

# Raccolta Ragionata Esercizi d’Esame: Equazioni Differenziali

Alessio Avarappattu

Dicembre 2025

## Legenda Difficoltà:

- **Base:** Applicazione diretta del metodo risolutivo.
- **Intermedio:** Richiede calcoli lunghi, integrazione per parti o studio di casi.
- **Avanzato:** Parametri critici, perturbazioni singolari, studi qualitativi o limiti.

## Indice

1	Equazioni a Variabili Separabili	2
2	Equazioni Lineari del Primo Ordine	2
3	Equazioni di Bernoulli (Non Lineari)	4
4	Lineari del Secondo Ordine a Coeff. Costanti	4
5	Equazioni di Ordine Superiore ( $n > 2$ )	5
6	Problemi Avanzati e Studi Qualitativi	6
7	Soluzioni	7

# 1 Equazioni a Variabili Separabili

Metodo: Separare  $x$  e  $y$ , integrare ambo i membri, esplicitare la soluzione.

## 1. • Base Trigonometrica (Sol. pag. 7)

Si trovi la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \tan(x)y(x) \\ y(\pi/4) = 2 \end{cases}$$

## 2. • Base Polinomiale (Sol. pag. 7)

Si risolva il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2(1 + y^2(x)) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

## 3. •• Con Logaritmi (Sol. pag. 8)

Si trovi la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \log(x)e^{-y(x)} \\ y(3) = \log(3) + \log(\log 3) \end{cases}$$

## 4. • Parametrica e Limitatezza (Sol. pag. 8)

Risolvere al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2y(x) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Determinare inoltre per quali valori di  $\alpha$ :

- La soluzione è limitata superiormente.
- La soluzione è limitata (sia superiormente che inferiormente).

## 5. •• Studio Qualitativo (Sol. pag. 9)

Si consideri l'equazione  $y' = xy \log(y)$ .

- Si determinino eventuali soluzioni costanti.
- Si risolva il problema di Cauchy con  $y(0) = 3$ .
- Sapendo che  $y(x) > 0$  per ogni  $x$ , si risolva con  $y(0) = 1/2$  e si calcoli  $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x)$ .

# 2 Equazioni Lineari del Primo Ordine

Metodo: Formula risolutiva con fattore integrante  $e^{A(x)}$ .

## 6. • Standard (Sol. pag. 11)

Si trovi la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = \cos(x) + e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**7. • Coefficiente Razionale** (Sol. pag. 12)

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{1+x^2} = e^{-\arctan x}$$

**8. •• Fattore Integrante Singolare** (Sol. pag. 13)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \cos(x^2) \\ y(\sqrt{\pi}) = 1 \end{cases}$$

**9. •• Risonanza Esponenziale (Cauchy)** (Sol. pag. 14)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = \sin(x) + e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**10. •• Coefficiente Irrazionale** (Sol. pag. 15)

Si trovi la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}y(x) = \arctan(x)e^{-\sqrt{x}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**11. • Polinomiale-Esponenziale** (Sol. pag. 16)

Si risolva il problema di Cauchy (con  $y_0 \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{cases} y'(x) + 4x^3y(x) = xe^{-x^4} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

**12. •• Con Sommatoria** (Sol. pag. 16)

Risolvere per  $N \in \mathbb{N}$  l'equazione differenziale:

$$y'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^N \cos(nx)$$

**13. •• Parametro  $n$  Naturale** (Sol. pag. 17)

Si risolva, per  $n \in \mathbb{N}$ , il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'_n(x) + y_n(x) = x^n e^{-x} \\ y_n(0) = 0 \end{cases}$$

**14. •• Cauchy Lineare Fratta** (Sol. pag. 18)

Risolvere per  $x > 0$  il problema di Cauchy (con parametro  $\alpha$ ):

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1+x}{x}y(x) + x - x^2 \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

**15. ••• Con Analisi del Limite ( $\lambda$ )** (Sol. pag. 19)

Si risolva, per  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'_\lambda(x) - y_\lambda(x) = e^{(1+\lambda^2)x} \\ y_\lambda(0) = 0 \end{cases}$$

Si determini poi se esistono  $\lambda \in \mathbb{R}$  tali che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_\lambda(x) = +\infty$ .

### 3 Equazioni di Bernoulli (Non Lineari)

*Metodo: Sostituzione  $z = y^{1-\alpha}$  per renderla lineare.*

**16. •• Bernoulli Standard** (*Sol. pag. 20*)

Risolvere il problema di Cauchy (con parametro iniziale  $y_0$ ):

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = y^2(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

**17. •• Bernoulli Guidata** (*Sol. pag. 21*)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - x(y(x))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(Suggerimento: dividere per  $y^2$  ed effettuare la sostituzione  $z(x) = 1/y(x)$ ).

### 4 Lineari del Secondo Ordine a Coeff. Costanti

*Metodo: Polinomio caratteristico per l'omogenea + Metodo di somiglianza/variazione costanti per la particolare.*

**18. • Standard Trigonometrica** (*Sol. pag. 22*)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \cos(2x) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

**19. •• Doppia Risonanza Esponenziale** (*Sol. pag. 23*)

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y''(t) - y(t) = e^t - e^{-t}$$

**20. •• Termine Noto Polinomiale** (*Sol. pag. 24*)

Risolvere per  $k \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) = t + 1 \\ y(0) = k, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

**21. ••• Risonanza Completa ( $e^x$ )** (*Sol. pag. 25*)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

**22. ••• Condizione Mista e Limite** (*Sol. pag. 26*)

Data l'equazione differenziale:

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 12e^{2x}$$

- Determinare la famiglia di soluzioni che soddisfa la condizione  $y(0) + y'(0) = 18$ .
- Tra queste, stabilire se ne esiste una tale che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$ .

**23. ••• Termine Nota a Sommatoria** (*Sol. pag. 27*)

Risolvere la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \sum_{k=2}^5 \sin(kx) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

**24. •• Risonanza Parametrica ( $\alpha$ )** (*Sol. pag. 29*)

Risolvere, per  $\alpha > 0$ , l'equazione differenziale:

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{\alpha x}$$

**25. •• Parametro Base vs Esponente** (*Sol. pag. 30*)

Si trovi la soluzione generale al variare di  $\alpha \geq 0$ :

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = e^x$$

(Discutere il caso di risonanza quando  $\alpha = 1$ ).

**26. ••• Parametro  $\alpha$  all'Esponente** (*Sol. pag. 31*)

Si trovi la soluzione generale dell'equazione al variare di  $\alpha \geq 0$ :

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = e^{\alpha^2 x}$$

**27. •• Risonanza Polinomiale** (*Sol. pag. 32*)

Risolvere per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha^2 y(x) = x^2 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

**28. ••• Integrabilità all'Infinito** (*Sol. pag. 33*)

Risolvere il problema di Cauchy con parametro  $\beta \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} y''(t) - 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = \beta \end{cases}$$

Determinare se esistono valori di  $\beta$  tali per cui la soluzione soddisfi:

$$\int_0^{+\infty} |y(t)| dt < +\infty$$

## 5 Equazioni di Ordine Superiore ( $n > 2$ )

*Metodo: Polinomio caratteristico di grado n.*

**29. •• Terzo Ordine** (*Sol. pag. 35*)

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y'''(x) - y'(x) = \cos(x)$$

**30. •• Quarto Ordine** (*Sol. pag. 35*)

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y''''(x) - y(x) = e^{-x}$$

## 6 Problemi Avanzati e Studi Qualitativi

*Include: Perturbazioni, Oscillatori Forzati, Eq. Integro-Differenziali.*

**31. ••• Oscillatore Armonico Forzato ( $\omega$ )** (Sol. pag. 36)

Risolvere, al variare del parametro  $\omega \in \mathbb{R}^+$ , il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = \cos(\omega x) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

**32. ••• Studio Completo Risonanza Trigonometrica** (Sol. pag. 38)

Si consideri l'equazione  $y''(x) + 4y(x) = \sin(\alpha x)$  con  $\alpha \geq 0$ .

- a) Calcolare l'integrale generale al variare di  $\alpha$ .
- b) Esistono valori di  $\alpha$  per cui la soluzione non è limitata inferiormente?
- c) Nei casi  $\alpha = 2$  e  $\alpha = 4$ , risolvere con condizioni  $y(0) = 1, y'(0) = 1$ .

**33. ••• Parametro  $\epsilon$  e Variabile Indipendente** (Sol. pag. 40)

Si risolva per  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y_\epsilon''(x) - \epsilon^2 y_\epsilon(x) = x \\ y_\epsilon(0) = \epsilon^2, \quad y'_\epsilon(0) = 0 \end{cases}$$

**34. •• Equazione Integro-Differenziale** (Sol. pag. 41)

Si risolva l'equazione seguente (derivando ambo i membri rispetto a  $x$ ):

$$\int_0^x y(t) dt + y'(x) = e^x, \quad \text{con } y(0) = 0$$

**35. ••• Perturbazione Singolare ( $\epsilon$ )** (Sol. pag. 42)

Calcolare, per  $0 < \epsilon < 1$ , la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} -\epsilon^2 y_\epsilon''(x) + y_\epsilon(x) = e^{-x} \\ y_\epsilon(0) = 0 \\ y'_\epsilon(0) = \frac{1}{\epsilon(\epsilon+1)} \end{cases}$$

e determinare il limite puntuale di  $y_\epsilon(x)$  per  $\epsilon \rightarrow 0^+$  (per  $x > 0$ ).

