Белорусский государственный университет

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра высшей математики

М.М. Васьковский

ЛЕКЦИИ

по курсу
«Обыкновенные дифференциальные уравнения»

для специальности
1-31 03 07-01 прикладная информатика
(программное обеспечение компьютерных систем)

Минск, 2011

ЛЕКЦИЯ 1
§1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Определение. Уравнение относится к *дифференциальным*, если оно содержит неизвестную функцию и её производные или дифференциалы.

Примеры: 1) $x'(t)=t$; 2) $tdt+x(t)dx(t)=0$; 3) $x'''(t)-x'(t)=\sin t$; 4) $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$.

Определение. *Порядком* дифференциального уравнения (ДУ) называется порядок старшей производной (дифференциала), входящих в это уравнение.

Пример: 1) $x'''(t)+x''(t)-2x(t)=\cos t$ - ДУ 3 порядка; 2) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$ - ДУ 2 порядка.

Определение. ДУ называется *обыкновенным (ОДУ)*, если неизвестная функция зависит от одного аргумента. Если неизвестная функция зависит от нескольких аргументов, то такое ДУ называется ДУ *с частными производными (ДУЧП)*.

Пример: 1) $x'(t)=t$ - ОДУ; 2) $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$ - ДУЧП.

Общий вид ОДУ:
$F(t,x(t),x'(t),...,x^{(n)}(t))=0$ (1.1), где F - заданная функция.
Уравнение (1.1) может быть записано, как
$G(t,dt,dx(t),d^2x(t),...,d^nx(t))=0$ (1.1').

Пример: уравнение $t+x'(t)+x''(t)=0$ можно записать следующим образом: $t(dt)^2+dx(t)\cdot dt+d^2x(t)=0$.

Определение. *Решением* ОДУ (1.1) порядка n называется функция $x: I\to R$, заданная на связном множестве I, дифференцируемая на множестве I до порядка n включительно и обращающая уравнение (1.1) в тождество на множестве I.

Отметим, что связными множествами на числовой прямой являются промежутки $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ (в том числе, и бесконечные) и только они.

Пример: $x'(t) = -x^2(t)$. 1) функция $x_1(t) = 1/t$, $t \neq 0$, не является решением ОДУ, так как она задана на несвязном множестве; 2) каждая из функций $x_2(t) = 1/t$, $t > 0$, $x_3(t) = 1/t$, $t < 0$, $x_4(t) = 1/t$, $t \in [1,2]$, является решением ОДУ. При этом решение $x_4(t)$ является сужением решения $x_2(t)$.

Определение. Решение $x_1(t)$, $t \in I$, ОДУ (1.1) называется *сужением* решения $x_2(t)$, $t \in J$, ОДУ (1.1), если $I \subseteq J$ и $x_1(t) = x_2(t)$ для любого $t \in I$. Если решение $x(t)$ ОДУ (1.1) не является сужением ни одного решения этого уравнения, отличного от решения $x(t)$, то решение $x(t)$ называется *непродолжимым*.

Определение. Совокупность решений ОДУ (1.1), заданную формулой, содержащей n существенных произвольных постоянных, называют *общим решением (ОР)* уравнения (1.1). Решение уравнения (1.1), полученное из ОР при конкретных значениях произвольных постоянных, называют *частным решением (ЧР)* уравнения (1.1). Совокупность всех решений уравнения (1.1) называют *полным решением (ПР)*.

Пример: $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ - ОР уравнения $x''(t) + x(t) = 0$.

Пример: $x'(t) = 3x^{2/3}(t)$; $x(t) = (t + C)^3$ - ОР; $x(t) \equiv 0$ - не является ЧР.

Пример: $x'(t) = e^t$; $x(t) = e^t + C$ - ПР.

Определение. Если дополнительные условия на решение относятся к одному и тому же значению аргумента, то такие дополнительные условия называются *начальными условиями*. Если дополнительные условия на решение относятся к различным значениям аргумента – *граничными условиями*, те и другие вместе называются *краевыми условиями*.

Определение. *Начальной задачей* будем называть ДУ вместе с начальными условиями на неизвестную функцию. *Граничной задачей* будем называть ДУ вместе с граничными условиями на неизвестную функцию. Аналогично для *краевой задачи*.

Определение. Если начальные условия для неизвестной функции ОДУ (1.1) состоят в задании значения функции и её первых $(n-1)$ производных в некоторой точке, то такие начальные условия называются *условиями Коши*, и соответствующая начальная задача – *задачей Коши*:

$$\begin{cases} F(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0, \\ x(s) = \xi_0, \\ x'(s) = \xi_1, \\ ... \\ x^{(n-1)}(s) = \xi_{n-1.} \end{cases}$$

Основной вопрос теории дифференциальных уравнений заключается в том, когда задача Коши имеет решение, и когда оно единственно.

Пример: $x'(t) = 3x^{2/3}(t)$, $x(0) = 0$. Данная задача Коши имеет бесконечно много решений.

Определение. График решения называется *интегральной кривой*.

Приведем некоторые математические модели реальных процессов, приводящие к изучению дифференциальных уравнений.

Модель 1. Материальная точка движется по прямой с ускорением a. Найти закон движения.

Введём на прямой начала отсчёта O. Обозначим через $t_0 = 0$ время начала движения, через x_0 начальное положение точки, через v_0 начальную скорость, через $x(t)$ положение точки в момент времени t ($t \geq t_0$). Как известно из курса физики, $x''(t) = a$, скорость в момент времени t равна $x'(t)$. Получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} x''(t) = a, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = v_0. \end{cases}$$

Полное решение уравнения $x''(t) = a$ есть $x(t) = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2$. Решение задачи Коши: $x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$.

Модель 2. Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна имеющемуся количеству вещества. Определить количество вещества в момент времени t, если в начальный момент $t_0 = 0$ количество вещества составляло x_0, а период полураспада равен T.

Обозначим через $x(t)$ количество вещества в момент времени t. Обозначим через β отношение скорости распада $x'(t)$ к количеству вещества $x(t)$, то есть $x'(t)=\beta x(t)$. Отсюда получаем, что $x(t)=ce^{\beta t}$. Подставляя начальное значение, получим, что $c=x_0$, то есть $x(t)=x_0e^{\beta t}$. Поскольку $\frac{x_0}{2}=x_0e^{\beta T}$, то $\beta=-\frac{\ln 2}{T}$. Окончательно получаем, что $x(t)=x_0\cdot 2^{-t/T}$.

Оператор дифференцирования:

$D=\frac{d}{dt}$, $Dx=\frac{dx}{dt}=x'=\dot{x}$.

Свойства оператора дифференцирования:

1) D - линейный оператор, то есть $D(\alpha x+\beta y)=\alpha Dx+\beta Dy$;

2) $D^0x\equiv x$;

3) $D^nD^m=D^{n+m}=D^mD^n$.

§2. Простейшие ДУ 1-го порядка (П-1)

$Dx=f(t)$, $t\in I$, (2.1)

$x(t)=\int f(t)dt=\int\limits_s^t f(\tau)d\tau+C$, $s\in I$, - полное решение уравнения (2.1).

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.1):

$Dx=f(t)$, $t\in I$,

$x(s)=\xi$, $s\in I$. (2.2)

Теорема (об однозначной разрешимости задачи Коши для П-1).
Пусть функция $f(t)$ непрерывна на I, тогда для любого $s\in I$ задача Коши (2.2) имеет единственное решение $x(t)=\xi+\int\limits_s^t f(\tau)d\tau$.

Доказательство. $x(t)=\int\limits_s^t f(\tau)d\tau+C$, отсюда $\xi=x(s)=C$. ■

Рассмотрим уравнение П-n:

$D^nx=f(t)$, $t\in I.$ (2.3)

Интегрируя уравнение (2.3), получаем $D^{n-1}x=C_1+\int\limits_s^t f(\tau)d\tau$.

Далее $D^{n-2}x=C_2+C_1t+\int\limits_s^t d\sigma\int\limits_s^\sigma f(\tau)d\tau$.

Поэтому $x(t) = C_0 + C_1 t + ... + C_{n-1} t^{n-1} + \int\limits_s^t \int\limits_s^{\tau_1} ... \int\limits_s^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n ... d\tau_2 d\tau_1$.

Докажем, что $\int\limits_s^t \int\limits_s^{\tau_1} ... \int\limits_s^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n ... d\tau_2 d\tau_1 = \int\limits_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau$.

При $n = 1$ формула очевидна. Пусть она верна при $n = k$, то есть

$$\int\limits_s^t \int\limits_s^{\tau_1} ... \int\limits_s^{\tau_{k-1}} f(\tau_k) d\tau_k ... d\tau_2 d\tau_1 = \int\limits_s^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} f(\tau) d\tau .$$

Докажем, что

$$\int\limits_s^t \int\limits_s^{\tau_1} ... \int\limits_s^{\tau_{k-1}} \int\limits_s^{\tau_k} f(\tau_{k+1}) d\tau_{k+1} d\tau_k ... d\tau_2 d\tau_1 = \int\limits_s^t \frac{(t-\tau)^k}{k!} f(\tau) d\tau .$$

Достаточно проверить, что

$$\int\limits_s^t \int\limits_s^{\tau_1} \frac{(\tau_1-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} f(\tau) d\tau d\tau_1 = \int\limits_s^t \frac{(t-\tau)^k}{k!} f(\tau) d\tau .$$

Изменим порядок интегрирования в интеграле левой части:

$$\int\limits_s^t \int\limits_s^{\tau_1} \frac{(\tau_1-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} f(\tau) d\tau d\tau_1 = \int\limits_s^t d\tau f(\tau) \int\limits_\tau^t \frac{(\tau_1-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} d\tau_1 = \int\limits_s^t f(\tau) \frac{(t-\tau)^k}{k!} d\tau .$$

Таким образом, полное решение П-n (2.3) задается формулой:

$$x(t) = C_0 + C_1 t + ... + C_{n-1} t^{n-1} + \int\limits_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau .$$

ЛЕКЦИЯ 2

§3. Комплекснозначные решения простейших уравнений

Определение. Комлекснозначной называется функция $h: R \to C$. Для любой комплекснозначной функции $h: R \to C$ существуют единственные функции $f, g: R \to R$, такие, что $h(t) = f(t) + ig(t)$.

Обозначают $f(t) = \operatorname{Re} h(t),\ g(t) = \operatorname{Im} h(t)$.

Если функции $f, g: R \to R$ дифференцируемы на промежутке I, то функция $h(t) = f(t) + ig(t)$ также дифференцируема на I и $Dh(t) = Df(t) + iDg(t)$.

Если функции $f, g: R \to R$ интегрируемы по Риману на промежутке I, то функция $h(t) = f(t) + ig(t)$ также интегрируема по Риману на I и $\int\limits_I h(t)dt = \int\limits_I f(t)dt + i\int\limits_I g(t)dt$.

Пусть $\nu \in C$, $\nu = \lambda + i\mu$, тогда $\mathrm{e}^{\nu t} = \mathrm{e}^{\lambda t}(\cos\mu t + i\sin\mu t)$ и $D(\mathrm{e}^{\nu t}) = D(\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\mu t) + iD(\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\mu t) =$
$= (\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\mu t - \mu\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\mu t) + i(\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\mu t + \mu\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\mu t) = (\lambda + i\mu)\mathrm{e}^{\lambda t}(\cos\mu t + i\sin\mu t)$
$= \nu\mathrm{e}^{\nu t}$.

Рассмотрим П-1: $Dz = h(t)$, $t \in I$ (3.1), где $z: I \to C$, $h: I \to C$.

Решением уравнения (3.1) на промежутке I называется комплекснозначная функция $z(t)$, дифференцируемая на I и обращающая уравнение (3.1) в тождество на I.

Полное решение на I уравнения (3.1) задаётся формулой $z(t) = C + \int\limits_s^t h(\tau)d\tau$ (3.2), где C - произвольная постоянная, $s \in I$.

Квазиполиномы

Пусть $P(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k t^k$, $c_k = a_k + ib_k$, $a_k, b_k \in R$, $t \in R$, $c_n \neq 0$.

$P(t) = R(t) + iQ(t),\ R(t) = \operatorname{Re} P(t)$, $Q(t) = \operatorname{Im} P(t)$.

Если $D(P(t)) = P_1(t)$, то $\deg P_1 = \deg P - 1$; если $\int\limits_s^t P(\tau)d\tau = P_2(t)$, то $\deg P_2 = \deg P + 1$.

Определение. Квазиполиномом называется функция вида $R(t) = \sum\limits_{l=1}^{m} P_l(t)\mathrm{e}^{\nu_l t}$, где $P_l(t)$ $(l = \overline{1,m})$ – комлекснозначные полиномы, ν_l $(l = \overline{1,m})$ – попарно различные комплексные числа.

Если $\nu \neq 0$, то
$D(P(t)e^{\nu t}) = e^{\nu t}(DP(t) + \nu P(t)) = Q(t)e^{\nu t} \;\Rightarrow\; \deg Q = \deg P$,

$$\int_s^t P(\tau)e^{\nu\tau}d\tau = P(\tau)\frac{e^{\nu\tau}}{\nu}\Bigg|_s^t - \frac{1}{\nu}\int_s^t DP(\tau)e^{\nu\tau}d\tau = \ldots = Q(t)e^{\nu t} + c \;\Rightarrow\; \deg Q = \deg P.$$

Теорема. (критерий совпадения квазиполиномов).
Квазиполиномы

$$h_1(t) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t)e^{\nu_j t} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n_j} p_{k,j}t^k\right)e^{\nu_j t} \text{ и } h_2(t) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)e^{\nu_j t} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n_j} q_{k,j}t^k\right)e^{\nu_j t}$$

тождественно равны тогда и только тогда, когда $p_{k,j} = q_{k,j}$ для любых $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{0,n_j}$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что $\sum\limits_{j=1}^{m} P_j(t)e^{\nu_j t} \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; P_j(t) \equiv 0$ $\forall j = \overline{1,m}$. Если $m=1$, то $P(t)e^{\nu t} \equiv 0 \Leftrightarrow P(t) \equiv 0$. Если $m = 2$, то имеем $P_1(t)e^{\nu_1 t} + P_2(t)e^{\nu_2 t} \equiv 0$, $\nu_1 \neq \nu_2$. Отсюда получаем, что $P_1(t) + P_2(t)e^{(\nu_2-\nu_1)t} \equiv 0$. Продифференцировав последнее тождество $\deg P_1 + 1$ раз, получим, что $Q_2(t)e^{(\nu_2-\nu_1)t} \equiv 0$, где $\deg Q_2 = \deg P_2$. Следовательно, $Q_2 \equiv 0$ и $P_2 \equiv 0$. Случай $m > 2$ рассматривается аналогично. ■

Простейшие уравнения с квазиполиномами

Рассмотрим уравнение $Dz = h(t)$, $t \in I$, (3.3), где $h(t) = P_0(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} P_j(t)e^{\nu_j t}$, P_0, P_j - комлексснозначные полиномы, ν_j ($j = \overline{1,m}$) – попарно различные ненулевые комплексные числа.

Лемма 1. Пусть $z_1(t),\ldots,z_r(t)$ - решения уравнений $Dz = h_1(t),\ldots,Dz = h_r(t)$, тогда функция $z(t) = \sum\limits_{k=1}^{r} z_k(t)$ является решением уравнения $Dz = h(t)$, где $h(t) = \sum\limits_{k=1}^{r} h_k(t)$.

Доказательство. $Dz_k(t) = h_k(t),\; k = \overline{1,r}$, тогда

$$Dz(t) = D\left(\sum_{k=1}^{r} z_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{r} Dz_k(t) = \sum_{k=1}^{r} h_k(t) = h(t). \;■$$

Лемма 2. Полное комплекснозначное решение на I уравнения $Dz = P_0(t)$ определяется по формуле $z(t) = C + tQ_0(t)$, где C - комплексная произвольная постоянная, $Q_0(t)$ - комплекснозначный многочлен, $\deg Q_0 = \deg P_0$ и коэффициенты многочлена Q_0 однозначно определяются коэффициентами многочлена P_0.

Доказательство. Пусть $P_0(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, $a_k \in C$, $a_n \neq 0$, тогда $z(t) = C_1 + \int_s^t P_0(\tau)d\tau = C_2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} t^k = C_2 + t\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} t^k = C_2 + tQ_0(t)$. ■

Лемма 3. Полное комплекснозначное решение на I уравнения $Dz = P(t)\mathrm{e}^{\nu t}$ ($\nu \neq 0$) определяется по формуле $z(t) = C + Q(t)\mathrm{e}^{\nu t}$, где C - комплексная произвольная постоянная, $Q(t)$ - комплекснозначный многочлен, $\deg Q = \deg P$ и коэффициенты многочлена Q однозначно определяются коэффициентами многочлена P.

Доказательство. $z(t) = C_1 + \int_s^t P(\tau)\,\mathrm{e}^{\nu\tau}\,d\tau = C_2 Q(t)\,\mathrm{e}^{\nu t}$. ■

Теорема. Полное комплекснозначное решение на I уравнения (3.3) определяется по формуле $z(t) = C + tQ_0(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\mathrm{e}^{\nu_j t}$, где C - комплексная произвольная постоянная, Q_j $(j = \overline{0,m})$ – комплекснозначные полиномы, $\deg Q_j = \deg P_j$ $\forall\ j = \overline{0,m}$, коэффициенты многочлена Q_j однозначно определяются коэффициентами многочлена P_j $\forall\ j = \overline{0,m}$.

Доказательство. Вытекает из лемм 1 – 3. ■

§4. Стационарные линейные дифференциальные уравнения первого порядка (СтЛУ-1)

Уравнение $D^n x + p_{n-1}(t)D^{n-1}x + \ldots + p_1(t)Dx + p_0(t)x = f(t)$, $t \in I$, (4.1), где $p_j(t), f(t)$ - известные функции, называется линейным дифференциальным уравнением порядка n.

Дифференциальный оператор

$L_n = D^n + p_{n-1}(t)D^{n-1} + \ldots + p_1(t)D + p_0(t)D^0$

является линейным, то есть $L_n(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha L_n x(t) + \beta L_n y(t)$ для любых $\alpha, \beta \in C$ и любых дифференцируемых на I функций $x(t), y(t)$.

Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение (4.1) называется линейным однородным уравнением порядка n.

Если $p_k(t) \equiv a_k \in C$, $\forall k = \overline{0, n-1}$, то уравнение (4.1) называется стационарным линейным уравнением порядка n (СтЛУ-n).

СтЛУ-1

Рассмотрим СтЛУ-1: $Dz - \nu z = h(t)$, $t \in I$, (4.2), где $\nu \in C$ - заданное число.
$L_1 = D - \nu D^0$, $L_1 z = h(t)$.

Лемма. $L_1 z = \mathrm{e}^{\nu t} D(\mathrm{e}^{-\nu t} z)$.
Доказательство. $\mathrm{e}^{\nu t} D(\mathrm{e}^{-\nu t} z) = \mathrm{e}^{\nu t}(\mathrm{e}^{-\nu t} Dz - \nu \mathrm{e}^{-\nu t} z) = Dz - \nu z = L_1 z.$ ■

Таким образом, $L_1 z = h(t) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\nu t} D(\mathrm{e}^{-\nu t} z) = h(t) \Leftrightarrow D(\mathrm{e}^{-\nu t} z) = \mathrm{e}^{-\nu t} h(t)$. Обозначим $y = \mathrm{e}^{-\nu t} z$, тогда $Dy = \mathrm{e}^{-\nu t} h(t)$. Отсюда находим, что $y(t) = C + \int\limits_s^t \mathrm{e}^{-\nu \tau} h(\tau) d\tau$, где C - произвольная комплексная постоянная, $s \in I$. Окончательно получаем, что $z(t) = C\mathrm{e}^{\nu t} + \int\limits_s^t \mathrm{e}^{\nu(t-\tau)} h(\tau) d\tau$ - полное решение уравнения (4.2).

Теорема. (ТОР для СтЛУ-1).
Пусть функция $h(t)$ непрерывна на I, $\nu \in C$, тогда для любых $s \in I$, $\xi \in C$ задача Коши $\begin{cases} Dz - \nu z = h(t), t \in I, \\ z(s) = \xi, \end{cases}$ (4.3) имеет единственное решение на I, определяемое формулой $z(t) = \xi \mathrm{e}^{\nu(t-s)} + \int\limits_s^t \mathrm{e}^{\nu(t-\tau)} h(\tau) d\tau$.
Доказательство. Полное решение на I уравнения $Dz - \nu z = h(t), t \in I,$ задается формулой $z(t) = C\mathrm{e}^{\nu t} + \int\limits_s^t \mathrm{e}^{\nu(t-\tau)} h(\tau) d\tau$. Далее $\xi = z(s) = C\mathrm{e}^{\nu s}$, следовательно, $C = \xi \mathrm{e}^{-\nu s}$. Поэтому $z(t) = \xi \mathrm{e}^{\nu(t-s)} + \int\limits_s^t \mathrm{e}^{\nu(t-\tau)} h(\tau) d\tau$ - единственное решение задачи Коши (4.3). ■

Рассмотрим случай, когда правая часть СтЛУ-1 – квазиполином:
$Dz - \nu z = h(t)$, $t \in I$ (4.4), где $h(t) = P_0(t)\mathrm{e}^{\nu t} + \sum\limits_{j=1}^m P_j(t)\mathrm{e}^{\nu_j t}$, P_0, P_j - комлексно-значные полиномы, ν_j ($j = \overline{1,m}$) – попарно различные комплексные числа, отличные от ν.

Так как $Dz - \nu z = \mathrm{e}^{\nu t} D(\mathrm{e}^{-\nu t} z)$, то

$$Dz - \nu z = h(t) \iff D(\mathrm{e}^{-\nu t} z) = P_0(t) + \sum_{j=1}^{m} P_j(t)\mathrm{e}^{(\nu_j - \nu)t}.$$

Поэтому $\mathrm{e}^{-\nu t} z = C + tQ_0(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\mathrm{e}^{(\nu_j - \nu)t}$,

$z(t) = C\mathrm{e}^{\nu t} + tQ_0(t)\mathrm{e}^{\nu t} + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\mathrm{e}^{\nu_j t}$ (4.5), где C - комплексная произвольная постоянная, Q_j ($j = \overline{0,m}$) – комплекснозначные полиномы, $\deg Q_j = \deg P_j$ $\forall\ j = \overline{0,m}$, коэффициенты многочлена Q_j однозначно определяются коэффициентами многочлена P_j $\forall\ j = \overline{0,m}$.

Теорема. Полное решение на I уравнения (4.4) определяется по формуле (4.5).

§5. Факторизация стационарного линейного оператора L_n

$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0$ (5.1), где $a_i \in C$.

Уравнение $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + a_1\nu + a_0 = 0$ (5.2) называется характеристическим уравнением оператора (5.1).

Рассмотрим случай $n = 2$: $L_2 = D^2 + a_1 D + a_0 D^0$. (5.3)

Рассмотрим характеристическое уравнение $\nu^2 + a_1\nu + a_0 = 0$ (5.4) оператора (5.3).

Пусть ν_1, ν_2 - корни уравнения (5.4). Согласно теореме Виета: $\nu_1 + \nu_2 = -a_1$, $\nu_1\nu_2 = a_0$.

$\nu^2 + a_1\nu + a_0 = (\nu - \nu_1)(\nu - \nu_2)$.

Докажем, что $L_2 = (D - \nu_1 D^0)(D - \nu_2 D^0)$.

Отметим, что два линейных оператора A и B называются равными, если их области определения совпадают: $\mathrm{dom}(A) = \mathrm{dom}(B)$ и $Ax = Bx$ для любого $x \in \mathrm{dom}(A)$.

Очевидно, что $\mathrm{dom}(L_2)$ и $\mathrm{dom}((D - \nu_1 D^0)(D - \nu_2 D^0))$ совпадают и образуют множество функций дифференцируемых на I до второго порядка.

Кроме того,

$L_2 x = D^2 x + a_1 Dx + a_0 x = D^2 x - (\nu_1 + \nu_2)Dx + \nu_1\nu_2 x$,

$(D - \nu_1 D^0)(D - \nu_2 D^0)x = (D - \nu_1 D^0)(Dx - \nu_2 x) = D^2 x - \nu_2 Dx - \nu_1 Dx + \nu_1\nu_2 x = L_2 x$.

Рассмотрим характеристическое уравнение (5.2) оператора (5.1):

$\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + a_1\nu + a_0 = 0$. (5.5)

Находим его корни $\nu_1, \ldots, \nu_m$ с кратностями $n_1, \ldots, n_m$, где $n_1 + \ldots + n_m = n$,

тогда $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + a_1\nu + a_0 = (\nu - \nu_1)^{n_1} \ldots (\nu - \nu_m)^{n_m}$

и $L_n = (D - \nu_1 D^0)^{n_1} \ldots (D - \nu_m D^0)^{n_m}$.

ЛЕКЦИЯ 3
§6. Построение решений однородных СТЛУ-n

Рассмотрим однородное СтЛУ-n: $L_n z = 0$ (6.1).
Если $z = x + iy$, то $L_n x = 0$ и $L_n y = 0$, поэтому действительная и мнимая части комплескнозначного решения $z(t)$ уравнения (6.1) также являются решениями уравнения (6.1).

