SPAZIO VETTORIALE: INSIEME CON ELEMENTO NULLO, CHIUSO ALLA SOMMA E MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE
ESEMPI SPAZI VETTORIALI: $\mathbb{R}^2$, INSIEME DI POLINOMI, MATRICI TRIANGOLARI, INSIEME DI MATRICI $m \times m$

PRODOTTO TRA MATRICI: SOLO SE $A_{m\times m}$ e $B_{m \times p} \Rightarrow C_{m\times p}$

MATRICE TRASPOSTA: SCAMBIO RIGHE E COLONNE, **SIMMETRICA**: SIMMETRICA RISPETTO ALLA DIAGONALE

VETTORI LINEARMENTE INDIP: IN $\mathbb{R}^2$ SONO DIP. QUANDO SONO PARALLELI, E SI POSSONO SCRIVERE $\lambda V_1 = V_2$. IN CASO CONTRARIO SONO INDIP SE NON POSSO SCRIVERE UNO COME COMBINAZIONE DELL'ALTRO

VERIFICA LINEARE DIP: $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 0$ SE ESCONO SOL $\neq 0$ SONO DIP.

SPAN LINEARE: INSIEME DELLE COMBINAZIONI LINEARI DI $(V_1, \dots, V_m) = \{\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \dots + \lambda_k V_k\}$

SISTEMA DI GENERATORI: I VETTORI $V_1, V_2, \dots, V_m$ SONO UN SISTEMA DI GEN. DI UNO SPAZIO V SE OGNI VETTORE DI V SI PUÓ OTTENERE COME COMBINAZIONE LINEARE DI $V_1, \dots, V_k$

BASE: UNA BASE É L'INSIEME MINIMO DI VETTORI CHE COPRONO TUTTO LO SPAZIO V, LINEARMENTE INDIPENDENTI
DIFFERENZA BASE-SISTEMA DI GENERATORI: UNA BASE É L'INSIEME MINIMO, NEL SISTEMA PUÓ ESSERCI RIDONDANZA (LINEARE DIPENDENZA). IN UNA BASE CI SONO INFINITI GENERATORI E BASI

DIMENSIONE: OGNI BASE DI V HA LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI, $V = \mathrm{SPAN}(V_1, \dots, V_m)$ m FISSO.
RICONOSCERE UNA BASE: VOGLIO VEDERE SE $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\7\\11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\-5\\3\end{pmatrix}$ SONO BASE. LI METTO IN UN UNICA MATRICE E LA FACCIO DIVENTARE TRIANGOLARE. SE UNA COLONNA VIENE 0, ERA DIPENDENTE.

$\det(KA) = K^m \det(A)$ $\quad \det(A^T) = \det(A)$

DETERMINANTE MATRICE: NUMERO REALE ASSOCIATO AD UNA MATRICE $m \times m$
SVILUPPO DI LAPLACE: VALIDO PER TUTTE E SOLE MATRICI QUADRATE, ESEMPIO: $\det A = \begin{vmatrix}3&2&3\\1&4&1\\2&-1&5\end{vmatrix}$
MINORE COMPLEMENTARE: SCELGO UN ELEMENTO ij DELLA MATRICE, IL MIN. COMP. SAREBBE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE TOGLIENDO L'ELEMENTO ij
COMPLEMENTO ALGEBRICO: $(-1)^{i+j}$, SE $i+j$ PARI 1, $i+j$ DISP -1

1) SCELGO UNA RIGA (PREFERIBILMENTE LA PRIMA)
2) CALCOLIAMO IL MINORE COMPLEMENTARE OGNI ELEMENTO DELLA RIGA E LI SOMMO
$A_{11} = 1 \cdot \det \begin{vmatrix}4&1\\-1&5\end{vmatrix} \cdot 3 \rightarrow (4\cdot5)-(1\cdot -1)$ (COEFF)
$A_{12} = -1 \cdot \det \begin{vmatrix}1&1\\2&5\end{vmatrix} \cdot 2$
$A_{13} = \dots$ $\det A = A_{11} + A_{12} + A_{13}$

SARRUS: METODO PER CALCOLO DET PER MATRICI 3x3. SE HO UNA RIGA O COLONNA TUTTI 0 $\rightarrow$ DET. NULLO
- DUE RIGHE O COLONNE UGUALI $\rightarrow$ DET NULLO
- LINEE O COLONNE LIN. DIP. $\rightarrow$ DET. NULLO

FUNZIONAMENTO:
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$
$\det A: a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$

SE SCAMBIO DUE RIGHE O COLONNE CAMBIA SEGNO

ESEMPIO: $\begin{vmatrix}0&-1&5\\1&0&1\\2&3&4\end{vmatrix}$ $\rightarrow$ PER VEDERE SE SONO BASE CALCOLO IL DET, SE É NULLO ERANO LIN. DIP., SE NON É NULLO SONO BASE

MATRICI 4X4 O SUPERIORI: SE VOGLIO CALCOLARE IL DETERMINANTE MI CONVIENE TRASFORMARLA IN TRIANGOLARE SUP. O INF. IL DET. SARÁ UGUALE AL PRODOTTO DEI COEFF. SULLA DIAGONALE PRINCIPALE. SE SCAMBIO RIGHE O COLONNE CAMBIA SEGNO DET

RIASSUNTO DET: MATRICE 1×1 O 2×2: IMMEDIATO
3×3: SARRUS O LAPLACE
4×4 O SUPERIORE: SCAMBI RIGHE/COLONNE

SE $\det(A) = 0$ LA MATRICE É SINGOLARE (RANGO NON MASSIMO)

COMPLETAMENTO AD UNA BASE: HO 3 VETTORI $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$. VOGLIO COMPLETARLI AD $\mathbb{R}^5$. LI METTO IN UNA MATRICE PORTANDOLA "QUASI" TRIANGOLARE. (POI METTO ALTRI 2 VETTORI)
ARRIVERÓ AD AVERE $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&3&-1\\0&4&1\\1&4&2\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ BASTA CHE AGGIUNGO $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ED OTTENGO LA BASE DI $\mathbb{R}^5$