## 7 Soluzioni

### 1. Base Trigonometrica

$$\begin{cases} y'(x) = \tan(x)y(x) \\ y(\pi/4) = 2 \end{cases}$$

**Svolgimento:** Sepriamo le variabili (ponendo  $y \neq 0$ ):

$$\frac{y'}{y} = \tan(x) \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Calcoliamo gli integrali:

$$\ln |y| = -\ln |\cos x| + c$$

Applichiamo l'esponenziale ad entrambi i membri per isolare  $y$ . **Attenzione alla costante:**

$$|y| = e^{-\ln |\cos x| + c} = e^{-\ln |\cos x|} \cdot e^c$$

Poiché  $e^{-\ln |\cos x|} = \frac{1}{|\cos x|}$  e ponendo  $K = \pm e^c$  (costante moltiplicativa):

$$y(x) = \frac{K}{\cos x}$$

**Condizione Iniziale:** Imponiamo  $y(\pi/4) = 2$ :

$$2 = \frac{K}{\cos(\pi/4)} = \frac{K}{\sqrt{2}/2} \implies K = \sqrt{2}$$

**Soluzione:**

$$y(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cos x}$$

### 2. Base Polinomiale

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2(1 + y^2(x)) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

**Svolgimento:** Sepriamo le variabili:

$$\frac{y'}{1 + y^2} = x^2$$

Integriamo rispetto a  $x$ :

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int x^2 dx$$

Riconosciamo l'integrale notevole a sinistra ( $\arctan y$ ):

$$\arctan(y) = \frac{x^3}{3} + c$$

**Condizione Iniziale (Strategia Migliore):** Conviene trovare  $c$  prima di isolare la  $y$ , è meno rischioso. Imponiamo  $y(0) = 1$ :

$$\arctan(1) = \frac{0}{3} + c \implies \frac{\pi}{4} = c$$

Quindi l'equazione è:

$$\arctan(y) = \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}$$

**Isoliamo la  $y$ :** Applichiamo la tangente ad entrambi i membri (la costante è dentro l'argomento!):

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

### 3. Con Logaritmi

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \log(x)e^{-y(x)} \\ y(3) = \log(3) + \log(\log 3) \end{cases}$$

**Svolgimento:** Separiamo le variabili moltiplicando per  $e^y$ :

$$e^y dy = \log(x) dx$$

Integriamo. A sinistra è immediato, a destra integriamo per parti ( $1 \cdot \log x$ ):

$$\begin{aligned} e^y &= \int 1 \cdot \log(x) dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ e^y &= x \log x - x + c \end{aligned}$$

**Condizione Iniziale:** Sostituiamo  $x = 3$  e  $y = \log(3) + \log(\log 3)$ . Calcoliamo il membro sinistro  $e^y$ :

$$e^{\log 3 + \log(\log 3)} = e^{\log 3} \cdot e^{\log(\log 3)} = 3 \cdot (\log 3) = 3 \log 3$$

Sostituiamo nell'equazione completa:

$$3 \log 3 = 3 \log 3 - 3 + c$$

Semplificando  $3 \log 3$ :

$$0 = -3 + c \implies c = 3$$

**Soluzione Finale:** Riprendiamo  $e^y = x \log x - x + 3$  e isoliamo la  $y$ :

$$y(x) = \log(x \log x - x + 3)$$

### 4. Parametrica e Limitatezza

Risolvere al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 y(x) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Determinare inoltre per quali valori di  $\alpha$ :

- a) La soluzione è limitata superiormente.
- b) La soluzione è limitata (sia superiormente che inferiormente).

**Svolgimento:** L'equazione è a variabili separabili. Se  $\alpha = 0$ , la soluzione è banalmente la funzione costante  $y(x) = 0$ . Se  $\alpha \neq 0$ :

$$\frac{y'}{y} = x^2 \implies \int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + c$$

Esponenziando:

$$y(x) = K e^{x^3/3}$$

Imponiamo  $y(0) = \alpha$ :

$$\alpha = K e^0 \implies K = \alpha$$

La soluzione unica è:

$$y(x) = \alpha e^{x^3/3}$$

**Analisi della Limitatezza:** Studiamo il comportamento della funzione esponenziale  $g(x) = e^{x^3/3}$ :

- Per  $x \rightarrow +\infty$ , l'esponente  $x^3/3 \rightarrow +\infty$ , quindi  $g(x) \rightarrow +\infty$ .
- Per  $x \rightarrow -\infty$ , l'esponente  $x^3/3 \rightarrow -\infty$ , quindi  $g(x) \rightarrow 0^+$ .

**Caso a) Limitatezza Superiore ( $y(x) \leq M$ ):**

- Se  $\alpha > 0$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$ . (Illimitata superiormente).
- Se  $\alpha < 0$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$ . La funzione sta sempre sotto l'asse delle x (è negativa), quindi è limitata superiormente dallo zero.
- Se  $\alpha = 0$ :  $y(x) = 0$ . (Limitata).

**Risposta:**  $\alpha \leq 0$ .

**Caso b) Limitatezza Globale ( $|y(x)| \leq M$ ):** Una funzione è limitata se non va né a  $+\infty$  né a  $-\infty$ .

- Se  $\alpha \neq 0$ , la funzione diverge sempre (a  $+\infty$  o  $-\infty$ ) per  $x \rightarrow +\infty$ .
- L'unico caso in cui rimane "bloccata" è quando  $\alpha = 0$ .

**Risposta:** Solo  $\alpha = 0$ .

## 5. Studio Qualitativo e Doppio Esponenziale

Si consideri l'equazione  $y' = xy \ln(y)$ .

**a) Soluzioni Costanti** Cerchiamo le  $y = k$  tali che  $y'(x) = 0$  (perchè un numero fisso ha la derivata =0).

$$0 = x \cdot y \cdot \ln(y)$$

Poiché il logaritmo richiede  $y > 0$ :

- $y = 0$  non è accettabile per il dominio del logaritmo.

- $\ln(y) = 0 \implies y = 1$ .

**Unica soluzione costante:**  $y(x) = 1$ .

**b) Problema di Cauchy con  $y(0) = 3$**  Separiamo le variabili ( $y \neq 1$ ):

$$\frac{y'}{y \ln(y)} = x$$

Integriamo (a sinistra usiamo la sostituzione  $t = \ln y$ , quindi  $dt = \frac{dy}{y}$ ):

$$\int \frac{1}{\ln y} \cdot \frac{dy}{y} = \int x \, dx$$

$$\ln |\ln(y)| = \frac{x^2}{2} + c$$

**Applicazione del "Metodo K" (per togliere il primo logaritmo):**

$$\ln(y) = K \cdot e^{x^2/2}$$

(Nota: qui  $K$  ingloba il segno e la costante  $e^c$ ).

Imponiamo  $y(0) = 3$ :

$$\ln(3) = K \cdot e^0 \implies K = \ln 3$$

Torniamo all'equazione:

$$\ln(y) = (\ln 3) \cdot e^{x^2/2}$$

Esponenziando un'altra volta per isolare la  $y$ :

$$y(x) = e^{((\ln 3)e^{x^2/2})}$$

Possiamo scriverlo meglio usando le proprietà delle potenze ( $e^{A \cdot B} = (e^A)^B$ ):

$$y(x) = (e^{\ln 3})^{e^{x^2/2}} = 3^{e^{x^2/2}}$$

**c) Problema con  $y(0) = 1/2$  e Limite** Riprendiamo la forma generale trovata prima:  $\ln(y) = K e^{x^2/2}$ . Imponiamo  $y(0) = 1/2$ :

$$\ln(1/2) = K \cdot e^0 \implies K = \ln(1/2) = -\ln 2$$

Quindi:

$$\ln(y) = -\ln 2 \cdot e^{x^2/2}$$

Per isolare la  $y$ , applichiamo l'esponenziale:

$$y(x) = e^{(-\ln 2 \cdot e^{x^2/2})} = (e^{-\ln 2})^{e^{x^2/2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{e^{x^2/2}}$$

**Calcolo del limite di  $y'(x)$ :** Dobbiamo calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)$ . Usiamo l'equazione differenziale di partenza per scrivere  $y'$ :

$$y'(x) = x \cdot y(x) \cdot \ln(y(x))$$

Sostituiamo le espressioni di  $y$  e  $\ln y$  che abbiamo appena trovato:

$$y'(x) = x \cdot \underbrace{\left[ e^{-\ln 2 \cdot e^{x^2/2}} \right]}_{y(x)} \cdot \underbrace{\left[ -\ln 2 \cdot e^{x^2/2} \right]}_{\ln y(x)}$$

Riorganizziamo i termini per vedere la frazione "Numeratore vs Denominatore": Il termine con l'esponente negativo lo portiamo sotto (al denominatore):

$$y'(x) = -\ln 2 \cdot \frac{x \cdot e^{x^2/2}}{e^{(\ln 2 \cdot e^{x^2/2})}}$$

### Analisi della Gerarchia degli Infiniti:

- Al **Numeratore** abbiamo  $x \cdot e^{x^2/2}$ . Questo è un "Infinito di tipo Esponenziale".
- Al **Denominatore** abbiamo  $e^{(\ln 2 \cdot e^{x^2/2})}$ . Questo è un "Infinito di tipo **Doppio Esponenziale**" ( $e$  elevato alla  $e$ ).

In analisi, il doppio esponenziale è infinitamente più potente dell'esponenziale singolo (proprio come l'esponenziale è più potente di un polinomio). Il denominatore cresce molto più velocemente del numeratore e "schiaccia" la frazione a zero.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$$

## 6. Lineare Standard (Calcoli Lunghi)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = \cos(x) + e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**Svolgimento:** È un'equazione lineare del primo ordine  $y' + a(x)y = f(x)$  con  $a(x) = 1$ . La formula risolutiva è:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left( \int f(x)e^{A(x)} dx + c \right)$$

Dove  $A(x) = \int 1 dx = x$ .

Sostituendo:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x} \left( \int (\cos x + e^x)e^x dx + c \right) \\ y(x) &= e^{-x} \left( \underbrace{\int e^x \cos x dx}_{I_1} + \underbrace{\int e^{2x} dx}_{I_2} + c \right) \end{aligned}$$

### Calcolo degli integrali:

- $I_2 = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}$ . (Facile)

- $I_1 = \int e^x \cos x \, dx$ . (Integrale ciclico per parti).

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x &= e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \\ &= e^x \cos x + \left( e^x \sin x - \int e^x \cos x \right) \end{aligned}$$

Portando l'integrale a sinistra:

$$2 \int e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x) \implies I_1 = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x)$$

**Composizione della soluzione generale:**

$$y(x) = e^{-x} \left[ \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} e^{2x} + c \right]$$

Moltiplichiamo per  $e^{-x}$  (ricorda di distribuirlo su tutti i termini!):

$$y(x) = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} e^x + ce^{-x}$$

**Condizione Iniziale:** Imponiamo  $y(0) = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} (\sin 0 + \cos 0) + \frac{1}{2} e^0 + ce^0 \\ 0 &= \frac{1}{2} (0 + 1) + \frac{1}{2} + c \\ 0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c \implies 0 = 1 + c \implies c = -1 \end{aligned}$$

**Soluzione Finale:**

$$y(x) = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} e^x - e^{-x}$$

## 7. Coefficiente Razionale

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{1+x^2} = e^{-\arctan x}$$

**Svolgimento:** Equazione lineare con  $a(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Calcoliamo la primitiva  $A(x)$ :

$$A(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$$

Applichiamo la formula risolutiva:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left( \int f(x) e^{A(x)} dx + c \right)$$

$$y(x) = e^{-\arctan x} \left( \int e^{-\arctan x} \cdot e^{\arctan x} dx + c \right)$$

**Il passaggio chiave:** Gli esponenziali si annullano ( $e^{-k} \cdot e^k = e^0 = 1$ ):

$$y(x) = e^{-\arctan x} \left( \int 1 dx + c \right)$$

**Soluzione:**

$$y(x) = e^{-\arctan x}(x + c)$$

## 8. Fattore Integrante Singolare

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \cos(x^2) \\ y(\sqrt{\pi}) = 1 \end{cases}$$

**Svolgimento:** Equazione lineare definita per  $x \neq 0$ . Poiché la condizione iniziale è data in  $x_0 = \sqrt{\pi}$  (che è positivo), lavoriamo nell'intervallo  $x > 0$ .