Рассмотрим случай $n = 3$.
$L_3 z = 0 \iff D^3 z + a_2 D^2 z + a_1 Dz + a_0 z = 0$ (6.2).
Пусть ν_1, ν_2, ν_3 - корни характеристического уравнения
$\nu^3 + a_2\nu^2 + a_1\nu + a_0 = 0$,
тогда $L_3 = (D - \nu_1 D^0)(D - \nu_2 D^0)(D - \nu_3 D^0)$.
Уравнение (6.2) примет следующий вид:
$(D - \nu_1 D^0)(D - \nu_2 D^0)(D - \nu_3 D^0)z = 0$.
Обозначим $\omega(t) = (D - \nu_2 D^0)(D - \nu_3 D^0)z(t)$,
тогда получим СтЛУ-1: $(D - \nu_1 D^0)\omega = 0$, полным решением которого является семейство функций: $\omega(t) = C_1 \mathrm{e}^{\nu_1 t}$.
Поэтому уравнение (6.2) равносильно уравнению
$(D - \nu_2 D^0)(D - \nu_3 D^0)z = C_1 \mathrm{e}^{\nu_1 t}$.
Обозначим $u(t) = (D - \nu_3 D^0)z(t)$, тогда получим неоднородное СтЛУ-1:
$(D - \nu_2 D^0)u = C_1 \mathrm{e}^{\nu_1 t}$.
Случай 1: $\nu_1 \neq \nu_2$. Тогда $u(t) = C_2 \mathrm{e}^{\nu_2 t} + \overline{C}_1 \mathrm{e}^{\nu_1 t}$.
Случай 2: $\nu_1 = \nu_2$. Тогда $u(t) = C_2 \mathrm{e}^{\nu_1 t} + t\overline{C}_1 \mathrm{e}^{\nu_1 t} = (C_1 t + C_2)\mathrm{e}^{\nu_1 t}$.
Рассмотрим случай 1. Имеем $(D - \nu_3 D^0)z = C_2 \mathrm{e}^{\nu_2 t} + C_1 \mathrm{e}^{\nu_1 t}$.
Случай 1.1. $\nu_1 \neq \nu_2$, $\nu_3 \neq \nu_1$, $\nu_3 \neq \nu_2$. Тогда $z(t) = C_3 \mathrm{e}^{\nu_3 t} + C_2 \mathrm{e}^{\nu_2 t} + C_1 \mathrm{e}^{\nu_1 t}$.
Случай 1.2. $\nu_1 \neq \nu_2$, $\nu_3 = \nu_1$, $\nu_3 \neq \nu_2$. Тогда $z(t) = C_2 \mathrm{e}^{\nu_2 t} + (C_3 t + C_1)\mathrm{e}^{\nu_1 t}$.
Случай 1.3. $\nu_1 \neq \nu_2$, $\nu_3 \neq \nu_1$, $\nu_3 = \nu_2$. Тогда $z(t) = C_1 \mathrm{e}^{\nu_1 t} + (C_2 t + C_3)\mathrm{e}^{\nu_2 t}$.
Рассмотрим случай 2. Имеем $(D - \nu_3 D^0)z = (C_1 t + C_2)\mathrm{e}^{\nu_1 t}$.
Случай 2.1. $\nu_1 = \nu_2$, $\nu_3 \neq \nu_1$. Тогда $z(t) = C_3 \mathrm{e}^{\nu_3 t} + (C_1 t + C_2)\mathrm{e}^{\nu_1 t}$.
Случай 2.2. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$. Тогда $z(t) = C_3 e^{\nu_1 t} + t(C_1 t + C_2)e^{\nu_1 t}$.

Таким образом, $z(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} Q_k(t)\mathrm{e}^{\nu_k t}$, где $\nu_1, \ldots, \nu_m$ - попарно различные корни характеристического уравнения с кратностями $n_1, \ldots, n_m$, $Q_k(t)$ - произвольный комплекснозначный многочлен, $\deg Q_k = n_k - 1$.

Выпишем характеристическое уравнение для уравнения (6.1):
$\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + a_1\nu + a_0 = 0$ (6.3).
Пусть $\nu_{1,2} = \lambda_1 \pm i\mu_1, \ldots, \nu_{2r-1,2r} = \lambda_r \pm i\mu_r$ - пары комплексно-сопряженных корней уравнения (6.3), где корни ν_{2i-1}, ν_{2i} имеют кратности n_i, $i = \overline{1,r}$, и пусть $\nu_{2r+1}, \ldots, \nu_m$ - действительные корни уравнения (6.3) с кратностями $n_{2r+1}, \ldots, n_m$.
Очевидно, $2(n_1 + \ldots + n_r) + n_{2r+1} + \ldots + n_m = n$.
Тогда полное комлексноначное решение уравнения (6.1) задаётся формулой:
$z(t) = \sum_{k=1}^{r} (Q_k(t)\mathrm{e}^{(\lambda_k + i\mu_k)t} + R_k(t)\mathrm{e}^{(\lambda_k - i\mu_k)t}) + \sum_{j=2r+1}^{m} T_j(t)\mathrm{e}^{\nu_j t}$, где $Q_k(t), R_k(t)$, $k = \overline{1,r}$, $T_j(t)$, $j = \overline{2r+1,m}$ - произвольные комплекснозначные многочлены соответственно степеней n_k, n_k, n_j.
Найдем действительную часть $x(t)$ комплекснозначного решения $z(t)$.
Пусть $Q_k(t) = A_k(t) + iB_k(t)$, $R_k(t) = C_k(t) + iD_k(t)$, тогда
$\mathrm{Re}(Q_k(t)\mathrm{e}^{\nu_k t} + R_k(t)\mathrm{e}^{\bar{\nu}_k t}) =$
$= \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\lambda_k t}\big((A_k + iB_k)(\cos\mu_k t + i\sin\mu_k t) + (C_k + iD_k)(\cos\mu_k t - i\sin\mu_k t)\big)\Big) =$
$= \mathrm{e}^{\lambda_k t}\big((A_k + C_k)\cos\mu_k t - (B_k + D_k)\sin\mu_k t\big) = \mathrm{e}^{\lambda_k t}\big(M_k(t)\cos\mu_k t + N_k(t)\sin\mu_k t\big)$,
где $M_k(t)$, $N_k(t)$ - произвольные многочлены с действительными коэффициентами степеней $n_k - 1$.
Пусть $T_j(t) = E_j(t) + iF_j(t)$, тогда
$\mathrm{Re}(T_j(t)\mathrm{e}^{\nu_j t}) = E_j(t)\mathrm{e}^{\nu_j t}$.

Таким образом, общее действительнозначное решение уравнения (6.1) задаётся формулой:
$x(t) = \sum_{k=1}^{r} (M_k(t)\cos\mu_k t + N_k(t)\sin\mu_k t)\mathrm{e}^{\lambda_k t} + \sum_{j=2r+1}^{m} P_j(t)\mathrm{e}^{\nu_j t}$,
где $M_k(t), N_k(t)$, $k = \overline{1,r}$, $P_j(t)$, $j = \overline{2r+1,m}$, - произвольные действительные многочлены, $\deg M_k = \deg N_k = n_k - 1$, $\deg P_j = n_j - 1$.

Рассмотрим задачу Коши:
$L_n z = 0$, $t \in R$,
$D^k z(s) = 0$, $k = \overline{0,n-1}$ (6.4), где $s \in R$ - фиксированная точка.
При построении ОР каждый раз вводили функцию, для которой получали СтЛУ-1 с непрерывной неоднородностью (квазимногочленом). На основании ТОР для СтЛУ-1 каждая задача Коши для СтЛУ-1 имеет единственное решение. Следовательно, задача Коши (6.4) также имеет единственное решение. Очевидно, этим решением является функция $z(t) \equiv 0$.

§7. Принцип суперпозиции

Рассмотрим однородное СтЛУ-n: $L_n x = 0$ (7.1).

Теорема. Пусть $x_1(t), x_2(t)$ - решения уравнения (7.1), тогда функция $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ также является решением уравнения (7.1).
Доказательство. $L_n x_1(t) \equiv 0$, $L_n x_2(t) \equiv 0$, тогда $L_n x(t) = L_n x_1(t) + L_n x_2(t) \equiv 0$. ■

Теорема. Если $x_1(t)$ - решение уравнения (7.1), тогда функция $x(t) = cx_1(t)$ является решением уравнения (7.1).
Доказательство. $L_n x_1(t) \equiv 0$, тогда $L_n x(t) = L_n(cx_1(t)) = cL_n x_1(t) \equiv 0$. ■

Таким образом, множество решений уравнения (7.1) образует линейное пространство.

Следствие. Если $x_1(t), ..., x_r(t)$ - решения уравнения (7.1), то функция $x(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i(t)$ также является решением уравнения (7.1).

§8. Определитель Вронского

Рассмотрим однородное СтЛУ-n: $D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + ... + a_1 Dx + a_0 x = 0$ (8.1).
Пусть функции $\psi_0(t), \ldots, \psi_{n-1}(t)$ дифференцируемы на промежутке $|a,b|$ до порядка $n-1$ включительно.
Функциональный определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} \psi_0 & \psi_1 & \cdots & \psi_{n-1} \\ D\psi_0 & D\psi_1 & \ldots & D\psi_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-1}\psi_0 & D^{n-1}\psi_1 & \ldots & D^{n-1}\psi_{n-1} \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* или *вронскианом* и обозначается $W(t) = \begin{vmatrix} \psi_0 & \psi_1 & \cdots & \psi_{n-1} \end{vmatrix}$.

Правило дифференцирования определителя: производная определителя Δ равна сумме определителей Δ_i, $i = \overline{1,n}$, где определитель Δ_i получается из Δ заменой i-й строки на строку из производных.

Теорема. Пусть $\psi_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, - решения уравнения (8.1), тогда имеет место формула Остроградского-Лиувилля: $W(t) = W(s) e^{-a_{n-1}(t-s)}$ $\forall t, s \in R$ (8.2).
Доказательство.

$$DW(t)=\begin{vmatrix} D\psi_0 & D\psi_1 & \dots & D\psi_{n-1} \\ D\psi_0 & D\psi_1 & \dots & D\psi_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-1}\psi_0 & D^{n-1}\psi_1 & \dots & D^{n-1}\psi_{n-1} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \psi_0 & \psi_1 & \dots & \psi_{n-1} \\ D^2\psi_0 & D^2\psi_1 & \dots & D^2\psi_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-1}\psi_0 & D^{n-1}\psi_1 & \dots & D^{n-1}\psi_{n-1} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} \psi_0 & \psi_1 & \dots & \psi_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-1}\psi_0 & D^{n-1}\psi_1 & \dots & D^{n-1}\psi_{n-1} \\ D^{n-1}\psi_0 & D^{n-1}\psi_1 & \dots & D^{n-1}\psi_{n-1} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \psi_0 & \psi_1 & \dots & \psi_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-2}\psi_0 & D^{n-2}\psi_1 & \dots & D^{n-2}\psi_{n-1} \\ D^{n}\psi_0 & D^{n}\psi_1 & \dots & D^{n}\psi_{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \psi_0 & \psi_1 & \dots & \psi_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-2}\psi_0 & D^{n-2}\psi_1 & \dots & D^{n-2}\psi_{n-1} \\ D^{n}\psi_0 & D^{n}\psi_1 & \dots & D^{n}\psi_{n-1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \psi_0 & \psi_1 & \dots & \psi_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-2}\psi_0 & D^{n-2}\psi_1 & \dots & D^{n-2}\psi_{n-1} \\ -\sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i\psi_0 & -\sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i\psi_0 & \dots & -\sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i\psi_0 \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку a_0, вторую строку на a_1, …, предпоследнюю – на a_{i-1} и прибавим к последней строке. Имеем:

$$DW(t)=\begin{vmatrix} \psi_0 & \psi_1 & \dots & \psi_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-2}\psi_0 & D^{n-2}\psi_1 & \dots & D^{n-2}\psi_{n-1} \\ -a_{n-1}D^{n-1}\psi_0 & -a_{n-1}D^{n-1}\psi_1 & \dots & -a_{n-1}D^{n-1}\psi_{n-1} \end{vmatrix}=-a_{n-1}W(t).$$

Получили СтЛУ-1: $DW+a_{n-1}W=0$. Отсюда находим, что $W(t)=C\mathrm{e}^{-a_{n-1}t}$. Так как $W(s)=C\mathrm{e}^{-a_{n-1}s}$, то $C=W(s)\mathrm{e}^{a_{n-1}s}$. Следовательно, $W(t)=W(s)\mathrm{e}^{-a_{n-1}(t-s)}$. ■

Следствие. Если существует $s\in R$, такое, что $W(s)\neq 0$, то $W(t)\neq 0$ для любых $t\in R$.

§9. Линейная зависимость решений однородного СтЛУ-n

Рассмотрим однородное СтЛУ-n: $D^n x+a_{n-1}D^{n-1}x+\dots+a_1Dx+a_0x=0$ (9.1).

Определение. Система решений $z_0(t),\dots,\ z_{n-1}(t)$ уравнения (9.1) называется *линейно зависимой*, если существуют постоянные b_k, $k=\overline{0,n-1}$, не все равные 0, такие, что $\sum_{k=0}^{n-1} b_k z_k(t)\equiv 0$. В противном случае система решений $z_0(t),\dots,\ z_{n-1}(t)$ называется *линейно независимой*.

Теорема. Система решений $z_0(t),\ldots,\ z_{n-1}(t)$ уравнения (9.1) является линейно зависимой тогда и только тогда, когда определитель Вронского $W(t)=\begin{vmatrix} z_0 & z_1 & \ldots & z_{n-1}\end{vmatrix}$ обращается в 0 хотя бы в одной точке.

Доказательство.

1) Необходимость. Система $z_0(t),\ldots,\ z_{n-1}(t)$ линейно зависима, т.е. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k z_k(t)\equiv 0$, где $(b_0,\ldots,b_{n-1})\neq(0,\ldots,0)$. Не нарушая общности, можно считать, что $b_{n-1}\neq 0$, тогда $z_{n-1}(t)=-\sum\limits_{k=0}^{n-2}\frac{b_k}{b_{n-1}}z_k(t)$.

Имеем:

$$W(t)=\begin{vmatrix} z_0 & z_1 & \ldots & z_{n-1}\\ Dz_0 & Dz_1 & \ldots & Dz_{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ D^{n-1}z_0 & D^{n-1}z_1 & \ldots & D^{n-1}z_{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} z_0 & \ldots & z_{n-2} & -\sum\limits_{k=0}^{n-2}\frac{b_k}{b_{n-1}}z_k\\ Dz_0 & \ldots & Dz_{n-2} & -\sum\limits_{k=0}^{n-2}\frac{b_k}{b_{n-1}}Dz_k\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ D^{n-1}z_0 & \ldots & D^{n-1}z_{n-2} & -\sum\limits_{k=0}^{n-2}\frac{b_k}{b_{n-1}}D^{n-1}z_k\end{vmatrix}=0.$$

2) Достаточность.

Пусть $W(t_0)=\begin{vmatrix} z_0(t_0) & z_1(t_0) & \ldots & z_{n-1}(t_0)\\ Dz_0(t_0) & Dz_1(t_0) & \ldots & Dz_{n-1}(t_0)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ D^{n-1}z_0(t_0) & D^{n-1}z_1(t_0) & \ldots & D^{n-1}z_{n-1}(t_0)\end{vmatrix}=0$.

Рассмотрим линейную алгебраическую систему порядка n:

$$\begin{cases} z_0(t_0)x_0+\ldots+z_{n-1}(t_0)x_{n-1}=0,\\ Dz_0(t_0)x_0+\ldots+Dz_{n-1}(t_0)x_{n-1}=0,\\ \ldots\\ D^{n-1}z_0(t_0)x_0+\ldots+D^{n-1}z_{n-1}(t_0)x_{n-1}=0,\end{cases}$$

так как определитель этой системы равен $W(t_0)=0$, то система имеет ненулевое решение: $(\tilde{x}_0,\ldots,\tilde{x}_{n-1})$.

Функция $z(t)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde{x}_k z_k(t)$ является решением уравнения (9.1).

Имеем: $D^j z(t_0)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde{x}_k D^j z_k(t_0)=0$ для любого $j=\overline{0,n-1}$.

Следовательно, $z(t)\equiv 0$ и поэтому система $z_0(t),\ldots,\ z_{n-1}(t)$ линейно зависима

■

§10. Базис пространства решений однородного СтЛУ-n

Рассмотрим однородное СтЛУ-n: $D^n x + a_{n-1}D^{n-1}x + \ldots + a_1 Dx + a_0 x = 0$ (10.1).

Лемма. (о сдвиге). Пусть $x(t)$ - решение уравнения (10.1), тогда для любого $s \in R$ функция $y(t) = x(t-s)$ является решением уравнения (10.1).
Доказательство. (для случая $n = 2$). Имеем $y(t) = x(u(t))$, где $u(t) = t - s$, тогда $Dy(t) = Dx(u(t)) \cdot Du(t) = Dx(u(t)) = Dx(t-s)$,

$D^2 y(t) = D(Dx(u(t))) = D^2 x(u(t)) \cdot Du(t) = D^2 x(u(t)) = D^2 x(t-s)$,

поэтому $D^2 y(t) + a_1 Dy(t) + a_0 y(t) = D^2 x(t-s) + a_1 Dx(t-s) + a_0 x(t-s) \overset{t \in R}{\equiv} 0$. ■
В случае $n > 2$ доказательство аналогично.

Определение. *Базисом пространства решений* уравнения (10.1) называется система из n линейно независимых решений уравнения (10.1).

Базис пространства решений также называется фундаментальной системой решений уравнения (10.1).

Рассмотрим n специальных задач Коши:

$$\begin{cases} L_n x = 0, \\ x(0) = 1, \\ D^k x(0) = 0, k = \overline{1, n-1}, \end{cases} \quad \begin{cases} L_n x = 0, \\ x(0) = 0, Dx(0) = 1, \\ D^k x(0) = 0, k = \overline{2, n-1}, \end{cases} \quad \ldots, \begin{cases} L_n x = 0, \\ D^k x(0) = 0, k = \overline{0, n-2}, \\ D^{n-1} x(0) = 1. \end{cases}$$

На основании ТОР для задачи Коши для СтЛУ-1 и способа построения ОР СтЛУ-n каждая из специальных задач Коши имеет единственное решение $\varphi_i(t)$, $i = \overline{0, n-1}$.

Для каждого $i = \overline{0, n-1}$ имеем: $L_n \varphi_i(t) \equiv 0$, $D^j \varphi_i(0) = \delta_{j,i} = \begin{cases} 1, j = i, \\ 0, j \neq i, \end{cases}$ $j = \overline{0, n-1}$.

На основании леммы о сдвиге функции $\varphi_i(t-s)$ являются решениями уравнения (10.1). Так как вронскиан $W(t)$ системы функций $\varphi_i(t-s)$, $i = \overline{0, n-1}$, вычисленный в точке s равен 1, то система функций $\varphi_i(t-s)$, $i = \overline{0, n-1}$, является линейно независимой.

Теорема. Пусть $\varphi_i(t)$, $i = \overline{0, n-1}$, - решения специальных задач Коши, тогда решение задачи Коши: $\begin{cases} L_n x = 0, \\ D^j x(s) = \xi_j, j = \overline{0, n-1}, \end{cases}$ определяется формулой: $x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s)$.

Доказательство. Имеем $L_n x(t) = L_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k L_n \varphi_k(t-s) \equiv 0$,

$$D^j x(s) = D^j\left(\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k D^j \varphi_k(t-s)\Big|_{t=s} = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k D^j \varphi_k(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \delta_{j,k} = \xi_j .$$

■

Из теоремы вытекает, что функция $x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(t)$ является общим решением уравнения (10.1).

Говорят, что система функций $\varphi_i(t-s)$, $i = \overline{0, n-1}$, образует базис пространства решений уравнения (10.1), нормированный в точке s.

ЛЕКЦИЯ 4

§11. Неоднородные СТЛУ-n

Рассмотрим уравнения
$L_n x = f(t)$ (11.1), $t \in I$,
$L_n x = 0$ (11.2).

Пусть $x_{чн}(t)$ - частное решение уравнения (11.1), то есть $L_n x_{чн}(t) \equiv f(t)$. Пусть $x_{он}(t)$ - произвольное решение уравнения (11.1), тогда $L_n(x_{он}(t) - x_{чн}(t)) = L_n(x_{он}(t)) - L_n(x_{чн}(t)) \equiv f(t) - f(t) = 0$. Следовательно, функция $x_{он}(t) - x_{чн}(t)$ является решением уравнения (11.2). С другой стороны, для любого решения $x_{оо}(t)$ уравнения (11.2) функция $x_{чн}(t) + x_{оо}(t)$ является решением уравнения (11.1).

Поэтому общее решение неоднородного уравнения (11.1) равно сумме общего решения однородного уравнения (11.2) и частного решения неоднородного уравнения (11.1):
$x_{он}(t) = x_{чн}(t) + x_{оо}(t)$.

§12. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Рассмотрим уравнения
$L_n x = f(t)$ (12.1), $t \in I$, $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0$,
$L_n x = 0$ (12.2).

Частное решение $x_{чн}(t)$ уравнения (12.1) строится по структуре общего решения $x_{оо}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \psi_k(t)$ однородного уравнения (12.2):

$$x_{чн}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)\psi_k(t),$$

где $\psi_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, - базис пространства решений однородного уравнения (12.2).

Теорема. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на промежутке I, функции $u_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, удовлетворяют следующей системе Лагранжа:

$$\begin{cases} Du_0 \cdot \psi_0 + \ldots + Du_{n-1} \cdot \psi_{n-1} = 0, \\ Du_0 \cdot D\psi_0 + \ldots + Du_{n-1} \cdot D\psi_{n-1} = 0, \\ \ldots \\ Du_0 \cdot D^{n-2}\psi_0 + \ldots + Du_{n-1} \cdot D^{n-2}\psi_{n-1} = 0, \\ Du_0 \cdot D^{n-1}\psi_0 + \ldots + Du_{n-1} \cdot D^{n-1}\psi_{n-1} = f(t), \end{cases} \qquad (12.3)$$

тогда частное решение уравнения (12.1) находится по формуле: $x_{чн}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)\psi_k(t)$.

Доказательство. (для случая $n = 2$).

Имеем $L_2\psi_0(t) \equiv 0$, $L_2\psi_1(t) \equiv 0$. Так как система решений $\{\psi_0, \psi_1\}$ образует базис, то она линейно независима и её определитель Вронского $W(t) = \begin{vmatrix} \psi_0 & \psi_1 \\ D\psi_0 & D\psi_1 \end{vmatrix}$ не обращается в нуль. Определитель системы (12.3) равен $W(t)$. Поэтому система (12.3) имеет решение $(Du_0(t), Du_1(t))$, которое является непрерывной функцией. Следовательно, $u_0(t),\ u_1(t) \in C^1(I)$.

Покажем, что $L_2(u_0\psi_0 + u_1\psi_1) \equiv f(t)$.

Имеем $D(u_0\psi_0 + u_1\psi_1) = Du_0 \cdot \psi_0 + u_0 D\psi_0 + Du_1 \cdot \psi_1 + u_1 D\psi_1 = u_0 D\psi_0 + u_1 D\psi_1$, поэтому функция $D(u_0\psi_0 + u_1\psi_1)$ дифференцируема на I и

$D^2(u_0\psi_0 + u_1\psi_1) = D(u_0 D\psi_0 + u_1 D\psi_1) = Du_0 D\psi_0 + u_0 D^2\psi_0 + Du_1 D\psi_1 + u_1 D^2\psi_1 =$
$= f(t) + u_0 D^2\psi_0 + u_1 D^2\psi_1$.

Таким образом,

$L_2(u_0\psi_0 + u_1\psi_1) = D^2(u_0\psi_0 + u_1\psi_1) + a_1 D(u_0\psi_0 + u_1\psi_1) + a_0(u_0\psi_0 + u_1\psi_1) =$
$= f(t) + u_0 D^2\psi_0 + u_1 D^2\psi_1 + a_1 u_0 D\psi_0 + a_1 u_1 D\psi_1 + a_0 u_0\psi_0 + a_1 u_1\psi_1 =$
$= f(t) + u_0 L_2\psi_0 + u_1 L_2\psi_1 = f(t)$.

Поэтому функция $u_0\psi_0 + u_1\psi_1$ является частным решением уравнения (12.1). ■

Пример. Найти общее решение уравнения $D^2x - Dx = \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$, $t \in R$.

Решение. $\nu^2 - \nu = 0 \;\Rightarrow\; \nu_1 = 0,\ \nu_2 = 1,\ n_1 = n_2 = 1$. Поэтому $x_{oo}(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^t$. Найдем частное решение неоднородного уравнения методом Лагранжа. Система функций $\psi_0 = 1,\ \psi_1 = \mathrm{e}^t$ образуют базис пространства решений однородного уравнения. Составляем систему:

$$\begin{cases} Du_0 \cdot 1 + Du_1 \cdot \mathrm{e}^t = 0, \\ Du_0 \cdot 0 + Du_1 \cdot \mathrm{e}^t = \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}. \end{cases}$$

Отсюда $Du_1 = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$, $Du_0 = -\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$. Далее

$$u_1 = \int \frac{dt}{1+\mathrm{e}^t} = [1+\mathrm{e}^t = z, t = \ln(z-1), dt = dz/(z-1)] = \int \frac{dz}{z(z-1)} = \int \frac{dz}{z-1} - \int \frac{dz}{z} =$$

$$= \ln\left(\frac{z-1}{z}\right) + C = t - \ln(1+e^t) + C;$$

$$u_0 = -\int \frac{\mathrm{e}^t dt}{1+\mathrm{e}^t} = -\ln(1+\mathrm{e}^t) + C.$$

Поэтому $x_{чн}(t) = -\ln(1+\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t(t - \ln(1+\mathrm{e}^t))$.

Окончательно $x_{чн}(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^t - \ln(1+\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t(t - \ln(1+\mathrm{e}^t))$.

§13. Неоднородные СтЛУ-n с правой частью в виде квазимногочлена (метод Эйлера)

Рассмотрим уравнение

$L_n z = h(t)$ (13.1), $t \in I$,

где $h(t) = \sum_{k=1}^{m} P_k(t)\mathrm{e}^{\gamma_k t}$, $P_k(t)$ - комплекснозначные многочлены, γ_k - попарно различные комплексные числа.

Если $z_k(t)$ - решение уравнения $L_n z = P_k(t)\mathrm{e}^{\gamma_k t}$, $k = \overline{1,m}$ то функция $z(t) = \sum_{k=1}^{m} z_k(t)$ является решением уравнения (13.1).

Рассмотрим уравнение

$L_n z = P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$ (13.2).

Число γ называется *контрольным числом* правой части уравнения (13.2).

Теорема. Уравнение (13.2) имеет частное решение вида $z_{чн}(t) = t^j Q(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$, где $Q(t)$ - комплекснозначный многочлен, $\deg(Q) = \deg(P)$, коэффициенты многочлена Q однозначно определяются коэффициентами многочлена P, число j равно 0, если γ не является собственным значением оператора L_n, число j равно кратности γ, если γ является собственным значением оператора L_n.

Доказательство. (для случая $n = 2$).

$L_2 z = P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$.

Пусть ν_1, ν_2 - собственные значения оператора L_2.

Тогда $(D - \nu_1 D^0)(D - \nu_2 D^0)z = P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$.

Обозначим $w = (D - \nu_2 D^0)z$, тогда $(D - \nu_1 D^0)w = P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$.

Случай 1: $\gamma \neq \nu_1$. Тогда $w_{чн}(t) = Q_1(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$, где $\deg Q_1 = \deg P$ и коэффициенты многочлена Q_1 однозначно определяются коэффициентами многочлена P.

