CONSIDERIAMO LO SPAZIO $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ E L'APPLICAZIONE LINEARE DI DERIVAZIONE

$D: V \to V$ CHE MANDA UN POLINOMIO $p(x)$ NELLA SUA DERIVATA $p'(x)$

1) DETERMINA UNA BASE PER IL NUCLEO $(\ker(D))$ E UNA BASE PER L'IMMAGINE $(\mathrm{Im}(D))$

UN POLINOMIO DI GRADO 2 É IN FORMA ax^2+bx+c
E LA SUA DERIVATA É $2ax+b$
PER TROVARE IL KERNEL DEVO IMPOSTARE $2ax+b=0$
MENTRE C PUÓ ESSERE QUALUNQUE NUMERO DATO CHE NELLA DERIVATA NON C'É E NON INFLUENZA IL KER.

$\ker = 0x^2+0x+c \to \ker = c$
ABBIAMO C VARIABILE LIBERA, MENTRE $a, b = 0$

IL KER É QUINDI $\{1\}$ → INDICA LA VARIABILE C

b) IMMAGINE DI D.
L'IMMAGINE É LA DERIVATA DEL POLINOMIO, QUINDI
$2ax+b$

$$\mathrm{Im}(D) = \{p(x) \in V \mid p(x) = D(p(x))\}$$

PONIAMO $A = 2a$, $B = b$
QUINDI $p' = Ax + B \cdot 1$

$$\mathrm{Im}(D) = \mathrm{SPAN}\{(x, 1)\}$$

3) DETERMINA LA MATRICE ASSOCIATA ALLA BASE $B = \{1, x, x^2\}$.

SARÁ 3X3

$D(1) = 0 \to (0,0,0)$
$D(x) = 1 \to (1,0,0)$
$D(x^2) = 2x \quad (0,2,0)$

$$[D]_B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4) DETERMINA LA MATRICE $[I+D]_B$ CALCOLA IL DETERMINANTE E SE É INIETTIVA.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\mathrm{DET} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ (ERA GIÁ A SCALINI)

DATO CHE UN APPLICAZIONE $T: V \to V$ É INIETTIVA SE E SOLO SE LA MATRICE ASSOCIATA HA $\mathrm{DET} \neq 0$, $(I+D)$ É INIETTIVA, ED ANCHE INVERTIBILE.

QUINDI $\ker(I+D) = \{0\}$, SE $p(x) + p'(x) = 0$, $p(x)$ DEVE ESSERE NULLO.