📜 IL FORMULARIO DI ALGEBRA BILINEARE

Queste sono le 4 formule che userai nel 90% degli esercizi:

1. **Calcolo del Prodotto Scalare (Formula Matriciale):** Dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (colonne) e la matrice del prodotto A:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{y}$$

2. **Condizione di Simmetria (Obbligatoria):** La matrice deve essere simmetrica rispetto alla diagonale principale:

$$A = A^t$$

3. **Cambio di Base (Formula di Congruenza):** Se M è la matrice di passaggio dalla base nuova alla vecchia ($X_{\text{old}} = MX_{\text{new}}$), la nuova matrice B è:

$$B = M^t \cdot A \cdot M$$

4. **Teorema di Sylvester (Legge di Inerzia):** Il numero di autovalori positivi (n_+), negativi (n_-) e nulli (n_0) non cambia mai:

$$\text{Segnatura}(A) = \text{Segnatura}(B)$$

---

1. La Matrice A: Il "Regolamento del Gioco"

Immagina un gioco dove ogni personaggio ha due statistiche:

- x_1: **Forza**
- x_2: **Magia**

Vogliamo calcolare la **"Potenza Totale"** (il prodotto scalare del personaggio con se stesso). In un mondo semplice, sommeremmo tutto ($x_1^2 + x_2^2$). Ma in questo gioco le regole sono diverse.

Le Regole (La Matrice A):

- La Forza vale **3** punti.
- La Magia è pericolosa e ti toglie **2** punti (penalità).
- Non ci sono bonus misti (interazione forza-magia = 0).

La matrice A è:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Prendiamo un Guerriero $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2 Forza, 1 Magia). Calcoliamo la sua Potenza con la formula $\mathbf{v}^t A \mathbf{v}$:

$$\text{Potenza} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = (2 \cdot 6) + (1 \cdot -2) = 12 - 2 = \mathbf{10}$$

Il Guerriero ha potenza **10**. Questo numero è la realtà fisica del personaggio. Non deve cambiare.

---

2. Il Cambio di Base: Arriva il "Modder"

Ora arriva un "Modder" (un programmatore esterno) che vuole riscrivere il codice del gioco usando parametri diversi. Invece di "Forza" e "Magia", lui usa due nuove classi miste:

- **Paladino ($\mathbf{u}_1$):** Che vale $(1, 1)$ nelle vecchie stat.
- **Stregone ($\mathbf{u}_2$):** Che vale $(0, 1)$ nelle vecchie stat.

La matrice di cambio base M (che traduce dal Mod al gioco originale) è fatta mettendo questi vettori in colonna:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

3. La Nuova Matrice B: Adattare il Regolamento

Il Modder vuole sapere: *"Quale matrice B devo usare nel mio sistema affinché i punteggi escano identici a quelli originali?"*

Usiamo la formula della **Congruenza**:

$$B = M^t \cdot A \cdot M$$

Calcolo Passo-Passo:

1. **Scriviamo i pezzi:**

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Calcoliamo il cuore ($A \cdot M$):**

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(Nota: ho moltiplicato riga per colonna).

3. **Calcoliamo il finale ($M^t \cdot \text{cuore}$):**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- R1,C1: $1(3) + 1(-2) = 1$
- R1,C2: $1(0) + 1(-2) = -2$
- R2,C1: $0(3) + 1(-2) = -2$
- R2,C2: $0(0) + 1(-2) = -2$

La nuova matrice del Modder è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

---

4. Verifica della Verità (Il Punteggio non cambia)

Il nostro Guerriero originale era $\mathbf{v} = (2, 1)$ (2 Forza, 1 Magia). Nel sistema del Modder (Paladino/Stregone), chi è questo Guerriero? Si vede a occhio che:

$$(2, 1) = \mathbf{2} \cdot (1, 0)_{\text{forza}} + \mathbf{1} \cdot (0, 1)_{\text{magia}}$$

Esprimiamolo con i nuovi vettori base $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$:

$$(2, 1) = \mathbf{2} \cdot \mathbf{u}_1 - \mathbf{1} \cdot \mathbf{u}_2$$

(Verifica: $2(1, 1) - 1(0, 1) = (2, 2) - (0, 1) = (2, 1)$. Corretto!)

Quindi per il Modder il Guerriero ha coordinate $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Calcoliamo la Potenza col sistema Nuovo (B):

$$\text{Potenza} = (\mathbf{v}')^t B \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Prodotto vettore-matrice: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix}$
2. Finale: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4(2) + (-2)(-1) = 8 + 2 = \mathbf{10}$

Risultato: 10. Esattamente come all'inizio! La formula $M^t A M$ ha funzionato perfettamente.

---

5. Sylvester: Il DNA non mente

Ora guardiamo le due matrici.

- **Matrice Vecchia A:** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Essendo diagonale, gli autovalori sono **3** (Positivo) e **-2** (Negativo). *Segnatura:* $(1, 1, 0)$. Significa: "Il gioco premia una cosa e ne punisce un'altra".
- **Matrice Nuova B:** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Non è diagonale, ma Sylvester dice che **deve** avere la stessa segnatura. Verifichiamo col determinante: $\det(B) = 1(-2) - (-2)(-2) = -2 - 4 = -6$. Il determinante è negativo. L'unico modo per avere un prodotto negativo è moltiplicare un numero positivo per uno negativo ($+ \times - = -$). Quindi anche B ha 1 autovalore positivo e 1 negativo.

Conclusione: Anche se hai cambiato le regole di calcolo (B), la natura del gioco (1 bonus, 1 malus) è rimasta intatta.