Случай 2: $\gamma = \nu_1$. Тогда $w_{чн}(t) = tQ_0(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$, где $\deg Q_0 = \deg P$ и коэффициенты многочлена Q_0 однозначно определяются коэффициентами многочлена P.

Получаем уравнение $(D-\nu_2 D^0)z = w_{чн}$.

Случай 1.1: $\gamma \neq \nu_1$, $\gamma \neq \nu_2$. Тогда $z_{чн}(t) = Q(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$, где $\deg Q = \deg Q_1 = \deg P$ и коэффициенты многочлена Q однозначно определяются коэффициентами многочлена Q_1, а значит, и коэффициентами многочлена P.

Случай 1.2: $\gamma \neq \nu_1$, $\gamma = \nu_2$. Тогда $z_{чн}(t) = tQ(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$, где $\deg Q = \deg Q_1 = \deg P$ и коэффициенты многочлена Q однозначно определяются коэффициентами многочлена Q_1, а значит, и коэффициентами многочлена P.

Случай 2.1: $\gamma = \nu_1$, $\gamma \neq \nu_2$. Аналогично предыдущему случаю $z_{чн}(t) = tQ(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$, где $\deg Q = \deg Q_1 = \deg P$ и коэффициенты многочлена Q однозначно определяются коэффициентами многочлена Q_1, а значит, и коэффициентами многочлена P.

Случай 2.2: $\gamma = \nu_1 = \nu_2$.

Общее решение уравнения $(D-\nu_1 D^0)w = P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$ имеет вид:

$w_{он}(t) = C\mathrm{e}^{\nu_1 t} + tQ_0(t)\mathrm{e}^{\nu_1 t}$, где $\deg Q_0 = \deg P$.

Обозначим $R(t) = tQ_0(t)$, $\deg R = \deg P + 1$.

Общее решение уравнения $(D-\nu_1 D^0)z = C\mathrm{e}^{\nu_1 t} + R(t)\mathrm{e}^{\nu_1 t}$ имеет вид:

$z_{он}(t) = C_2\mathrm{e}^{\nu_1 t} + tC_1\mathrm{e}^{\nu_1 t} + tG(t)\mathrm{e}^{\nu_1 t}$, где $\deg G = \deg R$.

Пусть $\deg P = m$, тогда

$$z_{он}(t) = C_2\mathrm{e}^{\nu_1 t} + tC_1\mathrm{e}^{\nu_1 t} + t(b_{m+1}t^{m+1} + \ldots + b_1 t + b_0)\mathrm{e}^{\nu_1 t} =$$
$$= C_2\mathrm{e}^{\nu_1 t} + t(C_1 + b_1)\mathrm{e}^{\nu_1 t} + t^2(b_{m+1}t^m + \ldots + b_1)\mathrm{e}^{\nu_1 t} = C_2\mathrm{e}^{\nu_1 t} + tC_3\mathrm{e}^{\nu_1 t} + t^2 Q(t)\mathrm{e}^{\nu_1 t}.$$

Так как $z_{оо}(t) = C_2\mathrm{e}^{\nu_1 t} + tC_3\mathrm{e}^{\nu_1 t}$, то $z_{чн}(t) = t^2 Q(t)\mathrm{e}^{\nu_1 t}$, где $\deg Q = m$. ■

Рассмотрим уравнение:

$L_n x = P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$, где $P(t)$ - действительный многочлен $\gamma \in R$, тогда $x_{чн}(t) = t^j Q(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$,

где $\deg Q = \deg P$, $j = \begin{cases} 0, \text{ если } \gamma \text{ - не собственное значение } L_n, \\ \text{кратность } \gamma, \text{ если } \gamma \text{ - собственное значение } L_n. \end{cases}$

Рассмотрим уравнение:

$L_n x = (M(t)\cos\mu t + N(t)\sin\mu t)\mathrm{e}^{\lambda t}$, где $M(t)$, $N(t)$ - действительные многочлены, $\gamma = \lambda + i\mu$, тогда

$x_{чн}(t) = t^j(A(t)\cos\mu t + B(t)\sin\mu t)\mathrm{e}^{\lambda t}$,

где $\max\{\deg A, \deg B\} \le \max\{\deg M, \deg N\}$,

$$j = \begin{cases} 0, \text{ если } \gamma \text{ - не собственное значение } L_n, \\ \text{кратность } \gamma, \text{ если } \gamma \text{ - собственное значение } L_n. \end{cases}$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$D^4x - 6D^3x + 10D^2x - 6Dx + 9x = \sin t + \cos 2t + te^t$, $t \in R$.

Решение. $\nu^4 - 6\nu^3 + 10\nu^2 - 6\nu + 9 = 0$; $\nu_{1,2} = \pm i$, $n_{1,2} = 1$, $\nu_3 = 3$, $n_3 = 2$. Поэтому

$x_{oo}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + (C_3t + C_4)e^{3t}$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом Эйлера.

$x_{чн}(t) = t(c_1\cos t + c_2\sin t) + (c_3\cos 2t + c_4\sin 2t) + (c_5t + c_6)e^t$.

$Dx_{чн}(t) = c_1\cos t - c_1t\sin t + c_2\sin t + c_2t\cos t - 2c_3\sin 2t + 2c_4\cos 2t + c_5e^t + c_6e^t + c_5te^t$

$D^2x_{чн}(t) = 2c_2\cos t - c_2t\sin t - 2c_1\sin t - c_1t\cos t - 4c_4\sin 2t - 4c_3\cos 2t + 2c_5e^t + c_6e^t + c_5te^t$

$D^3x_{чн}(t) = -3c_1\cos t + c_1t\sin t - 3c_2\sin t - c_2t\cos t + 8c_3\sin 2t - 8c_4\cos 2t + 3c_5e^t + c_6e^t + c_5te^t$

$D^4x_{чн}(t) = -4c_2\cos t + c_2t\sin t + 4c_1\sin t + c_1t\cos t + 16c_4\sin 2t + 16c_3\cos 2t + 4c_5e^t + c_6e^t + c_5te^t$

Подставляя в уравнение, получим:

$t\sin t$: $0 = 0$,

$t\cos t$: $0 = 0$,

$\sin t$: $-16c_1 + 12c_2 = 1$,

$\cos t$: $12c_1 - 16c_2 = 0$,

$\cos 2t$: $-15c_3 + 36c_4 = 1$,

$\sin 2t$: $-36c_3 - 15c_4 = 0$,

te^t: $8c_5 = 1$,

e^t: $8c_6 = 0$.

Таким образом, $x_{чн}(t) = t\left(-\frac{1}{7}\cos t - \frac{3}{28}\sin t\right) + \left(-\frac{5}{507}\cos 2t + \frac{4}{169}\sin 2t\right) + \frac{1}{8}te^t$.

Тогда

$x_{он}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + (C_3t + C_4)e^{3t} + t\left(-\frac{1}{7}\cos t - \frac{3}{28}\sin t\right) + \left(-\frac{5}{507}\cos 2t + \frac{4}{169}\sin 2t\right) + \frac{1}{8}te^t$

ЛЕКЦИИ 5-6

§14. Интегральная непрерывность решений СТЛУ-n

Рассмотрим неоднородное СтЛУ-n:
$L_n x = f(t)$, $t \in I$, $f(t) \in C(I)$ (14.1)
и однородное СтЛУ-n:
$L_n x = 0$ (14.2).

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ - нормированный в точке $t = 0$ базис пространства решений уравнения (14.2).

Рассмотрим две задачи Коши:

$$\begin{cases} L_n x = f(t), \\ D^k x(s) = \xi_k, k = \overline{0, n-1}, \end{cases} \quad (14.3) \text{ и } \begin{cases} L_n x = f(t), \\ D^k x(s) = \xi_k + \Delta\xi_k, k = \overline{0, n-1}, \end{cases} \quad (14.4)$$

где s - фиксированная точка промежутка I.
На основании ТОР для СтЛУ-1 задачи Коши (14.3) и (14.4) однозначно разрешимы.
Обозначим через $\psi(t)$ единственное решение задачи Коши

$$\begin{cases} L_n x = f(t), \\ D^k x(s) = 0, k = \overline{0, n-1}. \end{cases}$$

Можно доказать, что $\psi(t) = \int\limits_s^t \varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau$.

Задача Коши

$$\begin{cases} L_n x = 0, \\ D^k x(s) = \xi_k, k = \overline{0, n-1}, \end{cases}$$

имеет единственное решение $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k (t - s)$.

Решения задач Коши (14.3) и (14.4) задаются формулами:

$$x(t, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k (t - s) + \psi(t),$$

$$x(t, \xi + \Delta\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k + \Delta\xi_k) \varphi_k (t - s) + \psi(t),$$

где $\xi = (\xi_0, ..., \xi_{n-1})$, $\Delta\xi = (\Delta\xi_0, ..., \Delta\xi_{n-1})$.

Задача Коши (14.3) называется *невозмущенной задачей* Коши, задача Коши (14.4) – *возмущенной*. Определим *отклонение* решений возмущенной и невозмущенной задач Коши:

$$\rho(t,\Delta\xi)=\sum_{j=0}^{n-1}|\,D^j x(t,\xi+\Delta\xi)-D^j x(t,\xi)\,| \quad (14.5).$$

Так как

$$D^j x(t,\xi+\Delta\xi)-D^j x(t,\xi)=$$

$$=D^j\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\xi_k+\Delta\xi_k)\varphi_k(t-s)+\psi(t)\right)-D^j\left(\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\varphi_k(t-s)+\psi(t)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\xi_k D^j\varphi_k(t-s),$$

то $\rho(t,\Delta\xi)=\sum_{j=0}^{n-1}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\xi_k D^j\varphi_k(t-s)\right|$.

Отклонение $\rho(t,\Delta\xi)$ не зависит от начальных значений ξ_k и неоднородности $f(t)$, а зависит от возмущений начальных условий $\Delta\xi_k$ и собственных значений оператора L_n. Таким образом, при исследовании отклонения решений возмущенной и невозмущенной задач Коши, без ограничения общности можно считать, что $f(t)\equiv 0$ и $\xi_0=...=\xi_{n-1}=0$.

Определение. Решение $x(t,\xi)$ задачи Коши (14.3) *непрерывно зависит* от начальных условий на множестве $J\subseteq I$, если $\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta=\delta(\varepsilon)\quad\forall t\in J$ $\forall\Delta\xi=(\Delta\xi_0,...,\Delta\xi_{n-1})\in R^n$, $\|\Delta\xi\|:=\left(\sum_{i=0}^{n-1}|\,\Delta\xi_i\,|^2\right)^{1/2}\le\delta$, выполняется $\rho(t,\Delta\xi)\le\varepsilon$.

Определение. Если решение $x(t,\xi)$ задачи Коши (14.3) непрерывно зависит от начальных условий на каждом отрезке $[a,b]$ из промежутка I, то решение $x(t,\xi)$ называют *интегрально непрерывным* на I.

Теорема. Решение $x(t,\xi)$ задачи Коши (14.3) интегрально непрерывно на I.
Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок $[a,b]\subseteq I$. Так как функции $\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{n-1}$ непрерывно дифференцируемы до $n-1$ порядка включительно, то существует постоянная $M=M_{[a,b]}$, такая, что $|\,D^j\varphi_k(t-s)|\le M$ для любых $t\in[a,b]$, $j,k=\overline{0,n-1}$. Выберем произвольное $\varepsilon>0$.
Имеем

$$\rho(t,\Delta\xi)=\sum_{j=0}^{n-1}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\xi_k D^j\varphi_k(t-s)\right|\le\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}|\,\Delta\xi_k\,||\,D^j\varphi_k(t-s)\,|\le$$

$$\le M\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}|\,\Delta\xi_k\,|=Mn\sum_{k=0}^{n-1}|\,\Delta\xi_k\,|\le Mn^{3/2}\|\Delta\xi\|\le\varepsilon.$$

(В предпоследнем переходе воспользовались неравенством Коши-Буняковского: $(|a_1|+...|a_n|)^2 \le (a_1^2+...+a_n^2)(1+...+1) = n(a_1^2+...+a_n^2)$).

Достаточно выбрать $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{Mn^{3/2}}$. ■

Пример: $D^2x - x = 0$, $x(0) = \xi_0$, $Dx(0) = \xi_1$, $t \ge 0$.

Покажем, что решение задачи Коши не является непрерывно зависимым от начальных условий на промежутке $[0,+\infty)$.

Функции $\varphi_0(t) = \mathrm{ch}\, t$, $\varphi_0(t) = \mathrm{sh}\, t$ образуют базис пространства решений исходного уравнения, нормированный в точке $t = 0$.

$\exists\, \varepsilon_0 = 1 \;\; \forall\, \delta > 0 \;\; \exists t_0 = \max\{-\ln\delta, 0\} \;\; \exists\, \Delta\xi_0 = \delta$, $\Delta\xi_1 = 0$, такие, что

$\rho(t,\Delta\xi) = |\Delta\xi_0 \mathrm{ch}\, t + \Delta\xi_1 \mathrm{sh}\, t| + |\Delta\xi_0 \mathrm{sh}\, t + \Delta\xi_1 \mathrm{ch}\, t| \le |\Delta\xi_0 + \Delta\xi_1|(\mathrm{ch}\, t + \mathrm{sh}\, t) =$

$= |\Delta\xi_0|\, \mathrm{e}^t \ge 1 = \varepsilon_0$.

Тем не менее, решение задачи Коши является интегрально непрерывным на промежутке $[0,+\infty)$.

§15. Устойчивость по Ляпунову решений СТЛУ-n

Рассмотрим невозмущенную и возмущенную задачи Коши на полуоси $I = [s,+\infty)$:

$$\begin{cases} L_n x = 0, \\ D^k x(s) = 0, k = \overline{0, n-1}, \end{cases} \quad (15.1) \text{ и } \begin{cases} L_n x = 0, \\ D^k x(s) = \Delta\xi_k, k = \overline{0, n-1}, \end{cases} \quad (15.2)$$

и отклонение решений возмущенной и невозмущенной задач Коши:

$$\rho(t,\Delta\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\xi_k D^j \varphi_k(t-s) \right|.$$

Определение. Решение задачи Коши (15.1) $x(t) \equiv 0$ называется *устойчивым по Ляпунову* на полуоси $[s,+\infty)$, если решение $x(t) \equiv 0$ непрерывно зависит от начальных данных на полуоси $[s,+\infty)$, то есть: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) \;\; \forall t \in [s,+\infty)$

$\forall \Delta\xi = (\Delta\xi_0, ..., \Delta\xi_{n-1}) \in R^n$, $\|\Delta\xi\| := \left(\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta\xi_i|^2 \right)^{1/2} \le \delta$, выполняется $\rho(t,\Delta\xi) \le \varepsilon$.

Определение. Многочлен $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + ... + a_1\nu + a_0$ называется *ляпуновским*, если для любого корня ν_j выполняется условие: $\mathrm{Re}\nu_j \le 0$ и если $\mathrm{Re}\nu_j = 0$, то кратность корня ν_j равна 1.

Теорема. (*критерий устойчивости по Ляпунову*). Решение задачи Коши (15.1) устойчиво по Ляпунову на полуоси $[s,+\infty)$ тогда и только тогда, когда характеристический многочлен оператора L_n ляпуновский.

Доказательство.

1) Необходимость. Имеем $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ $\forall t \in [s, +\infty)$ $\forall \Delta\xi = (\Delta\xi_0, ..., \Delta\xi_{n-1}) \in R^n$, $\|\Delta\xi\| := \left(\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta\xi_i|^2 \right)^{1/2} \le \delta$, выполняется $\rho(t, \Delta\xi) \le \varepsilon$.

Допустим, что существует собственное значение $\nu_0 = \lambda_0 + i\mu_0$ оператора L_n, такое, что $\mathrm{Re}\nu_0 > 0$. Задача Коши (15.2) имеет решение вида $e^{\lambda_0 t}P(t)$ или $e^{\lambda_0 t}P(t)\sin\mu_0 t$, или $e^{\lambda_0 t}P(t)\cos\mu_0 t$, где $P(t)$ - ненулевой действительный многочлен. Поэтому $\rho(t, \Delta\xi) \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty$ - противоречие.

Допустим, что существует собственное значение $\nu_1 = i\mu_1$ оператора L_n, такое, что кратность корня ν_1 больше 1. Задача Коши (15.2) имеет решение вида $t^\gamma \cos\mu_1 t$ или $t^\gamma \sin\mu_1 t$, где $\gamma \ge 1$. Поэтому $\rho(t, \Delta\xi) \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty$ - противоречие.

2) Достаточность. Пусть $\nu_j = \lambda_j + i\mu_j$, $\lambda_j \le 0$. Решение задачи Коши (15.2) имеет вид:

$$x(t) = \sum_{\lambda_j < 0} (P_j(t)\cos\mu_j t + Q_j(t)\sin\mu_j t)\mathrm{e}^{\lambda_j t} + \sum_{\lambda_j = 0} (b_j \cos\mu_j t + c_j \sin\mu_j t).$$

В равенстве $\rho(t, \Delta\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\xi_k D^j \varphi_k(t-s) \right|$ все коэффициенты при $\Delta\xi_k$ равномерно ограничены постоянной M, не зависящей от t, k, j. Поэтому $\rho(t, \Delta\xi) \underset{\|\Delta\xi\| \to 0}{\to} 0$ равномерно по $t \in [s, \infty)$. ■

Теорема. (*необходимое условие устойчивости по Ляпунову*).
Если решение задачи Коши (15.1) устойчиво по Ляпунову на полуоси $[s, +\infty)$, то все коэффициенты характеристического многочлена оператора L_n неотрицательные.

Доказательство.
Рассмотрим пару комплексно сопряженных корней: $\nu_j = \lambda_j + i\mu_j$, $\overline{\nu}_j = \lambda_j - i\mu_j$, где $\lambda_j \le 0$. Тогда $(\nu - \nu_j)(\nu - \overline{\nu}_j) = \nu^2 - 2\lambda_j\nu + \lambda_j^2 + \mu_j^2$. Поэтому $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + ... + a_1\nu + a_0 = \prod_{\mu_j \ne 0} (\nu^2 - 2\lambda_j\nu + \lambda_j^2 + \mu_j^2) \prod_{\mu_j = 0} (\nu - \lambda_j)$. ■

Аналогично вводится определение устойчивости по Ляпунову решения задачи Коши (15.1) на полуоси $(-\infty, s]$, а также устойчивость на оси $(-\infty, +\infty)$.

Критерий устойчивости по Ляпунову на полуоси $(-\infty, s]$*:*
Решение задачи Коши (15.1) устойчиво по Ляпунову на полуоси $(-\infty, s]$ тогда и только тогда, когда для собственных значений оператора L_n выполняется условие: $\mathrm{Re}\nu_j \ge 0$ и если $\mathrm{Re}\nu_j = 0$, то кратность корня ν_j равна 1.

Критерий устойчивости по Ляпунову на оси $(-\infty,+\infty)$:
Решение задачи Коши (15.1) устойчиво по Ляпунову на оси $(-\infty,+\infty)$ тогда и только тогда, когда для собственных значений оператора L_n выполняется условие: $\operatorname{Re}\nu_j = 0$ и кратность всех корней равна 1.

Пример: $D^4x + 13D^2x + 36x = t^2 - 2t$, $t \in R$. Имеем $\nu_{1,2} = \pm 2i$, $\nu_{1,2} = \pm 3i$. Уравнение обладает двусторонней устойчивостью.

§16. Асимптотическая устойчивость решений СТЛУ-n

Рассмотрим невозмущенную и возмущенную задачи Коши на полуоси $I = [s,+\infty)$:

$$\begin{cases} L_n x = 0, \\ D^k x(s) = 0, k = \overline{0,n-1}, \end{cases} \quad (16.1) \text{ и } \begin{cases} L_n x = 0, \\ D^k x(s) = \Delta\xi_k, k = \overline{0,n-1}, \end{cases} \quad (16.2)$$

и отклонение решений возмущенной и невозмущенной задач Коши:

$$\rho(t,\Delta\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\xi_k D^j \varphi_k (t-s) \right|.$$

Определение. Решение задачи Коши (16.1) $x(t) \equiv 0$ называется *асимптотически устойчивым* на полуоси $[s,+\infty)$, если: 1) решение $x(t)$ устойчиво по Ляпунову на полуоси $[s,+\infty)$, 2) существует $\delta > 0$, такое, что $\rho(t,\Delta\xi) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ для любых $\Delta\xi \in R^n$, $\|\Delta\xi\| \le \delta$.

Определение. Многочлен $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + a_1\nu + a_0$ называется *гурвицевым*, если действительные части всех его корней отрицательные.

Теорема. (*критерий асимптотической устойчивости*). Решение задачи Коши (16.1) асимптотически устойчиво на полуоси $[s,+\infty)$ тогда и только тогда, когда характеристический многочлен оператора L_n гурвицевый.

Доказательство.

1) Необходимость. Из асимптотической устойчивости следует, что характеристический многочлен ляпуновский. Допустим, существует корень ν_0, такой, что $\operatorname{Re}\nu_0 = 0$. Среди слагаемых, входящих в решение возмущенной задачи Коши, присутствуют слагаемые: c или $c_1\cos\mu t + c_2\sin\mu t$. Но эти слагаемые не стремятся к нулю при $t \to +\infty$, что противоречит асимптотической устойчивости.

2) Достаточность. Так как характеристический многочлен гурвицевый, то решение задачи Коши (16.1) устойчиво по Ляпунову на полуоси $[s,+\infty)$.

Кроме того, при $\|\Delta\xi\| \le 1$ имеем: $|P_j(t)\sin\mu_j t + Q_j(t)\sin\mu_j t|\,\mathrm{e}^{\lambda_j t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ так как $\lambda_j < 0$. Поэтому $\rho(t,\Delta\xi) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ при $\|\Delta\xi\| \le 1$. ■

Определение. Гурвицианом многочлена $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + a_1\nu + a_0$ называется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \end{vmatrix},$$

где $a_j = 0$ при $j < 0$.

Например, для многочлена четвертой степени $\nu^4 + a_3\nu^3 + a_2\nu^2 + a_1\nu + a_0$ гурвициан имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Теорема. (*критерий Гурвица*). Многочлен $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + a_1\nu + a_0$ является гурвицевым тогда и только тогда, когда все главные миноры его гурвициана положительные.

Теорема. (*необходимое условие асимптотической устойчивости*).
Если решение задачи Коши (16.1) асимптотически устойчиво на полуоси $[s,+\infty)$, то все коэффициенты характеристического многочлена оператора L_n положительные.
Доказательство.
Рассмотрим пару комплексно сопряженных корней: $\nu_j = \lambda_j + i\mu_j$, $\overline{\nu}_j = \lambda_j - i\mu_j$, где $\lambda_j < 0$. Тогда $(\nu - \nu_j)(\nu - \overline{\nu}_j) = \nu^2 - 2\lambda_j\nu + \lambda_j^2 + \mu_j^2$. Поэтому $\nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + \ldots + a_1\nu + a_0 = \prod\limits_{\mu_j\ne 0}(\nu^2 - 2\lambda_j\nu + \lambda_j^2 + \mu_j^2)\prod\limits_{\mu_j=0}(\nu - \lambda_j)$. ■

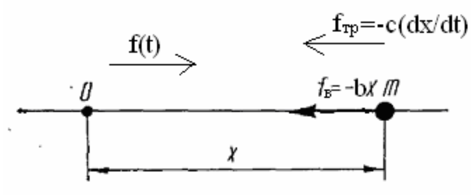
Пример. $D^3x + D^2x + Dx + 0.5x = t$, $t \in [0,+\infty)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = |1| = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{vmatrix} = 0.5 > 0, \Delta_3 = \Delta = 0.25 > 0.$$

Решение любой задачи Коши асимптотически устойчиво на полуоси $[0,+\infty)$.

§17. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Задача. Определить закон движения материальной частицы массой m под влиянием силы, направленной к центру O и прямо пропорциональной удалению x частицы от центра притяжения, силы сопротивления среды и возбуждающей силы $f(t)$, если заданы начальное отклонение точки x_0 и начальная скорость v_0.



Решение. Если на материальную частицу массы m действует сила $f_{\text{в}}(t)$, пропорциональная удалению x частицы от центра притяжения O, то такая сила называется восстанавливающей. Восстанавливающая сила для рассматриваемой задачи равна: $f_{\text{в}}(t) = -bx(t)$, где $b > 0$ - коэффициент упругости восстанавливающей силы. Сила трения среды пропорциональна скорости частицы: $f_{\text{тр}}(t) = -c\dfrac{dx(t)}{dt}$, где $c \geq 0$ - коэффициент сопротивления среды.

Согласно второму закону Ньютона результирующая сила равна: $f_{\text{р}}(t) = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Следовательно, получаем задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c\frac{dx(t)}{dt} - bx(t) + f(t),\ t > 0,\ (17.1)$$

$$x(t)\big|_{t=0} = x_0,\ (17.2)$$

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = v_0.\ (17.3)$$

Рассмотрим случай: $m = 1$, $c = 0$, $b = k^2$, $f(t) = H\sin(\omega t + \gamma)$ (трение среды ничтожно мало, возбуждающая сила периодическая), здесь $\omega > 0$ - частота внешней силы, $k > 0$ - частота собственных колебаний.

Тогда уравнение (17.1) примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = H\sin(\omega t + \gamma).$$

Находим $x_{oo}(t) = C_1\cos kt + C_2\sin kt$.

Если $k \neq \omega$, то $x_{чн}(t) = \dfrac{H}{k^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \gamma)$,

если $k = \omega$, то $x_{чн}(t) = -\dfrac{H}{2\omega}t\cos(\omega t + \gamma)$.

Таким образом, $x(t)=\begin{cases}\xi_0\cos kt+\xi_1\sin kt+\dfrac{H}{k^2-\omega^2}\sin(\omega t+\gamma), k\neq\omega,\\ \xi_0\cos kt+\xi_1\sin kt-\dfrac{H}{2\omega}t\cos(\omega t+\gamma), k=\omega,\end{cases}$

где постоянные ξ_0,ξ_1 однозначно выражаются через постоянные $x_0,v_0,k,\omega,\gamma,H$.

Если частота ω близка к частоте k, то амплитуда вынужденных колебаний $\dfrac{H}{k^2-\omega^2}$ очень велика, вследствие чего может произойти разрушение колебательной системы. Это явление носит название *резонанса.*

Исследуем устойчивость по Ляпунову решения уравнения (17.1). Характеристическое уравнение имеет вид:

$\nu^2+\dfrac{c}{m}\nu+\dfrac{b}{m}=0$. Так как $\nu_1+\nu_2=-c/m$, $\nu_1\nu_2=b/m$, то в случае $c>0$ корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, поэтому решение является асимптотически устойчивым на полуоси $[0,+\infty)$; в случае $c=0$ корни характеристического уравнения имеют нулевые действительные части, поэтому решение является устойчивым по Ляпунову, но не является асимптотически устойчивым.

