EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI/NON COSTANTI

ABBIAMO UN EQUAZIONE DELLA FORMA

$y' = a(t)\cdot y + b(t)$ OPPURE $y' - a(t)y = b(t)$

SOLUZIONE GENERALE DI UN EQUAZIONE DIFFERENZIALE (PRIMO ORD.)

$$\boxed{y(t) = e^{A(t)}\cdot\left(\int b(t)\cdot e^{-A(t)}\,dt + c\right)}$$

DOVE $A(t) = \int a(t)\,dt$ É UNA PRIMITIVA DI $a(t)$

E C É UNA COSTANTE ARBITRARIA CHE AVRÁ LA SUA UTILITÁ NEI PROBLEMI DI CAUCHY.

TIP: NELLA MAGGIOR PARTE DEI CASI L'INTEGRALE SI SVOLGE PER PARTI, O SE $A(t)$ É UN LOGARITMO LA FUNZIONE SI SEMPLIFICA DATO CHÉ $e^{\ln a} = a$ (PROPRIETÁ ESPONENZIALE/LOG)

ESEMPIO SVOLTO (METTIAMO UN PARAMETRO COSÍ SI CHIAMA PROBLEMA DI CAUCHY)

$$\begin{cases} 2y' + 4ty = t \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

0) PORTARE L'EQUAZIONE IN FORMA CANONICA:

$$y' = -\frac{2}{t}y + \frac{t}{2}$$

1) TROVIAMO LA PRIMITIVA $A(t)$

$$A(t) = \int a(t)\,dt = \int -\frac{2}{t}\,dt = -2\ln|t|$$

DATO CHE IL PROBLEMA DI CAUCHY CI CHIEDE $y(1)$, QUINDI NELLA PARTE DI GRAFICO POSITIVO, POSSIAMO TOGLIERE IL MODULO ALLA t, SE IL PROBLEMA CI CHIEDEVA y(NUMERO NEGATIVO) AVREI TOLTO IL MODULO CAMBIANDO SEGNO (COME SI SCIOGLIE UN MODULO)

$$A(t) = -2\ln t$$

2) IMPOSTARE LA FORMULA FINALE:

$$y = e^{-2\ln t}\left(\int \frac{t}{2}\cdot e^{2\ln t}\,dt + c\right)$$

SEMPLIFICHIAMOLA USANDO LE PROPRIETÁ DELLE POTENZE/LOGARITMI

$$y = \frac{1}{t^2}\left(\int \frac{t}{2}\cdot t^2\,dt + C\right)$$

SI É SEMPLIFICATO PROPRIO COME HO SCRITTO NELLA TIP SOPRA (SI É TOLTO $e^{\ln}$)

$$y = \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4} + c\right) = \frac{t^2}{8} + \frac{c}{t^2}$$

HO RISOLTO L'INTEGRALE

3) LA FORMULA GENERALE L'ABBIAMO TROVATA, MA IL NOSTRO É UN PROBLEMA DI CAUCHY (IL SISTEMA), QUINDI TRA TUTTE LE SOLUZIONI CI INTERESSIAMO A QUELLA CON $y(1)=0$

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ 0 = \frac{1^2}{8} + \frac{c}{1^2} \rightarrow c = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

QUINDI LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE CON IL PARAMETRO SPECIFICO CHE MI HA RICHIESTO CAUCHY É:

$$\boxed{y = \frac{t^2}{8} - \frac{1}{8t^2}}$$

NOTA: SE ABBIAMO UN PROBLEMA DI CAUCHY DOBBIAMO QUINDI RISOLVERE L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE NORMALMENTE E ALLA FINE SOSTITUIRE IL PARAMETRO C CON LA $y(x)$ FORNITA DAL PROBLEMA