

Raccolta Ragionata Esercizi d'Esame: Equazioni Differenziali

Alessio Avarappattu

Dicembre 2025

Legenda Difficoltà:

- **Base:** Applicazione diretta del metodo risolutivo.
- **Intermedio:** Richiede calcoli lunghi, integrazione per parti o studio di casi.
- **Avanzato:** Parametri critici, perturbazioni singolari, studi qualitativi o limiti.

Indice

1	Equazioni a Variabili Separabili	2
2	Equazioni Lineari del Primo Ordine	2
3	Equazioni di Bernoulli (Non Lineari)	4
4	Lineari del Secondo Ordine a Coeff. Costanti	4
5	Equazioni di Ordine Superiore ($n > 2$)	5
6	Problemi Avanzati e Studi Qualitativi	6
7	Soluzioni	7

1 Equazioni a Variabili Separabili

Metodo: Separare x e y , integrare ambo i membri, esplicitare la soluzione.

1. ● Base Trigonometrica *(Sol. pag. 7)*

Si trovi la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \tan(x)y(x) \\ y(\pi/4) = 2 \end{cases}$$

2. ● Base Polinomiale *(Sol. pag. 7)*

Si risolva il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2(1 + y^2(x)) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

3. ●● Con Logaritmi *(Sol. pag. 8)*

Si trovi la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \log(x)e^{-y(x)} \\ y(3) = \log(3) + \log(\log 3) \end{cases}$$

4. ● Parametrica e Limitatezza *(Sol. pag. 8)*

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2y(x) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Determinare inoltre per quali valori di α :

- a) La soluzione è limitata superiormente.
- b) La soluzione è limitata (sia superiormente che inferiormente).

5. ●● Studio Qualitativo *(Sol. pag. 9)*

Si consideri l'equazione $y' = xy \log(y)$.

- a) Si determinino eventuali soluzioni costanti.
- b) Si risolva il problema di Cauchy con $y(0) = 3$.
- c) Sapendo che $y(x) > 0$ per ogni x , si risolva con $y(0) = 1/2$ e si calcoli $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x)$.

2 Equazioni Lineari del Primo Ordine

Metodo: Formula risolutiva con fattore integrante $e^{A(x)}$.

6. ● Standard *(Sol. pag. 11)*

Si trovi la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = \cos(x) + e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

7. ● **Coefficiente Razionale** (Sol. pag. 12)

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{1+x^2} = e^{-\arctan x}$$

8. ●● **Fattore Integrante Singolare** (Sol. pag. 13)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \cos(x^2) \\ y(\sqrt{\pi}) = 1 \end{cases}$$

9. ●● **Risonanza Esponenziale (Cauchy)** (Sol. pag. 14)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = \sin(x) + e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

10. ●● **Coefficiente Irrazionale** (Sol. pag. 15)

Si trovi la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}y(x) = \arctan(x)e^{-\sqrt{x}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

11. ● **Polinomiale-Esponenziale** (Sol. pag. 16)

Si risolva il problema di Cauchy (con $y_0 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} y'(x) + 4x^3y(x) = xe^{-x^4} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

12. ●● **Con Sommatoria** (Sol. pag. 16)

Risolvere per $N \in \mathbb{N}$ l'equazione differenziale:

$$y'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^N \cos(nx)$$

13. ●● **Parametro n Naturale** (Sol. pag. 17)

Si risolva, per $n \in \mathbb{N}$, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'_n(x) + y_n(x) = x^n e^{-x} \\ y_n(0) = 0 \end{cases}$$

14. ●● **Cauchy Lineare Fratta** (Sol. pag. 18)

Risolvere per $x > 0$ il problema di Cauchy (con parametro α):

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1+x}{x}y(x) + x - x^2 \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

15. ●●● **Con Analisi del Limite (λ)** (Sol. pag. 19)

Si risolva, per $\lambda \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'_\lambda(x) - y_\lambda(x) = e^{(1+\lambda^2)x} \\ y_\lambda(0) = 0 \end{cases}$$

Si determini poi se esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_\lambda(x) = +\infty$.

3 Equazioni di Bernoulli (Non Lineari)

Metodo: Sostituzione $z = y^{1-\alpha}$ per renderla lineare.

16. ●● Bernoulli Standard (Sol. pag. 20)

Risolvere il problema di Cauchy (con parametro iniziale y_0):

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = y^2(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

17. ●● Bernoulli GUIDATA (Sol. pag. 21)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - x(y(x))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(Suggerimento: dividere per y^2 ed effettuare la sostituzione $z(x) = 1/y(x)$).