RANGO DI UNA MATRICE: MASSIMO NUMERO DI RIGHE O COLONNE LIN. INDIP. É LA DIMENSIONE DEL SUO SPAN
MATRICE A GRADINI: SE LE EVENTUALI RIGHE NULLE STANNO IN FONDO. E SE SOTTO IL PRIMO ELEMENTO NON NULLO DI OGNI RIGA SONO TUTTI 0
PIVOT: PRIMO ELEMENTO DI OGNI RIGA
NUMERO PIVOT = RANGO MATRICE
GAUSS PER IL RANGO: POSSO SCAMBIARE RIGHE E COLONNE PORTANDO LA MATRICE A GRADINI

SISTEMI LINEARI OMOGENEI: QUANDO IL TERMINE NOTO SONO TUTTI ZERI $(x+y+z=0)$
TEOREMA FONDAMENTALE DEI SISTEMI LINEARI
DIMENSIONE SPAZIO SOLUZIONI $= m$ INCOGNITE $-$ RANGO
$=$ KERNEL

SISTEMI LINEARI:
SE TUTTE LE COLONNE DELLA MATRICE HANNO PIVOT IL SISTEMA HA UNICA SOL $\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&0\\0&2&4&-2&8\\0&0&1&1&7\\0&0&0&-1&-4\end{array}\right)$
SE COMPARE UNA RIGA CON TUTTI 0 IL SISTEMA NON AMMETTE SOLUZIONI $m \neq 0$ (IMPOSSIBILE)
SE CI SONO COLONNE DELLA MATRICE DEI COEFF. SENZA PIVOT E NON CI SONO RIGHE DEL TIPO 0000:m IL SISTEMA HA INFINITE SOL. $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&4\end{array}\right)$

ROUCHÉ CAPELLI PER SIS. LIN.: CONSIDERIAMO UN SISTEMA DI m EQUAZIONI ED m INCOGNITE, E COSTRUIAMO LA MATRICE "A" CON SOLO I COEFFICIENTI E LA MATRICE (A/b) COMPLETA (E FACCIAMO GAUSS)
- IL SISTEMA HA UNICA SOL SE $rk(A) = rk(A/b) = m$
- INFINITE SOL. SOLO SE $rk(A) = rk(A/b) = r < m$ (SOLUZIONI DIPENDONO DA $m-r$ PARAMETRI)
- NO SOLUZIONI SE $rk(A) \neq rk(A/b)$

SI USA PER VERIFICARE LA COMPATIBILITÁ. POSSO FARE DIRETTAMENTE LA MATRICE COMPLETA E RISOLVO IL SISTEMA

MATRICE INVERSA: DEVE ESSERE $m\times m$ CON $\det \neq 0$
MATRICE NON SINGOLARE: $\det \neq 0$, ALLORA É INVERTIBILE
METODI: GAUSS $\rightarrow$ 1) CALCOLO DETERMINANTE 2) CREO MATRICE LARGA IL DOPPIO CON A SINISTRA LA MATRICE DI PARTENZA, A DESTRA L'IDENTITÁ. 3) LA PARTE SINISTRA LA PORTO A SCALA, POI TUTTA LA DIAGONALE CON COEFFICIENTI 1, POI PORTO ANCHE TUTTI I NUMERI SOPRA LA DIAGONALE A 0. INFINE LA PARTE DESTRA DELLA MATRICE É L'INVERSA $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&2&2\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&-1&1&2\end{array}\right)$ INVERSA
METODO COMPLEMENTI ALGEBRICI: 1) CALCOLO DETERMINANTE $\neq 0$ 2) COSTRUISCO LA STESSA MATRICE CAMBIANDO AD OGNI COEFFICIENTE IL SUO COMPLEMENTO ALGEBRICO. DA QUESTA MATRICE POI FACCIO LA TRASPOSTA 4) MOLTIPLICO LA MATRICE PER IL RECIPROCO DEL DETERMINANTE INIZIALE

SOMMA SOTTOSPAZI: $U+V = \{u+v \mid u \in U, v \in V\}$. $U = \mathrm{SPAN}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, $V = \mathrm{SPAN}\{(0,1,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$
CON GAUSS CONTROLLO SE SONO LIN. INDIP E STABILISCO LO SPAN. ESSENDO IN $\mathbb{R}^3$ LA DIM. MASSIMA SARÁ 3.
INTERSEZIONE SOTTOSPAZI: É SEMPRE UN SOTTOSPAZIO $\rightarrow U \cap V = \{x \in W \mid x \in U, x \in V\}$ (VETTORI PRESENTI IN ENTRAMBI I SOTTOSPAZI)
SEGUENDO L'ESEMPIO DI SOPRA $U \cap V = \mathrm{SPAN}\{(0,1,0)\} \rightarrow \dim U\cap V = 1$
GRASSMANN: $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U\cap V)$
$\dim(U\cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V)$ VALE SOLO PER DUE SOTTOSPAZI
PER 3 SOTTOSP. $\rightarrow \dim(U+V+W) = \dim U + \dim V + \dim W - \dim(U\cap V) - \dim(U\cap W) - \dim(V\cap W) + \dim(U\cap V\cap W)$

BINET: $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (SE A É INVERTIBILE), $\det(A^k) = (\det A)^k$

AUTOVALORI: 1) CALCOLO IL $\det(A - \lambda I) \rightarrow$ MATRICE IDENTITÁ. IN POCHE PAROLE SOTTRAGGO AD OGNI COEFFICIENTE DELLA DIAGONALE IL VALORE λ
ESEMPIO: $\begin{pmatrix}1&0&3\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1-\lambda&0&3\\1&2-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}$. POI PONGO IL DET $=0$ E RICAVO I λ AUTOVALORI
AUTOVETTORI: SUPPONIAMO AUTOVALORI TROVATI $\lambda = 3$, $\lambda = 2$. PER OGNI AUTOVALORE CALCOLO IL KER SISTEMA ASSOCIATO. EX $\lambda = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-(3)&0&3\\1&2-(3)&1\\1&1&1-(3)\end{vmatrix}$. GLI AUTOVETTORI SONO LE SOL. NON NULLE DEL SISTEMA LINEARE
AUTOVALORI NON DIPENDONO DALLA BASE USATA, SONO UGUALI PER TUTTE LE BASI DI UNA TRASFORMAZIONE T

APPLICAZIONE LINEARE: PRENDE UN VETTORE DEL DOMINIO V E LO TRASFORMA IN UN VETTORE DEL CODOMINIO. (ESEMPIO: $f(x,y,z) = (x, y, z+1)$), COME LE FUNZIONI!
VERIFICA LINEARITÁ: 1) $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$. 2) $\lambda f(v) = f(\lambda v)$
ESEMPIO: $f(x,y,z) = (x, y+z+1)$ SE FACCIAMO NOTIAMO CHE NON É LINEARE
ALTRO ESEMPIO: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z) = (x+y, x, x-z)$. É LINEARE.

