526. $\exp Jt=\begin{bmatrix} e^{t} & te^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

527. $\exp Jt=e^{t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

528. $\exp Jt=e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, вариант $S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

У к а з а н и е. Для задач 529 – 532 $x(t)=\tilde{S}e^{\tilde{J}t}C$. **529.** $\exp\tilde{J}t=\begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t}\cos 2t & -e^{t}\sin 2t \\ 0 & e^{t}\sin 2t & e^{t}\cos 2t \end{bmatrix}$, вариант $\tilde{S}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

530. $\exp\tilde{J}t=\begin{bmatrix} \cos t & t\cos t & -\sin t & -t\sin t \\ 0 & \cos t & 0 & -\sin t \\ \sin t & t\sin t & \cos t & t\cos t \\ 0 & \sin t & 0 & \cos t \end{bmatrix}$, вариант $\tilde{S}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

531. $\exp\tilde{J}t = e^{2t}\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$, вариант $\tilde{S} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$. **532.** $\exp\tilde{J}t = e^{2t}\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$, вариант $\tilde{S} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$.

533. $x = \begin{bmatrix}3e^{3(t-2)} - 4e^{-2(t-2)} + 2e^{-(t-2)}\\ 2e^{-2(t-2)} - 2e^{-(t-2)}\\ 3e^{3(t-2)} - 4e^{-(t-2)}\end{bmatrix}$. **534.** $x = \begin{bmatrix}(e^{2t}+1)/2\\ 3(e^{2t}-1)/2\\ (e^{2t}-1)\end{bmatrix}$. **535.** $x = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$. **536.** $x = e^{t-1}\begin{bmatrix}t^2+3t-4\\ -t^2-t+3\\ -t^2+t\end{bmatrix}$.

537. $x = e^{-(t+5)}\begin{bmatrix}12t+61\\ 9t+46\\ -6t-29\end{bmatrix}$. **538.** $x = \begin{bmatrix}14e^{2t}-12e^{t}\\ 7e^{2t}\\ 12e^{t}-14e^{2t}+3e^{-t}\end{bmatrix}$. **539.** $x = \begin{bmatrix}e^{t-1}\\ -e^{2(t-1)}\\ 0\end{bmatrix}$. **540.** $x = e^{2t}\begin{bmatrix}2\\ 2t+1\\ t^2+t+4\end{bmatrix}$.

541. $x = \begin{bmatrix}C_1e^{t} + 2C_2(e^{2t}-e^{t}) + e^{t} - 1\\ C_2e^{2t}\\ C_1(e^{-t}-e^{t}) + 2C_2(e^{t}-e^{2t}) + C_3e^{-t} + 3 - 2e^{-t} - e^{t}\end{bmatrix}$. **542.** $x = e^{t}\begin{bmatrix}C_1(\frac{t^2}{2}+3t+1) + C_2(t^2+5t) - C_3(\frac{t^2}{2}+2t)\\ -C_1(\frac{t^2}{2}+2t) + C_2(1-3t-t^2) + C_3(\frac{t^2}{2}+t)\\ -C_1(\frac{t^2}{2}+t) - C_2(t^2+t) + C_3(\frac{t^2}{2}+1)\end{bmatrix}$.

543. $x = \begin{bmatrix}((4t+1)C_1 + 8tC_3)e^{-t} + \frac{3}{2}e^{t} - (2t+\frac{3}{2})e^{-t}\\ (3tC_1 + C_2 + 6tC_3)e^{-t} + \frac{7}{4}e^{t} - (\frac{3}{2}t+\frac{7}{4})e^{-t}\\ (-2tC_1 + (1-4t)C_3)e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} + (t+\frac{1}{2})e^{-t}\end{bmatrix}$.

544. $x = \begin{bmatrix}C_1(2e^{-t}+t-1) + C_2(6-5t-6e^{-t}) + C_3(5-4t-5e^{-t}) - (6t+16)e^{-t} - \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 10t + 16\\ C_1(2e^{-t}-3t-2) + C_2(7+15t-6e^{-t}) + C_3(5+12t-5e^{-t}) + (3-6t)e^{-t} + 2t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 10t - 3\\ C_1(2+4t-2e^{-t}) + C_2(6e^{-t}-20t-6) + C_3(5e^{-t}-16t-4) + (6t-9)e^{-t} - \frac{8}{3}t^3 - 2t^2 - 15t + 9\end{bmatrix}$.

545. $x = \begin{bmatrix}e^{t}-1\\ 0\\ 3-2e^{-t}-e^{t}\end{bmatrix}$. **546.** $x = e^{t-s}\begin{bmatrix}\xi_1\left(\frac{(t-s)^2}{2}+3(t-s)+1\right) + \xi_2((t-s)^2+5(t-s)) - \xi_3\left(\frac{(t-s)^2}{2}+2(t-s)\right)\\ -\xi_1\left(\frac{(t-s)^2}{2}+2(t-s)\right) + \xi_2(1-3(t-s)-(t-s)^2) + \xi_3\left(\frac{(t-s)^2}{2}+(t-s)\right)\\ -\xi_1\left(\frac{(t-s)^2}{2}+(t-s)\right) - \xi_2((t-s)^2+(t-s)) + \xi_3\left(\frac{(t-s)^2}{2}+1\right)\end{bmatrix}$.

547. $x = \begin{bmatrix}\frac{4}{15}t^{5/2} + \frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{1}{12}t^4 + 15t - 3\\ -\frac{4}{5}t^{5/2} + \frac{1}{4}t^4 - 15t + 18\\ -\frac{8}{15}t^{5/2} + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - 10t + 10\end{bmatrix}$, $t \ge 0$. **548.** $\Phi(t) = \begin{bmatrix}2e^{2t} & e^{-t} & 4\\ e^{2t} & e^{-t} & 3\\ -e^{2t} & -2e^{-t} & -4\end{bmatrix}$. **549.** $\Phi(t) = \begin{bmatrix}-e^{-2t} & -2e^{t} & 0\\ e^{-2t} & e^{t} & 0\\ e^{-2t} & 0 & e^{t}\end{bmatrix}$.

550. $\Phi(t) = \begin{bmatrix}2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} & 0\\ -e^{2t} & (2-t)e^{2t} & -1\\ e^{2t} & te^{2t} & 1\end{bmatrix}$. **551.** $\Phi(t) = e^{-t}\begin{bmatrix}-2 & 4 & 4t+1\\ 0 & 3 & 3t\\ 1 & -2 & -2t\end{bmatrix}$. **552.** $\Phi(t) = e^{-t}\begin{bmatrix}-2 & 3 & 3t+1\\ 1 & 1 & t\\ 0 & 1 & t\end{bmatrix}$.

553. $\Phi(t)=\begin{bmatrix}0 & -e^{-2t} & -(t+1)e^{-2t}\\ e^{2t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t}\end{bmatrix}$. **554.** $\Phi(t)=e^t\begin{bmatrix}0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$. **555.** $\Phi(t)=e^t\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 2t & 6t^2\\ 0 & 1 & 6t+1\end{bmatrix}$.

556. $\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^t & e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t\\ 2e^t & e^{2t}(\cos t+\sin t) & e^{2t}(\sin t-\cos t)\\ e^t & 2e^{2t}\sin t & -2e^{2t}\cos t\end{bmatrix}$. **557.** $\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^t & e^{2t}(3\cos 3t+3\sin 3t) & e^{2t}(3\sin 3t-3\cos 3t)\\ 2e^t & e^{2t}(5\cos 3t+3\sin 3t) & e^{2t}(5\sin 3t-3\cos 3t)\\ e^t & 4e^{2t}\cos 3t & 4e^{2t}\sin 3t\end{bmatrix}$.

558. $\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^t & e^{2t}(3\cos 3t+3\sin 3t) & e^{2t}(3\sin 3t-3\cos 3t)\\ e^t & 4e^{2t}\cos 3t & 4e^{2t}\sin 3t\\ 2e^t & e^{2t}(5\cos 3t+3\sin 3t) & e^{2t}(5\sin 3t-3\cos 3t)\end{bmatrix}$. **559.** $\Phi(t)=\begin{bmatrix}(3+\sqrt{14})e^{(1+\sqrt{14})t} & (3-\sqrt{14})e^{(1-\sqrt{14})t}\\ e^{(1+\sqrt{14})t} & e^{(1-\sqrt{14})t}\end{bmatrix}$.

У к а з а н и е. Для задач 560–571 $x(t)=\Phi(t)C+x_{\text{чн}}(t)$. **560.** $\Phi(t)=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$, $x_{\text{чн}}=\begin{bmatrix}-2\sin t+\operatorname{tg} t\\ 2-2\cos t\end{bmatrix}$.

561. $\Phi(t)=\begin{bmatrix}1 & 2e^{-t}\\ 1 & e^{-t}\end{bmatrix}$, $x_{\text{чн}}=\dfrac{e^{2t}}{6}\begin{bmatrix}11\\ 25\end{bmatrix}$. **562.** $\Phi(t)=\begin{bmatrix}-e^{2t} & 4e^{-3t}\\ e^{2t} & e^{-3t}\end{bmatrix}$, $x_{\text{чн}}=\begin{bmatrix}t^2+t\\ -t^2/2\end{bmatrix}$.

563. $\Phi(t)=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$, $x_{\text{чн}}=\begin{bmatrix}\cos\ln(-\cos t)+(t-\pi)\sin t\\ -\sin t\ln(-\cos t)+(t-\pi)\cos t\end{bmatrix}$.

564. $\Phi(t)=\begin{bmatrix}\cos t-\sin t & \cos t+\sin t\\ -2\cos t & -2\sin t\end{bmatrix}$, $x_{\text{чн}}=\begin{bmatrix}(1-t)\cos t-\sin t\\ (t-2)\cos t+t\sin t\end{bmatrix}$.

565. $\Phi(t)=\begin{bmatrix}7e^{5t} & -e^{-3t}\\ e^{5t} & e^{-3t}\end{bmatrix}$, $x_{\text{чн}}=\begin{bmatrix}\dfrac{7e^{5t}}{25}+\dfrac{e^{-3t}}{9}-\dfrac{16t}{15}-\dfrac{88}{225}\\ \dfrac{e^{5t}}{25}-\dfrac{e^{-3t}}{9}-\dfrac{8t}{15}+\dfrac{16}{225}\end{bmatrix}$. **566.** $\Phi(t)=\begin{bmatrix}-e^{-t} & e^{-2t}\\ e^{-t} & -2e^{-2t}\end{bmatrix}$, $x_{\text{чн}}=e^{-t}\begin{bmatrix}t-1\\ 2-t\end{bmatrix}$.

567. $\Phi(t)=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$, $x_{\text{чн}}=\begin{bmatrix}\displaystyle\int_1^t\frac{\cos(t-\tau)}{\tau}d\tau\\ \displaystyle-\int_1^t\frac{\sin(t-\tau)}{\tau}d\tau\end{bmatrix}$. **568.** $\Phi(t)=\begin{bmatrix}-e^{-2t} & -2e^t & 0\\ e^{-2t} & e^t & 0\\ e^{-2t} & 0 & e^t\end{bmatrix}$, $x_{\text{чн}}=\begin{bmatrix}e^t(2t-\frac{1}{3})-3e^{-t}\\ e^t(\frac{1}{3}-t)+\frac{5}{2}e^{-t}\\ e^t(\frac{1}{3}-t)+3e^{-t}\end{bmatrix}$.

569. $\Phi(t)=\begin{bmatrix}0 & e^t & te^t\\ 0 & 0 & e^t\\ e^t & 0 & 0\end{bmatrix}$, $x_{\text{чн}}=e^t\begin{bmatrix}t+t^{3/6}\\ t^2/2\\ t\end{bmatrix}$. **570.** $\Phi(t)=\begin{bmatrix}2e^{2t} & e^{-t} & 4\\ e^{2t} & e^{-t} & 3\\ -e^{2t} & -2e^{-t} & -4\end{bmatrix}$, $x_{\text{чн}}=\begin{bmatrix}6t^2+6\\ \frac{9}{2}t^2-2t+5\\ -6t^2+6t-9\end{bmatrix}$.

571. $\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^t & e^{2t}(3\cos 3t+3\sin 3t) & e^{2t}(3\sin 3t-3\cos 3t)\\ e^t & 4e^{2t}\cos 3t & 4e^{2t}\sin 3t\\ 2e^t & e^{2t}(5\cos 3t+3\sin 3t) & e^{2t}(5\sin 3t-3\cos 3t)\end{bmatrix}$, $x_{\text{чн}}=\begin{bmatrix}-2e^t+(\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\cos 3t-\frac{2}{3}\sin 3t)e^{2t}\\ -2e^t+(\frac{20}{9}-\frac{2}{3}\sin 3t-\frac{2}{9}\cos 3t)e^{2t}\\ -4e^t+(\frac{34}{9}-\sin 3t+\frac{2}{9}\cos 3t)e^{2t}\end{bmatrix}$.

572. Неустойчиво. **573.** Неустойчиво. **574.** Асимптотически устойчиво. **575.** Асимптотически устойчиво. **576.** Асимптотически устойчиво. **577.** Неустойчиво. **578.** Асимптотически устойчиво. **579.** Неустойчиво. **580.** Устойчиво, но не асимптотически. **581.** Неустойчиво. **582.** Неустойчиво. **583.** Неустойчиво. **584.** Устойчиво, но не асимптотически. **585.** Неустойчиво. **586.** Асимптотически устойчиво. **587.** При $a\in\mathbb{R}$ устойчиво, но не асимптотически.

588. При $a<0, b\in\mathbb{R}$ асимптотически устойчиво; при $a=0, b\in\mathbb{R}$ устойчиво, но не асимптотически.
589. При $a>0$, $ab>2$ асимптотически устойчиво. **590.** При $3a-b>0, b>0$ асимптотически устойчиво.
591. При $a<0$ асимптотически устойчиво; при $a>0$ неустойчиво. **592.** При $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$ асимптотически устойчиво.
593. При $a+c<0, ac+b^2>0$ асимптотически устойчиво; при $a+c<0, ac+b^2=0$ устойчиво.
594. При $a<0, a^2-bc>0$ асимптотически устойчиво; при $a<0, a^2-bc=0$ и $a=0$, $bc<0$ устойчиво.
595. При $a<0$ асимптотически устойчиво.
596. При $a>0$ и $a<-1$ асимптотически устойчиво; при $a=0$ и $a=-1$ устойчиво. **597.** При $a\in\mathbb{R}$ неустойчиво.
598. При $a<0$ асимптотически устойчиво; при $a=0$ устойчиво. **599.** При $a<-1/2$ асимптотически устойчиво.
600. При $a-b<0$, $(1-a)b<1$ асимптотически устойчиво; при $a-b<0$ и $(1-a)b=1$ устойчиво.
601. $x_1=x_2$ – прямая покоя. **602.** $(0,0)$ – монокритический узел. **603.** $(0,0)$ – дикритический узел. **604.** $(0,0)$ – седло.
605. $(0,0)$ – седло. **606.** $(0,0)$ – седло. **607.** $(0,0)$ – фокус. **608.** $x_1=x_2$ – прямая покоя. **609.** $(0,0)$ – бикритический узел.
610. Неустойчиво, $(0,0)$ – фокус. **611.** Неустойчиво, $(0,0)$ при $\alpha>0$, $\alpha\neq 2$ – бикритический узел, при $\alpha=2$ – монокритический узел, при $\alpha<0$ – седло, при $\alpha=0$, $x_2=0$ – прямая покоя.
612. Устойчиво, $x_1-2x_2=0$ – прямая покоя. **613.** Неустойчиво, $(0,0)$ – седло.
614. Неустойчиво, $(0,0)$ – бикритический узел. **615.** При $\alpha<0$ устойчиво асимптотически; при $\alpha=0$ устойчиво; при $\alpha>0$ неустойчиво, $(0,0)$ при $\alpha\neq 0$ – фокус, при $\alpha=0$ – центр. **616.** При $\alpha\in\mathbf{R}$ неустойчиво, $(0,0)$ при $\alpha>0$ и $\alpha\neq 1$– бикритический узел, при $\alpha=1$– монокритический узел, при $\alpha<0$ – седло, при $\alpha=0$ прямая покоя $x_1=0$.
617. Неустойчиво, $(0,0)$ – монокритический узел. **618.** Устойчиво, $(0,0)$ – центр.
619. Устойчиво асимптотически, $(0,0)$ – монокритический узел. **620.** Неустойчиво, $(0,0)$ – седло.
621. Устойчиво асимптотически, $(0,0)$ – дикритический узел. **622.** $x_1=150e^t-50e^{3t}$, $x_2=150e^t+50e^{3t}$.
623. $x_1=1000(\cos t+\sin t)e^t$, $x_2=1000(\cos t-\sin t)e^t$, $t=\pi/4$.

624. $\begin{cases} Dx_1=-2x_1+4x_2, \\ Dx_2=x_1-2x_2, \end{cases}$ $x_1|_{t=}=100$, $x_2|_{t=0}=300$, $x_1=350-250\,e^{-4t}$, $x_2=175+125\,e^{-4t}$.

625. $x_1=(\alpha-\dfrac{b\beta}{a+c})e^{-at}+\dfrac{b\beta}{a+c}e^{ct}$, $x_2=\beta e^{ct}$.

626. $\dfrac{dN}{dt}=N(a-bt)$, $\dfrac{dT}{dt}=cN$, где a, b, c – постоянные; T – масса яда в момент t. **627.** $\begin{cases} \dfrac{dB}{dt}=-kB, \\ \dfrac{dC}{dt}=kB-lC, \end{cases}$ $B=0{,}241$, $C=0{,}249$.

628. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-kx+ly, \\ \dfrac{dy}{dt}=kx-ly, \end{cases}$ $y=4{,}5(1-e^{-0{,}7324t})$, $x=10-y$. **629.** $x=0{,}4(e^{-8t}-4\,e^{-2t})/3$ м.

630. $x=-e^{-2{,}5t}\left(0{,}4\cos\dfrac{\sqrt{7}}{2}t+2\dfrac{\sqrt{7}}{7}\sin\dfrac{\sqrt{7}}{2}t\right)$ м.

631. $\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}+2kx=0, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}+2ky=0, \end{cases}$ $x|_{t=0}=C$, $y|_{t=0}=0$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$, $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=v_0$; $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{2ky^2}{v_0^2m}=1$.

631.1. Траектория движения окружности $x=\dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$, $y=-\dfrac{v_0}{\omega}+\dfrac{v_0}{\omega}\cos\omega t$, $z=0$, где $\omega=qB_0/m$.

631.2. Траектория движения циклоида $x=\dfrac{E_0}{\omega B_0}(\omega t-\sin\omega t)$, $y=\dfrac{E_0}{\omega B_0}(1-\cos\omega t)$, $z=0$, где $\omega=qB_0/m$.

632. $\dfrac{dV_1}{dt}=-aV_1$, $\dfrac{dV_2}{dt}=aV_1-b$, $V_1|_{t=0}=1000$, $V_2|_{t=0}=100$,
где V_1, V_2 – объемы солевых растворов: $V_1=1000e^{-at}$, $V_2=-1000e^{-at}-bt-900$.

634. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = k_1(a - x_1 - x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = k_2(a - x_1 - x_2), \end{cases}$ где $x_1(t)$, $x_2(t)$ – соответственно массы веществ X_1 и X_2 в момент t;

$x_1 = a(1 - 2^{-t})/4$, $x_2 = 3a(1 - 2^{-t})/4$. **635.** $L\dfrac{dl}{dt} + \dfrac{1}{C}\int\limits_0^t (I - I_1)d\tau = E_0$, $RI_1 - \dfrac{1}{C}\int\limits_0^t (I - I_1)d\tau = 0$, $I|_{t=0} = 0$, $q|_{t=0} = 0$, где $I_1 + I_2 = I$.

636. $L_1\dfrac{dI_1}{dt} + R_1(I_1 - I_2) + \ \ + E = 0$, $L_2\dfrac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + R_1(I_2 - I_1) = 0$. **636.1.** а) $\begin{cases} K' = -\mu K + V, \\ V' = \lambda(1-a)(1-u)fK - \lambda V; \end{cases}$ неустойчива при $\mu < (1 - a)(1 - u)f$, устойчива при $\mu = (1 - a)(1 - u)f$, асимптотически устойчива при $\mu > (1 - a)(1 - u)f$;

в) $u = 1 - \mu(1 - a)^{-1} f^{-1}$. **636.2.** $\pi_-(t) = \dfrac{1}{21} + \dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t} + \dfrac{1}{28}e^{-\frac{7}{6}t}$, $\pi_0(t) = \dfrac{4}{21} + \dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t} - \dfrac{3}{28}e^{-\frac{7}{6}t}$, $\pi_+(t) = \dfrac{16}{21} - \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} + \dfrac{1}{14}e^{-\frac{7}{6}t}$.

636.3. $\pi_0(t) = \dfrac{1}{5}(\pi_0(0) + \pi_1(0) + \pi_2(0)) + \left(\dfrac{2}{3}\pi_0(0) - \dfrac{1}{3}\pi_2(0)\right)e^{-2t} + \left(\dfrac{2}{15}\pi_0(0) - \dfrac{1}{5}\pi_1(0) + \dfrac{2}{15}\pi_2(0)\right)e^{-5t}$,

$\pi_1(t) = \dfrac{2}{5}(\pi_0(0) + \pi_1(0) + \pi_2(0)) + (\dfrac{3}{5}\pi_1(0) - \dfrac{2}{5}\pi_0(0) - \dfrac{2}{5}\pi_2(0))e^{-5t}$,

$\pi_2(t) = \dfrac{2}{5}(\pi_0(0) + \pi_1(0) + \pi_2(0)) - \left(\dfrac{2}{3}\pi_0(0) - \dfrac{1}{3}\pi_2(0)\right)e^{-2t} + \left(\dfrac{4}{15}\pi_0(0) - \dfrac{2}{5}\pi_1(0) + \dfrac{4}{15}\pi_2(0)\right)e^{-5t}$, где $\pi_0(0) + \pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$.