4 Lineari del Secondo Ordine a Coeff. Costanti

Metodo: Polinomio caratteristico per l'omogenea + Metodo di somiglianza/variazione costanti per la particolare.

18. ● Standard Trigonometrica (Sol. pag. 22)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \cos(2x) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

19. ●● Doppia Risonanza Esponenziale (Sol. pag. 23)

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y''(t) - y(t) = e^t - e^{-t}$$

20. ●● Termine Noto Polinomiale (Sol. pag. 24)

Risolvere per $k \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) = t + 1 \\ y(0) = k, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

21. ●●● Risonanza Completa (e^x) (Sol. pag. 25)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

22. ●●● Condizione Mista e Limite (Sol. pag. 26)

Data l'equazione differenziale:

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 12e^{2x}$$

- Determinare la famiglia di soluzioni che soddisfa la condizione $y(0) + y'(0) = 18$.
- Tra queste, stabilire se ne esiste una tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$.

23. ●●● Termine Noto a Sommatoria (Sol. pag. 27)

Calcolare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \sum_{k=2}^5 \sin(kx) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

24. ●● Risonanza Parametrica (α) (Sol. pag. 29)

Risolvere, per $\alpha > 0$, l'equazione differenziale:

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{\alpha x}$$

25. ●● Parametro Base vs Esponente (Sol. pag. 30)

Si trovi la soluzione generale al variare di $\alpha \geq 0$:

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = e^x$$

(Discutere il caso di risonanza quando $\alpha = 1$).

26. ●●● Parametro α all'Esponente (Sol. pag. 31)

Si trovi la soluzione generale dell'equazione al variare di $\alpha \geq 0$:

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = e^{\alpha^2 x}$$

27. ●● Risonanza Polinomiale (Sol. pag. 32)

Risolvere per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha^2 y(x) = x^2 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

28. ●●● Integrabilità all'Infinito (Sol. pag. 33)

Risolvere il problema di Cauchy con parametro $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y''(t) - 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = \beta \end{cases}$$

Determinare se esistono valori di β tali per cui la soluzione soddisfi:

$$\int_0^{+\infty} |y(t)| dt < +\infty$$

5 Equazioni di Ordine Superiore ($n > 2$)

Metodo: Polinomio caratteristico di grado n .

29. ●● Terzo Ordine (Sol. pag. 35)

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y'''(x) - y'(x) = \cos(x)$$

30. ●● Quarto Ordine (Sol. pag. 35)

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y''''(x) - y(x) = e^{-x}$$

6 Problemi Avanzati e Studi Qualitativi

Include: Perturbazioni, Oscillatori Forzati, Eq. Integro-Differenziali.

31. ●●● Oscillatore Armonico Forzato (ω) (Sol. pag. 36)

Risolvere, al variare del parametro $\omega \in \mathbb{R}^+$, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = \cos(\omega x) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

32. ●●● Studio Completo Risonanza Trigonometrica (Sol. pag. 38)

Si consideri l'equazione $y''(x) + 4y(x) = \sin(\alpha x)$ con $\alpha \geq 0$.

- a) Calcolare l'integrale generale al variare di α .
- b) Esistono valori di α per cui la soluzione non è limitata inferiormente?
- c) Nei casi $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$, risolvere con condizioni $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

33. ●●● Parametro ϵ e Variabile Indipendente (Sol. pag. 40)

Si risolva per $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''_{\epsilon}(x) - \epsilon^2 y_{\epsilon}(x) = x \\ y_{\epsilon}(0) = \epsilon^2, \quad y'_{\epsilon}(0) = 0 \end{cases}$$

34. ●● Equazione Integro-Differenziale (Sol. pag. 41)

Si risolva l'equazione seguente (derivando ambo i membri rispetto a x):

$$\int_0^x y(t) dt + y'(x) = e^x, \quad \text{con } y(0) = 0$$

35. ●●● Perturbazione Singolare (ϵ) (Sol. pag. 42)

Calcolare, per $0 < \epsilon < 1$, la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} -\epsilon^2 y''_{\epsilon}(x) + y_{\epsilon}(x) = e^{-x} \\ y_{\epsilon}(0) = 0 \\ y'_{\epsilon}(0) = \frac{1}{\epsilon(\epsilon+1)} \end{cases}$$

e determinare il limite puntuale di $y_{\epsilon}(x)$ per $\epsilon \rightarrow 0^+$ (per $x > 0$).

