EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE A VARIABILI SEPARABILI

FORMA GENERALE:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

OVVERO LA DERIVATA PRIMA = PRODOTTO DI FUNZIONE DIPENDENTE DA x E FUNZIONE g DIPENDENTE DA y

ESEMPI:

$$y' = \underbrace{y}_{g(y)} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \qquad y' = \underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{y \ln y}_{g(y)}$$

COME RISOLVERLE:

ESEMPIO 1:

$$y' = y^2 \cdot \ln x$$

SCRIVIAMOLA IN FORMA $dy = y^2 \ln x \, dx$

1) SEPARIAMO y ED x:

$$\frac{dy}{y^2} = \ln x \, dx$$

2) INTEGRIAMO ENTRAMBI I MEMBRI

$$\underbrace{\int \frac{1}{y^2} \, dy}_{\text{GENERALIZZATO}} = \underbrace{\int \ln x \, dx}_{\text{PER PARTI}}$$

RISULTATO:

$$-\frac{1}{y} = x \ln x - x + c$$

3) RICAVARE y CON LA FORMULA INVERSA:

$$y(x) = \frac{-1}{x \ln x - x + c}$$

PER RIPROVA BASTEREBBE CALCOLARE $y'(x)$ DEL NOSTRO RISULTATO E VERREBBE L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORIGINALE.

ESEMPIO CON PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = \sin x \cdot e^y \\ y = \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

→ SIGNIFICA CHE ALLA FINE SOSTITUIRÓ A "C" DELL'INTEGRALE IL VALORE $\frac{\pi}{2}$ PER TROVARE QUESTA SOLUZIONE PARTICOLARE

1) SEPARIAMO LE y E LE x

$$\frac{dy}{e^y} = \sin x \, dx$$

2) INTEGRO

$$\int \frac{1}{e^y} \, dy = \int \sin x \, dx$$

$$+e^{-y} = +\cos x + c$$

3) RICAVO y:

$$y = -\ln(\cos x + c)$$

4) RISOLVO IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$1 = -\ln\Big(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + c\Big)$$

$$-1 = +\ln(c) \quad \text{APPLICO } e$$

TROVIAMO $c = \frac{1}{e}$

LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY É QUINDI

$$\boxed{y(x) = -\ln\left(\cos x + \frac{1}{e}\right)}$$

NOTA: SE NELLA NOSTRA EQUAZIONE $y' = f(x) \cdot g(y)$ ESISTE UN VALORE k PER IL QUALE $g(k) = 0$ ALLORA $y(x) = k$ É UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

↓

SE RIPRENDIAMO L'ESERCIZIO ALL'INIZIO: $y' = y^2 \cdot \ln x$, NOTIAMO CHE $g(y)$, OVVERO y^2, SI ANNULLA PER y (CHIAMIAMOLO k) UGUALE A 0, QUINDI $y(x) = 0$ ERA UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CHE CON IL METODO STANDARD NON ERA NEANCHE USCITA!