Raccolta Ragionata Esercizi d'Esame

Alessio Avarappattu

Dicembre 2025

Legenda Difficoltà:
● Esercizio Standard / Applicazione Formule
●● Esercizio Intermedio / Richiede Taylor o Sostituzioni
● ● ● Esercizio Avanzato / Parametri multipli o Limiti complessi

Indice

1 Serie di Potenze e Raggi di Convergenza

1. **● Serie Geometrica** *(sol. pag. 8)*
   Dato $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $M \in \mathbb{N}$, calcolare il valore della seguente sommatoria:
   $$\sum_{n=-M}^{M} x^n$$

2. **● Serie Geometrica (Somma)** *(sol. pag. 8)*
   Determinare per quali x converge la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}$ e calcolarne la somma $S(x)$.

3. **● Serie Razionale Semplice** *(sol. pag. 9)*
   Determinare l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze:
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n$$

4. **● Serie Razionale** *(sol. pag. 9)*
   Studiare per $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie:
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n^2}{n^3} x^n$$

5. **● Serie Logaritmica** *(sol. pag. 9)*
   Studiare la convergenza della seguente serie di potenze:
   $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log(n)} x^n$$

6. **●● Serie con Fattoriale** *(sol. pag. 10)*
   Studiare la convergenza della seguente serie di potenze (Usa Stirling):
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

7. **●● Serie Centrata in $x_0 = 1$** *(sol. pag. 10)*
   Determinare l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze:
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\log(n)}{1+n^2} (x-1)^n$$

8. **●● Raggio con Parametro λ** *(sol. pag. 11)*
   Dato $\lambda \geq 0$, determinare il raggio di convergenza della serie:
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1} x^n$$

9. ●●● **Coefficiente con Taylor** *(sol. pag. 12)*
Studiare, al variare di $\alpha > 0$, la convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\alpha - n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] x^n$$

10. ●●● **Parametro all'Esponente** *(sol. pag. 12)*
Determinare per quali x converge la serie (con $n \neq 4$):

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 4}}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 - 4n)^{x^3 - x + 1/2}}$$

2 Serie Numeriche e Sviluppi di Taylor

Obiettivo: Usare Taylor per trovare l'ordine di infinitesimo, criterio del Rapporto/Radice e Leibniz.

11. ● **Serie Astratta** *(sol. pag. 14)*
Studiare la convergenza semplice (non assoluta) della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{f(n)}$$

12. ● **Serie a Segni Alterni** *(sol. pag. 14)*
Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-4}{n^2+1}$$

13. ●● **Leibniz + Asintotico** *(sol. pag. 14)*
Studiare la convergenza semplice (non assoluta) della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{e^n - n^2}$$

14. ●● **Serie Parametrica con Fattoriale** *(sol. pag. 15)*
Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x(x-1)n)^n}{n!}$$

15. ●● **Cancellazione di Taylor** *(sol. pag. 15)*
Determinare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

16. ●●● **Serie Trigonometrica Parametrica** *(sol. pag. 16)*
Studiare, per $\alpha > 1$, la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n^2)\cos(n\pi)\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

17. ●●● **Doppio Parametro** a, b *(sol. pag. 16)*
Determinare per quali $a \in \mathbb{R}, b \neq 0$ converge la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sin(1/n) - a}{2^{bn}}$$

18. ●●● **Serie con Potenze di Seni** *(sol. pag. 17)*
Data la serie per $\alpha > 0$ (con x parametro fissato):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^\alpha(1/n^3)}{\sin^3(1/(n\sqrt{x}))}$$

a) Segno costante? b) Termine infinitesimo? c) Convergenza?

3 Integrali Impropri Standard (0 e Infinito)

Obiettivo: Distinguere comportamento in 0 (Taylor, $p < 1$) e a infinito (Gerarchia, $p > 1$).

19. ● **Calcolo Integrale Definito** *(sol. pag. 18)*
Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 x\arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)\, dx$$

20. ● **Calcolo Diretto** *(sol. pag. 19)*
a) Calcolare per $1 \leq n < 13,5$: $\int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^{n+1}}\, dx$
b) Calcolare: $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{1+\sin^2(x)}\, dx$

21. ● **Gaussiano** *(sol. pag. 20)*
Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}(x + 4x^3)\, dx$$

22. ● **Confronto Asintotico Semplice** *(sol. pag. 20)*
Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2}\, dx$$

23. ●● **Calcolo per Parti Ciclico** *(sol. pag. 21)*
Studiare la convergenza e, se converge, calcolare il valore di:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x)\, dx$$

24. ●● Sostituzione e Improprio *(sol. pag. 22)*
Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare:

$$\int_0^2 \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}}\, dx$$

25. ●● Singolarità con Valore Assoluto *(sol. pag. 22)*
Studiare la convergenza del seguente integrale:

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{|x-1|}}\, dx$$

26. ●● Serie Armonica Logaritmica (Integrale) *(sol. pag. 23)*
Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\log(x)(\log(\log(x)))^2} \frac{dx}{x}$$

27. ●● Razionale con Casi λ *(sol. pag. 24)*
Studiare al variare di $\lambda > -1$ (e poi $\lambda \leq -1$):

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \lambda}\, dx$$

28. ●● Limitata su Potenza *(sol. pag. 25)*
Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza di:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 + \sin(x)}{x^\alpha}\, dx$$

29. ●● Funzione Integrale *(sol. pag. 26)*
Sia $f(x) = \frac{1+x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$ per $x > 0$. Studiare esistenza integrali su $(0,1)$ e $(1,+\infty)$ per $f(x)$ e per la sua primitiva $F(x)$.

30. ●●● Parametro e Limite *(sol. pag. 27)*
Calcolare $I_a = \int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x}-1}\, dx$ e il limite per $a \to 1^+$.

31. ●●● Parametrico Generalizzato *(sol. pag. 28)*
Calcolare $I_a(n) = \int_a^2 \frac{1}{(x-1)^{1/n}}\, dx$ e il limite per $a \to 1^+$.

32. ●●● Successione di Integrali *(sol. pag. 28)*
Calcolare $I_n = \int_0^1 x^n \log(x)\, dx$ e studiarne il limite per $n \to +\infty$.

33. ●●● Parametrico Esponenziale *(sol. pag. 29)*
Al variare di $m \in \mathbb{Z}$, studiare e calcolare:

$$\int_{e^m}^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\, dx$$

4 (Parametri Misti e Limiti)

Obiettivo: Gestire esercizi complessi con più parametri (α, β, λ) e definizioni di funzioni tramite integrali.

34. ●● **Parametro Logaritmico** *(sol. pag. 30)*
Studiare, al variare di α, la convergenza ed eventualmente calcolare:

$$\int_0^1 x^\alpha (\log(x))^2 \, dx$$

35. ●● **Razionale con Parametro** *(sol. pag. 32)*
Determinare per quali λ converge il seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+\lambda x^2+1} \, dx$$

36. ●● **Misto Log-Razionale** *(sol. pag. 33)*
Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{x\log(2+x)}{x^3+1} \, dx$$

37. ●● **Parametri su Radici** *(sol. pag. 33)*
Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare:

$$\int_1^2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{x-1}} + \frac{\beta}{\sqrt[3]{2-x}} \right) dx$$

38. ●● **Dominio Funzione Integrale** *(sol. pag. 34)*
Determinare l'insieme di definizione di $F(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{t\sqrt{3-t}} \, dt$.

39. ● **Doppio Parametro α, β** *(sol. pag. 35)*
Studiare, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, la convergenza assoluta:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \tan(x^\beta) \, dx$$

40. ●●● **Esponenziale-Trigonometrico** *(sol. pag. 36)*
Studiare la convergenza per $a \geq 0$ su $(1, +\infty)$ e su $(0, \pi)$ di:

$$\frac{e^{ax} - \cos(x)}{x^a}$$

41. ●●● **Cosh e Limite** *(sol. pag. 37)*
Studiare $\Phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha x)} \, dx$ e il limite per $\alpha \to 0^+$.

42. ●●● **Razionale Parametrico e Limite** *(sol. pag. 38)*
Studiare $\Phi(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\alpha x+1} \, dx$ e il limite per $\alpha \to 2$.

43. ●●● **Integrale Dipendente e Limite** *(sol. pag. 39)*
Studiare $I(\lambda) = \int_\lambda^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)\log^2(x^2+1)} \, dx$ e il limite di $\lambda^\alpha I(\lambda)$.

44. ●● **parametrico** *(sol. pag. 40)*

Studiare, al variare di $\alpha > 0$, la convergenza di:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin(x + x^\alpha)}{x^2 \arctan(x^\alpha + x^{1/\alpha})}\, dx$$

Soluzioni e Svolgimenti

Fase 1: Serie di Potenze

Esercizio 1 (Somma Finita)

Esistono due metodi per risolvere questa sommatoria:

Metodo A: Raccoglimento (Veloce)
Raccogliamo il termine con l'esponente più basso x^{-M}:

$$\sum_{n=-M}^{M} x^n = x^{-M}(1 + x + \cdots + x^{2M}) = x^{-M} \sum_{k=0}^{2M} x^k$$

Questa è una geometrica di ragione x con $2M + 1$ termini. Usando la formula classica:

$$S = x^{-M} \frac{1 - x^{2M+1}}{1 - x} = \frac{x^{-M} - x^{M+1}}{1 - x} \quad (\text{per } x \neq 1)$$

Metodo B: Spezzamento (Intuitivo)
Dividiamo la somma in tre parti: esponenti negativi, zero, esponenti positivi.

$$\sum_{n=-M}^{M} x^n = \underbrace{\sum_{n=-M}^{-1} x^n}_{\text{Parte Negativa}} + \underbrace{1}_{n=0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{M} x^n}_{\text{Parte Positiva}}$$

- Parte Positiva: Progressione geometrica di ragione x:

$$S_{pos} = x \frac{1 - x^M}{1 - x}$$

- Parte Negativa: Ponendo $k = -n$, diventa una geometrica di ragione $1/x$:

$$S_{neg} = \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{1}{x} \frac{1 - (1/x)^M}{1 - 1/x} = \frac{x^{-M} - 1}{1 - x}$$

Sommando tutto ($S_{neg} + 1 + S_{pos}$) si ottiene lo stesso risultato del Metodo A.

Nota: Se $x = 1$, la somma vale semplicemente $2M + 1$.

Esercizio 2 (Serie Geometrica x^{2k})

Possiamo riscrivere il termine generale come $(x^2)^k$. Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = x^2$.