636.4. $\alpha_1(t) = \dfrac{8}{35}(a + b + c) - \dfrac{1}{7}(3a + 3b - 4c)e^{-\frac{7}{6}t} + \dfrac{1}{5}(6a + b - 4c)e^{-\frac{5}{4}t}$,

$\alpha_2(t) = \dfrac{12}{35}(a + b + c) + \dfrac{2}{7}(3a + 3b - 4c)e^{-\frac{7}{6}t} - \dfrac{1}{5}(6a + b - 4c)e^{-\frac{5}{4}t}$, $\alpha_3(t) = \dfrac{3}{7}(a + b + c) - \dfrac{1}{7}(3a + 3b - 4c)e^{-\frac{7}{6}t}$.

637. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C$, $\mathbb{R}^2$. **638.** $y/x + \sqrt{x^2 + y^2} = C$, $x > 0$. **639.** $2\ln(-x) + \ln(1 + y^2) = C$, $x < 0$.

640. $y^4 + 4y\ln x = C$, $x > 0$. **641.** $x^2 + y^4 - 3x^3y^2 = C$, $\mathbb{R}^2$. **642.** $\sqrt{x^2 + y^2} + \ln(xy) + x/y = C$, $x > 0, y > 0$.

643. $x^4 + y^4 + x^2y^2 = C$, $\mathbb{R}^2$. **644.** $\sin x - x\cos x + 0{,}5y + 0{,}25\sin 2y = 0$, $\mathbb{R}^2$. **645.** $x\sin y - y\cos x + \ln(xy) = C$, $x > 0, y > 0$.

646. $x^2y = C$, $\mathbb{R}^2$. **647.** $F(xy) = C$, где $F(u)$ – первообразная $f(u)$, $\mathbb{R}^2$.

648. $F(x + y) - F(x - y) = C$, где $F(u)$ – первообразная $f(u)$, $\mathbb{R}^2$. **649.** $F(y/x) = C$, где $F(u)$ – первообразная $f(u)$, $x > 0$.

650. $x\sin xy = 0$. **651.** $x - y^2\cos^2 x = 0$. **652.** $y = x^2 - \sqrt[3]{9(1 - x^2)^2}\big/2$. **653.** $y = \sin x$. **654.** $\ln(-x - y) + 1 - y/(x + y) = 0$.

655. $x = \sqrt{1 + y^2}$. **656.** $x = \sqrt[3]{2 - y^3}$. **657.** $x^2\cos y + y^2\cos x = 0$.

У к а з а н и е. Для задач 658 и далее не приведены составные решения. **658.** $C(x^2 - y) = x$. **659.** $3x^2\ln y + (y^2 + 1)^{3/2} = C$.
660. $2e^x\sin y + 2e^x(x - 1) + e^x(\sin x - \cos x) = C$. **661.** $C(x^2y + 2x) = y$. **662.** $x^2 + y - x/y + \ln y = C$, $y > 0$;
$x^2 + y - x/y + \ln(-y) = C$, $y < 0$; $y = 0$. **663.** $C(x^2 - y^2 - 1) = x$. **664.** $y - 1 = C\sqrt{x^2 + y^2}$. **665.** $x^4 + x^2y^2 + y^4 = C$.

666. $y^2/2 - y/x = C$, $x > 0, y > 0$. **667.** $Cx^2 = \sin^{2/3}(y/x)$, $x > 0$. **668.** $\sqrt{x^2 + y^2} = C(x - 1)$. **669.** $2x^2 - 2y^2 + 1 = Ce^{-2(x^2 + y^2)}$.

669.1 $x^2y^2 + 2\ln\dfrac{x}{y} = C$, $x = 0$, $y = 0$. **670.** $y = 4y^3y'$, $y|_{x=0} = 0$, $3x - 4y^3 = 0$.

671. $2xydx + (y^2 - x^2 - a^2)dy = 0$, $\mu = 1/y^2$, $y^2 + x^2 + a^2 - Cy = 0$. **672.** $y^2(2x^2 + y^2) = C$. **673.** $r' = 1$, $r|_{\varphi=0} = 0$, $r = \varphi$.

674. $1 = 8rr'$, $r|_{\varphi=0} = 0$, $r = \sqrt{\varphi}\big/2$. **675.** $y^2 - 2 = Ce^{-1/x}$, $x = 0$. **676.** $\operatorname{ctg}\dfrac{y - x}{2} = x + C$, $y - x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(положить $y - x = u$). **677.** $x + 2y + 2 = Ce^{y}$ (положить $x + 2y = u$). **678.** $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cy^2$. **679.** $y = Cx\exp(x^3/3 + y^2/2)$.
680. $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C$. **681.** $(y + 1)^2 = C\sqrt{x^3 - 1}\,e^{-y}$. **682.** $x = Cy\exp(1/x + 1/y)$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; $x = 0$; $y = 0$.
683. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = C$, $|x| < \pi/2$, $|y| < \pi/2$. **684.** $e^{2x} - 2e^y - \ln(1 + y^2) - 2\,\mathrm{acrtg}\, y = C$. **685.** $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = C$, $|x| < \pi/2$, $|y| < \pi/2$.
686. $y = C\sqrt{1 + x^2}$. **687.** $x - 2y = Ce^{x + 3y}$. **688.** $x^2 + 1 = 2\sqrt{1 - y^2}$. **689.** $y = -\sqrt{1 - x^4}$, $y = -1$. **690.** $y = \sqrt{1 - x^4}$, $y = 1$.

691. $y(\ln(1-x^2)+1)=1$. **692.** $y(1+x)=1$. **693.** $y=2-3\cos x$. **694.** $e^x+e^{-y}=2$. **695.** $y-x+\ln(xy)+e-2=0$.
696. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\pi/4$. **697.** $y\sqrt{1+x^2}=1$. **698.** $y=\sin x$. **699.** $yx'-2x=0$, $x=Cy^2$, $C\in\mathbb{R}$.

699.1. $\dfrac{y}{|y'|}(\sqrt{1+(y')^2}+1)=xy$, $y=-\ln(x^2-1)$ при $x\in\,]1,\sqrt{2}\,]$, $y=\ln(x^2-1)$ при $x\in\left(\sqrt{2},+\infty\right)$.

700. $x+yy'=a\sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}$, где a – косинус угла; $r=C\exp(a\varphi/\sqrt{1-a^2})$. **701.** $xy'+y=0$, $xy=C$.

702. $xy'=2y$, $y=Cx^2$. **702. 1.** $x=x_0(1-e^{-Bt})$. **703.** $y=Cx^2e^{-3/x}$. **704.** $y=1$; $y=-1$; $y\left(2+C\ln\dfrac{y+1}{y-1}\right)=2Cx$, $|y|>1$;

$y\left(2+C\ln\dfrac{y+1}{1-y}\right)=2Cx$, $|y|<1$. **705.** $y=C\cos x+\sin x$, $|x|<\pi/2$. **706.** $y=(C+x)e^{-x^2}$. **707.** $x=2\ln y-y+1+Cy^2$.

708. $x=Ce^{-y}+e^y$. **709.** $x=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y)$. **710.** $x=Cy-y^2/2$. **711.** $y=Cx^2+x^4$, $x=0$. **712.** $y=C\exp(-x^2)$.
713. $y=f(x)-1+C\,e^{-f(x)}$. **714.** $y^4+2x^2y^2+2y^2=C$. **715.** $x^3=(C+y)e^y$. **716.** $y^2(C-x)\sin x=1$. **717.** $y\left(x^7/7+C\right)=x^3$.
718. $3/y^2=1/x^2+3Cx^4$. **719.** $2x^3y^3-3a^2x^2=C$. **720.** $ay(\sin^2 x-2\ln\sin x)-2\cos^2 x=Cy$. **721.** $y(1+Cx)=1$.
722. $x+y^3+2=Ce^x$. **723.** $x^2=1-2/x+Ce^{-2/x}$. **724.** $y=x^2$. **725.** $x=1$. **726.** $y=x^2e^{x^2}$. **727.** $y=(x-1)e^{1/x}$. **728.** $y=1$.

729. $x+y^2+1=e^x$. **730.** $x'=x/y-y$, $y^2+x+Cy=0$. **731.** $y'=y/x-x$, $x^2+y+Cx=0$. **732.** $y'=\dfrac{1}{x}y-\sqrt{\dfrac{a}{x}}$, $y=Cx+2\sqrt{ax}$.

733. $y'=\dfrac{2}{x}y-\dfrac{2a^2}{x^2}$, $y=Cx^2+\dfrac{2a^2}{3x}$. **734.** $y'=y/x-ky^2/x$, $y=\dfrac{x}{C+kx}$, где k – коэффициент пропорциональности.

735. $x'=x/y-ky^2/x$, $x=\dfrac{y}{C+ky}$, где k – коэффициент пропорциональности.

735.1. $yy'=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, $y=\sqrt{4e^x-(x^2+2x+2)}$, при $x\in[x_0,+\infty)$, где x_0 (единственный) корень уравнения

$4e^x=x^2+2x+2$. **736.** $x'=\dfrac{1}{y}x-\dfrac{k}{y}x^3$, $\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{C}{y^2}-k$, где k – коэффициент пропорциональности.

737. $y'=\dfrac{1}{x}y-\dfrac{k}{x}y^3$, $\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{C}{x^2}-k$, где k – коэффициент пропорциональности.

737.1. $y^2\dfrac{dx}{dy}-xy+2a^2=0$, $y=a^2/x$, $x\in[0,+\infty)$. **737.2.** $X(t)=X(t_0)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}\dfrac{1-a-\gamma(\tau)b(\tau)}{\chi}d\tau\right)$.

738. $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$, $C\neq 0$. **739.** $y=Ce^{y/x}$. **740.** $\varphi(y/x)=Cx$, $x>0$. **741.** $\cos(y/x)=Cx$, $x>0$. **742.** $\operatorname{tg}(y/x)=Cx$, $x>0$.
743. $\ln(y/x)=Cx+1$, $x>0$. **744.** $\arcsin(y/x)=\ln Cx\cdot\operatorname{sgn} x$, $y=x$, $y=-x$. **745.** $\sin(y/x)=Cx$, $x>0$.
746. $(y+x-1)^5(y-x+1)^2=C$. **747.** $\exp\left(-2\operatorname{arctg}\dfrac{y+2}{x-3}\right)=C(y+2)$. **748.** $2x-3=C\exp((4y+5)/(2x-3))$.

749. $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$. **750.** $(x+y+1)^2=C(x-2y+4)$. **751.** $x^2-xy+y^2-x+y=C$.
752. $x+y-1=C\exp\left(\dfrac{2(x+1)}{(x+y-1)}\right)$. **753.** $x+y+1=C\exp\left(\dfrac{2x+y}{3}\right)$. **754.** $e^{5y-10x}=C(5x+10y+7)$.

755. $x=-y+a\operatorname{tg}\dfrac{y+C}{a}$. **759.** $xdx+(y-\sqrt{x^2+y^2})dy=0$, $x^2=C(2y+C)$, положить $x=uy$.

760. $xyy'=x^2+2y^2$, $\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$. **761.** $x^2+y^2=3xyy'$, $(x^2-2y^2)^3=Cx^2$. **762.** $xdy+(x-y)dx=0$, $y=Cx-x\ln x$.
762.1 $y-xy'=x\sqrt{1+(y')^2}$, $y=\sqrt{Cx-x^2}$, $C>0$, $x\in\,]0,C[$. **763.** $y_1=-\dfrac{2}{x}$, $y=-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{Cx-x\ln x}$.

764. $y_1=-\dfrac{1}{x}$, $y=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{Cx^{2/3}+x}$. **765.** $y_1=\dfrac{2}{x}$, $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{Cx^5-0{,}25x}$. **766.** $y=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x\left(C+\ln x\right)}$.

767. $y_1 = x+1,\ y = x+1+\dfrac{\exp\left(2x+x^2/2\right)}{C-\int\limits_{x_0}^{x}\exp\left(2\tau+\tau^2/2\right)d\tau}$. **768.** $y_1 = -1/x,\ y = -\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\left(C-\ln x\right)}$. **769.** $y_1 = x$, $y = x + 1/(1 + Cx)$.

770. $y_1 = x,\ y = x + \dfrac{e^{-ax^2/2}}{C+a\int\limits_0^x e^{-a\tau^2/2}d\tau}$. **771.** $y=\dfrac{2Cx^3+1}{x\left(Cx^3-1\right)}$. **771.1** $y_1=\dfrac{2}{x},\ y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{Cx-x\ln x}$.

771.2 $y_1=-\dfrac{3}{x},\ y=-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{Cx-x\ln x}$. **771.3** $y_1=\dfrac{3}{x},\ y=\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{Cx-x\ln x}$. **771.4** $y_1=-\dfrac{1}{x},\ y=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{Cx-x\ln x}$.

771.5 $y_1=\dfrac{1}{x},\ y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{Cx-x\ln x}$. **771.6** $y=\dfrac{1}{x(-1+\mathrm{tg}(C-\ln\sqrt{x}))}$. **772.** $y=\dfrac{x+C-1}{x(x+C)}$. **773.** $y = \mathrm{tg}(4x + C) + x^2/2$.

774. $xy = \mathrm{tg}(x + C)$. **775.** $y = 2\mathrm{tg}(2x + C) + x^2$. **777.** $y_1 = x$, $xu' + (1 - 2xf(x))u - f(x) = 0$; $y_2 = -x$, $xu' + (1 + 2xf(x))u - f(x) = 0$.
778. $u' + u^2 - 1 = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными. **779.** $u' - (xf(x) + 2/x)u = 1$ – линейное уравнение.
780. $u' = u^2 + 1$ – уравнение с разделяющимися переменными. **781.** $u' - (x^2 + 1)u = u^2$ – уравнение Бернулли.
782. $u' + a(xu + u^2) = 0$ – уравнение Бернулли. **783.** $u' + x^3u = xu^2$ – уравнение Бернулли.
784. $xu' - (ax + 3)u = u^2$ – уравнение Бернулли. **785.** $xu' + au^2 - u - b = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.
800. $(2 - u)xdu + (1 - u^2)dx = 0$, $(x + y^3)^3 = C(x - y^3)$. **801.** $xu' + u = xe^x$, $e^y = e^x - e^x/x + C/x$.
802. $u' + u + x = 0$, $\mathrm{tg}(y/2) = Ce^{-x} - x + 1$. **803.** $x\left(u^2+1\right)+\left(x^2u+1/\sqrt{1-u^2}\right)u'=0,\ y = x\sin(C - (x^2 + y^2)/2)$.

804. $u' + e^xu - e^x = 0$, $y = \ln(1 + C\exp(-e^x))$. **805.** $(x + u) + (x - u)u' = 0$. **806.** $u' - a\cos u - b = 0$.

807. $u' + a\alpha\sin u + a\beta - b = 0$. **808.** $u' = a + bf(u)$. **809.** $\dfrac{dr}{d\varphi} = -r\,\mathrm{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$. **810.** $3xu - (x^2 - u^2)u' = 0$.

811. $(t+y)-(t-y)\dfrac{dy}{dt}=0$. **812.** $(at + bu + c) + \left(a_1t+b_1u+c_1\right)\dfrac{du}{dt}=0$. **813.** $au' + P(x)u = Q(x)$. **814.** $xu' - u\ln u = 0$.
815. $xu' + u\ln u = 0$. **816.** $2xu' + u^2 + x^2 = 0$. **817.** $(x^2 + 1)u' + xu = (x^2 + 1)x$. **823.** $2xy' + y - 1 = 0$, $x(y - 1)^2 = C$.
824. $r^2 = 2(\varphi r' + r)$, $r = 2/(1 + C\varphi)$. **825.** $d\varphi = 8rdr$, $r(0) = 0$, $4r^2 = \varphi$. **826.** $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$, $x^2 + y^2 - Cx = 0$.

827. $xdy - 2ydx = 0$, $y = 3x^2/16$. **828.** $y'-\dfrac{2}{x}y=-1,\ y = Cx^2 + x$. **829.** $dx - 3ydy = 0$, $y(0) = 0$, $3y^2 - 2x = 0$.

830. $yy' = a$, $y^2 = 2ax + C$. **831.** $y'\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)=y,\ \ y^2=\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)C$. **832.** $\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arctg}\,y = C$, особых решений нет.

833. $x\sqrt{1+y^2}=C$, особых решений нет. **834.** $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$, особых решений нет.

835. $x^2-2\sqrt{1-y^2}=C$; $y = 1$, $y = -1$ – особые решения. **836.** $y^2-2\sqrt{1-x^2}=C$; $x = 1$, $x = -1$ – особые решения.

837. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C$; $y = 1$, $y = -1$, $x = 1$, $x = -1$ – особые решения. **838.** $e^{-y} - 1 = Ce^x$, особых решений нет.
839. $y = (x + C)^3$; $y = 0$ – особое решение. **840.** $y^2 = (x + C)^3$; $y = 0$ – особое решение.
841. $y^{3/2} = x + C$, $y = 0$, особых решений нет. **842.** $y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$; $y = x$, $y = -x$ – особые решения.
843. $\mathrm{tg}(y/x) = \ln Cx$, особых решений нет. **844.** $y^2 = 1 - (x-C)^2$; $y = 1$, $y = -1$ – особые решения.
845. $y = xy' + 1/y'$; $y^2 = 4x$ – особое решение. **846.** $y^2 = 2xyy' + (yy')^2$, особых решений нет.
847. $y^2\left(y'^2+1\right)=(yy'+x)^2/2$; $y = x$, $y = -x$ – особые решения. **848.** $(yy')^2 + y^2 = 1$; $y = 1$, $y = -1$ – особые решения.

849. $y = y' + e^x/y'$; $y^2 = 4e^x$ – особое решение. **850.** $x^2y' = y(y + 2)$; $y = 0$ – особое решение. **851.** $y = 0$ – особое решение.
852. $y = x$ – особое решение. **853.** $y = 0$ – особое решение. **854.** Особых решений нет. **855.** Особых решений нет.
856. Особых решений нет. **857.** $y = x$ – особое решение. **858.** Особых решений нет. **859.** $y = 0$ – особое решение.
860. Особых решений нет. **861.** Особых решений нет. **862.** $y = 0$ – особое решение.
863. Особых решений нет. **864.** Особых решений нет. **865.** Нет. **866.** Да, при $\alpha \in (0, 1)$. **867.** Нет.

868. $\dfrac{dh}{dt}=-k\sqrt{h},\ h|_{t=0}=H;\ T=\dfrac{2}{k}\sqrt{H}$, где $k=0{,}6\dfrac{\sigma}{S}\sqrt{2g}$. **869.** $T=\dfrac{14\pi\cdot 100^2\cdot 10}{15\cdot 0{,}25\sqrt{2g}}\approx$ 7 ч 20 мин.

870. $\left(h^2-2h\right)dh=\dfrac{0,6\sqrt{2gh}}{100}dt;\ T=37,7\int\limits_1^0\left(h^{3/2}-2h^{1/2}\right)dh\approx 35,2\,\text{с}.$ **871.** $\dfrac{dh}{dt}=-k\sqrt{h};\ T=\dfrac{2\cdot 480\sqrt{6}}{\sqrt{5}\cdot 60}=16\sqrt{\dfrac{6}{5}}$ мин.

872. $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{-0,6\cdot\pi\sqrt{20}}{144\cdot 12\sqrt{4h-h^2}}\sqrt{h};$ T = 18,5 мин. **873.** $dh=-khdt$; $T=\ln\ 2\ \ln^{-1}(10/9)\approx 7$ дн.

874. $\left(\dfrac{1}{6}-0,6\sqrt{2gh}\left(\dfrac{1}{12}\right)^2\right)dt=36dh;$ T = 14,7 мин. **875.** $Q\dfrac{dr}{r}=-2\pi lkdT,$ (l = 1 м), $T\approx 592-187,6\ln r\,°C$, $Q\approx 7236\cdot 10^3$ Дж.

876. $Qdx=-k\cdot 1\cdot dt$, $x|_{t=0}=0$, $T=2x/3$ °C, $Q=3620\cdot 10^3$ Дж. **877.** $\dfrac{dT}{d\tau}=-k\left(T-20\right)$, $T|_{\tau=0}=100$; τ = 1 ч.

878. $\dfrac{dT}{d\tau}=-k\left(T-21\right)$, $T|_{\tau=0}=31$; $\tau=\dfrac{1}{0,22314}\ln\dfrac{10}{37-21}\approx -2,10630$ ч. **879.** $\dfrac{dT}{d\tau}=-k\left(T-25\right)$, $T|_{\tau=0}=100$; τ = 71 мин.

880. $\dfrac{dv}{dt}=-\left(av+b\right),\ v|_{t=0}=v_0,\ s=m/a\left(v_0+\dfrac{b}{a}\ln\dfrac{b}{av_0+b}\right),\ T=\dfrac{m}{a}\ln\dfrac{av_0+b}{b}.$ **881.** $m\dfrac{dv}{dt}+k_2v=-k_1v^a$,

$v=\exp\left(-\dfrac{k_2t}{m}\right)\left(C+\left(\alpha-1\right)\int\limits_0^t\dfrac{k_1}{m}\exp\left(-\dfrac{k_2\tau\left(\alpha-1\right)}{m}\right)d\tau\right)^{1/(1-\alpha)}$. **882.** $\dfrac{dv}{dt}=g-kv^2$, $v=\sqrt{\dfrac{g}{k}}\dfrac{C\exp\left(2\sqrt{kgt}\right)-1}{C\exp\left(2\sqrt{kgt}\right)+1}$.

883. $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{mgR^2}{x^2},\ x|_{t=0}=R,\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=v_0,\ x=\left(R^{3/2}+\dfrac{3}{2}Rt\sqrt{2g}\right)^{2/3}$, при интегрировании уравнения

воспользоваться тем, что $\dfrac{d^2x}{dt^2}=v\dfrac{dv}{dx}$. **884.** $m\dfrac{dv}{dt}=-kv^2,\ v|_{t=0}=v_0;\ T=h\left(\dfrac{1}{v_1}-\dfrac{1}{v_0}\right)\ln^{-1}\dfrac{v_0}{v_1}=0,00108$ с.

