

# Il Prodotto Hermitiano e il Teorema Spettrale

Appunti di Algebra Lineare

16 dicembre 2025

## 1 Definizioni Fondamentali

### 1.1 Prodotto Hermitiano Standard

In uno spazio vettoriale complesso  $V = \mathbb{C}^n$ , il prodotto hermitiano standard (o canonico) tra due vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  è definito come:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \overline{\mathbf{w}} = \sum_{j=1}^n v_j \overline{w_j} \quad (1)$$

*Nota: Alcuni testi usano la convenzione opposta coniugando il primo vettore. Qui coniugiamo il secondo.*

### 1.2 Matrice Hermitiana

Una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  è detta **Hermitiana** (o autoaggiunta) se coincide con la sua trasposta coniugata:

$$A = A^\dagger \iff A = \overline{A}^T \quad (2)$$

In termini di componenti:  $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$ . Da questo segue che gli elementi sulla diagonale principale devono essere **Reali** ( $a_{ii} = \overline{a_{ii}} \implies a_{ii} \in \mathbb{R}$ ).

### 1.3 Decomposizione Cartesiana

Qualsiasi matrice Hermitiana  $A$  può essere scomposta nella somma di una parte reale simmetrica e una parte immaginaria antisimmetrica:

$$A = S + iK \quad (3)$$

dove:

- $S$  è una matrice reale **Simmetrica** ( $S^T = S$ ).
- $K$  è una matrice reale **Antisimmetrica** ( $K^T = -K$ ).

## 2 Il Teorema Spettrale (Caso Complesso)

**Teorema 1** (Spettrale per Matrici Hermitiane). *Sia  $A$  una matrice Hermitiana. Allora:*

1. *Tutti gli autovalori di  $A$  sono **Reali**.*
2. *Autovettori relativi ad autovalori distinti sono **Ortogonalni** (rispetto al prodotto hermitiano).*
3.  *$A$  è diagonalizzabile tramite una matrice **Unitaria**  $U$ . Ovvero, esiste una base ortonormale di autovettori tale che:*

$$U^\dagger A U = D$$

*dove  $D$  è diagonale e  $U^\dagger = U^{-1}$ .*

---

## 3 Esercizio Svolto

**Esercizio 1.** Si consideri l'operatore  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  la cui matrice associata rispetto alla base canonica, ricostruita dai dati forniti  $(2x - iy + (1+i)z, \dots)$ , è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1+i \\ i & 0 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Verificare che  $A$  definisce un prodotto hermitiano (ovvero che è Hermitiana).
2. Calcolare autovalori e autovettori.
3. Trovare la matrice unitaria  $U$  che diagonalizza  $A$ .

### Svolgimento

#### 1. Verifica Hermitiana

Controlliamo che  $A = \overline{A}^T$ :

- Diagonale: 2, 0, 0 sono tutti reali. (OK)
- $a_{21} = i$  e  $\overline{a_{12}} = \overline{-i} = i$ . (OK)
- $a_{31} = 1 - i$  e  $\overline{a_{13}} = \overline{1+i} = 1 - i$ . (OK)
- $a_{32} = 0$  e  $\overline{a_{23}} = 0$ . (OK)

La matrice è Hermitiana.

## 2. Calcolo degli Autovalori

Calcoliamo il polinomio caratteristico  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ :

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -i & 1+i \\ i & -\lambda & 0 \\ 1-i & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo lungo la seconda riga o colonna (o con Sarrus):

$$\begin{aligned} &= (2-\lambda)(\lambda^2) - (-i)[i(-\lambda)] + (1+i)[-(-\lambda)(1-i)] \\ &= \lambda^2(2-\lambda) - \lambda + \lambda(1+i)(1-i) \end{aligned}$$

Sapendo che  $(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 2$ :

$$= 2\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda + 2\lambda = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda$$

Mettiamo a zero:  $\lambda(-\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$ . Le radici sono:

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(-1)(-1)}}{2} \Delta = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda$ . Radici di  $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \implies (\lambda - 3)(\lambda + 1)$ .

Quindi gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -1$$

Sono tutti reali e distinti, come previsto dal Teorema.

## 3. Calcolo degli Autovettori e Normalizzazione

**Per  $\lambda_1 = 3$ :** Risolviamo  $(A - 3I)\mathbf{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & -i & 1+i \\ i & -3 & 0 \\ 1-i & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Dalla riga 2:  $ix = 3y \implies y = \frac{i}{3}x$ . Dalla riga 3:  $(1-i)x = 3z \implies z = \frac{1-i}{3}x$ . Ponendo  $x = 3$ , otteniamo  $\mathbf{v}_1 = (3, i, 1-i)$ . **Norma:**  $\|\mathbf{v}_1\|^2 = |3|^2 + |i|^2 + |1-i|^2 = 9 + 1 + 2 = 12$ .

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 3 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

**Per  $\lambda_2 = 0$ :** Dalle righe 2 e 3 del sistema originale ( $ix = 0 \implies x = 0$ ): Se  $x = 0$ , la riga 1 diventa  $-iy + (1+i)z = 0 \implies iy = (1+i)z$ . Poniamo  $z = 1$ , allora  $iy = 1+i \implies y = \frac{1+i}{i} = 1-i$ .  $\mathbf{v}_2 = (0, 1-i, 1)$ . **Norma:**  $\|\mathbf{v}_2\|^2 = 0 + 2 + 1 = 3$ .

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Per**  $\lambda_3 = -1$ : Risolviamo  $(A + I)\mathbf{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & -i & 1+i \\ i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalla riga 2:  $ix + y = 0 \implies y = -ix$ . Dalla riga 3:  $(1-i)x + z = 0 \implies z = -(1-i)x = (-1+i)x$ . Ponendo  $x = 1$ :  $\mathbf{v}_3 = (1, -i, -1+i)$ . **Norma:**  $\|\mathbf{v}_3\|^2 = 1 + 1 + 2 = 4$ .

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}$$

#### 4. Matrice Diagonale e Unitaria

La matrice diagonale è  $D = \text{diag}(3, 0, -1)$ . La matrice unitaria  $U$  ha per colonne gli autovettori normalizzati:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{12}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1-i}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$$