- **Convergenza:** La serie converge se la ragione in modulo è minore di 1:

$$|x^2| < 1 \implies x^2 < 1 \implies -1 < x < 1$$

- **Somma:** Usando la formula $S = \frac{1}{1-q}$:

$$S(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Esercizio 3 (Serie di Potenze)
La serie è $\sum a_n x^n$ con $a_n = \frac{n}{n^2+1}$.

1. **Calcolo del Raggio R:** Usiamo il criterio del rapporto:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n} \sim 1$$

   Il raggio è $R = 1/L = 1$. La serie converge sicuramente in $(-1, 1)$.

2. **Studio degli estremi:**
   - Per $\mathbf{x = 1}$: La serie diventa $\sum \frac{n}{n^2+1}$. Poiché $a_n \sim \frac{1}{n}$ (serie armonica), la serie **diverge**.
   - Per $\mathbf{x = -1}$: La serie diventa $\sum(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$. È una serie a segni alterni. Per il Criterio di Leibniz (termini infinitesimi e decrescenti), la serie **converge**.

Conclusione: L'insieme di convergenza è l'intervallo $[-1, 1)$.

Esercizio 4 (Serie Razionale)
La serie è $\sum a_n x^n$ con $a_n = \frac{1+n^2}{n^3}$.

1. **Calcolo del Raggio R:** Usiamo il Criterio della Radice. Ricordando che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+n^2}{n^3}} = 1 \implies R = 1$$

   La serie converge sicuramente in $(-1, 1)$.

2. **Studio degli estremi:**
   - Per $\mathbf{x = 1}$: La serie diventa $\sum \frac{1+n^2}{n^3}$. Per confronto asintotico $a_n \sim 1/n$. Poiché la serie armonica diverge, la serie **diverge**. Il punto 1 è escluso.
   - Per $\mathbf{x = -1}$: La serie diventa $\sum(-1)^n \frac{1+n^2}{n^3}$. Qui occorre fare una distinzione importante:
     - *Convergenza Assoluta:* Studiamo la serie dei moduli $\sum |a_n|$. Ricadiamo nel caso $x = 1$, che abbiamo visto divergere. Quindi **non converge assolutamente**.
     - *Convergenza Semplice:* Usiamo il Criterio di Leibniz. Il termine a_n tende a 0 ed è decrescente. Quindi la serie **converge semplicemente**.

   Conclusione sul punto -1: Poiché esiste la convergenza semplice, la somma è finita. Pertanto il punto $x = -1$ va **incluso** nell'insieme di convergenza.

Risultato: L'insieme di convergenza è l'intervallo $[-1, 1)$.

Esercizio 5 (Serie Logaritmica)
La serie è $\sum a_n x^n$ con $a_n = \frac{1}{\log n}$.

1. **Calcolo del Raggio R:**

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)} = 1 \implies R = 1$$

   La serie converge in $(-1, 1)$.

2. **Studio degli estremi:**
   - Per $\mathbf{x = 1}$: La serie è $\sum \frac{1}{\log n}$. Usiamo il criterio del confronto. Sappiamo che $\log n < n$ per ogni $n \geq 2$. Quindi:
   $$\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$$
   Poiché la serie armonica $\sum 1/n$ diverge, per confronto diverge anche la nostra serie (che è maggiore).
   - Per $\mathbf{x = -1}$: La serie è $\sum(-1)^n \frac{1}{\log n}$. Applichiamo il **Criterio di Leibniz** al termine $b_n = \frac{1}{\log n}$:
     (a) *Infinitesimo:* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$. (Verificato)
     (b) *Decrescenza:* La funzione $\log x$ è strettamente crescente. Pertanto $\log(n+1) > \log n$, il che implica $\frac{1}{\log(n+1)} < \frac{1}{\log n}$. La successione è decrescente. (Verificato)

     Quindi la serie **converge**.

Conclusione: L'insieme di convergenza è $[-1, 1)$.

Esercizio 6 (Serie con Fattoriale e n^n)

La serie è $\sum a_n x^n$ con $a_n = \frac{n^n}{n!}$.

1. **Calcolo del Raggio R (Criterio della Radice):** Calcoliamo il limite della radice n-esima del coefficiente:
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$
Usiamo la stima asintotica fondamentale $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ (conseguenza di Stirling):
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n/e} = e$$
Il raggio è $R = 1/L = 1/e$. L'intervallo aperto è $(-1/e, 1/e)$.

2. **Studio degli estremi:** Agli estremi dobbiamo capire se la serie numerica converge. Usiamo l'**Approssimazione di Stirling** completa: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.
   - Per $\mathbf{x = 1/e}$: La serie diventa $\sum \frac{n^n}{n! e^n}$. Sostituendo Stirling al denominatore:
   $$a_n \sim \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n} \cdot e^n} = \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$
   Il termine generale si comporta come $\frac{1}{n^{1/2}}$. Poiché l'esponente $1/2 < 1$, la serie **diverge**.
   - Per $\mathbf{x = -1/e}$: La serie diventa $\sum(-1)^n \frac{n^n}{n! e^n}$. Il modulo del termine generale è asintotico a $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, che è infinitesimo. Inoltre è decrescente. Per il Criterio di Leibniz, la serie **converge**.

Conclusione: L'insieme di convergenza è $[-1/e, 1/e)$.

Esercizio 7 (Serie Centrata in $x_0 = 1$)

La serie è $\sum a_n(x-1)^n$ con $a_n = \frac{n \log n}{1+n^2}$.

1. **Calcolo del Raggio R:** Usiamo il Criterio della Radice e i limiti notevoli ($\sqrt[n]{n} \to 1$):
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n \log n}{1+n^2}} \sim 1 \implies R = 1$$
2. **Calcolo dell'Intervallo (Attenzione al Centro):** La serie è centrata in $x_0 = 1$. Gli estremi si trovano spostandosi di R dal centro:
$$\text{Intervallo} = (x_0 - R,\ x_0 + R) = (1-1,\ 1+1) = (0,2)$$
Dobbiamo testare manualmente cosa succede sui bordi $x = 0$ e $x = 2$.
3. **Studio degli estremi:**
   - Per $\mathbf{x = 2}$ (Estremo destro): Il termine di potenza diventa $(2-1)^n = 1^n = 1$. La serie è $\sum \frac{n \log n}{1+n^2}$. Per confronto asintotico $a_n \sim \frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$. Poiché la serie armonica diverge, questa **diverge**.
   - Per $\mathbf{x = 0}$ (Estremo sinistro): Il termine di potenza diventa $(0-1)^n = (-1)^n$. La serie è $\sum(-1)^n \frac{n \log n}{1+n^2}$. Usiamo Leibniz: il termine è infinitesimo e decrescente. Quindi **converge**.

Conclusione: L'insieme di convergenza è $[0, 2)$.

Esercizio 8 (Raggio con Parametro λ)

La serie è $\sum a_n x^n$ con $a_n = \frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1}$. Calcoliamo il limite della radice n-esima $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Bisogna fare attenzione: il termine dominante al denominatore cambia a seconda del valore di λ.

- **Caso A:** $0 \le \lambda \le 1$
  Qui λ^n non esplode (è ≤ 1). Il termine $+1$ al denominatore è rilevante o dominante.
  $$L = \lim \frac{\sqrt[n]{n^\lambda}}{\sqrt[n]{1}} = 1$$
  Il raggio è $R = 1/L = 1/1 = \mathbf{1}$.
- **Caso B:** $\lambda > 1$
  Qui $\lambda^n \to +\infty$ esponenzialmente e vince sul $+1$.
  $$L = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\lambda^n}} = \frac{1}{\lambda}$$
  Il raggio è l'inverso del limite: $R = 1/L = 1/(1/\lambda) = \lambda$.

Nota Importante sul Risultato: Potrebbe venire il dubbio se prendere il minimo o il massimo. Ricorda che R è l'inverso di L.

- Se λ è grande (es. 100), i coefficienti sono piccolissimi ($1/100^n$), quindi la serie converge in un raggio molto ampio ($R = 100$).
- Se λ è piccolo, il raggio si ferma a 1.

Quindi il risultato si può scrivere compattamente come:
$$\mathbf{R} = \max(\mathbf{1}, \lambda)$$

Esercizio 9 (Coefficiente con Taylor)

La serie è $\sum a_n x^n$ con $a_n = \alpha - n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1. Analisi asintotica (Taylor): Sviluppiamo il logaritmo fino al secondo ordine per $x = 1/n \to 0$:

$$a_n = \alpha - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (\alpha - 1) + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. Calcolo del Raggio (Nota importante): Il raggio $R = 1$ in tutti i casi, ma per motivi diversi:

- Se $\alpha \neq 1$, $a_n \to \alpha - 1$ (costante). Poiché $\lim \sqrt[n]{|\text{costante}|} = 1$, il raggio è $R = 1$.
- Se $\alpha = 1$, $a_n \sim \frac{1}{2n}$. Poiché $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} = 1$, il raggio è comunque $R = 1$.

3. Studio degli estremi:

- **Caso** $\alpha \neq 1$**:** Il limite del termine generale è $\lim a_n = \alpha - 1 \neq 0$. Mancando la condizione necessaria ($a_n \to 0$), la serie non converge mai agli estremi. **Insieme:** $(-1, 1)$.
- **Caso** $\alpha = 1$**:** Il termine diventa $a_n \sim \frac{1}{2n}$.
  - Per $\mathbf{x = 1}$: $\sum \frac{1}{2n}$ diverge (armonica).
  - Per $\mathbf{x = -1}$: $\sum(-1)^n \frac{1}{2n}$ converge (Leibniz).

  Insieme: $[-1, 1)$.

Esercizio 10 (Parametro all'Esponente)

La serie è $\sum \frac{1}{(n^2-4n)^E}$ dove l'esponente è $E = x^3 - x + 1/2$.

1. Scelta del Criterio: Trattandosi di una base polinomiale, i criteri del Rapporto e della Radice darebbero limite $L = 1$ (caso dubbio). L'unica strada è il **Criterio del Confronto Asintotico** con la serie armonica generalizzata.

2. Analisi Asintotica: Per $n \to \infty$, la base $n^2 - 4n \sim n^2$. Quindi il termine generale è asintotico a:

$$a_n \sim \frac{1}{(n^2)^E} = \frac{1}{n^{2E}}$$

Questa è una serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^p}$ con $p = 2E$.

3. Condizione di Convergenza: Ricordiamo che la serie armonica converge se e solo se $p > 1$. Imponiamo la disuguaglianza sull'esponente totale:

$$2(x^3 - x + 1/2) > 1$$

4. Risoluzione della Disequazione:

$$2x^3 - 2x + 1 > 1 \implies 2x^3 - 2x > 0 \implies 2x(x^2 - 1) > 0$$

Studiamo il segno del prodotto $x(x-1)(x+1) > 0$:

- Fattore $x > 0$: positivo per $x > 0$.
- Fattore $x^2 - 1 > 0$: positivo per $x < -1 \cup x > 1$.

