SPAZIO VETTORIALE: INSIEME CON ELEMENTO NULLO, CHIUSO ALLA SOMMA E MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE
ESEMPI SPAZI VETTORIALI: R^2, INSIEME DI POLINOMI, MATRICI TRIANGOLARI, INSIEME DI MATRICI $m \times m$

PRODOTTO TRA MATRICI: SOLO SE $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p} \Rightarrow C_{m \times p}$

MATRICE TRASPOSTA: SCAMBIO RIGHE E COLONNE, **SIMMETRICA**: SIMMETRICA RISPETTO ALLA DIAGONALE

VETTORI LINEARMENTE INDIP: IN R^2 SONO DIP. QUANDO SONO PARALLELI, E SI POSSONO SCRIVERE $\lambda V_1 = V_2$. IN CASO CONTRARIO SONO INDIP SE NON POSSO SCRIVERE UNO COME COMBINAZIONE DELL'ALTRO

VERIFICA LINEARE DIP: $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 0$ SE ESCONO SOL $\neq 0$ SONO DIP.

SPAN LINEARE: INSIEME DELLE COMBINAZIONI LINEARI DI $[V_1, \dots, V_m] = \{\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \dots + \lambda_k V_k\}$

SISTEMA DI GENERATORI: I VETTORI $V_1, V_2, \dots, V_m$ SONO UN SISTEMA DI GEN. DI UNO SPAZIO V SE OGNI VETTORE DI V SI PUÓ OTTENERE COME COMBINAZIONE LINEARE DI $V_1, \dots, V_k$

BASE: UNA BASE É L'INSIEME MINIMO DI VETTORI CHE COPRONO TUTTO LO SPAZIO V, LINEARMENTE INDIPENDENTI
DIFFERENZA BASE-SISTEMA DI GENERATORI: UNA BASE É L'INSIEME MINIMO, NEL SISTEMA PUÓ ESSERCI RIDONDANZA (LINEARE DIPENDENZA). IN UNA BASE CI SONO INFINITI GENERATORI E BASI

DIMENSIONE: OGNI BASE DI V HA LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI, $V = SPAN(V_1, \dots, V_m)$ m FISSO.
RICONOSCERE UNA BASE: VOGLIO VEDERE SE $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\3\\7\\-11\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\2\\-5\\3\end{pmatrix}$ SONO BASE. LI METTO IN UN UNICA MATRICE E LA FACCIO DIVENTARE TRIANGOLARE. SE UNA COLONNA VIENE 0, ERA DIPENDENTE.

DETERMINANTE MATRICE: NUMERO REALE ASSOCIATO AD UNA MATRICE $m \times m$
SVILUPPO DI LAPLACE: VALIDO PER TUTTE E SOLE MATRICI QUADRATE, ESEMPIO: DET $A = \begin{vmatrix}3&2&3\\1&4&1\\2&-1&5\end{vmatrix}$
MINORE COMPLEMENTARE: SCELGO UN ELEMENTO ij DELLA MATRICE, IL MIN. COMP. SAREBBE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE TOGLIENDO L'ELEMENTO ij
COMPLEMENTO ALGEBRICO: $(-1)^{i+j}$, SE $i+j$ PARI 1, $i+j$ DISP -1

1) SCELGO UNA RIGA (PREFERIBILMENTE LA PRIMA)
2) CALCOLIAMO IL MINORE COMPLEMENTARE OGNI ELEMENTO DELLA RIGA E LI SOMMO
$A_{11} = 1 \cdot \det\begin{vmatrix}4&1\\-1&5\end{vmatrix} \cdot 3 \to (4 \cdot 5) - (1 \cdot -1)$ ($i+j$, COEFF)
$A_{12} = -1 \cdot \det\begin{vmatrix}1&1\\2&5\end{vmatrix} \cdot 2$
$A_{13} = \dots$ DET $A = A_{11} + A_{12} + A_{13}$

