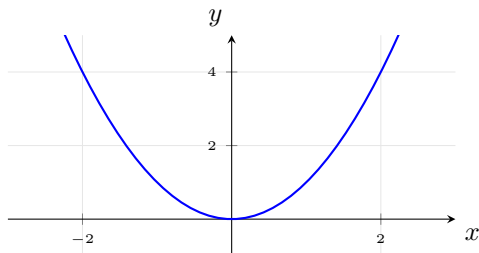


# Formulario Analisi 1: Grafici Fondamentali

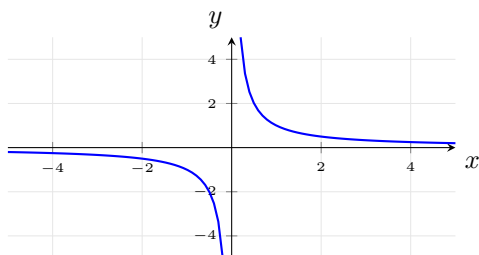
## 1. Potenze e Razionali

**Parabola:**  $y = x^2$  (Pari)



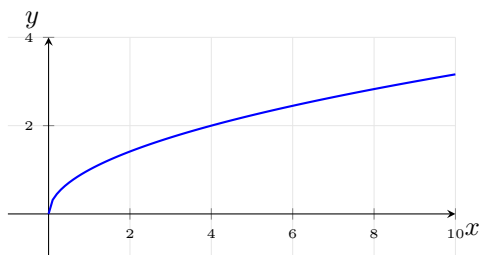
$D : \mathbb{R}, Im : [0, +\infty)$ . Convessa  $\cup$ .

**Iperbole Equilatera:**  $y = 1/x$  (Dispari)



$D : \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Asintoti:  $x = 0, y = 0$ .

**Radice Quadrata:**  $y = \sqrt{x}$

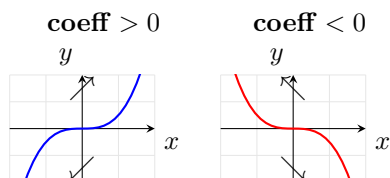


$D : [0, +\infty)$ . Derivata verticale in 0.

## 2. Polinomi (Comportamento)

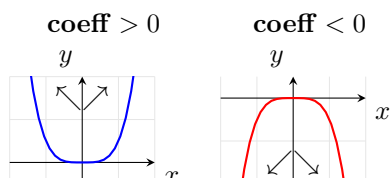
**Grado DISPARI** ( $x^3, x^5 \dots$ )

*Uno su, uno giù.*



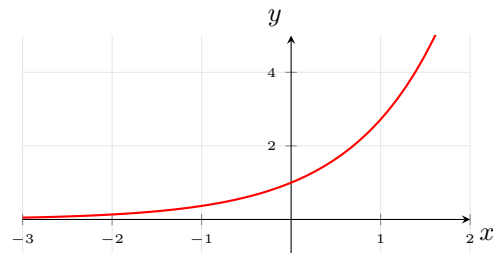
**Grado PARI** ( $x^4, x^6 \dots$ )

*Entrambi stessa direzione.*



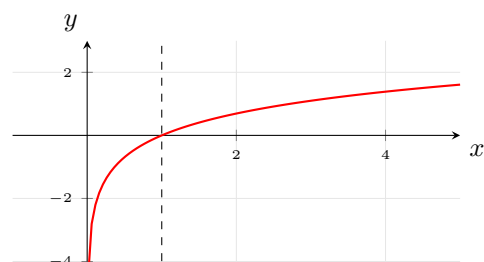
## 3. Esponenziali e Logaritmi

**Esponenziale:**  $y = e^x$



$Im : (0, +\infty)$ . Cresce velocissima.

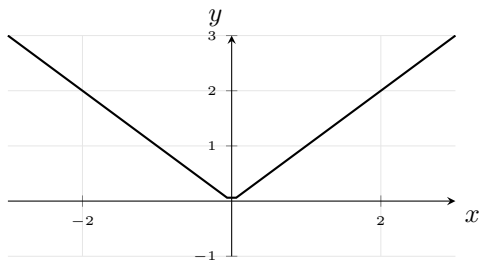
**Logaritmo:**  $y = \ln(x)$



$D : (0, +\infty)$ . Asintoto vert:  $x = 0$ .