Dal grafico dei segni, il prodotto è positivo negli intervalli:

$$(-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

Conclusione: La serie converge per $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Esercizio 10b

Studiare la convergenza della seguente serie per $x = e^2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2 + \cos(n!)) \cdot n^{n^{3/2}}}{2^{n^2}} (x-1)^n$$

1. Impostazione: Criterio della Radice Trattandosi di una serie di potenze $\sum a_n (x-1)^n$, calcoliamo il raggio di convergenza R usando il limite della radice n-esima dei coefficienti:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{(2 + \cos(n!)) \cdot n^{n^{3/2}}}{2^{n^2}}}$$

2. Semplificazione dei termini Spezziamo il limite in tre fattori:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{2 + \cos(n!)} \cdot \sqrt[n]{n^{n^{3/2}}}}{\sqrt[n]{2^{n^2}}}$$

Analizziamo i pezzi singolarmente:

- **Il termine oscillante:** Poiché $-1 \leq \cos(n!) \leq 1$, il termine $2 + \cos(n!)$ è compreso tra 1 e 3. Per il teorema dei carabinieri, $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2 + \cos(n!)} \leq \sqrt[n]{3}$. Entrambi tendono a 1, quindi questo fattore tende a **1**.
- **Il numeratore (potenza di potenza):**

$$\sqrt[n]{n^{n^{3/2}}} = (n^{n^{1.5}})^{1/n} = n^{\frac{n^{1.5}}{n}} = n^{n^{0.5}} = n^{\sqrt{n}}$$

- **Il denominatore:**

$$\sqrt[n]{2^{n^2}} = (2^{n^2})^{1/n} = 2^{\frac{n^2}{n}} = 2^n$$

3. Confronto tra Infiniti Il limite è diventato:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$$

Per capire chi "vince", passiamo ai logaritmi o confrontiamo gli ordini di infinito:

- Numeratore: $\ln(n^{\sqrt{n}}) = \sqrt{n} \ln n$.
- Denominatore: $\ln(2^n) = n \ln 2$.

Per $n \to +\infty$, n (lineare) è molto più grande di $\sqrt{n} \ln n$. Quindi il denominatore 2^n domina pesantemente sul numeratore.

$$L = 0$$

4. Raggio di Convergenza e Conclusione Il raggio è $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{0} = +\infty$.

La serie converge **assolutamente per ogni** $x \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, converge anche per il valore richiesto $x = e^2$.

Esercizio 11 (Serie Astratta)

La serie è $\sum(-1)^n a_n$ con $a_n = \frac{1}{f(n)}$. Trattandosi di una serie a segni alterni, applichiamo il **Criterio di Leibniz**. La convergenza semplice è garantita se sono verificate le seguenti due condizioni sul termine generale a_n:

1. **Infinitesimo:** Il termine deve tendere a zero.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} = 0 \implies \lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$$

   Quindi $f(n)$ deve essere una successione divergente.

2. **Decrescenza:** Il termine deve essere decrescente ($a_{n+1} \le a_n$).

$$\frac{1}{f(n+1)} \le \frac{1}{f(n)} \implies f(n+1) \ge f(n)$$

   Quindi $f(n)$ deve essere una successione monotona crescente (almeno definitivamente).

Conclusione: La serie converge semplicemente se $f(n)$ è una successione positiva, crescente e divergente a $+\infty$.

Esercizio 12 (Segni Alterni)

La serie è $\sum(-1)^n \frac{n-4}{n^2+1}$.

1. **Convergenza Assoluta:** Studiamo la serie dei valori assoluti $\sum \left|\frac{n-4}{n^2+1}\right|$. Per $n \to \infty$, il termine generale è asintotico a:

$$|a_n| \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

   Poiché la serie armonica diverge, la serie **non converge assolutamente**.

2. **Convergenza Semplice:** Usiamo il Criterio di Leibniz.
   - *Infinitesimo:* $\lim \frac{n-4}{n^2+1} = 0$ (grado den. > grado num.).
   - *Decrescenza:* La derivata di $f(x) = \frac{x-4}{x^2+1}$ è negativa per x sufficientemente grandi (il numeratore della derivata è $-x^2 + 8x + 1$, che è negativo per $x > 9$).

   Quindi la serie **converge semplicemente**.

Esercizio 13 (Leibniz e Gerarchia)

La serie è $\sum(-1)^{n-1} \frac{n^3}{e^n - n^2}$. Anche qui usiamo il Criterio di Leibniz per la convergenza semplice:

1. **Infinitesimo:** Calcoliamo il limite del termine generale (senza segno):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^n - n^2} = 0$$

   Questo è vero per la **gerarchia degli infiniti**: l'esponenziale e^n al denominatore cresce infinitamente più velocemente della potenza n^3.

2. **Decrescenza:** Per n grande, il termine e^n domina, rendendo la frazione decrescente.

Conclusione: La serie converge semplicemente.

Nota: In questo caso specifico, applicando il Criterio del Rapporto al modulo, si scoprirebbe che la serie converge anche assolutamente (perché $1/e < 1$), ma Leibniz è sufficiente per rispondere alla domanda sulla convergenza semplice.

Esercizio 14 (Serie Parametrica con Fattoriale)

La serie è $\sum \frac{[x(x-1)]^n n^n}{n!}$. Posto $K = x(x-1)$, procediamo con lo studio.

Nota Metodologica (Perché la Convergenza Assoluta?): Poiché il termine $x(x-1)$ può assumere valori negativi, la serie non è a termini positivi. I criteri standard (Radice e Rapporto) si applicano solo a termini non negativi. Pertanto, applichiamo il **Criterio della Radice** al valore assoluto $|a_n|$. Se la serie converge assolutamente, allora convergerà anche semplicemente.

Calcoliamo il limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|K|^n} \cdot \sqrt[n]{n^n}}{\sqrt[n]{n!}}$$

Ricordiamo le proprietà fondamentali usate:

- $\sqrt[n]{|K|^n} = |K|$.
- $\sqrt[n]{n^n} = n$.
- $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ (Approssimazione di Stirling per $n \to +\infty$).

Sostituendo otteniamo:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|K| \cdot n}{n/e} = |K|e$$

La serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) se $L < 1$, cioè $|x^2 - x| < 1/e$. Questo sistema si divide in:

1. $x^2 - x > -1/e \implies x^2 - x + \frac{1}{e} > 0$.
   Discriminante $\Delta = 1 - 4/e < 0$ (poiché $e \approx 2.71$). Parabola sempre positiva, verificata $\forall x$.
2. $x^2 - x < 1/e \implies x^2 - x - \frac{1}{e} < 0$.
   Discriminante $\Delta = 1 + 4/e > 0$. Verificata per valori interni alle radici.

Conclusione: La serie converge per:

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 4/e}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4/e}}{2}$$

Esercizio 15 (Cancellazione di Taylor)

La serie è $\sum \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Per studiare la convergenza, dobbiamo determinare l'ordine di infinitesimo del termine generale. I limiti notevoli (Taylor al primo ordine) non sono sufficienti perché portano a una cancellazione totale $(1/n - 1/n = 0)$.

Dobbiamo sviluppare fino al **terzo ordine**:

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Sostituendo nella somma:

$$a_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

I termini lineari $1/n$ si elidono:

$$a_n = \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{n^3} = \frac{1}{6n^3}$$

Il termine generale è asintotico a $\frac{1}{6n^3}$. Trattandosi di una serie armonica generalizzata con esponente $p = 3 > 1$, la serie **converge**.

Esercizio 16 (Serie Trigonometrica Parametrica)

La serie è $\sum \sin(n^2)\cos(n\pi)\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ con $\alpha > 1$.

1. Analisi preliminare (Passo 0): Il termine generale tende a zero? Sì, perché $\sin(1/n^\alpha) \to 0$. Quindi ha senso studiare la convergenza.

2. Scelta del Metodo (Passo 1): I segni non sono costanti positivi, né alternati regolarmente (a causa di $\sin(n^2)$ che oscilla in modo irregolare). In questi casi "caotici", l'unica strada è studiare la **Convergenza Assoluta**.

3. Criterio del Confronto Asintotico sui Moduli: Studiamo $\sum |a_n|$.

- $|\sin(n^2)| \leq 1$ e $|\cos(n\pi)| = 1$.
- $|\cos(1/n)| \to 1$.
- $\sin(1/n^\alpha) \sim \frac{1}{n^\alpha}$ (Taylor).

Quindi $|a_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$.

Trattandosi di una serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$, la serie converge assolutamente (e quindi semplicemente).

Esercizio 17 (Doppio Parametro a, b)

La serie è $\sum \frac{n\sin(1/n) - a}{2^{bn}}$.

1. Analisi dettagliata del Numeratore (Taylor): Dobbiamo capire "quanto pesa" il numeratore. Sviluppiamo $\sin(x)$ con $x = 1/n$:

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Moltiplichiamo per n:

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}\right) = 1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Sostituendo nella frazione, il termine generale diventa:

$$a_n = \frac{(1 - \frac{1}{6n^2}) - a}{2^{bn}} = \frac{(1 - a) - \frac{1}{6n^2}}{2^{bn}}$$

2. Semplificazione Asintotica (Caso per Caso): Il comportamento dipende da a, ma vedremo che il parametro b è quello decisivo.

- **Caso A ($a \neq 1$):** Il termine $(1-a)$ è un numero diverso da zero. Per n grande, $-\frac{1}{6n^2}$ è trascurabile rispetto alla costante.

  $$a_n \sim \frac{1-a}{2^{bn}} = (1-a) \cdot \left(\frac{1}{2^b}\right)^n$$

  Questa è una **Serie Geometrica** di ragione $q = 1/2^b$. Converge se $|q| < 1$, cioè se $2^b > 1 \implies b > 0$.

- **Caso B ($a = 1$):** Il termine costante sparisce ($1 - 1 = 0$). Rimane il termine successivo di Taylor.

  $$a_n \sim \frac{-1/6n^2}{2^{bn}} = -\frac{1}{6n^2 2^{bn}}$$

  Anche qui, tutto dipende dall'esponenziale al denominatore.

  - Se $b > 0$, l'esponenziale al denominatore fa convergere la serie .
  - Se $b \leq 0$, l'esponenziale sparisce o va al numeratore, e la serie diverge.