SARRUS: METODO PER CALCOLO DET PER MATRICI 3x3; SE HO UNA RIGA O COLONNA TUTTI 0 → DET. NULLO
· DUE RIGHE O COLONNE UGUALI → DET NULLO
· LINEE O COLONNE LIN. DIP. → DET. NULLO
FUNZIONAMENTO:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

SE SCAMBIO DUE RIGHE O COLONNE CAMBIA SEGNO

$$\text{DET } A: a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

ESEMPIO: $\begin{vmatrix}0&-1&5\\1&0&1\\2&3&4\end{vmatrix}$ → PER VEDERE SE SONO BASE CALCOLO IL DET, SE É NULLO ERANO LIN. DIP. SE NON É NULLO SONO BASE

MATRICI 4X4 O SUPERIORI: SE VOGLIO CALCOLARE IL DETERMINANTE MI CONVIENE TRASFORMARLA IN TRIANGOLARE SUP. O INF. IL DET. SARÁ UGUALE AL PRODOTTO DEI COEFF. SULLA DIAGONALE PRINCIPALE. SE SCAMBIO RIGHE O COLONNE CAMBIA SEGNO DET

RIASSUNTO DET: MATRICE 1x1 O 2x2: IMMEDIATO
3x3: SARRUS O LAPLACE
4x4 O SUPERIORE: SCAMBI RIGHE/COLONNE

COMPLETAMENTO AD UNA BASE: HO 3 VETTORI $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$. VOGLIO COMPLETARLI AD R^5. LI METTO IN UNA MATRICE PORTANDOLA "QUASI" TRIANGOLARE. (POI METTO ALTRI 2 VETTORI)
ARRIVERÓ AD AVERE $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&3&-1\\0&4&1\\1&4&2\end{pmatrix}$ → BASTA CHE AGGIUNGO $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ED OTTENGO LA BASE DI R^5

RANGO DI UNA MATRICE: MASSIMO NUMERO DI RIGHE O COLONNE LIN. INDIP. É LA DIMENSIONE DEL SUO SPAN
MATRICE A GRADINI: SE LE EVENTUALI RIGHE NULLE STANNO IN FONDO. E SE SOTTO IL PRIMO ELEMENTO NON NULLO DI OGNI RIGA SONO TUTTI 0
PIVOT: PRIMO ELEMENTO DI OGNI RIGA
NUMERO PIVOT = RANGO MATRICE
GAUSS PER IL RANGO: POSSO SCAMBIARE RIGHE E COLONNE PORTANDO LA MATRICE A GRADINI

SISTEMI LINEARI OMOGENEI: QUANDO IL TERMINE NOTO SONO TUTTI ZERI $(x+y+z=0)$
TEOREMA FONDAMENTALE DEI SISTEMI LINEARI
DIMENSIONE SPAZIO SOLUZIONI = m INCOGNITE − RANGO
= KERNEL

SISTEMI LINEARI:
SE TUTTE LE COLONNE DELLA MATRICE HANNO PIVOT IL SISTEMA HA UNICA SOL. → $\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&0\\0&2&4&-2&8\\0&0&1&1&7\\0&0&0&-1&-4\end{array}\right)$
SE COMPARE UNA RIGA CON TUTTI 0 IL SISTEMA NON AMMETTE SOLUZIONI $m \neq 0$ (IMPOSSIBILE) → $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&4\end{array}\right)$
SE CI SONO COLONNE DELLA MATRICE DEI COEFF. SENZA PIVOT E NON CI SONO RIGHE DEL TIPO 0000:m IL SISTEMA HA INFINITE SOL.