## 4. Valore Assoluto

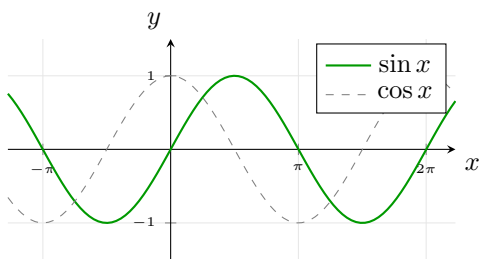
$y = |x|$  (Pari)



$f(x) = x$  se  $x \geq 0$ ,  $-x$  se  $x < 0$ . **Non derivabile** in  $x = 0$  (Punto angoloso).

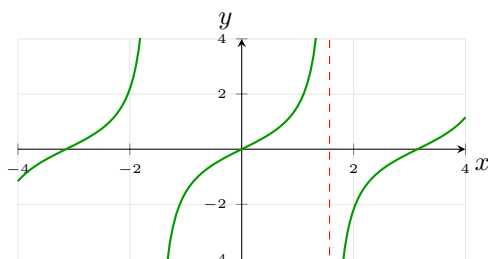
## 5. Trigonometria

**Seno e Coseno**



Periodo  $2\pi$ . Sin dispari, Cos pari.

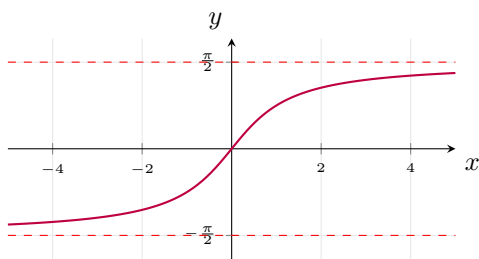
**Tangente:**  $y = \tan(x)$



Asintoti vert:  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Periodo  $\pi$ .

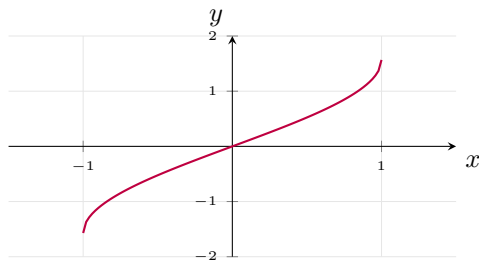
## 6. Inverse (Fondamentali)

**Arcotangente:**  $y = \arctan(x)$  (!)



$D : \mathbb{R}$ . Asintoti Orizz:  $y = \pm \frac{\pi}{2}$ .

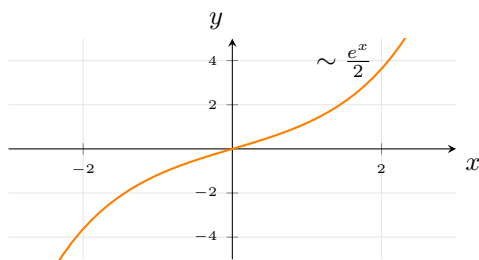
**Arcoseno:**  $y = \arcsin(x)$



$D : [-1, 1]$ . Tangenti verticali agli estremi.

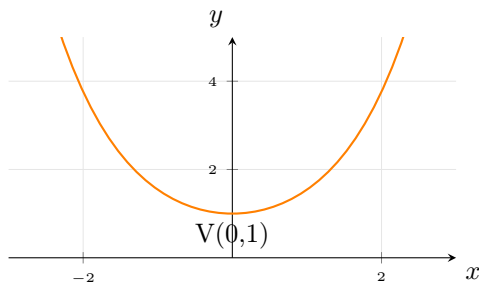
## 6. Funzioni Iperboliche

**Seno Iperbolico:**  $\sinh(x)$  (Dispari)



Def:  $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Simile a  $x^3$ .  $D : \mathbb{R}$ .

**Coseno Iperbolico:**  $\cosh(x)$  (Pari)



Def:  $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Simile a  $x^2$ .  $Im : [1, +\infty)$ .

### Le 2 Formule "Salva-Vita"

*Da usare per semplificare equazioni e limiti.*

#### 1. Relazione Fondamentale (Iperbole)

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

*Nota il MENO! (nella trigonometria normale è +)*

#### 2. Regola delle Derivate

- $D[\sinh x] = \cosh x$
- $D[\cosh x] = \sinh x$  (Niente meno!)

