CASO B FUNZIONE ESPONENZIALE

ESEMPIO:

$$y''+7y'+12y=5e^{2x} \longrightarrow f(x)=c\cdot e^{\alpha x}$$

1 ANCHE IN QUESTO CASO PROCEDIAMO TROVANDO LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE ASSOCIATA OMOGENEA

$$y''+7y'+12y=0 \to \lambda^2+7\lambda+12=0 \to \Delta=1\ (>0)$$

NOTA: SE $\Delta>0$ CI SARANNO DUE SOLUZIONI DISTINTE,
SE $\Delta=0$ LE DUE SOLUZIONI SONO UGUALI
SE $\Delta<0$ CI SONO DUE SOLUZIONI COMPLESSE CONIUGATE

$$\lambda_{1,2}=\frac{-7\pm1}{2} \qquad \lambda_1=-3 \qquad \lambda_2=-4$$

NOTA: LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSUME 3 FORME DIVERSE:
- SE $\Delta>0$ $\quad y_0=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$
- SE $\Delta=0$ $\quad y_0=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}$
- SE $\Delta<0$ $\quad y_0=e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x)+C_2\sin(\beta x))$

QUA IL $\Delta>0$ QUINDI $y_0=C_1\cdot e^{-3x}+C_2\cdot e^{-4x}$

2 ORA COME AL SOLITO DOBBIAMO TROVARE y_p

$$f(x)=5\cdot e^{2x} \qquad \alpha=2$$

ORA ABBIAMO LA PRIMA DIFFERENZA RISPETTO A $f(x)$ POLINOMIALE

NOTA: SE α NON É UGUALE AD UNA DELLE SOLUZIONI λ DELL'EQUAZIONE OMOGENEA LA SOLUZIONE PARTICOLARE SARÁ
- $y_p=k\cdot e^{\alpha x}$

SE α É UNO DEI DUE λ, QUINDI SI RIPETE UNA VOLTA:
- $y_p=kxe^{\alpha x}$

SE α É UGUALE AD ENTRAMBI λ, QUINDI Δ ERA $=0$
- $y_p=Cx^2e^{\alpha x}$

NEL NOSTRO CASO, DATO CHE $\alpha=2$ NON É UGUALE A NESSUNA RADICE (λ), USIAMO LA PRIMA FORMULA

$$y_p=K\cdot e^{2x}$$

CALCOLIAMO COME SEMPRE y'_p, y''_p

$$y'_p=2Ke^{2x} \qquad y''_p=4Ke^{2x}$$

SOSTITUIAMO y''_p, y'_p, y_p NELL'EQUAZIONE INIZIALE $y''+7y'+12y=5e^{2x}$

$$4Ke^{2x}+7(2Ke^{2x})+12(K\cdot e^{2x})=5e^{2x}$$
$$4Ke^{2x}+14Ke^{2x}+12Ke^{2x}=5e^{2x}$$
$$Ke^{2x}(4+14+12)=5e^{2x}$$
$$Ke^{2x}(30)=5e^{2x}$$
$$30Ke^{2x}=5e^{2x}$$
$$\frac{\cancel{30}K}{\cancel{30}}=\frac{5}{30} \qquad \boxed{K=\frac{1}{6}}$$

3 ORA CHE ABBIAMO K LA SOSTITUIAMO NELLA FORMULINA DI y_p

$$y_p=Ke^{2x}=\frac{1}{6}e^{2x}$$

SOLUZIONE FINALE: $y=y_0+y_p$

$$y=C_1\cdot e^{-3x}+C_2e^{-4x}+\frac{1}{6}e^{2x}$$

ANALIZZIAMO IL CASO IN CUI α É UNA SOLUZIONE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA.

ESEMPIO:

$$3y''-20y'-7y=4e^{7x} \qquad y=y_0+y_p$$

EQUAZIONE ASSOCIATA:

$$3y''-20y'-7y=0 \to 3\lambda^2-20\lambda-7=0 \qquad \Delta=(20)^2-4\cdot3\cdot-7=484$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{484}}{6}=\frac{20\pm22}{6} \begin{cases}7\\-\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\lambda_1=7 \quad \lambda_2=-\frac{1}{3}$$

DATO CHE $\Delta>0$, $y_0=C_1\cdot e^{\lambda_1 x}+C_2\cdot e^{\lambda_2 x}=C_1e^{7x}+C_2e^{-\frac{1}{3}x}$

