

Il Prodotto Hermitiano e il Teorema Spettrale

Appunti di Algebra Lineare

16 dicembre 2025

1 Definizioni Fondamentali

1.1 Prodotto Hermitiano Standard

In uno spazio vettoriale complesso $V = \mathbb{C}^n$, il prodotto hermitiano standard (o canonico) tra due vettori \mathbf{v}, \mathbf{w} è definito come:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \overline{\mathbf{w}} = \sum_{j=1}^n v_j \overline{w_j} \quad (1)$$

Nota: Alcuni testi usano la convenzione opposta coniugando il primo vettore. Qui coniughiamo il secondo.

1.2 Matrice Hermitiana

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è detta **Hermitiana** (o autoaggiunta) se coincide con la sua trasposta coniugata:

$$A = A^\dagger \iff A = \overline{A}^T \quad (2)$$

In termini di componenti: $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$. Da questo segue che gli elementi sulla diagonale principale devono essere **Reali** ($a_{ii} = \overline{a_{ii}} \implies a_{ii} \in \mathbb{R}$).

1.3 Decomposizione Cartesiana

Qualsiasi matrice Hermitiana A può essere scomposta nella somma di una parte reale simmetrica e una parte immaginaria antisimmetrica:

$$A = S + iK \quad (3)$$

dove:

- S è una matrice reale **Simmetrica** ($S^T = S$).
- K è una matrice reale **Antisimmetrica** ($K^T = -K$).

2 Il Teorema Spettrale (Caso Complesso)

Teorema 1 (Spettrale per Matrici Hermitiane). *Sia A una matrice Hermitiana. Allora:*

1. *Tutti gli autovalori di A sono **Reali**.*
2. *Autovettori relativi ad autovalori distinti sono **Ortogonal**i (rispetto al prodotto hermitiano).*
3. *A è diagonalizzabile tramite una matrice **Unitaria** U . Ovvero, esiste una base ortonormale di autovettori tale che:*

$$U^\dagger A U = D$$

dove D è diagonale e $U^\dagger = U^{-1}$.

3 Esercizio Svolto

Esercizio 1. Si consideri l'operatore $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica, ricostruita dai dati forniti $(2x - iy + (1+i)z, \dots)$, è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1+i \\ i & 0 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Verificare che A definisce un prodotto hermitiano (ovvero che è Hermitiana).
2. Calcolare autovalori e autovettori.
3. Trovare la matrice unitaria U che diagonalizza A .

Svolgimento

1. Verifica Hermitiana

Controlliamo che $A = \overline{A}^T$:

- Diagonale: $2, 0, 0$ sono tutti reali. (OK)
- $a_{21} = i$ e $\overline{a_{12}} = \overline{-i} = i$. (OK)
- $a_{31} = 1 - i$ e $\overline{a_{13}} = \overline{1+i} = 1 - i$. (OK)
- $a_{32} = 0$ e $\overline{a_{23}} = 0$. (OK)

La matrice è Hermitiana.

2. Calcolo degli Autovalori

Calcoliamo il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -i & 1 + i \\ i & -\lambda & 0 \\ 1 - i & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo lungo la seconda riga o colonna (o con Sarrus):

$$\begin{aligned} &= (2 - \lambda)(\lambda^2) - (-i)[i(-\lambda)] + (1 + i)[-(-\lambda)(1 - i)] \\ &= \lambda^2(2 - \lambda) - \lambda + \lambda(1 + i)(1 - i) \end{aligned}$$

Sapendo che $(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 2$:

$$= 2\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda + 2\lambda = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda$$

Mettiamo a zero: $\lambda(-\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$. Le radici sono:

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)(-1)}}{2} \quad \Delta = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda$. Radici di $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \implies (\lambda - 3)(\lambda + 1)$.

Quindi gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -1$$

Sono tutti reali e distinti, come previsto dal Teorema.

3. Calcolo degli Autovettori e Normalizzazione

Per $\lambda_1 = 3$: Risolviamo $(A - 3I)\mathbf{v} = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -i & 1 + i \\ i & -3 & 0 \\ 1 - i & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Dalla riga 2: $ix = 3y \implies y = \frac{i}{3}x$. Dalla riga 3: $(1 - i)x = 3z \implies z = \frac{1-i}{3}x$. Ponendo $x = 3$, otteniamo $\mathbf{v}_1 = (3, i, 1 - i)$. **Norma:** $\|\mathbf{v}_1\|^2 = |3|^2 + |i|^2 + |1 - i|^2 = 9 + 1 + 2 = 12$.

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 3 \\ i \\ 1 - i \end{pmatrix}$$

Per $\lambda_2 = 0$: Dalle righe 2 e 3 del sistema originale ($ix = 0 \implies x = 0$): Se $x = 0$, la riga 1 diventa $-iy + (1 + i)z = 0 \implies iy = (1 + i)z$. Poniamo $z = 1$, allora $iy = 1 + i \implies y = \frac{1+i}{i} = 1 - i$. $\mathbf{v}_2 = (0, 1 - i, 1)$. **Norma:** $\|\mathbf{v}_2\|^2 = 0 + 2 + 1 = 3$.

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per $\lambda_3 = -1$: Risolviamo $(A + I)\mathbf{v} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -i & 1+i \\ i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalla riga 2: $ix + y = 0 \implies y = -ix$. Dalla riga 3: $(1-i)x + z = 0 \implies z = -(1-i)x = (-1+i)x$. Ponendo $x = 1$: $\mathbf{v}_3 = (1, -i, -1+i)$. **Norma:** $\|\mathbf{v}_3\|^2 = 1 + 1 + 2 = 4$.

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}$$

4. Matrice Diagonale e Unitaria

La matrice diagonale è $D = \text{diag}(3, 0, -1)$. La matrice unitaria U ha per colonne gli autovettori normalizzati:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{12}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1-i}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$$