## 11. Forme Indeterminate e Strategie

### Le 7 Forme Indeterminate

Se ottieni una di queste, il limite non è finito: devi lavorarci.

Tipo	Forma	Strategia / Trucco
Algebriche	$\infty - \infty$	Raccogli la potenza più alta ("il più forte") o Razionalizza (se ci sono radici).
Algebriche	$0 \cdot \infty$	Trasforma in frazione: $f \cdot g = \frac{f}{1/g}$ . Diventerà $0/0$ o $\infty/\infty$ .
Algebriche	$\frac{0}{0}$	Usare Sviluppi di Taylor (consigliato per funzioni miste) o De L'Hôpital.
Algebriche	$\frac{\infty}{\infty}$	Vince la gerarchia degli infiniti (vedi sotto) o De L'Hôpital.
Esponenziali	$1^\infty, 0^0, \infty^0$	Usa la trasformazione fondamentale: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$ Poi calcola il limite dell'esponente.

### Gerarchia degli Infiniti ( $x \rightarrow +\infty$ )

Chi "vince" determina il risultato. Ordine dal più lento al più veloce:

$$\ln x \ll x^a \ll a^x \ll x! \ll x^x$$

- $\ln x$ : Perde sempre (va a infinito lentissimo).
- $x^n$ : Le potenze perdono contro gli esponenziali.
- $e^x$ : Vince contro qualsiasi polinomio.

### Attenzione: NON sono Indeterminate

Questi fanno subito il risultato scritto, non applicare L'Hôpital!

- $\frac{0}{\infty} = 0$  (Zero diviso qualsiasi cosa fa zero)
- $\frac{\infty}{0} = \infty$  (Enorme diviso piccolissimo fa enorme)
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $0^{+\infty} = 0$

## 7. Equivalenze Asintotiche e Limiti Notevoli

### Sviluppi Fondamentali per $x \rightarrow 0$

Valgono se l'argomento tende a 0 (anche se è una funzione  $f(x) \rightarrow 0$ ).

Funzione	Equivalente ( $x \rightarrow 0$ )
$\sin(x)$	$\sim x$
$\tan(x)$	$\sim x$
$\arcsin(x)$	$\sim x$
$\arctan(x)$	$\sim x$
$1 - \cos(x)$	$\sim \frac{1}{2}x^2$ (!)
$e^x - 1$	$\sim x$
$\ln(1 + x)$	$\sim x$
$(1 + x)^\alpha - 1$	$\sim \alpha x$
$\sinh(x)$	$\sim x$
$\cosh(x) - 1$	$\sim \frac{1}{2}x^2$

**Esempio:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \frac{3x}{x} = 3$ .

## 10. Sviluppi di Taylor e Formule Utili

Se sviluppi centrato in un punto  $x_0$  (Taylor):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3)$$

### Sviluppi di McLaurin ( $x \rightarrow 0$ , ordine 3)

Tutti gli sviluppi includono  $+o(x^3)$ .

Funzione	Sviluppo
$e^x$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
$e^{-x}$	$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$
$\ln(1 + x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{6}$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2}$ (term. $x^3$ nullo)
$\tan(x)$	$x + \frac{x^3}{3}$
$\arcsin(x)$	$x + \frac{x^3}{6}$
$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6}$
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3}$
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{6}$
$\sqrt{1 + x}$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$
$(1 + x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 + \dots$

## Formule di Addizione (per cambi variabile)

Utili quando  $x \rightarrow x_0$  invece di  $x \rightarrow 0$ .

- $\sin(x + a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$
- $\cos(x + a) = \cos x \cos a - \sin x \sin a$

## 11. Trucchi "Salva-Vita" (Cambio Variabile)

**Come applicare Taylor se l'argomento non è 0?**

*Regola Ferrea:* Puoi sostituire  $f(t) \sim t$  solo se  $t \rightarrow 0$ .

### 1. Il Trucco del "+1 - 1" (Per Logaritmi)

Usalo quando hai  $\ln(\text{qualcosa})$  e quel "qualcosa" tende a 1 invece che a 0. Devi ricreare la forma  $\ln(1 + \text{mostro})$ .

