🤖 L'ALGORITMO RISOLUTIVO PER SERIE

PASSO 1: Il "Check-In" (Condizione Necessaria)

Appena vedi $\sum a_n$, fai mentalmente il limite:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n$$

- Fa 0? $\to$ Procedi al Passo 2 (La serie *potrebbe* convergere).
- **NON** fa 0? (es. fa $1, \infty$, o oscilla come $\sin n$) $\to$ **STOP**. La serie **DIVERGE** (o è indeterminata). Esercizio finito.

PASSO 2: Identifica il "Nemico"

Guarda la faccia di a_n. Che tipo di funzioni ci sono?

- **TIPO A:** Ci sono $(-1)^n$ o $\cos(n\pi)$ o seni negativi? $\to$ Vai al **PASSO 4 (Leibniz)**.
- **TIPO B:** Ci sono fattoriali ($n!$), n^n, o esponenziali potenti (3^n)? $\to$ Vai al **PASSO 3B (Rapporto/Radice)**.
- **TIPO C:** Ci sono polinomi, radici, logaritmi, $\sin(1/n)$, $e^{1/n} - 1$? (Il 90% dei casi). $\to$ Vai al **PASSO 3A (Confronto Asintotico)**.

PASSO 3A: La Strada dell'Armonica (Confronto Asintotico)

Obiettivo: Trasformare il mostro in $\frac{1}{n^\alpha}$.

1. **Pulisci:** Butta via i termini più piccoli. (Esempio: $n^2 + n \to n^2; n + \ln n \to n$).
2. **Usa Taylor (Se necessario):** Se hai funzioni che vanno a 0 (come $\sin(1/n)$), sostituiscile con il loro polinomio di Taylor.
   - $\sin(\epsilon_n) \sim \epsilon_n$
   - $1 - \cos(\epsilon_n) \sim \frac{1}{2}\epsilon_n^2$
   - $\ln(1 + \epsilon_n) \sim \epsilon_n$
3. **Calcola l'Esponente Finale (α):** Alla fine avrai una frazione del tipo $\frac{1}{n^{\text{Denominatore}}/n^{\text{Numeratore}}} = \frac{1}{n^\alpha}$.

$$\alpha = \text{Esponente Sotto} - \text{Esponente Sopra}$$

4. **Verdetto:**
   - $\alpha > 1 \to$ **CONVERGE.**
   - $\alpha \leq 1 \to$ **DIVERGE.**

   Esempio: $\sum \frac{n}{n^4+1}$. Pulisco: $\frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$. $\alpha = 3 > 1$. Converge.

PASSO 3B: La Strada dell'Esponenziale (Rapporto/Radice)

Obiettivo: Trovare un numero L da confrontare con 1.

- **Usa il Criterio del Rapporto** se vedi **Fattoriali ($n!$)**: Calcola $L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- **Usa il Criterio della Radice** se vedi **tutto elevato alla** n: Calcola $L = \lim \sqrt[n]{a_n}$.

Verdetto:

- $L < 1 \to$ **CONVERGE** (Velocemente come una geometrica).
- $L > 1 \to$ **DIVERGE.**
- $L = 1 \to$ Il criterio fallisce (torna al Passo 3A).

PASSO 4: La Strada Alternata (Leibniz)

Obiettivo: Verificare se il termine muore lentamente.

Se la serie è $\sum (-1)^n \cdot b_n$, ignora il segno e guarda solo b_n.

1. Il limite va a 0? ($\lim b_n = 0$)
2. Decresce? ($b_{n+1} \leq b_n$)

Se SI a entrambe $\to$ **CONVERGE.**

🧩 Applichiamolo agli Esercizi che abbiamo visto

Esercizio Taylor (Esame 2023): $\sum(\sin(1/n) - \arctan(1/n))$

1. **Check-in:** Argomento va a 0. OK.
2. **Tipo:** Funzioni trigonometriche con argomento infinitesimo $(1/n)$. $\to$ **Passo 3A (Asintotico).**
3. **Azione:** Taylor. $\sin(1/n) \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}$ $\arctan(1/n) \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3}$ Sottrazione: $(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}) - (\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3}) = \frac{1}{n^3}(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{6n^3}$. Risultato: Si comporta come $\sum \frac{1}{n^3}$.
4. **Verdetto:** $\alpha = 3 > 1$. **Converge.**

Esercizio Fattoriale (Esame 2015): $\sum \frac{n! n^3}{n^{\alpha n}}$

1. **Check-in:** Dipende da α, ma proviamo.
2. **Tipo:** C'è $n!$ e n all'esponente. $\to$ **Passo 3B (Radice + Stirling).**
3. **Azione:** Stirling per togliere il fattoriale $\to n^n e^{-n} \dots$ Radice n-esima: $\lim \frac{n}{e \cdot n^\alpha} = L$.
4. **Verdetto:** Se $L < 1$ converge.

Esercizio Geometrico (Quiz 2021): $\sum(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}})^n$

1. **Tipo:** È tutto elevato alla n. È una serie geometrica pura $\sum q^n$.
2. **Azione:** Imponi $|q| < 1$.
3. **Verdetto:** Risolvi la disequazione.

Ti è più chiaro così? Se vuoi, prova ad applicare questo schema all'**Esercizio 6** (quello della Serie di Potenze e l'integrale) e dimmi in che "Passo" ricadi!