Calcoliamo il fattore integrante (primitiva di  $1/x$ ):

$$A(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| = \ln(x) \quad (\text{visto che } x > 0)$$

Formula risolutiva:

$$y(x) = e^{-\ln x} \left( \int \cos(x^2) \cdot e^{\ln x} dx + c \right)$$

Semplifichiamo gli esponenziali ( $e^{\ln x} = x$ ):

$$y(x) = \frac{1}{x} \left( \int x \cos(x^2) dx + c \right)$$

**Calcolo dell'integrale:** L'integrale è quasi immediato (la derivata di  $x^2$  è  $2x$ ). Moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sin(x^2)$$

Quindi la soluzione generale è:

$$y(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{1}{2} \sin(x^2) + c \right) = \frac{\sin(x^2)}{2x} + \frac{c}{x}$$

**Condizione Iniziale:** Imponiamo  $y(\sqrt{\pi}) = 1$ :

$$1 = \frac{\sin(\pi)}{2\sqrt{\pi}} + \frac{c}{\sqrt{\pi}}$$

Sapendo che  $\sin(\pi) = 0$ :

$$1 = 0 + \frac{c}{\sqrt{\pi}} \implies c = \sqrt{\pi}$$

**Soluzione Finale:**

$$y(x) = \frac{\sin(x^2)}{2x} + \frac{\sqrt{\pi}}{x} = \frac{\sin(x^2) + 2\sqrt{\pi}}{2x}$$

## 9. Risonanza Esponenziale

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = \sin(x) + e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**Svolgimento:** Fattore integrante  $A(x) = x$ . Moltiplichiamo tutto per  $e^x$ . La formula risolutiva è:

$$y(x) = e^{-x} \left( \int (\sin x + e^{-x}) e^x dx + c \right)$$

Espandiamo l'integrale:

$$\int (\sin x \cdot e^x + \underbrace{e^{-x} \cdot e^x}_1) dx = \int e^x \sin x dx + \int 1 dx$$

**Calcolo degli integrali:**

- $\int 1 dx = x$ . (Ecco la risonanza!).
- $\int e^x \sin x dx$ . Usiamo la formula nota (o integriamo per parti due volte come nell'Ex 6, ma occhio ai segni):

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

Soluzione generale:

$$y(x) = e^{-x} \left[ \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + x + c \right]$$

$$y(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + xe^{-x} + ce^{-x}$$

**Condizione Iniziale:** Imponiamo  $y(0) = 0$ :

$$0 = \frac{1}{2}(\sin 0 - \cos 0) + 0 + c \cdot 1$$

$$0 = \frac{1}{2}(0 - 1) + c$$

$$0 = -\frac{1}{2} + c \implies c = \frac{1}{2}$$

**Soluzione Finale:**

$$y(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + \left( x + \frac{1}{2} \right) e^{-x}$$

## 10. Coefficiente Irrazionale

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}y(x) = \arctan(x)e^{-\sqrt{x}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**Svolgimento:** È un'equazione lineare  $y' + a(x)y = f(x)$  definita per  $x > 0$  (con continuità in 0 da destra).

Calcoliamo la primitiva del coefficiente  $a(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ :

$$A(x) = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}$$

Formula risolutiva:

$$y(x) = e^{-\sqrt{x}} \left( \int \arctan(x) e^{-\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} dx + c \right)$$

Gli esponenziali nell'integrale si elidono ( $e^{-\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} = 1$ ):

$$y(x) = e^{-\sqrt{x}} \left( \int \arctan(x) dx + c \right)$$

**Calcolo dell'integrale (per parti):** Prendiamo  $u(x) = \arctan x$  (da derivare) e  $v'(x) = 1$  (da integrare):

$$\int 1 \cdot \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

Per risolvere il secondo integrale, moltiplichiamo e dividiamo per 2 per avere al numeratore la derivata del denominatore:

$$= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Soluzione generale:

$$y(x) = e^{-\sqrt{x}} \left[ x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \right]$$

**Condizione Iniziale:** Imponiamo  $y(0) = 0$ :

$$0 = e^0 \left[ 0 \cdot \arctan(0) - \frac{1}{2} \ln(1) + c \right]$$

$$0 = 1 \cdot [0 - 0 + c] \implies c = 0$$

**Soluzione Finale:**

$$y(x) = e^{-\sqrt{x}} \left( x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right)$$

## 11. Polinomiale-Esponenziale

$$\begin{cases} y'(x) + 4x^3y(x) = xe^{-x^4} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

**Svolgimento:** Equazione lineare con  $a(x) = 4x^3$ . Calcoliamo la primitiva:

$$A(x) = \int 4x^3 dx = x^4$$

Formula risolutiva:

$$y(x) = e^{-x^4} \left( \int xe^{-x^4} \cdot e^{x^4} dx + c \right)$$

Semplifichiamo gli esponenziali ( $e^{-x^4} \cdot e^{x^4} = 1$ ):

$$y(x) = e^{-x^4} \left( \int x dx + c \right)$$

L'integrale è immediato:

$$y(x) = e^{-x^4} \left( \frac{x^2}{2} + c \right)$$

**Condizione Iniziale:** Imponiamo  $y(0) = y_0$ :

$$y_0 = e^0 (0 + c) \implies c = y_0$$

**Soluzione Finale:**

$$y(x) = e^{-x^4} \left( \frac{x^2}{2} + y_0 \right)$$

## 12. Con Sommatoria

Risolvere per  $N \in \mathbb{N}$  l'equazione differenziale:

$$y'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^N \cos(nx)$$

**Svolgimento:** Equazione lineare a coefficienti costanti con  $a(x) = 1$ . Fattore integrante  $e^x$ . La formula risolutiva è:

$$y(x) = e^{-x} \left( \int e^x \left[ \sum_{n=0}^N \cos(nx) \right] dx + c \right)$$

**Strategia (Linearità):** Invece di calcolare la somma trigonometrica, scambiamo l'integrale con la sommatoria:

$$\int e^x \sum_{n=0}^N \cos(nx) dx = \sum_{n=0}^N \left( \int e^x \cos(nx) dx \right)$$

Calcoliamo l'integrale per un generico  $n$  (usando l'integrazione per parti ciclica o la formula nota):

$$\int e^x \cos(nx) dx = \frac{e^x}{1+n^2} (\cos(nx) + n \sin(nx))$$

*Nota: La formula vale anche per  $n = 0$  (dove restituisce  $e^x$ ), quindi non serve dividere i casi.*

Sostituiamo questo risultato nella formula generale:

$$y(x) = e^{-x} \left( \sum_{n=0}^N \left[ \frac{e^x}{1+n^2} (\cos(nx) + n \sin(nx)) \right] + c \right)$$

Portando  $e^{-x}$  dentro la parentesi, si semplifica con gli  $e^x$  della sommatoria:

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{\cos(nx) + n \sin(nx)}{1+n^2} + ce^{-x}$$

### 13. Parametro $n$ Naturale

Si risolva, per  $n \in \mathbb{N}$ , il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'_n(x) + y_n(x) = x^n e^{-x} \\ y_n(0) = 0 \end{cases}$$

**Svolgimento:** Equazione lineare con  $a(x) = 1$ , quindi fattore integrante  $e^x$ . Applichiamo la formula risolutiva:

$$y_n(x) = e^{-x} \left( \int x^n e^{-x} \cdot e^x dx + c \right)$$

**Semplificazione:** Gli esponenziali nell'integrale si elidono ( $e^{-x} \cdot e^x = 1$ ):

$$y_n(x) = e^{-x} \left( \int x^n dx + c \right)$$

L'integrale è immediato (regola della potenza):

$$y_n(x) = e^{-x} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \right)$$

**Condizione Iniziale:** Imponiamo  $y_n(0) = 0$ :

$$0 = e^0 \left( \frac{0^{n+1}}{n+1} + c \right) \implies 0 = 1 \cdot (0 + c) \implies c = 0$$

**Soluzione Finale:**

$$y_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x}$$

## 14. Cauchy Lineare Fratta

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1+x}{x}y(x) + x - x^2 \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

**Svolgimento:** L'equazione è nella forma  $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ . Identifichiamo il coefficiente  $a(x) = \frac{1}{x} + 1$ . La primitiva è  $A(x) = \ln(x) + x$  (per  $x > 0$ ).

Usiamo la formula risolutiva diretta:

$$y(x) = e^{\ln x + x} \left( \int (x - x^2) e^{-(\ln x + x)} dx + c \right)$$

Semplifichiamo gli esponenziali:

- Fuori:  $e^{\ln x + x} = xe^x$ .
- Dentro:  $e^{-(\ln x + x)} = \frac{1}{x}e^{-x}$ .

Nell'integrale la  $x$  al denominatore si semplifica con  $(x - x^2)$ :

$$\frac{x - x^2}{x} = 1 - x$$

Quindi dobbiamo calcolare:

$$y(x) = xe^x \left( \int (1 - x)e^{-x} dx + c \right)$$

**Calcolo dell'integrale:** Spezziamo in due integrali distinti:

$$I = \int e^{-x} dx - \int xe^{-x} dx$$

1. Il primo è immediato:  $\int e^{-x} dx = -e^{-x}$ . 2. Il secondo si fa per parti ( $x$  deriva,  $e^{-x}$  integra):

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - \int (-e^{-x}) dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

Mettiamo tutto insieme (attenzione al segno meno davanti al secondo integrale):

$$I = (-e^{-x}) - (-xe^{-x} - e^{-x})$$

$$I = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}$$

Sostituiamo nella soluzione generale:

$$y(x) = xe^x (xe^{-x} + c) = x^2 + cx e^x$$

**Condizione Iniziale:** Imponiamo  $y(1) = \alpha$ :

$$\alpha = 1 + ce \implies c = \frac{\alpha - 1}{e}$$

**Soluzione Finale:**

$$y(x) = x^2 + (\alpha - 1)x e^{x-1}$$

## 15. Con Analisi del Limite ( $\lambda$ )

$$\begin{cases} y'_\lambda(x) - y_\lambda(x) = e^{(1+\lambda^2)x} \\ y_\lambda(0) = 0 \end{cases}$$

**Svolgimento:** Scriviamo l'equazione in forma normale portando la  $y$  a destra:

$$y'(x) = 1 \cdot y(x) + e^{(1+\lambda^2)x}$$

Identifichiamo il coefficiente  $a(x) = 1$ . La primitiva è  $A(x) = \int 1 dx = x$ .