ЛЕКЦИЯ 7

§18. Однородные стационарные линейные векторные уравнения размерности n (ОСтЛВУ-n)

Рассмотрим систему стационарных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1, \\ \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (18.1) \\ Dx_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n, \end{cases}$$

где $a_{ij} \in R$, $f_i : I \to R$, I - промежуток на числовой оси R, $x_i : I \to R$ - неизвестные функции. Если $f_1 = \ldots = f_n \equiv 0$, то система (18.1) называется *однородной*.

Условия Коши в точке $s \in I$ для системы (18.1) ставятся следующим образом: $x_1(s) = \xi_1, \ldots, x_n(s) = \xi_n$ (18.2), где $\xi_i \in R$.

Систему (18.1) и условия Коши (18.2) можно записать в векторной форме:

$Dx = Ax + f(t)$ (18.3), где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \ldots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$,

$x(s) = \xi$ (18.4), где $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in R_{n,1}$.

Правила дифференцирования и интегрирования векторных функций:

Если $S \in R_{n,n}$, $x : I \to R_{n,1}$, то

1) $D(S \cdot x(t)) = S \cdot Dx(t)$, $D(x^T(t) \cdot S) = Dx^T(t) \cdot S$;

2) $\int S \cdot x(t)dt = S \cdot \int x(t)dt$, $\int x^T(t) \cdot Sdt = \int x^T(t)dt \cdot S$.

Если $P : I \to R_{n,n}$, то

1) $(DP(t))_{i,j} = DP_{i,j}(t)$;

2) $\left(\int P(t)dt\right)_{i,j} = \int P_{i,j}(t)dt$.

Рассмотрим случай, когда в уравнении (18.3) матрица A треугольная:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема. (ТОР для СтЛВУ-n с треугольной матрицей).

Пусть матрица A треугольная, $f(t) \in C(I)$, тогда для любых $s \in I$, $\xi \in R_{n,1}$ задача Коши (18.3) – (18.4) имеет единственное решение на I.

Доказательство. Пусть матрица A нижнетреугольная. Перепишем задачу Коши (18.3) – (18.4) в координатной форме:

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + f_1, \\ Dx_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2, \\ \ldots \\ Dx_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n, \end{cases}$$

$x_1(s) = \xi_1, \ldots, x_n(s) = \xi_n$.

В силу ТОР для СтЛУ-1 задача Коши $Dx_1 - a_{11}x_1 = f_1$, $x_1(s) = \xi_1$ имеет единственное решение $x_1(t)$ на I. Аналогично из ТОР для СтЛУ-1 вытекает, что задача Коши $Dx_2 - a_{22}x_2 = a_{21}x_1 + f_2$, $x_2(s) = \xi_2$ имеет единственное решение $x_2(t)$ на I. Продолжая эти рассуждения, получаем, что из задачи Коши (18.3) – (18.4) можно однозначно найти $x_3(t), \ldots, x_n(t)$. Случай верхнетреугольной матрицы A рассматривается аналогично. ■

Исследуем структуру решения задачи Коши (18.3) - (18.4) в случае $f(t) \equiv 0$ и треугольной матрицы A.

Пусть A - нижнетреугольная матрица. Из доказательства теоремы вытекает, что

$$x_1(t) = \xi_1 \mathrm{e}^{a_{11}(t-s)} ::= \xi_1 y_{11}(t),$$

$$x_2(t) = \xi_2 \mathrm{e}^{a_{22}(t-s)} + \int_s^t \mathrm{e}^{a_{22}(t-\tau)} a_{21} x_1(\tau) d\tau = \xi_2 \mathrm{e}^{a_{22}(t-s)} + \int_s^t \mathrm{e}^{a_{22}(t-\tau)} a_{21} \xi_1 a_{11} \mathrm{e}^{a_{11}(\tau-s)} d\tau ::=$$

$$= \xi_2 y_{22}(t) + \xi_1 y_{21}(t),$$

$$x_3(t) = \xi_3 \mathrm{e}^{a_{33}(t-s)} + \int_s^t \mathrm{e}^{a_{33}(t-\tau)} (a_{31}x_1(\tau) + a_{32}x_2(\tau)) d\tau ::= \xi_3 y_{33}(t) + \xi_2 y_{32}(t) + \xi_1 y_{31}(t),$$

и так далее.

Таким образом, $x(t) = Y(t)\xi$, где $Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} \end{pmatrix}$.

Если A - верхнетреугольная матрица, то $x(t) = Y(t)\xi$, где

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ 0 & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & y_{nn} \end{pmatrix}. \quad (18.5)$$

Теорема. (ТОР для СтЛВУ-n с произвольной матрицей).

Пусть $f(t) \in C(I)$, тогда для любых $s \in I$, $\xi \in R_{n,1}$ задача Коши (18.3) – (18.4) имеет единственное решение на I.

Доказательство. Для любой матрицы $A \in R_{n,n}$ существует матрица S, $\det S \neq 0$, такая, что $A = SJS^{-1}$, где J - матрица Жордана для матрицы A. Сделаем в задаче Коши (18.3) – (18.4) замену переменных $x = S \cdot z$, тогда уравнение (18.3) перепишется следующим образом:
$D(Sz) = ASz + f(t)$, $S \cdot Dz = ASz + f(t)$.
Так как $\det S \neq 0$, то существует S^{-1}, поэтому
$Dz = S^{-1}ASz + S^{-1}f(t)$, $Dz = Jz + S^{-1}f(t)$.
Условие Коши примет вид: $z(s) = S^{-1}\xi$.
На основании ТОР для СтЛВУ-n с треугольной матрицей задача Коши $Dz = Jz + S^{-1}f(t)$, $z(s) = S^{-1}\xi$ имеет единственное решение $z(t)$ на I. Отсюда вытекает, что задача Коши (18.3), (18.4) также имеет единственное решение $x(t)$. ■

Если $f(t) \equiv 0$, то задача Коши $Dz = Jz$, $z(s) = S^{-1}\xi$ имеет единственное решение: $z(t) = Y(t)S^{-1}\xi$, где $Y(t)$ - матрица вида (18.5), поэтому задача Коши (18.3), (18.4) для однородного уравнения имеет единственное решение $x = SY(t)S^{-1}\xi = \Phi(t)\xi$, где $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$.

§19. Пространство решений ОСтЛВУ-n

Рассмотрим задачу Коши
$Dx = Ax$, (19.1)
$x(s) = \xi$. (19.2)
Задача Коши (19.1) – (19.2) имеет единственное решение $x(t) = \Phi(t)\xi$ (19.3).
Заметим, что i-тый столбец матрицы $\Phi(t)$ является решением задачи Коши (19.1) – (19.2) с начальным условием $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, где $\xi_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, j = i, \\ 0, j \neq i. \end{cases}$

Таким образом $\Phi(t)$ - матрица решений $[x_1(t),...,x_n(t)]$ уравнения (19.1), где $x_k(t) = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \dots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$. Рассмотрим $W(t) = \det \Phi(t)$.

Теорема. (формула Остроградского-Лиувилля для ОСтЛВУ-n).
Пусть $\Phi(t)$ - матрица решений уравнения (19.1), тогда имеет место формула Остроградского-Лиувилля: $W(t) = W(s)e^{(a_{11}+\ldots+a_{nn})(t-s)}$ для любых $t, s \in I$.

Доказательство. (для случая $n=2$).

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ x_1=\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix},\ x_2=\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как $Dx_1=Ax_1$, $Dx_2=Ax_2$, то $Dx_{11}=a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}$, $Dx_{21}=a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}$, $Dx_{12}=a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}$, $Dx_{22}=a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}$.

Тогда $DW(t)=\begin{vmatrix} Dx_{11} & Dx_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ Dx_{21} & Dx_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}+$

$+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ a_{22}x_{21} & a_{22}x_{22} \end{vmatrix}=(a_{11}+a_{22})W(t)$.

Следовательно, $W(t)=C\mathrm{e}^{(a_{11}+a_{22})t}$. Отсюда $W(t)=W(s)e^{(a_{11}+a_{22})(t-s)}$. ■

Следствие. Если существует $s\in I$, $W(s)\neq 0$, то $W(t)\neq 0$ для любого $t\in I$.

Пусть $x_1(t),...,x_n(t)$ - решения уравнения (19.1), тогда $D\left(\sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t)\right)=\sum_{k=1}^{n} c_k Dx_k(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k Ax_k(t)=A\sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t)$, поэтому для любых $c_i\in R$ линейная комбинация $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t)$ решений также является решением уравнения (19.1). Следовательно, множество решений уравнения (19.1) образует линейное пространство.

Определение. Множество решений $x_1(t),...,x_n(t)$ уравнения (19.1) образует *базис* пространства решений, если $W(t)=\det\Phi(t)=\det[x_1(t),...,x_n(t)]\neq 0$ для любого $t\in I$, матрицу $\Phi(t)$ называют *базисной* (фундаментальной).

Теорема. Пусть $x_1(t),...,x_n(t)$ - базис пространства решений уравнения (19.1), тогда функция $x(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t)$, $c_k\in R$, является полным решением уравнения (19.1).

Доказательство. С одной стороны, любая функция $x(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t)$ является решением уравнения (19.1). Остаётся доказать, что для любой задачи Коши $Dx=Ax$, $x(s)=\xi$ найдутся постоянные c_k, такие, что функция $x(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t)$ является решением этой задачи Коши. Выберем произвольные $s\in I$, $\xi=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ ... \\ \xi_n \end{pmatrix}\in R_{n,1}$. Пусть $x_k(t)=\begin{pmatrix} x_{1k} \\ ... \\ x_{nk} \end{pmatrix}$, $k=\overline{1,n}$, тогда имеем систему:

$$\begin{cases} \xi_1 = c_1 x_{11}(s) + \ldots + c_n x_{1n}(s), \\ \ldots \\ \xi_n = c_1 x_{n1}(s) + \ldots + c_n x_{nn}(s), \end{cases} \qquad (19.3)$$

определитель этой системы равен $W(s)$. Так как $x_1(t),...,x_n(t)$ - базис, то $W(s) \neq 0$. Поэтому система (19.3) разрешима. ■

Полное решение уравнения (19.1) задается формулой $x(t) = \Phi(t) \cdot C$, где $\Phi(t)$ - базисная матрица, C - вектор произвольных постоянных.

ЛЕКЦИЯ 8

§20. Правило Эйлера построения базисной матрицы

Рассмотрим уравнение $Dx = Ax$ (20.1). Для того чтобы построить базисную матрицу $\Phi(t)$, нужно построить n линейно независимых решений уравнения (20.1).

Решение будем искать в виде: $x(t) = \gamma e^{\nu t}$ (20.2), где $\gamma \in R_{n,1}$, $\gamma \neq \overline{0}$, $\nu \in R$. Подставим в уравнение (20.1): $\gamma \nu e^{\gamma t} = A\gamma e^{\gamma t}$, отсюда получаем, что $A\gamma = \nu\gamma$, то есть $(A - \nu E)\gamma = 0$. Поэтому ν - собственное значение матрицы A, γ - собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению ν.

1) Случай 1:

Все собственные значения матрицы A действительны и различны: $\nu_k \in R$, $k = \overline{1,n}$, $\nu_i \neq \nu_j$, если $i \neq j$. Для каждого собственного значения ν_k строим собственный вектор γ_k и полагаем $x_k(t) = \gamma_k e^{\nu_k t}$, $k = \overline{1,n}$. Так как собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы, то $W(0) = [\gamma_1, ..., \gamma_n] \neq 0 \Rightarrow$ базис построен.

2) Случай 2:

Все собственные значения матрицы A действительные, но есть кратные: $\nu_k \in R$, $k = \overline{1,n}$, $\exists\ \nu_j$ с кратностью $n_j > 1$. Для каждого простого (кратность равна 1) собственного значения строим решение в виде (20.2). В зависимости от $\operatorname{rank}(A - \nu_j E)$ собственному значению ν_j соответствует m линейно независимых собственных значений. Если $m = n_j$, то построение заканчивается. Пусть $m < n_j$; в этом случае решение будем искать в виде $x(t) = (\alpha_0 t + \alpha_1)e^{\nu_j t}$ (20.3), где $\alpha_0, \alpha_1 \in R_{n,1}$. Подставляя в уравнение (20.1), получим: $(\alpha_0 + \nu_j \alpha_0 t + \nu_j \alpha_1)e^{\nu_j t} = A(\alpha_0 t + \alpha_1)e^{\nu_j t}$. Отсюда находим, что $A\alpha_0 = \nu_j \alpha_0$, $A\alpha_1 = \nu_j \alpha_1 + \alpha_0$. Поэтому α_0 - собственный вектор, соответствующий ν_j; α_1 - присоединенный вектор к α_0, т.е. $(A - \nu_j E)\alpha_1 = \alpha_0$. Построим r линейно независимых решений вида (20.3). Если окажется, что $m + r = n_j$, то построение заканчивается. Если $m + r < n_j$, то строим решение вида: $x(t) = (\beta_0 t^2 + \beta_1 t + \beta_2)e^{\nu_j t}$ и так далее.

Если $u_1, u_2, ..., u_k$ - жорданова цепочка матрицы A (т.е. $Au_1 = \nu u_1$, $(A - \nu E)u_2 = u_1, \ldots, (A - \nu E)u_k = u_{k-1}$), соответствующая собственному значению ν, то уравнение (20.1) имеет решение

$$x(t) = \left(u_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + u_2 \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + ... + u_k \right) e^{\nu t}.$$

3) Случай 3:

Среди собственных значений матрицы A есть комплексные: $\nu_k \in C$. По описанной схеме строим комплекснозначные решения $z_k(t) = x_k(t) + iy_k(t)$, $k = \overline{1,n}$. Очевидно, что функции $x_k(t)$, $y_k(t)$ являются решениями уравнения (20.1). Из системы решений $x_1(t),...,x_n(t), y_1(t),..., y_n(t)$ можно выбрать n линейно независимых решений.
Из приведенных ниже рассуждений вытекает, что для действительных собственных значений строим решения, как указано в п. 2. Для каждой пары комплексно сопряженных корней $\nu_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ выбираем одно из собственных значений (например, $\nu_1 = \lambda + i\mu$), строим для ν_1 линейно независимые комплекснозначные решения $z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t),..., z_k(t) = x_k(t) + iy_k(t)$ и в качестве искомых линейно независимых действительнозначных решений выбираем $x_1(t), y_1(t),..., x_k(t), y_k(t)$.

Теорема 1. Пусть A и B - действительные ($n \times n$)-матрицы, такие, что $\det(A + iB) \neq 0$, тогда $\operatorname{rank}(A\ B) \geq n$ над полем R.
Доказательство. Пусть $a_1,...,a_n$ - столбцы матрицы A, $b_1,...,b_n$ - столбцы матрицы B, тогда $a_1 + ib_1,..., a_n + ib_n$ - столбцы матрицы $A + iB$. Так как $\det(A + iB) \neq 0$, то $\operatorname{rank}(a_1 + ib_1,..., a_n + ib_n) = n$ над полем C. Докажем, что из системы столбцов $a_1,...,a_n$, $b_1,...,b_n$ можно выбрать n линейно независимых столбцов над полем C. Допустим, это не так, тогда размерность векторного пространства $L_1 = L(a_1,...,a_n, b_1,...,b_n)$, порожденного системой $a_1,...,a_n$, $b_1,...,b_n$, над полем C меньше, чем n. Рассмотрим векторное пространство $L_2 = L(a_1 + ib_1,..., a_n + ib_n)$, порожденное системой $a_1 + ib_1,..., a_n + ib_n$, над полем C. Очевидно, что пространство L_2 есть подпространство пространства L_1, поэтому $\dim L_2 \leq \dim L_1 < n$, что противоречит условию $\operatorname{rank}(a_1 + ib_1,..., a_n + ib_n) = n$. Так как из системы столбцов $a_1,...,a_n$, $b_1,...,b_n$ можно выбрать n линейно независимых столбцов над полем C, то выбранная подсистема столбцов линейно независима и над полем R, поэтому $\operatorname{rank}(A\ B) \geq n$ над полем R. ■

Теорема 2. Пусть $u_1 = v_1 + iw_1,..., u_k = v_k + iw_k$ - жорданова цепочка действительной ($n \times n$)-матрицы A, соответствующая собственному значения $\alpha = \lambda + i\mu$, тогда $h_1 = -v_1 + iw_1,..., h_k = -v_k + iw_k$ - жорданова цепочка матрицы A, соответствующая собственному значению $\overline{\alpha} = \lambda - i\mu$.
Доказательство. По условию $A(v_1 + iw_1) = (\lambda + i\mu)(v_1 + iw_1)$. Отсюда получаем, что $Av_1 = \lambda v_1 - \mu w_1$, $Aw_1 = \lambda w_1 + \mu v_1$. Но тогда
$A(-v_1 + iw_1) = (\lambda - i\mu)(-v_1 + iw_1)$.
Далее $(A - (\lambda + i\mu)E)(v_2 + iw_2) = v_1 + iw_1$, отсюда имеем:
$Av_2 + \mu w_2 = v_1$, $Aw_2 - \mu v_2 = w_1$.

Поэтому
$(A-(\lambda-i\mu)E)(-v_2+iw_2)=-v_1+iw_1$.
Продолжая эти рассуждения, получим, что
$(A-\alpha E)u_m=u_{m-1}$ для любого $m\in\overline{2,k}$. ■

Пусть матрица A системы (20.1) имеет следующие характеристические числа: $\nu_{1,2}=\lambda_1\pm\mu_1$, …, $\nu_{2r-1,2r}=\lambda_r\pm i\mu_r$, $\nu_{2r+1},\ldots,\nu_m$ с кратностями $d_{1,2},\ldots,$ $d_{2r-1,2r}$, $d_{2r+1},\ldots,$ d_m. Используя схему, описанную в пп. 1)-2), строим базис пространства решений над полем C системы (20.1). Если $u_1=v_1+iw_1,\ldots,u_k=v_k+iw_k$ - жорданова цепочка для собственного значения $\lambda_s+i\mu_s$, то в качестве жордановой цепочки для собственного значения $\lambda_s-i\mu_s$ возьмем следующую: $h_1=-v_1+iw_1,\ldots,h_k=-v_k+iw_k$. Собственному значению $\lambda_s+i\mu_s$ соответствует решение: $\left(u_1\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}+u_2\dfrac{t^{k-2}}{(k-2)!}+\ldots+u_k\right)\mathrm{e}^{(\lambda_s+i\mu_s)t}=(x(t)+iy(t))\mathrm{e}^{(\lambda_s+i\mu_s)t}$. Тогда для собственного значения $\lambda_s-i\mu_s$ строим решение:
$\left(h_1\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}+h_2\dfrac{t^{k-2}}{(k-2)!}+\ldots+h_k\right)\mathrm{e}^{(\lambda_s-i\mu_s)t}=(-x(t)+iy(t))\mathrm{e}^{(\lambda_s-i\mu_s)t}$.
Так как $(x(t)+iy(t))\mathrm{e}^{(\lambda_s+i\mu_s)t}=(x\cos\mu_s t-y\sin\mu_s t)\mathrm{e}^{\lambda_s t}+i(y\cos\mu_s t+x\sin\mu_s t)\mathrm{e}^{\lambda_s t}$,
$(-x(t)+iy(t))\mathrm{e}^{(\lambda_s-i\mu_s)t}=(-x\cos\mu_s t+y\sin\mu_s t)\mathrm{e}^{\lambda_s t}+i(y\cos\mu_s t+x\sin\mu_s t)\mathrm{e}^{\lambda_s t}$.
Поэтому если собственному значению $\lambda_s+i\mu_s$ соответствует решение $z_1(t)=x_1(t)+iy_1(t)$, то для собственного значения $\lambda_s-i\mu_s$ берем решение $z_2(t)=-x_1(t)+iy_1(t)$.
Таким образом, построим комплексный базис пространства решений:
$z_1(t)=x_1(t)+iy_1(t)$, $z_2(t)=-x_1(t)+iy_1(t),\ldots,$ $z_{2p-1}(t)=x_p(t)+iy_p(t)$, $z_{2p}(t)=-x_p(t)+iy_p(t)$, $z_{2p+1}(t)=x_{p+1}(t),\ldots,$ $z_{p+q}(t)=x_q(t)$, где $p+q=n$.
Докажем, что система функций $x_1(t),$ $y_1(t),\ldots,$ $x_p(t),$ $y_p(t)$, $x_{p+1}(t),\ldots,$ $x_q(t)$ образует действительный базис пространства решений. Допустим система $x_1(0),$ $y_1(0),\ldots,$ $x_p(0),$ $y_p(0)$, $x_{p+1}(0),\ldots,$ $x_q(0)$ линейно зависима над полем C. Тогда $\dim L\{x_1(0),y_1(0),\ldots,x_p(0),y_p(0),x_{p+1}(0),\ldots,x_q(0)\}<n$ над полем C. Так как пространство
$L_2=L\{x_1(0)+iy_1(0),-x_1(0)+iy_1(0),\ldots,x_p(0)+iy_p(0),-x_p(0)+iy_p(0),x_{p+1}(0),\ldots,x_q(0)\}$
является подпространством пространства
$L_1=L\{x_1(0),y_1(0),\ldots,x_p(0),y_p(0),x_{p+1}(0),\ldots,x_q(0)\}$,
то $\dim L_2\le\dim L_1<n$, что противоречит условию $\det[z_1(0),\ldots,z_{p+q}(0)]\ne 0$. Так как система $x_1(0),$ $y_1(0),\ldots,$ $x_p(0),$ $y_p(0)$, $x_{p+1}(0),\ldots,$ $x_q(0)$ линейно независима над C, то она линейно независима над R. Поэтому система функций

$x_1(t),\ y_1(t),\dots,\ x_p(t),\ y_p(t),\ x_{p+1}(t),\dots,\ x_q(t)$ образует базис пространства решений системы (20.1).

Алгоритм построения жордановой нормальной формы заданной матрицы A над полем комплексных чисел

Клеткой Жордана $J_k(\alpha)$ называется ($k\times k$)-матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1) Составляем характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E_n)=0$ матрицы A.
2) Вычисляем характеристические числа λ_i и их кратности k_i.
3) Каждому характеристическому числу λ_i кратности k_i соответствует число клеток Жордана, равное $\dim L_{\lambda_i}$ - размерности подпространства собственных векторов L_{λ_i}, отвечающих характеристическому числу λ_i. Отметим, что $\dim L_{\lambda_i}=n-\operatorname{rank}(A-\lambda_i E_n)$.
4) Число $l_m(\lambda_i)$ клеток Жордана порядка m, отвечающих характеристическому числу λ_i, определяется по формуле:
$l_m(\lambda_i)=\operatorname{rank}(A-\lambda_i E_n)^{m-1}-2\operatorname{rank}(A-\lambda_i E_n)^{m}+\operatorname{rank}(A-\lambda_i E_n)^{m+1}$.
5) Каждому характеристическому числу λ_i ставим в соответствие клетки Жордана $J_m(\alpha)$ и из этих клеток строим блочно-диагональную матрицу J_A.

Матрица Жордана определяется единственным образом с точностью до порядка следования клеток Жордана.

Пример. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ построить жорданову нормальную форму J_A.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $(2-\lambda)^3=0$. Отсюда находим единственное характеристическое число $\lambda_1=2$ кратности $k_1=3$. Так как ранг матрицы $A-\lambda_1 E_3=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ равен 1, то число клеток Жордана равно $3-1=2$. Очевидно, что размерность этих клеток 1 и 2. Таким образом,

$$J_A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix} \text{ или } J_A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Пример. Построить базисную матрицу для системы $Dx = Ax$, где $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&2\\3&0&1\end{pmatrix}$.

Решение. Находим характеристический многочлен $\det(A-\lambda E) = -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1=(1-\lambda)^3$. Собственное значение $\nu=1$ имеет кратность $d=3$. Находим собственные вектора:

$$A-E=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&2\\3&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \gamma=(0,\alpha,0), \text{ где } \alpha\in R.$$

Можно построить лишь один линейно независимый собственный вектор. Полагаем $x_1(t)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^t$. Далее строим решение в виде $x_2(t)=(\alpha_0 t+\alpha_1)\mathrm{e}^t$, где $\alpha_0=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, α_1 - присоединенный вектор к вектору α_0.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\-1&0&2&1\\3&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&1/2\\1&0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow \alpha_1=(0,\beta,1/2). \text{ Полагаем } \alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\end{pmatrix}.$$

Поэтому $x_2(t)=\begin{pmatrix}0\\t\\1/2\end{pmatrix}\mathrm{e}^t$.

Далее строим решение в виде: $x_3(t)=(\alpha_0 t^2/2+\alpha_1 t+\alpha_2)\mathrm{e}^t$, где α_2 - присоединенный вектор к вектору α_1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\-1&0&2&0\\3&0&0&1/2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&1/12\\1&0&0&1/6\end{array}\right) \Rightarrow \alpha_1=(1/6,\delta,1/12). \text{ Полагаем } \alpha_2=\begin{pmatrix}1/6\\0\\1/12\end{pmatrix}.$$

Тогда $x_3(t) = \begin{pmatrix} 1/6 \\ t^2/2 \\ t/2+1/12 \end{pmatrix} e^t \Rightarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^t/6 \\ e^t & te^t & t^2e^t/2 \\ 0 & e^t/2 & (t/2+1/12)e^t \end{pmatrix}$.

Пример. Построить базисную матрицу для системы $Dx = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим характеристический многочлен $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1$. Собственные значение $v_{1,2} = \pm i$ имеет кратность $d_{1,2} = 1$. Находим собственные вектора:

$A - v_1 E = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \sim (1 \quad -i) \Rightarrow \gamma_1 = (i,1)$;

$A - v_2 E = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \sim (1 \quad i) \Rightarrow \gamma_2 = (i,-1)$;

поэтому $z_1(t) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} i\cos t - \sin t \\ \cos t + i\sin t \end{pmatrix}$, $z_2(t) = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} e^{-it} = \begin{pmatrix} i\cos t + \sin t \\ -\cos t + i\sin t \end{pmatrix}$. Отсюда $x_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, x_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$, $y_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, y_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. В качестве двух линейно независимых решений можно выбрать $x_1(t)$, $y_1(t)$, тогда $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$.