**Esempio classico** ( $x \rightarrow 1$ ):

$$\ln(x) = \ln(1 + \underbrace{x - 1}_t) \sim x - 1$$

**Esempio avanzato** ( $\ln(\cos x)$  per  $x \rightarrow 0$ ): Il coseno tende a 1. Aggiungi e togli 1:

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + \underbrace{\cos x - 1}_t) \sim (\cos x - 1) \sim -\frac{x^2}{2}$$

### 2. Raccoglimento Forzato (Per costanti diverse da 1)

Se hai  $\ln(2 + x)$  o  $\sqrt{4 + x}$ , devi far uscire il numero per ottenere un "1".

**Esempio Logaritmo:**

$$\ln(2 + x) = \ln \left[ 2 \left( 1 + \frac{x}{2} \right) \right] = \ln 2 + \ln \left( 1 + \frac{x}{2} \right)$$

Ora puoi sviluppare il secondo pezzo ( $\sim x/2$ ).

**Esempio Radice:**

$$\sqrt{4 + x} = \sqrt{4 \left( 1 + \frac{x}{4} \right)} = 2 \sqrt{1 + \frac{x}{4}} \sim 2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{x}{4} \right)$$

### 3. Cambio di Variabile Standard ( $x \rightarrow c$ )

Se il limite non è a 0, poni  $t = x - c$  (quindi  $t \rightarrow 0$ ). Sostituisci  $x = c + t$ .

**Esempio** ( $x \rightarrow 2$ ):

$$e^x \rightarrow e^{2+t} = e^2 \cdot e^t \sim e^2(1 + t + \dots)$$

# 13. Tavola delle Derivate Completa

## A. Derivate Elementari (Da sapere a memoria)

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$e^x$	$e^x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$ (!)
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$ x $	$\frac{x}{ x } = \operatorname{sgn}(x)$	$\cosh x$	$\sinh x$

**Nota bene su  $a^x$  e  $\log_a x$ :**

- Quando derivi l'esponenziale ( $a^x$ ), il  $\ln a$  va al **numeratore** (moltiplica).
- Quando derivi il logaritmo ( $\log_a x$ ), il  $\ln a$  va al **denominatore** (divide).

## B. I "Pattern" Ricorrenti (Funzioni Composte)

*Le strutture che trovi sempre negli esercizi.*

Tipo	Funzione	Derivata Veloce
<b>Logaritmo</b>	$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
<b>Radice</b>	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
<b>Reciproco</b>	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
<b>Potenza Funz.</b>	$[f(x)]^n$	$n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
<b>Esponenziale</b>	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
<b>Arcotangente</b>	$\arctan(f(x))$	$\frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$

## B. I "Pattern" Ricorrenti (Velocizza i calcoli!)

Queste sono le derivate composte che escono sempre negli studi di funzione. Impara direttamente la forma finale.

Tipo	Funzione	Derivata Veloce
Logaritmo	$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
Radice	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
Reciproco	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
Potenza Funz.	$[f(x)]^n$	$n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
Esponenziale	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
Arcotangente	$\arctan(f(x))$	$\frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$

## C. Il "Mostro": Funzione elevata a Funzione

$$y = f(x)^{g(x)}$$

Non usare regole a caso! Usa il trucco dell'esponenziale:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

Formula finale:

$$D \left[ f(x)^{g(x)} \right] = f(x)^{g(x)} \left[ g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

Consiglio: Non imparare la formula a memoria, impara il trucco di scriverlo come  $e^{\dots}$  e derivare quello.

## D. Regole di Derivazione (Generali)

- **Prodotto:**  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- **Quoziente:**  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$  (Occhio al meno!)
- **Catena:**  $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

# 14. Trigonometria: I Fondamentali

## 1. Tabella dei Valori Noti

Questi numeri devono essere automatici.

Rad	Deg	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	$\nexists$
$\pi$	180°	0	-1	0

## 2. Formule di Addizione e Sottrazione

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$  (!)

Occhio al coseno: se c'è +, nella formula diventa -.