Applichiamo la formula risolutiva:

$$y(x) = e^x \left( \int e^{(1+\lambda^2)x} \cdot e^{-x} dx + c \right)$$

Semplifichiamo l'esponenziale dentro l'integrale (somma degli esponenti):

$$(1 + \lambda^2)x - x = x + \lambda^2x - x = \lambda^2x$$

Quindi dobbiamo calcolare:

$$y(x) = e^x \left( \int e^{\lambda^2 x} dx + c \right)$$

**Qui bisogna distinguere i casi per l'integrale:**

**CASO 1:**  $\lambda \neq 0$  (Allora  $\lambda^2 \neq 0$ )

$$\int e^{\lambda^2 x} dx = \frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda^2 x}$$

Sostituendo:

$$y(x) = e^x \left( \frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda^2 x} + c \right) = \frac{1}{\lambda^2} e^{(1+\lambda^2)x} + ce^x$$

Imponiamo  $y(0) = 0$ :

$$0 = \frac{1}{\lambda^2} + c \implies c = -\frac{1}{\lambda^2}$$

Soluzione ( $\lambda \neq 0$ ):

$$y_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2} \left( e^{(1+\lambda^2)x} - e^x \right)$$

**CASO 2:**  $\lambda = 0$  (Allora l'esponente è 0)

$$\int e^0 dx = \int 1 dx = x$$

Sostituendo:

$$y(x) = e^x(x + c)$$

Imponiamo  $y(0) = 0$ :

$$0 = 1(0 + c) \implies c = 0$$

Soluzione ( $\lambda = 0$ ):

$$y_0(x) = xe^x$$

**Analisi del Limite:** Verifichiamo se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_\lambda(x) = +\infty$ .

- Se  $\lambda = 0$ :  $\lim xe^x = +\infty$ . (Sì)
- Se  $\lambda \neq 0$ : Poiché  $1+\lambda^2 > 1$ , l'esponenziale  $e^{(1+\lambda^2)x}$  domina su  $e^x$ . Il coefficiente  $1/\lambda^2$  è positivo. Il limite è  $+\infty$ . (Sì)

**Risposta:** Esiste per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## 16. Bernoulli Standard

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = y^2(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

**Svolgimento:** Equazione di Bernoulli con  $\alpha = 2$ . Dividiamo per  $y^2$ :

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = 1$$

Sostituzione:  $z = \frac{1}{y} \implies z' = -\frac{y'}{y^2}$ . Sostituendo otteniamo:

$$-z' + z = 1$$

**Risoluzione in  $z$ :** Isoliamo  $z'$  (moltiplico per -1 e sposto):

$$z' = z - 1$$

Per usare la formula risolutiva delle lineari, riportiamo la  $z$  a sinistra per avere la forma  $z' + a(x)z = f(x)$ :

$$z' - z = -1$$

Ora procediamo come sempre:

- Coefficiente  $a(x) = -1 \implies A(x) = -x$ .
- Termine noto  $f(x) = -1$ .

Formula risolutiva:

$$\begin{aligned} z(x) &= e^x \left( \int -1 \cdot e^{-x} dx + c \right) \\ z(x) &= e^x (e^{-x} + c) \\ z(x) &= 1 + ce^x \end{aligned}$$

**Ritorno alla  $y$ :** Dato che  $y = 1/z$ :

$$y(x) = \frac{1}{1 + ce^x}$$

**Condizione Iniziale:**  $y(0) = y_0 \implies y_0 = \frac{1}{1+c}$ . Da cui ricaviamo  $c$ :

$$1 + c = \frac{1}{y_0} \implies c = \frac{1}{y_0} - 1 = \frac{1 - y_0}{y_0}$$

**Soluzione Finale:** Sostituendo  $c$  e semplificando la frazione:

$$y(x) = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^x}$$

## 17. Bernoulli Guidata

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - x(y(x))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

**Svolgimento:** Scriviamo l'equazione come  $y' - y = -xy^2$ . È una Bernoulli con  $\alpha = 2$ .

**Passo 1: Sostituzione** Dividiamo per  $y^2$ :

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = -x$$

Poniamo  $z = \frac{1}{y}$ . Derivando:  $z' = -\frac{y'}{y^2} \implies \frac{y'}{y^2} = -z'$ .

Sostituiamo nell'equazione:

$$-z' - z = -x$$

Moltiplichiamo tutto per  $-1$  per avere la forma normale:

$$z' + z = x$$

**Passo 2: Risoluzione in  $z$**  Equazione lineare con  $a(x) = 1$ . Fattore integrante  $e^x$ .

$$z(x) = e^{-x} \left( \int xe^x dx + c \right)$$

Calcoliamo l'integrale per parti:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x - 1)$$

Sostituiamo nella formula di  $z$ :

$$z(x) = e^{-x} [e^x(x - 1) + c]$$

$$z(x) = (x - 1) + ce^{-x}$$

**Passo 3: Ritorno alla  $y$**  Poiché  $y = 1/z$ :

$$y(x) = \frac{1}{x - 1 + ce^{-x}}$$

**Passo 4: Condizione Iniziale** Imponiamo  $y(0) = 1$ :

$$1 = \frac{1}{0 - 1 + c \cdot e^0} \implies 1 = \frac{1}{-1 + c}$$

$$c - 1 = 1 \implies c = 2$$

**Soluzione Finale:**

$$y(x) = \frac{1}{x - 1 + 2e^{-x}}$$

## 18. Standard Trigonometrica

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \cos(2x) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

**Svolgimento:**

**1. Soluzione Omogenea ( $y_h$ )** Equazione caratteristica:  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ . Scomponiamo:  $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ . Radici:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ .

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

**2. Soluzione Particolare ( $y_p$ )** Il termine noto è  $\cos(2x)$ . Poiché  $2i$  non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione della forma:

$$y_p(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$$

Calcoliamo le derivate:

$$y'_p = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$$

$$y''_p = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)$$

Sostituiamo nell'equazione completa ( $y'' - 3y' + 2y = \cos(2x)$ ):

$$(-4A \cos -4B \sin) - 3(-2A \sin + 2B \cos) + 2(A \cos + B \sin) = \cos(2x)$$

Raccogliamo i termini simili:

- Cos:  $-4A - 6B + 2A = -2A - 6B$
- Sin:  $-4B + 6A + 2B = 6A - 2B$

Impostiamo il sistema uguagliando i coefficienti a quelli del termine noto ( $1 \cdot \cos + 0 \cdot \sin$ ):

$$\begin{cases} -2A - 6B = 1 \\ 6A - 2B = 0 \implies B = 3A \end{cases}$$

Sostituiamo  $B$  nella prima:

$$-2A - 6(3A) = 1 \implies -20A = 1 \implies A = -\frac{1}{20}$$

Quindi  $B = 3A = -\frac{3}{20}$ .

La soluzione particolare è:

$$y_p(x) = -\frac{1}{20} \cos(2x) - \frac{3}{20} \sin(2x)$$

## 3. Integrale Generale

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \frac{1}{20} \cos(2x) - \frac{3}{20} \sin(2x)$$

**4. Problema di Cauchy** Calcoliamo la derivata dell'integrale generale per imporre la condizione su  $y'$ :

$$y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \sin(2x) - \frac{3}{10} \cos(2x)$$

Imponiamo le condizioni:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \implies c_1 + c_2 - \frac{1}{20} = 0 \\ y'(0) = 1 \implies c_1 + 2c_2 - \frac{3}{10} = 1 \end{cases}$$

Sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{20} \\ c_1 + 2c_2 = \frac{13}{10} \quad (= \frac{26}{20}) \end{cases}$$

Sottraendo la prima dalla seconda:  $c_2 = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$ . Ricaviamo  $c_1$ :  $c_1 = \frac{1}{20} - \frac{25}{20} = -\frac{24}{20} = -\frac{6}{5}$ .

**Soluzione Finale:**

$$y(x) = -\frac{6}{5}e^x + \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{1}{20} \cos(2x) - \frac{3}{20} \sin(2x)$$

## 19. Doppia Risonanza Esponenziale

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y''(t) - y(t) = e^t - e^{-t}$$

**Svolgimento:**

**1. Soluzione Omogenea** Equazione caratteristica:  $\lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$ .

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

**2. Soluzione Particolare** Il termine noto è somma di due esponenziali che coincidono entrambi con le radici dell'omogenea. Abbiamo risonanza per entrambi. Cerchiamo una soluzione della forma:

$$y_p(t) = Ate^t + Bte^{-t}$$

Calcoliamo le derivate (regola del prodotto):

$$\begin{aligned} y'_p &= A(e^t + te^t) + B(-e^{-t} - te^{-t}) \\ y''_p &= A(e^t + e^t + te^t) + B(-e^{-t} - (e^{-t} - te^{-t})) \\ &= A(2e^t + te^t) + B(-2e^{-t} + te^{-t}) \end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione  $y'' - y = e^t - e^{-t}$ :

$$[A(2e^t + te^t) + B(-2e^{-t} + te^{-t})] - [Ate^t + Bte^{-t}] = e^t - e^{-t}$$

Semplifichiamo (i termini con la  $t$  si cancellano sempre se la risonanza è impostata bene):

$$\begin{aligned} 2Ae^t + Ate^t - 2Be^{-t} + Bte^{-t} - Ate^t - Bte^{-t} &= e^t - e^{-t} \\ 2Ae^t - 2Be^{-t} &= 1e^t - 1e^{-t} \end{aligned}$$

Uguagliamo i coefficienti:

- Per  $e^t$ :  $2A = 1 \implies A = 1/2$ .
- Per  $e^{-t}$ :  $-2B = -1 \implies B = 1/2$ .

Quindi la soluzione particolare è:

$$y_p(t) = \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}te^{-t} = \frac{t}{2}(e^t + e^{-t})$$

(Nota: questo equivarrebbe a  $t \sinh t$  o  $t \cosh t$  a seconda dei segni, ma lasciamolo così).

### 3. Integrale Generale

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}te^{-t}$$

## 20. Termine Noto Polinomiale (Risonanza)

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) = t + 1 \\ y(0) = k, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

**Svolgimento:**

- 1. Soluzione Omogenea** Equazione caratteristica:  $\lambda^2 - \lambda = 0 \implies \lambda(\lambda - 1) = 0$ . Radici:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ .

$$y_h(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{1t} = c_1 + c_2 e^t$$

(La presenza della costante  $c_1$  isolata conferma la risonanza con polinomi).