§21. Неоднородные СтЛВУ-n. Метод сведения линейной системы к одному линейному уравнению

Рассмотрим уравнения

$Dx = Ax + f(t)$, (21.1)

$Dx = Ax$. (21.2)

Пусть $x_{оо}(t)$ - произвольное решение уравнения (21.2), $x_{чр}(t)$ - частное решение уравнения (21.1). Докажем, что общее решение уравнения (21.1) находится по формуле: $x_{он}(t) = x_{оо}(t) + x_{чр}(t)$. (21.3).

С одной стороны, $D(x_{оо}(t) + x_{чр}(t)) = Dx_{оо}(t) + Dx_{чр}(t) = 0 + f(t) = f(t)$, поэтому $x_{оо}(t) + x_{чр}(t)$ содержится во множестве $x_{он}(t)$, с другой стороны, $D(x_{он}(t) - x_{чн}(t)) = D(x_{он}(t)) - D(x_{чн}(t)) = f(t) - f(t) = 0$, поэтому $x_{он}(t) - x_{чн}(t)$ содержится во множестве $x_{оо}(t)$, а следовательно, $x_{он}(t)$ содержится во множестве $x_{оо}(t) + x_{чр}(t)$. Таким образом, формула (21.3) доказана.

Пусть $n=2$:

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t), \\ Dx_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t). \end{cases} \quad (21.4)$$

Если $a_{12}=a_{21}=0$, то система (21.4) распадается на два независимых уравнения. Предположим, что $a_{12} \neq 0$, тогда выразим из первого уравнения x_2:

$$x_2 = \frac{Dx_1 - a_{11}x_1 - f_1(t)}{a_{12}} \quad (21.5)$$

и подставим во второе уравнение системы (21.4):

$$\frac{1}{a_{12}}D^2x_1 - \frac{a_{11}}{a_{12}}Dx_1 - \frac{1}{a_{12}}Df_1(t) = a_{21}x_1 + \frac{a_{22}}{a_{12}}Dx_1 - \frac{a_{22}a_{11}}{a_{12}}x_1 - \frac{a_{22}}{a_{12}}f_1(t) + f_2(t) \iff$$

$$\iff D^2x_1 - (a_{11}+a_{22})Dx_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = Df_1(t) - a_{22}f_1(t) + a_{12}f_2(t) \quad (21.6).$$

Из уравнений (21.6) и (21.5) находим общее решение $x_1(t)$, $x_2(t)$.

§22. Правило Лагранжа нахождения частного решения неоднородного СтЛВУ-n.

Рассмотрим уравнения

$Dx = Ax + f(t)$, (22.1)

$Dx = Ax$. (22.2)

Как было показано в предыдущем параграфе, $x_{он}(t) = x_{оо}(t) + x_{чр}(t)$. Кроме того, $x_{оо}(t) = \Phi(t)C$, где $\Phi(t)$ - базисная матрица уравнения (22.2). Частное решение $x_{чр}(t)$ уравнения (22.1) будем искать в виде: $x_{чр}(t) = \Phi(t)U(t)$ (22.3), где $U: I \to R_{n,1}$ - неизвестная функция.

Имеем $D(\Phi(t)U(t)) = A\Phi(t)U(t) + f(t)$,

$D\Phi(t)U(t) + \Phi(t)DU(t) = A\Phi(t)U(t) + f(t)$,

$(D\Phi(t) - A\Phi(t))U(t) + \Phi(t)DU(t) = f(t)$,

$\Phi(t)DU(t) = f(t)$,

$$DU(t) = \Phi^{-1}(t)f(t) \Rightarrow U(t) = \int_s^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

поэтому $x_{чр}(t) = \Phi(t)\int_s^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \int_s^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$.

Следовательно, $x_{он}(t) = \Phi(t)C + \int_s^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$.

Решение задачи Коши $Dx = Ax + f(t)$, $x(s) = \xi$ определяется по формуле:

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\xi + \int_s^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

ЛЕКЦИИ 9-10

§23. Построение базисной матрицы однородного СтЛВУ-n с помощью экспоненты матрицы

Рассмотрим уравнения $Dx = Ax$ (23.1).
$Dx = Ax + f(t)$ (23.2).

Обозначим $\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$ - евклидову норму матрицы.

Определение. *Экспонентой матрицы* $A \in R_{n,n}$ называется матрица $\exp(A) = \mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Так как $\|A^k\| \le \|A\|^k$, то $\|\mathrm{e}^A\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \mathrm{e}^{\|A\|} < \infty$. Поэтому определение экспоненты матрицы корректно.

Лемма. $D(\mathrm{e}^{At}) = A\mathrm{e}^{At}$.

Доказательство. Так как степенные ряды $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} D\left(\frac{A^k t^k}{k!} \right)$ сходятся локально равномерно на R, то возможно почленное дифференцирование ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$, т.е.:

$$D(\mathrm{e}^{At}) = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} D\left(\frac{A^k t^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} t^k}{k!} = A\mathrm{e}^{At}. \ \blacksquare$$

Так как $\det(\mathrm{e}^{A\cdot 0}) = \det(E) = 1 \ne 0$, то матрица e^{At} является базисной матрицей для уравнения (23.1). Следовательно, общее решения уравнения (23.2) находится по формуле: $x_{он}(t) = \mathrm{e}^{At}C + \int_s^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau$, а решение задачи Коши $Dx = Ax + f(t)$, $x(s) = \xi$, находится следующим образом: $x(t) = \mathrm{e}^{A(t-s)}\xi + \int_s^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau$.

Обозначим через J жорданову нормальную форму для матрицы A, тогда $A = SJS^{-1}$, где S - трансформирующая матрица, $\det S \ne 0$. Тогда $A^k = SJ^kS^{-1}$ и $\mathrm{e}^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SJ^kS^{-1}t^k}{k!} = S\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} S^{-1} = S\mathrm{e}^{Jt}S^{-1}$.

Пусть $J = diag\{J_1,...,J_l\}$, где J_i - клетки Жордана, тогда $\mathrm{e}^{Jt} = diag\{\mathrm{e}^{J_1 t},...,\mathrm{e}^{J_l t}\}$.

Лемма. Пусть $J_m(\nu)$ - $m\times m$-клетка Жордана, соответствующая собственному значению ν, тогда

$$\mathrm{e}^{J_m(\nu)t}=\mathrm{e}^{\nu t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{m-2}/(m-2)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Так как $J_m(\nu)=\nu E_m+H_{1,m}$, где

$$H_{1,m}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\mathrm{e}^{J_m(\nu)t}=\mathrm{e}^{\nu E_m t}\mathrm{e}^{H_{1,m}t}=\mathrm{e}^{\nu t}\mathrm{e}^{H_{1,m}t}=\mathrm{e}^{\nu t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_{1,m}^k t^k}{k!}=$$

$$\mathrm{e}^{\nu t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}+\mathrm{e}^{\nu t}t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}+$$

$$\mathrm{e}^{\nu t}\frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}+\dots+\mathrm{e}^{\nu t}\frac{t^{m-1}}{m!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$\mathrm{e}^{\nu t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{m-2}/(m-2)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $H_{1,m}^k=O_m$ при $k\ge m$. ■

Пример. Построить базисную матрицу для уравнения $Dx=Ax$ с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим характеристический многочлен
$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3$. Собственное значение $\nu = 1$ имеет кратность $d = 3$. Так как
$\mathrm{rank}(A-E) = 2$, то матрица Жордана J состоит из одной клетки, т.е.:
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Трансформирующая матрица S состоит из собственного и присоединенных векторов, которые были найдены в примере из параграфа 20:
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/12 \end{pmatrix}.$$
Следовательно,
$$\Phi(t) = \mathrm{e}^{At} = S\mathrm{e}^{Jt}S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t & t^2\mathrm{e}^t/2 \\ 0 & \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t^2 - t & 1 & 2t \\ 3t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§24. Интегральная непрерывность решений СтЛВУ-n

Рассмотрим невозмущенную и возмущенную задачи Коши:
$Dx = Ax + f(t),\ x(s) = \xi$, (24.1)
$Dx = Ax + f(t),\ x(s) = \xi + \Delta\xi$. (24.2)
Эти задачи Коши имеют единственные решения:
$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t-s)}\xi + \int_s^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau \text{ и } \tilde{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t-s)}(\xi + \Delta\xi) + \int_s^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau \quad (24.3).$$
Определим отклонение решений (24.3):
$\rho(t,\Delta\xi) = \left\|\tilde{x}(t) - x(t)\right\| = \left\|\mathrm{e}^{A(t-s)}\Delta\xi\right\|$.
Определение. Решение $x(t)$ задачи Коши (24.1) *непрерывно зависит* от начальных условий на промежутке I, если $\lim\limits_{\|\Delta\xi\|\to 0} \rho(t,\Delta\xi) = 0$ равномерно по $t \in I$. Решение $x(t)$ задачи Коши (24.1) *интегрально непрерывно* на промежутке I, если на любом отрезке $[a,b] \subseteq I$ оно непрерывно зависит от начальных условий.
Теорема. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на промежутке I, тогда решение $x(t)$ задачи Коши (24.1) интегрально непрерывно на I.

Доказательство. Зафиксируем произвольный отрезок $[a,b]$ из промежутка I, тогда существует постоянная M, такая, что $\left\| e^{A(t-s)} \right\| \le M$ для любых $t \in [a,b]$. Так как $\left\| e^{A(t-s)} \Delta\xi \right\| \le \left\| e^{A(t-s)} \right\| \left\| \Delta\xi \right\| \le M \left\| \Delta\xi \right\|$, то $\lim\limits_{\|\Delta\xi\| \to 0} \rho(t,\Delta\xi) = 0$ равномерно по $t \in [a,b]$. ■

§25. Устойчивость решений СтЛВУ-n

Рассмотрим невозмущенную и возмущенную задачи Коши:

$Dx = Ax + f(t),\ x(s) = \xi$, (25.1)

$Dx = Ax + f(t),\ x(s) = \xi + \Delta\xi$, (25.2)

и отклонение решений возмущенной и невозмущенной задач Коши:

$\rho(t,\Delta\xi) = \left\| \tilde{x}(t) - x(t) \right\| = \left\| e^{A(t-s)} \Delta\xi \right\|$.

Так как отклонение не зависит от $f(t)$ и ξ, то, не нарушая общности, будем считать, что $f(t) \equiv 0$, $\xi = 0$.

Определение. Решение $x(t) \equiv 0$ задачи Коши (25.1) *устойчиво по Ляпунову* на полуоси $[s,+\infty)$, если оно непрерывно зависит от начальных условий на промежутке $[s,+\infty)$, т.е. $\lim\limits_{\|\Delta\xi\| \to 0} \rho(t,\Delta\xi) = 0$ равномерно по $t \in [s,+\infty)$.

Лемма. Пусть матрицы $A, B \in R_{n,n}$ подобны, т.е. $\exists\ S \in R_{n,n}$: $\det S \ne 0$, $A = SBS^{-1}$. Решение задачи Коши $Dx = Ax,\ x(s) = 0$ устойчиво по Ляпунову на полуоси $[s,+\infty)$ тогда и только тогда, когда решение задачи Коши $Dx = Bx,\ x(s) = 0$ устойчиво по Ляпунову на полуоси $[s,+\infty)$.

Доказательство. Пусть нулевое решение задачи Коши $Dx = Bx,\ x(s) = 0$ устойчиво по Ляпунову на полуоси $[s,+\infty)$. Обозначим $\rho_A(t,\Delta\xi) = \left\| e^{A(t-s)} \Delta\xi \right\|$, $\rho_B(t,\Delta\xi) = \left\| e^{B(t-s)} \Delta\xi \right\|$. Так как $A = SBS^{-1}$, то

$\rho_A(t,\Delta\xi) = \left\| S e^{B(t-s)} S^{-1} \Delta\xi \right\| \le \left\| S \right\| \left\| e^{B(t-s)} \Delta\eta \right\| = \left\| S \right\| \rho_B(t,\Delta\eta)$, где $\Delta\eta = S^{-1}\Delta\xi$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что для любых $\Delta\eta$, $\left\| \Delta\eta \right\| \le \delta$, выполняется неравенство $\left\| S \right\| \rho_B(t,\Delta\eta) \le \varepsilon$ для всех $t \in [s,+\infty)$. Так как $\left\| \Delta\eta \right\| \le \left\| S^{-1} \right\| \left\| \Delta\xi \right\|$, то для любых $\left\| \Delta\xi \right\|$, $\left\| \Delta\xi \right\| \le \delta / \left\| S^{-1} \right\|$, выполняется неравенство $\rho_A(t,\Delta\xi) \le \varepsilon$ для всех $t \in [s,+\infty)$. Поэтому нулевое решение задачи Коши $Dx = Ax,\ x(s) = 0$ устойчиво по Ляпунову на полуоси $[s,+\infty)$. Аналогично доказывается обратное утверждение. ■

Теорема. (критерий устойчивости по Ляпунову).

Решение задачи Коши (25.1) устойчиво по Ляпунову на полуоси $[s,+\infty)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия: 1) все собственные значения матрицы A имеют неположительные действительные части; 2) если собственное значение ν матрицы A имеет нулевую действительную часть, то все клетки Жордана $J(\nu)$ жордановой нормальной формы матрицы A имеют размер 1.

Доказательство.

Не нарушая общности, можно считать, что матрица A совпадает с матрицей Жордана J для матрицы A. Тогда $\rho(t,\Delta\xi)=\left\|\mathrm{e}^{J(t-s)}\Delta\xi\right\|$.

1) Необходимость. Допустим, существует собственное значение ν_1, $\mathrm{Re}\nu_1>0$.

Тогда $\mathrm{e}^{Jt}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\nu_1 t} & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & *\end{pmatrix}$; выберем $\Delta\xi=\begin{pmatrix}\delta \\ 0 \\ \dots \\ 0\end{pmatrix}$, где $\delta>0$. В таком случае

$\rho(t,\Delta\xi)=\begin{pmatrix}\delta\mathrm{e}^{\nu_1(t-s)} \\ 0 \\ \dots \\ 0\end{pmatrix}$, поэтому $\left\|\rho(t,\Delta\xi)\right\|=\delta\,|\,\mathrm{e}^{\nu_1(t-s)}\,|=\delta\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\nu_1(t-s)}$. Следовательно, $\rho(t,\Delta\xi)$ не стремится равномерно к 0 при $\delta\to 0$.

Допустим, существует собственное значение ν_1, $\mathrm{Re}\nu_1=0$, и в матрице Жордана J есть клетка $J(\nu_1)$ размерности, большей 1.

Тогда $\mathrm{e}^{Jt}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\nu_1 t} & t\mathrm{e}^{\nu_1 t} & \dots & * \\ 0 & \mathrm{e}^{\nu_1 t} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & *\end{pmatrix}$; выберем $\Delta\xi=\begin{pmatrix}0 \\ \delta \\ \dots \\ 0\end{pmatrix}$, где $\delta>0$. В этом случае

$\rho(t,\Delta\xi)=\begin{pmatrix}\delta(t-s)\mathrm{e}^{\nu_1(t-s)} \\ \delta\mathrm{e}^{\nu_1(t-s)} \\ \dots \\ 0\end{pmatrix}$, поэтому $\left\|\rho(t,\Delta\xi)\right\|=\delta((t-s)^2+1)^{1/2}$. Следовательно, $\rho(t,\Delta\xi)$ не стремится равномерно к 0 при $\delta\to 0$.

2) Достаточность. По условию теоремы:

$\mathrm{e}^{Jt}=\mathrm{diag}\{\Omega_1(t),\dots,\Omega_k(t),\omega_1(t),\dots,\omega_m(t)\}$, где

$$\Omega_j(t)=\mathrm{e}^{(\lambda_j+i\mu_j)(t-s)}\begin{pmatrix}1 & t-s & \dots & (t-s)^{\alpha_j-1}/(\alpha_j-1)! \\ 0 & 1 & \dots & (t-s)^{\alpha_j-2}/(\alpha_j-2)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{(\lambda_j+i\mu_j)(t-s)}P_j(t-s),$$

α_j - кратность собственного значения $\lambda_j+i\mu_j$, $\omega_r(t)=\mathrm{e}^{i\mu_r(t-s)}$.

Так как $\lambda_j < 0$, то $\left\|\Omega_j(t)\right\| \le M$ для любых $t \in [s,+\infty)$. Кроме того, $|\omega_r(t)|=1$. Следовательно, $\rho(t,\Delta\xi) \le \left\|e^{J(t-s)}\right\| \left\|\Delta\xi\right\| \le M_1 \left\|\Delta\xi\right\|$. Поэтому $\lim\limits_{\|\Delta\xi\|\to 0} \rho(t,\Delta\xi) = 0$ равномерно по $t \in [s,+\infty)$. ■

§26. Асимптотическая устойчивость решений СтЛВУ-n

Рассмотрим невозмущенную и возмущенную задачи Коши:

$Dx = Ax,\ \ x(s) = 0$, (26.1)

$Dx = Ax,\ \ x(s) = \Delta\xi$, (26.2)

и отклонение решений возмущенной и невозмущенной задач Коши:

$\rho(t,\Delta\xi) = \left\|e^{A(t-s)}\Delta\xi\right\|$.

Определение. Решение $x(t) \equiv 0$ задачи Коши (26.1) *асимптотически устойчиво* на полуоси $[s,+\infty)$, если оно устойчиво по Ляпунову на полуоси $[s,+\infty)$ и существует $\delta > 0$, такое, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(t,\Delta\xi) = 0$ для любых $\Delta\xi$, $\left\|\Delta\xi\right\| \le \delta$.

Лемма. Пусть матрицы $A, B \in R_{n,n}$ подобны. Решение задачи Коши $Dx = Ax$, $x(s) = 0$ асимптотически устойчиво на полуоси $[s,+\infty)$ тогда и только тогда, когда решение задачи Коши $Dx = Bx$, $x(s) = 0$ асимптотически устойчиво на полуоси $[s,+\infty)$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы из предыдущего параграфа.

Теорема. (критерий асимптотической устойчивости).

Решение задачи Коши (26.1) асимптотически устойчиво на полуоси $[s,+\infty)$ тогда и только тогда, когда характеристический многочлен матрицы A гурвицевый.

Доказательство.

Не нарушая общности, можно считать, что матрица A совпадает с матрицей Жордана J для матрицы A. Тогда $\rho(t,\Delta\xi) = \left\|e^{J(t-s)}\Delta\xi\right\|$.

1) Необходимость. По условию решение задачи Коши (26.1) устойчиво по Ляпунову. Допустим, существует собственное значение ν_1, $\mathrm{Re}\nu_1 = 0$.

Тогда $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\nu_1 t} & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}$; выберем $\Delta\xi = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\delta > 0$. В этом случае

$\rho(t,\Delta\xi) = \begin{pmatrix} \delta e^{\nu_1(t-s)} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, поэтому $\left\|\rho(t,\Delta\xi)\right\| = \delta$. Следовательно, $\rho(t,\Delta\xi)$ не стремится к 0 при $t \to +\infty$ ни при каких $\Delta\xi$.

2) Достаточность. Так как характеристический многочлен гурвицевый, то решение задачи Коши (26.1) устойчиво по Ляпунову.

Кроме того, $e^{Jt} = \mathrm{diag}\{\Omega_1(t),...,\Omega_k(t)\}$, где

$$\Omega_j(t) = e^{(\lambda_j + i\mu_j)(t-s)} \begin{pmatrix} 1 & t-s & ... & (t-s)^{\alpha_j - 1}/(\alpha_j - 1)! \\ 0 & 1 & ... & (t-s)^{\alpha_j - 2}/(\alpha_j - 2)! \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = e^{(\lambda_j + i\mu_j)(t-s)} P_j(t-s),$$

α_j - кратность собственного значения $\lambda_j + i\mu_j$.

Так как $\lambda_j < 0$, то $\Omega_j(t) \to O_{\alpha_j,\alpha_j}$ при $t \to +\infty$. Следовательно, $e^{Jt} \to O_{n,n}$ при $t \to +\infty$. Поэтому $\rho(t,\Delta\xi) = \left\| e^{J(t-s)}\Delta\xi \right\| \le \left\| e^{J(t-s)} \right\| \left\| \Delta\xi \right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ для любых $\Delta\xi$, $\left\| \Delta\xi \right\| \le 1$. ■

§27. Математическая модель разложения химического вещества

Задача. Некоторое вещество A разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из них пропорциональна количеству неразложившегося вещества. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ - количества веществ P и Q, образовавшихся к моменту t. Определить закон их изменений, зная, что в начальный момент $x = 0, y = 0$, а через 1 секунду $x = \frac{3}{8}c$, $y = \frac{1}{8}c$, где c - первоначальное количество вещества A.

Решение. В момент времени t скорости образования веществ P и Q равны:

$$\begin{cases} Dx = k_1(c - x - y), \\ Dy = k_2(c - x - y), \end{cases}$$

так как к этому моменту количество неразложившегося вещества A равно $c - x - y$.

Дифференцируя первое уравнение системы по t, получим:

$D^2x = -k_1Dx - k_1Dy$.

Подставим из второго уравнения системы значение Dy:

$D^2x = -k_1Dx - k_1k_2c + k_1k_2x + k_1k_2y$ (27.1).

Теперь из первого уравнения выразим $k_1y = k_1c - k_1x - Dx$ и подставим в (27.1):

$D^2x = -k_1Dx - k_1k_2c + k_1k_2x + k_1k_2c - k_1k_2x - k_2Dx \Leftrightarrow D^2x + (k_1 + k_2)Dx = 0$ (27.2).

Находим общее решение уравнения (27.2): $x(t) = C_1 + C_2e^{-(k_1+k_2)t}$. Отсюда находим, что

$$y = c - x - \frac{1}{k_1}Dx = c - C_1 - C_2e^{-(k_1+k_2)t} + C_2\frac{k_1 + k_2}{k_1}e^{-(k_1+k_2)t} = c - C_1 + C_2\frac{k_2}{k_1}e^{-(k_1+k_2)t}.$$

Подставляя начальные условия, находим, что:

$C_1 + C_2 = 0$, $c - C_1 + C_2 \dfrac{k_2}{k_1} = 0$. Откуда $C_1 = \dfrac{k_1 c}{k_1 + k_2}$, $C_2 = -\dfrac{k_1 c}{k_1 + k_2}$. Следовательно, $x(t) = \dfrac{k_1 c}{k_1 + k_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-(k_1+k_2)t}\right)$, $y(t) = \dfrac{k_2 c}{k_1 + k_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-(k_1+k_2)t}\right)$.

Неизвестные коэффициенты k_1 и k_2 найдем из дополнительных условий задачи: при $t = 1$ $x = \dfrac{3}{8}c$, $y = \dfrac{1}{8}c$. Имеем:

$\dfrac{3c}{8} = \dfrac{k_1 c}{k_1 + k_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-(k_1+k_2)}\right)$, $\dfrac{c}{8} = \dfrac{k_2 c}{k_1 + k_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-(k_1+k_2)}\right)$.

Отсюда определяем, что $k_1 = 3k_2$ и тогда $\dfrac{c}{8} = \dfrac{c}{4}\left(1 - \mathrm{e}^{-4k_2}\right)$. Откуда $k_2 = \dfrac{\ln 2}{4}$, $k_1 = \dfrac{3\ln 2}{4}$.

Окончательно получаем, что

$x(t) = \dfrac{3c}{4}\left(1 - \dfrac{1}{2^t}\right)$, $y(t) = \dfrac{c}{4}\left(1 - \dfrac{1}{2^t}\right)$.

Исследуем устойчивость и асимптотическую устойчивость решения.

Матрица системы имеет вид:

$A = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_1 \\ -k_2 & -k_2 \end{pmatrix}$.

Находим характеристический многочлен: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + (k_1 + k_2)\lambda$. Характеристические числа: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -k_1 - k_2$. Так как по смыслу задачи $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, то решение задачи является устойчивым по Ляпунову на полуоси $[0, +\infty)$, но не является асимптотически устойчивым.

ЛЕКЦИЯ 11

§28. Дифференциальные уравнения первого порядка в нормальной дифференциальной форме

Рассматривается уравнение вида
$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, (28.1) – уравнение в нормальной дифференциальной форме,
где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ - функции, определенные в области $D\subseteq R^2$.
Если $Q(x,y)\neq 0$ в области D, то уравнение (28.1) можно записать так:
$y'=f(x,y)$. (28.2)
Аналогично, если $P(x,y)\neq 0$ в области D, то уравнение (28.1) можно записать следующим образом:
$x'=g(x,y)$. (28.3)
Уравнение (28.2), (28.3) – уравнения с выделенными производными.

Определение.

I) Функция $y=y(x)$, заданная на промежутке I, называется решением уравнения (28.1) в явном виде, если: 1) $(x,y(x))\in D\quad \forall x\in I$; 2) $y(x)\in D(I)$; 3) $P(x,y(x))dx+Q(x,y(x))y'(x)dx\overset{x\in I}{\equiv}0$. Аналогично определяется решение в явном виде как функция $x=x(y)$.

II) Пара функций $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in I$, называется решением уравнения (28.1) в параметрическом виде, если:
1) $(x(t),y(t))\in D\quad \forall t\in I$; 2) $x(t),\quad y(t)\in D(I)$, $(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0\quad \forall t\in I$; 3) $P(x(t),y(t))x'(t)dt+Q(x(t),y(t))y'(t)dt\overset{t\in I}{\equiv}0$.

III) Соотношение $u(x,y)=0$ называется решением уравнения (28.1) в явном виде, если его можно записать либо в явном, либо в параметрическом виде.
Если соотношение $u(x,y)=0$ является решением уравнения (28.1) в неявном виде, то его называют интегралом уравнения (28.1). Кривая, представляющая график некоторого решения уравнения (28.1) называется интегральной кривой.

Определение.

Соотношения 1) $y=y(x,C)$ (или $x=x(y,C)$) ; 2) $x=x(t,C),\quad y=y(t,C)$; 3) $\Phi(x,y,C)=0$, где $C\in\Gamma\subseteq R$, называются общим решением уравнения (28.1) в 1) явном; 2) параметрическом; 3) неявном виде, если: для любого $C\in\Gamma$ эти соотношения являются решениями уравнения (28.1) соответствующего вида.
Решение, полученное из ОР при фиксированном C, называется частным решением. Совокупность всех решений уравнения (28.1) называется полным решением. Если для любого $C\in\Gamma$ решение в неявном виде записывается в виде $u(x,y)=C$, то его называют общим интегралом уравнения (28.1).