885. $\dfrac{12000}{g}\dfrac{dv}{dt}=-36v^2,\ v|_{t=0}=v_0;\ s=\dfrac{100}{3}\ln\dfrac{t+5}{5},\ \ s\left(5\right)=\dfrac{100}{3}\ln 2.$

886. $\dfrac{dx}{dt}=\ =kx\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{2-x}{30}\right),\ x|_{t=0}=2;\ \dfrac{x}{x+8}=\dfrac{1}{5}e^{4kt/15},\ \ k=\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{5}{9},$ $x(t)$ – масса нерастворенной соли в момент t.

887. $\dfrac{dx}{dt}=-0,15x\left(0,11-\dfrac{6-x}{100}\right),\ x|_{t=0}=6;\ \ln\dfrac{11x}{6\left(x+5\right)}=-2,7;\ x=0,19$ ч, $x(t)$ – масса нерастворенной соли в момент времени t.

888. $\dfrac{dx}{dt}=k\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{300}\right),\ x|_{t=0}=0$; $x\approx 18,1$ кг; $x(t)$ – масса растворенной соли в момент времени t.

889. $dx=-\dfrac{3x}{100}dt,\ x|_{t=0}=10$; x = 1,654 кг; $x(t)$ – масса соли в растворе в момент времени t.

890. $dx=-\dfrac{2x}{100+t}dt,\ x|_{t=0}=10$; x = 3,9 кг; $x(t)$ – масса соли в растворе в момент времени t.

891. $dx=q\left(0,0004-\dfrac{x}{10800}\right)dt,\ x|_{t=0}=0,0012\cdot 10800$; $q\approx 1500$ м^3, $x=4,32+8,64e^{1500t}$;

$x(t)$ – объем CO_2 в помещении в момент времени t. **892.** $dx=q(1-x)dt$, $x|_{t=0}=0,21$; $x=1-0,79e^{-qt}$; $x(t)$ – объем кислорода во фляжке в момент времени t; q – объем кислорода, поступающего во фляжку в единицу времени.

893. $\dfrac{dx}{dt}=x\left(0,1-0,001x\right),\ x|_{t=0}=10;\ \lim\limits_{t\to+\infty}x\left(t\right)=100.$ **895.** $\dfrac{\beta}{\delta}=100000;\ \ x\left(t\right)=\dfrac{100e^{\beta t}}{0,999+0,001e^{\beta t}}$, где $\beta=\ln\dfrac{119,976}{99,976}$.

897. $\dfrac{dx}{dt}=kx^{2/3},\ x|_{t=0}=a$, $k>0$; $x(t)=(a^{1/3}+kt/3)^3$, $x(t)$ – масса клетки в момент времени t.

897.1. $\Psi'+Ra(\Psi-\Psi_1)+Rb(\Psi-\Psi_1)^n$, $\Upsilon=(((\Psi_0-\Psi_1)^{-6}+b/a)e^{6Rat}-b/a)^{-1/6}+\Psi_1$, $\Psi(0,1)\approx 0,8$ Вб,

$\Psi(0,5)\approx 0,8$ Вб, $\Psi(1)\approx 0,3$ Вб. **897.2.** $\Psi'+kR\Psi^4=E,\ t=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{kRE^3}}\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt[4]{E}+\sqrt[4]{RI}}{\sqrt[4]{E}-\sqrt[4]{RI}}+\operatorname{arctg}\sqrt[4]{\dfrac{RI}{E}}\right).$

897.3. $\left(\left(k^{1-\alpha}(t_0)-\frac{(1-u)(1-a)\sigma}{\mu+n}\right)e^{-(\mu+n)(1-\alpha)(t-t_0)}+\frac{(1-u)(1-a)\sigma}{\mu+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

897.4. $\int\limits_{k(t_0)}^{k(t)}\frac{dk}{(1-u)(1-a)\gamma(\delta k^{-\rho}+1-\delta)^{-1/\rho}-(\mu+n)k}=t-t_0$.

897.5. $y(s,t)=\gamma_R+\gamma_I+\frac{R(s)-\gamma_R}{\alpha_R(t-s)}\left(1-e^{-\alpha_R(t-s)}\right)+\frac{I(s)-\gamma_I}{\alpha_I(t-s)}\left(1-e^{-\alpha_I(t-s)}\right)$.

897.6. $y(s, s+1) = 6{,}95\%$, $y(s, s+2) = 6{,}92\%$, $y(s, s+5) = 6{,}85\%$, $y(s, s+10) = 6{,}80\%$, $y(s, s+20) = 6{,}81\%$, $y(s, s+50) = 6{,}90\%$, $y(s, s+100) = 6{,}95\%$, $y(s, s+\infty) = 7{,}00\%$.

897.7. $B(\tau)=\frac{1-e^{-k\tau}}{k}$, $A(\tau)=\frac{2k^2\theta+2k\lambda\sigma-\sigma^2}{2k^2}(B(\tau)-\tau)-\frac{\sigma^2}{4k}B^2(\tau)$, $\tau=t-s$.

897.8. $B(\tau)=\frac{2(1-e^{-\gamma\tau})}{2\gamma+(\gamma+\lambda\sigma-k)(e^{-\gamma\tau}-1)}$, $A(\tau)=\frac{2k\theta}{\sigma^2}\ln\frac{2\gamma e^{-(\gamma+\lambda\sigma-k)\tau/2}}{2\gamma+(\gamma+\lambda\sigma-k)(e^{-\gamma\tau}-1)}$, $\gamma=\sqrt{(k-\lambda\sigma)^2+2\sigma^2}$.

898. $\left[\begin{array}{l}y=Ce^x,\\ y=Ce^{-x}+x-1.\end{array}\right.$ **899.** $4e^{-y/3}=(x+2)^{4/3}+C$. **900.** $\left[\begin{array}{l}y=2x^2+C,\\ y=-x^2+C.\end{array}\right.$ **901.** $\left[\begin{array}{l}\ln Cy=x+\sin x,\\ \ln Cy=x-\sin x,\\ y=0.\end{array}\right.$ **902.** $\left[\begin{array}{l}y=Ce^x,\\ y=Ce^{-x}.\end{array}\right.$

903. $\left[\begin{array}{l}y=x^2/2+C,\\ y=-x^2/2+C,\\ y=Ce^{-x}.\end{array}\right.$ **904.** $\left[\begin{array}{l}y=C/x,\\ y=C/x^2.\end{array}\right.$ **905.** $\left[\begin{array}{l}y=C,\\ y=\sqrt{x}+C,\\ y=-\sqrt{x}+C.\end{array}\right.$ **906.** $\left[\begin{array}{l}\sqrt{y}=x+C,\\ -\sqrt{y}=x+C,\\ y=0.\end{array}\right.$ **907.** $\left[\begin{array}{l}\sqrt{y}-x\sqrt{x}/(3a)=C,\\ \sqrt{y}+x\sqrt{x}/(3a)=C,\\ y=0.\end{array}\right.$

908. $\left[\begin{array}{l}y=Ce^{x^2/2},\\ y=Ce^{-x/2}.\end{array}\right.$ **909.** $\left[\begin{array}{l}y=C+x^3/3,\\ y=Ce^{x^2/2},\\ y=-1/(x+C).\end{array}\right.$ **910.** $y^2=2ax$, $y^2=-2ax$. **911.** $xy-1=0$, $x^2y-1=0$, $y=0$.

912. $y=0$, $y^2=4(1-x)$. **913.** $y+2x^2=2$, $y=-\pi/2+\arcsin x$, $y=\pi/2-\arcsin x$.

914. $y=x$, $(x-2)^2+y^2=2$; $y=x$, $y=-x$; $\left(x-2-\sqrt{2}\right)^2+y^2=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$, $\left(x+\sqrt{2}-2\right)^2+y^2=\left(1-\sqrt{2}\right)^2$.

915. $\left\{\begin{array}{l}x=(1+p)p^{-3}\\ y=3/\left(2p^2\right)+2/p+C.\end{array}\right.$ **916.** $\left\{\begin{array}{l}x=p-p^{-1}+C,\\ y=\ln p+p^2/2.\end{array}\right.$ **917.** $\left\{\begin{array}{l}x=\left(1+p^2\right)^{-1},\\ y=p\left(p^2+1\right)^{-1}-\operatorname{arctg}p+C.\end{array}\right.$ **918.** $\left\{\begin{array}{l}x=p+\ln p,\\ y=C+p+p^2/2.\end{array}\right.$

919. $\left\{\begin{array}{l}x=p\sin p+\cos p,\\ y=\left(p^2-2\right)\sin p+2p\cos p+C.\end{array}\right.$ **920.** $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=\ln p+C,\\ y=p+C,\end{array}\right.\\ y=x+1.\end{array}\right.$ **921.** $\left\{\begin{array}{l}x=p\sin p,\\ y=\left(p^2-1\right)\sin p+p\cos p+C.\end{array}\right.$

922. $\left\{\begin{array}{l}x=\ln p+\sin p,\\ y=C+p(1+\sin p)+\cos p.\end{array}\right.$ **923.** $\left\{\begin{array}{l}x=p\operatorname{tg}p-\ln\cos p+C,\\ y=p^2\operatorname{tg}p.\end{array}\right.$ **924.** $\left\{\begin{array}{l}x=C+(\ln p+1)^2/2,\\ y=p\ln p.\end{array}\right.$ **925.** $y^2(x-C)^2+y^2=1$.

926. $\left\{\begin{array}{l}x=C+\ln\ln p+1/\ln p,\\ y=p/\ln p.\end{array}\right.$ **927.** $\left[\begin{array}{l}Cx=\ln Cy,\\ y=ex.\end{array}\right.$ **928.** $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=(Cp^{-2}-C^2)/2,\\ y=Cp^{-1},\end{array}\right.\\ 32x^3+27y^4=0,\\ y=0.\end{array}\right.$ **929.** $\left\{\begin{array}{l}x=\pm\left(p\sqrt{2\ln Cp}\right)^{-1},\\ y=\mp\left(\sqrt{2\ln Cp}-(2\ln Cp)^{-1/2}\right).\end{array}\right.$

930. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=C-p/2,\\ y=C^2/5-p^2/4,\end{cases}\\ 4y=x^2.\end{array}\right.$ **931.** $\left[\begin{array}{l}y^2=2Cx-C\ln C,\\ y^2=e^{2x-1}.\end{array}\right.$ **932.** $\left[\begin{array}{l}4y=C^2-2\left(x-C\right)^2,\\ 2y=x^2.\end{array}\right.$ **933.** $\left(\dfrac{y-C}{x}\right)^3-7\left(\dfrac{y-C}{x}\right)-6=0.$

934. $\left(\dfrac{y-C}{x}\right)^3-\left(a+b+1\right)\left(\dfrac{y-C}{x}\right)^2+\left(ab+a+b\right)\left(\dfrac{y-C}{x}\right)-ab=0.$ **935.** $y=C(x-C)^2$. **936.** $\left[\begin{array}{l}y=C^2+Cx+x^2/2,\\ y=x^2/4.\end{array}\right.$

936.1. $y\sqrt{1+(y')^2}=y^2,\ y=0, y=\operatorname{ch}(x+C), C\in\mathbb{R}$. **936.2.** а) $yy'=a, y^2=4ax+C, C\in\mathbb{R}$; б) $-xy'=a, y^2=Ce^{-x/a}, C\in\mathbb{R}$;

в) $|y|\sqrt{1+(y')^2}=a,\ (x-C)^2+y^2=a^2, C\in\mathbb{R}$; г) $y\sqrt{1+(x')^2}=a,\ C=\sqrt{a^2-y^2}-a\ln\left|\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right|\pm x,\ C\in\mathbb{R}.$

937. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=p^{-1/2}\left(\ln p+C\right),\\ y=\sqrt{p}\left(4-\ln p-C\right),\end{cases}\\ y=0.\end{array}\right.$ **938.** $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2p+1+C(p-1)^{-2},\\ y=p^2+Cp^2(p-1)^{-2},\end{cases}\\ y=0,\\ y=x-2.\end{array}\right.$ **939.** $\left[\begin{array}{l}y=Cx+a\sqrt{1+C^2},\\ x^2+y^2=a^2.\end{array}\right.$ **940.** $\left[\begin{array}{l}x=Cy+C^2,\\ 4x+y^2=0.\end{array}\right.$

941. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\sqrt{p}\left(4-\ln p-C\right),\\ y=p^{-1/2}\left(\ln p+C\right),\end{cases}\\ x=0.\end{array}\right.$ **942.** $\left[\begin{array}{l}y=Cx-1+1/C,\\ \left(y+1\right)^2-4x=0.\end{array}\right.$ **943.** $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=p^{-2}\left(C-\cos p-p\sin p\right),\\ y=p^{-1}\left(2C-2\cos p-p\sin p\right),\end{cases}\\ y=0.\end{array}\right.$ **944.** $\begin{cases}x=Cp^{-2}-p^{-1},\\ y=\ln p-2+2Cp^{-1}.\end{cases}$

945. $\begin{cases}x=Ce^{-p}-2p+2,\\ y=Ce^{-p}\left(1+p\right)-p^2+2.\end{cases}$ **946.** $\left[\begin{array}{l}y=Cx+C^2,\\ 4y+x^2=0.\end{array}\right.$ **947.** $\left[\begin{array}{l}y=Cx+aC^{-2},\\ 4y^3-27ax^2=0.\end{array}\right.$ **948.** $\left[\begin{array}{l}y=2\sqrt{Cx}+C,\\ y=-2\sqrt{Cx}+C,\\ y+x=0.\end{array}\right.$ **949.** $\left[\begin{array}{l}2C^2\left(y-Cx\right)=1,\\ 8y^3-27x^2=0.\end{array}\right.$

950. $\left[\begin{array}{l}y=Cx-C^3/3,\\ 9y^2-4x^3=0.\end{array}\right.$ **951.** $y=\left(\sqrt{x+1}-C\right)^2.$ **952.** $\left[\begin{array}{l}y=C\left(x+1\right)-C^2,\\ 4y=\left(x+1\right)^2.\end{array}\right.$ **953.** $y'^2+1=a(y-y'x)^2, x^2+y^2=1/a, a>0.$

954. $y=xy'\pm ay'\Big/\sqrt{1+y'^2},\ x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. **955.** $(y-xy')^2=4(x-y/y'), y^2+16x=0$. **956.** $(y-xy')^2=-4a^2y', xy=a^2$.

957. $(x+yy')^2+(y+x/y')^2=a^2,\ x=\dfrac{Cp}{\sqrt{1+p^2}}\left(C+\dfrac{a}{2(1+p^2)}\right),\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left(a-C-\dfrac{a}{2(1+p^2)}\right).$

958. $y'\left(\alpha-x\right)+y-\beta=a\sqrt{1+y'^2},\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$, где (α, β) – заданная точка.

959. $y=xy'+\sqrt{a^2\left(1+y'^2\right)+C^2y'^2};\ a^2x^2+(a^2+C^2)y^2=a^2(a^2+C^2).$

960. $y=xy'+\sqrt{C^2y'^2-a^2\left(1+y'^2\right)};\ a^2x^2-(C^2-a^2)y^2=a^2(C^2-a^2)$. **961.** $y=xy'+2ay'(y'-1)^{-1}; (y-x-2a)^2=8ax.$

962. $y=xy'+2a\sqrt{-y'};\ xy=a^2$. **963.** $x^2-y^2=C$. **964.** $2x^2+y^2=2C^2$. **965.** $2x^2+3y^2=C^2$. **966.** $x^2+y^2+2Cx=0$.

967. $y^3-3x^2y+C=0$. **968.** $y^2=C(C+2x)$. **969.** $\begin{cases}x=R\left(\left(1+p^2\right)^{-1/2}-\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+p^2}}{p}\right)\right)+C,\\ y=Rp\left(p^2+1\right)^{-1/2}.\end{cases}$ **970.** $y=2+C(x-1)$.

971. $C=2xy-\sqrt{3}\left(x^2+y^2\right)$. **972.** $\ln\left(2x^2+xy+y^2\right)+\dfrac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+2y}{x\sqrt{7}}=C.$ **973.** $y=Cx$. **974.** $y=Cx^2$. **975.** $y=Cx$.

976. $x^2-y^2=C$. **977.** $r^2=C\cos 2\varphi$. **978.** $r^2=C\sin 2\varphi$. **979.** $(x^2+y^2)^2+Cxy=0$. **980.** $(x^2+y^2)^3+Cy(y^2-3x^2)=0$.

981. $r^2 = C^2\cos 2\varphi$. **982.** $\begin{cases} \varphi = t - \operatorname{tg} t + C, \\ r = 2R\cos t. \end{cases}$ **982.1.** $x = 0$, $(x - C)^2 + y^2 = C^2 - a^2$ при $|C| > a$, ввести систему координат так, чтобы координаты точек A и B имели вид $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ соответственно. **983.** $r = C\cos(\varphi - \alpha)$.

984. $r = C(1 + \cos(\varphi - 2\alpha))$. **985.** $y = \ln(x^2 + C_1) + C_2$. **986.** $y = C_2 e^{C_1 x^2/2}$. **987.** $y = x\ln\dfrac{x}{C_2 - C_1 x}$.

988. $y = C_2 e^{C_1 x} + C_3 e^{-C_1 x}$ для $y'' - C_1^2 y = 0$; $y = C_2\cos C_1 x + C_3\sin C_1 x$ для $y'' + C_1^2 y = 0$.

989. $y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$, $y = C_2 e^{C_1 x} + C_3 x + C_4$. **990.** $y = C_2\sqrt{x^2 + C_1}$. **991.** $y = \left(1 + C_1^2\right)\ln\left(x + C_1\right) - C_1 x + C_2$.

992. $y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(C_1 - x\right)^{3/2} + C_2 x + C_3$, $y = Cx + C_1$. **993.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 x + C_3$. **994.** $x = C_2 + \sqrt{C_1 y^2 + C_1^2}$.

995. $e^{2x + C_1} = C_2 + 2y^2 + 2\sqrt{y^4 + C_2 y^2 + 1}$. **1016.** $\left(y'^2 + 1\right)^{3/2} = ay''$, $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2$.

1017. $ay'' = y'^2 + 1$, $y + a\ln\cos\dfrac{x + C_1}{a} + C_2 = 0$. **1018.** $y''^2 = a^2\left(1 + y'^2\right)^3$, $\left(x - C_1\right)^2 + \left(y - C_2\right)^2 = 1/a^2$.

1019. $ny''y^3 = 1$, $(x - C_1)^2 - ny^2 = C_2$, где n – коэффициент пропорциональности.

1020. $yy'' - y'^2 - 1 = 0$, $y = \pm\dfrac{1}{C_1}\operatorname{ch}\left(C_1 x + C_2\right)$. **1021.** $y'y'' = \left(1 + y'^2\right)^{3/2}$, $y = \sqrt{1 - \left(x + C_1\right)^2} + \ln\dfrac{x + C_1}{1 + \sqrt{1 - \left(x + C_1\right)^2}} + C_2$.

1022. $y = \dfrac{H}{s}\operatorname{ch}\left(\dfrac{s}{H}x + C_1\right) + C_2$. **1023.** $H = 40gH$. **1024.** $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mg - k\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3$, $x|_{t=0} = 0$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0$, $k > 0$, где k – коэффициент пропорциональности. **1025.** $\dfrac{d^2x}{dt^2} = g - k^2\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{dx}{dt} = 75$; $x = \dfrac{75^2}{g}\ln\operatorname{ch}\dfrac{g}{75}t$.

1026. $x_1 = t$, $x = C_1 t + C_2 e^{-2t}$. **1027.** $x_1 = t^2 + 1$, $x = C_1(t^2 + 1) + C_2 e^t$. **1028.** $x_1 = 4t^3 - 3t$, $x = C_1\left(4t^3 - 3t\right) + C_2\sqrt{1 - t^2}\left(4t^2 - 1\right)$.

1029. $x_1 = t$, $x = C_1 t + C_2\sqrt{1 - t^2}$. **1030.** $x_1 = e^t$, $x = (C_1 t^2 + C_2)e^t$. **1031.** $x_1 = e^{-2t}$, $x = C_1(4t^2 + 1) + C_2 e^{-2t}$.

1032. $x_1 = t^3 - t$, $x = C_1\left(3t^2 - 2 - \dfrac{3}{2}t\left(t^2 - 1\right)\ln\dfrac{t+1}{t-1}\right) + C_2\left(t^3 - t\right)$. **1033.** $x_1 = 3t^2 - 1$, $x = C_1\left(3t^2 - 1\right) + C_2\left(6t - \left(3t^2 - 1\right)\ln\dfrac{1+t}{1-t}\right)$.

1034. $x_1 = t^{-1}$, $x = t^{-1}\left(C_1\sqrt{t^2 + 1} + C_2\right)$. **1035.** $x_1 = \sqrt{t + 1}$, $x = C_1\sqrt{t + 1} + C_2\sqrt{1 - t}$.

1036. $x = C_1\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) + C_2\left(\dfrac{t}{2} + 1 - \dfrac{t+1}{t}\ln\left(t + 1\right)\right)$. **1037.** $x = t^{-1}(C_1 e^{-t} + C_2 e^t)$. **1038.** $x = C_1(e^t - 1) + C_2(e^t + 1)^{-1}$.

1039. $x = C_1\dfrac{\sin t}{t} + C_2\dfrac{\cos t}{t}$. **1040.** $x = t^{-1}(C_1\sin t + C_2\cos t + 1)$. **1041.** $x = C_1\left(t + 1 - \dfrac{2t}{1 - t}\ln t\right) + C_2 t\left(1 - t\right)^{-1}$.

1042. $x = C_1 t^{-1} + C_2 t^{-2}$. **1043.** $x = C_1 t + C_2\sqrt{1 + t^2} + 1$. **1044.** $x = t^{-1}\left(C_1 + C_2\sqrt{t^2 + 1} + \ln t\right)$. **1045.** $x = C_1 t^{-1} + C_2 t + t\ln t$.