- 2. Soluzione Particolare** Termine noto  $f(t) = t + 1$  (grado 1). Poiché  $\lambda = 0$  è radice semplice, cerchiamo un polinomio di grado  $1 + 1 = 2$ , senza termine noto (inutile):

$$y_p(t) = At^2 + Bt$$

Calcoliamo le derivate:

$$y'_p(t) = 2At + B$$

$$y''_p(t) = 2A$$

Sostituiamo in  $y'' - y' = t + 1$ :

$$(2A) - (2At + B) = t + 1$$

$$-2At + (2A - B) = 1t + 1$$

Sistema dei coefficienti:

$$\begin{cases} -2A = 1 \implies A = -\frac{1}{2} \\ 2A - B = 1 \implies 2(-\frac{1}{2}) - B = 1 \end{cases}$$

Dalla seconda:  $-1 - B = 1 \implies B = -2$ .

Soluzione particolare:

$$y_p(t) = -\frac{1}{2}t^2 - 2t$$

### 3. Integrale Generale

$$y(t) = c_1 + c_2 e^t - \frac{1}{2} t^2 - 2t$$

### 4. Problema di Cauchy

Calcoliamo la derivata:

$$y'(t) = c_2 e^t - t - 2$$

Imponiamo le condizioni:

- $y'(0) = 0 \implies c_2 e^0 - 0 - 2 = 0 \implies c_2 = 2.$
- $y(0) = k \implies c_1 + c_2 - 0 - 0 = k \implies c_1 + 2 = k \implies c_1 = k - 2.$

#### Soluzione Finale:

$$y(t) = (k - 2) + 2e^t - \frac{1}{2}t^2 - 2t$$

### 21. Risonanza Completa ( $e^x$ )

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

#### Svolgimento:

- 1. Soluzione Omogenea** Equazione caratteristica:  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \implies (\lambda - 1)^2 = 0$ . Radice:  $\lambda = 1$  con molteplicità  $\mu = 2$ .

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

- 2. Soluzione Particolare** Il termine noto è  $e^x$ . Poiché  $\alpha = 1$  coincide con la radice doppia dell'omogenea, dobbiamo cercare una soluzione moltiplicata per  $x^2$ :

$$y_p(x) = Ax^2 e^x$$

Calcoliamo le derivate (con calma):

$$y'_p = A(2xe^x + x^2 e^x) = Ae^x(x^2 + 2x)$$

Per la derivata seconda, deriviamo il prodotto  $e^x \cdot (x^2 + 2x)$ :

$$y''_p = A[e^x(x^2 + 2x) + e^x(2x + 2)]$$

$$y''_p = Ae^x(x^2 + 4x + 2)$$

Sostituiamo nell'equazione  $y'' - 2y' + y = e^x$ . Dividiamo subito tutto per  $e^x$  (che non è mai zero) per semplificare i conti:

$$A(x^2 + 4x + 2) - 2A(x^2 + 2x) + Ax^2 = 1$$

Raccogliamo le potenze di  $x$ :

- Termini  $x^2$ :  $A - 2A + A = 0$  (Deve annullarsi!)

- Termini  $x$ :  $4A - 4A = 0$  (Deve annullarsi!)
- Termini noti:  $2A = 1$

Dall'ultima equazione:  $2A = 1 \implies A = 1/2$ .

Soluzione particolare:

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$$

### 3. Integrale Generale

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x = e^x \left( c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2 \right)$$

### 4. Problema di Cauchy Condizione $y(0) = 0$ :

$$0 = e^0(c_1 + 0 + 0) \implies c_1 = 0$$

Aggiorniamo la funzione per derivare meno roba ( $y = c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$ ):

$$y'(x) = c_2(e^x + xe^x) + \frac{1}{2}(2xe^x + x^2e^x)$$

Condizione  $y'(0) = 0$ :

$$0 = c_2(1 + 0) + \frac{1}{2}(0 + 0) \implies c_2 = 0$$

**Soluzione Finale:**

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$$

### 22. Soluzione 1. Soluzione Generale

Risolviamo prima l'omogenea associata  $y'' - y' - 2y = 0$ . Il polinomio caratteristico è:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Le radici sono  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = -1$ , quindi la soluzione omogenea è:

$$y_h(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$$

Cerchiamo una soluzione particolare per  $12e^{2x}$ . Poiché  $\lambda = 2$  è radice semplice del polinomio caratteristico, usiamo il metodo della somiglianza con risonanza (moltiplichiamo per  $x$ ):

$$y_p(x) = Axe^{2x}$$

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned} y'_p(x) &= Ae^{2x}(1 + 2x) \\ y''_p(x) &= Ae^{2x}(2 + 2(1 + 2x)) = Ae^{2x}(4x + 4) \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale completa:

$$Ae^{2x}(4x + 4) - Ae^{2x}(1 + 2x) - 2(Axe^{2x}) = 12e^{2x}$$

Dividendo per  $e^{2x}$ :

$$A(4x + 4 - 1 - 2x - 2x) = 12 \implies 3A = 12 \implies A = 4$$

La soluzione generale è dunque:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + 4xe^{2x}$$

## 2. Condizione Mista

Imponiamo  $y(0) + y'(0) = 18$ . Calcoliamo  $y(0)$  e  $y'(0)$ :

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 \\ y'(x) &= 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x} + 4(e^{2x} + 2xe^{2x}) \\ y'(0) &= 2c_1 - c_2 + 4 \end{aligned}$$

Sommando e imponendo la condizione:

$$(c_1 + c_2) + (2c_1 - c_2 + 4) = 18 \implies 3c_1 + 4 = 18 \implies c_1 = \frac{14}{3}$$

La famiglia di soluzioni cercata è:

$$y(x) = \frac{14}{3}e^{2x} + c_2 e^{-x} + 4xe^{2x}$$

## 3. Limite

Verifichiamo se esiste  $c_2$  tale che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{14}{3}e^{2x} + 4xe^{2x} + c_2 e^{-x} \right)$$

Notiamo che:

- $\frac{14}{3}e^{2x} \rightarrow 0$
- $4xe^{2x} \rightarrow 0$  (gerarchia degli infiniti)
- $c_2 e^{-x} \rightarrow \pm\infty$  (poiché l'esponente diventa positivo), a meno che  $c_2 = 0$ .

Affinché il limite sia finito e pari a 0, dobbiamo impostare  $c_2 = 0$ . La soluzione finale è:

$$y(x) = \frac{14}{3}e^{2x} + 4xe^{2x}$$

## 23. Soluzione

### 1. Soluzione Generale

Risolviamo l'omogenea  $y'' + y = 0$ . Le radici caratteristiche sono  $\lambda = \pm i$ , quindi:

$$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Per la soluzione particolare, sfruttiamo la linearità. Invece di espandere la sommatoria, risolviamo per il termine generico  $\sin(kx)$  con  $k \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Poiché la pulsazione naturale è  $\omega = 1$  e  $k \geq 2$ , non c'è risonanza. Cerchiamo  $y_{p,k}(x) = A_k \sin(kx)$ . Sostituendo in  $y'' + y$ :**Calcolo dei coefficienti**:

Cerchiamo una soluzione particolare della forma  $y_{p,k}(x) = A_k \sin(kx)$ . Sostituiamo  $y_{p,k}$  e la sua derivata seconda  $y''_{p,k} = -k^2 A_k \sin(kx)$  nell'equazione completa:

$$-k^2 A_k \sin(kx) + A_k \sin(kx) = \sin(kx)$$

Raccogliamo i termini simili a sinistra:

$$A_k(1 - k^2) \cdot \sin(kx) = 1 \cdot \sin(kx)$$

Uguagliamo i coefficienti del termine  $\sin(kx)$  (il termine tra parentesi a sinistra deve essere uguale al coefficiente 1 a destra):

$$A_k(1 - k^2) = 1$$

Da cui ricaviamo il valore di  $A_k$ :

$$A_k = \frac{1}{1 - k^2}$$

La soluzione particolare complessiva è la somma delle soluzioni particolari:

$$y_p(x) = \sum_{k=2}^5 \frac{1}{1 - k^2} \sin(kx)$$

La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \sum_{k=2}^5 \frac{1}{1 - k^2} \sin(kx)$$

### 3. Problema di Cauchy

Imponiamo  $y(0) = 0$ :

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \sum 0 = 0 \implies c_1 = 0$$

Imponiamo  $y'(0) = 0$ . Calcoliamo prima la derivata:

$$y'(x) = -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + \sum_{k=2}^5 \frac{k}{1 - k^2} \cos(kx)$$

In  $x = 0$ :

$$y'(0) = c_2 + \sum_{k=2}^5 \frac{k}{1 - k^2} = 0 \implies c_2 = -\sum_{k=2}^5 \frac{k}{1 - k^2} = \sum_{k=2}^5 \frac{k}{k^2 - 1}$$

Svolgiamo la somma numerica per  $k = 2, 3, 4, 5$ :

$$c_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \frac{4}{15} + \frac{5}{24} = \frac{80 + 45 + 32 + 25}{120} = \frac{182}{120} = \frac{91}{60}$$

La soluzione finale è:

$$y(x) = \frac{91}{60} \sin(x) + \sum_{k=2}^5 \frac{1}{1 - k^2} \sin(kx)$$

## 24. Soluzione

### 1. Omogenea associata

L'equazione caratteristica è  $r^2 - 5r + 6 = 0$ , che ha radici  $r_1 = 2$  e  $r_2 = 3$ . La soluzione omogenea è:

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

### 2. Soluzione particolare (Discussione su $\alpha$ )

Il termine noto è  $e^{\alpha x}$ . Dobbiamo distinguere se  $\alpha$  coincide con le radici caratteristiche.

- **Caso  $\alpha \neq 2$  e  $\alpha \neq 3$  (Nessuna risonanza):**

Cerchiamo  $y_p = Ae^{\alpha x}$ . Sostituendo nell'equazione otteniamo:

$$A(\alpha^2 - 5\alpha + 6)e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \implies A = \frac{1}{\alpha^2 - 5\alpha + 6}$$

- **Caso  $\alpha = 2$  (Risonanza semplice):**

Poiché  $\alpha = 2$  è radice semplice, cerchiamo  $y_p = Axe^{2x}$ . Calcoliamo le derivate (regola del prodotto):

$$\begin{aligned} y'_p &= Ae^{2x}(1 + 2x) \\ y''_p &= Ae^{2x}(4 + 4x) \end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione  $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ :

$$Ae^{2x}[(4 + 4x) - 5(1 + 2x) + 6x] = e^{2x}$$

I termini con la  $x$  si elidono ( $4x - 10x + 6x = 0$ ). Rimane:

$$A(4 - 5) = 1 \implies -A = 1 \implies A = -1$$

Quindi  $y_p = -xe^{2x}$ .