Классификация точек

1. Точка $(x,y)\in D$ называется точкой существования уравнения (28.1), если существует интегральная кривая уравнения (28.1), проходящая через точку (x,y).
2. Точка существования (x,y) уравнения (28.1) называется точкой единственности, если существует окрестность этой точки, в которой все интегральные кривые, проходящие через точку (x,y), совпадают. Иначе точка существования (x,y) называется точкой неединственности.
3. Точка существования (x,y) уравнения (28.1) называется точкой ветвления, если через точку проходят по крайней мере две интегральные кривые с общей касательной в точке (x,y) и отличающиеся друг от друга в любой окрестности точки (x,y).
4. Точка $(x_0,y_0)\in D$, такая, что $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$, называется особой точкой уравнения (28.1). В противном случае точка $(x_0,y_0)\in D$ называется неособой.

§29. Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Любая замкнутая кривая γ на плоскости делит плоскость на две области: ограниченную и неограниченную (ограниченную область будем называть внутренней относительно кривой γ). Область $D\subseteq R^2$ называется односвязной, если для любой замкнутой кривой $\gamma\subset D$ внутренняя область относительно кривой γ содержится в D.

Рассмотрим уравнение
$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, (29.1), $(x,y)\in D,\ D$ - односвязная область в R^2.
Определение.
Если существует дифференцируемая функция $u(x,y)$, такая, что $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy\quad\forall(x,y)\in D$, то уравнение (29.1) называется уравнением в полных дифференциалах (УПД).

Криволинейный интеграл второго рода (КРИ-2) и независимость КРИ-2 от формы пути интегрирования

Пусть $\gamma:[a,b]\to R^2$ - кривая на плоскости, $\{A_k\}_{k=0}^n$ - разбиение кривой γ, точки которого имеют координаты $A_k(x_k,y_k)$ и расположены последовательно, δ - диаметр разбиения. Обозначим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$. Пусть $M_k(u_k,v_k)$ - внутренняя точка дуги $A_{k-1}A_k$ кривой γ. Для функций $P(x,y)$, $Q(x,y)$, определенных на γ, построим суммы $\sum_{k=1}^{n}P(u_k,v_k)\Delta x_k$, $\sum_{k=1}^{n}Q(u_k,v_k)\Delta y_k$.
Конечные пределы этих сумм при $\delta\to 0$ обозначают соответственно
$\int_\gamma P(x,y)dx$, $\int_\gamma Q(x,y)dy$.

Обычно рассматривают сумму таких интегралов, обозначая её

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

и называют криволинейным интегралом второго рода (КРИ-2).

Теорема. Пусть $\gamma:[a,b]\to R^2$, $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, - гладкая кривая, $P(x,y),Q(x,y)$ - непрерывные функции в точках дуги γ. Тогда $\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt$.

Теорема. (о независимости КРИ-2 от формы пути интегрирования).

Пусть в односвязной области D заданы функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные первого порядка. Тогда следующие четыре условия равносильны:

1) Для любой замкнутой кривой $\gamma\subset D$ выполняется условие $\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

2) для любых точек $A,B\in D$ интеграл $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от формы пути, соединяющего точки A,B.

3) Выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом в области D, т.е. существует дифференцируемая функция $u(x,y)$, такая, что $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ для любых $(x,y)\in D$.

4) Выполняется условие Эйлера: $P_y'(x,y) = Q_x'(x,y)$ $\forall (x,y)\in D$.

Если выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом, то первообразную $u(x,y)$ можно найти двумя способами:

Способ 1: $u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_0}^{x} P(\tau,y_0)d\tau + \int_{y_0}^{y} Q(x,\xi)d\xi$, где (x_0,y_0) - фиксированная точка области D (при условии, что ломаная $A_1(x_0,y_0)A_2(x_0,y)A_3(x,y)$ лежит в D).

Способ 2: так как $du(x,y) = u_x'(x,y)dx + u_y'(x,y)dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, то $u_x' = P$, $u_y' = Q$. Поэтому $u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = \overline{P}(x,y) + \varphi(y)$. Дифференцируем по y: $u_y' = \overline{P}_y'(x,y) + \varphi'(y) = Q(x,y)$. Отсюда находим $\varphi(y) = \int (Q(x,y) - \overline{P}_y'(x,y))dy$.

Теорема. Пусть уравнение (29.1) – УПД, тогда полное решение уравнения (29.1) в неявном виде задается формулой:

$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = C$, где (x_0,y_0) - фиксированная точка области D.

Доказательство.
Уравнение (29.1) эквивалентно уравнению $du(x,y)=0$, где $u(x,y)$ - семейство первообразных для выражения $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ в области D. Кроме того, $du(x,y)=0 \Leftrightarrow u(x,y)=C \Leftrightarrow \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=C$. ■

Рассмотрим задачу Коши для УПД:
$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, (29.2), $(x,y)\in D$,
$y(x_0)=y_0$, (29.3), $(x_0,y_0)\in D$.

Решение задачи Коши задается формулой: $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

Пример. Найти решение задачи Коши $2xy^3dx+(5y^4+3x^2y^2+1)dy=0$, $y(0)=1$, $D=R^2$.

Решение. Так как $P_y' = Q_x' = 6xy^2$, то уравнение является УПД, следовательно, решение задачи Коши задается формулой:

$\int\limits_{(0,1)}^{(x,y)} 2xy^3dx+(5y^4+3x^2y^2+1)dy=0$. Вычислим криволинейный интеграл:

$$\int\limits_{(0,1)}^{(x,y)} 2xy^3dx+(5y^4+3x^2y^2+1)dy=\int\limits_0^x 2\tau d\tau+\int\limits_1^y (5\xi^4+3x^2\xi^2+1)d\xi=$$
$$=x^2+y^5+x^2y^3+y-1-x^2-1=y^5+x^2y^3+y-2.$$

Следовательно, соотношение $y^5+x^2y^3+y-2=0$ задает решение задачи Коши в неявном виде.
Приведем альтернативный способ нахождения решения этой задачи Коши.
Так как $du(x,y)=u_x'(x,y)dx+u_y'(x,y)dy=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, то
$u(x,y)=\int 2xy^3dx+\varphi(y)=x^2y^3+\varphi(y)$.
Далее $u_y'(x,y)=3x^2y^2+\varphi'(y)=5y^4+3x^2y^2+1$. Следовательно, $\varphi(y)=y^5+y$.
Поэтому соотношение $3x^2y^2+y^5+y=C$ задает полное решение уравнения в неявном виде. Подставляя начальное условие, находим, что $C=2$.

§30. Интегрирующий множитель

Рассмотрим уравнение
$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, (30.1), $(x,y)\in D,\ D$ - односвязная область в R^2.

Определение. Непрерывная функция $\mu(x,y)$, не обращающаяся в 0 в области D, называется интегрирующим множителем для уравнения (30.1), если уравнение $\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$ является УПД.

Если функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в области D и уравнение (30.1) не имеет особых точек в D, то интегрирующий множитель существует. Но способ его нахождения неизвестен.

Однако иногда удаётся найти интегрирующий множитель в виде $\mu=\mu(\omega(x,y))$, где $\omega=\omega(x,y)$ - некоторая функция.

Пусть $\mu=\mu(\omega)$, $\omega=\omega(x,y)$, $\mu Pdx+\mu Qdy=0$ - УПД.

Тогда выполняется условие Эйлера: $(\mu P)_y^{'}=(\mu Q)_x^{'}$,

следовательно, $\mu_y^{'}P+\mu P_y^{'}=\mu_x^{'}Q+\mu Q_x^{'}$, $\dfrac{d\mu}{d\omega}\omega_y^{'}P+\mu P_y^{'}=\dfrac{d\mu}{d\omega}\omega_x^{'}Q+\mu Q_x^{'}$,

$\dfrac{d\mu}{d\omega}(\omega_y^{'}P-\omega_x^{'}Q)=\mu(Q_x^{'}-P_y^{'})$, $\dfrac{d\mu}{\mu}=\dfrac{Q_x^{'}-P_y^{'}}{\omega_y^{'}P-\omega_x^{'}Q}d\omega$.

Если $\dfrac{Q_x^{'}-P_y^{'}}{\omega_y^{'}P-\omega_x^{'}Q}=\Psi(\omega(x,y))$ (30.2), то $\dfrac{d\mu}{\mu}=\Psi(\omega)d\omega$. Отсюда

$\ln|\mu|=\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\Psi(\tau)d\tau+C$. Следовательно, $\mu(\varpi)=C_1\exp\left(\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\Psi(\tau)d\tau\right)$.

Таким образом, если найдется непрерывно дифференцируемая функция $\omega(x,y)$, такая, что выполняется условие (30.2), то интегрирующий множитель можно выбрать следующим образом: $\mu(x,y)=\exp\left(\int\limits_{\omega_0}^{\omega(x,y)}\Psi(\tau)d\tau\right)$.

Пример. Найти полное решение уравнение $(x-xy)dx+(x^2+y)dy=0$ в области $D=\{(x,y)\,|\,x,y>0\}$.

Решение. Найдем интегрирующий множитель $\mu=\mu(\omega(x,y))$, $\omega(x,y)=x^2+y^2$. Находим $\dfrac{Q_x^{'}-P_y^{'}}{\omega_y^{'}P-\omega_x^{'}Q}=-\dfrac{3}{2(x^2+y^2)}=-\dfrac{3}{2\omega}$. Следовательно,

$\mu(x,y)=C\exp\left(-\int\limits_{\omega_0}^{x^2+y^2}\dfrac{3}{2\tau}d\tau\right)=\dfrac{C_1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. Возьмем $C_1=1$. Тогда имеем УПД:

$\dfrac{x-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx+\dfrac{x^2+y}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy=0$. Найдем первообразную $u(x,y)$ для левой части УПД: $u(x,y)=\int\dfrac{x-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx+\varphi(y)=\dfrac{y-1}{(x^2+y^2)^{1/2}}+\varphi(y)$. Далее

$\left(\dfrac{y-1}{(x^2+y^2)^{1/2}}+\varphi(y)\right)_y^{'}=\dfrac{x^2+y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. Отсюда находим, что $\varphi'(y)=0$. Следовательно, $\dfrac{y-1}{(x^2+y^2)^{1/2}}=C$ - полное решение исходного уравнения в неявном виде.

ЛЕКЦИЯ 12

§31. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Уравнение
$P(x)dx + Q(y)dy = 0$ (31.1), $(x, y) \in D$, D - односвязная область в R^2,
называется уравнением с разделенными переменными.
Уравнение (31.1) – частный случай УПД, поэтому полное решение задается формулой: $\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau + \int\limits_{y_0}^{y} Q(\xi)d\xi = C$, где $(x_0, y_0) \in D$.
Решение задачи Коши
$P(x)dx + Q(y)dy = 0$, $(x, y) \in D$,
$y(x_0) = y_0$, (31.2)
задается формулой: $\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau + \int\limits_{y_0}^{y} Q(\xi)d\xi = 0$.
Уравнение
$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$ (31.3), $(x, y) \in D$, D - односвязная область в R^2,
называется уравнением с разделяющимися переменными.
Предположим, что функции $P_2(x)$ и $Q_1(x)$ имеют лишь изолированные нули α_i, β_j соответственно.
Будем рассматривать уравнение (31.3) на каждом из прямоугольников $\Pi_{i,j} = (\alpha_{i-1}, \alpha_i) \times (\beta_{j-1}, \beta_j)$.
Функция $\mu(x, y) = \dfrac{1}{P_2(y)Q_1(x)}$ является интегрирующим множителем для уравнения (31.3) в области $\Pi_{i,j}$.
Имеем уравнение с разделенными переменными:
$\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \dfrac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$, $(x, y) \in \Pi_{i,j}$,
которое имеет полное решение $\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{P_1(\tau)}{P_2(\tau)}d\tau + \int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{Q_2(\xi)}{Q_1(\xi)}d\xi = C$, $(x_0, y_0), (x, y) \in \Pi_{ij}$.
Кроме того, решениями уравнения (31.3) являются функции $x \equiv \alpha_i$, $y \equiv \beta_j$.

Пример. Построить полное решение уравнения $dy - 2\mathrm{e}^{y}xdx = 0$, $(x, y) \in R^2$.

Решение. Умножая уравнение на интегрирующий множитель $\mu(x, y) = \mathrm{e}^{-y}$, получим уравнение с разделенными переменными $\mathrm{e}^{-y}dy - 2xdx = 0$, полное решение которого задается формулой: $\mathrm{e}^{-y} + x^2 = C$.

Пример. Построить полное решение уравнения $dy + y^2dx = 0$, $(x, y) \in R^2$.

Решение. Функция $y \equiv 0$ является решением уравнения. Рассмотрим уравнение в областях $D_1 = \{(x,y) \mid y > 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid y < 0\}$. В этих областях функция $\mu(x,y) = \frac{1}{y^2}$ является интегрирующим множителем уравнения. Умножая уравнение на интегрирующий множитель, получаем уравнение с разделенными переменными: $\frac{dy}{y^2} + dx = 0$, $(x,y) \in D_i$, $i \in \{1,2\}$, полное решение которого задается соотношением $-\frac{1}{y} + x = C$. Отсюда находим, что $y = \frac{1}{x-C}$.

Таким образом, полное решение исходного уравнения имеет вид:

$$\left[\begin{array}{l} y \equiv 0, \\ y = \dfrac{1}{x-C}, x > C, \\ y = \dfrac{1}{x-C}, x < C. \end{array}\right.$$

Пример. Построить полное решение уравнения $dy - 3y^{2/3}dx = 0$, $(x,y) \in R^2$.

Решение. Функция $y \equiv 0$ является решением уравнения. Рассмотрим уравнение в областях $D_1 = \{(x,y) \mid y > 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid y < 0\}$. В этих областях функция $\mu(x,y) = \frac{1}{3y^{2/3}}$ является интегрирующим множителем уравнения. Умножая уравнение на интегрирующий множитель, получаем уравнение с разделенными переменными: $\frac{dy}{3y^{2/3}} - dx = 0$, $(x,y) \in D_i$, $i \in \{1,2\}$, полное решение которого задается соотношением $y^{1/3} - x = C$. Отсюда находим, что $y = (x+C)^3$. Полным решением исходного уравнения являются следующие функции:

$$y = \begin{cases} (x+C_1)^3, x \le -C_1, \\ 0, x \in (-C_1, -C_2), \\ (x+C_2)^3, x \ge -C_2, \end{cases}$$

где $-\infty \le C_2 \le C_1 \le +\infty$.

§32. Линейные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$(p(x)y + q(x))dx + dy = 0$ (32.1), $(x,y) \in D$, D - односвязная область в R^2,

называется линейным уравнением первого порядка относительно переменной y. Считаем, что функции $p(x), q(x)$ определены и непрерывны на промежутке $I \subseteq R$. Выясним существование интегрирующего множителя для уравнения (32.1). Проверяем условие: $\dfrac{P_y' - Q_x'}{\omega_x' Q - \omega_y' P} = \Psi(\omega)$, где $P(x,y) = p(x)y + q(x)$, $Q(x,y) = 1$.

Будем искать интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$, т.е. $\omega = x$. Тогда $\Psi(x) = p(x)$. Следовательно, $\mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau\right)$, где $x_0, x \in I$.

Умножаем уравнение (32.1) на интегрирующий множитель:

$$\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau\right)(p(x)y + q(x))dx + \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau\right)dy = 0. \quad (32.2)$$

Находим полное решение уравнения (32.2):

$$\int_{(x_0,0)}^{(x,y)} \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau\right)(p(x)y + q(x))dx + \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau\right)dy = C.$$

Вычислим интеграл в левой части:

$$\int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{x_0}^{\sigma} p(\tau)d\tau\right)q(\sigma)d\sigma + y\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau\right) = C.$$

Окончательно находим, что

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau\right)\left(C - \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{x_0}^{\sigma} p(\tau)d\tau\right)q(\sigma)d\sigma\right).$$

Метод Лагранжа

Перепишем уравнение (32.1) в следующем виде:
$y'(x) = P(x)y + Q(x)$ (32.3), где функции $P(x), Q(x)$ определены и непрерывны на промежутке $I \subseteq R$. Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (32.3) называется линейным однородным, иначе линейным неоднородным.
Легко видеть, что $y_{он}(t) = y_{оо}(t) + y_{чн}(t)$.
Найдем общее решение $y_{оо}(t)$ однородного уравнения $y' = P(x)y$ (32.4).
Функция $y \equiv 0$ является решением. Рассмотрим уравнение (32.4) в областях $D_1 = \{(x,y) \mid y > 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid y < 0\}$.

1) $\dfrac{dy}{y} = P(x)dx$, $y > 0$;

$\ln y = \int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau + C \Rightarrow y(x) = C_1 \exp\left(\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau\right)$, где $C_1 > 0$, $x_0, x \in I$;

2) $\dfrac{dy}{y} = P(x)dx$, $y < 0$;

$$\ln(-y) = \int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau + C \Rightarrow y(x) = C_2 \exp\left(\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau\right), \text{ где } C_2 < 0,\ x_0, x \in I.$$

Таким образом, $y_{oo}(t) = C\exp\left(\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau\right)$, где $C \in R$, $x_0, x \in I$.

Частное решение $y_{чн}(t)$ неоднородного уравнения (32.3) будем искать в виде: $y_{чн}(t) = u(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau\right)$. Подставляя в уравнение (32.3), получим:

$$u'(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau\right) + u(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau\right)P(x) = P(x)u(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau\right) + Q(x).$$

Следовательно, $u(x) = \int_{x_0}^{x} Q(\tau)\exp\left(-\int_{x_0}^{\sigma} P(\sigma)d\sigma\right)d\tau$.

Пример. Найти общее решение уравнения $(-y - x^2)dx + xdy = 0$, $y \in R$, $x > 0$.

Решение. Перепишем уравнение: $y' = \frac{1}{x}y + x$. Имеем $y_{oo}(x) = C\exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\tau}d\tau\right) = Cx$. Ищем $y_{чн}(x) = u(x)x$.

Так как $u'(x)x + u(x) = u(x) + x$, то $u(x) = x$.

Следовательно, $y_{чн}(x) = x^2 \Rightarrow y_{он}(x) = Cx + x^2$.

§33. Уравнение Бернулли

Уравнение вида
$y'(x) = P(x)y + Q(x)y^{\alpha}$ (33.1), где функции $P(x), Q(x)$ определены и непрерывны на промежутке $I \subseteq R$, $\alpha \in R$,
называется уравнением Бернулли.
Если $\alpha = 1$, то уравнение (33.1) – линейное однородное, если $\alpha = 0$, то уравнение (33.1) – линейное неоднородное.
Пусть $\alpha \notin \{0,1\}$. Уравнение имеет решение $y \equiv 0$. Рассмотрим уравнение (33.1) в областях $D_1 = \{(x, y) \mid y > 0\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid y < 0\}$.
Разделим уравнение (33.1) на y^{α}:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = P(x)y^{1-\alpha} + Q(x),\ (x, y) \in D_i.$$

Положим $u(x) = y^{1-\alpha}(x)$, тогда $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Следовательно, $\frac{u'}{1-\alpha} = P(x)u + Q(x)$, $(x, u) \in D_i$, - линейное неоднородное уравнение.

ЛЕКЦИИ 13-14

§34. Интегральный критерий

Рассмотрим задачу Коши
$y' = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ (34.1), D - область в R^2,
$y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$ (34.2).
Теорема (интегральный критерий).
Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, $x_0 \in |\alpha, \beta|$. Непрерывная функция $y : |\alpha, \beta| \to R$ является решением задачи Коши (34.1), (34.2) тогда и только тогда, когда выполняется равенство $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau)) d\tau$ (34.3) для любого $x \in |\alpha, \beta|$.
Доказательство.
1) Необходимость. Имеем $y'(x) = f(x, y(x)) \Leftrightarrow dy(x) = f(x, y(x))dx$. Проинтегрируем последнее равенство от x_0 до x:

$$\int\limits_{x_0}^{x} dy(\tau) = \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau)) d\tau,$$

$$y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

2) Достаточность. Так как функция $f(\tau, y(\tau))$ непрерывна на промежутке $|\alpha, \beta|$, то функция $\int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau)) d\tau$ дифференцируемая на промежутке $|\alpha, \beta|$.
Следовательно, можно продифференцировать соотношение (34.3):
$y'(x) = f(x, y(x))$ $\forall x \in |\alpha, \beta|$.
Кроме того, $y(x_0) = y_0$. ■

§35. Лемма Гронуолла

Теорема.
Пусть $\alpha \geq 0$, $\beta \in R$, $x_0 \in |a,b|$. Если непрерывная неотрицательная функция $u : |a,b| \to R$ удовлетворяет неравенству $u(x) \leq \alpha + \left| \int\limits_{x_0}^{x} \beta u(\tau) d\tau \right|$ (35.1) для любого $x \in |a,b|$, то $u(x) \leq \alpha e^{|\beta(x - x_0)|}$ (35.2).
Доказательство.

1) Пусть $x \geq x_0$. Тогда (35.1) $\Rightarrow$ $u(x) \leq \alpha + \int_{x_0}^{x} |\beta| u(\tau) d\tau$ и (35.2) $\Leftrightarrow u(x) \leq \alpha \mathrm{e}^{|\beta|(x-x_0)}$.

Обозначим $v(x) := \alpha + \int_{x_0}^{x} |\beta| u(\tau) d\tau$, тогда $u(x) \leq v(x)$ (35.3) $\forall x \in |a,b|$.

Функция $v(x)$ является дифференцируемой на промежутке $|a,b|$:

$$\frac{dv(x)}{dx} = |\beta| u(x).$$

Учитывая неравенство (35.3), имеем:

$$\frac{dv(x)}{dx} \leq |\beta| v(x),$$

$$\frac{dv(x)}{dx} - |\beta| v(x) \leq 0.$$

Умножим последнее неравенство на $\mathrm{e}^{-|\beta| x}$:

$$\frac{\mathrm{e}^{-|\beta| x} dv(x)}{dx} - |\beta| \mathrm{e}^{-|\beta| x} v(x) \leq 0.$$

Так как $\frac{d}{dx}\left(v(x)\mathrm{e}^{-|\beta| x}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-|\beta| x} dv(x)}{dx} - |\beta| \mathrm{e}^{-|\beta| x} v(x)$, то $\frac{d}{dx}\left(v(x)\mathrm{e}^{-|\beta| x}\right) \leq 0$.

Следовательно, функция $v(x)$ монотонно убывает на промежутке $[x_0, x]$. Поэтому $v(x)\mathrm{e}^{-|\beta| x} \leq v(x_0)\mathrm{e}^{-|\beta| x_0}$.

Так как $v(x_0) = \alpha$, то $v(x) \leq \alpha \mathrm{e}^{|\beta|(x-x_0)}$. И, следовательно, $u(x) \leq \alpha \mathrm{e}^{|\beta|(x-x_0)}$.

2) Случай $x < x_0$ рассматривается аналогично. ■

Следствие. Пусть $\beta \in R$, $x_0 \in |a,b|$. Если непрерывная неотрицательная функция $u : |a,b| \to R$ удовлетворяет неравенству $u(x) \leq \left| \int_{x_0}^{x} \beta u(\tau) d\tau \right|$ для любого $x \in |a,b|$, то $u(x) \equiv 0$ $\forall x \in |a,b|$.

§36. Теорема Пикара-Линделёфа

Рассмотрим задачу Коши

$y' = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ (36.1), D - область в R^2,

$y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$ (36.2).

Окрестностью точки $(x_0, y_0) \in D$ называется открытый круг с центром в точке (x_0, y_0).

Определение. Функция $f(x,y)$ удовлетворяет по переменной y условию Липшица в области G, если существует постоянная $L>0$, такая, что $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$ для любых $(x,y_1),(x,y_2)\in G$.

Теорема (локальная теорема Пикара-Линделёфа).
Пусть в некоторой окрестности $U=U(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0) функция $f(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет по переменной y условию Липшица. Тогда в некоторой окрестности $V=V(x_0,y_0)$, $V\subseteq U$, задача Коши (36.1), (36.2) имеет единственное решение $y(x)$, $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$, $\delta>0$, которое может быть найдено методом последовательных приближений: $y_0(x)=y_0$, $y_n(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_{n-1}(\tau))d\tau$, $n=0,1,2,\ldots$, $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)$ (36.3).

Доказательство.

Шаг 1. Выберем число $\rho>0$, такое, что прямоугольник $\Pi=\{(x,y)\,||x-x_0|\le\rho,|y-y_0|\le\rho\}$ содержится в окрестности $U=U(x_0,y_0)$. Так как функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике Π, то существует постоянная M, такая, что $|f(x,y)|\le M\ \ \forall(x,y)\in\Pi$. Выберем $\delta=\min\{\rho,\rho/M\}$ и докажем индукцией по n, что $|y_n(x)-y_0|\le\rho$ для любого $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ и для любого $n\in N\bigcup\{0\}$, где последовательность $y_n(x)$ определена соотношениями (36.3). Имеем $|y_0(x)-y_0|=0<\rho\quad\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$. Пусть $|y_{n-1}(x)-y_0|\le\rho\ \ \forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$. Далее

$$|y_n(x)-y_0|=\left|y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_{n-1}(\tau))d\tau-y_0\right|=\left|\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_{n-1}(\tau))d\tau\right|\le M|x-x_0|\le M\frac{\rho}{M}=\rho$$

$\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$.

Шаг 2. Докажем индукцией по n, что $|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le ML^{n-1}\dfrac{|x-x_0|^n}{n!}$ $\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$, $n\in N\bigcup\{0\}$ (36.4), где L - постоянная, такая, что $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$ для любых $(x,y_1),(x,y_2)\in U_{(x_0,y_0)}$.

1) $n=1$: $|y_1(x)-y_0(x)|=\left|\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_0)d\tau\right|\le M|x-x_0|$.

2) пусть верно неравенство (36.4) при $n=k$:

$$|y_k(x)-y_{k-1}(x)|\le ML^{k-1}\frac{|x-x_0|^k}{k!}.$$

3) $n=k+1$: $|y_{k+1}(x)-y_k(x)|=\left|\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_k(\tau))d\tau-\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_{k-1}(\tau))d\tau\right|\le$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \left| y_k(\tau) - y_{k-1}(\tau) \right| d\tau \right| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} ML^{k-1} \frac{|\tau - x_0|^k}{k!} d\tau \right| = ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Шаг 3. Докажем, что последовательность $y_n(x)$, $n \geq 0$, сходится к непрерывной функции $y(x)$ равномерно по $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Рассмотрим функциональный ряд $y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (y_k(x) - y_{k-1}(x))$ (36.5). Обозначим $S_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (y_k(x) - y_{k-1}(x))$. Очевидно, $S_n(x) = y_n(x)$.