I VETTORI DI UNA MATRICE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI:
$\iff$ A É INVERTIBILE
$\iff$ IL RANGO É MASSIMO (m)

SE λ AUTOVALORE DI A, A^{-1} HA AUTOVALORE $\frac{1}{\lambda}$

KERNEL MATRICE: COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA MATRICE CHE DÁ IL VETTORE NULLO. SE I VETTORI SONO LIN. INDIP. IL KERNEL É OVVIAMENTE DI DIM$=0$ E CONTIENE SOLO $\{0\}$
PER TROVARE IL KERNEL DI UNA MATRICE INVECE DI INIZIARE SUBITO CON IL SISTEMA LINEARE, POSSO PORTARLA A GRADINI, SE NESSUNA RIGA A 0 I VETTORI SONO LINEARMENTE INDIP. E SO GIÁ CHE IL KERNEL É DIM 0 $\{0\}$
PER TROVARE IL KERNEL MI CONVIENE PASSARE DAL DETERMINANTE QUANDO LA MATRICE HA UN PARAMETRO K (COSÍ VEDO IL COMPORTAMENTO AI VALORI DI K CRITICI.)

MATRICE ASSOCIATA: SE HO $f: V \to W$ LA MAT. ASSOCIATA $M_B^A(f)$ DOVE A É UNA BASE DI V e B É BASE DI $W \rightarrow A = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$
COME TROVARLA: CASO 1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow f(x,y,z) = (2x+y, y-z)$, ORA DEVO AVERE UNA BASE DEL DOMINIO E DEL CODOMINIO: $A = \{(1,-2,-2),(0,1,1),(0,0,1)\}$, $B = \{(1,1),(1,-1)\}$. ORA CALCOLO f DI TUTTI I VETTORI DOMINIO $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, ORA TROVO LE COMPONENTI DEI 3 VETTORI IMMAGINE RISPETTO ALLA BASE B $(0,0) = a_1(1,1) + a_2(1,-1) \rightarrow \begin{cases}a_1+a_2=0\\a_1-a_2=0\end{cases} \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0$
$(1,0) = a_1(1,1)+a_2(1,-1) \rightarrow \begin{cases}a_1+a_2=1\\a_1-a_2=0\end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}$
$(0,-1) = a_1(1,1)+a_2(1,-1) \rightarrow \begin{cases}a_1+a_2=0\\a_1-a_2=-1\end{cases} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}$
QUINDI $M_B^A(f) = \begin{vmatrix}0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}$

CASO 2): (SE NON CI VIENE DATA LA LEGGE ESPLICITA). MI VIENE DETTO PERÓ CHE:
$f(1,1,1) = (2,0,1)$, $f(0,1,1) = (1,0,1)$, $f(-1,0,1) = (2,1,1)$
$\quad v_1 \qquad v_2 \qquad v_3$
MI SERVE TROVARE I VALORI DI f PER LA BASE CANONICA DEL DOMINIO, OVVERO $f(1,0,0)$ CHE CHIAMO $f(e_1)$, $f(0,1,0) = f(e_2)$, $f(0,0,1) = f(e_3)$. NOI SAPPIAMO CHE
$1\cdot f(e_1) + 1\cdot f(e_2) + 1\cdot f(e_3) = v_1$
$0\cdot f(e_1) + 1\cdot f(e_2) + 1\cdot f(e_3) = v_2$
$-1\cdot f(e_1) + 0\cdot f(e_2) + 1\cdot f(e_3) = v_3$
COSTRUISCO MATRICE ASSOCIATA $\Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&v_1\\0&1&1&v_2\\-1&0&1&v_3\end{pmatrix}$
$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&v_1\\0&1&1&v_2\\0&0&1&v_1-v_2+v_3\end{array}\right) \rightarrow$
$f_{e_1}(1,0,0) = (2,0,1)-(2,-1,0)-(3,1,1) = (1,0,0)$
$f_{e_2}(0,1,0) = v_2 - f_{e_3} = (1,0,1)-(3,1,1) = (-2,-1,0)$
$f_{e_3}(0,0,1) = (v_1 - v_2 + v_3) = (3,1,1)$
$f(0,0,1) = (3,1,1)$, $f(0,1,0) = (-2,-1,0)$, $f(1,0,0) = (1,0,0)$
$M_{E_3}^{E_3}(f) = \begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

DIAGONALIZZAZIONE: LA MATRICE "A" INIZIALE É COMPLICATA, LA POSSO SCRIVERE COME $A = P\cdot D\cdot P^{-1}$, DOVE D É UNA MATRICE DI TUTTI ZERI E GLI AUTOVALORI SULLA DIAGONALE. P É LA MATRICE CON AUTOVETTORI COME COLONNE, P^{-1} É L'INVERSA
IN UNA MATRICE $m\times m$ SE TROVO m AUTOVALORI DISTINTI LA MATRICE É DIAGONALIZZABILE
L'AUTOSPAZIO É L'INSIEME DEI AUTOVETTORI LEGATI AD UN AUTOVALORE + IL VETTORE NULLO (É UNO SPAZIO VETT.) LA SUA DIM É M.G. OGNI AUTOVALORE HA IL SUO AUTOSPAZIO

