📄 SCHEMA RISOLUTIVO: SERIE NUMERICHE (Analisi 1)

0. LA REGOLA D'ORO (Fallo appena leggi il testo!)

Condizione Necessaria per la convergenza: Calcola il limite del termine generale: $\lim_{n\to+\infty} a_n$

- Se il limite **NON fa 0** $\to$ La serie **DIVERGE**. (Fine dell'esercizio).
- Se il limite **fa 0** $\to$ La serie **PUÒ** convergere. (Procedi coi criteri qui sotto).

---

1. I TUOI "METRI DI PARAGONE"

Tutti gli esercizi si risolvono confrontando la tua serie con queste due:

TIPO	FORMA	REGOLA
Serie Geometrica	$\sum q^n$	Converge se **$
Serie Armonica	$\sum \frac{1}{n^\alpha}$	Converge se $\alpha > 1$
		Diverge se $\alpha \leq 1$

---

2. SERIE A TERMINI POSITIVI (Il 90% degli esercizi)

Devi scegliere tra due armi. Ecco come decidere quale usare:

🅰 **ARMA 1: Criterio Asintotico (Il "Limite")**

QUANDO USARLO: Sempre, se ci sono polinomi, logaritmi, radici, o termini che si sottraggono (es. $n^2 - n$). È il metodo più sicuro.

IL METODO:

1. **Pulisci:** Tieni solo i termini "dominanti" a numeratore e denominatore (trascura le costanti e le potenze più basse).
2. **Semplifica:** Ottieni una forma del tipo $\frac{1}{n^\alpha}$.
3. **Verifica:** (Facoltativo ma consigliato) Fai il limite del rapporto $\lim \frac{a_n}{1/n^\alpha}$. Se viene un numero finito $\neq 0$, il ragionamento è giusto.
4. **Concludi:** Guarda α. Se $\alpha > 1$ converge, altrimenti diverge.

> **Esempio 1 (Polinomi fratti):** $\sum \frac{n+5}{3n^4-n} \sim \frac{n}{3n^4} = \frac{1}{3n^3}$. Qui $\alpha = 3 > 1 \to$ **Converge.**
>
> **Esempio 2 (Logaritmi):** $\sum \frac{1}{n \ln n}$. Il logaritmo è "più debole" di qualsiasi potenza n^ϵ. È un caso limite (Serie di Abel): questa **Diverge**. *Nota:* $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ *converge solo se* $\beta > 1$
> .

🅱 **ARMA 2: Criterio del Confronto Semplice (Disuguaglianze)**

QUANDO USARLO: Solo se vedi $\sin(n)$, $\cos(n)$ o termini oscillanti limitati.

IL METODO:

1. Maggiora il termine oscillante con il suo massimo (es. $\sin n \leq 1$).
2. Scrivi la disuguaglianza: $a_n \leq b_n$.
3. Se la serie più grande b_n converge $\to$ Converge anche la tua.

> **Esempio:** $\sum \frac{2+\sin n}{n^2}$. Sappiamo che $\sin n \leq 1$, quindi Numeratore ≤ 3. $a_n \leq \frac{3}{n^2}$. Poiché $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, **Converge.**

---

3. SERIE CON PARAMETRO (Tipo Esame Parte B)

Esercizio tipico: *Studiare la convergenza di* $\sum \frac{n^2}{n^\alpha + \ln n}$ *al variare di* α.

STRATEGIA: Devi trovare per quali α l'esponente totale (Denominatore - Numeratore) è > 1.

1. **Caso Dominante:** Chi vince al denominatore?
   - Se $\alpha > 0$, vince n^α (batte il logaritmo). La serie diventa $\frac{n^2}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-2}}$.
   - Converge se l'esponente finale > 1, cioè: $\alpha - 2 > 1 \implies \alpha > 3$.
2. **Casi Limite:** Controlla cosa succede se il termine dominante sparisce (es. $\alpha \leq 0$).

---

4. SERIE A SEGNI ALTERNI (C'è $(-1)^n$)

Usa il **Criterio di Leibniz**. La serie converge se valgono ENTRAMBE le condizioni (sul termine senza il segno):

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. a_n è decrescente ($a_{n+1} \leq a_n$).

---

5. LA GERARCHIA DEGLI INFINITI (Da sapere a memoria!)

Per fare il Confronto Asintotico devi sapere chi "vince" all'infinito (dal più lento al più veloce):

1. $\ln(\ln n)$ (Lentissimo)
2. $\ln n$
3. $(\ln n)^{100}$
4. $n^{0.001}$ (Radici)
5. n
6. n^{100} (Polinomi)
7. e^n o 2^n (Esponenziali)
8. $n!$ (Fattoriale)
9. n^n (Velocissimo - Vince su tutto)

> **Regola:** Nella somma, vince sempre quello più a destra nella lista. Es: $n^5 + 2^n \sim 2^n$.

---

6. SVILUPPI DI TAYLOR UTILI (Per serie $a_n \to 0$)

Se l'argomento va a 0 (es. $1/n$), usa questi per trovare l'equivalente asintotico:

- $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$
- $e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}$
- $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$
- $1 - \cos(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2n^2}$ (Attenzione al quadrato!)
- $(1 + \frac{1}{n})^\alpha - 1 \sim \frac{\alpha}{n}$

ESEMPIO COMPLETO GUIDATO

Esercizio: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\sin(n)}{n^3-2n}$

1. **Controllo:** Polinomi "sporchi". Uso **Asintotico**.
2. **Numeratore:** n vince su $\sin(n)$. $\to n$.
3. **Denominatore:** n^3 vince su $-2n$. $\to n^3$.
4. **Risultato:** $a_n \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$.
5. **Verifica:** Esponente $\alpha = 2 > 1$.
6. **Conclusione:** La serie **CONVERGE**.