Так как $|y_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq |y_0| + \sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{|x - x_0|^k}{k!} \leq |y_0| + \sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{\delta^k}{k!} =$
$= |y_0| + \frac{M}{L}(\mathrm{e}^{L\delta} - 1)$, то согласно признаку Вейерштрасса ряд (36.5) сходится равномерно по $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Следовательно, $y_n(x) = S_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} y(x)$ равномерно по $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Так как функции $y_n(x)$ непрерывны на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, то по теореме Стокса-Зейделя предельная функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Шаг 4. Докажем, что функция $y(x)$, $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, является решением задачи Коши (36.1), (36.2). Перейдем к пределу при $n \to \infty$ в соотношении: $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau)) d\tau$, $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Так как функции $f(x, y_{n-1}(x))$ непрерывны на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, то для перехода к пределу под знаком интеграла нужно убедиться, что последовательность $f(x, y_{n-1}(x))$ сходится при $n \to \infty$ равномерно на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Рассмотрим функциональный ряд $f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{\infty} (f(x, y_k(x)) - f(x, y_{k-1}(x)))$ (36.6). Имеем $A_n(x) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} (f(x, y_k(x)) - f(x, y_{k-1}(x))) = f(x, y_n(x))$.

Так как

$$|f(x_0, y_0)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f(x, y_k(x)) - f(x, y_{k-1}(x))| \leq |f(x_0, y_0)| + L \sum_{k=1}^{\infty} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq$$

$$|f(x_0, y_0)| + L \sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{|x - x_0|^k}{k!} \leq |f(x_0, y_0)| + \sum_{k=1}^{\infty} ML^k \frac{\delta^k}{k!} = |f(x_0, y_0)| + M(\mathrm{e}^{L\delta} - 1),$$

то ряд (36.6), а, следовательно, и последовательность $f(x, y_{n-1}(x))$ сходятся равномерно при $n \to \infty$ по $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Таким образом,

$$y(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,y_{n-1}(\tau))d\tau\right)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(\tau,y_{n-1}(\tau))d\tau=$$

$$=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty} f(\tau,y_{n-1}(\tau))d\tau=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,y(\tau))d\tau,\ x\in[x_0-\delta,x_0+\delta].$$

Согласно, интегральному критерию функция $y(x)$, $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$, является решением задачи Коши (36.1), (36.2).

Шаг 5. Докажем единственность решения задачи Коши (36.1), (36.2) в некоторой окрестности точки (x_0,y_0). Пусть функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, $x\in[x_0-\delta_1,x_0+\delta_1]$, являются решениями задачи Коши (36.1), (36.2) и интегральные кривые, соответствующие этим решениям лежат в окрестности $U=U(x_0,y_0)$.

Тогда $\left|u_1(x)-u_2(x)\right|=\left|\int_{x_0}^{x} f(\tau,u_1(\tau))d\tau-\int_{x_0}^{x} f(\tau,u_2(\tau))d\tau\right|\le\left|\int_{x_0}^{x} L\,|u_1(\tau)-u_2(\tau)|\,d\tau\right|$

$\forall x\in[x_0-\delta_1,x_0+\delta_1]$. Согласно неравенству Гронуолла $u_1(x)-u_2(x)\equiv 0$ $\forall x\in[x_0-\delta_1,x_0+\delta_1]$. ■

Теорема. (локальная теорема Пеано). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой окрестности $U=U(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0), тогда задача Коши (36.1), (36.2) имеет решение в некоторой окрестности $V=V(x_0,y_0)$, $V\subseteq U$.

Рассмотрим задачу Коши

$y'=f(x,y)$, $(x,y)\in R^2$ (36.7),

$y(x_0)=y_0$, $(x_0,y_0)\in R^2$ (36.8).

Определение. Функция $f(x,y)$ имеет линейный порядок роста по переменной y, если существует постоянная $C>0$, такая, что $|f(x,y)|\le C(1+|y|)$ для любых $(x,y)\in R^2$.

Теорема. (глобальная теорема Пикара-Линделефа).

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна, по переменной y имеет линейный порядок роста и удовлетворяет по y условию Липшица в R^2. Тогда задача Коши (36.7), (36.8) имеет единственное решение $y(x), x\in R$.

Теорема. (глобальная теорема Пеано).

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна и по переменной y имеет линейный порядок роста, тогда задача Коши (36.7), (36.8) имеет решение $y(x), x\in R$.

§37. Лемма об условии Липшица

Рассмотрим задачу Коши

$y'=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ (37.1), D - область в R^2,

$y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$ (37.2).

Лемма. (об условии Липшица).

Пусть функция $f_y^{'}(x, y)$ непрерывна на компакте $V \subset R^2$, тогда функция $f(x, y)$ по переменной y на V удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Для любых $(x, y_1), (x, y_2) \in V$ имеем $| f(x, y_1) - f(x, y_2) |=| f_y^{'}(x,\eta)(y_1 - y_2) |=| f_y^{'}(x,\eta) || y_1 - y_2 |$, где точка η лежит между y_1, y_2. Так как функция $f_y^{'}(x, y)$ непрерывна на V, то $| f_y^{'}(x, y) |\le M$ для любых $(x, y) \in R^2$. Следовательно, $| f(x, y_1) - f(x, y_2) |\le M | y_1 - y_2 |$. ■

Пример (функции удовлетворяющей условию Липшица по y, но не дифференцируемой по y).

$f(x, y) = \sin x + | y |$.

Тогда $| f(x, y_1) - f(x, y_2) |=|| y_1 | - | y_2 ||\le| y_1 - y_2 |$. Кроме того, функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет линейный порядок роста по переменной y. Следовательно, задача Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, имеет единственное решение $y(x), x \in R$.

Теорема (об однозначной разрешимости задачи Коши).

Пусть функции $f(x, y)$, $f_y^{'}(x, y)$ непрерывны в некоторой окрестности $U = U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0), тогда задача Коши (37.1), (37.2) имеет единственное решение в некоторой окрестности $V = V(x_0, y_0)$, $V \subseteq U$.

Доказательство вытекает из локальной теоремы Пикара-Линделефа и леммы об условии Липшица.

Пример.

Задача Коши $y' = \sin(xy)$, $y(x_0) = y_0$, имеет единственное решение в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \in R^2$, так как функции $f(x, y) = \sin(xy)$, $f_y^{'}(x, y) = x\cos(xy)$ непрерывны в R^2.

§38. Существенность условий теорем существования

Приведем примеры, показывающие, что нарушение условий в теоремах Пикара-Линделёфа и Пеано приводит либо к неразрешимости задачи Коши, либо к существованию неединственного решения.

Пример.

Задача Коши $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$, имеет решение $y \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $(0,0)$. Тем не менее, в любой окрестности точки $(0,0)$ имеется бесконечно много различных интегральных кривых: $y = \begin{cases} (x + C_1)^3, x \le -C_1, \\ 0, x \in (-C_1, -C_2), \\ (x + C_2)^3, x \ge -C_2, \end{cases}$ где $C_2 < 0 < C_1$. Отметим, что функция $f(x, y) = 3y^{2/3}$ непрерывна в R^2, имеет линейный порядок роста по y, но не удовлетворяет условию Липшица по y ни в какой окрестности точки $(x_0, y_0) = (0,0)$. Действительно, для любого $n \in N$ найдутся точки $(x, y_1) = (0,0)$, $(x, y_2) = (0, 27/n^3)$, такие, что $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \geq n |y_1 - y_2|$. Следовательно, нарушены условия локальной теоремы Пикара-Линделефа, в то время, как условия глобальной теоремы Пеано выполнены.

Пример.

Задача Коши $y' = y^2$, $y(0) = 1$, не имеет глобального решения $y(x), x \in R$. Допустим, это не так. Проинтегрируем уравнение, как уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{dy}{y^2} - dx = 0$ в областях $y > 0$ или $y < 0$. Далее находим общее решение в указанных областях: $-\dfrac{1}{y} - x = C$. Учитывая начальное условие, находим $C = -1$. Отсюда $y = \dfrac{1}{1-x}$. Функция $y \equiv 0$ не удовлетворяет начальному условию. Решение $y = \dfrac{1}{1-x}$ определено лишь при $x < 1$. Функция $f(x, y) = y^2$ не имеет линейного порядка роста по y, поэтому условия глобальной теоремы Пеано нарушены. Однако в окрестности точки (0,1) функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы об однозначной разрешимости, следовательно, точка $(0,1)$ является точкой локальной единственности (т.е. в некоторой достаточно малой окрестности существует единственное решение) задачи Коши.

Пример.

Докажем, что задача Коши $y' = 1 - 2\mathrm{sign}(y)$, $y(0) = 0$, не имеет решения ни в какой окрестности точки $(x_0, y_0) = (0,0)$. При $y > 0$ имеем: $y' = -1 \Rightarrow y = -x + C_1$; при $y < 0$ имеем: $y' = 3 \Rightarrow y = 3x + C_2$. В полуплоскости $y > 0$ решение строго убывает, в полуплоскости $y < 0$ решение строго возрастает. Следовательно, при попадании решения на прямую $y = 0$ невозможно сойти с прямой $y = 0$, но функция $y \equiv 0$, не является решением уравнения, так как $0 \neq 1$. Отметим, что функция $f(x, y) = 1 - 2\mathrm{sign}(y)$ не является непрерывной в окрестности точки (0,0), поэтому условия локальной теоремы Пеано нарушены.

§39. Рост денежных вкладов

Задача. Некоторая сумма денег положена в банк под r % в год. Составьте дифференциальное уравнение для закона изменения суммы при условии, что приращение начисляется непрерывно. На основании полученного закона решить следующие частные задачи: 1) сумма \$10000 положена в банк под 2 % в год. Через сколько лет она составит \$20000? 2) сумма \$1 положена в банк под 3 % в год. Через сколько лет сумма удвоится?

Решение.

Общая сумма P вклада в результате начисления процентов один раз в конце года составит $P = A\left(1+\dfrac{r}{100}\right)$, где A - первоначальная сумма вклада. Если проценты будут начисляться m раз в течение года, то $P(1) = A\left(1+\dfrac{r}{100m}\right)^m$.

По истечении n лет общая сумма составит $P(n) = A\left(\left(1+\dfrac{r}{100m}\right)^m\right)^n$. Если число начислений процентов в год будет беспредельно увеличиваться, то

$$P(n) = \lim_{m\to\infty} A\left(\left(1+\frac{r}{100m}\right)^m\right)^n = A\lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{\frac{100m}{r}}\right)^{\frac{nr}{100}} = A\mathrm{e}^{\frac{nr}{100}}.$$

Таким образом, $P(t) = A\mathrm{e}^{\frac{rt}{100}}$. В течение короткого промежутка времени dt приращение суммы P составит:

$$dP = d(A\mathrm{e}^{\frac{rt}{100}}) = \frac{r}{100}A\mathrm{e}^{\frac{rt}{100}}dt = \frac{r}{100}Pdt\,.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{rP}{100} \quad (39.1).$$

1) Так как $P(t) = A\mathrm{e}^{0.02t}$ и $P(0) = 10000$, то $A = 10000$. Имеем уравнение $20000 = A\mathrm{e}^{0.02t}$. Отсюда находим, что $e^{0.02t} = 2$, следовательно, $t \approx 34$ года и 8 месяцев.

2) Так как $P(t) = A\mathrm{e}^{0.03t}$ и $P(0) = 1$, то $A = 1$. Имеем уравнение $2 = A\mathrm{e}^{0.03t}$. Отсюда находим, что $e^{0.03t} = 2$, следовательно, $t \approx 23$ года и 1 месяц.

ЛЕКЦИЯ 15

§40. Теоремы существования решений нелинейных систем ОДУ

Рассмотрим задачу Коши для системы ОДУ первого порядка
$Dx(t) = f(t, x(t))$, $(t, x) \in G$, G - область в R^{1+n} (40.1),
$x(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in G$, (40.2),
где $(t, x(t)) = (t, x_1(t), ..., x_n(t))$, $f(t, x) = (f_1(t, x), ..., f_n(t, x))$.

Определение. Функция $f(t, x)$ удовлетворяет в области G условию Липшица по переменной x, если существует постоянная Липшица $L > 0$, такая, что $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\|$ для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in G$.

Определение. Функция $f : R^{1+n} \to R^n$ имеет линейный порядок роста, если существует постоянная C, такая, что $\|f(t, x)\| \le C\left(1 + \|x\|\right)$ для любых $(t, x) \in R^{1+n}$.

Если функция $f(t, x)$ дифференцируемая по x, то можно рассмотреть матрицу Якоби $f_x' : R^{1+n} \to R^{n \times n}$:

$$f_x'(t, x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Теорема Пикара-Линделефа.

1) Пусть в некоторой окрестности $U = U(t_0, x_0)$ точки (t_0, x_0) функция $f(t, x)$ непрерывна и удовлетворяет по переменной x условию Липшица. Тогда в некоторой окрестности $V = V(t_0, x_0)$, $V \subseteq U$, задача Коши (40.1), (40.2) имеет единственное решение $x(t)$, $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $\delta > 0$, которое может быть найдено методом последовательных приближений: $x_0(t) = x_0$,

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))d\tau, \ n = 0,1,2,..., \ x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t).$$

2) Пусть $G = R^{1+n}$, функция $f(t, x)$ непрерывна, по переменной x имеет линейный порядок роста и удовлетворяет по x условию Липшица в R^{1+n}. Тогда задача Коши (40.1), (40.2) имеет единственное решение $x(t), t \in R$.

Доказательство получается из доказательства аналогичной теоремы при $n = 1$ заменой модуля на норму.

Теорема об однозначной разрешимости.

Пусть функции $f(t, x)$, $f_x'(t, x)$ непрерывны в некоторой окрестности $U = U(t_0, x_0)$ точки (t_0, x_0), тогда задача Коши (40.1), (40.2) имеет единственное решение в некоторой окрестности $V = V(t_0, x_0)$, $V \subseteq U$.

Теорема Пеано.

1) Пусть функция $f(t,x)$ непрерывна в некоторой окрестности $U = U(t_0, x_0)$ точки (t_0, x_0), тогда задача Коши (40.1), (40.2) имеет решение в некоторой окрестности $V = V(t_0, x_0)$, $V \subseteq U$.

2) Пусть $G = R^{1+n}$, функция $f(t,x)$ непрерывна и по переменной x имеет линейный порядок роста, тогда задача Коши (40.1), (40.2) имеет решение $x(t), t \in R$.

§41. Первые интегралы

Рассмотрим систему

$Dx(t) = f(t, x(t))$, $(t,x) \in G$, G - область в R^{1+n} (41.1),

где $(t, x(t)) = (t, x_1(t), ..., x_n(t))$, $f(t,x) = (f_1(t,x), ..., f_n(t,x))$.

Система (41.1) называется автономной (стационарной), если функция $f(t,x)$ не зависит от переменной t. Отметим, что любую неавтономную систему можно свести к автономной следующим образом: положим $x_{n+1} = t$, $f_{n+1}(x_{n+1}, x_1, ..., x_n) \equiv 1$, $X = (x_{n+1}, x_1, ..., x_n)$, $F(X) = (f_1, ..., f_n, f_{n+1})$. Тогда система (41.1) эквивалентна автономной системе $DX = F(X),\ X \in G \subseteq R^{1+n}$.

Рассмотрим автономную систему

$$\begin{cases} Dx_1 = f_1(x_1, ..., x_n), \\ Dx_2 = f_2(x_1, ..., x_n) \\ ... \\ Dx_n = f_n(x_1, ..., x_n), \end{cases}$$

эту систему можно переписать в виде:

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,...,x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1,...,x_n)} = ... = \frac{dx_n}{f_n(x_1,...,x_n)} = dt.$$

Систему $\dfrac{dx_1}{f_1(x_1,...,x_n)} = \dfrac{dx_2}{f_2(x_1,...,x_n)} = ... = \dfrac{dx_n}{f_n(x_1,...,x_n)}$

называют системой в симметрической форме. Решение этой системы представляет интегральную кривую в пространстве R^{1+n}.

Рассматриваем систему (41.1) в предположении, что функция $f(t,x)$ непрерывна в области G. В силу теоремы Пеано через каждую точку $(s,\xi) \in G$ проходит интегральная кривая системы (41.1).

Определение. Непрерывно дифференцируемая функция $\Phi : G \to R$ называется первым интегралом системы (41.1), если функция Φ отлична от константы на любой непустой подобласти области G и $\Phi(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \overset{t \in I}{\equiv} C$ для любого решения $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, $t \in I$, системы (41.1).

Теорема (о первом интеграле).
Для того чтобы функция $\Phi: G \to R$ была первым интегралом системы (41.1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial \Phi(t,x_1,...,x_n)}{\partial t}+\frac{\partial \Phi(t,x_1,...,x_n)}{\partial x_1}f_1(t,x_1,...,x_n)+...+\frac{\partial \Phi(t,x_1,...,x_n)}{\partial x_n}f_n(t,x_1,...,x_n)=0$$

для всех $(t,x_1,...,x_n)\in G$ (41.2).

Доказательство.

1) Необходимость. Возьмем произвольную точку $(s,\xi)\in G$, через эту точку проходит решение $x(t),\ t\in I$, такое, что $(t,x(t))\in G$ для любого $t\in I$. Тогда $\Phi(t,x(t))\equiv C$ для любого $t\in I$ (41.3). Продифференцируем тождество по t:

$$d\Phi(t,x(t))\equiv 0 \iff \frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+...+\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}\equiv 0 \ (41.4).$$

Так как $\dfrac{dx_i(t)}{dt}=f_i(t,x(t))$ для любого $i=\overline{1,n}$ и любого $t\in I$, то соотношение (41.4) равносильно требуемому равенству (41.2).

2) Достаточность. Возьмем произвольное решение $x(t),\ t\in I$, такое, что $(t,x(t))\in G$ для любого $t\in I$. Тогда выполняется равенство (41.2). Так как $\dfrac{dx_i(t)}{dt}=f_i(t,x(t))$, то, заменяя в равенстве (41.2), $f_i(t,x(t))$ на $\dfrac{dx_i(t)}{dt}$, получим равенство (41.4). И, следовательно, $\Phi(t,x(t))\equiv C$ для любого $t\in I$. ■

Пример. Доказать, что функция $\Phi(t,x_1,x_2)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)-t$ является первым интегралом системы

$$\begin{cases} Dx_1=\dfrac{x_1^2}{x_2}, \\ Dx_2=-\dfrac{x_2^2}{x_1}, \end{cases} \quad t\in R,\ x_1>0, x_2>0,$$

и построить общее решение системы.

Решение.

$$\frac{\partial \Phi(t,x_1,x_2)}{\partial t}+\frac{\partial \Phi(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}f_1(t,x_1,x_2)+\frac{\partial \Phi(t,x_1,x_2)}{\partial x_2}f_2(t,x_1,x_2)=$$

$$=-1+\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\cdot\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{-x_1}{x_1^2+x_2^2}\cdot\frac{-x_2^2}{x_1}\equiv 0.$$

Следовательно, $\Phi(t,x_1,x_2)$ - первый интеграл системы. Таким образом, $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)-t=C$. Тогда $x_1=x_2\operatorname{tg}(t+C_1)$, $t\in\left(-C_1,\dfrac{\pi}{2}+\pi n-C_1\right)$, $n\in Z$.

Подставим во второе уравнение системы: $Dx_2=-\dfrac{x_2}{\operatorname{tg}(t+C_1)}$.

Следовательно, $x_2(t) = C_2 \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\mathrm{tg}(\tau + C_1)}\right) = \frac{C_2}{\sin(t + C_1)}$,

$t \in \left(-C_1, \frac{\pi}{2} + 2\pi n - C_1\right)$. Тогда $x_1(t) = \frac{C_2}{\cos(t + C_1)}$, $C_2 > 0$.

§42. Интегрируемые комбинации

Рассмотрим систему

$Dx(t) = f(t, x(t))$, $(t, x) \in G$, G - область в R^{1+n} (42.1),

где $(t, x(t)) = (t, x_1(t), ..., x_n(t))$, $f(t, x) = (f_1(t, x), ..., f_n(t, x))$.

Первый интеграл системы (42.1) называется стационарным, если он не зависит от t.

Теорема (об интегрируемых комбинациях).

Пусть существуют непрерывные функции $\varphi_1, ..., \varphi_n : R^n \to R$ такие, что $\varphi_1(x)dx_1 + ... + \varphi_n(x)dx_n = d\Phi(x)$ (42.2) и $\varphi_1(x) f_1(t, x) + ... + \varphi_n(x) f_n(t, x) \equiv 0$ для любых $(t, x) \in G$ (42.3), тогда функция $\Phi(x)$ является стационарным первым интегралом системы (42.1).

Доказательство.

Так как выполняется равенство (42.2), то $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_k} = \varphi_k(x)$, $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} = 0$, поэтому

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1} f_1(t, x) + ... + \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_n} f_n(t, x) = \varphi_1(x) f_1(t, x) + ... + \varphi_n(x) f_n(t, x) \equiv 0.$$

В силу теоремы о первом интеграле функция $\Phi(x)$ является первым интегралом системы (42.1). ■

Выражения вида $\varphi_1(x)dx_1 + ... + \varphi_n(x)dx_n$ называются интегрируемыми комбинациями. Для нахождения интегрируемых комбинаций пользуются свойствами пропорций $\frac{dx_1}{f_1} = ... = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{\varphi_1 dx_1 + ... + \varphi_n dx_n}{\varphi_1 f_1 + ... + \varphi_n f_n}$.

§43. Базис первых интегралов

Рассмотрим систему

$Dx(t) = f(t, x(t))$, $(t, x) \in G$, G - область в R^{1+n} (43.1),

где $(t, x(t)) = (t, x_1(t), ..., x_n(t))$, $f(t, x) = (f_1(t, x), ..., f_n(t, x))$.

Пусть $\Phi_1(t, x), ..., \Phi_k(t, x)$ - первые интегралы системы (43.1), тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции $H : R^k \to R$, которая отлична от постоянной на любой непустой подобласти из R^k, функция $H(\Phi_1(t, x), ..., \Phi_k(t, x))$ является первым интегралом системы (43.1).

Определение. Совокупность функционально независимых первых интегралов $\Phi_1(t,x),...,\Phi_n(t,x)$ системы (43.1) называется базисом первых интегралов в области G, если для любого первого интеграла $\Psi(t,x)$ системы (43.1) существует непрерывно дифференцируемая функция $H: R^n \to R$, такая, что $\Psi(t,x) = H(\Phi_1(t,x),...,\Phi_n(t,x))$ для любых $(t,x) \in G$.

Теорема (о базисе первых интегралов).

Пусть векторная функция $\Phi = (\Phi_1,...,\Phi_n)$, компонентами которой являются первые интегралы системы (43.1), непрерывно дифференцируемы в окрестности $U_{(s,\xi)}$ точки $(s,\xi) \in G$ и

$$\det \frac{\partial \Phi}{\partial x}\bigg|_{(s,\xi)} = \det \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{(s,\xi)} \neq 0. \quad (43.2)$$

Тогда для любого первого интеграла $\Psi(t,x)$ системы (43.1) существует непрерывно дифференцируемая функция $H: R^n \to R$, такая, что $\Psi(t,x) = H(\Phi_1(t,x),...,\Phi_n(t,x))$ в некоторой окрестности $V_{(s,\xi)}$ точки (s,ξ).

Доказательство.

Так как функция $\Phi(t,x)$ непрерывно дифференцируемая в области G, то условие (43.2) выполняется в некоторой окрестности $V_{(s,\xi)}$ точки (s,ξ). Следовательно, при каждом фиксированном t_0, таком, что $(t_0,\xi) \in V_{(s,\xi)}$, функция $y = \Phi(t_0,x)$, $x \in W(t_0) = \{x \in R^n \mid (t_0,x) \in V_{(s,\xi)}\}$, имеет обратную функцию $x = F(t_0,y) = (F_1(t_0,y),...,F_n(t_0,y))$, которая также является непрерывно дифференцируемой на множестве определения.

Положим $H(t_0,y) = \Psi(t_0,F(t_0,y))$. Тогда $\Psi(t_0,x) = H(t_0,\Phi(t_0,x))$ для любого $x \in W(t_0)$. Таким образом, $\Psi(t,x) = H(t,\Phi(t,x))$ для любых $(t,x) \in V_{(s,\xi)}$. Докажем, что $\dfrac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$.

Имеем $y_i = \Phi_i(t,x) = \Phi_i(t,F_1(t,y),...,F_n(t,y))$, $i = \overline{1,n}$. Продифференцируем эти соотношения по t: $0 = \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial t} + ... + \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x_n}\dfrac{\partial F_n}{\partial t}$, $i = \overline{1,n}$.

В силу теоремы о первом интеграле имеем

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} f_1 + ... + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_n} f_n = 0, \ i = \overline{1,n}.$$

Следовательно, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F_k}{\partial t} - f_k\right) = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Так как матрица $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ невырожденная в окрестности $V_{(s,\xi)}$, то $\dfrac{\partial F_k}{\partial t} - f_k = 0$ для любого $k = \overline{1,n}$. Так как $H(t,y) = \Psi(t,F(t,y))$, то

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}\frac{\partial F_k}{\partial t}=\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}f_k\equiv 0\,. \blacksquare$$

Пример. Построить два функционально независимых первых интеграла системы

$$\begin{cases} Dx_1=x_3-x_2, \\ Dx_2=x_1-x_3,\ \ t,x_1,x_2,x_3\in R,\ \ x_1>x_2, \\ Dx_3=x_2-x_1. \end{cases}$$

Решение.

Будем использовать теорему об интегрируемых комбинациях.

Так как $f_1+f_2+f_3\equiv 0$, то можно выбрать $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3\equiv 1$. Следовательно, $d\Phi_1(x)=dx_1+dx_2+dx_3$. Поэтому $\Phi_1(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$. Для нахождения другого первого интеграла составим систему в симметрической форме и используем свойства пропорций:

$$\frac{dx_1}{x_3-x_2}=\frac{dx_2}{x_1-x_3}=\frac{dx_3}{x_2-x_1}=\frac{x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3}{x_1(x_3-x_2)+x_2(x_1-x_3)+x_3(x_2-x_1)}\ ,$$

$$\frac{dx_1}{x_3-x_2}=\frac{x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3}{0},$$

отсюда $x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3=0$. Следовательно, $\Phi_2(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2}$.

Так как $\operatorname{rank}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}=2$, при $x_1>x_2$, то $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)$ - система функционально независимых первых интегралов.