1047. $x = C_1 t + C_2 t\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{e^\tau}{\tau^2}d\tau$, $t_0 > 0$. **1048.** $x = C_1\sin t + C_2(1 - \sin t\cdot\ln\operatorname{tg}(\pi/4 + t/2))$. **1049.** $x = t^2 - e^{t-1}$.

1050. $x = 2 + (3 + \pi/2)t + 2t\operatorname{arctg} t + t^2$. **1051.** $x = t\left(C_1\cos\dfrac{1}{t} + C_2\sin\dfrac{1}{t}\right)$, $t > 0$. **1052.** $x = C_1 e^{e^{2t}} + C_2 e^{2e^{2t}} + \dfrac{1}{2}e^{2t} + \dfrac{3}{4}$.

1053. $x = C_1\cos e^t + C_2\sin e^t$. **1054.** $x = C_1\cos\operatorname{arctg} t + C_2\sin\operatorname{arctg} t$. **1055.** $x = C_1\cos 2\sqrt{t} + C_2\sin 2\sqrt{t}$, $t > 0$.

1056. $x = C_1\cos(n\arccos t) + C_2\sin(n\arccos t)$. **1057.** $x = C_1 e^{-t^2} + C_2 e^{-t^2 - t}$. **1058.** $x = \dfrac{1}{2}e^t + C_1\dfrac{e^t}{t} + C_2\dfrac{e^{-t}}{t}$.

1059. $x = t(C_1 e^{at} + C_2 e^{-at})$. **1060.** $x = \sqrt{t}e^{-t^3/3}\left(C_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right) + C_2\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right)\right)$, $t > 0$. **1061.** $x = t^{-1/2}(C_1 + C_2 e^{-t})$, $t > 0$.

1062. $x=e^{-t^2}(C_1e^t+C_2e^{-t})$. **1063.** $x=C_1e^{2t^2}+C_2e^{3t^2}$. **1064.** $x=C_1e^{-2/t}+C_2e^{-3/t}+e^{1/t}/12$. **1065.** $x=\left(C_1+C_2t^{-3}\right)e^{1/t^3}$.

1066. $x=C_1t^2+C_2t^2\ln t+(\ln t+2)t$. **1067.** $x=t(C_1e^{a/t}+C_2e^{-a/t})$. **1068.** $x=C_1e^{2/t}+C_2e^{-2/t}-1/(4t)$.

1069. $x=t^{-1}(C_1\sin at+C_2\cos at)$. **1070.** $x=\dfrac{1}{t}\left(C_1e^t+e^{-t/2}\left(C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$. **1071.** $x=t^{-1}(C_1\cos t+C_2\sin t)$.

1072. $x=C_1(t+2)^3+C_2(t+2)^{-1}+C_3(t+2)^{-2}$. **1073.** $x=2\cos\ln t+\sin\ln t+C_1\cos\left(\sqrt{2}\ln t\right)+C_2\sin\left(\sqrt{2}\ln t\right)$.

1074. $x=C_1(2t+1)^{-1}+C_2(2t+1)^{-2}+(2t+1)/3$. **1075.** $x=C_1t^3+C_2t^5$. **1076.** $x=C_1t^2+C_2t$. **1077.** $x=t(C_1\cos\ln t+C_2\sin\ln t)$.
1078. $x=t^3(C_1\cos(2\ln t)+C_2\sin(2\ln t))$. **1079.** $x=C_1t^{-1}+t(C_2\cos\ln t+C_3\sin\ln t)$. **1080.** $x=C_1+C_2\ln t+C_3t^3$.
1081. $x=C_1t+C_2t^3+t^3\ln t$. **1082.** $x=C_1\cos(2\ln t)+C_2\sin(2\ln t)+(2\cos\ln t+\sin\ln t)/3$. **1083.** $x=C_1(t+3/2)^{3/2}+C_2(t+3/2)^{1/2}$.

1084. $x=C_1+\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\left(C_2\cos\left(\dfrac{1}{2}\ln\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\right)+C_3\sin\left(\dfrac{1}{2}\ln\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\right)\right)$. **1085.** $x=(t+1)^{-1}(C_1+C_2\ln(t+1)+\ln^3(t+1))$.

1086. $x=C_1\dfrac{1}{t}+C_2t^2-\dfrac{3}{2}\ln t+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}t$. **1087.** $x=(t-2)^2(C_1+C_2\ln(t-2))+t-3/2$. **1088.** $x=C_1t^7+C_2t^3$.

1089. $x=C_1t^{1+\sqrt{2}}+C_2t^{1-\sqrt{2}}$. **1090.** $x=t\left(C_1\cos(2\ln t)+C_2\sin(2\ln t)\right)-\dfrac{t\ln t}{4}\cos(2\ln t)+\dfrac{\cos\ln t}{5}-\dfrac{\sin\ln t}{10}$.

1091. $x=(t^3-t^{-1})/2$. **1092.** $x=t^2(2-\ln t)$. **1093.** $x=2\cos\ln t^2+\sin\ln t^2-\ln t\cos\ln t^2$. **1094.** $x=(t-1)^2$.

1095. $x=\left(\cos\left(\sqrt{3}\ln(-t)\right)-3\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln(-t)\right)+t^3\right)/12$. **1096.** $x=(t+1)\left(-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3}\ln(t+1)\right)+\dfrac{1}{9}(t+1)^4$.

1097. $x=(C_1t^{-1}+C_2t^{-2})^2$. **1098.** $U=\dfrac{U_1R-U_2R_1}{R-R_1}+\dfrac{U_2-U_1}{R-R_1}\dfrac{RR_1}{r}$. **1099.** $U=((U_1-U_2)\ln r+U_2\ln R-U_1\ln R_1)\ln^{-1}(R/R_1)$.

1100. $v=C_1\ln r+C_2-pr^2/(4k)$, $v=p(R^2-r^2)/(4k)$. У к а з а н и е. $C_1=0$, так как при $C_1\neq 0$ точки жидкости, движущиеся по оси трубопровода, должны иметь бесконечную скорость, что невозможно; $C_2=pR^2/(4k)$.
1101. $u=pr_0^2\left((1-\mu)r+(1+\mu)r_1^2/r\right)/(E(r_1^2-r_0^2))$. **1103.** $x_1=1+t^2+t^4+\ldots=(1-t^2)^{-1}$, $x_2=t+t^3+t^5+\ldots=t(1-t^2)^{-1}$,

$x=(C_1+C_2t)(1-t^2)^{-1}$. **1104.** $x_1=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^{2n}}{(2n-1)!!}$, $x_2=t\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^{2n}}{2^n n!}$, $x=C_1x_1+C_2x_2$.

1105. $x_1=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{4n}}{3\cdot4\cdots(4n-1)4n}$, $x_2=t+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{4n+1}}{4\cdot5\cdots4n(4n+1)}$, $x=C_1x_1+C_2x_2$.

1106. $x_1=1-\dfrac{t^2}{2!}-\dfrac{t^3}{3!}-\dfrac{t^4}{4!}-\dfrac{2t^5}{5!}-\ldots$, $x_2=t-\dfrac{t^3}{3!}-\dfrac{2t^4}{4!}-\dfrac{5t^5}{5!}+\ldots$, $x=C_1x_1+C_2x_2$.

1107. $x_1=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^{4n}}{3\cdot4\cdots(4n-1)4n}$, $x_2=t+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^{4n+1}}{4\cdot5\cdots4n(4n+1)}$, $x=C_1x_1+C_2x_2$. **1108.** $x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(t-1)^n}{n!}=e^{t-1}$.

1109. $x=\dfrac{t^2}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)!!t^{2n+4}}{(2n+4)!}$. **1110.** $x=te^t$. **1111.** $x=\dfrac{1}{12}t^4+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{t^{3n+1}}{3\cdot4\cdots3n(3n+1)}$. **1112.** $x=t+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{3n-1}}{3\cdot4\cdots3n(3n+1)}$.

1113. $x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!!}=e^{-t^2/2}$. **1113.1.** $x(t)=t+\dfrac{t^4}{24}+\dfrac{t^6}{360}+\dfrac{11t^8}{40320}+\ldots$. **1116.** $x_1=2t$, $x_2=\dfrac{t}{2}\int\limits_1^t\dfrac{e^{\tau^2}}{\tau^2}d\tau$, $x=C_1x_1+C_2x_2$.

1117. $x_1=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}=e^t$, $x_2=e^t\int\limits_1^t\dfrac{e^{\tau-\tau^2}}{\tau+1}d\tau$, $x=C_1x_1+C_2x_2$. **1118.** $x_1=t$, $x_2=1+\dfrac{1}{2}t\ln\dfrac{t-1}{t+1}$, $x=C_1x_1+C_2x_2$.

1119. $x_1=e^t$, $x_2=t$, $x=C_1x_1+C_2x_2$. **1120.** $x_1=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}=\dfrac{\sin t}{t}$, $x_2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n)!}=\dfrac{\cos t}{t}$.

1121. $x_1=t^{1/3}\left(1+\dfrac{t^2}{5\cdot6}+\dfrac{t^4}{5\cdot6\cdot11\cdot12}+\ldots\right)$, $x_2=t^{2/3}\left(1+\dfrac{t^2}{6\cdot7}+\ +\dfrac{t^4}{6\cdot7\cdot12\cdot13}+\ldots\right)$.

1122. $x_1 = t^{-2}\left(1 - t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{40}t^5 + \frac{7}{720}t^6 + \ldots\right)$, $x_2 = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{5}t^3 + \; + \frac{1}{20}t^4 + \ldots$.

1123. $x_1 = t^{-1}(1 + t + t^2/2)$, $x_2 = t^2 + \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{4\cdot 5}t^4 + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}t^5 + \ldots$.

1129. $J_{3/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\frac{\sin t}{t} - \cos t\right)$, $Y_{3/2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\frac{\cos t}{t} + \sin t\right)$. **1130.** $\tau^2 D_\tau^2 x + \tau D_\tau x + \left(\tau^2 - \nu^2\right)x = 0$.

1131. $t^2D^2y + tDy + (t^2 - (m^2 + 1))y = 0$. **1132.** $x = t^{-1/2}(C_1\sin t + C_2\cos t)$. **1133.** $x = C_1J_{1/3}(t) + C_2J_{-1/3}(t)$.
1134. $x = C_1J_9(t) + C_2Y_9(t)$. **1135.** $x = C_1J_{2\sqrt{2}}(t) + C_2J_{-2\sqrt{2}}(t)$. **1136.** $x = \sqrt[4]{t}(C_1J_{1/2}(\sqrt{t}) + \; + C_2J_{-1/2}(\sqrt{t}))$.
1137. $x = C_1J_{1/3}(2t) + C_2J_{-1/3}(2t)$. **1138.** $x = t^{3/2}(C_1J_{5/4}(t^2) + C_2J_{-5/4}(t^2))$. **1139.** $x = C_1J_0(t/4) + C_2Y_0(t/4)$.
1140. $x = (C_1J_3(t) + C_2Y_3(t))t^{-3}$. **1141.** $x = t^{-1}(C_1J_1(2t) + C_2Y_1(2t))$. **1142.** $x = C_1J_{\sqrt{2}}(t^2) + C_2J_{-\sqrt{2}}(t^2)$.

1143. $x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin t}{t} - \frac{1}{\pi}\frac{\cos t}{t}\right)$, $x \to \infty$ при $t \to 0$. **1144.** $x = CJ_{1/2}(t) = C\frac{\sin t}{t}$. **1145.** $x = CJ_{3/2}(t) = C\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{\sin t}{t} - \cos t\right)$.
1146. $D^2y + y = 0$; все решения имеют бесконечное число нулей. **1147.** $D^2y + y = 0$; все решения имеют бесконечное число нулей. **1148.** $D^2y - y = 0$; все решения неколеблющиеся. **1149.** $D^2y = 0$; все решения неколеблющиеся.
Указание. В задачах 1150, 1151 произвести замену независимой переменной.
1150. $D_\tau^2 x - x = 0$; все решения неколеблющиеся. **1151.** $D_\tau^2 x + x = 0$; все решения имеют бесконечное число нулей.
1152. $4q \le p^2$. **1155.** $0{,}33 < \delta < 0{,}5$. **1156.** $15{,}7 < \delta < 32$. **1157.** $0{,}15 < \delta < 1{,}2$.
1158. При $a^2 \le 1/4$ решения неколеблющиеся, при $a^2 > 1/4$ решения имеют бесконечное число нулей.
1159. $D^2y + 4t^{-2}\left(4a_0 + 2a_1 - a_1^2\right)y = 0$; при $4a_0 + 2a_1 - a_1^2 \le 1/2$ решения неколеблющиеся;

при $4a_0 + 2a_1 - a_1^2 > 1/2$ решения имеют бесконечное число нулей. **1161.** $D^2y + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{t^2}\right)y = 0$.

1162. При любых $\nu \in \mathbb{R}$ все решения имеют бесконечное число нулей; при $0 \le \nu < 1/2$ расстояние δ между двумя последовательными нулями меньше π; при $\nu = 1/2$ расстояние $\delta = \pi$; при $\nu > 1/2$ расстояние $\delta > \pi$; при $t \to +\infty$ расстояние $\delta \to \pi$. **1165.** Φ_1, Φ_3 – базис системы. **1166.** Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 – базис системы.

1167. Φ_1 – первый интеграл, $x_1 = \frac{C_1 - t^2}{2\sqrt{C_2 - C_1t + t^3/3}}$, $x_2 = \sqrt{C_2 - C_1t + t^3/3}$.

1168. Φ_1, Φ_2, Φ_3 – зависимые первые интегралы, $x_1 = C_1e^t$, $x_2 = C_2e^t$, $x_3 = C_3e^t$.
1169. Φ_1 – первый интеграл, $x_1 = C_1e^t + C_2e^{-t}$, $x_2 = C_1e^t - C_2e^{-t}$, $x_3 = C_3e^t$.
1170. Φ_2 – первый интеграл, $\Phi_2 = x_1e^{-2t} + e^{-t}$, $\Phi_4 = x_2e^{3t} - e^{3t}/3$ – базис. **1171.** Φ_1, Φ_2 – базис. **1172.** Φ_1, Φ_2 – базис.
1173. Φ_1, Φ_2 – базис. **1174.** Φ_1, Φ_2 – базис. **1175.** Φ_1, Φ_2 – базис. **1176.** Φ_1, Φ_2 – базис.
1177. $x_1 = \sqrt{(2t + C_2)/C_1}$, $x_2 = \sqrt{C_1(2t + C_2)}$. **1178.** $x_1 = (C_1e^t + C_2e^{-t})^{-1}$, $x_2 = (C_2e^{-t} - C_1e^t)^{-1}$.

1179. $x_1 = (C_1 + C_2 - t)\big/\sqrt{2(C_2 - t)}$, $x_2 = (C_1 - C_2 + t)\big/\sqrt{2(C_2 - t)}$. **1180.** $x_1 = C_1C_2e^{C_1t}$, $x_2 = C_2e^{C_1t}$.

1181. $x_1 = \operatorname{arctg}(C_1e^t) + \operatorname{arctg}(C_2e^t)$, $x_2 = \operatorname{arctg}(C_1e^t) - \operatorname{arctg}(C_2e^t)$. **1182.** $x_1 = \sqrt{C_1^2C_2 - 2C_1e^{-t}}$, $x_2 = \sqrt{(C_1C_2 - 2e^{-t})/C_1}$.
1183. $x_1 + x_2 - x_3 = C_1t^{-1} + 0{,}5t + 0{,}25t^3 - 4$, $x_1 + x_2 + 2x_3 = C_2t^2 + 0{,}5t + 0{,}25t^3 + 8$, $x_1 - x_2 = C_3t^{-2} + 0{,}5t - 0{,}25t^3$.
1184. $x_1 = C_1t + C_2t^2 + C_3t^3$, $x_2 = (C_1t + C_3t^3)/2$, $x_3 = -C_1t - C_2t^2 - 1{,}5C_3t^3$.
1185. $x_1 = C_1e^{-1/t} + C_2e^{-2/t} + C_3e^{-3/t}$, $x_2 = (C_1e^{-1/t} + C_3e^{-3/t})/2$, $x_3 = -C_1e^{-1/t} - C_2e^{-2/t} - 1{,}5C_3e^{-3/t}$.
1186. $x_1 = C_1e^{\sqrt{t}} + C_2e^{2\sqrt{t}} + C_3e^{3\sqrt{t}}$, $x_2 = \left(C_1e^{\sqrt{t}} + C_3e^{3\sqrt{t}}\right)\Big/2$, $x_3 = -C_1e^{\sqrt{t}} - \; -C_2e^{2\sqrt{t}} - \frac{3}{2}C_3e^{3\sqrt{t}}$.
1187. $x_1 = (C_1\cos(2\ln t) + C_2\sin(2\ln t))t^3$, $x_2 = C_1t^3(\cos(2\ln t) + 2\sin(2\ln t) + C_2t^3(\sin(2\ln t) - 2\cos(2\ln t))$.
1188. $x_1 = (C_1 + C_2\sin t)e^{\sin t}$, $x_2 = (2C_1 + C_2 + 2C_2\sin t)e^{\sin t}$. **1189.** $x_1 = C_1t^2 + C_2t^{-2} - t$, $x_2 = C_1t^2 - \frac{1}{3}C_2t^{-2} - \frac{2}{3}t$.

1190. $x_1 = \left(C_1 + C_2\sqrt{t} + \frac{t}{2}\right)e^{\sqrt{t}} - \frac{3}{2}\cos\sqrt{t} - \frac{1}{2}\sin\sqrt{t}$, $x_2 = (2C_1 + C_2 + 2C_2\sqrt{t} + \sqrt{t} + t)e^{\sqrt{t}} - 2\cos\sqrt{t}$.

1191. $\Phi_1 = x_2 / x_3$, $\Phi_2 = x_1 - 4x_2 + x_3$. **1192.** $\Phi_1 = 1/x_1 - 1/(x_2 + x_3)$, $\Phi_2 = 1/x_1 - 1/(x_2 - x_3)$.
1193. $\Phi_1 = (x_1 - x_2)/(x_2 - x_3)$, $\Phi_2 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2)^2$. **1194.** $\Phi_1 = x_1 + x_3$, $\Phi_2 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_2 - 3x_1 - x_3)$.
1195. $\Phi_1 = x_1^2 - x_3^2$, $\Phi_2 = x_2^2 - x_4^2$, $\Phi_3 = (x_1 + x_3)/(x_2 + x_4)$. **1196.** $\Phi_1 = x_1 + x_3$, $\Phi_2 = x_2 + x_4$, $\Phi_3 = 2(x_1 - x_3)^2 + 3(x_2 - x_4)^2$.
1197. $\Phi_1 = x_1^2 - x_2^2$, $\Phi_2 = (x_1 + x_2)/x_3$. **1198.** $\Phi_1 = x_2^2 + x_3^2$, $\Phi_2 = x_1 - x_2x_3$. **1199.** $\Phi_1 = x_2/x_1$, $\Phi_2 = \ln(x_3 - 2x_1/x_2) - x_1$.
1200. $\Phi_1 = x_1/x_2$, $\Phi_2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3\right)\Big/x_2$. **1201.** $\Phi_1 = x_2^2 + x_3^2$, $\Phi_2 = x_1(x_2 - x_3)$. **1202.** $\Phi_1 = x_1/x_2$, $\Phi_2 = x_1x_2 - x_3^2$.
1203. $\Phi_1 = x_1 + x_3 - x_2$, $\Phi_2 = \ln x_1 + x_3/x_2$. **1204.** $\Phi_1 = = x_1^2 - x_2^2$, $\Phi_2 = x_1^2 - x_3^2$. **1208.** $\Phi_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ – удвоенная кинетическая энергия тела, $\Phi_2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$ – квадрат кинетического момента.
1209. $\Phi_1 = yw - zv$, $\Phi_2 = zu - xw$, $\Phi_3 = xv - yu$, где $u = \dfrac{dx}{dt}$, $v = \dfrac{dy}{dt}$, $w = \dfrac{dz}{dt}$. **1210.** $v = \dfrac{1}{4}x_1^4 + \dfrac{1}{2}x_2^2$.
1211. $v = x_1^2 \exp x_1^2 + x_2^2$. **1212.** $v = x_1^2 + x_2^2$. **1213.** $v = 2x_1^2 + x_2^4$. **1214.** $v = \sin^2 x_1 + \dfrac{1}{4}x_2^4$. **1215.** $v = x_1^2 + x_2^2$.
1216. $v = 2x_1^2 + \dfrac{1}{2}x_2^2$. **1222.** $w = 4\left(x_1^6 + x_2^6\right)$, асимптотически устойчиво.
1223. $w = 4\left(x_1^4 e^{x_1} + x_2^4\right)$, асимптотически устойчиво. **1224.** $w = 6\left(x_1^6 e^{x_1} + x_2^8\right)$, асимптотически устойчиво.
1225. $w = 4\left(x_1^6 + x_2^8\right)$, асимптотически устойчиво. **1226.** $w = \dfrac{4}{(1+x_1)^2}\left(\dfrac{x_1^2}{\left(1+x_1^2\right)^2} + x_2^2\right)$, асимптотически устойчиво.
1227. Неустойчиво. **1228.** Асимптотически устойчиво. **1229.** Асимптотически устойчиво. **1230.** Неустойчиво.
1231. Асимптотически устойчиво. **1232.** Неустойчиво. **1233.** Неустойчиво. **1234.** Неустойчиво.
1235. Асимптотически устойчиво. **1236.** Асимптотически устойчиво. **1237.** Асимптотически устойчиво.
1238. При $a < 0$ асимптотически устойчиво. **1239.** При $a < 0$ и любом b асимптотически устойчиво.
1240. При $a > 0$, $ab - 2 > 0$ асимптотически устойчиво. **1241.** При $a < 0$ асимптотически устойчиво.
1242. При $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ асимптотически устойчиво. **1243.** При $a < 0$ или $a > 1$ асимптотически устойчиво.
1244. Асимптотической устойчивости нет при любом a. **1245.** При $a < 0$ асимптотически устойчиво.
1246. Неустойчиво. **1247.** Асимптотически устойчиво, $v = x_1^2 + x_2^2$, $w = 4x_1^4 + 6x_2^4$.
1248. Асимптотически устойчиво, $v = x_1^2 + 2x_2^2$, $w = 14x_1^4 + 16x_2^4$.
1248.1. Асимптотически устойчиво (произвести замену $x_1 = u + t$, $x_2 = v - t^2$).
1248.2. Решение $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчиво; решения $x = 1$, $y = 1$ и $x = -1$, $y = -1$ неустойчивы.
1248.3. Решение $x = 1$, $y = -4$ асимптотически устойчиво; решения $x = -1$, $y = 4$, $x = -4$, $y = 1$ и $x = 4$, $y = -1$ неустойчивы.
1248.4. $\alpha < 0$, $2\alpha < \beta < -\alpha$ (воспользоваться критерием Гурвица). **1249.** а) Да; б) да; в) нет; г) да; д) нет.
1250. Да. **1251.** а) $x_0 \neq 0$, f – непрерывно дифференцируемая функция; б) $p(x)$, $q(x)$ – непрерывны; в) $\psi(y_0) \neq 0$, φ – непрерывна, ψ – непрерывно дифференцируема.
1252. $\delta = \min\{a, b/(1+b)^2\}$ и δ всегда меньше 1, $|x| < 1$. **1253.** $y = (1 - x)^{-1}$, $x < 1$.
1254. $M = 5$, $\delta = 2/5$; $y_0 = 0$, $y_1 = x^2/2$, $y_2 = x^2/2 - x^5/20$, $y_3 = x^2/2 - x^5/20 + x^8/160 - x^{11}/4400$.
1255. $M = 3$, $\delta = 1/3$; $y_0 = 1$, $y_1 = 1 - x^3$, $y_2 = 1 - x^3 - x^4/2 + x^7/7$.
1256. $M = 2 + e^2$, $\delta = (2 + e^2)^{-1}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1 + (1 + e)x$, $y_2 = \dfrac{e}{1+e} + \dfrac{1+e}{2}x^2 + \dfrac{1}{1+e}e^{(1+e)x}$.
1257. $M = 3$, $\delta = 1/3$; $y_0 = 0$, $y_1 = x^2/2$, $y_2 = x^2/2 + x^5/20$.
1258. $M = 3$, $\delta = 1/3$; $y_0 = 2$, $y_1 = 2 + x - \dfrac{2}{3}x^3$, $y_2 = 2 + x + x^2 - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4$.
1259. $M = 4$, $\delta = 1/4$; $y_0 = 2$, $y_1 = 2x - \ln x$, $y_2 = 2 + \ln^2 x$. **1260.** $M = 1$, $\delta = 1$; $y_0 = 0$, $y_1 = -x^3/3$, $y_2 = x^7/63 - x^3/3$.
1261. $M = 4$, $\delta = 1/4$; $y_0 = 1$, $y_1 = 1 + x - x^3/3$, $y_2 = 1 + x + x^2 - x^4/6 - 2x^5/15 + x^7/63$. **1262.** $y = 1$. **1263.** $y = e^x - x - 1$.
1264. $y = e^x$. **1265.** $y = e^{x^2/2}$. **1266.** $y = 3$. **1267.** $y_0(x) = 0$, $z_0(x) = 1$; $y_1(x) = x$, $z_1(x) = 1 + x^2/2$;
$y_2(x) = x + x^3/2$, $z_2(x) = 1 + x^2 + x^4/8$; $y_3(x) = x + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{8}x^5$, $z_3(x) = 1 + x^2 + \dfrac{3}{8}x^4 + \dfrac{1}{48}x^6$.