ROUCHÉ CAPELLI PER SIS. LIN.: CONSIDERIAMO UN SISTEMA DI m EQUAZIONI ED m INCOGNITE, E COSTRUIAMO LA MATRICE "A" CON SOLO I COEFFICIENTI E LA MATRICE (A/b) COMPLETA (E FACCIAMO GAUSS)
· IL SISTEMA HA UNICA SOL SE $rk(A) = rk(A/b) = m$
· INFINITE SOL. SOLO SE $rk(A) = rk(A/b) = r < m$ (SOLUZIONI DIPENDONO DA $m-r$ PARAMETRI)
· NO SOLUZIONI SE $rk(A) \neq rk(A/b)$
SI USA PER VERIFICARE LA COMPATIBILITÁ. POSSO FARE DIRETTAMENTE LA MATRICE COMPLETA E RISOLVO IL SISTEMA

MATRICE INVERSA: DEVE ESSERE $m \times m$ CON DET $\neq 0$
MATRICE NON SINGOLARE: DET $\neq 0$, ALLORA É INVERTIBILE
METODI: − GAUSS → 1) CALCOLO DETERMINANTE 2) CREO MATRICE LARGA IL DOPPIO CON A SINISTRA LA MATRICE DI PARTENZA, A DESTRA L'IDENTITÁ. 3) LA PARTE SINISTRA LA PORTO A SCALA, POI TUTTA LA DIAGONALE CON COEFFICIENTI 1, POI PORTO ANCHE TUTTI I NUMERI SOPRA LA DIAGONALE A 0. INFINE LA PARTE DESTRA DELLA MATRICE É L'INVERSA $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&2&2\\0&1&0&1&-2&-1\\0&0&1&-1&1&2\end{array}\right)$ INVERSA
METODO COMPLEMENTI ALGEBRICI: 1) CALCOLO DETERMINANTE $\neq 0$
2) COSTRUISCO LA STESSA MATRICE CAMBIANDO AD OGNI COEFFICIENTE IL SUO COMPLEMENTO ALGEBRICO. 3) A QUESTA MATRICE POI FACCIO LA TRASPOSTA. 4) MOLTIPLICO LA MATRICE PER IL RECIPROCO DEL DETERMINANTE INIZIALE

SOMMA SOTTOSPAZI: $U+V = \{u+v \mid u \in U, v \in V\}$. $U = SPAN\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, $V = SPAN\{(0,1,0),(0,0,1)\} \subset R^3$
CON GAUSS CONTROLLO SE SONO LIN. INDIP E STABILISCO LO SPAN. ESSENDO IN R^3 LA DIM. MASSIMA SARÁ 3.
INTERSEZIONE SOTTOSPAZI: É SEMPRE UN SOTTOSPAZIO → $U \cap V = \{x \in W \mid x \in U, x \in V\}$ (VETTORI PRESENTI IN ENTRAMBI I SOTTOSPAZI)
SEGUENDO L'ESEMPIO DI SOPRA $\cap V = SPAN\{(0,1,0)\} \to DIM\ U \cap V = 1$
GRASSMANN: $DIM(U+V) = DIM\ U + DIM\ V - DIM(U \cap V)$
$DIM(U \cap V) = DIM\ U + DIM\ V - DIM(U+V)$ } VALE SOLO PER DUE SOTTOSPAZI
PER 3 SOTTOSP. → $DIM(U+V+W) = DIM\ U + DIM\ V + DIM\ W - DIM(U \cap V) - DIM(U \cap W) - DIM(V \cap W) + DIM(U \cap V \cap W)$

AUTOVALORI: 1) CALCOLO IL det$(A - \lambda I)$ → MATRICE IDENTITÁ. IN POCHE PAROLE SOTTRAGGO AD OGNI COEFFICIENTE DELLA DIAGONALE IL VALORE λ
ESEMPIO: $\begin{pmatrix}4&0&3\\4&2&1\\1&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}4-\lambda&0&3\\4&2-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}$. POI PONGO IL DET = 0 E RICAVO I λ AUTOVALORI

AUTOVETTORI: SUPPONIAMO AUTOVALORI TROVATI $\lambda = 3$, $\lambda = 2$. PER OGNI AUTOVALORE CALCOLO IL KER SISTEMA ASSOCIATO ES $\lambda = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix}4-(3)&0&3\\4&2-(3)&1\\1&1&1-(3)\end{pmatrix}$ GLI AUTOVETTORI SONO LE SOL. NON NULLE DEL SISTEMA LINEARE

