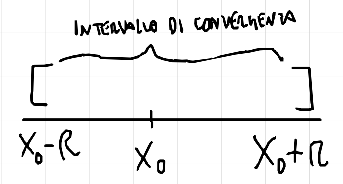
SERIE DI POTENZA

FORMA GENERALE: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) \dots$

x_0: NUMERO REALE CHE CI INDICA DOVE È CENTRATA LA SERIE

IL RAGGIO DI CONVERGENZA È L'INTERVALLO DOVE CONVERGE LA SERIE. PUÒ ESSERE CHIUSO O APERTO, DA UNO O ENTRAMBI I LATI.



GENERALMENTE QUESTI ESERCIZI SI RISOLVONO CON IL CRITERIO DEL RAPPORTO (SI FA SOLO SU a_n, LA PARTE $(x-x_0)$ NON CI INTERESSA PER ORA)

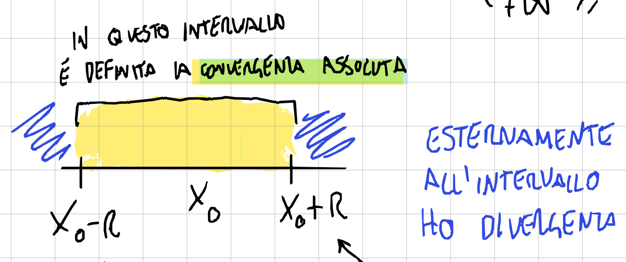
① FACCIAMO: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

- ℓ ? → RAGGIO DI CONVERGENZA $(R) = \frac{1}{\ell}$
- 0 ? → $R = +\infty$
- $+\infty$? → $R = 0$ (LA CONVERGENZA SI RIDUCE A UN PUNTO)

IN ALCUNI CASI USIAMO IL CRITERIO DELLA RADICE: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

- ℓ ? //
- 0 ? //
- $+\infty$ //

(STESSE CONCLUSIONI)



② DOBBIAMO CAPIRE COSA ACCADE NEI PUNTI $x_0 - R$, $x_0 + R$

- PUÒ ESSERCI CONVERGENZA ASSOLUTA
- PUÒ ESSERCI CONVERGENZA SEMPLICE
- PUÒ NON ESSERCI CONVERGENZA (DIVERGE)

PER SCOPRIRLO STUDIO IL CARATTERE DELLA SERIE SOSTITUENDO $x_0 = x_0 + R$ E $x_0 = x_0 - R$

ESEMPIO ESERCIZIO COMPLETO:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x-2)^n$

1 2 3

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \to R = 1$

COSA SUCCEDE IN 1 E 3 ?

- $x = 3$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE (ARMONICA)
- $x = 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ CONVERGE (SEGNI ALTERNI LEIBNIZ)

ALTRO ESEMPIO:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-2)^n$

1 2 3

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ $R = 1$

PER ADESSO HO ASSICURATA L'ASSOLUTA CONVERGENZA IN x $]1,3[$

VEDIAMO COSA SUCCEDE IN 1,3

- $x = 3$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → SERIE ARMONICA, DIVERGE
- $x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ → SERIE A SEGNI ALTERNI, CONVERGE

QUINDI L'INTERVALLO DI CONVERGENZA È $[1,3[$

ALTRO ESERCIZIO:

$\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + 2^n)\, x^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 2^{n+1}}{3^n + 2^n} = \frac{3 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n}{3^n + 2^n} = \frac{3^n\left[3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{3^n\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]} = 3 \to R = \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}$ 0 $\frac{1}{3}$

ESTREMI:

- $x = \frac{1}{3}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n}$ DIVERGE PERCHÉ $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n} = 1$
- $x = -\frac{1}{3}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n + 2^n}{3^n}$ SERIE A SEGNI ALTERNI DI LEIBNIZ $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n} = 1 \neq 0$ NON RISPETTA NEANCHE IL PRIMO CRITERIO QUINDI DIVERGE

L'INTERVALLO DI CONVERGENZA È QUINDI $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$