MATRICI DIAGONALIZZABILI: SUPPONIAMO DI AVERE UNA MATRICE 3x3 $A: \begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. 1) TROVIAMO GLI AUTOVALORI, QUINDI CALCOLIAMO IL DETERMINANTE DELLA MATRICE CON $(A-\lambda)$ SULLA DIAGONALE. PER TROVARE QUESTI AUTOVALORI PONIAMO $\det = 0$ (CHE VIENE $(2-\lambda)^2\cdot(1-\lambda) = 0$) LE SOLUZIONI SONO 1 E 2. IL 2 COMPARE DUE VOLTE COME SOLUZIONE, QUINDI HA MOLTEPLICITÁ ALGEBRICA (MA) $= 2$, MENTRE LA SOLUZIONE $\lambda = 1$ HA MA $= 1$.
2) ORA IL MIO OBIETTIVO É TROVARE 3 AUTOVETTORI (PERCHÉ LA SOMMA DEI M.A. $= 3$), DEVO SPERARE DI TROVARE 2 AUTOVETTORI DALLA SOLUZIONE CON M.A. $= 2$ E UNA SOL. DALL'ALTRA CON M.A. $= 1$. QUINDI PARTO DA $\lambda = 1$ E LO METTO NELLA MATRICE INIZIALE (QUELLA CON $A-\lambda$ SULLA DIAGONALE, E SOSTITUISCO $\lambda = 1$). POI CALCOLO IL KER DI QUESTA MATRICE SVOLGENDO IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO ASSOCIATO ALLA MATRICE. LA SOLUZIONE PER $\lambda = 1$ É $(k, -k, k)$, QUINDI 1 VARIABILE LIBERA, IL CHE CI VA BENE PERCHÉ LA M.A. DI $\lambda = 1$ ERA 1, E RIUSCIAMO A TROVARE UNA BASE $(1,-1,1)$. ORA PASSIAMO A $\lambda = 2$ E FACCIAMO LO STESSO, E DATO CHE M.A DI $\lambda = 2$ ERA 2 DEVO TROVARE 2 VARIABILI LIBERE NEL SISTEMA ASSOCIATO, PERMETTENDOMI DI RICAVARE DUE BASI. RISOLVENDO IL SISTEMA PERÓ LA SOLUZIONE É $(k, 0, 0)$, HA QUINDI UNA SOLA VARIABILE LIBERA E POSSIAMO RICAVARE UNA SOLA BASE $(1,0,0)$. SIA PER $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ LA MOLTEPLICITÁ GEOMETRICA (M.G.), OVVERO IL NUMERO DI BASI CHE POSSIAMO RICAVARE (VARIABILI LIBERE) É 1. MA M.A. DI $\lambda = 2$ ERA 2 E M.G. É USCITO DI 1, PER ESSERE DIAGONALIZZABILE $MA = MG$, QUINDI NON É DIAGONALIZZABILE. POSSIAMO ESTRAPOLARE CHE:
UNA MATRICE A É DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE I SUOI AUTOVETTORI RICOPRONO TUTTO LO SPAZIO VETTORIALE $(A: 3\times3 \to \mathbb{R}^3)$.
QUINDI IN UNA MATRICE $m\times m$ HO BISOGNO DI m VETTORI LIN. INDIP. CHE FANNO DA BASE ALLO SPAZIO VETTORIALE.

PRODOTTO SCALARE: É UN CRITERIO CHE ASSOCIA A DUE VETTORI DI V IN $\mathbb{R}$ UN NUMERO REALE. $\langle v, w\rangle$. IL PRODOTTO SCALARE É COMMUTATIVO $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$. SE CONSIDERO a, b NUMERI REALI, E PRENDO 3 VETTORI u, v, w VALE CHE $\langle au + bv, w\rangle = a\langle u,w\rangle + b\langle v,w\rangle$. COME TERZA PROPRIETÁ ABBIAMO $\langle v,v\rangle \geq 0$ (PRODOTTO SCALARE TRA v E SE STESSO ≥ 0), $\rightarrow \langle v,v\rangle = 0$ SE $v = 0$. GLI SPAZI $\mathbb{R}^m$ (COME $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$..) HANNO PRODOTTO SCALARE. SUPPONIAMO DI ESSERE IN $\mathbb{R}^3$, ED ABBIAMO DUE VETTORI $v = (x_1, y_1, z_1)$ E $w = (x_2, y_2, z_2)$. IN $\mathbb{R}^m$ IL PRODOTTO SCALARE É IL PRODOTTO DEGLI OMONIMI QUINDI $\langle v,w\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. PER VERIFICARE CHE SIA UN PRODOTTO SCALARE DEVO VERIFICARE I 3 ASSIOMI SCRITTI SOPRA 1) $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle \rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ ✓ 2) ... 3) $\langle v,v\rangle \geq 0 \rightarrow x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ ✓ TUTTI TERMINI ALLA SECONDA QUINDI SICURAMENTE ≥ 0.
NORMA: SAPPIAMO CHE $\langle v,v\rangle = x^2 + y^2 + z^2$. LA NORMA É LA LUNGHEZZA DEL VETTORE! RICORDIAMO IN $\mathbb{R}^2$ SE ABBIAMO UN PUNTO $(3,1)$ LA SUA DISTANZA É $\sqrt{x^2+y^2}$. NEL NOSTRO CASO SIAMO IN $\mathbb{R}^3$ QUINDI $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, UGUALE A $\sqrt{\langle v,v\rangle}$.
FORMULA NORMA: $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} \rightarrow$ PER QUESTO $\langle v,v\rangle$ PER GLI ASSIOMI DEVE ESSERE ≥ 0, STA SOTTO RADICE
ESEMPIO NORMA IN $\mathbb{R}^3$: $v = (2,3,6) \rightarrow \langle v,v\rangle = 4+9+36 = 49 \rightarrow \|v\| = \sqrt{49} = 7$. QUINDI LA LUNGHEZZA (NORMA) DI $v = (2,3,6) = 7$
VERSORE: CON LA NORMA VEDEVAMO LA LUNGHEZZA DEL VETTORE, CON IL VERSORE CI INTERESSIAMO SOLO ALLA DIREZIONE, QUINDI CERCHIAMO UN VETTORE CHE PUNTI NELLA DIREZIONE DI v MA CON LUNGHEZZA/NORMA $= 1$. BASTA "NORMALIZZARE" IL VETTORE, OVVERO DIVIDERLO PER LA SUA NORMA. ESEMPIO CON VERSORE $= u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(2,3,6)}{7} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$