Conclusione: In entrambi i casi, l'unica condizione necessaria e sufficiente per avere convergenza è che l'esponenziale al denominatore faccia il suo lavoro, ovvero che:

$$\mathbf{b > 0}$$

Il valore di a non influenza la convergenza (influenza solo la "velocità" con cui converge, ma non il risultato finale).

Esercizio 18 (Serie con Potenze di Seni)

La serie è $\sum \frac{\sin^\alpha(1/n^3)}{\sin^3(1/(n\sqrt{x}))}$ con parametro $\alpha > 0$ e x fissato ($x > 0$ per esistenza della radice e denominatore).

1. Stime Asintotiche: Utilizziamo l'equivalenza $\sin(\epsilon) \sim \epsilon$ per $\epsilon \to 0$.

- Numeratore: $\sin^\alpha(1/n^3) \sim (1/n^3)^\alpha = \frac{1}{n^{3\alpha}}$.
- Denominatore: $\sin^3\left(\frac{1}{n\sqrt{x}}\right) \sim \left(\frac{1}{n\sqrt{x}}\right)^3 = \frac{1}{n^3 x^{3/2}}$.

Mettendo insieme i pezzi, il termine generale è asintotico a:

$$a_n \sim \frac{1}{n^{3\alpha}} \cdot n^3 x^{3/2} = x^{3/2} \cdot \frac{1}{n^{3\alpha-3}}$$

La costante $x^{3/2}$ non influenza la convergenza. Ci siamo ridotti a una serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^p}$ con esponente $p = 3\alpha - 3$.

2. Risposte ai quesiti:

a) **Segno Costante:** Sì, definitivamente. Per n sufficientemente grande, gli argomenti dei seni ($1/n^3$ e $1/(n\sqrt{x})$) sono positivi e vicini a zero (nel primo quadrante), quindi i termini sono tutti positivi.

b) **Termine Infinitesimo:** Affinché $\lim a_n = 0$, è necessario che la potenza di n rimanga al denominatore, ovvero che l'esponente p sia positivo:

$$3\alpha - 3 > 0 \implies \alpha > 1$$

c) **Convergenza:** La serie armonica generalizzata converge se l'esponente $p > 1$:

$$3\alpha - 3 > 1 \implies 3\alpha > 4 \implies \alpha > \frac{4}{3}$$

Esercizio 19 (Integrazione per Sostituzione)

Calcolare $I = \int_1^2 x \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)\, dx$.

Procediamo per **sostituzione**, sfruttando il fatto che x è legato alla derivata dell'argomento della radice. Poniamo $t = \sqrt{x^2-1}$.

$$t^2 = x^2 - 1 \implies 2t\, dt = 2x\, dx \implies t\, dt = x\, dx$$

Cambiamo gli estremi di integrazione:

- Per $x = 1 \implies t = 0$.
- Per $x = 2 \implies t = \sqrt{3}$.

L'integrale diventa:

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} t \arctan(t)\, dt$$

Procediamo ora per **parti**:

$$f(t) = \arctan(t) \implies f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$
$$g'(t) = t \implies g(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{t^2}{2}\arctan(t)\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}\, dt$$

Per risolvere l'integrale razionale usiamo il trucco $+1-1$:

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{t^2+1-1}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

Quindi:

$$I = \left[\frac{t^2}{2}\arctan(t)\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\left[t - \arctan(t)\right]_0^{\sqrt{3}}$$

Sostituendo i valori ($\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$):

$$I = \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Esercizio 20a (Integrale con Logaritmo e Parametro)

Calcolare per $n \geq 1$ (il 13 è inutile) l'integrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^{n+1}}\,dx$.

Procediamo per **integrazione per parti**, scegliendo di derivare il logaritmo per eliminarlo.

$$f(x) = \log(x) \implies f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$g'(x) = x^{-n-1} \implies g(x) = \frac{x^{-n}}{-n} = -\frac{1}{nx^n}$$

Applicando la formula:

$$I = \left[-\frac{\log(x)}{nx^n}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{nx^n}\right) dx$$

Analizziamo il termine tra parentesi quadre:

- Per $x \to +\infty$: $\frac{\log(x)}{x^n} \to 0$ per gerarchia degli infiniti (dato che $n \geq 1$).
- Per $x = 1$: $\log(1) = 0$.

Il termine di bordo è nullo. Rimane l'integrale:

$$I = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}\,dx = \frac{1}{n}\left[\frac{x^{-n}}{-n}\right]_1^{+\infty}$$
$$I = \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{nx^n}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n}\left(0 - \left(-\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n^2}$$

Risultato: $\frac{1}{n^2}$.

Esercizio 20b (Trigonometrico)

Calcolare $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx$.

Utilizziamo la sostituzione $t = \sin(x)$, notando prima che possiamo riscrivere il numeratore per evidenziare la derivata:

$$\cos^3(x) = \cos^2(x) \cdot \cos(x) = (1 - \sin^2(x))\cos(x)$$

Quindi poniamo:

- $t = \sin(x) \implies dt = \cos(x)dx$
- Estremi: $x = 0 \to t = 0$ e $x = \pi/2 \to t = 1$.

L'integrale diventa:

$$I = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt$$

Scomponiamo la frazione algebrica (o eseguiamo la divisione polinomiale):

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2-(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2} - 1$$

Passiamo alle primitive:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+t^2} - 1 \right) dt = [2\arctan(t) - t]_0^1$$

Sostituendo i valori ($\arctan(1) = \pi/4$):

$$I = \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1\right) - (0 - 0) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Esercizio 21 (Sostituzione su Gaussiana)

Calcolare $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}(x + 4x^3)\, dx$.

L'integrale sembra complesso, ma notiamo che possiamo raccogliere una x dal polinomio, che rappresenta la derivata (a meno di costanti) dell'esponente $-x^2$.

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot x \cdot (1 + 4x^2)\, dx$$

Effettuiamo la sostituzione $t = x^2$:

- $dt = 2x\, dx \implies x\, dx = \frac{1}{2} dt$
- Gli estremi rimangono 0 e $+\infty$.

Sostituendo nell'integrale:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + 4t)\frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt + 2 \int_0^{+\infty} te^{-t}\, dt$$

Calcoliamo i due pezzi separatamente:

1. $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.
2. $\int_0^{+\infty} te^{-t}\, dt$ si risolve per parti ($f = t, g' = e^{-t}$):

$$\left[-te^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 0 + 1 = 1$$

(Nota: il termine di bordo va a 0 per gerarchia degli infiniti).

Sommando i risultati:

$$I = \frac{1}{2}(1) + 2(1) = \frac{5}{2}$$

Esercizio 22: Integrale Razionale

Calcolare $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\, dx$.

1. Analisi Convergenza:

- Per $x \to 0^+$: $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Converge (ordine $1/2 < 1$).
- Per $x \to +\infty$: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$. Converge (ordine $2 > 1$).

2. Calcolo: Sostituzione $t = \sqrt{x} \implies x = t^2$, $dx = 2t\,dt$.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{t + t^4}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1 + t^3}\,dt$$

Scomponiamo in fratti semplici ($1 + t^3 = (t+1)(t^2 - t + 1)$):

$$\frac{2}{1 + t^3} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt + C}{t^2 - t + 1}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $A = 2/3, B = -2/3, C = 4/3$.

$$I = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{3}\int \frac{2t - 4}{t^2 - t + 1}\,dt$$

Nel secondo integrale facciamo comparire la derivata del denominatore $(2t - 1)$:

$$\frac{2t - 4}{t^2 - t + 1} = \frac{2t - 1 - 3}{t^2 - t + 1}$$

Sostituendo e integrando:

- Parte Logaritmica: $\frac{2}{3}\log|t+1| - \frac{1}{3}\log(t^2 - t + 1) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}\right)$.
- Parte Arcotangente: Rimane $\int \frac{1}{t^2-t+1}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Valutando i limiti tra 0 e $+\infty$:

- Il termine logaritmico tende a $\log(1) = 0$ sia a 0 che a $+\infty$.
- Il termine arcotangente vale $\frac{2}{\sqrt{3}}[\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{6})] = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

Risultato: $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

Esercizio 23: Calcolo per Parti Ciclico

Studiare la convergenza e, se converge, calcolare il valore di:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x)\,dx$$

Svolgimento:

Poiché $|e^{-x}\sin(x)| \le e^{-x}$ e $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge, l'integrale converge assolutamente.
Calcoliamo la primitiva per parti (due volte):

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\sin(x)\,dx &= -e^{-x}\sin(x) - \int (-e^{-x})\cos(x)\,dx \\
&= -e^{-x}\sin(x) + \int e^{-x}\cos(x)\,dx \\
&= -e^{-x}\sin(x) + \left[-e^{-x}\cos(x) - \int (-e^{-x})(-\sin(x))\,dx\right] \\
&= -e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) - \underbrace{\int e^{-x}\sin(x)\,dx}_{I}
\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto l'equazione $I = -e^{-x}(\sin(x)+\cos(x)) - I$. Portando I a sinistra:

$$2I = -e^{-x}(\sin(x)+\cos(x)) \implies I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x)+\cos(x)) + c$$

Calcoliamo ora l'integrale definito:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x)\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{e^{-x}}{2}(\sin(x)+\cos(x))\right]_0^b \\
&= \underbrace{\lim_{b\to+\infty} -\frac{\sin(b)+\cos(b)}{2e^b}}_{0} - \left[-\frac{1}{2}(0+1)\right] \\
&= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 24

Calcolare l'integrale improprio $I = \int_0^2 \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$.

1. Studio della Convergenza

La funzione integranda $f(x)$ è continua in $(0,2]$, ma presenta una singolarità in $x=0$ dove il denominatore si annulla. Studiamo il comportamento asintotico per $x\to 0^+$ utilizzando lo sviluppo di Taylor ($e^x - 1 \sim x$):

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

Poiché l'ordine di infinito è $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, l'integrale **converge**.

2. Calcolo del Valore

Si effettua la sostituzione $t = e^x - 1$.

- Differenziale: $dt = e^x\,dx$.
- Cambio estremi:
  - Per $x = 0 \implies t = e^0 - 1 = 0$.
  - Per $x = 2 \implies t = e^2 - 1$.

Sostituendo nell'integrale:

$$I = \int_0^{e^2-1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{e^2-1} t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

Calcolando la primitiva:

$$I = \left[2\sqrt{t}\right]_0^{e^2-1} = 2\sqrt{e^2-1} - 0 = 2\sqrt{e^2-1}$$

Esercizio 25: (Studio Convergenza con Modulo)

Studiare la convergenza di $I = \int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{|x-1|}}\,dx$.