- **Caso  $\alpha = 3$  (Risonanza semplice):**

Poiché  $\alpha = 3$  è radice semplice, cerchiamo  $y_p = Axe^{3x}$ . Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned} y'_p &= Ae^{3x}(1 + 3x) \\ y''_p &= Ae^{3x}(6 + 9x) \end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$Ae^{3x}[(6 + 9x) - 5(1 + 3x) + 6x] = e^{3x}$$

I termini con la  $x$  si elidono ( $9x - 15x + 6x = 0$ ). Rimane:

$$A(6 - 5) = 1 \implies A = 1$$

Quindi  $y_p = xe^{3x}$ .

### Soluzione Generale:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-2)(\alpha-3)} e^{\alpha x} & \text{se } \alpha \neq 2, 3 \\ -xe^{2x} & \text{se } \alpha = 2 \\ xe^{3x} & \text{se } \alpha = 3 \end{cases}$$

## 25. Soluzione

### 1. Soluzione Omogenea

L'equazione omogenea associata è  $y'' - \alpha^2 y = 0$ . Per trovare le radici, scriviamo l'equazione caratteristica nella forma  $ar^2 + br + c = 0$ :

$$1 \cdot r^2 + 0 \cdot r - \alpha^2 = 0$$

Identifichiamo i coefficienti:

$$a = 1, \quad b = 0 \quad (\text{poiché manca } y'), \quad c = -\alpha^2$$

Calcoliamo il discriminante  $\Delta$ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-\alpha^2) = 4\alpha^2$$

Poiché  $\Delta \geq 0$ , abbiamo radici reali:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{4\alpha^2}}{2} = \frac{\pm 2\alpha}{2} = \pm\alpha$$

Quindi le soluzioni dell'omogenea sono:

- Se  $\alpha > 0$  (radici distinte  $\pm\alpha$ ):  $y_h(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$
- Se  $\alpha = 0$  (radice doppia 0):  $y_h(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} = c_1 + c_2 x$

### 2. Soluzione Particolare

Il termine noto è  $e^x$  (che ha esponente 1). Confrontiamo l'esponente 1 con le radici trovate ( $\pm\alpha$ ).

- **Caso  $\alpha \neq 1$  (Nessuna risonanza):**

L'esponente 1 è diverso dalle radici  $\pm\alpha$ . Cerchiamo  $y_p = Ae^x$ . Sostituendo nell'equazione  $y'' - \alpha^2 y = e^x$ :

$$Ae^x - \alpha^2 Ae^x = e^x \implies A(1 - \alpha^2)e^x = e^x$$

Confrontando i coefficienti:

$$A = \frac{1}{1 - \alpha^2}$$

- **Caso  $\alpha = 1$  (Risonanza):**

Se  $\alpha = 1$ , le radici sono  $\pm 1$ . La radice  $+1$  coincide con l'esponente del termine noto. Cerchiamo quindi la soluzione moltiplicando per  $x$ :

$$y_p = Axe^x$$

Calcoliamo le derivate (regola del prodotto):

$$y'_p = Ae^x(1 + x), \quad y''_p = Ae^x(2 + x)$$

Sostituiamo nell'equazione con  $\alpha = 1$  (cioè  $y'' - y = e^x$ ):

$$[Ae^x(2 + x)] - [Axe^x] = e^x$$

Sviluppando:

$$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x$$

I termini con la  $x$  si elidono perfettamente. Rimane:

$$2Ae^x = e^x \implies 2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}$$

Quindi  $y_p = \frac{1}{2}xe^x$ .

**Soluzione Generale:**

$$y(x) = \begin{cases} c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x} + \frac{1}{1-\alpha^2}e^x & \text{se } \alpha \neq 1, \alpha > 0 \\ c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x & \text{se } \alpha = 1 \\ c_1x + c_2 + e^x & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

## 26. Parametro $\alpha$ all'Esponente

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = e^{\alpha^2 x}, \quad \alpha \geq 0$$

**Svolgimento:** Analizziamo l'equazione caratteristica:  $\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \implies \lambda = \pm\alpha$ .

**CASO 1:**  $\alpha = 0$  L'equazione diventa  $y'' = 1$ . Si può risolvere integrando due volte consecutivamente:

$$y'(x) = \int 1 dx = x + c_1$$

$$y(x) = \int (x + c_1) dx = \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

(Nota: qui la risonanza era doppia,  $\lambda = 0$  con m.a.=2).

**CASO 2:**  $\alpha = 1$  L'equazione diventa  $y'' - y = e^x$ . Le radici sono  $\lambda = \pm 1$ . Il termine noto  $e^x$  va in **risonanza** con  $\lambda_1 = 1$ . Cerchiamo soluzione particolare:  $y_p(x) = Axe^x$ .

Derivate:  $y'_p = Ae^x(1+x)$   $y''_p = Ae^x(2+x)$

Sostituiamo:

$$Ae^x(2+x) - Axe^x = e^x$$

$$2Ae^x = e^x \implies 2A = 1 \implies A = 1/2$$

Soluzione per  $\alpha = 1$ :

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$$

**CASO 3:**  $\alpha > 0$  e  $\alpha \neq 1$  Le radici sono  $\lambda = \pm\alpha$ . L'esponente del termine noto è  $\alpha^2$ . Dato che  $\alpha \neq 1$  e  $\alpha \neq 0$ , allora  $\alpha^2 \neq \alpha$ . **Non c'è risonanza**.

Cerchiamo particolare della forma:  $y_p(x) = Ke^{\alpha^2 x}$ . Derivate:  $y'_p = K\alpha^2 e^{\alpha^2 x}$   $y''_p = K\alpha^4 e^{\alpha^2 x}$

Sostituiamo:

$$K\alpha^4 e^{\alpha^2 x} - \alpha^2 (Ke^{\alpha^2 x}) = e^{\alpha^2 x}$$

Dividiamo per l'esponenziale:

$$K\alpha^4 - K\alpha^2 = 1$$

$$K(\alpha^4 - \alpha^2) = 1 \implies K = \frac{1}{\alpha^2(\alpha^2 - 1)}$$

Soluzione generale ( $\alpha \neq 0, 1$ ):

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2(\alpha^2 - 1)} e^{\alpha^2 x}$$

## 27. Risonanza Polinomiale (Parametrica)

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha^2 y(x) = x^2 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

**Svolgimento:** Dobbiamo distinguere due casi in base al parametro  $\alpha$ .

**CASO 1:**  $\alpha = 0$  L'equazione diventa:

$$y''(x) = x^2$$

Procediamo per integrazione diretta due volte:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c_1 \\ y(x) &= \int \left( \frac{x^3}{3} + c_1 \right) dx = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

- $y'(0) = 0 \implies 0 + c_1 = 0 \implies c_1 = 0.$
- $y(0) = 0 \implies 0 + 0 + c_2 = 0 \implies c_2 = 0.$

Soluzione per  $\alpha = 0$ :

$$y(x) = \frac{x^4}{12}$$

**CASO 2:**  $\alpha \neq 0$

**1. Soluzione Omogenea** Equazione caratteristica:  $\lambda^2 + \alpha^2 = 0 \implies \lambda = \pm i\alpha.$

$$y_h(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)$$

**2. Soluzione Particolare** Termine noto  $P(x) = x^2$ . Poiché 0 non è soluzione dell'omogenea, **non c'è risonanza**. Cerchiamo un polinomio generico di grado 2:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Derivate:

$$y'_p = 2Ax + B$$

$$y''_p = 2A$$

Sostituiamo nell'equazione completa ( $y'' + \alpha^2 y = x^2$ ):

$$(2A) + \alpha^2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

Ordiniamo per potenze di  $x$ :

$$(\alpha^2 A)x^2 + (\alpha^2 B)x + (2A + \alpha^2 C) = 1x^2 + 0x + 0$$

Sistema dei coefficienti:

$$\begin{cases} \alpha^2 A = 1 \implies A = \frac{1}{\alpha^2} \\ \alpha^2 B = 0 \implies B = 0 \\ 2A + \alpha^2 C = 0 \implies C = -\frac{2A}{\alpha^2} \end{cases}$$

Sostituendo  $A$  in  $C$ :

$$C = -\frac{2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\alpha^2} = -\frac{2}{\alpha^4}$$

Quindi la soluzione particolare è:

$$y_p(x) = \frac{1}{\alpha^2}x^2 - \frac{2}{\alpha^4}$$

**3. Problema di Cauchy** Integrale generale:

$$y(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x) + \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^4}$$

Derivata:

$$y'(x) = -\alpha c_1 \sin(\alpha x) + \alpha c_2 \cos(\alpha x) + \frac{2x}{\alpha^2}$$

Condizioni:

- $y(0) = 0$ :

$$c_1(1) + 0 + 0 - \frac{2}{\alpha^4} = 0 \implies c_1 = \frac{2}{\alpha^4}$$

- $y'(0) = 0$ :

$$0 + \alpha c_2(1) + 0 = 0 \implies \alpha c_2 = 0 \implies c_2 = 0$$

**Soluzione Finale** ( $\alpha \neq 0$ ):

$$y(x) = \frac{2}{\alpha^4} \cos(\alpha x) + \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^4}$$

## 28. Integrabilità all'Infinito

$$\begin{cases} y''(t) - 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = \beta \end{cases}$$

**Svolgimento:**

**1. Soluzione Omogenea** Equazione caratteristica:  $\lambda^2 - 2 = 0 \implies \lambda = \pm\sqrt{2}$ .  
Integrale generale:

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

Derivata:

$$y'(t) = \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

## 2. Problema di Cauchy

Imponiamo le condizioni:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \implies c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = \beta \implies \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 = \beta \end{cases}$$

Dalla prima ricaviamo  $c_2 = 1 - c_1$ . Sostituiamo nella seconda:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}(1 - c_1) &= \beta \\ \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2} + \sqrt{2}c_1 &= \beta \\ 2\sqrt{2}c_1 &= \beta + \sqrt{2} \\ c_1 &= \frac{\beta + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\beta}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ora troviamo  $c_2$ :

$$c_2 = 1 - c_1 = 1 - \left( \frac{\beta}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{2}}$$

Quindi la soluzione unica del problema di Cauchy è:

$$y(t) = \left( \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} \right) e^{\sqrt{2}t} + \left( \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} \right) e^{-\sqrt{2}t}$$

## 3. Integrabilità all'Infinito

Ci viene chiesto per quali  $\beta$  vale:

$$\int_0^{+\infty} |y(t)| dt < +\infty$$

Analizziamo i due termini della soluzione:

- Il termine con  $e^{-\sqrt{2}t}$  tende a 0 velocemente per  $t \rightarrow +\infty$ . Questo termine è \*\*sempre integrabile\*\* (converge).
- Il termine con  $e^{\sqrt{2}t}$  tende a  $+\infty$  velocemente. Questo termine \*\*non è mai integrabile\*\* all'infinito, a meno che... non spariscia del tutto!