I VETTORI DI UNA MATRICE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI:
<=> A É INVERTIBILE
<=> IL RANGO É MASSIMO (m)

SE IL KER É SOLO $\{0\}$ L'APPLICAZIONE É INIETTIVA

KERNEL MATRICE: COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA MATRICE CHE DÁ IL VETTORE NULLO. SE I VETTORI SONO LIN. INDIP. IL KERNEL É OVVIAMENTE DI DIM = 0 E CONTIENE SOLO $\{0\}$

PER TROVARE IL KERNEL DI UNA MATRICE INVECE DI INIZIARE SUBITO CON IL SISTEMA LINEARE, POSSO PORTARLA A GRADINI, SE NESSUNA RIGA A 0 I VETTORI SONO LINEARMENTE INDIP. E SO GIÁ CHE IL KERNEL É DIM 0 $\{0\}$

(PER TROVARE IL KERNEL MI CONVIENE PASSARE DAL DETERMINANTE QUANDO LA MATRICE HA UN PARAMETRO K (COSÍ VEDO IL COMPORTAMENTO NEI VALORI DI K CRITICI.)

APPLICAZIONE LINEARE: PRENDE UN VETTORE DEL DOMINIO V E LO TRASFORMA IN UN VETTORE DEL CODOMINIO. (ESEMPIO: $f(x,y,z) = (x, y, z+1)$), COME LE FUNZIONI!
VERIFICA LINEARITÁ: 1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$. 2) $\lambda f(v) = f(\lambda v)$
ESEMPIO: $f(x,y,z) = (x, y+z+1)$ SE FACCIAMO NOTIAMO CHE NON É LINEARE
ALTRO ESEMPIO: $f: R^3 \to R^3$ $f(x,y,z) = (x+y, x, x-z)$. É LINEARE.

DIAGONALIZZAZIONE: LA MATRICE "A" INIZIALE É COMPLICATA, LA POSSO SCRIVERE COME $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, DOVE D É UNA MATRICE DI TUTTI ZERI E GLI AUTOVALORI SULLA DIAGONALE. P É LA MATRICE CON AUTOVETTORI COME COLONNE, P^{-1} É L'INVERSA
IN UNA MATRICE $m \times m$ SE TROVO m AUTOVALORI DISTINTI LA MATRICE É DIAGONALIZZABILE

MATRICI DIAGONALIZZABILI: SUPPONIAMO DI AVERE UNA MATRICE 3x3 $A: \begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. 1) TROVIAMO GLI AUTOVALORI, QUINDI CALCOLIAMO IL DETERMINANTE DELLA MATRICE CON $(A-\lambda)$ SULLA DIAGONALE. PER TROVARE QUESTI AUTOVALORI PONIAMO DET = 0 (CI VIENE $(2-\lambda)^2 \cdot (1-\lambda) = 0$) LE SOLUZIONI SONO 1 E 2, IL 2 COMPARE DUE VOLTE COME SOLUZIONE, QUINDI HA MOLTEPLICITÁ ALGEBRICA (MA) = 2, MENTRE LA SOLUZIONE $\lambda = 1$ HA MA = 1.
2) ORA IL MIO OBIETTIVO É TROVARE 3 AUTOVETTORI (PERCHÉ LA SOMMA DEI M.A. = 3), DEVO SPERARE DI TROVARE 2 AUTOVETTORI DALLA SOLUZIONE CON M.A. = 2 E UNA SOL. DALL'ALTRA CON M.A. = 1. QUINDI PARTO DA $\lambda = 1$ E LO METTO NELLA MATRICE INIZIALE (QUELLA CON $A - \lambda$ SULLA DIAGONALE, E SOSTITUISCO $\lambda = 1$). POI CALCOLO IL KER DI QUESTA MATRICE SVOLGENDO IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO ASSOCIATO ALLA MATRICE. LA SOLUZIONE PER $\lambda = 1$ É $(k, -k, k)$, QUINDI 1 VARIABILE LIBERA, IL CHE CI VA BENE PERCHÉ LA M.A. DI $\lambda = 1$ ERA 1, E RIUSCIAMO A TROVARE UNA BASE $(1, -1, 1)$. ORA PASSIAMO A $\lambda = 2$ E FACCIAMO LO STESSO, E DATO CHE M.A DI $\lambda = 2$ ERA 2 DEVO TROVARE 2 VARIABILI LIBERE NEL SISTEMA ASSOCIATO, PERMETTENDOMI DI RICAVARE DUE BASI. RISOLVENDO IL SISTEMA PERÓ LA SOLUZIONE É $(k, 0, 0)$, HA QUINDI UNA SOLA VARIABILE LIBERA E POSSIAMO RICAVARE UNA SOLA BASE $(1,0,0)$. SIA PER $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ LA MOLTEPLICITÁ GEOMETRICA (M.G.), OVVERO IL NUMERO DI BASI CHE POSSIAMO RICAVARE (VARIABILI LIBERE) É 1. MA M.A. DI $\lambda = 2$ ERA 2 E M.G. É USCITO DI 1, PER ESSERE DIAGONALIZZABILE $\boxed{MA = MG}$, QUINDI NON É DIAGONALIZZABILE. POSSIAMO ESTRAPOLARE CHE:
UNA MATRICE A É DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE I SUOI AUTOVETTORI RICOPRONO TUTTO LO SPAZIO VETTORIALE $(A: 3 \times 3 \to R^3)$. QUINDI IN UNA MATRICE $m \times m$ HO BISOGNO DI m VETTORI LIN. INDIP. CHE FANNO DA BASE ALLO SPAZIO VETTORIALE.

