EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE NON OMOGENEE LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

FORMA GENERALE:

$$ay''+by'+cy=f(x)$$

PERCHÉ NON É OMOGENEA? PERCHÉ A DESTRA DELL'UGUAGLIANZA NON ABBIAMO 0, MA $f(x)$.

É LINEARE PERCHE y'', y', ED y SONO ALLA PRIMA POTENZA E NON SONO MOLTIPLICATI TRA LORO.

É A COEFFICIENTI COSTANTI PERCHÉ a,b,c SONO NUMERI E NON FUNZIONI.

COME SI RISOLVONO?

LA SOLUZIONE É DATA DA:

$$\boxed{y=y_0+y_p}$$

y_0: EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA

y_p: SOLUZIONE PARTICOLARE CHE DIPENDE DA $f(x)$, CHE ANDREMO A TROVARE CON IL METODO DI SOMIGLIANZA

NEI NOSTRI ESERCIZI PER ANALISI 1, $f(x)$ É NEL 99% DEI CASI UN:

(A) POLINOMIO

(B) FUNZIONE ESPONENZIALE

(C) FUNZIONE TRIGONOMETRICA

PARTIAMO DAL CASO (A):

ESEMPIO:

$$y''+2y'-8y=\underbrace{x^2+3x+1}_{\text{POLINOMIO}}$$

① RISOLVERE L'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA:

$$y''+2y'-8y=0 \rightarrow \lambda^2+2\lambda-8=0$$

NOTA: SE $\Delta>0$ CI SARANNO DUE SOLUZIONI DISTINTE,
SE $\Delta=0$ LE DUE SOLUZIONI SONO UGUALI
SE $\Delta<0$ CI SONO DUE SOLUZIONI COMPLESSE CONIUGATE

NEL NOSTRO CASO $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot-8=36$.

É >0, QUINDI 2 SOLUZIONI DISTINTE. CALCOLIAMOLE, E CHIAMIAMOLE λ_1,λ_2: $\lambda_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm6}{2}=-1\pm3$

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=-4$

NOTA: LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSUME 3 FORME DIVERSE:
- SE $\Delta>0$ $y_0=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$
- SE $\Delta=0$ $y_0=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}$
- SE $\Delta<0$ $y_0=e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x)+C_2\sin(\beta x))$

NOI SIAMO NEL CASO $\Delta>0$, PER CUI LA SOLUZIONE DELL'OMOGENEA ASS. SARÁ:

$$y_0=C_1e^{2x}+C_2e^{-4x}$$

② ORA DOBBIAMO SOMMARE A y_0 LA SOLUZIONE PARTICOLARE, COME DICE LA FORMULA.

TROVIAMO LA SOLUZIONE PARTICOLARE:

L'EQUAZIONE ERA $y''+2y'-8y=x^2+3x+1$

CI SERVONO I COEFFICIENTI DEL PRIMO MEMBRO

$a=$ COEFFICIENTE $y''=1$

$b=$ COEFFICIENTE $y'=2$

$c=$ COEFFICIENTE $y=-8$

NOTA: SE $\cdot c\neq0$ DOBBIAMO CERCARE UN POLINOMIO DI GRADO m, OVVERO IL GRADO DEL POLINOMIO A DESTRA DELL'EQUAZIONE, PER NOI x^2+3x+1, QUINDI GRADO $m=2$
SE $\cdot c=0, b\neq0$: IL GRADO DEL POLINOMIO DA CERCARE É $m+1$.
SE $c=0, b=0$ (C'É SOLO y''): IL GRADO DEL POLINOMIO DA CERCARE É $m+2$

NOI SIAMO NEL CASO $c\neq0$, ABBIAMO $m=2$. IL NOSTRO POLINOMIO PARTICOLARE AVRÁ FORMA:

$$y_p=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

PER TROVARE α,β,γ DOBBIAMO CALCOLARE DERIVATA PRIMA y'_p E DERIVATA SECONDA y''_p DEL POLINOMIO PARTICOLARE.

$$y'_p=2\alpha x+\beta \qquad y''_p=2\alpha$$

ORA CI BASTA SOSTITUIRE A $y''+2y'-8y=x^2+3x+1$

$$y''\rightarrow y''_p \quad y'\rightarrow y'_p \quad y\rightarrow y_p$$

DIVENTA QUINDI: $2\alpha+2(2\alpha x+\beta)-8(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=x^2+3x+1$

$$2\alpha+4\alpha x+2\beta-8\alpha x^2-8\beta x-8\gamma=x^2+3x+1$$
$$-8\alpha x^2+x(4\alpha-8\beta)+2\alpha+2\beta-8\gamma=x^2+3x+1$$

EGUAGLIAMO I MEMBRI DI x^2, x E COEFFICIENTI NOTI

$$\begin{cases}-8\alpha=1 \rightarrow \alpha=-\frac{1}{8}\\ 4\alpha-8\beta=3\\ 2\alpha+2\beta-8\gamma=1\end{cases}$$

RISOLVENDO IL SISTEMA GIUNGIAMO A:

$\alpha=-\frac{1}{8}$, $\beta=-\frac{7}{16}$, $\gamma=-\frac{17}{64}$

$$y_p=\alpha x^2+\beta x+\gamma=-\frac{1}{8}x^2-\frac{7}{16}x-\frac{17}{64}$$

③ SAPEVAMO CHE LA SOLUZIONE DI UN EQUAZIONE NON OMOGENEA ERA

$y=y_0+y_p$ ABBIAMO ENTRAMBI ORA

$$\boxed{y=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{-4x}-\frac{1}{8}x^2-\frac{7}{16}x-\frac{17}{64}}$$

QUESTA É LA SOLUZIONE DI QUESTA EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE NON OMOGENEA

ANALIZZIAMO UN CASO DOVE $c=0, b\neq0$, QUINDI COME HO SCRITTO IL POLINOMIO PARTICOLARE DA CERCARE É DI GRADO $m+1$:

ESEMPIO:

$$y''+7y'=x+3 \qquad \text{GRADO } y_p=m+1=2$$

FACCIAMO TUTTO L'ESERCIZIO COME PRIMA, PARTENDO QUINDI DALL'EQUAZIONE ASSOCIATA OMOGENEA:

$$y''+7y'=0 \rightarrow \lambda^2+7\lambda=0 \rightarrow \lambda(\lambda+7)=0$$

$\lambda_1=-7$ $\lambda_2=0$

ABBIAMO 2 SOLUZIONI DISTINTE, QUINDI LA SOL. OMOGENEA y_0 SARÁ DELLA FORMA:

$$y_0=C_1\cdot e^{-7x}+C_2\underbrace{e^{0x}}_{1}=C_1\cdot e^{-7x}+C_2$$

TORNANDO A y_p, SARÁ DELLA FORMA (CON GRADO 2) GENERICA:

$$y_p=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

CALCOLIAMO COME PRIMA y'_p E y''_p:

$$y'_p=2\alpha x+\beta \qquad y''_p=2\alpha$$

ORA COME PRIMA SOSTITUIAMO $y''+7y'=x+3$

$$y''\rightarrow y''_p \quad y'\rightarrow y'_p$$

NON ESSENDOCI y (TERMINE NOTO), y_p NON CI SI METTE:

$$2\alpha+7(2\alpha x+\beta)=x+3$$
$$2\alpha+14\alpha x+7\beta=x+3$$
$$14\alpha x+2\alpha+7\beta=x+3$$

$$\begin{cases}14\alpha=1 \rightarrow \alpha=\frac{1}{14}\\ 2\alpha+7\beta=3 \rightarrow \beta=\frac{20}{49}\end{cases}$$

LA SOLUZIONE VIENE CON $\alpha=\frac{1}{14}$, $\beta=\frac{20}{49}$

$$y_p=\frac{1}{14}x^2+\frac{20}{49}x$$

SOLUZIONE FINALE:

$$\boxed{y=y_0+y_p=C_1\cdot e^{-7x}+C_2+\frac{1}{14}x^2+\frac{20}{49}x}$$

ANALIZZIAMO L'ULTIMO CASO, IN CUI SIA $c=0, b=0$.
IL POLINOMIO COME SAPPIAMO SARÁ DI GRADO $m+2$.

ESEMPIO:

$$y''=x^2+4x-7$$

NOTA: IN QUESTO CASO POSSIAMO PROCEDERE IN DUE MODI:
- DOPPIA INTEGRAZIONE (ABBIAMO LA DERIVATA SECONDA, TORNIAMO INDIETRO DUE VOLTE)
- USARE SEMPRE IL METODO DELLE SOMIGLIANZE (FATTO FINORA)

PROVIAMO IL PRIMO METODO (DOPPIA INTEGRAZIONE):

$$y'=\int x^2+4x-7=\frac{x^3}{3}+2x^2-7x+C_1$$

$$y=\int\frac{x^3}{3}+2x^2-7x+C_1=\frac{x^4}{12}+\frac{2x^3}{3}-\frac{7}{2}x^2+C_1x+C_2$$

ORA DOBBIAMO TROVARE IL POLINOMIO PARTICOLARE, DI GRADO $m+2=4$ ($f(x)$ ERA x^2+4x-7)

$$y_p=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$$
$$y'_p=4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta$$
$$y''_p=12\alpha x^2+6\beta x+2\gamma$$

ORA SOSTITUIAMO y''_p A y'' NELL'EQUAZIONE ORIGINALE (NON ABBIAMO y' ED y)

$$12\alpha x^2+6\beta x+2\gamma=x^2+4x-7$$

$$\begin{cases}12\alpha=1 \rightarrow \alpha=\frac{1}{12}\\ 6\beta=4 \rightarrow \beta=\frac{2}{3}\\ 2\gamma=-7 \rightarrow \gamma=-\frac{7}{2}\end{cases}$$

QUINDI $y_p=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\underbrace{\delta x+\varepsilon}_{\text{NULLI}}=\frac{1}{12}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2$

RIGUARDO ALL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA ($y''=0$) HA OVVIAMENTE SOLUZIONE $\lambda^2=0$ $\lambda=0$ SOLUZIONE DOPPIA, E COME HO SCRITTO NELLA NOTA ALL'INIZIO IN CASO $\Delta=0$ E SOLUZIONE DOPPIA, y_0 SARÁ

$$y_0=e^{\lambda x}(C_1+C_2x)$$
$$y_0=\underbrace{e^{0x}}_{1}(C_1+C_2x)=C_1+C_2x$$

$$\boxed{\text{SOLUZIONE FINALE: } C_1+C_2x+\frac{1}{12}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2}$$