Пример. Показать, что функции $\Phi_1(t,x_1,x_2)=(x_1-x_2)\mathrm{e}^t$, $\Phi_2(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$ являются базисом первых интегралов системы

$$\begin{cases} Dx_1=x_2, \\ Dx_2=x_1, \end{cases}\ \ x_1>x_2,$$

и проинтегрировать систему.

Решение. Так как $\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t}+\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}f_1+\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_2}f_2=(x_1-x_2)\mathrm{e}^t+x_2\mathrm{e}^t-x_1\mathrm{e}^t\equiv 0$,

$\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial t}+\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}f_1+\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}f_2=0+2x_1x_2-2x_2x_1\equiv 0$ и $\operatorname{rank}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t&-\mathrm{e}^t\\2x_1&-2x_2\end{pmatrix}=2$,

то Φ_1,Φ_2 - базис первых интегралов системы.

Решая алгебраическую систему:

$$\begin{cases} (x_1-x_2)\mathrm{e}^t=C_1, \\ x_1^2-x_2^2=C_2, \end{cases}$$

находим, что

$x_1=C_3\mathrm{e}^t+C_4\mathrm{e}^{-t}$, $x_2=C_3\mathrm{e}^t-C_4\mathrm{e}^{-t}$, $C_4>0$.

ЛЕКЦИЯ 16

§44. Классификация уравнений в частных производных первого порядка

Уравнение в частных производных для функции $u(x_1,...,x_n)$ имеет вид:
$F\left(x_1,...,x_n,u,\dfrac{\partial u}{\partial x_1},...,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0,\ \ x=(x_1,...,x_n)\in G$, G - область в R^n, $u:G\to R$ - искомая функция (44.1).

Классификация для уравнений в частных производных первого порядка по способам вхождения искомой функции и ее производных в уравнение:

$f_1(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+...+f_n(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=g(x,u)$ - квазилинейное (44.2),

$f_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+...+f_n(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n}+g(x)u=h(x)$ - линейное (44.3),

$f_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+...+f_n(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=0$ - линейное однородное (44.4),

все остальные уравнения в частных производных первого порядка называются нелинейными.

§45. Построение общего решения однородного линейного уравнения в частных производных первого порядка

Рассмотрим уравнение
$f_1(x_1,...,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+...+f_n(x_1,...,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=0$, $(x_1,...,x_n)\in G$, G - область в R^n, (45.1),
где функции $f_1,...,f_n$ непрерывны в области G и не обращаются одновременно в 0 ни в какой точке области G.

Определение. Функция $u(x_1,...,x_n)$, заданная на области $D\subseteq R^n$, называется решением уравнения (45.1), если функция u непрерывно дифференцируемая в области D и обращает уравнение (45.1) в тождество на D.

Пример. Функция $u=\varphi(xy)$ является решением уравнения $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, где $\varphi(t)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Решение. Функция $u(x,y)=\varphi(xy)$ является непрерывно дифференцируемой в R^2 и $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=x\varphi'(xy)y-y\varphi'(xy)x\equiv 0$ в R^2.

Теорема. Непрерывно дифференцируемая функция $u(x_1,...,x_n)$, заданная на области D, является решением уравнения (45.1) тогда и только тогда, когда функция $u(x_1,...,x_n)$ является первым интегралом системы ОДУ в симметрической форме: $\frac{dx_1}{f_1(x)}=\frac{dx_2}{f_2(x)}=...=\frac{dx_n}{f_n(x)}$ (45.2).

Доказательство.

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in D$. Не нарушая общности, полагаем, что $f_1(x_0)\neq 0$. Тогда $f_1(x)$ не обращается в 0 в некоторой окрестности U_{x_0} точки x_0. Рассматриваем уравнение (45.1) и систему (45.2) в окрестности U_{x_0}.

Перепишем систему (45.2) в нормальной дифференциальной форме:

$$\begin{cases}\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{f_2}{f_1},\\ ... \\ \frac{dx_n}{dx_1}=\frac{f_n}{f_1}.\end{cases} \quad (45.3).$$

1) Необходимость. Так как $u(x_1,...,x_n)$ - решение уравнения (45.1), то

$$f_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial u(x_1,...,x_n)}{\partial x_1}+...+f_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial u(x_1,...,x_n)}{\partial x_n}\equiv 0 \text{ в } U_{x_0}. \ (45.4)$$

Докажем, что функция $u(x)$ является первым интегралом системы (45.2). Так как $f_1(x)\neq 0$ в U_{x_0}, то из соотношения (45.4) получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{f_2}{f_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+\frac{f_n}{f_1}\frac{\partial u}{\partial x_n}\equiv 0 \text{ в } U_{x_0} \ (45.5).$$

В силу теоремы о первом интеграле функция $u(x)$ - первый интеграл системы (45.3), а значит, и системы (45.2).

2) Достаточность. Пусть $u(x)$ - первый интеграл системы (45.2), тогда $u(x)$ - первый интеграл системы (45.3). Следовательно, справедливо тождество (45.5). Умножая тождество (45.5) на $f_1(x)$, получим, что функция $u(x)$ - решение уравнения (45.1). ■

Отметим, что система (45.2) имеет размерность $n-1$. Первые интегралы системы (45.2) находят, используя теорему об интегрируемых комбинациях.

Алгоритм построения общего решения уравнения (45.1)

1) Составляем систему в симметрической форме (45.2), соответствующую уравнению (45.1).

2) Находим базис первых интегралов этой системы: $\Phi_1(x),\Phi_2(x),...,\Phi_{n-1}(x)$.

3) Выписываем общее решение уравнения (45.1): $u(x)=H(\Phi_1(x),...,\Phi_{n-1}(x))$, где H - произвольная непрерывно дифференцируемая функция, отличная от константы на области определения.

Пример. Построить общее решение уравнения

$$(x-z)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ z>0.$$

Решение.

1) Составляем систему в симметрической форме: $\dfrac{dx}{x-z}=\dfrac{dy}{y-z}=\dfrac{dz}{2z}$.

2) Находим базис первых интегралов:

$\dfrac{dz}{2z}=\dfrac{dx-dy}{x-y}$, $\dfrac{dz}{2z}=\dfrac{d(x-y)}{x-y}$ - уравнение с разделенными переменными. Находим решение: $\ln|x-y|=\dfrac{1}{2}\ln|z|+C$, отсюда $\Phi_1=\dfrac{x-y}{\sqrt{z}}$ - первый интеграл. Далее $\dfrac{dx+dy+2dz}{x+y+2z}=\dfrac{dz}{2z}$; $\dfrac{d(x+y+2z)}{x+y+2z}=\dfrac{dz}{2z}$; $\ln|x+y+2z|=\dfrac{1}{2}\ln|z|+C$, отсюда $\Phi_2=\dfrac{x+y+2z}{\sqrt{z}}$ - первый интеграл. Так как $\operatorname{rank}\dfrac{\partial(\Phi_1,\Phi_2)}{\partial(x,y,z)}\geq\operatorname{rank}\dfrac{\partial(\Phi_1,\Phi_2)}{\partial(x,y)}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} z^{-1/2} & -z^{-1/2}\\ z^{-1/2} & z^{-1/2}\end{pmatrix}=2$ при $z>0$, то Φ_1,Φ_2 - базис первых интегралов.

3) $u(x,y,z)=H\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{z}},\dfrac{x+y+2z}{\sqrt{z}}\right)$ - общее решение уравнения.

§46. Задача Коши для однородного линейного уравнения в частных производных первого порядка

Рассмотрим уравнение

$f_1(x_1,...,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+...+f_n(x_1,...,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=0$, $(x_1,...,x_n)\in G$, G - область в R^n, (46.1),

где функции $f_1,...,f_n$ непрерывны в области G и не обращаются одновременно в 0 ни в какой точке области G,

с начальным условием:

$u(x_1,...,x_{n-1},a)=\varphi(x_1,...,x_{n-1})$, $a\in R$, φ - заданная функция (46.2).

Строим общее решение уравнения (46.1): $u(x)=H(\Phi_1(x),...,\Phi_{n-1}(x))$, где $\Phi_1,...,\Phi_{n-1}$ - базис первых интегралов системы (45.2). Необходимо подобрать функцию H так, чтобы: $H(\Phi_1(x_1,...,x_{n-1},a),...,\Phi_{n-1}(x_1,...,x_{n-1},a))=\varphi(x_1,...,x_{n-1})$.

Составим систему функциональных уравнений:

$$\begin{cases}\Phi_1(x_1,...,x_{n-1},a)=C_1,\\ ...\\ \Phi_{n-1}(x_1,...,x_{n-1},a)=C_{n-1}.\end{cases}\qquad(46.3)$$

Из этой системы находим $x_i=F_i(C_1,...,C_{n-1})$, $i=\overline{1,n-1}$. Положим теперь

$$\begin{gathered}u(x_1,...,x_n)=\\ \varphi(F_1(\Phi_1(x_1,...,x_n),...,\Phi_{n-1}(x_1,...,x_n)),...,F_{n-1}(\Phi_1(x_1,...,x_n),...,\Phi_{n-1}(x_1,...,x_n)))\end{gathered}\qquad(46.4).$$

Докажем, что (46.4) – решение задачи Коши (46.1), (46.2).

Так как $\Phi_1,...,\Phi_{n-1}$ - первые интегралы системы (45.2), то $F_i(\Phi_1,...,\Phi_{n-1})$, $i=\overline{1,n-1}$, также первые интегралы, следовательно, правая часть соотношения (46.4) также является первым интегралом системы (45.2) и поэтому (46.4) – решение уравнения (46.1). Докажем теперь, что функция (46.4) удовлетворяет начальному условию.

$$\varphi(F_1(\Phi_1(x_1,...,x_{n-1},a),...,\Phi_{n-1}(x_1,...,x_{n-1},a)),...,F_{n-1}(\Phi_1(x_1,...,x_{n-1},a),...,\Phi_{n-1}(x_1,...,x_{n-1},a)))=$$
$$=\varphi(F_1(C_1,...,C_{n-1}),...,F_{n-1}(C_1,...,C_{n-1}))=\varphi(x_1,...,x_{n-1}).$$

Алгоритм нахождения решения задачи Коши (46.1), (46.2)

1) Составляем систему в симметрической форме (45.2), соответствующую уравнению (46.1).

2) Находим базис первых интегралов этой системы: $\Phi_1(x),\Phi_2(x),...,\Phi_{n-1}(x)$.

3) Составляем систему функциональных уравнений (46.3), которую решаем относительно переменных $x_1,...,x_{n-1}$.

4) Выписываем решение задачи Коши по формуле (46.4).

Замечание. При рассмотрении задачи Коши для уравнения (46.1) можно фиксировать любую из переменных x_i.

Пример. Найти решение задачи Коши:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ u(x,y,0)=x^2+y^2,\ x>0,y>0$$

Решение.

1) Составляем систему в симметрической форме: $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{xy}$.

2) Находим базис первых интегралов:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\ \Rightarrow\ \frac{x}{y}=C_1,\ \Phi_1=\frac{x}{y};$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{xy}\ \Rightarrow\ \frac{dx}{1}=\frac{dz}{y}\ \Rightarrow\ \frac{x}{C_1}dx=dz\ \Rightarrow\ \frac{x^2}{2C_1}-z=C_2\ \Rightarrow\ \frac{xy}{2}-z=C_2\ \Rightarrow$$

$\Phi_2=\dfrac{xy}{2}-z$. Так как $\operatorname{rank}\dfrac{\partial(\Phi_1,\Phi_2)}{\partial(x,y,z)}\geq\operatorname{rank}\dfrac{\partial(\Phi_1,\Phi_2)}{\partial(x,y)}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} y^{-1} & -xy^{-2} \\ y/2 & x/2 \end{pmatrix}=2$

при $x,y>0$, то Φ_1,Φ_2 - базис первых интегралов.

3) Составляем и решаем систему:

$\begin{cases} x/y=C_1, \\ xy/2=C_2. \end{cases}$ Отсюда $x=\sqrt{2C_1C_2}=F_1(C_1,C_2)$, $y=\sqrt{2\dfrac{C_2}{C_1}}=F_2(C_1,C_2)$.

4) Выписываем решение задачи Коши:

$$u(x,y,z)=\left(\sqrt{2\frac{x}{y}\left(\frac{xy}{2}-z\right)}\right)^2+\left(\sqrt{2\frac{\frac{xy}{2}-z}{\frac{x}{y}}}\right)^2=x^2+y^2-2z\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

Основная и дополнительная литература

№	Список литературы	Год издания
	Основная	
1	Альсевич Л.А., Черенкова Л.П. Практикум по дифференциальным уравнениям. Мн.	1990 г.
2	Альсевич Л.А., Мазаник С.А., Черенкова Л.П. Практикум по дифференциальным уравнениям. Мн.	2000 г.
3	Богданов Ю.С., Мазаник С.А., Сыроид Ю.Б. Курс дифференциальных уравнений. Мн.	1996 г.
4	Мазаник С.А. Лекции по курсу Обыкновенные дифференциальные уравнения. Мн. (в электронном виде)	2005 г.
	Дополнительная	
4	Богданов Ю.С., Сыроид Ю.Б. Дифференциальные уравнения. Мн.	1983 г.
5	Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.	1976 г.
6	Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. Мн.	1973 г.

Список вопросов к экзамену по курсу «Дифференциальные уравнения» Специальность «Прикладная информатика», 2011/2012 учебный год

1. *Основные понятия теории дифференциальных уравнений.*

1.1. Определения: дифференциального уравнения, обыкновенного дифференциального уравнения, уравнения в частных производных, решения, непродолжимого решения, общего решения, частного решения, полного решения, начальных/граничных/краевых условий, начальной/граничной/краевой задачи, условий Коши, задачи Коши, интегральной кривой.

1.2. Постановка задачи Коши для ОДУ.

1.3. Математические модели движения материальной точки с постоянным ускорением и процесса распада радиоактивного вещества.

2. Простейшие ДУ 1-го порядка.

2.1. Полное решение П-1 и теорема об однозначной разрешимости задачи Коши для П-1.

2.2. Полное решение П-n.

3. *Комплекснозначные решения простейших уравнений.*

3.1. Дифференцирование и интегрирование комплекснозначных функций.

3.2. Полное комлекснозначного решение П-1.

3.3. Квазиполиномы: определение, критерий равенства квазиполиномов.

3.4. Структура полного решения П-1 с правой частью в виде квазиполинома.

4. *Стационарные линейные дифференциальные уравнения первого порядка.*

4.1. Лемма о представлении $L_1 z$.

4.2. Полное решение СТЛУ-1.

4.3. ТОР задачи Коши для СТЛУ-1.

4.4. Структура полного решения СТЛУ-1 с правой частью в виде квазиполинома.

5. *Факторизация стационарного линейного оператора* L_n.

5.1. Определение равных операторов.

5.2. Факторизация оператора L_3 (с обоснованием).

5.3. Факторизация оператора L_n.

6. *Построение решений однородных СТЛУ-n.*

6.1. Построение полного решения уравнения $L_3 z = 0$ (с обоснованием).

6.2. Построение полного решения уравнения $L_n z = 0$.

6.3. ТОР для нулевой задачи Коши.

7. *Принцип суперпозиции.*

7.1. Линейное пространство решений ОСТЛУ-n.

8. *Определитель Вронского.*
8.1. Определение вронскиана.
8.2. Правило дифференцирования определителя.
8.3. Формула Остроградского-Лиувилля.

9. *Линейная зависимость решений однородного СТЛУ-n.*
9.1. Определение линейно зависимой и линейно независимой систем решений.
9.2. Теорема о линейной зависимости системы решений.

10. *Базис пространства решений однородного СТЛУ-n.*
10.1. Лемма о сдвиге.
10.2. Определение базиса пространства решений.
10.3. Теорема о представлении решения задачи Коши через решения специальных задач Коши.
10.4. Нормированный базис пространства решений.

11. *Неоднородные СТЛУ-n.*
11.1. Представление общего решения неоднородного СТЛУ-n через общее решение однородного и частное решение неоднородного уравнений.

12. *Метод Лагранжа нахождения ЧР неоднородного СТЛУ-n.*
12.1. Вид частного решения неоднородного СТЛУ-n.
12.2. Система Лагранжа.
12.3. Теорема о существовании частного решения вида п. 12.1 (с обоснованием для $n = 2$).

13. *Метод Эйлера нахождения ЧР неоднородного СТЛУ-n с правой частью в виде квазимногочлена.*
13.1. Определение контрольного числа правой части.
13.2. Вид комплекснозначного частного решения неоднородного СТЛУ-n.
13.3. Теорема о существовании частного решения вида п. 13.2 (с обоснованием для $n = 2$).
13.4. Вид действительнозначного решения неоднородного СТЛУ-n.

14. *Интегральная непрерывность решений СТЛУ-n.*
14.1. Невозмущенная и возмущенная задачи Коши.
14.2. Отклонение решений: определение и доказательство независимости отклонения от правой части и начальных условий.
14.3. Определения: непрерывной зависимости решений от начальных условий и интегральной непрерывности.
14.4. Теорема об интегральной непрерывности решения задачи Коши.

15. *Устойчивость по Ляпунову решений СТЛУ-n.*
15.1. Определение устойчивости по Ляпунову на полуоси.

15.2. Определение ляпуновского многочлена.
15.3. Критерий устойчивости по Ляпунову.
15.4. Необходимое условие устойчивости по Ляпунову.

16. *Асимптотическая устойчивость решений СТЛУ-n.*
16.1. Определение асимптотической устойчивости на полуоси.
16.2. Определение гурвицевого многочлена.
16.3. Критерий асимптотической устойчивости.
16.4. Критерий Гурвица (без доказательства).
16.5. Необходимое условие асимптотической устойчивости.

17. *Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.*
17.1. Постановка задачи.
17.2. Вывод уравнения вынужденных колебаний.
17.3. Решение уравнение вынужденных колебаний при отсутствии силы трения и в случае периодической возбуждающей силы.
17.4. Явление резонанса.
17.5. Исследование устойчивости.

18. *Однородные стационарные линейные векторные уравнения размерности n.*
18.1. Постановка задачи Коши для СТЛВУ-n.
18.2. Правила дифференцирования и интегрирования векторных функций.
18.3. ТОР для СТЛВУ-n с треугольной матрицей. Структура решения ОСТЛВУ-n с треугольной матрицей.
18.4. ТОР для СТЛВУ-n с произвольной матрицей. Структура решения ОСТЛВУ-n с произвольной матрицей.

19. *Пространство решений ОСТЛВУ-n.*
19.1. Матрица решений ОСТЛВУ-n.
19.2. Формула Остроградского-Лиувилля (с обоснованием для $n = 2$).
19.3. Линейное пространство решений ОСТЛВУ-n.
19.4. Полное решение ОСТЛВУ-n.

20. *Правило Эйлера построения базисной матрицы.*
20.1. Построение базисной матрицы в случае простых действительных и различных собственных значений.
20.2. Построение базисной матрицы в случае наличия действительных кратных собственных значений.
20.3. Построение комлекснозначной базисной матрицы в случае наличия комплексных собственных значений.
20.4.[1] Построение действительнозначной базисной матрицы в случае наличия комплексных собственных значений.

[1] Вопрос не является обязательным и может быть задан в качестве дополнительного на отличную оценку.

21. *Неоднородные СТЛВУ-n. Метод сведения линейной системы к одному линейному уравнению.*
21.1. Представление общего решения неоднородного СТЛВУ-n через общее решение однородного и частное решение неоднородной систем.
21.2. Метод сведения неоднородной системы второго порядка к линейному уравнению.

22. *Правило Лагранжа нахождения ЧР неоднородного СТЛВУ-n.*
22.1. Вид частного решения неоднородного СТЛВУ-n.
22.2. Существование частного решения вида п. 22.1.
22.3. Полное решение неоднородного СТЛВУ-n и решение задачи Коши.

23. *Построение базисной матрицы ОСТЛВУ-n с помощью экспоненты матрицы.*
23.1. Определение экспоненты матрицы.
23.2. Лемма о дифференцировании e^{At}.
23.3. Представление полного решения неоднородного СТЛВУ-n с помощью экспоненты матрицы.
23.4. Вычисление $e^{J_m(\nu)t}$, e^{Jt}, e^{At}.

24. *Интегральная непрерывность решений СТЛВУ-n.*
24.1. Невозмущенная и возмущенная задачи Коши.
24.2. Отклонение решений: определение и доказательство независимости отклонения от правой части и начальных условий.
24.3. Определения: непрерывной зависимости решений от начальных условий и интегральной непрерывности.
24.4. Теорема об интегральной непрерывности решения задачи Коши.

25. *Устойчивость по Ляпунову решений СТЛВУ-n.*
25.1. Определение устойчивости по Ляпунову на полуоси.
25.2. Лемма об устойчивости систем с подобными матрицами.
25.3. Критерий устойчивости по Ляпунову.

26. *Асимптотическая устойчивость решений СТЛВУ-n.*
26.1. Определение асимптотической устойчивости.
26.2. Лемма об асимптотической устойчивости систем с подобными матрицами.
26.3. Критерий асимптотической устойчивости.

27. *Математическая модель разложения химического вещества.*
27.1. Постановка задачи.
27.2. Вывод системы.
27.3. Нахождение решения.
27.4. Исследование устойчивости.

28. *Дифференциальные уравнения первого порядка в нормальной дифференциальной форме.*
28.1. Общий вид уравнения первого порядка в нормальной дифференциальной форме.
28.2. Определения: решения в явном, параметрическом, неявном виде; интеграла уравнения; интегральной кривой; общего решения в явном, параметрическом, неявном виде; полного решения; общего интеграла.
28.3. Классификация точек: точка существования, точка единственности, точка ветвления, особая точка уравнения.

29. *Уравнения в полных дифференциалах.*
29.1. Определение односвязной области.
29.2. Определение УПД.
29.3. Формулировка теоремы о независимости КРИ-2 от формы пути интегрирования.
29.4. Нахождение первообразной для выражения $Pdx + Qdy$.
29.5. Полное решение УПД. Постановка и решение задачи Коши для УПД.

30. *Интегрирующий множитель.*
30.1. Определение интегрирующего множителя.
30.2. Условие существования интегрирующего множителя вида $\mu(\omega(x, y))$.
30.3. Нахождение интегрирующего множителя вида п. 30.2

31. *Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.*
31.1. Полное решение уравнения с разделенными переменными. Решение задачи Коши.
31.2. Вид интегрирующего множителя для уравнения с разделяющимися переменными. Общее решение уравнения с разделяющимися переменными.

32. *Линейные уравнения первого порядка.*
32.1. Существование и вид интегрирующего множителя для линейного уравнения первого порядка.
32.2. Построение общего решения с использованием интегрирующего множителя.
32.3. Представление общего решения неоднородного линейного уравнения через общее решение однородного и частное решение неоднородного уравнений.
32.4. Нахождение общего решения однородного уравнения.
32.5. Метод Лагранжа нахождения частного решения неоднородного уравнения.

33. *Уравнение Бернулли.*
33.1. Сведение уравнения Бернулли к линейному уравнению.

34. *Интегральный критерий.*
34.1. Постановка задачи Коши для уравнения с выделенными производными.
34.2. Интегральный критерий.

35. *Лемма Гронуолла.*
35.1. Неравенство Гронуолла.
35.2. Следствие.

36. *Теорема Пикара-Линделефа.*
36.1. Условие Липшица. Линейный порядок роста.
36.2. Локальная теорема Пикара-Линделефа.
36.3. Локальная теорема Пеано (формулировка).
36.4. Глобальные теоремы Пикара-Линделефа и Пеано (формулировки).

37. *Лемма об условии Липшица.*
37.1. Лемма об условии Липшица.
37.2. Теорема об однозначной разрешимости задачи Коши.

38. *Существенность условий теорем существования.*
38.1. Пример задачи Коши, имеющей глобальное решение, но не имеющей локально единственного решения в окрестности начального условия.
38.2. Пример задачи Коши, не имеющей глобального решения, но имеющей локально единственное решение в окрестности начального условия.
38.3. Пример задачи Коши, не имеющей локального решения ни в какой окрестности начального условия.

39. *Рост денежных вкладов.*
39.1. Постановка задачи.
39.2. Вывод уравнения.
39.3. Частные случаи.

40. *Теоремы существования решений систем нелинейных ОДУ.*
40.1. Постановка задачи Коши.
40.2. Условие Липшица. Линейный порядок роста.
40.3. Формулировки теорем Пикара-Линделефа, Пеано, об однозначной разрешимости.

41. *Первые интегралы.*
41.1. Определение автономной системы, система ОДУ в симметрической форме.
41.2. Определение первого интеграла.
41.3. Теорема о первом интеграле.

42. *Интегрируемые комбинации.*
42.1. Определение стационарного первого интеграла.

42.2. Теорема об интегрируемых комбинациях.
42.3. Свойство равных отношений (пропорций).

43. *Базис первых интегралов.*
43.1. Определение базиса первых интегралов системы.
43.2. Теорема о базисе первых интегралов.

44. *Классификация уравнений в частных производных первого порядка.*
44.1. Общий вид уравнения в частных производных первого порядка.
44.2. Квазилинейные, линейные, линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.

45. *Построение общего решения однородного линейного уравнения в частных производных первого порядка.*
45.1. Определение решения.
45.2. Теорема о связи решений линейного уравнения в частных производных первого порядка и первых интегралов системы ОДУ в симметрической форме.
45.3. Алгоритм построения общего решения.

46. *Задача Коши для однородного линейного уравнения в частных производных первого порядка.*
46.1. Постановка задачи Коши.
46.2. Алгоритм нахождения решения задачи Коши с обоснованием.

Основные типы задач:
1. Нахождения полного решения простейшего уравнения порядка n.
2. Построение полного решения однородного СТЛУ-n.
3. Построение решений неоднородных СТЛУ-n с использованием методов Лагранжа и Эйлера.
4. Построение базисной матрицы однородных СТЛВУ-n методами Эйлера и с помощью экспоненты матрицы.
5. Построение общего решения неоднородных СТЛВУ-n с использованием метода Лагранжа, а также сведением системы к линейному уравнению порядка n.
6. Исследование устойчивости решений СТЛУ-n и СТЛВУ-n.
7. Интегрирование УПД, уравнений с разделенными и разделяющимися переменными.
8. Сведение уравнения к УПД, зная вид интегрирующего множителя.
9. Решение линейных уравнений первого порядка методом Лагранжа.
10. Интегрирование уравнений Бернулли.
11. Построение базиса первых интегралов системы ОДУ.
12. Построение общего решения однородного линейного уравнения в частных производных первого порядка. Решение задачи Коши.