Affinché l'integrale converga, dobbiamo "uccidere" il termine che esplode. Condizione necessaria e sufficiente: il coefficiente di  $e^{\sqrt{2}t}$  deve essere ZERO.

$$\begin{aligned} c_1 = 0 &\implies \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{\beta}{2\sqrt{2}} &= -\frac{1}{2} \\ \beta &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

**Conclusione:** L'unico valore per cui la soluzione è integrabile è  $\beta = -\sqrt{2}$ . In tal caso la soluzione diventa semplicemente  $y(t) = e^{-\sqrt{2}t}$ .

## 29. Terzo Ordine

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y'''(x) - y'(x) = \cos(x)$$

**Svolgimento:**

**1. Soluzione Omogenea** Equazione caratteristica:

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \implies \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

Le radici sono reali e distinte:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ .

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

**2. Soluzione Particolare** Termine noto:  $\cos(x)$ . Non c'è risonanza. Cerchiamo:

$$y_p(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$$

Calcoliamo le derivate:

- $y'_p = -A \sin(x) + B \cos(x)$
- $y''_p = -A \cos(x) - B \sin(x)$
- $y'''_p = A \sin(x) - B \cos(x)$

Sostituiamo nell'equazione  $y''' - y' = \cos(x)$ :

$$[A \sin(x) - B \cos(x)] - [-A \sin(x) + B \cos(x)] = \cos(x)$$

Sommiamo i termini simili:

$$2A \sin(x) - 2B \cos(x) = \cos(x)$$

Uguagliando i coefficienti:

$$\begin{cases} 2A = 0 \implies A = 0 \\ -2B = 1 \implies B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione particolare:

$$y_p(x) = -\frac{1}{2} \sin(x)$$

**3. Integrale Generale**

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin(x)$$

## 30. Quarto Ordine

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y'''(x) - y(x) = e^{-x}$$

**Svolgimento:**

**1. Soluzione Omogenea** Equazione caratteristica:

$$\lambda^4 - 1 = 0 \implies (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

Abbiamo 4 radici:

- $\lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$  (Reali)
- $\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i$  (Immaginarie)

Soluzione omogenea (somma di esponenziali e oscillazioni):

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x)$$

**2. Soluzione Particolare** Termine noto  $e^{-x}$ . Poiché  $\lambda = -1$  è radice semplice dell'omogenea, c'è risonanza Dobbiamo moltiplicare per  $x$ :

$$y_p(x) = Axe^{-x}$$

Calcoliamo le derivate (regola del prodotto ripetuta):

- $y'_p = A(1-x)e^{-x}$
- $y''_p = A(-1-(1-x))e^{-x} = A(x-2)e^{-x}$
- $y'''_p = A(1-(x-2))e^{-x} = A(3-x)e^{-x}$
- $y''''_p = A(-1-(3-x))e^{-x} = A(x-4)e^{-x}$

Sostituiamo nell'equazione  $y'''' - y = e^{-x}$ :

$$[A(x-4)e^{-x}] - [Axe^{-x}] = e^{-x}$$

Svolgiamo:

$$Axe^{-x} - 4Ae^{-x} - Axe^{-x} = e^{-x}$$

I termini con  $x$  si cancellano (ottimo segno!):

$$-4Ae^{-x} = e^{-x}$$

Confronto coefficienti:

$$-4A = 1 \implies A = -\frac{1}{4}$$

Soluzione particolare:

$$y_p(x) = -\frac{1}{4}xe^{-x}$$

### 3. Integrale Generale

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x) - \frac{1}{4}xe^{-x}$$

#### 31. Oscillatore Armonico Forzato ( $\omega$ )

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = \cos(\omega x) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

**Svolgimento:** Omogenea:  $y_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$ .

**CASO 1:**  $\omega \neq 3$  (Nessuna Risonanza) Cerchiamo  $y_p(x) = A \cos(\omega x)$ .

Calcolo derivate:

$$\begin{aligned}y'_p(x) &= -A\omega \sin(\omega x) \\y''_p(x) &= -A\omega^2 \cos(\omega x)\end{aligned}$$

Sostituzione in  $y'' + 9y = \cos(\omega x)$ :

$$[-A\omega^2 \cos(\omega x)] + 9[A \cos(\omega x)] = \cos(\omega x)$$

$$A(9 - \omega^2) \cos(\omega x) = \cos(\omega x) \implies A = \frac{1}{9 - \omega^2}$$

**CASO 2:  $\omega = 3$  (Risonanza)** Cerchiamo  $y_p(x) = x[A \cos(3x) + B \sin(3x)] = Ax \cos(3x) + Bx \sin(3x)$ .

Calcolo derivate (regola del prodotto):

$$y'_p = A \cos(3x) - 3Ax \sin(3x) + B \sin(3x) + 3Bx \cos(3x)$$

$$y''_p = -3A \sin(3x) - [3A \sin(3x) + 9Ax \cos(3x)] + 3B \cos(3x) + [3B \cos(3x) - 9Bx \sin(3x)]$$

Raggruppando i termini della derivata seconda:

$$y''_p = -6A \sin(3x) + 6B \cos(3x) - 9Ax \cos(3x) - 9Bx \sin(3x)$$

Sostituzione in  $y'' + 9y = \cos(3x)$ : Osserviamo che i termini con la  $x$  (quelli con il 9) si cancellano esattamente con  $+9y_p$ . Rimangono solo i termini "liberi":

$$-6A \sin(3x) + 6B \cos(3x) = \cos(3x)$$

Sistema:

$$\begin{cases} -6A = 0 \implies A = 0 & (\text{coefficiente del seno}) \\ 6B = 1 \implies B = 1/6 & (\text{coefficiente del coseno}) \end{cases}$$

Quindi  $y_p(x) = \frac{1}{6}x \sin(3x)$ .

### Problemi di Cauchy

Ricordiamo le condizioni iniziali:  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ . L'omogenea è sempre  $y_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$ .

**1. Per  $\omega \neq 3$ :** Integrale generale:

$$y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + \frac{1}{9 - \omega^2} \cos(\omega x)$$

Derivata:

$$y'(x) = -3c_1 \sin(3x) + 3c_2 \cos(3x) - \frac{\omega}{9 - \omega^2} \sin(\omega x)$$

Imponiamo le condizioni:

- $y(0) = 1 \implies c_1(1) + 0 + \frac{1}{9 - \omega^2}(1) = 1 \implies c_1 = 1 - \frac{1}{9 - \omega^2}$
- $y'(0) = 0 \implies 0 + 3c_2(1) - 0 = 0 \implies c_2 = 0$

Soluzione finale ( $\omega \neq 3$ ):

$$y(x) = \left(1 - \frac{1}{9-\omega^2}\right) \cos(3x) + \frac{1}{9-\omega^2} \cos(\omega x)$$

**2. Per  $\omega = 3$ :** Integrale generale:

$$y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + \frac{1}{6}x \sin(3x)$$

Derivata (attenzione alla regola del prodotto sull'ultimo termine):

$$y'(x) = -3c_1 \sin(3x) + 3c_2 \cos(3x) + \frac{1}{6} \sin(3x) + \frac{1}{2}x \cos(3x)$$

Imponiamo le condizioni:

- $y(0) = 1 \implies c_1(1) + 0 + 0 = 1 \implies c_1 = 1$
- $y'(0) = 0 \implies 0 + 3c_2(1) + \frac{1}{6}(0) + 0 = 0 \implies c_2 = 0$

Soluzione finale ( $\omega = 3$ ):

$$y(x) = \cos(3x) + \frac{1}{6}x \sin(3x)$$

## 32. Studio Completo Risonanza Trigonometrica

Si considera  $y''(x) + 4y(x) = \sin(\alpha x)$  con  $\alpha \geq 0$ .

**Svolgimento:**

**a) Integrale Generale al variare di  $\alpha$**

1. *Soluzione Omogenea:*  $\lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda = \pm 2i$ .

$$y_h(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

2. *Soluzione Particolare:* Distinguiamo se  $\alpha$  coincide con la frequenza naturale (2).

**Caso  $\alpha \neq 2$  (No Risonanza):** Cerchiamo  $y_p(x) = A \sin(\alpha x)$ . Derivate:  $y_p'' = -A\alpha^2 \sin(\alpha x)$ . Sostituzione:

$$\begin{aligned} -A\alpha^2 \sin(\alpha x) + 4A \sin(\alpha x) &= \sin(\alpha x) \\ A(4 - \alpha^2) &= 1 \implies A = \frac{1}{4 - \alpha^2} \\ y(x) &= c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{4 - \alpha^2} \sin(\alpha x) \end{aligned}$$

**Caso  $\alpha = 2$  (Risonanza):** Cerchiamo  $y_p(x) = x[A \cos(2x) + B \sin(2x)]$ . Poiché manca  $y'$ , sappiamo che rimarrà il termine "sfasato" (il coseno). Svolgendo i calcoli completi si ottiene:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{4}, \quad B = 0 \\ y_p(x) &= -\frac{1}{4}x \cos(2x) \\ y(x) &= c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - \frac{1}{4}x \cos(2x) \end{aligned}$$

**b) Limitata inferiormente?** Dobbiamo vedere se  $y(x) \rightarrow -\infty$  per qualche  $x$ .

- Se  $\alpha \neq 2$ : La soluzione è somma di seni e coseni limitati. La funzione è limitata (oscilla tra un max e un min).
- Se  $\alpha = 2$ : C'è il termine  $-\frac{1}{4}x \cos(2x)$ . L'ampiezza dell'oscillazione cresce linearmente con  $x$ . Quindi per  $x \rightarrow +\infty$  la funzione assume valori arbitrariamente grandi e arbitrariamente piccoli (non è limitata né sup. né inf.).

**Risposta:** Solo per  $\alpha = 2$ .

---

### c) Problemi di Cauchy ( $y(0) = 1, y'(0) = 1$ )

**Caso  $\alpha = 4$  (No Risonanza):** Usiamo la formula generale con  $\alpha = 4$ :

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{4 - 16} \sin(4x)$$

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - \frac{1}{12} \sin(4x)$$

Derivata:

$$y'(x) = -2c_1 \sin(2x) + 2c_2 \cos(2x) - \frac{4}{12} \cos(4x)$$

Condizioni:

- $y(0) = 1 \implies c_1 = 1$ .
- $y'(0) = 1 \implies 2c_2 - \frac{1}{3} = 1 \implies 2c_2 = \frac{4}{3} \implies c_2 = \frac{2}{3}$ .

