C) FUNZIONI TRIGONOMETRICHE (SENO E COSENO)

ESEMPIO:

$$y'' - 5y' + 4y = \cos(2x)$$

1) RISOLVIAMO L'EQUAZIONE OMOGENEA

$$y'' - 5y' + 4y = 0 \rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 9$$

NOTA: SE $\Delta > 0$ CI SARANNO DUE SOLUZIONI DISTINTE,
SE $\Delta = 0$ LE DUE SOLUZIONI SONO UGUALI
SE $\Delta < 0$ CI SONO DUE SOLUZIONI COMPLESSE CONIUGATE

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = 1$$

NOTA: LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSUME 3 FORME DIVERSE:
- SE $\Delta > 0$ $\quad y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
- SE $\Delta = 0$ $\quad y_0 = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$
- SE $\Delta < 0$ $\quad y_0 = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \text{sim}(\beta x))$

ORA PARTIAMO CON IL METODO DI SOMIGLIANZA:

$f(x) = \cos(2x)$, CI INTERESSA IL COEFFICIENTE DELL'ARGOMENTO, IN QUESTO CASO $2 \rightarrow k$

NOTA:
- SE $B \neq 0$ $\quad y_p = A\cdot\cos(kx) + B\,\text{sim}(kx)$
- SE $B = 0$ E k È UGUALE AL COEFFICIENTE DELLA PARTE IMMAGINARIA DELL'EQ. ASSOCIATA OMOG.

$y_p = x(A\cos(kx) + B\,\text{sim}(kx))$

2) NEL NOSTRO CASO $B \neq 0$, QUINDI

$$y_p = A\cos(2x) + B\,\text{sim}(2x)$$

DERIVIAMO COME AL SOLITO y'_p, y''_p

$$y'_p = -2A\,\text{sim}(2x) + 2B\cos(2x)$$
$$y''_p = -4A\cos(2x) - 4B\,\text{sim}(2x)$$

ORA SOSTITUIAMO y_p, y'_p, y''_p NELL'EQUAZIONE ORIGINALE:

$$-4A\cos(2x) - 4B\,\text{sim}(2x) - 5(-2A\,\text{sim}(2x) + 2B\cos(2x)) + 4(A\cos(2x) + 2B\cos(2x))$$

$$-4A\cos(2x) - 4B\,\text{sim}(2x) + 10A\,\text{sim}(2x) - 10B\cos(2x) + 4A\cos(2x) + 4B\,\text{sim}(2x) \ldots = \cos(2x)$$

$$\cos(2x)(\cancel{-4A} - 10B + \cancel{4A}) + \text{sim}(2x)(-4B + 10A + 4B) = \cos(2x)$$

$$-10B\cos(2x) + 10A\,\text{sim} = \cos(2x)$$

AL SECONDO MEMBRO NON C'È IL SIM, QUINDI $10A = 0$

$$\begin{cases} -10B = 1 \rightarrow B = -\frac{1}{10} \\ 10A = 0 \rightarrow A = 0 \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{1}{10}\,\text{sim}(2x)$$

3) INFINE SOMMIAMO LE DUE SOLUZIONI $(y = y_0 + y_p)$

$$\boxed{y = C_1\cdot e^{4x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{10}\,\text{sim}(2x)}$$

ANALIZZIAMO IL CASO CON $B = 0$

ESEMPIO:

$$y'' + 16y = 5\,\text{sim}(4x)$$

1) FACCIAMO L'EQUAZIONE ASSOCIATA:

$$y'' + 16y = 0 \rightarrow \lambda^2 + 16\lambda = 0 \rightarrow \lambda^2 = -16 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-16} = \sqrt{16\cdot(-1)}$$
$$= \pm 4\sqrt{1} = \pm 4i$$

$$\lambda_1 = 4i \quad \lambda_2 = -4i$$

DATO CHE LE SOLUZIONI SONO COMPLESSE CONIUGATE, IL Δ ERA < 0

COME SAPPIAMO, SE $\Delta < 0$ y_0 HA FORMA

$$y_0 = e^{\alpha x}(C_1\cdot\cos(\beta x) + C_2\,\text{sim}(\beta x))$$

DOVE α E β SONO RISPETTIVAMENTE COEFFICIENTE DELLA PARTE REALE E COEFFICIENTE DELLA PARTE IMMAGINARIA DELL'EQUAZIONE ASSOCIATA OMOGENEA.

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

LA NOSTRA SOLUZIONE $4i, -4i$ HA PARTE REALE NULLA, QUINDI $\alpha = 0$, $\beta = 4$, QUINDI

$$y_0 = \underset{\downarrow\,1}{e^{0x}}(C_1\cos(4x) + C_2\,\text{sim}(4x))$$

$$y_0 = C_1\cos(4x) + C_2\,\text{sim}(4x)$$

2) IN QUESTO CASO $B = 0$ e k = AL COEFFICIENTE DELLA PARTE IMMAGINARIA DELLA SOL. DELL'EQUAZIONE ASSOCIATA, QUINDI COME HO SCRITTO NELLA NOTA: $y_p = x(A\cos(kx) + B\,\text{sim}(kx))$

$$y_p = x\cdot(A\cos(4x) + B\,\text{sim}(4x))$$

ORA CALCOLIAMO y'_p E y''_p

$$y'_p = A\cos(4x) + B\,\text{sim}\,4x + x(-4A\,\text{sim}(4x) + 4B\cos(4x))$$

$$y''_p = -4A\,\text{sim}(4x) + 4B\cos(4x) - 4A\,\text{sim}(4x) + 4B\cos(4x) - 16Ax\cos(4x) - 16Bx\,\text{sim}(4x)$$

ORA SOSTITUIAMO ALL'EQUAZIONE ORIGINALE I NOSTRI y'', y
(LA DERIVATA PRIMA NON C'È NELL'EQUAZIONE ORIGINALE, QUINDI NON LA METTO)

$$-4A\,\text{sim}(4x) + 4B\cos(4x) - 4A\,\text{sim}(4x) + 4B\cos(4x) - 16Ax\cos(4x) - 16Bx\,\text{sim}(4x) + 16x(A\cos(4x) + B\,\text{sim}(4x))$$

$$-4A\,\text{sim}(4x) + 4B\cos(4x) - 4A\,\text{sim}(4x) + 4B\cos(4x) = -8A\,\text{sim}(x) + 8B\cos(4x)$$

$$-8A\,\text{sim}(4x) + 8B\cos(4x) = 5\,\text{sim}(4x)$$

$$\begin{cases} \frac{-8A}{8} = \frac{5}{8} \quad A = -\frac{5}{8} \\ 8B = 0 \quad B = 0 \end{cases}$$

$$y_p = x(A\cos(4x) + B\,\text{sim}(4x))$$

$$y_p = x\left(-\frac{5}{8}\cos(4x) + 0\,\text{sim}(4x)\right) = -\frac{5}{8}x\cos(4x)$$

3) SOLUZIONE COMPLETA FINALE: $y = y_0 + y_p$

$$\boxed{y = C_1\cos(4x) + C_2\,\text{sim}(4x) - \frac{5}{8}x\cos(4x)}$$