1268. $y_0(x) = 1$, $z_0(x) = 1$; $y_1(x) = 1 - 4x$, $z_1(x) = 1$; $y_2(x) = 1 - 4x + 6x^2$, $z_2(x) = 1 - 2x^2$; $y_3(x) = 1 - 4x + 6x^2 - \frac{16}{3}x^3$,
$z_3(x) = 1 - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3$. **1269.** $y_0(x) = 1$, $z_0(x) = 1$; $y_1(x) = 1 - x + x^2/2$; $z_1(x) = 1 + x + x^2/2$;
$y_2(x) = 1 - x - x^2/2 - 2x^3/3 - x^4/4 - x^5/20$, $z_2(x) = 1 + x + x^3/6$.
1270. $y_0(x) = 1$, $z_0(x) = 1$; $y_1(x) = 1 - 6x$, $z_1(x) = 1 - 7x$; $y_2(x) = 1 - 6x + \frac{35}{2}x^2$, $z_2(x) = 1 - 7x + \frac{47}{2}x^2$.
1271. $y_0(x) = 0$, $z_0(x) = 1/2$; $y_1(x) = -0{,}5x$, $z_1(x) = 1/2$; $y_2(x) = -0{,}5x - 0{,}25x^2$, $z_2(x) = 0{,}5 - 0{,}125x^2$,
$y_3(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^3$, $z_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{160}x^5$.
1272. $y_0(x) = 1$, $z_0(x) = -2$; $y_1(x) = 1 - x + x^2/2$, $z_1(x) = -2 + 3x$; $y_2(x) = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$, $z_2(x) = -2 + 3x - 2x^2 + \frac{1}{6}x^3$.
1272.9. $y(t) = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k}{k!} = 2e^{2t}$, $z(t) = -3\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k}{k!} = -3e^{2t}$.
1272.10. $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} + 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k}{k!} = e^t + 2e^{2t}$, $z(t) = -(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} + 3\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k}{k!}) = -e^t - 3e^{2t}$.
1272.11. $y(t) = 5\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k}{k!} = 5e^{2t}$, $z(t) = -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k}{k!} = -e^{2t}$.
1272.12. $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 7^k t^k}{k!} = e^{-7t}$, $z(t) = -2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 7^k t^k}{k!} = -2e^{-7t}$.
1272.13. $y(t) = 5\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k}{k!} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 7^k t^k}{k!} = 5e^{2t} + e^{-7t}$, $z(t) = -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k}{k!} - 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 7^k t^k}{k!} = -e^{2t} - 2e^{-7t}$.
1272.14. $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{9^k t^k}{k!} = e^{9t}$, $z(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{9^k t^k}{k!} = e^{9t}$. **1272.15.** $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} = e^t$, $z(t) = -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} = -e^t$.
1272.16. $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{9^k t^k}{k!} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} = e^{9t} + e^t$, $z(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{9^k t^k}{k!} - \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} = e^{9t} - e^t$.
1272.17. $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} - \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos t - \sin t$, $z(t) = -2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} = -2\cos t$.
1272.18. $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos t + \sin t$, $z(t) = -2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = -2\sin t$.
1272.19. $y(t) = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} = 2\cos t$, $z(t) = -2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} - 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = -2(\cos t + \sin t)$.
1272.20. $y(t) = -2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = -2\sin t$, $z(t) = -2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = -2\cos t + 2\sin t$.
1272.21. $y(t) = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = 2\sin t$, $z(t) = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} - 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = 2\cos t - 2\sin t$.
1290. $\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1 x - k_2\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$, $x\big|_{t=0} = 1$, $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 1$. **1291.** $\frac{d^2x}{dt^2} = -x - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, $x\big|_{t=0} = 0$, $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = v_0$. **1292.** $y = x$.
1293. $y = 1$. **1294.** $y = x$. **1295.** $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = e^{-x^2}$. **1296.** $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!} = \cos x^2$.
1297. $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} = \ln x$. **1298.** $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = e^{-x^2}$. **1299.** $y = \frac{x^2}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+4)!}x^{2n+4}$.

1300. $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+\frac{11}{24}x^4+\frac{53}{120}x^5+\frac{269}{720}x^6+\ldots$. **1301.** $y=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\ldots$. **1302.** $y=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3!}+\ldots$.

1303. $y=2(x-1)+\frac{4}{2!}(x-1)^2+\frac{10}{3!}(x-1)^3+\frac{42}{4!}(x-1)^4+\ldots$. **1304.** $y=1+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^5}{5!}+\frac{2x^6}{6!}-\frac{2x^7}{7!}+\frac{62x^8}{8!}+\ldots$.

1305. $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,\ z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=e^{-x}$. **1306.** $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-1)^n=-1/x,\ \ z=x$. **1307.** $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=e^{x^2}$.

1308. $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x$. **1309.** $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x,\ \ z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos x$.

1309.1. $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ z=x$. **1309.2.** $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,\ z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=e^{-x}$. **1309.3.** $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,\ z=x^2$.

1309.4. $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,\ z=x^4$. **1309.5.** $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}=e^{2x},\ z=x$. **1309.6.** $y=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=2e^x,\ z=x^2+1$.

1309.7. $y=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=2e^x,\ z=x^2-1$. **1309.8.** $y=x^3,\ z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}=e^{2x}$.

1310. $y=x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{10}{7!}x^7+\ldots,\ \ z=1+\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{6!}x^6+\ldots$. **1311.** $y=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{3}{5!}x^5+\frac{15}{7!}x^7+\ldots$.

1312. $y=1+2x+\frac{3}{2}x^2+x^3+\ldots,\ \ z=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{3}x^3+\ldots$.

1313. $y=-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-\ldots,\ \ z=-1+x-x^2+\frac{1}{2}x^3-\ldots$. **1314.** $y=1+2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\ldots$.

1315. $y=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\ldots,\ \ z=-1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^4+\ldots$. **1317.** $u=H\left(\frac{x_1-x_2}{x_2-x_3},(x_1+x_2+x_3)(x_1-x_2)^2\right)$.

1318. $u=H\left(x_1^2-x_3^2,\ x_2^2-x_4^2,\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}\right)$. **1319.** $u=H\left(x_2^2+x_3^2,x_1-x_2x_3\right)$. **1320.** $u=H(x_2/x_1,\ \ln(x_3-2x_1/x_2-x_1))$.

1321. $u=H\left(x_2^2+x_3^2,x_1(x_2-x_3)\right)$. **1322.** $u=H\left(x_1^2-x_2^2,x_1^2-x_3^2\right)$. **1323.** $u=H\left(x_1^2-x_2^2\right)$. **1324.** $u=H(x_2,\ln x_3-x_1/x_2)$.

1325. $u=H(x_1/x_2,x_1/x_3)$. **1326.** $u=H\left(x_1x_2-x_2^2\right)$. **1327.** $u=(x_1-4x_2+x_3)^2\left(x_2^2+x_3^2\right)\big/(4x_2-x_3)^2$.

1328. $u=x_2x_3(x_1-4x_2+x_3)^2/(x_3-4x_2)^2$. **1329.** $u=(x_2+x_3)(x_1-4x_2+x_3)/(x_3-4x_2)$. **1330.** $u=x_1x_2-x_3^2$.

1331. $u=\frac{(x_1+x_3-x_2-1)(x_2+x_3+x_2\ln x_1)}{(x_3-x_2+x_2\ln x_1)}$. **1332.** $u=\ln x_1+x_3/x_2$. **1333.** $u=(x_1-x_2x_3)\left(x_2^2+x_3^2\right)$.

1334. $u=x_1+x_2+x_3+x_4$. **1337.** $G(x_1x_2,x_1+x_2-u)=0$. **1338.** $G\left(x_1+ue^{-x_2},x_2+ue^{-x_1}\right)=0$. **1339.** $G\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_1x_2-u}{x_1}\right)=0$.

1340. $G\left(x_1^2-x_2^2,\ \frac{x_1+x_2}{u}\right)=0$. **1341.** $G(x_1+x_3,x_2+u,2(x_1-x_3)^2+3(x_2-u)^2)=0$. **1342.** $G\left(\frac{x_1}{x_2},\ \frac{x_1^2+x_2^2+u}{x_2}\right)=0$.

1343. $G((x_2-x_1)(x_1+x_2+2u),(x_1+x_2-u)^2(x_1+x_2+2u))=0$. **1344.** $G\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_1}{x_3},\frac{u}{x_1}-\frac{x_2}{x_3}\ln x_1\right)=0$.

1345. $G(x_1+u,(x_1+x_2+u)(x_2-3x_1-u))=0$. **1346.** $G\left(x_2,ue^{-x_1/x_2}\right)=0$. **1347.** $u=x_2/(\ln x_1-1)$.

1348. $u=e^{1-1/x_1}\left(x_2^{-1}+x_3^{-1}-2x_1^{-1}+2\right)$. **1349.** $u=x_1x_2^2\big/\left(x_1^3+(x_1-1)x_2^2\right)$. **1350.** $u=x_1^2\left(x_1^2+x_2^2\right)\big/x_2^2$.

1351. $\sqrt{4x_2/x_1-x_1x_2+u^2}=2x_2/x_1$. **1352.** $x_1^2(x_2+1)=2x_2^2+2u-2$. **1353.** $x^2+y^2=2pz$. **1354.** $c^{-2}x^2z^2-a^2b^{-2}y^2+x^2=0$.

1355. $xy+z^2=a^2$. **1356.** $z=H(x^2+y^2)$; $z=x^2+y^2-1$. **1357.** $G(x+y,x^2+y^2+z^2)=0$, $z^2=2xy$.

1358. $G\left(\frac{y}{x}, \frac{z+a}{x}\right) = 0$ или $z = x\varphi(y/x) - a$. **1359.** $x^2/2 + y^3/3 - z^4/4 = C$. **1360.** $xyz = C$.

1361. $\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(x)dx + \int\limits_{y_0}^{y} \psi(y)dy + \int\limits_{z_0}^{z} \eta(z)dz = C$. **1362.** $\ln\sqrt{(x+y)^2 + z^2} + \operatorname{arctg}\frac{z}{x+y} = C$.

1363. $\int\limits_{v_0}^{v} f(v)dv = C$, где $v = x + y + z$, $v_0 = x_0 + y_0 + z_0$. **1364.** $\int\limits_{v_0}^{v} vf(v)dv = C$, где $v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $v_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

1365. $x - x/y + xy/z = C$. **1366.** $x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz = C$. **1367.** $xye^z = C$. **1368.** $e^{x^2}(x + y + z^2) = C$. **1369.** $\frac{z-y}{xz} = C$.

1370. $\frac{\left(1-z^2\right)x + y}{z} = C$. **1371.** $\frac{z-x}{x-y} = C$. **1372.** $x^2 + y^2 - z^2 = C$. **1373.** $x^2 + y^2 + z^2 = C$. **1374.** $x^2 - y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(x+y)$.

1375. $\alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}\,y - u = C$. **1376.** $\sqrt{1+\alpha z^2} + \ln\frac{\sqrt{1+\alpha z^2}-1}{z\sqrt{\alpha}} - x - \alpha y = C$. **1377.** $2\sqrt{1+\alpha z} + \ln\frac{\sqrt{1+\alpha z}-1}{\sqrt{1+\alpha z}+1} - x - \alpha y = C$.

1378. $x\operatorname{ch}\alpha + y\operatorname{sh}\alpha - u = C$. **1379.** $\alpha x - (1+\alpha^2)y - u = C$. **1380.** $\alpha^2 x + \alpha y + \frac{z^2}{2} = C$.

Контрольная работа № 1

Вариант I. 1. $v_1 = -1$, $v_2 = 4$, $v_3 = -3$. **2.** $x = 2\cos t - \sin t$. **3.** $\varphi_1(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

4. Фокус при $0 < |\alpha| < 2$, бикритический узел при $|\alpha| > 2$, монокритический узел при $|\alpha| = 2$, центр при $\alpha = 0$.
5. $x = C_1\sin t + C_2\cos t + (2\cos^2 t - 1) / \sin t$, $I = (0, \pi)$.
Вариант II. 1. $v_1 = 3i$, $v_2 = -3i$, $v_3 = i$, $v_4 = -i$. **2.** $x = ((At + B)\cos t + (at + b)\sin t)e^t$. **3.** $\varphi_1(t) = te^{-t}$.
4. Центр при $\alpha = 0$, фокус при $0 < |\alpha| < 2$, бикритический узел при $|\alpha| > 2$, монокритический узел при $|\alpha| = 2$.
5. $x = (C_1 + C_2t)e^t - te^t + te^t\ln t$, $I = (0, +\infty)$.

Контрольная работа № 2

Вариант I. 1. $x = C_1e^t + C_2e^{5t}$, $y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$. **2.** $x_1 = C_1e^{2t} + (C_2 + C_3)e^{3t}$, $x_2 = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$, $x_3 = C_1e^{2t} + C_3e^{3t}$.
3. $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} - 2\sin t - \cos t$, $y = 2C_1e^{2t} - C_2e^{-t} + \sin t + 3\cos t$.
Вариант II. 1. $x = (C_1\cos t + C_2\sin t)e^{2t}$, $y = ((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t)e^{2t}$.
2. $x_1 = C_1 + C_2e^t$, $x_2 = 3C_1 + C_3e^t$, $x_3 = -C_1 + (C_2 - C_3)e^t$. **3.** $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + te^t - t^2 - 2$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t} + (t-1)e^t - 2t$.

Контрольная работа № 3

Вариант I. 1. а) В полных дифференциалах; б) с разделяющимися переменными; в) однородное; г) линейное; д) Бернулли; е) Риккати; ж) линейное. **2.** $\mu = x^{-3}$, $y^3 - yx^{-2} + x\ln x = C$, $x = 0$. **3.** $(x + \eta)dx + (x - \eta)d\eta = 0$.
4. $x = 1 + 3\sqrt{y-2}$, $y = 2$.
Вариант II. 1. а) С разделяющимися переменными; б) в полных дифференциалах; в) однородное; г) линейное; д) Бернулли; е) Риккати; ж) линейное. **2.** $\mu = y^{-2}$, $x^2 - 2xy - 2y^{-1} = C$, $y = 0$. **3.** $\eta' + 2x\eta + 2e^x = 0$. **4**. $4\sqrt{y} = x^2 - 1$, $y = 0$.

Контрольная работа № 4

Вариант I. 1. а) $\begin{cases} x = Cp^{-2} + p^{-1}, \\ y = 2Cp^{-1} + 2 - \ln p; \end{cases}$ б) $y = Cx - C^2$, $y = x^2/4$. **2.** $y = \pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1x + C_2} + C_3$, $y = C_1x + C_2$.
4. $y = C_1x^{-1} + C_2x + x^4/5$.

Вариант II. 1. а) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = (c - \sin p)\,p^{-2} + p^{-1}\cos p, \\ y = 2(C - \sin p)\,p^{-1} + \cos p, \end{cases} \\ y = -1; \end{array}\right.$ б) $y = Cx - 2 - C^2$, $y = x^2/4 - 2$. **2.** $4y^3 = 9C_1(x - C_2)^2$, $y = C$.
4. $y^2 = x^2 + C_1x + C_2$.

Контрольная работа № 5

Вариант I. 1. $x = C_1t^{-1} + C_2(2t + 1) + t^2$. **2.** $x = C_1t^{-1} + C_2t + 0{,}5t\ln t$.
Вариант II. 1. $x = C_1t + 1 + C_2\sqrt{1 + t^2}$. **2.** $x = C_1t^{-1} + C_2t^{-2} + t^{-1}\ln t$.

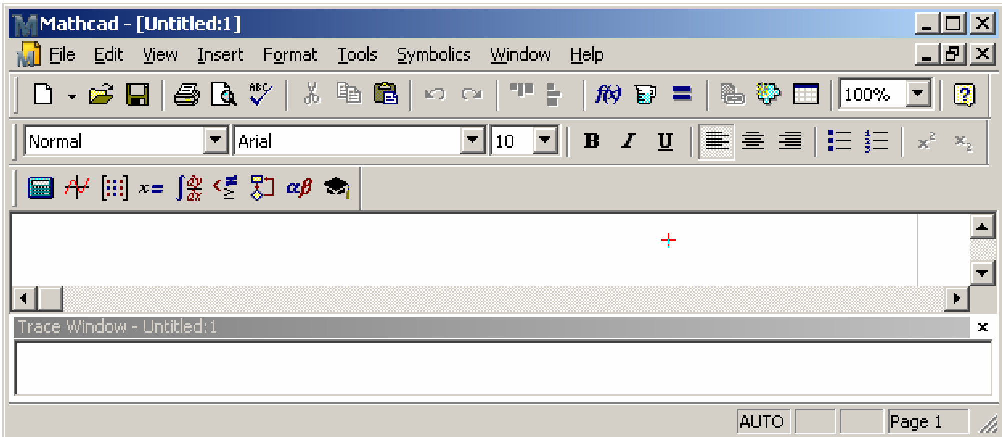
Контрольная работа № 6

Вариант I. 1. $\Phi_1 = y/z$, $\Phi_2 = x - y^2 + z$. **2.** $G(x^2 + y^2, z/x) = 0$. **3.** $(x + 2y)^2 = 2x(z + xy)$, $\Phi_1 = x/y$, $\Phi_2 = (xy + z)/x$.
4. $u = H(y, x^y/z)$.
Вариант II. 1. $\Phi_1 = y/z$, $\Phi_2 = (x - y^2 - z^2)/z$. **2.** $G(x^2 - 4z, (x + y)^2/x) = 0$. **3.** $x - 2y = x^2 + y^2 + z$, $\Phi_1 = x/y$, $\Phi_2 = (z + x^2 + y^2)/x$.
4. $u = H(y, \ln z - x/y)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

MathCad. Краткий справочник пакета. Базовые возможности MathCad

После запуска пакета MathCad из Windows через некоторое время на экране возникает рабочее окно MathCad:



Данное окно Windows-приложения включает в себя следующие части.
1. Заголовок окна MathCad содержит имя текущего рабочего документа.
2. Меню предназначено для выбора необходимых действий:

Меню состоит из следующих пунктов:
- File – работа с файлами, сетью интернет и электронной почтой;
- Edit – редактирование документов;
- View – изменение способов представления документа и скрытие/отображение элементов интерфейса;
- Insert – вставка объектов и их шаблонов;
- Format – изменение форматов объектов;
- Tools – управление процессом вычислений;
- Symbolic – выбор операций символьного процессора;
- Window – управление окнами системы;
- Help – работа со справочной базой, центром ресурсов и электронными книгами.