1. Analisi del dominio e del modulo Il modulo $|x-1|$ cambia espressione in $x=1$. Spezziamo l'integrale o analizziamo i casi:

- In $[0, 1]$, $|x - 1| = 1 - x$. Il denominatore si annulla se $\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 - x} \implies 1 + x^2 = 1 - x \implies x(x + 1) = 0$. L'unica singolarità nell'intervallo è a $x = 0$.
- In $[1, 2]$, la funzione è continua (il denominatore non si annulla mai).

Il problema è solo a $x \to 0^+$.

2. Stima Asintotica (Taylor a 0) Consideriamo $x \to 0$. Possiamo scrivere $|x-1| = 1-x$. Sviluppiamo i termini del denominatore con Taylor $(1+t)^{1/2} \sim 1+\frac{1}{2}t$:

$$\sqrt{1 + x^2} \sim 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\sqrt{1 - x} \sim 1 - \frac{1}{2}x$$

Il denominatore diventa:

$$D(x) \sim \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}$$

Trascuriamo x^2 perché infinitesimo di ordine superiore rispetto a x (vicino a zero, x domina su x^2).

$$D(x) \sim \frac{x}{2}$$

La funzione integranda completa è asintotica a:

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{x/2} = \frac{2}{x^{1/2}}$$

3. Conclusione Poiché l'esponente è $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, l'integrale **converge**. **Nota sull'intervallo** $[1, 2]$**:** Verifichiamo se ci sono problemi per $x \geq 1$. Sostituendo $x = 1$, la funzione vale $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, che è un valore finito. Inoltre, per $x > 1$, l'equazione $1 + x^2 = x - 1$ non ha soluzioni reali ($\Delta < 0$).

Di conseguenza, nell'intervallo $[1, 2]$ la funzione è limitata e continua. L'integrale in questo tratto è un integrale di Riemann standard (esiste finito sicuramente) e non influisce sulla convergenza dell'integrale improprio.

Risultato finale: L'integrale converge (determinato unicamente dal comportamento in $x = 0$).

Esercizio 26

Calcolare $I = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x \log(x)(\log(\log(x)))^2}\,dx$.

1. Studio della Convergenza La funzione è definita e continua in $[3, +\infty)$. Per $x \to +\infty$, usiamo il confronto generalizzato (Scala di Abel-Bertrand):

$$f(x) = \frac{1}{x \log(x)(\log(\log x))^p}$$

Poiché l'esponente dell'ultimo logaritmo è $p = 2 > 1$, la funzione decresce abbastanza velocemente. L'integrale **converge**.

2. Calcolo (Sostituzione $t = \log(x)$) Procediamo per gradi sostituendo il primo logaritmo. Poniamo $t = \log(x)$.

- Differenziale: $dt = \frac{1}{x}\,dx$.
- Estremi:
  - $x = 3 \implies t = \log(3)$.
  - $x \to +\infty \implies t \to +\infty$.

L'integrale si semplifica notevolmente:

$$I = \int_{\log(3)}^{+\infty} \frac{1}{t(\log(t))^2}\,dt$$

Ora l'integrale è immediato, della forma $\int f(t)^{-2} \cdot f'(t)\,dt$ (dove $f(t) = \log t$ e la derivata è $1/t$). La primitiva è $\frac{(\log t)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{\log t}$.

$$I = \left[-\frac{1}{\log(t)}\right]_{\log(3)}^{+\infty}$$

Sostituendo gli estremi:

$$I = \underbrace{\lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{\log(k)}\right)}_{0} - \left(-\frac{1}{\log(\log(3))}\right) = \frac{1}{\log(\log(3))}$$

Esercizio 27 (Studio completo al variare di λ)
Studiare la convergenza di $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\lambda}\,dx$.

1. Il "pericolo" dell'asintoto verticale L'integrale presenta una singolarità se il denominatore si annulla all'interno del dominio di integrazione $[1, +\infty)$. Risoviamo $x^2 + \lambda = 0 \implies x^2 = -\lambda$. Questo ha soluzioni reali solo se $\lambda \leq 0$, date da $x_{sing} = \sqrt{-\lambda}$.

Dobbiamo verificare se questa singolarità cade nel nostro percorso ($x \geq 1$):

$$x_{sing} \geq 1 \iff \sqrt{-\lambda} \geq 1 \iff -\lambda \geq 1 \iff \lambda \leq -1$$

Quindi distinguiamo tre casi fondamentali:

- **CASO A: $\lambda > -1$ (Nessun ostacolo)**
  - Se $\lambda > 0$, il denominatore è sempre positivo.
  - Se $-1 < \lambda \leq 0$, l'asintoto esiste (es. $x = 0.5$) ma cade *prima* di 1, fuori dal nostro integrale.

  In questo caso l'unica analisi è a $+\infty$. Poiché $f(x) \sim 1/x^2$, l'integrale **CONVERGE**.
- **CASO B: $\lambda = -1$ (Problema all'estremo)** L'integrale diventa $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}dx$. C'è una singolarità a $x = 1$. Scomponiamo il denominatore: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Per $x \to 1^+$:

  $$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)} \sim \frac{1}{(x-1)(2)} = \frac{1}{2(x-1)}$$

  L'ordine di infinito è $\alpha = 1$. L'integrale **DIVERGE**.

- **CASO C:** $\lambda < -1$ **(Problema interno)** L'asintoto cade dentro l'intervallo (es. per $\lambda = -4$, asintoto a $x = 2$). La funzione non è integrabile in senso improprio attraverso un asintoto verticale di ordine 1. L'integrale **DIVERGE**.

Risultato: L'integrale converge se e solo se $\lambda > -1$.

Richiamo teorico

Quando integriamo su un intervallo $[a, +\infty)$, dobbiamo garantire che "la strada sia libera".

Se la funzione ha un asintoto verticale (un "muro" infinito) in un punto c interno all'intervallo ($a < c < +\infty$), l'integrale si deve spezzare:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

Per le funzioni razionali standard (rapporti di polinomi), gli asintoti sono quasi sempre del primo ordine (tipo $\frac{1}{x-c}$). Poiché l'ordine è 1 (e $1 \geq 1$), l'integrale in quel punto **DIVERGE** sempre.

In sintesi: Se trovi un asintoto in mezzo al cammino $\implies$ DIVERGE.

Esercizio 28

Discutere la convergenza di $I = \int_1^{+\infty} \frac{2+\sin(x)}{x^\alpha} dx$ al variare di α.

Ragionamento: Non possiamo usare il confronto asintotico standard (il limite $\sim$ non esiste a causa dell'oscillazione del seno). Usiamo il **Criterio del Confronto Diretto** sfruttando la limitatezza del numeratore.

Sappiamo che $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, quindi sommando 2:

$$1 \leq 2 + \sin(x) \leq 3$$

Dividendo tutto per x^α (che è positivo in $[1, +\infty)$):

$$\frac{1}{x^\alpha} \leq f(x) \leq \frac{3}{x^\alpha}$$

Analizziamo i casi:

- **Se** $\alpha > 1$**:** L'integrale improprio della maggiorante $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^\alpha} dx$ **converge**. Per il criterio del confronto, anche il nostro integrale **converge**.
- **Se** $\alpha \leq 1$**:** L'integrale improprio della minorante $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ **diverge** (a $+\infty$). Essendo $f(x)$ più grande di una funzione divergente, anche il nostro integrale **diverge**.

Risultato: Converge per $\alpha > 1$, diverge per $\alpha \leq 1$.

Esercizio 29

Data $f(x) = \frac{1+x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$ per $x > 0$, studiare l'integrabilità in senso improprio su $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$ di $f(x)$ e di una sua primitiva $F(x)$.

1. Semplificazione e Studio di $f(x)$ Prima di tutto, riscriviamo la funzione sfruttando le potenze:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} + 1 = x^{-3/2} + 1 = \frac{1}{x^{1.5}} + 1$$

Analizziamo l'integrale di $f(x)$:

- **Su** $(0, 1)$**:** Per $x \to 0^+$, il termine dominante è $\frac{1}{x^{1.5}}$. Essendo l'esponente $\alpha = 1.5 > 1$, l'integrale **DIVERGE** (positivamente).
- **Su** $(1, +\infty)$**:** Per $x \to +\infty$, $f(x) \to 1$. Poiché il limite non è 0, la condizione necessaria per la convergenza cade. L'integrale **DIVERGE**.

2. Calcolo e Studio della primitiva $F(x)$ Calcoliamo esplicitamente la primitiva (integrale indefinito):

$$F(x) = \int (x^{-3/2} + 1)\, dx = \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + x = -2\frac{1}{\sqrt{x}} + x$$

Possiamo ignorare la costante C per lo studio della convergenza.

Ora studiamo l'integrabilità di $F(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x}}$:

- **Su** $(0, 1)$**:** Dobbiamo valutare $\int_0^1 \left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$. Il termine x non crea problemi. Il termine pericoloso è $-\frac{2}{x^{0.5}}$. Poiché l'esponente della singolarità è $\alpha = 0.5 < 1$, questo termine è integrabile. Quindi l'integrale di $F(x)$ **CONVERGE**.
- **Su** $(1, +\infty)$**:** Dobbiamo valutare $\int_1^{+\infty} \left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$. Per $x \to +\infty$, il termine dominante è x (che va all'infinito). Ovviamente, integrare una funzione che tende a infinito su un dominio infinito porta a divergenza. Quindi l'integrale di $F(x)$ **DIVERGE**.

Sintesi:

Funzione	Intervallo $(0, 1)$	Intervallo $(1, +\infty)$
$f(x)$	Diverge ($\alpha > 1$)	Diverge ($\lim \neq 0$)
$F(x)$	**Converge** ($\alpha < 1$)	Diverge (polinomiale)

Riepilogo Strategico: La "Tabella della Verità"

Quando studiamo la convergenza di $\frac{1}{x^\alpha}$, le regole si invertono a seconda che il problema sia a zero o all'infinito. Ecco lo schema definitivo per non sbagliare:

Dove siamo?	Chi "comanda"? (Gerarchia)	Convergenza ($\int \frac{1}{x^\alpha}$)
o **A** $+\infty$	Vincono le potenze **GRANDI**. (Es: x^2 domina su x).	Converge se $\boldsymbol{\alpha > 1}$ (Serve andare a zero velocemente)
A 0^+	Vincono le potenze **PICCOLE** (o negative). (Es: $\frac{1}{x^2}$ domina su $\frac{1}{x}$).	Converge se $\boldsymbol{\alpha < 1}$ (L'asintoto non deve essere troppo "ripido")

Nota bene: Nel confronto asintotico ($\sim$), manteniamo sempre il termine che "vince" secondo questa gerarchia e studiamo solo quello.