MATRICE ASSOCIATA: SE HO $f: V \to W$ LA MAT. ASSOCIATA $M_B^A(f)$ DOVE A É UNA BASE DI V E B É BASE DI W → $A: \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $B: \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$
COME TROVARLA: CASO 1) $f: R^3 \to R^2 \Rightarrow f(x,y,z) = (2x+y, y-z)$, ORA DEVO AVERE UNA BASE DEL DOMINIO E DEL CODOMINIO: $A: \{(1,-2,-2),(0,1,1),(0,0,1)\}$, $B: \{(1,1),(1,-1)\}$. ORA CALCOLO f DI TUTTI I VETTORI DOMINIO $(0,0),(1,0),(0,-1)$, ORA TROVO LE COMPONENTI DEI VETTORI IMMAGINE RISPETTO ALLA BASE B $(0,0) = a_1(1,1) + a_2(1,-1) \to \begin{cases}a_1 + a_2 = 0\\a_1 - a_2 = 0\end{cases} \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0$

$\begin{cases}(1,0) = a_1(1,1) + a_2(1,-1) \to \begin{cases}a_1 + a_2 = 1\\a_1 - a_2 = 0\end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}\\(0,-1) = a_1(1,1) + a_2(1,-1) \to \begin{cases}a_1 + a_2 = 0\\a_1 - a_2 = -1\end{cases} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}\end{cases}$

QUINDI $M_B^A(f) = \begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

CASO 2): (SE NON CI VIENE DATA LA LEGGE ESPLICITA) MI VIENE DETTO PERÓ CHE:
$f(1,1,1) = (2,0,1)$, $f(0,1,1) = (1,0,1)$, $f(-1,0,1) = (2,1,1)$ (v_1, v_2, v_3)
MI SERVE TROVARE I VALORI DI f PER LA BASE CANONICA DEL DOMINIO, OVVERO $f(1,0,0)$ CHE CHIAMO $f(e_1)$, $f(0,1,0) = f(e_2)$, $f(0,0,1) = f(e_3)$. NOI SAPPIAMO CHE
$1 \cdot f(e_1) + 1 \cdot f(e_2) + 1 \cdot f(e_3) = v_1$
$0 \cdot f(e_1) + 1 \cdot f(e_2) + 1 \cdot f(e_3) = v_2$
$-1 \cdot f(e_1) + 0 \cdot f(e_2) + 1 \cdot f(e_3) = v_3$
COSTRUISCO MATRICE ASSOCIATA $\Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&v_1\\0&1&1&v_2\\-1&0&1&v_3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&v_1\\0&1&1&v_2\\0&0&1&v_1 - v_2 + v_3\end{array}\right)$ →
$f e_1 (1,0,0) = (2,0,1) - (2,-1,0) - (3,1,1) = (-1,0,0)$
$f e_2 (0,1,0) = v_2 - f e_3 = (1,0,1) - (3,1,1) = (-2,-1,0)$
$f e_3 (0,0,1) = (v_1 - v_2 + v_3) = (3,1,1)$