Меню MathCad контекстные: число позиций в них и их назначение зависят от состояния системы. В раскрытом меню представлен список доступных и недоступных в данный момент команд.

3. Рабочая область MathCad – наибольшая по размерам часть. В ней осуществляется отображение и работа с окнами рабочих документов пакета MathCad.

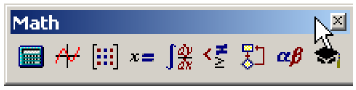
4. Панель инструментов состоит из кнопок, предназначенных для быстрого вызова наиболее важных пунктов меню:

5. Панель форматирования состоит из кнопок, предназначенных для быстрой работы с различными шрифтами и для форматирования частей документа. Она также имеет аналоги в меню:

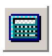
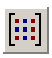
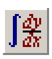
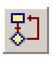
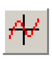
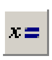
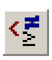
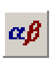
6. В строке состояния отображается различная информация о работе системы, а также сообщения для пользователя MathCad об ошибках со стороны пользователя:

7. Любые другие панели, которые Вы подключите через View ► ToolBars. Например, панель палитры математических знаков:

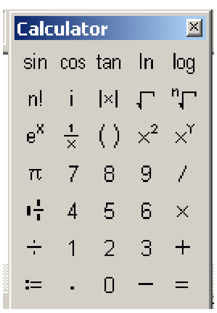
8. Палитры математических знаков расположены ниже полосы инструментов, но эту панель можно выделить в отдельное окно (разной конфигурации):

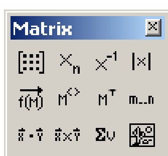


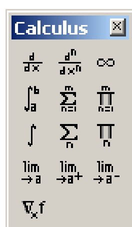
Палитры предназначены для ввода шаблонов операторов, различных специальных символов, графиков и др. Их назначение отображено рисунками на кнопках и представлено ниже в следующей таблице.

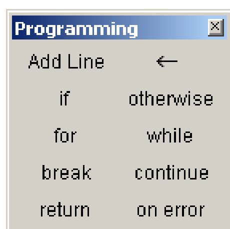
Кнопка	Назначение палитры	Название палитры
	Средства для вычислений	Calculator
	Векторные и матричные операторы	Matrix
	Операторы суммирования, интегрирования и дифференцирования	Calculus
	Конструкции программирования	Programming
	Операторы символьной математики	Symbolic
	Построение различных графиков	Graph
	Соотношения	Evaluation
	Знаки отношений	Boolean
	Буквы греческого алфавита	Greek

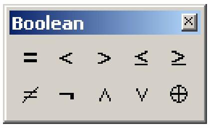
Открывая соответствующую палитру, получаем доступ к ее средствам:

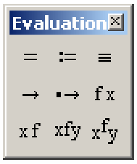


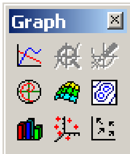


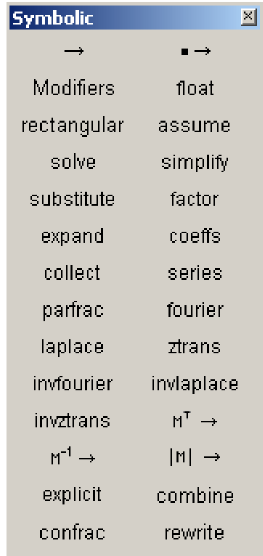












Окна документов располагаются в рабочей области окна системы MathCad и носят название соответствующего рабочего документа или *Untitled:N*, где *N* – номер этого пустого окна. Новое рабочее окно открывается посредством щелчка на соответствующей кнопке панели инструментов или пункта New из меню File.

Вычисление значений числовых выражений. В MathCad можно вычислять значения выражений-формул с любыми арифметическими операциями, причем выражение отображается в обычном виде и вычисляется после ввода, если принудительно не отключена опция автоматического пересчета формул в меню Tools ► Calculate ► ► Automatic Calculation.

Формула – это математическое выражение, состоящее из операндов, соединенных знаками математических операций.

MathCad выполняет действия как над вещественными данными, так и над комплексными. Отметим, что в числе целая часть отделяется от дробной части десятичной точкой. Комплексные числа записываются в обычной форме, как $a+bi$, и могут употребляться в большинстве случаев так же, как и вещественные числа. При вводе комплексного числа мнимую единицу i необходимо представлять как $1i$, иначе MathCad расценит символ i как переменную.

Для *ввода выражения* необходимо щелчком мыши в нужном месте документа выбрать начало ввода. На этом месте появляется красный крестик-визир. Затем начинается ввод самого выражения и крестик-визир превращается в *курсор ввода*. Это более протяженный *уголок* или, другими словами, *выделяющая рамка*. С выделяющей рамкой связано следующее *основное правило*: все выражение, заключенное в выделяющую рамку, используется как операнд для следующей вводимой операции. Если выделяющая рамка левосторонняя, то это будет левый операнд, а правосторонняя – соответственно правый.

Пример. Вычислим значение выражения $\dfrac{25-7}{6}+3$.

Вариант 1. Введем числитель, затем нажимаем на клавишу [ПРОБЕЛ], чтобы курсор ввода охватил числитель, и нажимаем на знак деления. Набираем число 6 и нажимаем на клавишу [ПРОБЕЛ], чтобы курсор ввода охватил всю дробь, и далее набираем число 3.

Отразим эту последовательность действий в следующей таблице:

Набираем	Получаем
25 – 7 [ПРОБЕЛ] / 6 [ПРОБЕЛ] + 3	$\dfrac{25-7}{6}+3$

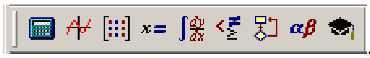
В а р и а н т 2. Нажмем на клавишу [/] и получим шаблон для дроби. Заполняем числитель выражением 25−7, а знаменатель числом 6 и нажимаем на клавишу [ПРОБЕЛ], чтобы курсор ввода охватил всю дробь, и далее набираем число 3.

Получим такую последовательность действий:

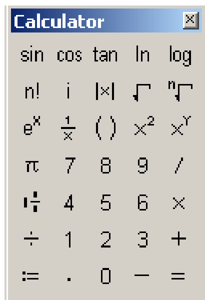
Набираем	Получаем
/ 25 − 7 [Клавиша Tab] 6 [ПРОБЕЛ] + 3	$\frac{25-7}{6}+3$

В меню Help ► Tutorials ► Getting Started Primers на английском языке можно найти примеры как построения выражений, так и других возможностей MathCad.

С клавиатуры напрямую можно ввести не все математические операции. Любую математическую операцию, известную MathCad, можно ввести с помощью одной из палитр панели палитры математических знаков:


.

Наиболее часто используемые операции находятся на палитре Calculator с изображением калькулятора. Вводятся они щелчком мыши по значку нужной операции. Но можно использовать комбинации клавиш – так называемые *горячие клавиши*, за которыми закреплены определенные операции. Когда мы выбираем соответствующую операцию на палитре и за ней закреплены горячие клавиши, появляются их сочетания.



Пример. Вычислить значение выражения $\frac{12\cdot 1{,}5-8^3}{1+\sqrt{35-5^2}}$.

В а р и а н т 1. Для операций возведения в степень и вычисления корня соответственно воспользуемся горячими клавишами [^] и [\]:

Набираем	Получаем
12*1.5−8^3 [ПРОБЕЛ] / 1+\35 – 5^2	$\frac{12\cdot 1{,}5-8^3}{1+\sqrt{35-5^2}}$

Нажимаем клавишу [=] и получаем ответ.

В а р и а н т 2. Можно использовать и другую последовательность действий:

Набираем	Получаем
/12*1.5−8^3 [Клавиша Tab] 1+\35 – 5^2	$\frac{12\cdot 1.5-8^3}{1+\sqrt{35-5^2}}$

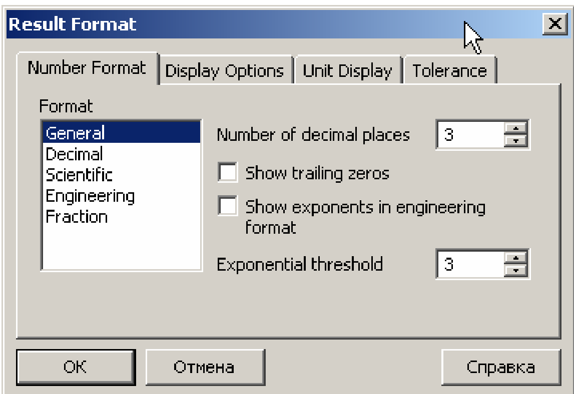
В а р и а н т 3. Откроем палитру Calculator. Используя соответствующие кнопки на этой палитре, получим следующий порядок операций:

Набираем	Получаем
/ 1 2 × 1 . 5 – 8 x^Y 3 [Клавиша Tab] 1 + √ 3 5 – 5 x^2	$\dfrac{12\cdot 1.5-8^3}{1+\sqrt{35-5^2}}$

О представлении результатов вычислений. MathCad проводит вычисления с высокой точностью и выводит результаты на экран в соответствии с заданными соглашениями о их представлении:

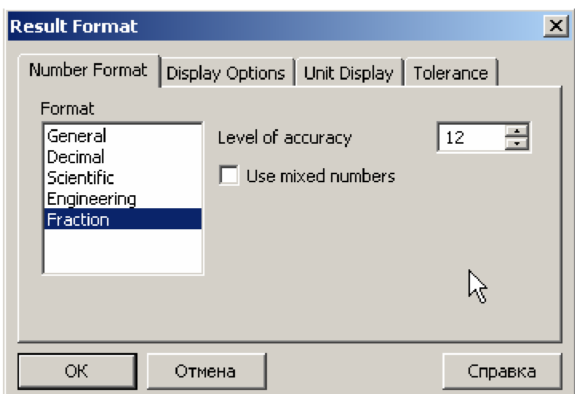
Набираем	Получаем
5–0.000001=	5
5+0.000001=	5

По умолчанию это три знака, но данную величину можно установить по своему усмотрению. Для этого необходимо в меню Format выбрать пункт Result. На экране появится окно. На закладке Number Format в поле Format выбирается опция General. В поле [Number of decimal places] укажем число 6. В поле Exponential threshold установлена точность 3 знака, которую можно в дальнейшем увеличить. Получим следующее:



Набираем	Получаем
5–0.000001=	4.999999
0.000001+0.000002=	3×10^{-6}

Чтобы представить результат в виде рационального числа, выбирается опция Fraction. По умолчанию задается величина точности в 12 знаков. Ее можно изменить.



Получим следующее:

Набираем	Получаем
5–0.000001=	$\frac{4999994}{999999}$
0.000001+0.000002=	$\frac{3}{1000000}$

На других закладках (Display Options, Unit Display, Tolerance) можно изменять значения по умолчанию некоторых других параметров.

Переменные в выражениях. При помощи *переменных* обозначаются скалярные величины, векторы и матрицы. Имена переменных могут быть любой длины и состоять из латинских, греческих букв, цифр от 0 до 9, символа подчеркивания, %, ∞. Переменная может быть набрана любым шрифтом, однако MathCad считает *разными* имена, набранные в разных регистрах и разными шрифтами, например, F, f, *f* – это разные переменные.

Некоторые переменные в MathCad имеют предопределенные значения: π, e, ∞, %, TOL, outn, inn, ORIGIN, PRNCOLWIDTH, PRNPRECISION, FRAME.

Переменные бывают локальными и глобальными.

Присвоение значения локальной переменной записывается так:

Набираем	Видим
Имя_переменной : выражение	Имя_переменной := выражение

Примеры локальных переменных:

$$x := 2.7 \qquad A := \begin{pmatrix} -2.13 & 4.5 \\ 0 & -1.35 \end{pmatrix} \qquad S := \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2n+1} \qquad I := \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

Присвоение значения *глобальной переменной* записывается следующим образом:

Набираем	Видим
Имя_переменной ~ выражение	Имя_переменной ≡ выражение

Знак «≡» можно также набрать из палитры Evaluation.

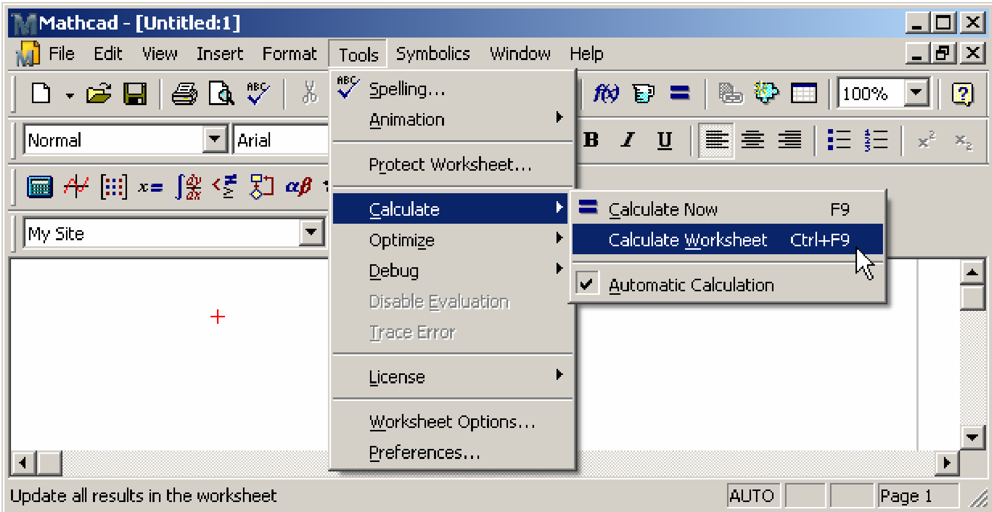
Примеры глобальных переменных:

$$D \equiv -12.7 \qquad B \equiv \begin{pmatrix} -4.73 & 8.5 \\ 0.9 & -4.35 \end{pmatrix} \qquad C \equiv \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2n^3+1} \qquad J \equiv \int_0^{\pi} \cos(x)\,dx$$

MathCad читает рабочий документ *сверху вниз* и *слева направо*. При первом просмотре начальные значения присваиваются глобальным переменным, при втором просмотре – локальным. Если переменной не присвоено значение, тогда в выражении она будет отражена другим цветом. Значения переменных можно далее переопределять.

Для создания комментариев открывается *текстовая область*: меню Insert ► Text Region (вставка текста). В появившемся прямоугольнике вводится текст или вставляется формула (вставка математической области). В текстовой области курсор ввода имеет вид красной вертикальной черты.

Управление вычислениями. В меню Tools объединены команды управления вычислительным процессом, позволяющие менять режимы перерасчета документа:



Прерывание вычислений. Для прерывания вычислений следует нажать клавишу [Esc]. Появляется окно, посредством которого нужно подтвердить прерывание процесса. Возобновить работу можно, нажав клавишу [F9] или кнопку с изображением знака равно [=].

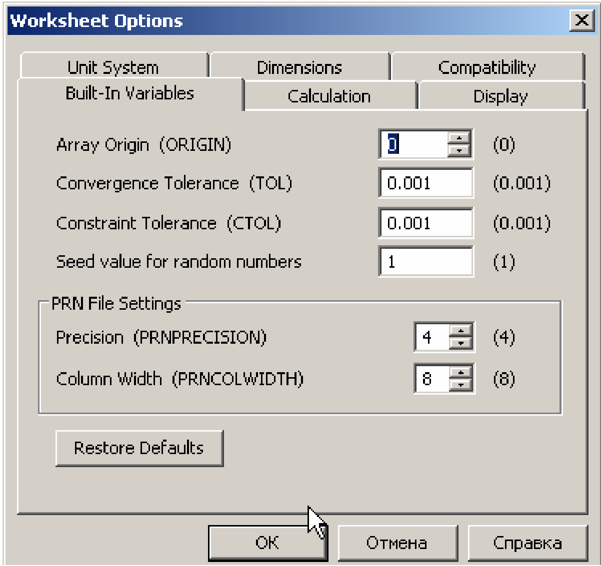
Дискретные переменные. Дискретные переменные принимают не одно, а несколько значений, но это не массивы. Дискретная переменная аккумулирует связанную с переменной совокупность значений, и если используется эта переменная, то сразу используется вся совокупность ее значений и невозможно использовать какое-то одно из них. Примеры описания дискретных переменных:

Набираем	Видим
b: m..n 1[Tab]10	b:=1..10
k:5.5;9	k:=5.5..9
a: –3.5, –3;2.5	a:=–3.5, –3..2.5
times:1s,2.5s;7s	times:=1s,2.5s..7s
q:1/4[ПРОБЕЛ],1/2[ПРОБЕЛ];7/4	$q := \frac{1}{4}, \frac{1}{2} .. \frac{7}{4}$

Векторы и матрицы. Для задания векторов и матриц можно использовать дискретные переменные, которые принимают все значения изменения индекса. Вводить индексы можно через палитру Matrix или клавишей «[». Пример получения значений вектора $x_0, x_1, \ldots, x_{10}$:

$$x_0 := 0 \qquad i := 1..10 \qquad x_i := x_{i-1} + i$$

Таким способом можно получать одномерные, двухмерные, трехмерные и так далее массивы. Заполняются они поэлементно, как правило, по некоторым формулам. По умолчанию индексы начинаются с нуля. Переустановить значение индекса можно один раз во всем документе, например, присвоив переменной ORIGIN значение 1.



При выводе на экран значений одномерных массивов получаем столбец значений, а если переменная зависит от двух индексов – прямоугольную таблицу, например:

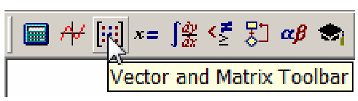
$$i := 0..2 \qquad j := 0..2 \qquad A_{i,j} := \frac{i\cdot\left(j^2+1\right)}{i^2+j^2+1} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.667 & 0.833 \\ 0.4 & 0.667 & 1.111 \end{pmatrix}$$

$$Z_i := \sin\left(\frac{\pi}{i+1}\right) \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.866 \end{pmatrix}$$

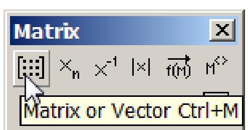
Матрицы и операции над ними. Если элементами матрицы являются константы и размеры матрицы невелики, то ее целесообразно создавать и заполнять через шаблон.

Создается числовая матрица следующим образом:

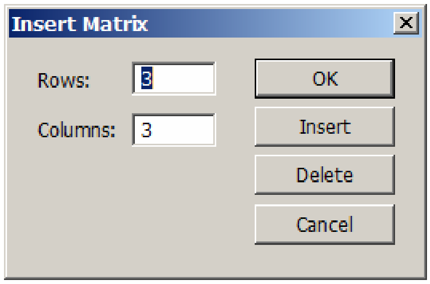
1. Подвести указатель мыши на нужное место рабочего документа и щелкнуть левой кнопкой мыши.
2. Щелкнуть на палитре математических знаков на кнопке [Vector and Matrix Toolbar]:



3. Выбрать кнопку Matrix or Vector:



4. В диалоговом окне задаем количество строк и столбцов. Щелкаем [OK].



Получаем следующий шаблон (для матрицы размерностью 3×3): $\begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$.

Передвигая курсор по матрице, заполняем соответствующие поля. В итоге получаем требуемую матрицу. Если задать количество столбцов, равное единице, то получим вектор-столбец.

Основные операции с матрицами. Пусть даны матрицы:

$$A := \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Простейшие операции с данными матрицами, которые можно задавать непосредственно или через палитру Matrix:

Операция	Название	Результат
$+$	Сумма матриц	$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$
$\cdot$	Произведение матриц	$A \cdot B = \begin{pmatrix} -16 & -9 \\ 24 & 6 \end{pmatrix}$
$\lvert\ \rvert$	Определитель матрицы	$\lvert A \rvert = -12$
M^T	Транспонирование матрицы	$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 12 \end{pmatrix}$
M^{-1}	Обратная матрица	$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4 \end{pmatrix}$
$M^{\langle\ \rangle}$	Выделение столбца матрицы	$B^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Решение систем линейных алгебраических уравнений. Решение системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ можно получить двумя способами:

$$A := \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x := A^{-1} \cdot b \qquad x = \begin{pmatrix} -0.059 \\ 1.353 \end{pmatrix}$$

или используя встроенную функцию $\mathrm{lsolve}(A,b)$:

$$A := \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x := \mathrm{lsolve}(A,b) \qquad x = \begin{pmatrix} -0.059 \\ 1.353 \end{pmatrix}$$

Вычисление сумм и произведений. При вычислении сумм или произведений нужно пользоваться палитрой Calculus и выбирать соответствующий шаблон. Если вычисляется сумма с конечным числом слагаемых, тогда используем шаблон , если по значениям ранжированной переменной – шаблон , если же суммируются значения компонент некоторого вектора – тогда шаблон . Затем заполняем поочередно все поля шаблона.

Пример. Найти значение конечной суммы $\sum\limits_{n=1}^{1000} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Р е ш е н и е.