INFINITI PRODOTTI SCALARI: IN $\mathbb{R}^m$ HO INFINITI PRODOTTI SCALARI: AD ESEMPIO IN $\mathbb{R}^2$ NON C'É SOLO QUELLO STANDARD, AD ESEMPIO PRENDIAMO $v = (x_1, y_1)$, $w = (x_2, y_2)$ IL PRODOTTO SCALARE PUÓ ESSERE $g(v,w) = 2x_1x_2 + 3y_1 \cdot y_2$ (QUESTO É IL PROD. SCALARE PONDERATO). SE FACCIO INFATTI IL TEST DEI 3 ASSIOMI SONO VERIFICATI $\rightarrow g(v,w) = g(w,v) \Rightarrow 2x_1x_2 + 3y_1y_2 = 2x_2x_1 + 3y_2y_1$, E ANCHE SE CONTROLLO $g(v,v)$ VIENE $= 2x_1x_1 + 3y_1 y_1 = 2x_1^2 + 3y_1^2$, CHE É SEMPRE ≥ 0.
VETTORI ORTOGONALI: DUE VETTORI $v_1, v_2 \in V$ SONO ORTOGONALI $v_1 \perp v_2$ SE $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.
ESEMPIO: SIAMO IN $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (2,3)$, $v_2 = (3,-2)$ VEDIAMO QUANTO FA IL PROD. SCALARE STANDARD $\Rightarrow \langle v_1, v_2\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = 2\cdot3 + 3\cdot -2 = 0$ ✓ SONO ORTOGONALI.
ORA VERIFICHIAMO SE SONO ORTOGONALI RISPETTO AD UN'ALTRO PRODOTTO SCALARE DI $\mathbb{R}^2$ CHE É $\langle v_1, v_2\rangle = 4x_1x_2 - x_1y_2 + x_2y_1 + 4y_1y_2 = 13$ ✗ NON ORTOGONALI RISPETTO A QUESTO PROD. SCALARE.
BASE ORTOGONALE: ABBIAMO UNA BASE DI V COMPOSTA DAI VETTORI $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, QUESTA BASE É ORTOGONALE SE $\langle v_i, v_j\rangle = 0$, PER OGNI COMBINAZIONE DI VETTORI.
ESEMPIO: IN $\mathbb{R}^3$ HO BASE $\{(1,0,1), (0,1,0), (1,0,-1)\} \Rightarrow$ SE FACCIO $\langle v_1, v_2\rangle$ VIENE 0, ED ANCHE $\langle v_1, v_3\rangle$ E $\langle v_2, v_3\rangle$ (SECONDO IL PRODOTTO STANDARD).

RENDERLA UNA BASE ORTONORMALE: SIGNIFICA "NORMALIZZARE" LA BASE, SEMPLICEMENTE TROVO IL VERSORE DI OGNI VETTORE DELLA BASE $\Rightarrow \frac{v}{\|v\|}$. PARTENDO DAL 1° VETTORE $(1,0,1)$ LO NORMALIZZO $\Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\|v_2\| = 1$ GIÁ NORMALIZZATO (HA NORMA 1) $\Rightarrow \frac{(0,1,0)}{1}(0,1,0)$, $\|v_3\| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
LA BASE ORTONORMALE RISULTA $B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.
QUINDI IN UNA BASE ORTOGONALE I VETTORI SONO PERPENDICOLARI TRA LORO, IN UNA BASE ORTONORMALE HANNO ANCHE LUNGHEZZA(NORMA)$=1$.
COSTRUZIONE BASE ORTONORMALE CON GRAM-SCHMIDT: HO UNA BASE DI $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ NON ORTOGONALE, LA TRASFORMO IN $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ ORTOGONALE
$w_1 = v_1$ (GRATIS), $w_2 = v_2 - \mathrm{PROJ}_{w_1}(v_2)$ (PULIAMO v_2 USANDO w_1), $w_3 = v_3 - \mathrm{PROJ}_{w_1}(v_3) - \mathrm{PROJ}_{w_2}(v_3)$ (PULISCO v_3 USANDO w_1 E w_2), $w_4 = v_4 - \mathrm{PROJ}_{w_1}(v_4) - \mathrm{PROJ}_{w_2}(v_4) - \mathrm{PROJ}_{w_3}(v_4)$ ..
$\mathrm{PROJ}_w(v) = \left(\frac{\langle v\cdot w\rangle}{\|w\|^2}\right)\cdot w$

ISOMORFISMO: DUE SPAZI V e W SONO ISOMORFI SE E SOLO SE HANNO STESSA DIMENSIONE.
UNA TRASFORMAZIONE LINEARE $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ É UN ISOMORFISMO $\iff$ LA SUA MATRICE ASSOCIATA É INVERTIBILE
QUINDI: $\ker(A) = 0$, $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m$, $\det(A) \neq 0$
APPLICAZIONE INIETTIVA: SE IL NUCLEO CONTIENE SOLO $\{0\}$
APPLICAZIONE SURIETTIVA: SE $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(W)$
AD ESEMPIO $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ SE SCOPRO CHE L'IMMAGINE RICOPRE SOLO $\mathbb{R}^2$ ALLORA $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \neq \dim W = 4$ QUINDI NON SURIETTIVA.
ISOMORFISMO: SIA INIETTIVA CHE SURIETTIVA.
UN ENDOMORFISMO É UN ISOMORFISMO SE E SOLO SE LA SUA MATRICE A É INVERTIBILE $(\det \neq 0)$

METODO PER USARE GRAM SCHMIDT QUANDO HO RADICI NEI VETTORI: TALVOLTA PER TROVARE I VETTORI m_1, m_2... FORMANTI BASE ORTONORMALE I CALCOLI SONO BRUTTI: ESEMPIO: m_1 MI VIENE $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (RISULTATO DI $\frac{v_1}{\|v_1\|}$), QUANDO DEVO CALCOLARE m_2 LE RADICI MI DANNO NOIA PER IL CALCOLO.
ALLORA v_1 NON LO DIVIDO SUBITO PER LA NORMA.
FACCIO: $m_1 = v_1$, $m_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, m_1\rangle}{\|m_1\|^2}\cdot m_1$
ORA CHE HO I MIEI VETTORI DIVENTATI ORTOGONALI LI ORTONORMALIZZO: $m_1 = \frac{m_1}{\|m_1\|}$, $m_2 = \frac{m_2}{\|m_2\|}$