7 Soluzioni

1. Base Trigonometrica

$$\begin{cases} y'(x) = \tan(x)y(x) \\ y(\pi/4) = 2 \end{cases}$$

Svolgimento: Separiamo le variabili (ponendo $y \neq 0$):

$$\frac{y'}{y} = \tan(x) \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Calcoliamo gli integrali:

$$\ln |y| = -\ln |\cos x| + c$$

Applichiamo l'esponenziale ad entrambi i membri per isolare y . **Attenzione alla costante:**

$$|y| = e^{-\ln |\cos x| + c} = e^{-\ln |\cos x|} \cdot e^c$$

Poiché $e^{-\ln |\cos x|} = \frac{1}{|\cos x|}$ e ponendo $K = \pm e^c$ (costante moltiplicativa):

$$y(x) = \frac{K}{\cos x}$$

Condizione Iniziale: Imponiamo $y(\pi/4) = 2$:

$$2 = \frac{K}{\cos(\pi/4)} = \frac{K}{\sqrt{2}/2} \implies K = \sqrt{2}$$

Soluzione:

$$y(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cos x}$$

2. Base Polinomiale

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2(1 + y^2(x)) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento: Separiamo le variabili:

$$\frac{y'}{1 + y^2} = x^2$$

Integriamo rispetto a x :

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int x^2 dx$$

Riconosciamo l'integrale notevole a sinistra ($\arctan y$):

$$\arctan(y) = \frac{x^3}{3} + c$$

Condizione Iniziale (Strategia Migliore): Conviene trovare c *prima* di isolare la y , è meno rischioso. Imponiamo $y(0) = 1$:

$$\arctan(1) = \frac{0}{3} + c \implies \frac{\pi}{4} = c$$

Quindi l'equazione è:

$$\arctan(y) = \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}$$

Isoliamo la y : Applichiamo la tangente ad entrambi i membri (la costante è dentro l'argomento!):

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

3. Con Logaritmi

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \log(x)e^{-y(x)} \\ y(3) = \log(3) + \log(\log 3) \end{cases}$$

Svolgimento: Separiamo le variabili moltiplicando per e^y :

$$e^y dy = \log(x) dx$$

Integriamo. A sinistra è immediato, a destra integriamo per parti ($1 \cdot \log x$):

$$\begin{aligned} e^y &= \int 1 \cdot \log(x) dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ e^y &= x \log x - x + c \end{aligned}$$

Condizione Iniziale: Sostituiamo $x = 3$ e $y = \log(3) + \log(\log 3)$. Calcoliamo il membro sinistro e^y :

$$e^{\log 3 + \log(\log 3)} = e^{\log 3} \cdot e^{\log(\log 3)} = 3 \cdot (\log 3) = 3 \log 3$$

Sostituiamo nell'equazione completa:

$$3 \log 3 = 3 \log 3 - 3 + c$$

Semplificando $3 \log 3$:

$$0 = -3 + c \implies c = 3$$

Soluzione Finale: Riprendiamo $e^y = x \log x - x + 3$ e isoliamo la y :

$$y(x) = \log(x \log x - x + 3)$$

4. Parametrica e Limitatezza

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 y(x) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Determinare inoltre per quali valori di α :

- a) La soluzione è limitata superiormente.
- b) La soluzione è limitata (sia superiormente che inferiormente).

Svolgimento: L'equazione è a variabili separabili. Se $\alpha = 0$, la soluzione è banalmente la funzione costante $y(x) = 0$. Se $\alpha \neq 0$:

$$\frac{y'}{y} = x^2 \implies \int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$$

$$\ln |y| = \frac{x^3}{3} + c$$

Esponenziando:

$$y(x) = Ke^{x^3/3}$$

Imponiamo $y(0) = \alpha$:

$$\alpha = Ke^0 \implies K = \alpha$$

La soluzione unica è:

$$y(x) = \alpha e^{x^3/3}$$

Analisi della Limitatezza: Studiamo il comportamento della funzione esponenziale $g(x) = e^{x^3/3}$:

- Per $x \rightarrow +\infty$, l'esponente $x^3/3 \rightarrow +\infty$, quindi $g(x) \rightarrow +\infty$.
- Per $x \rightarrow -\infty$, l'esponente $x^3/3 \rightarrow -\infty$, quindi $g(x) \rightarrow 0^+$.