Esercizio 30 (Calcolo diretto di limite integrale)

Calcolare $I_a = \int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx$ con $a > 1$, e successivamente il limite per $a \to 1^+$.

1. Calcolo della Primitiva Usiamo la sostituzione $t = \sqrt{x}$.

- $x = t^2 \implies dx = 2t\,dt$.

L'integrale diventa:

$$\int \frac{1}{t-1} \cdot 2t\,dt = 2 \int \frac{t}{t-1}\,dt$$

Trucco algebrico (sommo e sottraggo 1 al numeratore):

$$\frac{t}{t-1} = \frac{t-1+1}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}$$

Quindi integriamo:

$$2 \int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = 2t + 2\ln|t-1|$$

Tornando alla variabile x:

$$F(x) = 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}-1|$$

2. Calcolo dell'Integrale definito I_a Valutiamo tra a e 2:

$$I_a = F(2) - F(a) = \left[2\sqrt{2} + 2\ln(\sqrt{2}-1)\right] - \left[2\sqrt{a} + 2\ln(\sqrt{a}-1)\right]$$

3. Limite per $a \to 1^+$ Analizziamo il termine problematico quando $a \to 1^+$:

$$\lim_{a \to 1^+} \ln(\underbrace{\sqrt{a}-1}_{\to 0^+}) = -\infty$$

Sostituendo nel limite completo:

$$\lim_{a\to 1^+} I_a = \text{Costante} - [2(1) + 2(-\infty)] = \text{Costante} - (-\infty) = +\infty$$

Risultato: L'integrale diverge a $+\infty$.

Esercizio 31 (Parametro n)

Calcolare $I_a(n) = \int_a^2 \frac{1}{(x-1)^{1/n}}\, dx$ (con $n > 1$) e il limite per $a \to 1^+$.

1. Riscriviamo la funzione come potenza

$$f(x) = (x-1)^{-1/n}$$

Questa è una potenza standard del tipo $(x-1)^\alpha$ con $\alpha = -\frac{1}{n}$.

2. Calcolo della Primitiva Poiché $n > 1$, allora $\alpha \neq -1$, quindi usiamo la regola della potenza $\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}$:

- Nuovo esponente: $-\frac{1}{n} + 1 = \frac{n-1}{n}$.
- Coefficiente moltiplicativo (l'inverso dell'esponente): $\frac{n}{n-1}$.

La primitiva è:

$$F(x) = \frac{n}{n-1}(x-1)^{\frac{n-1}{n}}$$

3. Calcolo dell'integrale definito $I_a(n)$

$$I_a(n) = F(2) - F(a) = \frac{n}{n-1}\left[(2-1)^{\frac{n-1}{n}} - (a-1)^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

Poiché $(1)^{\text{qualsiasi cosa}} = 1$:

$$I_a(n) = \frac{n}{n-1}\left[1 - (a-1)^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

4. Limite per $a \to 1^+$ Passiamo al limite:

$$\lim_{a\to 1^+} I_a(n) = \frac{n}{n-1}\left[1 - \underbrace{(1-1)^{\frac{n-1}{n}}}_{0}\right]$$

Nota: Il termine $(a-1)^{\frac{n-1}{n}}$ tende a 0 perché l'esponente $\frac{n-1}{n}$ è positivo (dato che $n > 1$).

Risultato: L'integrale converge a $\frac{n}{n-1}$.

Esercizio 32

Calcolare $I_n = \int_0^1 x^n \log(x)\, dx$ e il limite per $n \to +\infty$.

1. Calcolo della Primitiva $F(x)$ Calcoliamo l'integrale indefinito $\int x^n \log(x) dx$ per parti:

- $f = \log(x) \implies f' = 1/x$
- $g' = x^n \implies g = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$
\begin{aligned}
\int x^n \log(x)dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\log(x) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1}\log(x) - \frac{1}{n+1}\int x^n dx \\
F(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\log(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}
\end{aligned}
$$

2. Calcolo dell'Integrale definito Applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo: $I_n = [F(x)]_0^1 = F(1) - \lim_{x\to 0^+} F(x)$.

- **Valutazione a $x = 1$:**

$$
F(1) = \frac{1}{n+1}\cdot 0 - \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{(n+1)^2}
$$

- **Valutazione a $x \to 0^+$:**

$$
\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x^{n+1}\log(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]
$$

  Il termine $x^{n+1}\log(x)$ tende a 0 (gerarchia infiniti: la potenza vince sul logaritmo). Il termine $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ tende ovviamente a 0. Quindi $\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$.

Risultato:

$$
I_n = -\frac{1}{(n+1)^2} - 0 = -\frac{1}{(n+1)^2}
$$

3. Limite della successione

$$
\lim_{n\to+\infty} I_n = 0
$$

Esercizio 33: Parametrico Esponenziale

Al variare di $m \in \mathbb{Z}$, studiare e calcolare:

$$
\int_{e^m}^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\,dx
$$

Svolgimento:

L'integranda è definita e continua in $[e^m, +\infty)$. Procediamo per parti:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\log(x)}{x^2}\,dx \quad & \text{pongo } f(x) = \log(x) \implies f'(x) = 1/x \\
& \text{pongo } g'(x) = x^{-2} \implies g(x) = -1/x \\
&= -\frac{\log(x)}{x} - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= -\frac{\log(x)}{x} + \int x^{-2}\,dx \\
&= -\frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{x} + c \\
&= -\frac{1}{x}\left[\log(x) + 1\right] + c
\end{aligned}
$$

Calcoliamo l'integrale improprio:

$$\begin{aligned}
\int_{e^m}^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}(\log(x)+1)\right]_{e^m}^{b} \\
&= \underbrace{\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\log(b)+1}{b}\right)}_{=0} - \left[-\frac{1}{e^m}(\log(e^m)+1)\right] \\
&= \frac{1}{e^m}(m+1) = \frac{m+1}{e^m}
\end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'integrale improprio:

$$\begin{aligned}
\int_{e^m}^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\log(x)+1}{x}\right]_{e^m}^{b} \\
&= \underbrace{\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\log(b)+1}{b}\right)}_{=0 \text{ (gerarchia infiniti)}} - \left(-\frac{\log(e^m)+1}{e^m}\right) \\
&= \frac{m+1}{e^m}
\end{aligned}$$

Esercizio 34

Studiare la convergenza e calcolare $I(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha(\log(x))^2\,dx$. **1. Studio preliminare della convergenza** La funzione integranda è $f(x) = x^\alpha(\log x)^2$. Il dominio è $(0,1]$ e l'unica singolarità si trova in $x = 0$.

Studiamo il comportamento asintotico per $x \to 0^+$:

- Il termine $(\log x)^2$ tende a $+\infty$, ma è un "infinito lento" (più lento di qualsiasi potenza negativa).
- Possiamo riscrivere $f(x)$ come:

$$f(x) = \frac{(\log x)^2}{x^{-\alpha}}$$

Ricordiamo l'Integrale Improprio Notevole (test di Abel-Dirichlet generalizzato): L'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^p|\log x|^q}\,dx$ converge se:

1. $p < 1$ (indipendentemente da q)
2. $p = 1$ e $q > 1$

Nel nostro caso, possiamo riscrivere la funzione per farla combaciare con il modello:

$$x^\alpha(\log x)^2 = \frac{1}{x^{-\alpha}(\log x)^{-2}}$$

Quindi abbiamo $p = -\alpha$.

La condizione di convergenza principale ($p < 1$) diventa:

$$-\alpha < 1 \implies \alpha > -1$$

Se siamo nel caso limite $\alpha = -1$ (cioè $p = 1$), guardiamo l'esponente del logaritmo $q = -2$. Poiché -2 non è maggiore di 1, in questo caso diverge.

Conclusione: L'integrale converge se e solo se $\boldsymbol{\alpha > -1}$. **2. Studio della Convergenza** L'integrale è improprio a $x = 0$. Per $x \to 0^+$, il termine $(\log x)^2$ tende a $+\infty$ ma molto lentamente (è un "infinito debole"). La convergenza è determinata dalla potenza x^α.

Affinché l'area sia finita, l'esponente di x deve essere maggiore di -1 (se fosse $\alpha \leq -1$, la singolarità sarebbe non integrabile).

$$\text{Converge per } \alpha > -1$$

2. Calcolo dell'Integrale (per parti due volte) Assumiamo $\alpha > -1$. Procediamo per parti derivando il logaritmo.

Primo passaggio:

- $f(x) = (\log x)^2 \implies f'(x) = 2\log(x) \cdot \frac{1}{x}$
- $g'(x) = x^\alpha \implies g(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

$$I = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log x)^2\right]_0^1 - \frac{2}{\alpha+1}\int_0^1 x^\alpha \log(x)\, dx$$

Il termine tra parentesi quadre è nullo:

- A $x = 1$: $\log(1) = 0$.
- A $x \to 0^+$: $\lim x^{\alpha+1}(\log x)^2 = 0$ (perché $\alpha + 1 > 0$, la potenza vince sul logaritmo).

Resta:

$$I = -\frac{2}{\alpha+1}\int_0^1 x^\alpha \log(x)\, dx$$

Secondo passaggio (integriamo $\int x^\alpha \log x$): Applicando di nuovo per parti sullo stesso schema:

$$\int_0^1 x^\alpha \log(x)\, dx = \underbrace{\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x\right]_0^1}_{0} - \int_0^1 \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 x^\alpha\, dx = -\frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

3. Risultato Finale Sostituiamo questo risultato nell'espressione di I:

$$I(\alpha) = -\frac{2}{\alpha+1} \cdot \left(-\frac{1}{(\alpha+1)^2}\right) = \frac{2}{(\alpha+1)^3}$$

Risultato: L'integrale converge per $\alpha > -1$ e vale $\frac{2}{(\alpha+1)^3}$.

Esercizio 35

Determinare per quali λ converge l'integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+\lambda x^2+1}\,dx$$

1. Convergenza all'infinito Per $x \to +\infty$, il termine dominante al denominatore è x^4.

$$f(x) \sim \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

Poiché l'esponente $2 > 1$, l'integrale converge sempre nella "coda" all'infinito, per qualsiasi λ.

2. Analisi delle singolarità (Il "buco" nel dominio) Dobbiamo verificare se il denominatore si annulla nell'intervallo di integrazione $[1, +\infty)$. Poniamo $t = x^2$ e studiamo $t^2 + \lambda t + 1 = 0$.