ENDOMORFISMO: APPLICAZIONE LINEARE CON SPAZIO PARTENZA E SPAZIO ARRIVO UGUALI: $f: V \to V$
ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO: É UN ENDOMORFISMO $(f: V\to V)$, DOVE $v_1, v_2 \in V$ ABBIAMO $\langle f(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, f(v_2)\rangle$
ESEMPIO: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ CON LEGGE $f(x,y) = (2x+y, x)$. PRENDIAMO $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ ABBIAMO $\langle (2x_1+y_1, x_1), (x_2, y_2)\rangle = \langle (x_1, y_1), (2x_2+y_2, x_2)\rangle$
ORA CALCOLO I DUE PRODOTTI SCALARI EUCLIDEI STANDARD DI $\mathbb{R}^2$ E VIENE $2x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1$. SONO UGUALI, ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO ✓
TEOREMA SPETTRALE: SE $M_b^b(f)$, OVVERO LA MATRICE ASSOCIATA DI f RISPETTO AD UNA BASE ORTONORMALE É SIMMETRICA, ABBIAMO UN ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO.
LEGGE TEOREMA SPETTRALE $M_b^b \Rightarrow f$ AUTOAGGIUNTO. QUINDI ANCHE SE HO UN ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO E SCELGO UNA BASE ORTONORMALE PER CALCOLARE LA MATRICE ASSOCIATA, SARÁ SIMMETRICA.
TEOREMA SPETTRALE COMPLETO: ABBIAMO $f: V \to V$ CON PRODOTTO SCALARE STANDARD:

f É AUTOAGGIUNTO $\iff$ f É UN ENDOMORFISMO SEMPLICE, CON BASE DI AUTOVETTORI E AUTOSPAZI ORTOGONALI $\iff$ BASE DI AUTOVETTORI ORTOGONALI $\rightarrow P^{-1} = {}^T P$
$P^{-1} M P = D$

ESEMPIO: $f\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z) = (2x-z, -y, -x+2z)$
$M_\varepsilon^\varepsilon(f) = \begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&2\end{pmatrix} \rightarrow$ AUTOVALORI $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ AUTOVALORI DISTINTI ENDOMORFISMO SEMPLICE $\Rightarrow$ 3 AUTOVETTORI SONO DISTINTI PER VIA DELL'ENDOMORF. SEMPLICE $\Rightarrow$ QUINDI SONO TRA LORO ORTOGONALI $\Rightarrow$ AUTOVETTORE DI $\lambda = -1 \rightarrow v_1 = (0,1,0)$, DI $\lambda = 1 \rightarrow v_2 = (1,0,1)$, DI $\lambda = 3 \rightarrow v_3 = (1,0,-1)$. 3 AUTOVETTORI INDIPENDENTI SONO ORTOGONALI A 2 A 2. QUESTA É BASE ORTOGONALE $\Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$
DIVIDO PER LA NORMA: $P = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
$P_1^{-1} = {}^T P_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$
UNA MATRICE É DIAGONALIZZABILE SE: $\sum E_\lambda = m$, ESISTE QUINDI UNA BASE DI AUTOVETTORI.

DETERMINANTE DI VANDERMONDE: DATI m PUNTI DISTINTI NEL PIANO $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.... ESISTE UN POLINOMIO DI GRADO $(m-1)$ CHE PASSA PER TUTTI QUESTI PUNTI, SE SONO DIVERSI TRA LORO.
ESEMPIO: TROVARE SE ESISTONO I POLINOMI DI $\mathbb{R}[x]$ DI $f(x)$ DI GRADO ≤ 2 TALI CHE $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(3) = 7$. I PUNTI SONO DISTINTI QUINDI OK, ESISTE UN POLINOMIO DI GRADO $(3-1 = 2)$ CHE CI PASSA. UN POLINOMIO DI GRADO ≤ 2 HA FORMA $ax^2 + bx + c$, DOBBIAMO TROVARE I COEFFICIENTI a_0, a_1, a_2.
$\begin{cases} f(0): a\cdot0^2 + b0 + c = 0 \longrightarrow c = 0\\ f(1): a\cdot1^2 + b\cdot1 + c = 1 \longrightarrow a+b+c = 1\\ f(3): a\cdot3^2 + b\cdot3 + c = 7 \longrightarrow 9a+3b+c = 7\end{cases}$
$\det(A) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 6 \leftarrow \begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\9&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix}$
I TERMINI CON x^1 PER MATRICI 3X3 (x^2, x, x^0)
IL DET É $\neq 0$ QUINDI IL RANGO É MAX (3), ANCHE LA MATRICE COMPLETA HA RANGO 3 QUINDI SOL. UNICA. (VIENE $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 0$)
SOL: $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 0$

$\det(A) \neq 0 \iff A$ INVERTIBILE $\iff T$ É INIETTIVA $\iff T$ É SURIETTIVA $\iff T$ É UN ISOMORFISMO
(T SAREBBE L'APPLICAZIONE ED A LA SUA MATRICE ASSOCIATA) $\qquad$ QUINDI BIETTIVA

SOMMA DIRETTA $\oplus$: DUE SOTTOSPAZI SONO IN SOMMA DIRETTA SE $A \cup B = \{0\}$ SOLO VETTORE NULLO, QUINDI $\dim(A+B) = \dim A + \dim B$
MATRICE/APPLICAZIONE NILPOTENTE: SIGNIFICA CHE SE FACCIO T^k, QUINDI FACCIO $T \circ T \circ T$... QUINDI MOLTIPLICO LA MATRICE k VOLTE PER SE STESSA, HO COME RISULTATO IL VETTORE NULLO (AD ESEMPIO UNA MATRICE $m\times m$ IN $\mathbb{R}^3$ CHE MOLTIPLICATA k VOLTE DÁ $(0,0,0)$). IL VALORE DI K, OVVERO QUANTE VOLTE MOLTIPLICO T PER SÉ STESSA, É COMPRESO TRA 1 (SE LA MATRICE/APPLICAZIONE LINEARE DELLA MATRICE) É GIÁ $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ E k PUÓ ESSERE AL MASSIMO $= m$.
MATRICE NILPOTENTE HA TUTTI GLI AUTOVALORI $= 0$, E NON É DIAGONALIZZABILE (TRANNE DI MATRICI NON DIAGONALIZZABILI). PERCHÉ? SAPPIAMO CHE $T\cdot V = \lambda \cdot V$, SE É NILPOTENTE APPLICHERÓ T UN NUMERO K DI VOLTE, MA PROVIAMO APPLICANDOLA 2 VOLTE: $T^2 V = T(\lambda V)$, T ERA UGUALE A λ QUINDI $T^2 V = \lambda^2 V$. ORA SIAMO ARRIVATI A $K = 2$, MA PER IL GIUSTO K SE L'APPLICAZIONE É NILPOTENTE $T^k V$ FARÁ 0, E VISTO CHE $\underbrace{T^k V}_{=0} = \lambda^k V$ L'UNICO MODO PER FAR SÍ CHE A DESTRA OTTENGO 0 (DATO CHE V AUTOVETTORE NON É MAI 0) λ AUTOVALORE DEVE ESSERE $= 0$.