### 3. Formule di Duplicazione (Cruciali)

*Servono sempre per semplificare le derivate.*

**Seno:**

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

**Coseno (3 versioni):**

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x\end{aligned}$$

### 4. Formule di Bisezione / Linearizzazione

*VITALI per fare gli integrali di  $\sin^2$  e  $\cos^2$ !*

Invece di usare le radici, impara queste (Linearizzazione):

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Ti permettono di integrare quadrati trasformandoli in coseni semplici.

### 5. Angoli Associati (Simmetrie)

*Come ricondursi al primo quadrante.*

**A. Opposti ( $-x$ ):**

- $\sin(-x) = -\sin x$  (Dispari)
- $\cos(-x) = \cos x$  (Pari, "mangia il meno")

**B. Supplementari ( $\pi - x$ ) (II quadrante):**

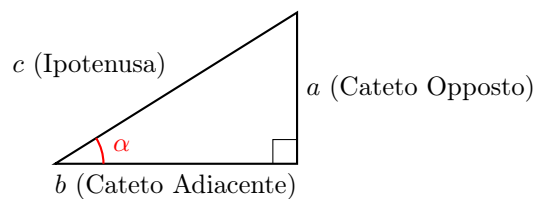
- $\sin(\pi - x) = \sin x$  (Seno uguale)
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$  (Coseno opposto)

**C. Complementari ( $\frac{\pi}{2} - x$ ):**

- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$  (Scambio!)
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

### 6. Relazioni sui Triangoli Rettangoli

*Risoluzione dei cateti.*



**Formule Fondamentali:**

1. Cateto = Ipo  $\cdot$  sin(opposto)

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

2. Cateto = Ipo  $\cdot$  cos(adiacente)

$$b = c \cdot \cos \alpha$$

3. Cateto = Altro Cateto  $\cdot$  tan(opposto)

$$a = b \cdot \tan \alpha$$

## 13-bis. Derivata della Funzione Inversa

### La Formula

Sia  $y = f(x)$  una funzione invertibile. La derivata della sua inversa  $f^{-1}(y)$  nel punto  $y_0$  è:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

**Attenzione!** Qui  $x_0$  è il punto tale che  $f(x_0) = y_0$ . *Geometricamente: Le tangenti sono simmetriche rispetto alla bisettrice, quindi i coefficienti angolari sono reciproci.*

### Algoritmo di Calcolo (Senza trovare l'inversa)

Se ti chiedono  $(f^{-1})'(k)$ , segui questi 3 step:

1. **TROVA LA X (Cruciale):**

Risolvi l'equazione  $f(x) = k$ .

*Nota: Spesso si risolve "a occhio" provando  $x = 0, 1, -1, e, \pi$ .*

2. **DERIVA LA DIRETTA:**

Calcola  $f'(x)$  e sostituisci la  $x$  trovata al punto 1.

3. **FAI IL RECIPROCO:**

Il risultato finale è  $\frac{1}{\text{Valore trovato}}$ .

### Esempio (Classico da Esame)

Data  $f(x) = x^3 + x + 2$ . Calcolare  $(f^{-1})'(4)$ .

1. **Cerco x:**  $x^3 + x + 2 = 4 \implies x^3 + x - 2 = 0$ .

Si vede subito che  $x = 1$  (infatti  $1 + 1 + 2 = 4$ ).

2. **Derivo f:**  $f'(x) = 3x^2 + 1$ .

Valuto in  $x = 1$ :  $f'(1) = 3(1)^2 + 1 = 4$ .

3. **Reciproco:** Il risultato è  $\frac{1}{4}$ .

## 15. La Funzione Integrale (Derivata)

### Il Teorema Fondamentale (Torricelli-Barrow)

Se  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , allora  $F'(x) = f(x)$ .

### Tabella Completa delle Derivate

Qui c'è tutto, dal caso base a quello generale.

Caso	Integrale $F(x)$	Derivata $F'(x)$
Base	$\int_a^x f(t)dt$	$f(x)$
Invertito	$\int_x^a f(t)dt$	$-f(x)$
Sopra $(h(x))$	$\int_a^{h(x)} f(t)dt$	$f(h(x)) \cdot h'(x)$
Sotto $(g(x))$	$\int_{g(x)}^b f(t)dt$	$-f(g(x)) \cdot g'(x)$
COMPLETO	$\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$	$f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$

### Regola mnemonica per il caso Completo:

(Sostituisci **Sopra**  $\times$  Derivata Sopra) **MENO** (Sostituisci **Sotto**  $\times$  Derivata Sotto).