Le radici sono date da:

$$t_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

Analizziamo i casi per λ:

- **Caso A:** $\lambda > -2$
  - Se $|\lambda| < 2$ (cioè $-2 < \lambda < 2$), il delta $\lambda^2 - 4$ è negativo. Non ci sono radici reali. Il denominatore non si annulla mai.
  - Se $\lambda \geq 2$, il delta è positivo, ma le soluzioni sarebbero negative (impossibile per $t = x^2$) oppure non reali. Inoltre per $\lambda > 0$ il denominatore è somma di termini positivi.

  Conclusione A: Per $\lambda > -2$, il denominatore è sempre positivo. L'integrale **CONVERGE**.

- **Caso B:** $\lambda \leq -2$ In questo caso il delta è positivo ($\lambda^2 - 4 \geq 0$) e ci sono due soluzioni reali per t. Dobbiamo capire se queste soluzioni corrispondono a una $x \geq 1$.

  Consideriamo la soluzione più grande t_1:

  $$t_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

  Verifichiamo se $t_1 \geq 1$ (ricordando che λ è un numero negativo, es. -3, -4...):

  $$\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \geq 1 \iff -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4} \geq 2$$

  $$\sqrt{\lambda^2 - 4} \geq 2 + \lambda$$

  Poiché $\lambda \leq -2$, il termine a destra $(2 + \lambda)$ è ≤ 0, mentre la radice è ≥ 0. Una quantità positiva è sempre maggiore di una negativa.

  Quindi esiste sempre una radice $t_1 \geq 1$, che corrisponde a un punto $x_0 = \sqrt{t_1} \geq 1$ in cui il denominatore si annulla. In questo punto la funzione esplode come un polo semplice $(1/(x - x_0))$, che non è integrabile. **Conclusione B:** Per $\lambda \leq -2$, l'integrale **DIVERGE**.

Risultato Finale: L'integrale converge se e solo se:

$$\lambda > -2$$

Esercizio 36

Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{x\log(2+x)}{x^3+1}\,dx$.

L'integrale presenta due zone da analizzare: l'intorno di $+\infty$ e l'estremo sinistro $x = -1$ (dove il denominatore si annulla).

1. Studio a $+\infty$ Per $x \to +\infty$:

- Il numeratore si comporta come $x \log x$.
- Il denominatore si comporta come x^3.

$$f(x) \sim \frac{x\log x}{x^3} = \frac{\log x}{x^2}$$

Poiché l'esponente al denominatore è $2 > 1$, la presenza del logaritmo non disturba la convergenza (è un "infinito debole"). L'integrale **CONVERGE** a $+\infty$.

2. Studio a $x \to -1^+$ **(La "finta" singolarità)** Valutiamo il limite della funzione. Sostituendo $x = -1$ otteniamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Usiamo le stime asintotiche ponendo $t = x + 1$ (quindi $x = t - 1$) con $t \to 0^+$.

- **Numeratore:** $x\log(2+x) \approx -1\cdot\log(1+(x+1))$. Ricordando che $\log(1+y) \sim y$, abbiamo:
$$\text{Num} \sim -1 \cdot (x+1) = -(x+1)$$
- **Denominatore:** Scomponiamo la somma di cubi: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$. Il secondo fattore tende a $(-1)^2 - (-1) + 1 = 3$.
$$\text{Den} \sim 3(x+1)$$

Mettendo tutto insieme:

$$f(x) \sim \frac{-(x+1)}{3(x+1)} = -\frac{1}{3}$$

Poiché il limite è **finito** (la funzione non esplode), la singolarità è eliminabile. L'integrale in un intorno limitato di una funzione limitata esiste sempre. Quindi **CONVERGE** anche a -1.

Risultato: L'integrale converge globalmente.

Esercizio 37

Studiare la convergenza e calcolare:

$$I = \int_1^2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{x-1}} + \frac{\beta}{\sqrt[3]{2-x}}\right) dx$$

L'integrale è improprio in entrambi gli estremi:

- A $x = 1$ diverge il primo termine.
- A $x = 2$ diverge il secondo termine.

Per la linearità dell'integrale, possiamo studiare i due addendi separatamente. L'integrale totale esiste se e solo se entrambi convergono.

1. Studio della Convergenza Ricordiamo la regola per le singolarità al finito: $\int_a^b \frac{1}{|x-c|^p}\,dx$ converge se $p < 1$.

- **Primo termine:** $\frac{\alpha}{(x-1)^{1/2}}$. L'esponente è $p = 1/2$. Poiché $1/2 < 1$, questo termine converge per ogni α.
- **Secondo termine:** $\frac{\beta}{(2-x)^{1/3}}$. L'esponente è $p = 1/3$. Poiché $1/3 < 1$, anche questo termine converge per ogni β.

Conclusione: L'integrale converge per **qualsiasi valore** di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Calcolo dell'Integrale Calcoliamo le primitive separatamente usando la regola della potenza $\int y^n = \frac{y^{n+1}}{n+1}$.

- Per il primo termine:

$$\int \alpha(x-1)^{-1/2}\,dx = \alpha\frac{(x-1)^{1/2}}{1/2} = 2\alpha\sqrt{x-1}$$

- Per il secondo termine (attenzione al segno meno della derivata interna di $2-x$):

$$\int \beta(2-x)^{-1/3}\,dx = -\beta\frac{(2-x)^{2/3}}{2/3} = -\frac{3}{2}\beta\sqrt[3]{(2-x)^2}$$

Uniamo i pezzi e valutiamo tra 1 e 2:

$$I = \left[2\alpha\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\beta\sqrt[3]{(2-x)^2}\right]_1^2$$

Sostituiamo gli estremi:

- A $x = 2$: $2\alpha\sqrt{1} - \frac{3}{2}\beta(0) = 2\alpha$
- A $x = 1$: $2\alpha(0) - \frac{3}{2}\beta\sqrt[3]{1} = -\frac{3}{2}\beta$

$$I = (2\alpha) - \left(-\frac{3}{2}\beta\right) = 2\alpha + \frac{3}{2}\beta$$

Esercizio 38

Determinare l'insieme di definizione di $F(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{t\sqrt{3-t}}\,dt$.

Sia $f(t) = \frac{\log(1+t^2)}{t\sqrt{3-t}}$.

1. Dominio dell'integranda $f(t)$ Dobbiamo imporre le condizioni di esistenza:

- Argomento del logaritmo: $1 + t^2 > 0$ (Sempre verificato).
- Denominatore diverso da zero: $t \neq 0$.
- Argomento della radice (al denominatore): $3 - t > 0 \implies t < 3$.

Il dominio naturale di $f(t)$ è $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$.

La funzione integrale parte da $x_0 = 0$. Dobbiamo analizzare il comportamento agli estremi del dominio di $f(t)$ per vedere se l'integrale converge (e quindi il punto viene "inglobato" nel dominio di F) o diverge.

2. Studio della singolarità in $t = 0$ (Punto di partenza) La funzione non è definita in $t = 0$, ma vediamo il limite per $t \to 0$: Ricordando che $\log(1 + t^2) \sim t^2$:

$$\lim_{t\to 0} f(t) \sim \frac{t^2}{t\sqrt{3}} = \frac{t}{\sqrt{3}} = 0$$

La funzione ha una **discontinuità eliminabile** in 0. Essendo prolungabile con continuità, l'integrale a 0 converge tranquillamente. Quindi possiamo "passare attraverso" lo zero.

3. Studio della singolarità in $t = 3$ (Estremo destro) Vediamo come si comporta l'integrale vicino a 3^-:

$$f(t) = \frac{\log(1 + t^2)}{t\sqrt{3 - t}} \sim \frac{\log(10)}{3 \cdot (3 - t)^{1/2}} \quad (\text{per } t \to 3)$$

Si comporta come $\frac{1}{(3-t)^{1/2}}$. Poiché l'esponente è $1/2 < 1$, l'integrale **CONVERGE** in 3. Quindi $x = 3$ fa parte del dominio. Ovviamente per $x > 3$ la funzione non esiste, quindi ci fermiamo lì.

4. Studio a sinistra ($t < 0$) Per $t < 0$, la funzione $f(t)$ è continua ovunque e non ci sono altri punti problematici fino a $-\infty$. Nota: Per il dominio di definizione non ci interessa se $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ sia finito o no, ci basta che per ogni x finito l'integrale esista. Poiché la funzione è continua su $(-\infty, 0)$, l'integrale esiste per ogni $x < 0$.

Conclusione L'intervallo massimale che contiene lo 0 e su cui l'integranda è integrabile è:

$$D_F = (-\infty, 3]$$

Esercizio 39

Studiare la convergenza assoluta di $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan(x^\beta)}{x^\alpha}\,dx$ con $\alpha, \beta > 0$.

La funzione integranda è positiva nell'intervallo $(0, 1]$, quindi la convergenza assoluta coincide con quella semplice. L'unica singolarità possibile è a $x = 0$ (il denominatore si annulla). A $x = 1$ la funzione è definita e continua ($\tan(1)$ è un valore finito).

Analisi Asintotica a $x \to 0^+$ Utilizziamo lo sviluppo asintotico della tangente: $\tan(y) \sim y$ per $y \to 0$. Poiché $\beta > 0$, l'argomento x^β tende a 0, quindi:

$$\tan(x^\beta) \sim x^\beta$$

Sostituiamo nell'integranda:

$$f(x) \sim \frac{x^\beta}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-\beta}}$$

Condizione di Convergenza Siamo ricondotti all'integrale notevole $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, che converge se l'esponente $p < 1$. Nel nostro caso $p = \alpha - \beta$.

Imponiamo la condizione:

$$\alpha - \beta < 1 \implies \alpha < \beta + 1$$

Risultato: L'integrale converge per tutti gli $\alpha, \beta > 0$ tali che $\alpha < \beta + 1$.

Esercizio 40

Studiare la convergenza per $a \geq 0$ della funzione $f(x) = \frac{e^{ax} - \cos(x)}{x^a}$ sui due intervalli:

1. Intervallo $(1, +\infty)$ **(Studio all'Infinito)** Analizziamo il comportamento asintotico per $x \to +\infty$.

- **Se** $a > 0$**:** Il termine dominante al numeratore è l'esponenziale e^{ax}, che cresce molto più velocemente del coseno (limitato). Il denominatore è una potenza x^a. Per la gerarchia degli infiniti, l'esponenziale vince su qualsiasi potenza:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^a} = +\infty$$

  La funzione integranda diverge a $+\infty$ (non va nemmeno a zero!), quindi la condizione necessaria per la convergenza non è soddisfatta. L'integrale **DIVERGE**.