TRACCIA MATRICE (Tr) $=$ SOMMA ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE. É UGUALE ANCHE ALLA SOMMA DI TUTTI I SUOI AUTOVALORI MOLTIPLICATI PER LA MOLT. ALG.
IL **DETERMINANTE DELLA MATRICE** É UGUALE AL PRODOTTO DI TUTTI I SUOI AUTOVALORI PER LA LORO MOLT. ALG.

CALCOLO DETERMINANTE CON VANDERMOND:
LA MATRICE DEVE ESSERE $m\times m$ QUADRATA:
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{pmatrix}$$
$\quad x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3$
PER CALCOLARE IL DETERMINANTE CI INTERESSA LA RIGA/COLONNA CON I TERMINI x^1. ABBIAMO 4 NUMERI NELLA COLONNA, DOBBIAMO SOTTRARRE AD OGNI ELEMENTO SULLA COLONNA x^1, TUTTI GLI ELEMENTI PRIMA DI LUI, UNO ALLA VOLTA, E MOLTIPLICARE I RISULTATI. NEL NOSTRO CASO:
$(1-0)\cdot(2-0)\cdot(2-1)\cdot(3-0)\cdot(3-1)\cdot(3-2) = 1\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1 = 12$

DIAGONALIZZAZIONE: $A = MDM^{-1}$, A, D SONO SIMILI, RAPPRESENTANO LA STESSA APPLICAZIONE IN BASI DIVERSE. HANNO STESSI AUTOVALORI, DETERMINANTE, TRACCIA E RANGO, MA NON GLI STESSI AUTOVETTORI.
LA TRASPOSTA DI UN PRODOTTO INVERTE L'ORDINE: $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
SE V É AUTOVETTORE DI A e B, V É ANCHE AUTOVETTORE DI $A+B$, $A\cdot B$, $2A$..
MATRICI SIMILI HANNO STESSA TRACCIA E DETERMINANTE

MATRICE ANTISIMMETRICA: $A^T = -A$. $\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}$. HA IL DET$=0$
SE HO MATRICE $m\times m$: $((A)^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, COMMUTANO

ALGEBRA BILINEARE (FORMULE): ① **CALCOLO PRODOTTO SCALARE (FORMA MATRICIALE)**: DATI DUE VETTORI x, y (NELLE COLONNE) E LA MATRICE DEL PRODOTTO (A): $\langle x,y\rangle_A = x^t \cdot A \cdot y$. ② **LA MATRICE (A) DEVE ESSERE SIMMETRICA**: $A^T = A$ ALTRIMENTI NON RISPETTEREBBE LE 3 REGOLE DEL PRODOTTO SCALARE. ③ **CAMBIO DI BASE**: SE M É LA MATRICE DI PASSAGGIO DI BASE DALLA NUOVA ALLA VECCHIA $(X_{\text{vecchia}} = MX_{\text{nuova}})$ LA NUOVA FORMULA DEL PRODOTTO SCALARE: $B = M^T \cdot A \cdot M$
④ **TEOREMA DI SYLVESTER**: IL NUMERO DI AUTOVALORI POSITIVI (M_+), QUELLI NEGATIVI (M_-), E QUELLI NULLI (M_0) NON CAMBIA!
SEGNATURA(A) = SEGNATURA(B).
ESEMPIO: ABBIAMO $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ É DIAGONALE ED HA 2 POSITIVI E 1 NEGATIVO. PRENDIAMO UN VETTORE $v = \begin{vmatrix}1\\2\\3\end{vmatrix}$. $\langle v,v\rangle_A = v^T \cdot A \cdot v$, QUA DATO CHE (A) É DIAGONALE SI USA LA SCORCIATOIA $= (\lambda_1 \cdot x^2) + (\lambda_2 \cdot y^2) + (\lambda_3 \cdot z^2) = 1\cdot1^2 + 1\cdot2^2 - 1\cdot3^2 = \boxed{-4}$, ANCHE SE CAMBIO BASE IL P.S. DEVE VENIRE LUI. ORA APPUNTO CAMBIO SISTEMA DI RIFERIMENTO, E LA NUOVA BASE PASSA DA $(A) \rightarrow$ AD M FORMATA DA $w_1 = (1,0,0)$, $w_2 = (1,1,0)$, $w_3 = (0,1,1) \rightarrow M = \begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}$. ORA DOBBIAMO TROVARE B, LA MATRICE DI CONGRUENZA, CON LA FORMULA $B = M^t \cdot A \cdot M$, $B = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{M^t}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{M} \rightarrow B = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ É SIMMETRICA! ORA ESAMINIAMO IL MIO VETTORE $v = \begin{vmatrix}1\\2\\3\end{vmatrix}$ IN BASE NUOVA $M \rightarrow \begin{vmatrix}1\\2\\3\end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix} + \gamma\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}$
$v' = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$. ORA SE VOGLIO CALCOLARE IL PRODOTTO SCALARE NELLA NUOVA BASE MI BASTA FARE $\langle v,v\rangle_A = v_1'^t \cdot B \cdot v_1'$ ED ESCE SEMPRE -4

DEFINITO POSITIVO? SE HO IL PRODOTTO $A = \begin{pmatrix}1&0\\0&-5\end{pmatrix}$ E CI INFILO $v = (1,0)$ OTTENGO $+1$, SE CI METTO $(0,1) = -5$, QUINDI É **INDEFINITO**. SE IL RISULTATO É SEMPRE POSITIVO, IL PRODOTTO SCALARE **É DEFINITO POSITIVO**, SE É SEMPRE NEGATIVO É **DEFINITO NEGATIVO**.
SEGNATURA: SE DUE MATRICI HANNO STESSA SEGNATURA HANNO LO STESSO NUMERO DI AUTOVALORI POSITIVI, NEGATIVI E NULLI. NELL'ESEMPIO DI PRIMA A, B SONO SIMILI, RAPPRESENTANO LA STESSA APP. IN BASE DIVERSA MA HANNO STESSA SEGNATURA. NOTIAMO INFATTI CHE $\det(A) = \det(B) = -1$ QUESTO IMPLICA SEGNATURA $(++-)$ OPPURE $(---)$, DATO CHE IL PRIMO ELEMENTO A SX É POSITIVO (1) ALLORA É $(++-)$
PERCHÉ $\det(B) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$.

