EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE DEL 2° ORDINE A COEFF. COSTANTI

FORMA GENERALE:

$$F(x;y;y';y'')=0$$

PERCHÉ É OMOGENEA? PERCHÉ IL MEMBRO A DESTRA É 0
É DEL SECONDO ORDINE PERCHÉ SI PRESENTA LA y'' (DERIVATA SECONDA)

PER L'ESAME DI ANALISI 1 BASTA SAPERE LE EQUAZIONI DEL TIPO

- $y''+3y'+2y=0$ A COEFF. COSTANTI (A MOLTIPLICARE LE y CI SON SOLO NUMERI)

ESEMPIO:

$$y''-3y'+2y=0$$

RISOLUZIONE: DOBBIAMO PER PRIMA COSA RISOLVERE L'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA

$$y''-3y'+2y=0 \rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \quad \Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=1$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

$$\lambda_1=2 \quad \lambda_2=1$$

NOTA: LA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DIPENDE DA Δ:

- SE $\Delta>0$ $y=c_1\cdot e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$ (SIAMO AL SECONDO ORDINE QUINDI LA SOLUZIONE DIPENDE DA DUE COSTANTI)
- SE $\Delta=0$ $y_0=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}$
- SE $\Delta<0$ $y_0=e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x)+c_2\sin(\beta x))$

IN QUESTO CASO Δ É >0 QUINDI USIAMO IL PRIMO PUNTO

SOLUZIONE: $\boxed{y=c_1\cdot e^{2x}+c_2e^{x}}$

ESEMPIO CON $\Delta=0$:

$$y''-10y'+25y=0$$

FACCIAMO SEMPRE L'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA:

$$y''-10y'+25y=0 \rightarrow \lambda^2-10\lambda+25=0 \quad \Delta=(10)^2-100=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{0}}{2}=5$$

$$\lambda_1=\lambda_2=5$$

QUA SIAMO NEL SECONDO CASO DELLA NOTA SCRITTA SOPRA ($\Delta=0$)
QUINDI LA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE DIFF.

$$\boxed{y=e^{5x}(c_1+c_2x)}$$

ESEMPIO CON $\Delta<0$

$$y''+4y'+13y=0$$

EQ. ASSOCIATA $\rightarrow \lambda^2+4\lambda+13=0 \quad \Delta=4^2-4\cdot13=-36$

QUA IL $\Delta<0$ (TERZO PUNTO DELLA NOTA), LE SOLUZIONI SONO COMPLESSE E CONIUGATE.

$$\lambda_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=-\frac{4\pm\sqrt{36\cdot(-1)}}{2}=\frac{-\cancel{4}^{2}\pm\cancel{6}^{3}i}{\cancel{2}_{1}}=-2\pm3i$$

LA SOLUZIONE GENERALE IN QUESTO CASO QUINDI ($\Delta<0$):

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cdot\cos(\beta x)+c_2\cdot\sin(\beta x))$$

DOVE α,b SONO RISPETTIVAMENTE PARTE REALE E PARTE IMMAGINARIA DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASS.

$$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$$

NEL NOSTRO CASO $\alpha=-2$, $\beta=\pm3$

LA SOLUZIONE FINALE (SEMPLICEMENTE SOSTITUENDO):

$$\boxed{y=e^{-2x}(c_1\cdot\cos(3x)+c_2\cdot\sin(3x))}$$

PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y''-5y'+6y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$$

LE DUE CONDIZIONI $y(0)=1$, $y'(0)=2$ CI PERMETTERANNO DI OTTENERE UNA SOLUZIONE IN PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE. CI FARANNO IDENTIFICARE IL VALORE DELLE DUE COSTANTI c_1, c_2

RISOLUZIONE:

RISOLVIAMO NORMALMENTE L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

EQ. ASSOCIATA $\rightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0 \quad \Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1 \quad \Delta>0$

SIAMO NEL CASO $\Delta>0$, QUINDI:

$$y=c_1\cdot e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$$

TROVIAMO $\lambda_{1,2} \rightarrow \frac{5\pm\sqrt{1}}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \end{matrix}$

$$\lambda_1=3 \quad \lambda_2=2$$

SOLUZIONE GENERALE:

$$y=c_1\cdot e^{3x}+c_2e^{2x}$$

MA SAPPIAMO CHE $y(0)=c_1\cdot e^{3\cdot0}+c_2\cdot e^{2\cdot0}=1$

$$c_1\cdot1+c_2\cdot1=1 \rightarrow c_1+c_2=1$$

IL PROBLEMA DICE CHE $y'(0)=2$, QUINDI CI SERVE LA DERIVATA PRIMA:

$$y'=3c_1e^{3x}+2c_2e^{2x}$$

IL PROBLEMA DICE CHE $y'(0)=3c_1\cdot e^{3\cdot0}+2c_2e^{2\cdot0} \rightarrow 3c_1+2c_2=2$

ORA METTIAMO INSIEME LE DUE SOLUZIONI:

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \rightarrow c_1=0 \\ 3c_1+2c_2=2 \rightarrow c_2=1 \end{cases}$$

$$c_1=0 \quad c_2=1$$

ORA SOSTITUIAMO c_1, c_2 A $y=c_1\cdot e^{3x}+c_2\cdot e^{2x}$

SOLUZIONE: $\boxed{y=e^{2x}}$