### Gestire gli Infinti ( $\pm\infty$ )

L'infinito negli estremi si comporta come una costante: la sua derivata è 0.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{h(x)} f(t)dt \implies F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x)$$

*Spiegazione:* Spezzi l'integrale in un punto  $c$ :  $\int_{-\infty}^c + \int_c^{h(x)}$ . La prima parte è un numero (costante), quindi derivando sparisce.

## 20. Algoritmo di Risoluzione Integrali

**START:** Hai davanti  $\int f(x) dx$

### 1. CONTROLLO TABELLA BASE

*È nella lista degli integrali fondamentali ( $x^\alpha, \sin, \cos, e^x$ )?*

↓ NO

### 2. CONTROLLO GENERALIZZATI (Derivata)

*Vedi una funzione  $f(x)$  e FUORI la sua derivata  $f'(x)$ ?*

(Es:  $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$  oppure  $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ )

↓ NO (Allora analizza la STRUTTURA)

A. Prodotto Misto	B. Rapporto Polinomi	C. Funzioni Simili/Composte
Hai funzioni di <b>famiglie diverse</b> moltiplicate? (Es: $x \cdot e^x, x \cdot \ln x$ )	Hai una frazione con <b>polinomi</b> sopra e sotto? (Es: $\frac{x+1}{x^2-4}$ )	Hai funzioni <b>della stessa famiglia</b> o argomenti "brutti"? (Es: $\sqrt{e^x+1}, \cos(\sqrt{x})$ )
↓ <b>PER PARTI</b> (Usa LIATE)	↓ <b>FRATTI SEMPLICI</b> (Scomponi e A, B)	↓ <b>SOSTITUZIONE</b> (Poni $t = \dots$ )

**Nota sulla Sostituzione (Il Jolly):** Se sei bloccato e non rientri nei casi A o B, la sostituzione è l'ultima spiaggia. Cerca di porre  $t$  uguale alla parte che ti dà fastidio (es: la radice, l'esponente strano, l'argomento del logaritmo).

## 16. Integrali Immediati (Composti)

### La Regola d'Oro ( $f(x)$ composta)

Se vedi una funzione "intrappolata" e fuori c'è la sua derivata, puoi integrare subito.

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = G(f(x)) + c$$

Integrale	Risultato
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$\ln  f(x) $
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx$	$e^{f(x)}$
$\int \sin(f(x)) \cdot f'(x) dx$	$-\cos(f(x))$
$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x) dx$	$\sin(f(x))$
$\int \tan(f(x)) \cdot f'(x) dx$	$-\ln  \cos(f(x)) $
$\int \cot(f(x)) \cdot f'(x) dx$	$\ln  \sin(f(x)) $
$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx$	$\tan(f(x))$
$\int \frac{f'(x)}{\sin^2(f(x))} dx$	$-\cot(f(x))$
$\int \frac{f'(x)}{\cosh^2(f(x))} dx$	$\tanh(f(x)) \quad (\text{Iperbolico})$
$\int \frac{f'(x)}{\sinh^2(f(x))} dx$	$-\coth(f(x)) \quad (\text{Iperbolico})$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} dx$	$\arcsin(f(x))$
$\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx$	$\arctan(f(x))$

### Il Caso Lineare ( $ax + b$ )

Se l'argomento è di primo grado, la derivata è solo la costante  $a$ . Bilancia dividendo fuori.

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b}$$

Vale per tutte:  $\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x)$ .

## 17. Fratti Semplici (Metodo dei Polinomi)

### Setup Iniziale

Devi calcolare  $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$ .

1. Se grado  $N \geq$  grado  $D$ : Fai la **divisione polinomiale**.
2. Se grado  $N <$  grado  $D$ : Scomponi il denominatore e usa la tabella sotto.

