CRITERIO DI LEIBNIZ (SERIE A SEGNI ALTERNI)

FORMA CON CUI SI RICONOSCE:

$$\sum_{n}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{a_n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots$$

SE CONVERGE DEVE RISPETTARE 2 CONDIZIONI:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3|$ — LA SUCCESSIONE DEGLI a_n DEVE ESSERE DECRESCENTE

ASSOLUTA CONVERGENZA:

SE ABBIAMO UNA SERIE A SEGNI ALTERNI $a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \dots$

ABBIAMO ASSOLUTA CONVERGENZA SE $|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_n|$ CONVERGE

SE ABBIAMO ASSOLUTA CONVERGENZA $\Rightarrow$ CONVERGENZA ($\not\Leftarrow$)

PERCHÉ MI SERVE SAPERE QUESTO CONCETTO?

PERCHÉ A VOLTE APPLICARE LEIBNIZ E CAPIRE SE LA SUCCESSIONE È DECRESCENTE O MENO NON È SEMPLICE, QUINDI STUDIAMO PRIMA DI PASSARE A LEIBNIZ SE C'È ASSOLUTA CONVERGENZA, SE FUNZIONA HO GIÀ VINTO

ESEMPIO: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE?

MI BASTA STUDIARE LA SERIE SENZA IL PEZZO $(-1)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \to$ CONVERGE? SI.

LA SERIE INIZIALE È QUINDI ASSOLUTAMENTE CONV. QUINDI CONVERGENTE

ESEMPIO DI SERIE CONVERGENTE MA NON ASSOLUTAMENTE (NO BISOGNO DI LEIBNIZ): $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n)} \to \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$ DIVERGE

VERIFICANDO PERÒ LE DUE CONDIZIONI DI LEIBNIZ VEDO CHE SONO SODDISFATTE $\to$ LA SERIE CONVERGE MA NON ASSOLUTAMENTE $\to$

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$ ✓
2. $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \dots$ ✓

ORA UN PAIO D'ESEMPI IN CUI UTILIZZO DIRETTAMENTE LEIBNIZ, SENZA CONTROLLARE PRIMA L'ASSOLUTA CONVERGENZA.

ESEMPIO 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \to$$

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓
2. $|a_{n+1}| \leq |a_n|$?

NOTIAMO CHE LA SUCCESSIONE FA: $1, |-\frac{1}{2}|, |\frac{1}{3}|, |-\frac{1}{4}|$ DECRESCE $\to$ ✓

ESEMPIO 2:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2n+3} \to$$

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2} \neq 0$ ✗

NON VERIFICATA, INUTILE CONTINUARE.