$f(0,0,1) = (3,1,1)$, $f(0,1,0) = (-2,-1,0)$, $f(1,0,0) = (1,0,0)$

$$M_{E_3}^{E_3}(f) = \begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

PRODOTTO SCALARE: É UN CRITERIO CHE ASSOCIA A DUE VETTORI DI V IN R UN NUMERO REALE. $\langle v, w \rangle$. IL PRODOTTO SCALARE É COMMUTATIVO $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$. SE CONSIDERO a, b NUMERI REALI, E PRENDO 3 VETTORI u, v, w VALE CHE $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$. COME POSSIAMO PROPRIETÁ ABBIAMO $\langle v, v \rangle \geq 0$ (PRODOTTO SCALARE TRA v E SÉ STESSO ≥ 0), → $\langle v, v \rangle = 0$ SE $v = 0$. GLI SPAZI R^m (COME R^2, R^3..) HANNO PRODOTTO SCALARE. SUPPONIAMO DI ESSERE IN R^3, ED ABBIAMO DUE VETTORI $v = (x_1, y_1, z_1)$ E $w = (x_2, y_2, z_2)$. IN R^m IL PRODOTTO SCALARE É IL PRODOTTO DEGLI OMONIMI QUINDI $\langle v, w \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. PER VERIFICARE CHE SIA UN PRODOTTO SCALARE DEVO VERIFICARE I 3 ASSIOMI SCRITTI SOPRA 1) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \to x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ ✓. 2) ... 3) $\langle v, v \rangle \geq 0 \to x_1 x_1 + y_1 y_1 + z_1 z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ ✓ TUTTI TERMINI ALLA SECONDA QUINDI SICURAMENTE ≥ 0.
NORMA: SAPPIAMO CHE $\langle v, v \rangle = x^2 + y^2 + z^2$. LA NORMA É LA LUNGHEZZA DEL VETTORE! RICORDIAMO IN R^2 SE ABBIAMO UN PUNTO $(3,1)$ LA SUA DISTANZA É $\sqrt{x^2 + y^2}$! NEL NOSTRO CASO SIAMO IN R^3 QUINDI $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, UGUALE A $\sqrt{\langle v, v \rangle}$.
FORMULA NORMA: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ → PER QUESTO $\langle v, v \rangle$ PER GLI ASSIOMI DEVE ESSERE ≥ 0, STA SOTTO RADICE
ESEMPIO NORMA IN R^3: $v = (2,3,6) \to \langle v, v \rangle = 4 + 9 + 36 = 49 \to \|v\| = \sqrt{49} = 7$. QUINDI LA LUNGHEZZA (NORMA) DI $v = (2,3,6) = 7$
VERSORE: CON LA NORMA VEDEVAMO LA LUNGHEZZA DEL VETTORE, CON IL VERSORE CI INTERESSIAMO SOLO ALLA DIREZIONE, QUINDI CERCHIAMO UN VETTORE CHE PUNTI NELLA DIREZIONE DI v MA CON LUNGHEZZA/NORMA = 1. BASTA "NORMALIZZARE" IL VETTORE, OVVERO DIVIDERLO PER LA SUA NORMA. ESEMPIO CON VERSORE = $u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(2,3,6)}{7} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$

