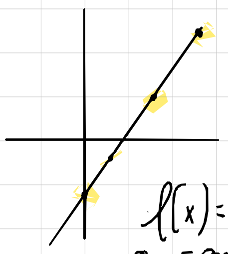
# SUCCESSIONE

UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI È UNA FUNZIONE $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
LA VARIABILE INDIPENDENTE SI INDICA CON $n$ E PER LA FUNZIONE SI USA $a_n$

ESEMPIO

$a_n = 2n-3$

$a_0 = -3 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 1$



$(n, a_n)$

$f(x) = 2x-3$

$a_n = 2n-3$

$a_n$ PUÒ ASSUMERE NEL DOMINIO SOLO NATURALI QUINDI PUNTI

- UNA SUCCESSIONE $a_n$ SI DICE
- LIMITATA INFERIORMENTE SE ESISTE $m \in \mathbb{R} \mid a_n \geq m$
- LIMITATA SUPERIORMENTE SE ESISTE $M \in \mathbb{R} \mid a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- LIMITATA SE ESISTONO $m \in \mathbb{R}$ E $M \in \mathbb{R} \mid m \leq a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

ESEMPI: LA SUCCESSIONE $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ I CUI PRIMI TERMINI SONO $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots$
È LIMITATA: SI HA INFATTI CHE $0 < a_n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$
È LIMITATA INFERIORMENTE $(a_n \geq 0)$ MA NON SUPERIORMENTE

- MONOTONA CRESCENTE SE $a_n \leq a_{n+1}$
- MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE $a_n < a_{n+1}$

---

## LIMITI DI SUCCESSIONI:

CALCOLARE IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE $\left[\lim_{n \to +\infty} \text{ o } \lim a_n\right]$ SIGNIFICA CHIEDERSI CHE TIPO DI COMPORTAMENTO HA LA SUCCESSIONE QUANDO $n$ TENDE A $+\infty$.

4 POSSIBILITÀ:

1) SE $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \ a_n > M$
LA SUCCESSIONE DIVERGE A $+\infty$ E SI SCRIVE
$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ OPPURE $a_n \to +\infty$

ESEMPIO: $\lim_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$

2) SE $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \quad a_n < M$
LA SUCCESSIONE DIVERGE A $-\infty$ E SI SCRIVE
$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ OPPURE $a_n \to -\infty$

ESEMPIO: $\lim_{n \to +\infty} -n^3 = -\infty$ LA SUCCESSIONE $\{-n^3\}$ DIVERGE A $-\infty$

3) SE ESISTE UN $\mathbb{R}$ CHIAMATO $l$ CHE GODE DI QUESTA PROPRIETÀ: FISSATO UN QUALUNQUE NUMERO REALE $\varepsilon > 0$ ANCHE PICCOLISSIMO, $|a_n - l| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE SI DICE CHE LA SUCCESSIONE CONVERGE E SI SCRIVE:
$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ OPPURE $a_n \to l$

ESEMPI: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ CONVERGONO

SE $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ SUCCESSIONE INFINITESIMA

4) SE NON SI VERIFICA NESSUNO DEI CASI PRECEDENTI $\lim_{n \to +\infty} a_n$ NON ESISTE E LA SUCCESSIONE È INDETERMINATA

---

## SERIE NUMERICHE

DATA UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI $\{a_n\}$ SI CHIAMA SERIE DEI TERMINI $a_n$ LA SOMMA DEGLI INFINITI TERMINI DELLA SUCCESSIONE.
SI INDICA $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

SE SOMMIAMO SUCCESSIONI CHE NON CONVERGONO, OGNI RISULTATO È POSSIBILE.
SE SOMMIAMO SUCCESSIONI CHE CONVERGONO, IL RISULTATO CONVERGE

---

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad b_n = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 100 \\ \sqrt{5} & n > 100 \end{cases}$$

$\downarrow$ $\lim = 0$ $\qquad$ $\downarrow$ $\lim = 1$

$$c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{0}{1} = 0$$

---

TEOREMA PERMANENZA SEGNO

$\lim_{n \to +\infty} b_n = M$

se $\begin{cases} M \neq 0 & b_n \text{ è definitivamente } \neq 0 \\ M > 0 & b_n \text{ " " } > 0 \end{cases}$

se $M < 0 \Rightarrow \exists K \in \mathbb{N} : b_n < 0$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$$

$$b_n = \begin{cases} -1 & n \leq 1000 \\ 1 & n > 1000 \end{cases}$$

$\lim b_n = 1 > 0$ NON È VERO CHE $b_n > 0$ SEMPRE