Soluzione ( $\alpha = 4$ ):

$$y(x) = \cos(2x) + \frac{2}{3} \sin(2x) - \frac{1}{12} \sin(4x)$$

**Caso  $\alpha = 2$  (Risonanza):** Formula risonante:

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - \frac{1}{4}x \cos(2x)$$

Derivata:

$$y'(x) = -2c_1 \sin(2x) + 2c_2 \cos(2x) - \frac{1}{4}[\cos(2x) - 2x \sin(2x)]$$

Condizioni:

- $y(0) = 1 \implies c_1 = 1$ .
- $y'(0) = 1 \implies 0 + 2c_2 - \frac{1}{4}(1 - 0) = 1 \implies 2c_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \implies c_2 = \frac{5}{8}$ .

Soluzione ( $\alpha = 2$ ):

$$y(x) = \cos(2x) + \frac{5}{8} \sin(2x) - \frac{1}{4}x \cos(2x)$$

### 33. Parametro $\epsilon$ e Variabile Indipendente

$$\begin{cases} y''_\epsilon(x) - \epsilon^2 y_\epsilon(x) = x \\ y_\epsilon(0) = \epsilon^2, \quad y'_\epsilon(0) = 0 \end{cases}$$

**Svolgimento:**

**1. Soluzione Omogenea** Equazione caratteristica:  $\lambda^2 - \epsilon^2 = 0 \implies \lambda = \pm\epsilon$ .

$$y_h(x) = c_1 e^{\epsilon x} + c_2 e^{-\epsilon x}$$

**2. Soluzione Particolare** Termine noto  $x$  (polinomio grado 1). Cerchiamo  $y_p(x) = Ax + B$ . Derivate:  $y'_p = A$ ,  $y''_p = 0$ .

Sostituzione:

$$\begin{aligned} 0 - \epsilon^2(Ax + B) &= x \\ -\epsilon^2 Ax - \epsilon^2 B &= x \end{aligned}$$

Uguaglianza coefficienti:

$$\begin{cases} -\epsilon^2 A = 1 \implies A = -\frac{1}{\epsilon^2} \\ -\epsilon^2 B = 0 \implies B = 0 \end{cases}$$

$$y_p(x) = -\frac{x}{\epsilon^2}$$

**3. Problema di Cauchy** Integrale generale:

$$y(x) = c_1 e^{\epsilon x} + c_2 e^{-\epsilon x} - \frac{x}{\epsilon^2}$$

Derivata:

$$y'(x) = c_1 \epsilon e^{\epsilon x} - c_2 \epsilon e^{-\epsilon x} - \frac{1}{\epsilon^2}$$

Imponiamo le condizioni ( $y(0) = \epsilon^2$ ,  $y'(0) = 0$ ):

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \epsilon^2 \quad (\text{da } y(0)) \\ \epsilon(c_1 - c_2) - \frac{1}{\epsilon^2} = 0 \implies c_1 - c_2 = \frac{1}{\epsilon^3} \quad (\text{da } y'(0)) \end{cases}$$

Risolviamo il sistema (Somma e Sottrazione):

- $2c_1 = \epsilon^2 + \frac{1}{\epsilon^3} \implies c_1 = \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{1}{2\epsilon^3}$
- $2c_2 = \epsilon^2 - \frac{1}{\epsilon^3} \implies c_2 = \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{1}{2\epsilon^3}$

**Soluzione Finale:**

$$y_\epsilon(x) = \left(\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{1}{2\epsilon^3}\right) e^{\epsilon x} + \left(\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{1}{2\epsilon^3}\right) e^{-\epsilon x} - \frac{x}{\epsilon^2}$$

*Forma alternativa con seno e coseno iperbolico:*

$$y_\epsilon(x) = \epsilon^2 \cosh(\epsilon x) + \frac{1}{\epsilon^3} \sinh(\epsilon x) - \frac{x}{\epsilon^2}$$

### 34. Equazione Integro-Differenziale

Risolvere derivando ambo i membri:

$$\int_0^x y(t) dt + y'(x) = e^x, \quad \text{con } y(0) = 0$$

**Svolgimento:**

**1. Trasformazione in Equazione Differenziale** Deriviamo entrambi i membri dell'equazione rispetto a  $x$ :

$$\frac{d}{dx} \left( \int_0^x y(t) dt \right) + \frac{d}{dx} (y'(x)) = \frac{d}{dx} (e^x)$$

Applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo integrale:

$$y(x) + y''(x) = e^x$$

Riordiniamo:

$$y''(x) + y(x) = e^x$$

**2. Determinazione delle Condizioni Iniziali** Abbiamo bisogno di  $y(0)$  e  $y'(0)$ .

- $y(0) = 0$  (Dato dal problema).
- Per trovare  $y'(0)$ , sostituiamo  $x = 0$  nell'equazione *originale* (quella con l'integrale):

$$\begin{aligned} \int_0^0 y(t) dt + y'(0) &= e^0 \\ 0 + y'(0) &= 1 \implies y'(0) = 1 \end{aligned}$$

Il problema diventa:

$$\begin{cases} y'' + y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

**3. Soluzione Omogenea**  $\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i$ .

$$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

**4. Soluzione Particolare** Termine noto  $e^x$ . Non c'è risonanza (le radici sono immaginarie). Cerchiamo  $y_p(x) = Ae^x$ . Derivate:  $y'_p = Ae^x$ ,  $y''_p = Ae^x$ .

Sostituzione:

$$Ae^x + Ae^x = e^x \implies 2Ae^x = e^x \implies 2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{1}{2}e^x$$

**5. Calcolo delle Costanti** Derivata dell'integrale generale:

$$y'(x) = -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + \frac{1}{2}e^x$$

Sistema condizioni:

- $y(0) = 0 \implies c_1(1) + 0 + \frac{1}{2} = 0 \implies c_1 = -\frac{1}{2}$
- $y'(0) = 1 \implies 0 + c_2(1) + \frac{1}{2} = 1 \implies c_2 = \frac{1}{2}$

**Soluzione Finale:**

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2} e^x$$

*Oppure raccogliendo:*

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^x + \sin(x) - \cos(x))$$

### 35. Perturbazione Singolare ( $\epsilon$ )

$$\begin{cases} -\epsilon^2 y''_\epsilon(x) + y_\epsilon(x) = e^{-x} \\ y_\epsilon(0) = 0 \\ y'_\epsilon(0) = \frac{1}{\epsilon(\epsilon+1)} \end{cases}$$

con  $0 < \epsilon < 1$ .

**Svolgimento:**

1. **Soluzione Omogenea**  $-\epsilon^2 \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \implies \lambda = \pm \frac{1}{\epsilon}$ .

$$y_h(x) = c_1 e^{\frac{x}{\epsilon}} + c_2 e^{-\frac{x}{\epsilon}}$$

2. **Soluzione Particolare** Termine noto  $e^{-x}$ . Poiché  $0 < \epsilon < 1$ , allora  $1/\epsilon > 1$ , quindi nessuna risonanza con  $-1$ . Cerchiamo  $y_p(x) = Ae^{-x}$ .

$$y'_p = -Ae^{-x}, \quad y''_p = Ae^{-x}$$

Sostituiamo nell'equazione  $-\epsilon^2 y'' + y = e^{-x}$ :

$$-\epsilon^2(Ae^{-x}) + Ae^{-x} = e^{-x}$$

$$A(1 - \epsilon^2)e^{-x} = e^{-x} \implies A = \frac{1}{1 - \epsilon^2}$$

Integrale generale:

$$y(x) = c_1 e^{\frac{x}{\epsilon}} + c_2 e^{-\frac{x}{\epsilon}} + \frac{1}{1 - \epsilon^2} e^{-x}$$

3. **Problema di Cauchy (passaggio critico)** Calcoliamo la derivata:

$$y'(x) = \frac{c_1}{\epsilon} e^{\frac{x}{\epsilon}} - \frac{c_2}{\epsilon} e^{-\frac{x}{\epsilon}} - \frac{1}{1 - \epsilon^2} e^{-x}$$

Imponiamo le condizioni a  $x = 0$ :

- (a)  $y(0) = 0 \implies c_1 + c_2 + \frac{1}{1 - \epsilon^2} = 0 \implies c_1 + c_2 = -\frac{1}{1 - \epsilon^2}$
- (b)  $y'(0) = \frac{1}{\epsilon(\epsilon+1)} \implies \frac{1}{\epsilon}(c_1 - c_2) - \frac{1}{1 - \epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon(\epsilon+1)}$

Lavoriamo sulla seconda equazione per semplificarla. Moltiplichiamo tutto per  $\epsilon$ :

$$c_1 - c_2 = \frac{1}{\epsilon + 1} + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon^2}$$

Notiamo che  $1 - \epsilon^2 = (1 - \epsilon)(1 + \epsilon)$ . Facciamo il denominatore comune a destra:

$$c_1 - c_2 = \frac{1(1 - \epsilon) + \epsilon}{(1 - \epsilon)(1 + \epsilon)} = \frac{1}{(1 - \epsilon)(1 + \epsilon)} = \frac{1}{1 - \epsilon^2}$$

Ora il sistema è pulitissimo:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{1}{1 - \epsilon^2} \\ c_1 - c_2 = \frac{1}{1 - \epsilon^2} \end{cases}$$

Sommendo le due equazioni:  $2c_1 = 0 \implies c_1 = 0$ . Sottraendo:  $2c_2 = -\frac{2}{1 - \epsilon^2} \implies c_2 = -\frac{1}{1 - \epsilon^2}$ .

**Soluzione**  $y_\epsilon(x)$ :

$$\begin{aligned} y_\epsilon(x) &= -\frac{1}{1 - \epsilon^2} e^{-\frac{x}{\epsilon}} + \frac{1}{1 - \epsilon^2} e^{-x} \\ y_\epsilon(x) &= \frac{e^{-x} - e^{-x/\epsilon}}{1 - \epsilon^2} \end{aligned}$$

**4. Limite Puntuale** Calcoliamo  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} y_\epsilon(x)$  per un  $x > 0$  fissato.

- Il denominatore  $(1 - \epsilon^2) \rightarrow 1$ .
- L'esponente  $-x/\epsilon \rightarrow -\infty$  (poiché  $x > 0$  e  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ), quindi  $e^{-x/\epsilon} \rightarrow 0$ .
- Il termine  $e^{-x}$  rimane costante.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - e^{-x/\epsilon}}{1 - \epsilon^2} = \frac{e^{-x} - 0}{1} = e^{-x}$$