INFINITI PRODOTTI SCALARI: IN R^m HO INFINITI PRODOTTI SCALARI: AD ESEMPIO IN R^2 NON C'É SOLO QUELLO STANDARD, AD ESEMPIO PRENDIAMO $v = (x_1, y_1)$, $w = (x_2, y_2)$ IL PRODOTTO SCALARE PUÓ ESSERE $g(v, w) = 2x_1 x_2 + 3y_1 y_2$ (QUESTO É IL PROD. SCALARE PONDERATO). SE FACCIO INFATTI IL TEST DEI 3 ASSIOMI SONO VERIFICATI → $g(v, w) = g(w, v) \Rightarrow 2x_1 x_2 + 3y_1 y_2 = 2x_2 x_1 + 3y_2 y_1$, E ANCHE SE CONTROLLO $g(v, v)$ VIENE $= 2x_1 x_1 + 3y_1 y_1 = 2x_1^2 + 3y_1^2$, CHE É SEMPRE ≥ 0.
VETTORI ORTOGONALI: DUE VETTORI $v_1, v_2 \in V$ SONO ORTOGONALI $v_1 \perp v_2$ SE $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.
ESEMPIO: SIAMO IN R^2, $v_1 = (2,3)$, $v_2 = (3,-2)$ VEDIAMO QUANTO FA IL PROD. SCALARE STANDARD $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot -2 = 0$ ✓ SONO ORTOGONALI
ORA VERIFICHIAMO SE SONO ORTOGONALI RISPETTO AD UN ALTRO PRODOTTO SCALARE DI R^2 CHE É $\langle v_1, v_2 \rangle = 4x_1 x_2 - x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4y_1 y_2 = 13$ ✗ NON ORTOGONALI RISPETTO A QUESTO PROD. SCALARE.
BASE ORTOGONALE: ABBIAMO UNA BASE DI V COMPOSTA DAI VETTORI $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, QUESTA BASE É ORTOGONALE SE $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, PER OGNI COMBINAZIONE DI VETTORI.
ESEMPIO: IN R^3 HO BASE $\{(1,0,1), (0,1,0), (1,0,-1)\}$ (v_1, v_2, v_3) ⇒ SE FACCIO $\langle v_1, v_2 \rangle$ VIENE 0, ED ANCHE $\langle v_1, v_3 \rangle$ E $\langle v_2, v_3 \rangle$ (SECONDO IL PRODOTTO STANDARD).
RENDERLA UNA BASE ORTONORMALE: SIGNIFICA "NORMALIZZARE" LA BASE, SEMPLICEMENTE TROVO IL VERSORE DI OGNI VETTORE DELLA BASE ⇒ $\frac{v}{\|v\|}$. PARTENDO DAL 1° VETTORE $(1,0,1)$ LO NORMALIZZO $\Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\|v_2\| \Rightarrow$ GIÁ NORMALIZZATO (HA NORMA 1) $\Rightarrow \frac{(0,1,0)}{1} = (0,1,0)$, $\|v_3\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
LA BASE ORTONORMALE RISULTA $B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.
QUINDI IN UNA BASE ORTOGONALE I VETTORI SONO PERPENDICOLARI TRA LORO, IN UNA BASE ORTONORMALE HANNO ANCHE LUNGHEZZA (NORMA) = 1.
COSTRUZIONE BASE ORTONORMALE CON GRAM-SCHMIDT: HO UNA BASE DI $V: \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ NON ORTOGONALE, LA TRASFORMO IN $\{m_1, m_2, \dots, m_m\}$ ORTONORMALE.

$$m_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad m_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, m_1 \rangle m_1}{\|v_2 - \langle v_2, m_1 \rangle m_1\|}, \quad m_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, m_1 \rangle m_1 - \langle v_3, m_2 \rangle m_2}{\| \quad " \quad \|}, \quad m_m = \frac{v_m - \langle v_m, m_1 \rangle m_1 - \langle v_m, m_2 \rangle m_2 - \dots - \langle v_m, m_{m-1} \rangle m_{m-1}}{\| \quad " \quad \|}$$