### I 3 Casi del Denominatore ( $ax^2 + bx + c$ )

Delta ( $D(x)$ )	Scomposizione	Struttura Somma
1. $\Delta > 0$ (2 radici reali distinte $x_1, x_2$ )	$a(x - x_1)(x - x_2)$	$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$ <i>Integrazione: Logaritmi</i>
2. $\Delta = 0$ (1 radice doppia $x_1$ )	$a(x - x_1)^2$	$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2}$ <i>Occhio al quadrato sul secondo!</i>
3. $\Delta < 0$ (Complesso)	Irriducibile	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ <i>Si risolve in 2 step (vedi sotto)</i>

#### Come risolvere il caso $\Delta < 0$ (Il "Mostro")

L'integrale di  $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$  si spezza sempre in due pezzi:

**Pezzo 1: Logaritmo** Cerchi di far comparire la derivata del denominatore sopra (spesso moltiplicando/dividendo).

$$\rightarrow \ln(ax^2 + bx + c)$$

**Pezzo 2: Arcotangente** Ciò che avanza è una costante fratto il polinomio. Devi completare il quadrato al denominatore per ottenere la forma:

$$\int \frac{1}{1 + (\dots)^2} \rightarrow \arctan(\dots)$$

## 18. Integrazione per Parti (Metodo LIATE)

### 1. La Formula

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Il dilemma è sempre: **Chi derivo** ( $f$ )? **Chi integro** ( $g$ )?

### 2. La Regola LIATE (Chi derivare?)

Scegli come  $f(x)$  (quella da **DERIVARE**) la funzione che compare **PRIMA** in questa lista. L'altra sarà  $g'(x)$  (da integrare).

**L** ogaritmiche ( $\ln x, \log x$ )

**I** nverse Trig. ( $\arctan, \arcsin$ )

**A** lgebriche ( $x^2, 3x^5, \dots$ )

**T** rigonometriche  
( $\sin, \cos, \tan$ )

**E** sponenziali ( $e^x, 3^x$ )

↑

**PRIORITÀ  
DERIVATA**  
( $f(x)$ )

#### Esempi:

- $\int x \cdot \ln x dx$ : Ho **A** ( $x$ ) e **L** ( $\ln$ ).  
La **L** vince su A.  $\rightarrow$  Derivo  $\ln x$ , integro  $x$ .
- $\int x \cdot e^x dx$ : Ho **A** ( $x$ ) e **E** ( $e^x$ ).  
La **A** vince su E.  $\rightarrow$  Derivo  $x$ , integro  $e^x$ .

### 3. Il Caso Speciale "Ciclico" (Boomerang)

Se hai **E**sponenziale + **T**rigonometrica (es:  $\int e^x \sin x dx$ ), sono in fondo alla lista insieme.

1. Applica la formula due volte.
2. Tornerai all'integrale di partenza (con un segno o coefficiente diverso).
3. Portalo a sinistra dell'uguale e somma.

$$I = \dots - I \implies 2I = \dots \implies I = \frac{1}{2}(\dots)$$

## 19. Algebra e Proprietà Fondamentali

### 1. Proprietà dei Logaritmi (Salva-Derivate)

Usale PRIMA di derivare per evitare calcoli mostruosi.

Siano  $A, B > 0$ :

- **Prodotto  $\rightarrow$  Somma:**

$$\ln(A \cdot B) = \ln A + \ln B$$

- **Rapporto  $\rightarrow$  Differenza:**

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$$

Utile per spezzare frazioni giganti nello studio di funzione.

- **Esponente  $\rightarrow$  Moltiplicazione (VITALE):**

$$\ln(A^k) = k \cdot \ln A$$

Esempio: Derivare  $\ln(x^{50})$  è difficile. Scrivi  $50 \ln x$  e la derivata è immediata ( $50/x$ ).

- **Cambio Base:**  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

**Nota:**  $\ln(1) = 0$ ,  $\ln(e) = 1$ .

### 2. Proprietà delle Potenze

- $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$  (Sommi esponenti)
- $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$  (Moltiplichi esponenti)
- $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$  (Giri la frazione)
- $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$  (Radice  $\rightarrow$  Esponente fratto)

### 3. Prodotti Notevoli (Da sapere a memoria)

**Quadrato di Binomio:**

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

**Cubo di Binomio:**

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

*Mnemonic: 1, 3, 3, 1. Se c'è il meno, i segni si alternano (+ - + -).*

**Differenza di Quadrati:**

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

**Somma/Differenza di Cubi:**

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

*Nota: La seconda parentesi è un "Falso Quadrato" (non ha il 2 nel mezzo) ed è sempre irriducibile ( $\Delta < 0$ ).*