ORA TROVIAMO LA SOL PARTICOLARE y_p:

$$f(x)=C\cdot e^{\alpha x}=4\cdot e^{7x} \qquad \alpha=7$$

7 É ANCHE SOLUZIONE DELL'EQ. ASSOCIATA CON MOLTEPLICITÁ 1, QUINDI SECONDO LA NOTA CHE HO SCRITTO SOPRA $y_p=kxe^{\alpha x}$

$$y_p=k\cdot x\cdot e^{7x}$$

CALCOLIAMO LE DERIVATE y', y''

$$y'_p=k(e^{7x}+7kxe^{7x})=k\cdot e^{7x}(1+7x)$$
$$y''_p=k(7e^{7x}\cdot(1+7x)+e^{7x}\cdot7)=k\cdot e^{7x}(7(1+7x)+7)$$
$$=ke^{7x}(49x+14)$$

ORA SOSTITUIAMO y''_p, y'_p, y NELL'EQUAZIONE INIZIALE (COME SEMPRE)

$$3(ke^{7x}(49x+14))-20ke^{7x}(1+7x)-7kxe^{7x}=4e^{7x}$$
$$ke^{7x}[3(49x+14)-20(1+7x)-7x]=4e^{7x}$$
$$ke^{7x}[\cancel{147x}+42-20-\cancel{140x}-\cancel{7x}]=4e^{7x}$$
$$22ke^{7x}=4e^{7x}$$
$$\frac{22k}{22}=\frac{4}{22} \qquad k=\frac{2}{11}$$

y_p ERA $=kxe^{7x}$, ORA ABBIAMO K E DIVENTA:

$$y_p=\frac{2}{11}xe^{7x}$$

SOLUZIONE FINALE: $C_1\cdot e^{7x}+C_2\cdot e^{-\frac{1}{3}x}+\frac{2}{11}xe^{7x}$

ANALIZZIAMO L'ULTIMO CASO, IN CUI α É UGUALE ALLA SOLUZIONE DOPPIA DATA DA $\Delta=0$.

ESEMPIO:

$$y''-12y'+36y=3e^{6x}$$

1 EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA:

$$y''-12y'+36y=0 \to \lambda^2-12\lambda+36=0 \to (\lambda-6)^2=0$$

$$\lambda=6 \text{ CON MOLTEPLICITÁ } 2\ (\Delta=0)$$

ABBIAMO $\Delta=0$ QUINDI $y_0=e^{\lambda x}(C_1+C_2x)$

$$y_0=e^{2x}(C_1+C_2x)$$

2 SAPPIAMO CHE $f(x)=3e^{6x} \to \alpha=6$

DATO CHE 6 É UGUALE ALLA SOLUZIONE DOPPIA DELL'OMOGENEA ASSOCIATA LA FORMULA, COME HO SCRITTO NELLA NOTA, SARÁ $y_p=Kx^2e^{\alpha x}=Kx^2e^{6x}$

FACCIAMO LE DERIVATE y'_p, y''_p:

$$y'_p=k(2x\cdot e^{6x}+6x^2e^{6x})=ke^{6x}(2x+6x^2)$$
$$y''_p=k[6e^{6x}(2x+6x^2)+e^{6x}\cdot(2+12x)]$$
$$=ke^{6x}[12x+36x^2+2+12x]=ke^{6x}(36x^2+24x+2)$$

ORA SOSTITUIAMO y_p, y'_p, y''_p NELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORIGINALE:

$$ke^{6x}(36x^2+24x+2)-12ke^{6x}(2x+6x^2)+36kx^2e^{6x}=3e^{6x}$$
$$ke^{6x}(\cancel{36x^2}+\cancel{24x}+2-\cancel{24x}-\cancel{72x^2}+\cancel{36x^2})=3e^{6x}$$
$$2ke^{6x}=3e^{6x}$$
$$\frac{2k}{3}=\frac{3}{3}$$

3 LA SOLUZIONE PARTICOLARE É QUINDI $y_p=kx^2e^{6x}$

$$y_p=\frac{3}{2}x^2e^{6x}$$

LA SOLUZIONE FINALE SARÁ QUINDI:

$$y=y_0+y_p$$
$$y=e^{6x}(C_1+C_2x)+\frac{3}{2}x^2e^{6x}$$