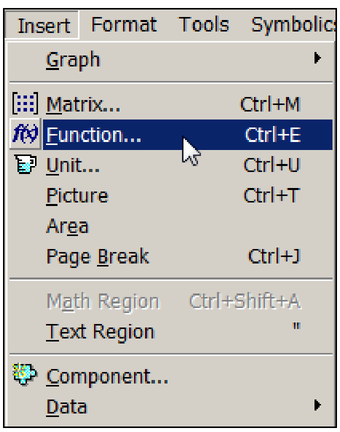
$$N := 1000 \qquad n := 1, 2 .. N$$

$$\sum_{n} \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = 1$$

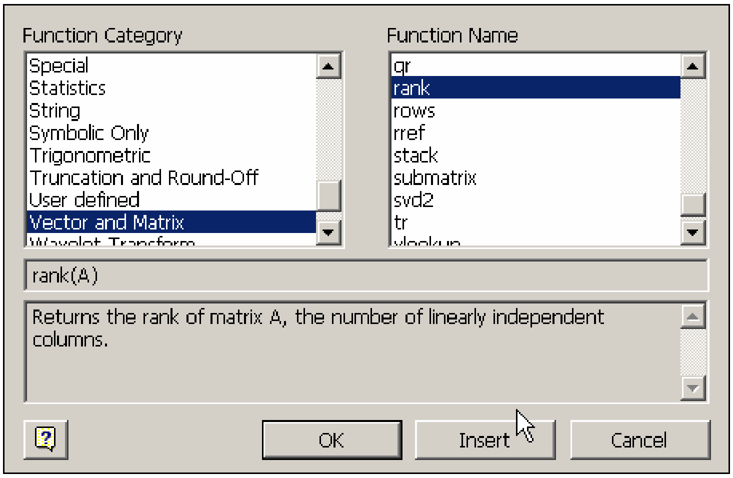
Аналогичным образом можно посчитать и произведение членов любой последовательности. Операция произведения вызывается из палитры кнопкой  и имеет следующий вид: $\prod\limits_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare$, или кнопкой  и имеет вид: $\prod\limits_{\blacksquare} \blacksquare$, где ■ – поля ввода, такие же, как в операции суммирования.

Функции. MathCad обладает множеством различных функций, но кроме них пользователь может определять и собственные. Вызывается функция посредством ее имени, после которого следуют в круглых скобках аргументы функции (через запятую, если их несколько).

Функции можно вставлять в выражение с помощью кнопки  на панели меню или пункта Function… меню Insert:



В появившемся далее окне можно просмотреть список всех встроенных функций MathCad, выбрать из них необходимую и на месте параметров вставить нужные имена:



Функции пользователя. Определение функции пользователя:

<имя_функции>(<список_аргументов>) := <выражение>

Тип аргумента не указывается, а распознается системой при вызове функции. Аргументы могут быть скалярами, матрицами, функциями. Для задания функций сложной структуры используют подпрограммы. Примеры описания и использования функций:

Набираем	Видим	Вызов функций
f(x):1+x^2[ПРОБЕЛ]+x^3	$f(x) := 1 + x^2 + x^3$	$f(5) = 151$
h(t):t+6[ПРОБЕЛ]/t^2[ПРОБЕЛ]+1	$h(t) := \frac{t+6}{t^2+1}$	$h(5) = 0.423$

$f(x) := 1 + x^2 + x^3$

$x := 0 .. 6$

$h(t) := \frac{t+6}{t^2+1}$

f(x) =	h(x) =
1	6
3	3.5
13	1.6
37	0.9
81	0.588
151	0.423
253	0.324

Производные и первообразные. При вычислении производных или первообразных нужно пользоваться палитрой Calculus, выбирать соответствующий шаблон и заполнять поля согласно поставленной задаче.

$$f(x) := 1 + x^2 + x^3 \qquad h(t) := \frac{t+6}{t^2+1} \qquad x := 0..5$$

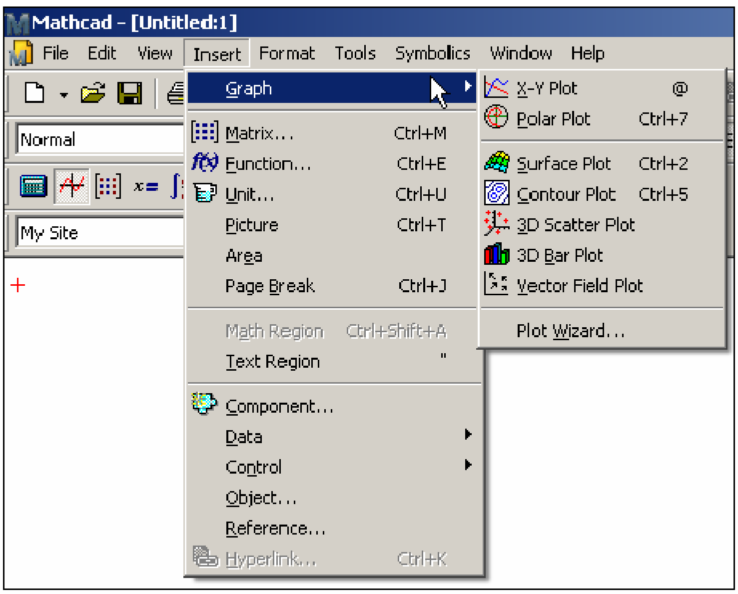
$$\frac{d}{dx}f(x) = \qquad \frac{d^2}{dx^2}h(x) = \qquad g(x) := \int f(x)\,dx \rightarrow \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x$$

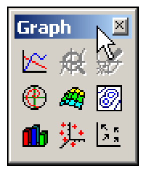
$2.556 \cdot 10^{-14}$	-12
5	2.5
16	1.088
33	0.348
56	0.136
85	0.063

$$a := \int_{-1}^{1} h(t)\,dt$$

$$a = 9.425$$

Работа с графикой. Команда Insert ► Graph или же палитра Graph дает доступ к шаблонам графиков:





Шаблонов графиков всего три: в двухмерной (рис. 32) и трехмерной (рис. 33) декартовой системах координат, а также в полярной (рис. 34) системе координат. В появившемся шаблоне есть поля, которые заполняет пользователь, а есть и заполняющиеся автоматически.

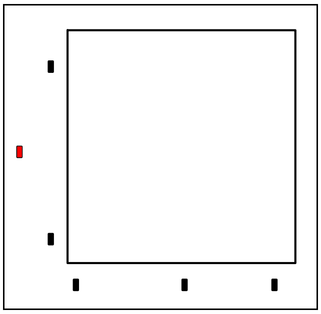


Рис. 32

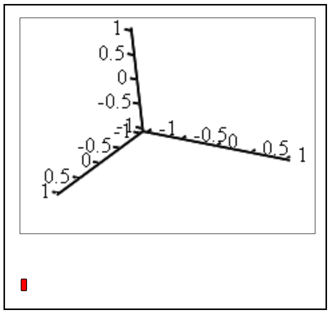


Рис. 33

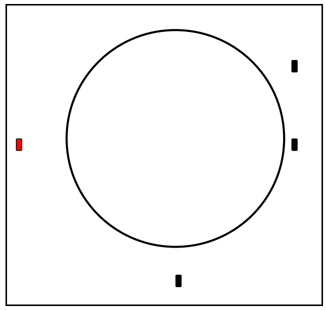
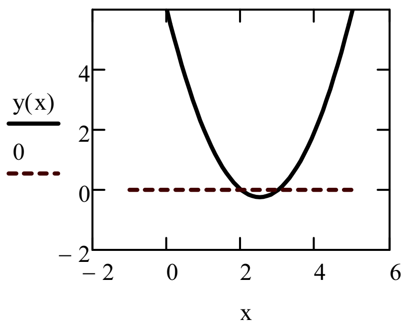


Рис. 34

Построение двумерных графиков. Построение графиков в декартовой системе координат. Для построения графиков функций одной переменной $y(x)$ в декартовой системе координат MathCad предусматривает два способа: упрощенный способ без первоначального задания значений дискретной переменной x (тогда пределы изменения аргумента x автоматически задаются от –10 до 10) и обычный способ с заданием дискретной переменной x. При построении графиков, заданных параметрически, поступаем, как и ранее. Слева указываем функцию $y(t)$, а внизу – функцию $x(t)$ от дискретной переменной t.

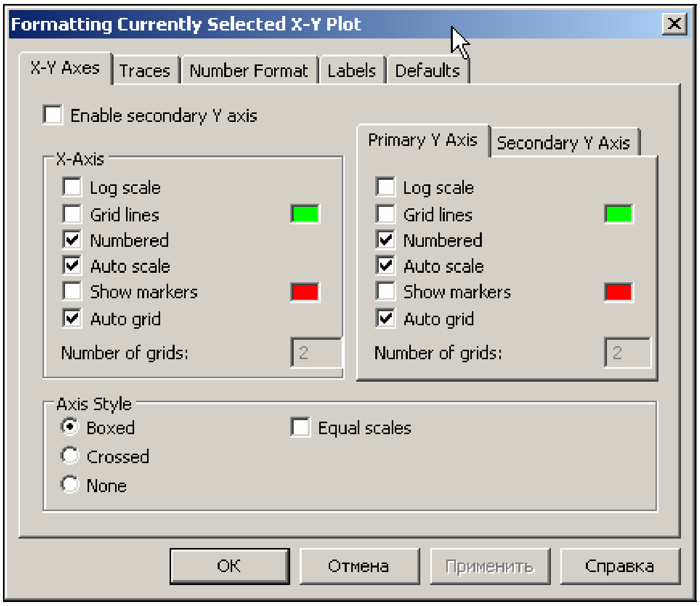
С помощью одного шаблона можно строить графики нескольких функций, перечислив их через запятую (*они отображаются разными линиями и под каждым именем функции на графике рисуется образец этой линии*):

$x := -1, -0.9 .. 5 \qquad y(x) := x^2 - 5\cdot x + 6$

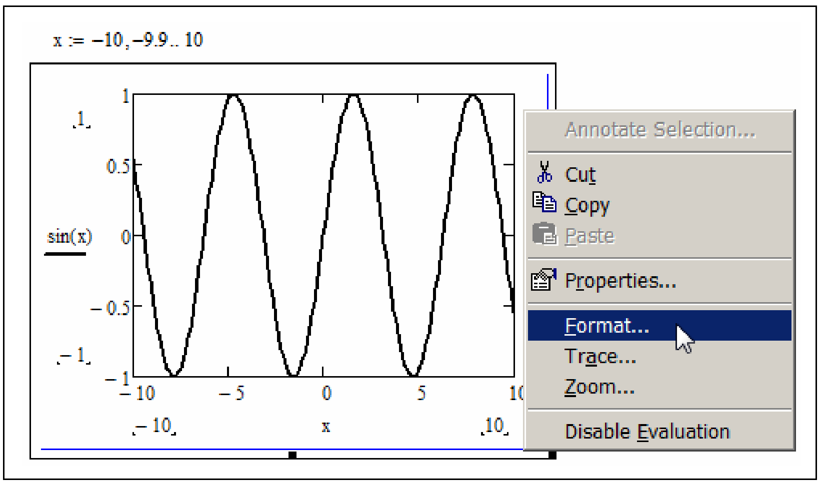


Простейшие приемы форматирования графиков. Если дважды щелкнуть мышью на графике, появится окно форматирования, которое имеет пять вкладок:

- Axes (оси X-Y) – задание параметров отображения осей.
- Traces – задание параметров отображения линий графика.
- Number Format – задание параметров отображения чисел графика.
- Labels – задание параметров отображения меток (надписей) у осей.
- Defaults – задание параметров по умолчанию.



Кроме того, ряд команд форматирования графиков имеется в команде Format контекстного меню, которое вызывается щелчком на графике правой кнопкой мыши.



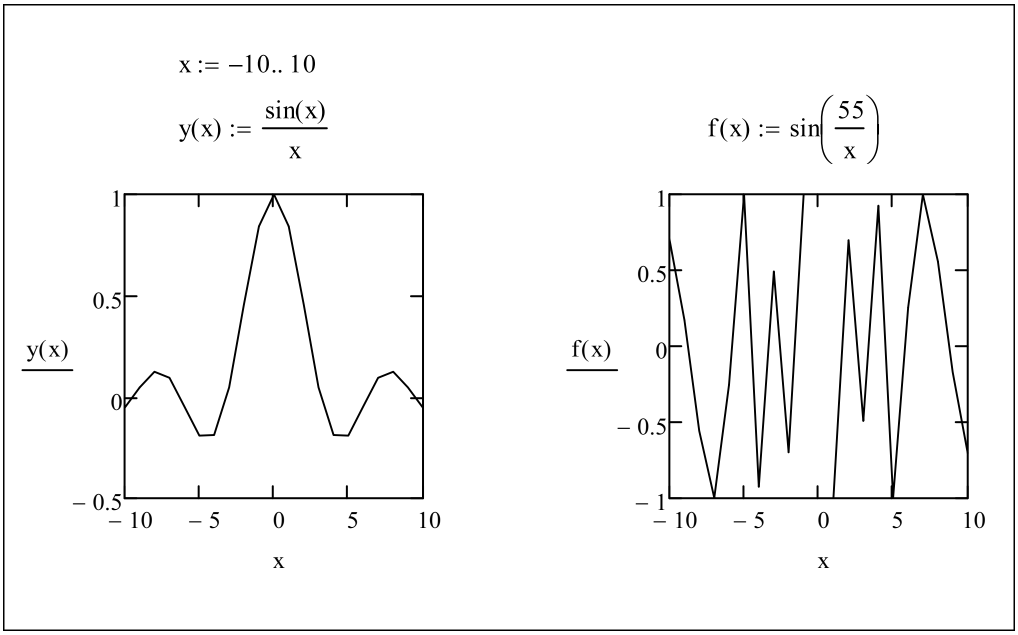
Команда Format содержит вкладки, которые позволяют изменять такие параметры, как масштаб по осям (линейный или логарифмический), задавать координатную сетку (линии сетки с нумерацией или без нее) и значения координат по осям, менять внешний вид графика, цвет и толщину линий, угол зрения и т.п. Все эти параметры достаточно очевидны.

Для того чтобы получить координаты любой точки графика, сначала нужно выделить график, щелкнув мышью на графике. MathCad заключит его в синюю рамку, а затем щелкаем правой кнопкой мыши и вызываем команду Trace. Появится окно X-Y Trace. Теперь если нажать кнопку мыши на кривой графика и двигать мышь по этой кривой, то в окошке будут отображаться координаты (x, y) точки, на которую указывает мышь.

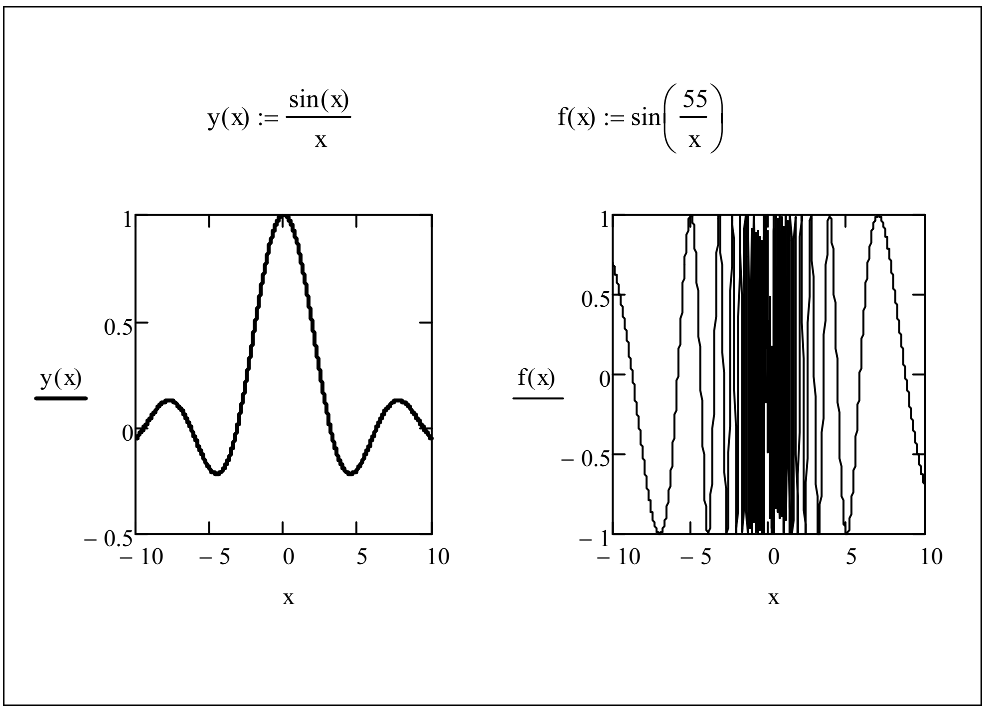
Можно увеличить любой участок графика, если выбрать в контекстном меню команду Zoom («лупа»), предварительно выделив фрагмент графика функции. Откроется диалоговое окно, в котором отображаются минимальные и максимальные значения X и Y, определяющие область просмотра.

Кнопки  (Zoom),  (Unzoom) и  (Full View) позволяют увеличить/уменьшить выделенную часть графика или снять выделение и вернуться к просмотру всего графика. При построении графиков нужно аккуратно относиться к заданию ранжированной переменной, так как в некоторых случаях это может привести к глубокому искажению формы графиков. Рассмотрим следующие примеры. Зададим вначале большой шаг изменения дискретной переменной x при построении функций $y(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$, $f(x)=\sin\left(\dfrac{55}{x}\right)$ и построим их графики, а затем изменение дискретной переменной x оставим по умолчанию и получим следующее.

П е р в ы й в а р и а н т:

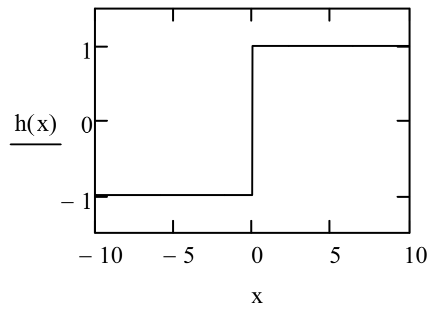


В т о р о й в а р и а н т:



Надо всегда иметь в виду, что, как бы мы ни задавали шаг изменения дискретной переменной *x*, ступенчатые функции на графике отражаются неверно (так как на месте ступеньки рисуется сплошная линия). Это хорошо видно на следующем примере:

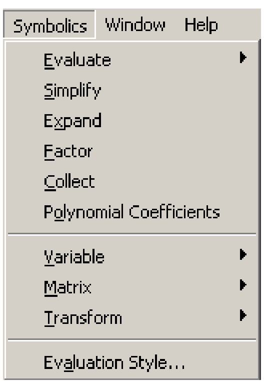
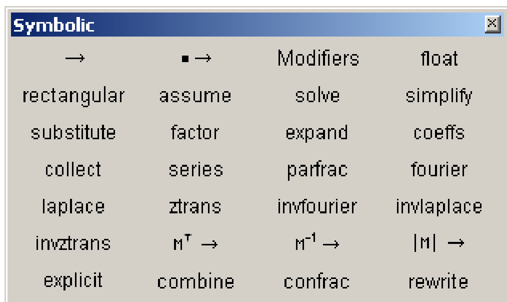
$$h(x) := \frac{|x|}{x} \qquad x := -10, -9.9999 .. 10$$



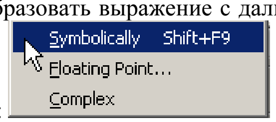
Аналитические (символьные) вычисления. Символьными называют такие вычисления, результаты которых представляются в аналитическом виде, т.е. в виде формул (в частном случае – числом). Вычисления в символьном виде отличаются большей общностью и позволяют судить о некоторых закономерностях решаемых задач. Системы компьютерной математики, выполняющие символьные вычисления, принято называть *системами компьютерной алгебры*. Такие системы снабжены специальным процессором для выполнения аналитических (символьных) преобразований. Его основой является ядро, хранящее всю совокупность формул и формульных преобразований, с помощью которых производятся аналитические вычисления. Команды, относящиеся к работе символьного процессора, содержатся в меню Symbolics.

Символьные вычисления можно выполнять, используя разные возможности:

- в командном режиме – через различные команды меню Symbolics;
- при применении специальных символьных операторов палитры Symbolic. Доступ к символьным операторам палитры появляется, если нажать кнопку :

<table>
<tr><th>Командный режим</th><th>Палитра символьных операторов</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Символьные вычисления в командном режиме. Символьные операции с выделенными выражениями. С выделенными выражениями допустимы следующие операции:

Операция меню Symbolics	Действия
`Evaluate` (вычислить)	Преобразовать выражение с дальнейшим выбором вида преобразования из подменю: 
`Simplify` (упростить)	Упростить выделенное выражение, выполняя такие операции, как приведение подобных слагаемых, использование основных тригонометрических тождеств, приведение дробей к общему знаменателю и т. д.
`Expand` (разложить по степеням)	Получить выражение в бесскобочном варианте
`Factor` (разложить на множители)	Разложить число или выражение на множители
`Collect` (разложить по подвыражениям)	Результатом будет выражение – многочлен относительно выбранного выражения
`Polynomial Coefficients` (полиномиальные коэффициенты)	Найти по заданной переменной коэффициенты многочлена, приближающего выражение, в котором эта переменная использована

Символьные операции с выделенными переменными. С выделенными переменными допустимы следующие операции:

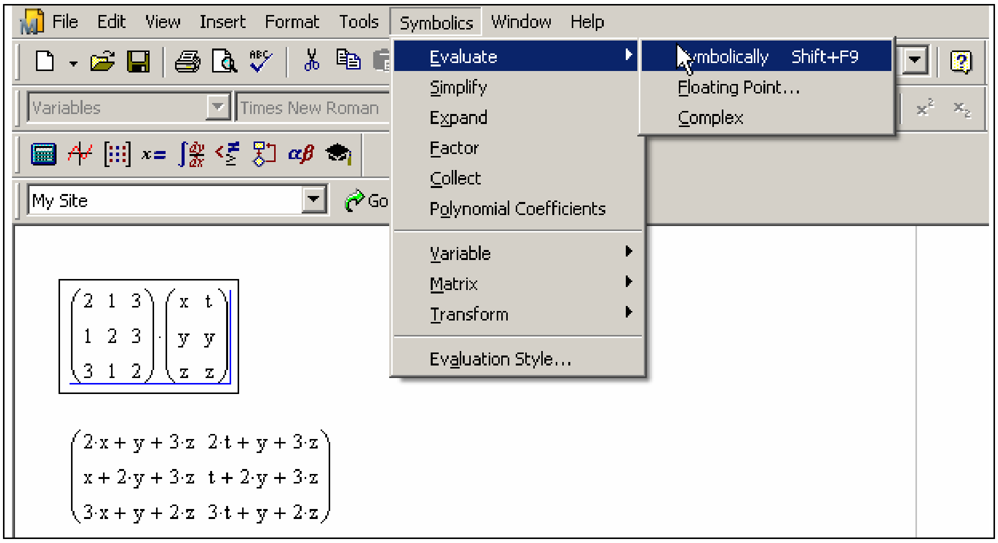
Операция меню Symbolics ►Variable	Действия
`Solve` (решить)	Решить уравнение или неравенство относительно выделенной переменной
`Substitute` (подстановка)	Заменить указанную переменную во всем выражении содержимым буфера обмена
`Differentiate` (дифференцировать)	Дифференцировать все выражение по выделенной переменной (остальные переменные рассматриваются как константы)
`Integrate` (интегрировать)	Интегрировать все выражение по выделенной переменной
`Expand to Series` (разложить в ряд)	Найти несколько членов разложения выражения в ряд Тейлора относительно выделенной переменной
`Convert to Partial Fraction` (разложить на элементарные дроби)	Разложить на элементарные дроби выражение, которое рассматривается как рациональная дробь относительно выделенной переменной

Символьные операции с выделенными матрицами. С выделенными матрицами допустимы следующие операции:

Операция меню Symbolics ►Matrix	Действия
`Transpose` (транспонировать)	Получить транспонированную матрицу
`Invert` (обратить)	Получить обратную матрицу
`Determinant` (определитель)	Вычислить определитель матрицы

Если элементы матрицы – числа, то соответствующие операции выполняются в числовой форме.