- **Se** $a = 0$**:** La funzione diventa:

$$f(x) = \frac{e^0 - \cos x}{x^0} = 1 - \cos x$$

  Questa è una funzione periodica e limitata che oscilla tra 0 e 2. Non tendendo a 0 all'infinito, l'integrale **DIVERGE**.

Risultato su $(1, +\infty)$**:** L'integrale diverge per ogni $a \geq 0$.

---

2. Intervallo $(0, \pi)$ **(Studio della Singolarità a 0)** Qui il problema è il limite per $x \to 0^+$. Dobbiamo usare gli sviluppi di Taylor per capire l'ordine di infinitesimo del numeratore, dato che $e^0 - \cos(0) = 1 - 1 = 0$ (forma 0/0).

Sviluppi di Taylor (per $x \to 0$):

- $e^{ax} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + o(x^2)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Sostituiamo nel numeratore:

$$\text{Num} = \left(1 + ax + \frac{a^2x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = ax + \frac{1}{2}(a^2 + 1)x^2 + o(x^2)$$

Ora dobbiamo distinguere due casi in base al valore di a (perché se $a = 0$ il termine lineare sparisce):

- **Caso** $a > 0$**:** Il termine dominante del numeratore è quello di grado più basso: ax. Quindi la funzione si comporta come:

$$f(x) \sim \frac{ax}{x^a} = a\frac{1}{x^{a-1}}$$

Per il criterio di convergenza $\int \frac{1}{x^p}$, serve che l'esponente $p < 1$.

$$a - 1 < 1 \implies a < 2$$

Quindi converge per $0 < a < 2$.

- **Caso** $a = 0$**:** Il termine lineare ax diventa 0. Il numeratore inizia col termine quadratico:

$$\text{Num} \approx \frac{1}{2}(0+1)x^2 = \frac{x^2}{2}$$

Il denominatore è $x^0 = 1$.

$$f(x) \sim \frac{x^2}{2} \to 0$$

La funzione non ha singolarità (tende a 0), quindi l'integrale **CONVERGE**.

Risultato su $(0, \pi)$**:** L'integrale converge se e solo se:

$$0 \le a < 2$$

Esercizio 41

Data la funzione $\Phi(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha x)}\, dx$, studiarne la convergenza e il limite per $\alpha \to 0^+$.

1. Studio della Convergenza La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{\cosh(\alpha x)}$ è pari e sempre positiva. Possiamo studiare l'integrale su $[0, +\infty)$.

Ricordiamo la definizione: $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$. Per $x \to +\infty$ (con $\alpha > 0$), domina l'esponenziale positivo:

$$\cosh(\alpha x) \sim \frac{e^{\alpha x}}{2}$$

Quindi l'integranda si comporta come:

$$f(x) \sim \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\alpha x}} = 2e^{-\alpha x}$$

L'integrale di un esponenziale e^{-kx} converge all'infinito se e solo se l'esponente è negativo (cioè $k > 0$). Qui abbiamo $-\alpha x$, quindi converge per ogni $\alpha > 0$. (Se $\alpha = 0$, $\cosh(0) = 1$ e l'integrale di una costante su $\mathbb{R}$ diverge).

2. Calcolo dell'Integrale Per calcolare $\Phi(\alpha)$ esplicitamente, usiamo la sostituzione:

$$t = \alpha x \implies dx = \frac{1}{\alpha}\, dt$$

Gli estremi di integrazione rimangono $-\infty$ e $+\infty$ (dato che $\alpha > 0$).

$$\Phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh t} \cdot \frac{1}{\alpha}\, dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\cosh t}$$

Calcoliamo l'integrale noto $\int \frac{1}{\cosh t}\,dt$:

$$\frac{1}{\cosh t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^t}{e^{2t}+1}$$

Ponendo $u = e^t$ (quindi $du = e^t dt$):

$$\int \frac{2}{u^2+1}\,du = 2\arctan(u) = 2\arctan(e^t)$$

Valutiamo tra $-\infty$ e $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\cosh t} = \left[2\arctan(e^t)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

- Per $t \to +\infty$, $e^t \to +\infty \implies \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.
- Per $t \to -\infty$, $e^t \to 0 \implies \arctan(0) = 0$.

Valore dell'integrale puro: $2(\frac{\pi}{2} - 0) = \pi$.

Quindi la nostra funzione integrale vale:

$$\Phi(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha}$$

3. Calcolo del Limite Ora il limite è immediato:

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \Phi(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\pi}{\alpha} = +\infty$$

Esercizio 42

Data la funzione $\Phi(\alpha) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\alpha x+1}\,dx$, studiarne la convergenza e calcolare il limite per $\alpha \to 2$.

1. Studio della Convergenza Analizziamo il denominatore $D(x) = x^2 + \alpha x + 1$. Dato che siamo interessati al limite per $\alpha \to 2$, consideriamo $\alpha > 0$.

- **Singolarità:** Le radici di $x^2 + \alpha x + 1 = 0$ sono reali solo se $\Delta \geq 0$ ($\alpha \geq 2$) o complesse se $\Delta < 0$ ($0 < \alpha < 2$). In ogni caso, per $\alpha > 0$, le eventuali radici reali sarebbero negative (regola dei segni di Cartesio: $+ + + \to$ nessuna variazione $\to$ radici negative). Poiché integriamo in $[1, +\infty)$, il denominatore non si annulla mai nell'intervallo.
- **Comportamento a $+\infty$:**
$$f(x) \sim \frac{1}{x^2}$$
Poiché l'esponente $2 > 1$, l'integrale **CONVERGE** per ogni α in un intorno di 2.

2. Calcolo del Limite per $\alpha \to 2$ Grazie alla convergenza uniforme (o semplicemente per continuità dell'integrale rispetto al parametro in assenza di singolarità), possiamo scambiare il limite con l'integrale:

$$L = \lim_{\alpha \to 2} \Phi(\alpha) = \int_1^{+\infty} \left(\lim_{\alpha \to 2} \frac{1}{x^2 + \alpha x + 1} \right) dx$$

Sostituendo $\alpha = 2$ nell'integranda:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

L'integrale diventa immediato:

$$L = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} \, dx$$

La primitiva di $(x+1)^{-2}$ è $-(x+1)^{-1} = -\frac{1}{x+1}$.
Valutiamo tra 1 e $+\infty$:

$$L = \left[-\frac{1}{x+1} \right]_1^{+\infty}$$

- A $+\infty$: tende a 0.
- A 1: vale $-\frac{1}{2}$.

$$L = 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 43

Data la funzione integrale $I(\lambda) = \int_\lambda^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)\log^2(x^2+1)} \, dx$.

1. Studio della Convergenza L'integrale è improprio a $+\infty$ e potenzialmente nell'estremo inferiore se $\lambda \leq 0$.

- **A $+\infty$ (Convergenza):** Per $x \to +\infty$, il numeratore è x e il denominatore è circa $x^2 \log^2(x^2)$.

$$f(x) \sim \frac{x}{x^2 (2 \log x)^2} \sim \frac{1}{4x \log^2 x}$$

  Questo rientra nel caso degli integrali generalizzati $\int \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}$. Con $\alpha = 1$, converge se $\beta > 1$. Qui $\beta = 2$, quindi l'integrale **CONVERGE** a $+\infty$.
- **A $x = 0$ (Singolarità):** Se l'intervallo toccasse lo 0 (cioè se $\lambda \leq 0$), avremmo problemi. Analizziamo $x \to 0^+$: $\log(1 + x^2) \sim x^2$ (nota il quadrato interno).

$$f(x) \sim \frac{x}{1 \cdot (x^2)^2} = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$$

  Poiché l'ordine $3 \geq 1$, l'integrale diverge a 0.

Conclusione Dominio: L'integrale converge se e solo se $\lambda > 0$.

2. Calcolo Esplicito di $I(\lambda)$ Per $\lambda > 0$, calcoliamo per sostituzione: $t = \log(x^2 + 1) \implies dt = \frac{2x}{x^2+1} dx$. Estremi: $x = \lambda \to t = \log(\lambda^2 + 1)$; $x \to +\infty \to t \to +\infty$.

$$I(\lambda) = \int_{\log(\lambda^2+1)}^{+\infty} \frac{1}{2t^2} \, dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{t} \right]_{\log(\lambda^2+1)}^{+\infty} = \frac{1}{2 \log(\lambda^2 + 1)}$$

3. Calcolo del Limite Calcoliamo $\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda^\alpha I(\lambda)$. Usando la stima $\log(\lambda^2+1) \sim \lambda^2$:

$$\lambda^\alpha I(\lambda) \sim \frac{\lambda^\alpha}{2\lambda^2} = \frac{1}{2}\lambda^{\alpha-2}$$

Il limite vale:

- 0 se $\alpha > 2$.
- $1/2$ se $\alpha = 2$.
- $+\infty$ se $\alpha < 2$.

Esercizio 44

Studiare la convergenza per $\alpha > 0$ di:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin(x + x^\alpha)}{x^2 \arctan(x^\alpha + x^{1/\alpha})}\, dx$$

1. Analisi preliminare La funzione è definita su tutto l'intervallo $[2, +\infty)$. Il denominatore non si annulla mai perché per $x \geq 2$ e $\alpha > 0$, i termini x^α e $x^{1/\alpha}$ sono positivi, quindi l'arcotangente è positiva e strettamente maggiore di 0. Non ci sono singolarità al finito.

2. Studio della Convergenza Assoluta Procediamo con il criterio del confronto assoluto, sfruttando la limitatezza della funzione seno: $|\sin(y)| \leq 1$.

$$|f(x)| = \frac{|\sin(x + x^\alpha)|}{x^2 \arctan(x^\alpha + x^{1/\alpha})} \leq \frac{1}{x^2 \arctan(x^\alpha + x^{1/\alpha})}$$

Analizziamo il comportamento asintotico del denominatore per $x \to +\infty$. L'argomento dell'arcotangente è $x^\alpha + x^{1/\alpha}$. Poiché $\alpha > 0$, entrambi gli esponenti sono positivi, quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^\alpha + x^{1/\alpha}) = +\infty$$

Di conseguenza, il termine arcotangente tende al suo asintoto orizzontale:

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x^\alpha + x^{1/\alpha}) = \frac{\pi}{2}$$

3. Confronto Asintotico La nostra funzione maggiorante si comporta quindi come:

$$\frac{1}{x^2 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2}$$

Poiché l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ è convergente (esponente $2 > 1$), allora per il Criterio del Confronto Asintotico l'integrale di partenza **converge assolutamente** (e quindi semplicemente).

Conclusione: L'integrale converge per **ogni** $\alpha > 0$.