EQUAZIONI MATRICIALI: **COMMUTAZIONE**: DUE MATRICI A, B COMMUTANO SE HANNO LA STESSA BASE DI AUTOVETTORI, ED ENTRAMBE SONO DIAGONALIZZABILI. COMMUTANO SE $A\cdot B = B\cdot A$, QUINDI $A\cdot B = 0$
ESERCIZI: DATO $A = \begin{pmatrix}1&-2\\-1&2\end{pmatrix}$, $B^2 + 2B = A$, TROVARE B. NOTIAMO CHE A É UGUALE A UN POLINOMIO DI B, QUINDI A COMMUTA CON B (STESSI AUTOVETTORI). DIAGONALIZZIAMO A PER TROVARE GLI AUTOVALORI CHE SONO $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. SAPPIAMO CHE $Av = \lambda v$ (AUTOVETTORE), DATO CHE A, B HANNO STESSI AUTOVETTORI VALE: $Av = (\mu^2 + 2\mu)v$. QUINDI λ AUTOVALORE DI A É UGUALE A $\mu^2 + 2\mu$, CHE SAREBBE L'AUTOVALORE DI B. TROVIAMO I λ E LAVORIAMO CON A DIAGONALE
SOSTITUIAMO I DUE AUTOVALORI: $0 = \mu^2 + 2\mu \rightarrow \mu = 0$ OPPURE -2.
$3 = \mu^2 + 2\mu \rightarrow \mu = 1$ OPPURE 3. QUINDI HO 4 COMBINAZIONI DI AUTOVALORI POSSIBILI $(0,1)$, $(0,-3)$, $(-2,1)$, $(-2,-3)$. ORA SE VOGLIO COSTRUIRE B POSSO FARE UNA MATRICE DIAGONALE CON GLI AUTOVALORI IN DIAGONALE SEGUENDO UNA COMBINAZIONE. MAGARI NON SARÁ B MA UNA MATRICE SIMILE.
L'IDENTITÁ COMMUTA CON TUTTO! SE $A = M\cdot I\cdot M^{-1} \Rightarrow A = M\cdot M^{-1}$
SIMILITUDINE: SE DUE MATRICI SONO SIMILI, A, B, ALLORA $A = MBM^{-1}$, QUINDI SONO LA STESSA COSA MA IN BASI DIVERSE, QUINDI NON UGUALI. TUTTE LE MATRICI SIMILI HANNO STESSO DETERMINANTE, STESSA TRACCIA, STESSI AUTOVALORI, STESSO SPAN DI AUTOVETTORI, STESSO RANGO
ESERCIZIO: TROVARE TUTTE LE MATRICI 3x3 TALI CHE $A^2 = I_3$. SAPPIAMO CHE $I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, QUINDI $A^2 = \begin{vmatrix}x^2&0&0\\0&y^2&0\\0&0&z^2\end{vmatrix} \rightarrow x^2 = 1$, $y^2 = 1$, $z^2 = 1$, I RISULTATI SONO GLI 1 E -1
QUINDI $D_1 = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}$, $D_4 = \begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$
QUINDI CLASSE 1: $A = M\cdot I\cdot M^{-1} \Rightarrow A = I$, CLASSE 4: $A = M\cdot -I\cdot M^{-1} = -MIM^{-1} = -I$
CLASSE 2: $A = M\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}\cdot M^{-1}$ = ROTAZIONE SUL PIANO, INFINITE SOL., CLASSE 3: $\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$, STESSA COSA, INFINITE SOL.
CLASSI DI EQUIVALENZA: METTO INSIEME LE MATRICI SIMILI, CON STESSA TRACCIA, STESSO DET, STESSI AUTOVALORI, RANGO E DIM. AUTOSPAZIO.
ESERCIZIO BASTARDO: SIA $A = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ SONO SIMILI?
HANNO STESSA TRACCIA, RANGO, DET, AUTOVALORI. MA SE $A \sim B$ ALLORA LE LORO POTENZE DEVONO COMPORTARSI ALLO STESSO MODO. FACCIAMO $A^2 = \begin{pmatrix}0&0&0&\cdot\\0&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$, SE FACCIO $B^2 = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$ C'É UN 1 QUINDI RANGO $A^2 \neq B^2$
QUINDI NON SONO SIMILI $A^2 \neq MB^2M^{-1}$.
TIP ESAME: SE VEDI MATRICI PIENE DI 0 E 1 SOPRA LA DIAGONALE (NILPOTENTI), NON FIDARSI DEGLI AUTOVALORI, CALCOLA I QUADRATI CHE PROBABILMENTE $\neq$
SCORCIATOIA POTENZE MATRICE: SE $A = \left(\begin{array}{c|c}x^1&0\\\hline 0&J^1\end{array}\right)$, $A^2 = \left(\begin{array}{c|c}x^2&0\\\hline 0&J^2\end{array}\right)$.
SE $A = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ HA DEGLI 1 SOPRA LA DIAGONALE PRINCIPALE ALLORA A^2 FA UN "ROLL" SPOSTANDO GLI 1 DI UNA POSIZIONE IN ALTO, COME SE ALZASSI LA DIAGONALE DI 1
$A^2 = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.
TEOREMA: SE A É DIAGONALE CON ELEMENTI TUTTI DIVERSI SULLA DIAGONALE, ALLORA TUTTE LE MATRICI CHE COMMUTANO CON A SONO DIAGONALI.