Выполнение символьных вычислений в командном режиме. Для проведения символьных операций нужно прежде всего выделить объект, над которым эти операции выполняются. Если объект не выделен, соответствующие команды меню Symbolics недоступны. Объектом для выполнения операции может быть самостоятельное математическое выражение, часть математического выражения или заданной пользователем функции, например переменная, результат предшествующей операции и т.д. Использование многих операций достаточно очевидно. Ниже представлено описание символьной операции над матрицами. Надо заметить, что для матриц большого размера выполнить такие операции не всегда возможно.



Символьные вычисления в явном режиме. Символьные вычисления в явном виде предпочтительнее, так как после обновления рабочего листа такие операции пересчитываются. Вычисления в символьном виде возможны с использованием клавиш [Shift] [F9] или одиночной специальной операции [→] палитры Symbolic как в таком одиночном виде, так и в сочетании с предварительно заданным перед операцией [→] действием. После операции [→] надо нажать клавишу [Ввод], чтобы увидеть результат.

Символьные операции с выражениями. С выделенными выражениями допустимы следующие операции:

Операция палитры Symbolic	Действия
→	Преобразовать выражение. Эквивалентно Evaluate ► Symbolically. Горячие клавиши [Ctrl] [.]
• →	Выполнить указанное перед операцией «→» действие •.
float, n →	Вычислить, преобразовывая результат в десятичную дробь с *n* знаками после запятой
explicit →	Вычислить (возможно, с подстановкой значений, входящих в выражение переменных), не преобразовывая результат в десятичную дробь
simplify →	Упростить выделенное выражение, выполняя такие операции, как приведение подобных слагаемых, использование основных тригонометрических тождеств, приведение дробей к общему знаменателю и т. д.
expand →	Получить выражение в бесскобочном варианте
factor →	Разложить число или выражение на множители
collect	Результатом будет многочлен относительно выбранного выражения

Окончание табл.

Операция палитры Symbolic	Действия
coeffs	Найти по заданной переменной коэффициенты многочлена, приближающего выражение, в котором эта переменная использована
confrac	Разложить выражение в цепную дробь
combine	Упростить выражение, используя стандартные формулы
rewrite	Преобразовать выражение, используя элементарные функции

Символьные операции с переменными. С выделенными выражениями допустимы следующие операции:

Операция палитры Symbolic	Действия
solve, • →	Решить уравнение или неравенство относительно указанной вместо символа «•» переменной
substitute	Заменить указанную переменную во всем выражении содержимым буфера обмена
parfrac	Разложить на элементарные дроби выражение, которое рассматривается как рациональная дробь относительно выделенной переменной
assume, x=type	Присвоить переменной тип

Многие из перечисленных выше операций применяются с определенными уточнениями действий – директивами. Например, при приведении к некоторому новому типу переменной необходимо указать явно этот тип. Некоторые из этих ключевых слов собраны в операции Modifiers палитры Symbolic. Это `integer`, `real`, `RealRange`, `complex`, `fully`. Другие перечислены ниже:

Модификаторы команд	Действия	Где используются
ALL	Применить для всех переменных в выражении	`assume`, `explicit`
atan	Упростить выражение, используя стандартные формулы для функции арктангенса	`combine`
complex	Указание на необходимость выполнения операций в комплексной форме	`assume`, `factor`, `parfrac`
degree	Возвратить второй столбец, в котором содержатся степени одночленов	`coeffs`
domain	Задает область определения (домен) переменной	`assume`, `factor`, `parfrac`
exp	Упростить или преобразовать выражение, используя стандартные формулы для экспоненциальной функции	`combine`, `rewrite`
fully	Возвратить детальное решение уравнения	в любом операторе
integer	Для V=integer означает целочисленное значение переменной V	`assume`
ln	Упростить или преобразовать выражение, используя стандартные формулы для логарифмической функции	`combine`, `rewrite`

Модификаторы команд	Действия	Где используются
log	Упростить или преобразовать выражение, используя стандартные формулы для логарифмической функции	`combine`, `rewrite`
raw	Возвратить результат без проведения упрощений	`assume`, `factor`, `parfrac`
real	Для V=real означает вещественное значение переменной V	`assume`, `factor`
RealRange	Для V=RealRange(a,b) означает принадлежность вещественной переменной V к интервалу (a,b)	`assume`
sincos	Упростить или преобразовать выражение, используя стандартные формулы для синуса и косинуса	`combine`, `rewrite`
sinhcosh	Упростить или преобразовать выражение, используя стандартные формулы для гиперболического синуса и косинуса	`combine`, `rewrite`
using	Заменить переменную-параметр в полученном решении уравнения	в любом операторе

Символьные операции с выделенными матрицами. С выделенными матрицами допустимы следующие операции:

Операция палитры Symbolic	Действия
$M^T \to$ (транспонировать)	Получить транспонированную матрицу
$M^{-1} \to$ (обратить)	Получить обратную матрицу
$\lvert M\rvert \to$ (определитель)	Вычислить определитель матрицы

Выполнение символьных вычислений в явном виде. Большинство рассмотренных выше операций, выполненных в командном режиме, можно использовать для вычисления в явном виде. Рассмотрим далее простейшие примеры символьных вычислений в явном виде, не требующих комментариев:

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 + 2\cdot(\sin(0) + x) \to \cos(x)^2 + \sin(x)^2 + 2\cdot x$$

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 + 2\cdot(\sin(0) + x) \text{ combine, sincos } \to 2\cdot x + 1$$

$$a^n\cdot a^m \to a^m\cdot a^n$$

$$a^n\cdot a^m \text{ combine } \to a^{m+n}$$

$$e^b\cdot e^{2t} \to e^b\cdot e^{2\cdot t}$$

$$e^b\cdot e^{2t} \text{ combine } \to e^b\cdot e^{2\cdot t}$$

$$e^b\cdot e^{2t} \text{ combine, exp } \to e^{b+2\cdot t}$$

$$\ln(x) + \ln(2) + 3\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right) \text{ combine, ln } \to \ln\left(\frac{27\cdot x}{4}\right)$$

$$2\log(5,x) + 5\cdot\log(5,x) \text{ combine, log } \to \frac{\log(78125)}{\log(x)}$$

Применение операции rewrite (преобразовать):

$$\sin(x)\ \text{rewrite}, \exp\ \rightarrow -\frac{e^{x\cdot i}\cdot i}{2}+\frac{1}{2}\cdot e^{x\cdot(-i)}\cdot i$$

$$-\frac{e^{x\cdot i}\cdot i}{2}+\frac{1}{2}\cdot e^{x\cdot(-i)}\cdot i\ \text{rewrite}, \text{sincos}\ \rightarrow \sin(x)$$

Упрощение выражений:

$$(x-1)^2+2x^2+4x-1\ \text{simplify}\ \rightarrow x\cdot(3\cdot x+2)$$

Если нужно знать числовое значение функции $F(x):=\sum_{k=0}^{5}\left[\frac{5!}{k!(5-k)!}x^k 2^{5-k}\right]$ при некотором конкретном x, тогда используется символ [=], или [→]. Затем нажимается клавиша [Ввод] и получается результат:

$$n := 5$$

$$F(x) := \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n!}{k!\,(n-k)!}x^k 2^{n-k}\right]$$

$$F(2) = 1.024\times 10^3 \qquad F(-5) = -243$$

$$F(x) \rightarrow x^5+10\cdot x^4+40\cdot x^3+80\cdot x^2+80\cdot x+32$$

При разложении на множители результат над полем действительных чисел получается не всегда:

$$2x^3-2x-3x^2+3\ \text{factor}\ \rightarrow (2\cdot x-3)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$$

$$x^4-4x^3-1\ \text{factor}\ \rightarrow x^4-4\cdot x^3-1$$

Поэтому разложение дробей в сумму элементарных дробей и разложение на множители в более полном варианте продемонстрировано ниже:

$$\frac{1}{x^2+2}\ \text{parfrac}, x, \text{domain} = \text{complex}\ \rightarrow \frac{\sqrt{2}\cdot i}{4\cdot\left(x+\sqrt{2}\cdot i\right)}-\left[\frac{\sqrt{2}}{4\cdot\left(x-\sqrt{2}\cdot i\right)}\right]\cdot i$$

$$x^4-4\cdot x^3-1\ \text{factor}, \text{domain} = \text{complex}, \text{float}, 3\ \rightarrow$$

$$(x+0.601)\cdot[x-(0.293-0.573i)]\cdot[x-(0.293+0.573i)]\cdot(x-4.02)$$

Коэффициентами исходной дроби должны быть либо рациональные дроби, либо целые числа, иначе символьный процессор не сможет с ней работать, а подключится числовой процессор:

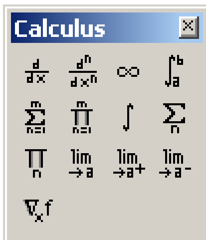
$$\frac{1}{x^2+9.} \text{ parfrac}, x, \text{domain} = \text{complex} \rightarrow \frac{i}{6\cdot(x+3i)} - \left[\frac{1}{6\cdot(x-3i)}\right]\cdot i$$

$$\frac{1}{x^2+8.1} \text{ parfrac}, x, \text{domain} = \text{complex} \rightarrow \frac{1.0}{x^2+8.1}$$

$$x^3 - 27 \left| \begin{array}{l} \text{factor}, \text{domain} = \text{real} \\ \text{float}, 2 \end{array} \right. \rightarrow (x-3.0)\cdot\left(3.0\cdot x + x^2 + 9.0\right)$$

$$x^3 - 27 \left| \begin{array}{l} \text{factor}, \text{domain} = \text{complex} \\ \text{float}, 2 \end{array} \right. \rightarrow (x-3.0)\cdot(x+1.5-2.6i)\cdot(x+1.5+2.6i)$$

Для вычисления предела нужно получить шаблон операции из палитры Calculus, заполнить соответствующие поля и вызвать команду символьного вычисления предела либо через меню символьных операций, либо клавишами [Shift] [F9]:



$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} \rightarrow \text{undefined}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x+1}{x^2 + 2x + 1} \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x+1}{x^2 + 2x + 1} \rightarrow -\infty$$

Рассмотрим разные приемы решения уравнений и систем с помощью символьной математики. Решение некоторых уравнений можно проводить, используя команду solve:

$$x^2 - 2\cdot x + 3 \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2}\cdot i \\ 1 + \sqrt{2}\cdot i \end{pmatrix}$$

$$x^2 - 2\cdot x + 3.0 \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 - 1.4142135623730950488i \\ 1.0 + 1.4142135623730950488i \end{pmatrix}$$

При решении второго уравнения подключился числовой процессор, так как коэффициенты уравнения – вещественные числа. Некоторые уравнения MathCad решает символьно в радикалах, а большинство в виде десятичных чисел:

$$x^5 - x^4 - 2\cdot x^3 + 2\cdot x^2 - 2\cdot x - 4 \text{ solve } \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -\dfrac{(-2)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)}{2} \\ \dfrac{(-2)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(-1+\sqrt{3}\cdot i\right)}{2} \\ (-2)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

$$x^5 - x^2 + 1 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 0.8692775018425938612 - 0.3882694065997403553 6i \\ 0.8692775018425938612 + 0.38826940659974035536i \\ -0.4649122016028978543 3 - 1.0714738402702694092i \\ -0.4649122016028978543 3 + 1.0714738402702694092i \\ -0.8087306004793920137 4 \end{pmatrix}$$

$$x^5 - x^2 + 1 \left|\begin{matrix}\text{solve} \\ \text{float}, 9\end{matrix}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 0.869277502 - 0.388269406i \\ 0.869277502 + 0.388269406i \\ -0.464912202 - 1.07147384i \\ -0.464912202 + 1.07147384i \\ -0.8087306 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим, как меняется результат решения одного и того же уравнения в зависимости от уточнений на корни, на следующих примерах:

$$\left(x^3-1\right)\cdot\left(x^2-2\right) \text{ solve } \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot i \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\left(x^3-1\right)\cdot\left(x^2-2\right) \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{assume}, x = \text{real} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(x^3-1\right)\cdot\left(x^2-2\right) \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{assume}, x = \text{RealRange}(0,2) \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(x^3-1\right)\cdot\left(x^2-2\right) \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{assume}, x = \text{integer} \end{array} \right. \rightarrow 1$$

Решение уравнения с параметром можно выполнять и так:

$$z\,x - z = 0 \text{ solve}, x \rightarrow 1$$

$$z\,x - z = 0 \text{ solve}, x, \text{fully} \rightarrow \left| \begin{array}{l} 1 \ \text{ if } z \neq 0 \\ \_c1 \ \text{ if } \_c1 \in \mathbb{C} \wedge z = 0 \end{array} \right.$$

$$\sin(x) = \cos(x) \text{ solve} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(x) = \cos(x) \text{ solve, fully} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + \pi\cdot\_n \ \text{ if } \_n \in \mathbb{Z} \\ \text{undefined otherwise} \end{array} \right.$$

$$\sin(x) = \cos(x) \text{ solve, fully, using}, \_n = m, \text{fully} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + \pi\cdot m \ \text{ if } m \in \mathbb{Z} \\ \text{undefined otherwise} \end{array} \right.$$

Результат символьного решения можно оформить функцией:

$$f(a) := (x+2)\cdot(a-1) - 1 = a^2 \text{ solve}, x, \text{fully} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{a^2 - 2\cdot a + 3}{a-1} \ \text{ if } a \neq 1 \\ \text{undefined if } a = 1 \end{array} \right.$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) \rightarrow -\frac{33}{4} \qquad f(1) \rightarrow \text{undefined} \qquad f(1) = \text{NaN}$$

Здесь при попытке вычислить символьно значение функции $f(1)$ мы получили сообщение «неопределенно», а в случае численного вычисления $f(1)$ MathCad ответил «NaN», что означает «Not a Number» (не число). Отметим, что если оформить функцию следующим образом, то мы вообще получим ошибку:

$$g(a) := (x+2)\cdot(a-1) - 1 = a^2 \ \text{solve}, x \ \rightarrow \frac{a^2 - 2\cdot a + 3}{a-1}$$

$$g\left(\frac{3}{4}\right) \rightarrow -\frac{33}{4} \qquad \boxed{g(1) \rightarrow} \qquad g(1) = $$

Divide by zero.

Систему уравнений можно задать как вектор (знак равенства задается жирным знаком как **[Ctrl] [=]**) и решить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0.3\cdot w + 0.2\cdot x + 6.6\cdot y = 1 \\ 4.5\cdot w - 1.8\cdot x - 0.3\cdot y = 1 \\ -7\cdot w + 9.7\cdot x + 10.9\cdot y = 2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{array}{l} \text{solve}, x, y, w \\ \text{float}, 2 \end{array} \rightarrow (0.33 \quad 0.13 \quad 0.36)$$

При символьном решении систем уравнений можно воспользоваться блоком Given – Find, например:

Given

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Используйте [Ctrl][=],
задавая нужный знак равенства

$$x - y = 2$$

$$M(r) := \text{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{r^2-2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{r^2-2}}{2} + 1 \\ -\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{r^2-2}}{2} - 1 & \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{r^2-2}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

Неравенства можно решать, используя команду solve:

$$x^2 - 2\cdot x - 3 > 0 \ \text{solve} \ \rightarrow x < -1 \vee 3 < x$$

$$x^2 - 2\cdot x - 3.0 < 0 \ \text{solve} \ \rightarrow -1 < x < 3$$

$$x^3 - 22x < 24 - 3x^2 \ \text{solve} \ \rightarrow x < -6 \vee -1 < x < 4$$

$$x^2\cdot 3^x \le 3^{x-1} \ \text{solve} \ \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(x-2)\cdot(x+4)\cdot(x-3)^2\cdot(x+1)^5 > 0 \ \text{solve} \ \rightarrow 3 < x \vee 2 < x < 3 \vee -4 < x < -1$$

Традиционные средства программирования. Несмотря на наличие в MathCad большого числа встроенных функций и реализованных алгоритмов, часто приходится встречаться с задачами, для решения которых нельзя применить встроенные методы. В таких случаях следует воспользоваться возможностями MathCad по программированию, так как данная система поддерживает все важнейшие средства программирования: следования, ветвления, повторения, процедурные блоки, средства трассировки и обработки ошибок. Этих возможностей вполне хватает для реализации сложных алгоритмов.

В MathCad имеется возможность задания завершенных программных модулей (программ), имеющих вид набора инструкций, выделенных в тексте жирной вертикальной чертой. Модули органично входят в состав документов и дают возможность пользоваться всеми средствами не только математически ориентированного входного языка MathCad, но и классического программирования.

Много интересных и поучительных примеров применения программных модулей можно найти в QuickSheet («быстрые шпаргалки») центра ресурсов системы.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Альсевич, Л.А. Практикум по дифференциальным уравнениям / Л.А. Альсевич, Л.П. Черенкова. Минск, 1990.

Альсевич, Л.А. Практикум по дифференциальным уравнениям / Л.А. Альсевич, С.А. Мазаник, Л.П. Черенкова. Минск, 2000.

Богданов, Ю.С. Курс дифференциальных уравнений / Ю.С. Богданов, С.А. Мазаник, Ю.Б. Сыроид. Минск, 1996.

Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. М., 1976.

Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н.М. Матвеев. Минск, 1987.

Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. М., 1982.

Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. М., 1980.

Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. М., 1979.

Дополнительная

Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В. Амелькин. М., 1987.

Амелькин, В.В. Математические модели и дифференциальные уравнения / В.В. Амелькин, А.П. Садовский. Минск, 1982.

Богданов, Ю.С. Дифференциальные уравнения / Ю.С. Богданов, Ю.Б. Сыроид. Минск, 1983.

Еругин, Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин. Минск, 1979.

Кротов, В.Ф. Основы теории оптимального управления / В.Ф. Кротов [и др.]. М., 1990.

Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. М., 1967.

Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. М., 1964.

Пономарев, К.К. Составление дифференциальных уравнений / К.К. Пономарев. Минск, 1973.

Понтрягин, Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л.С. Понтрягин. М., 1988.

Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. М., 1958.

Эрроусмит, Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс. М., 1986.

Дьяконов, В. MathCAD 2000. Учебный курс / В. Дьяконов. СПб., 2000.

Плис, А.И. MathCAD: математический практикум для экономистов и инженеров / А.И. Плис, Н.А. Сливина. М., 1999.

Шушкевич, Г.Ч. Компьютерные технологии в математике. Система MathCad 14. Часть 1 / Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. Минск, 2010.

Расолько, Г.А. Использование информационных технологий в курсе вузовской математики: в 3-х ч. Ч. 1. Решение задач в пакете MathCad. Учеб.-метод. пособие / Г. А. Расолько [и др.]. Минск, 2010.

Расолько, Г.А. Использование информационных технологий в курсе вузовской математики: в 3-х ч. Ч 2. Решение задач в пакетах MathCad и Mathematica. Учеб.-метод. пособие / Г. А. Расолько [и др.]. Минск, 2011.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Альсевич Лариса Алексеевна
Мазаник Сергей Алексеевич
Расолько Галина Алексеевна
Черенкова Людмила Павловна

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
ПРАКТИКУМ**

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Савицкая*
Художественный редактор *Е.Э. Агунович*
Технический редактор *М.В. Бригер*
Корректор *Е.В. Савицкая*
Компьютерная верстка *М.В. Бригер*

Подписано в печать 27.06.2012. Формат 84×108/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Усл. печ. л. 40,32.
Уч.-изд. л. 25,8. Тираж 900 экз. Заказ1499.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
ЛИ № 02330/0494062 от 03.02.2009. Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.
E-mail: market@vshph.com   Http://vshph.com

Филиал № 1 открытого акционерного общества «Красная звезда».
ЛП № 02330/0494160 от 03.04.2009. Ул. Советская, 80, 225409, Барановичи.

Дифференциальные уравнения. Практикум : учеб.
Д50 пособие / Л. А. Альсевич [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2012. – 382 с.: ил.
ISBN 978-985-06-2111-5

Даны краткие теоретические сведения и решения типовых задач. Задачи повышенной трудности сопровождаются указаниями. Представлено большое количество задач прикладного характера, снабженных необходимыми сведениями из соответствующих областей физики, механики, биологии, экономики. Приведены задания для контрольных и лабораторных работ.

Для студентов математических, физических и экономических специальностей учреждений высшего образования. Может быть использовано аспирантами, магистрантами и студентами всех естественнонаучных специальностей.

УДК 517.9(075.9)
ББК 22.161.6я73