ISOMORFISMO: DUE SPAZI V e W SONO ISOMORFI SE E SOLO SE HANNO STESSA DIMENSIONE.
UNA TRASFORMAZIONE LINEARE $T: R^m \to R^m$ É UN ISOMORFISMO <=> LA SUA MATRICE ASSOCIATA É INVERTIBILE
QUINDI: KER $(A) = 0$, $IM(A) = R^m$, $\det(A) \neq 0$
APPLICAZIONE INIETTIVA: SE IL NUCLEO CONTIENE SOLO $\{0\}$
APPLICAZIONE SURIETTIVA: SE $DIM(IM(f)) = DIM(W)$
AD ESEMPIO $f: R^3 \to R^4$ SE SCOPRO CHE L'IMMAGINE RICOPRE SOLO R^2 ALLORA $DIM(IM(f)) = 2 \neq DIM\ W = 4$ QUINDI NON SURIETTIVA.
ISOMORFISMO: SIA INIETTIVA CHE SURIETTIVA.
UN ENDOMORFISMO É UN ISOMORFISMO SE E SOLO SE LA SUA MATRICE A É INVERTIBILE (DET $\neq 0$)

ENDOMORFISMO: APPLICAZIONE LINEARE CON SPAZIO PARTENZA E SPAZIO ARRIVO UGUALI: $f: V \to V$
ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO: É UN ENDOMORFISMO $(f: V \to V)$, DOVE $v_1, v_2 \in V$ ABBIAMO $\langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle$
ESEMPIO: $f: R^2 \to R^2$ CON LEGGE $f(x,y) = (2x+y, x)$. PRENDIAMO $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ ABBIAMO $\langle (2x_1 + y_1, x_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle (x_1, y_1), (2x_2 + y_2, x_2) \rangle$
ORA CALCOLO I DUE PRODOTTI SCALARI EUCLIDEI STANDARD DI R^2 E VIENE $2x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 = 2x_1 x_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1$. SONO UGUALI, ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO ✓
TEOREMA SPETTRALE: SE $M_b^b(f)$, OVVERO LA MATRICE ASSOCIATA DI f RISPETTO AD UNA BASE ORTONORMALE É SIMMETRICA, ABBIAMO UN ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO.
LEGGE TEOREMA SPETTRALE $M_b^b \Rightarrow f$ AUTOAGGIUNTO. QUINDI ANCHE SE HO UN ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO E SCELGO UNA BASE ORTONORMALE PER CALCOLARE LA MATRICE ASSOCIATA, SARÁ SIMMETRICA.
TEOREMA SPETTRALE COMPLETO: ABBIAMO $f: V \to V$ CON PRODOTTO SCALARE STANDARD:

f É AUTOAGGIUNTO <=> f É UN ENDOMORFISMO SEMPLICE, CON BASE DI AUTOVETTORI E AUTOSPAZI ORTOGONALI <=> BASE DI AUTOVETTORI ORTOGONALI → $P^{-1} = {}^T P$
$P^{-1} M P = D$

ESEMPIO: $f: R^3 \to R^3$ $f(x,y,z) = (2x - z, -y, -x + 2z)$
$M_\varepsilon^\varepsilon(f) = \begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$ → AUTOVALORI $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ } AUTOVALORI DISTINTI ENDOMORFISMO SEMPLICE ⇒ I 3 AUTOVETTORI SONO DISTINTI PER LA DEF. ENDOMORF. SEMPLICE ⇒ QUINDI SONO TRA LORO ORTOGONALI ⇒ AUTOVETTORE DI $\lambda = -1 \to v_1 = (0,1,0)$, " DI $\lambda = 1 \to v_2 = (1,0,1)$, " DI $\lambda = 3 \to v_3 = (1,0,-1)$ } I 3 AUTOVETTORI INDIPENDENTI SONO ORTOGONALI A 2 A 2. QUESTA É BASE ORTOGONALE ⇒ $P_1 = \begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $P_1^{-1} = {}^T P_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

DIVIDO PER LA NORMA: $P = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$