PROGRESSIONI GEOMETRICHE

$$\boxed{q = \frac{a_m}{a_{m-1}}}$$
↓
RAGIONE

ESEMPIO 1: $1, 2, 4, 8, 16 \rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$ VALORE DI q

ESEMPIO 2: $\sum_{m=0}^{M} x^m \rightarrow q = \frac{x^1}{x^0} = \frac{x}{1} = x$

VALORE DELLA PROGRESSIONE IN UN CERTO INDICE

$$\boxed{a_n = a_m \cdot q^{n-m}}$$

ESEMPIO 1: $1, 2, 4, 8, 16 \rightarrow$ VOGLIO SAPERE IL VALORE DELLA PROGRESSIONE ALL'INDICE $m = 6$ E CONOSCO IL VALORE IN UN INDICE $m = 5$, OVVERO 16 ($m = 5$).
$a_6 = a_5 \cdot q^{6-5} \rightarrow a_6 = 16 \cdot 2^1 = 32$

ESEMPIO 2: $\sum_{m=0}^{M} x^m$: VOGLIO SAPERE IL VALORE DELL'INDICE 2 SAPENDO IL VALORE ALL'INDICE 5 $\Rightarrow a_2 = a_5 \cdot q^{2-5} = x^5 \cdot x^{-3} = x^{5-3} = x^2$

PRODOTTO DEI TERMINI DI UNA PROGRESSIONE FINO AD UN INDICE m

$$\boxed{P_m = \sqrt{(a_1 \cdot a_m)}^{\,m} = (a_1 \cdot a_m)^{\frac{m}{2}}}$$

ESEMPIO 1: $1, 2, 4, 8, 16$ (a_5) $\rightarrow$ VOGLIO SAPERE IL PRODOTTO FINO ALL'INDICE 5.
$P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)}^2 = \sqrt{(1 \cdot 16)}^2$

ESEMPIO 2: $\sum_{m=0}^{M} x^m \rightarrow$ PRODOTTO DEI TERMINI DELLA PROGRESSIONE SEMPRE FINO ALL'INDICE $5 \rightarrow \sqrt{(x^1 \cdot x^5)}^2 = \sqrt{(x^6)}^2 = x^{\frac{12}{2}} = x^6$

SOMMA DEI TERMINI DI UNA PROGRESSIONE FINO AD UN INDICE m

PRIMA DELLA FORMULA RAGIONIAMOCI: ESEMPIO:
ABBIAMO LA PROGRESSIONE: 1, 2, 4, 8, 16, 32
LA SOMMA SARÀ $\longrightarrow 1 + 2 + 4 + 8 + 16$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots = \underbrace{a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3}_{\text{PERCHÉ OGNI VOLTA CHE VADO AVANTI NELLA PROGRESSIONE MOLTIPLICO PER LA RAGIONE } q}$$

$$\boxed{S_m = a_1 \cdot \frac{1 - q^m}{1 - q}}$$

ESEMPIO 1: $1, 2, 4, 8, 16 \ldots \rightarrow$ SOMMA FINO $m = 5$
$S_5 = a_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 1 \cdot \frac{1 - 32}{-1} = 31$

PROPRIETÀ SOMMATORIE (UTILI PER L'ESAME)

1) CAMBIO INDICE: ESEMPIO $\rightarrow \sum_{m=-M}^{m=-1} x^m$, PER CALCOLARE LA SOMMA MI SERVIREBBERO INDICI POSITIVI, QUINDI DEFINISCO $\boxed{k = -m}$ E LA SOSTITUISCO NEI 3 PUNTI IN CUI C'È m NELLA SOMMATORIA. SE PRIMA $m = -M$, VISTO CHE $k = -m$ ORA SARÀ M, E LA STESSA COSA IN TUTTI E 3 I PUNTI, QUINDI LA SOMMATORIA DIVENTA $\sum_{M}^{1} x^{-m}$.

2) INVERSIONE ORDINE: RIPRENDIAMO LA SERIE PRECEDENTE, PER FARE LA SOMMA PREFERIREI PARTIRE DA 1 ED ARRIVARE AD M, POSSO FARLO E MI BASTA METTERE UN MENO (-) DAVANTI ALLA SOMMATORIA. $-\sum_{1}^{M} x^{-m}$
↓
DISCLAIMER: NELL'ESEMPIO CHE HO MOSTRATO GLI INDICI SUL QUALE EFFETTUO LA SOMMA (DA 1 AD M) SONO FINITI QUINDI SE SOMMO DALL'INDICE 1 AD M, OPPURE DA M AD 1, IL RISULTATO È IDENTICO, PER CUI NON SERVE CAMBIARE SEGNO

ESEMPIO TRATTO DA ESAME - PARTE B:
CALCOLARE PER $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $M \in \mathbb{N}$ $\quad \sum_{m=-M}^{M} x^m$

1) DIVIDIAMO IN 2 SOMME $\rightarrow \sum_{m=0}^{M} x^m + \sum_{m=-M}^{-1} x^m$

2) CAMBIO GLI INDICI DELLA SECONDA PARTE PER RIUSCIRE A CALCOLARE LA SOMMA $\rightarrow \sum_{m=0}^{M} x^m + \sum_{m=1}^{M} x^{-m}$ (SEGUENDO LE PROPRIETÀ DELLE SOMMATORIE)

3) CALCOLIAMO IL q DELLA SECONDA SOMMATORIA $q = \frac{x^{-2}}{x^{-1}} = \boxed{\frac{1}{x}}$

4) CALCOLIAMO LA SOMMATORIA:
↓
$$S = x \cdot \frac{1 - x^M}{1 - x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^M}{1 - \frac{1}{x}} + 1$$

SAREBBE IL TERMINE CON INDICE 0, CHE È ESCLUSO NELLA FORMULA DELLA SOMMATORIA, QUINDI LO AGGIUNGO A MANO ($x^0 = 1$)