Caso a) Limitatezza Superiore ($y(x) \leq M$):

- Se $\alpha > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$. (Illimitata superiormente).
- Se $\alpha < 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$. La funzione sta sempre sotto l'asse delle x (è negativa), quindi è limitata superiormente dallo zero.
- Se $\alpha = 0$: $y(x) = 0$. (Limitata).

Risposta: $\alpha \leq 0$.

Caso b) Limitatezza Globale ($|y(x)| \leq M$): Una funzione è limitata se non va né a $+\infty$ né a $-\infty$.

- Se $\alpha \neq 0$, la funzione diverge sempre (a $+\infty$ o $-\infty$) per $x \rightarrow +\infty$.
- L'unico caso in cui rimane "bloccata" è quando $\alpha = 0$.

Risposta: Solo $\alpha = 0$.

5. Studio Qualitativo e Doppio Esponenziale

Si consideri l'equazione $y' = xy \ln(y)$.

a) Soluzioni Costanti Cerchiamo le $y = k$ tali che $y'(x) = 0$ (perché un numero fisso ha la derivata = 0).

$$0 = x \cdot y \cdot \ln(y)$$

Poiché il logaritmo richiede $y > 0$:

- $y = 0$ non è accettabile per il dominio del logaritmo.

- $\ln(y) = 0 \implies y = 1$.

Unica soluzione costante: $y(x) = 1$.

b) Problema di Cauchy con $y(0) = 3$ Separiamo le variabili ($y \neq 1$):

$$\frac{y'}{y \ln(y)} = x$$

Integriamo (a sinistra usiamo la sostituzione $t = \ln y$, quindi $dt = \frac{dy}{y}$):

$$\int \frac{1}{\ln y} \cdot \frac{dy}{y} = \int x dx$$

$$\ln |\ln(y)| = \frac{x^2}{2} + c$$

Applicazione del "Metodo K" (per togliere il primo logaritmo):

$$\ln(y) = K \cdot e^{x^2/2}$$

(Nota: qui K ingloba il segno e la costante e^c).

Imponiamo $y(0) = 3$:

$$\ln(3) = K \cdot e^0 \implies K = \ln 3$$

Torniamo all'equazione:

$$\ln(y) = (\ln 3) \cdot e^{x^2/2}$$

Esponenziando un'altra volta per isolare la y :

$$y(x) = e^{(\ln 3)e^{x^2/2}}$$

Possiamo scriverlo meglio usando le proprietà delle potenze ($e^{A \cdot B} = (e^A)^B$):

$$y(x) = (e^{\ln 3})^{e^{x^2/2}} = 3^{e^{x^2/2}}$$

c) Problema con $y(0) = 1/2$ e Limite Riprendiamo la forma generale trovata prima: $\ln(y) = K e^{x^2/2}$. Imponiamo $y(0) = 1/2$:

$$\ln(1/2) = K \cdot e^0 \implies K = \ln(1/2) = -\ln 2$$

Quindi:

$$\ln(y) = -\ln 2 \cdot e^{x^2/2}$$

Per isolare la y , applichiamo l'esponenziale:

$$y(x) = e^{(-\ln 2 \cdot e^{x^2/2})} = (e^{-\ln 2})^{e^{x^2/2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{e^{x^2/2}}$$

Calcolo del limite di $y'(x)$: Dobbiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)$. Usiamo l'equazione differenziale di partenza per scrivere y' :

$$y'(x) = x \cdot y(x) \cdot \ln(y(x))$$

Sostituiamo le espressioni di y e $\ln y$ che abbiamo appena trovato:

$$y'(x) = x \cdot \underbrace{\left[e^{-\ln 2 \cdot e^{x^2/2}} \right]}_{y(x)} \cdot \underbrace{\left[-\ln 2 \cdot e^{x^2/2} \right]}_{\ln y(x)}$$

Riorganizziamo i termini per vedere la frazione "Numeratore vs Denominatore": Il termine con l'esponente negativo lo portiamo sotto (al denominatore):

$$y'(x) = -\ln 2 \cdot \frac{x \cdot e^{x^2/2}}{e^{(\ln 2 \cdot e^{x^2/2})}}$$

Analisi della Gerarchia degli Infiniti:

- Al **Numeratore** abbiamo $x \cdot e^{x^2/2}$. Questo è un "Infinito di tipo Esponenziale".
- Al **Denominatore** abbiamo $e^{\dots e^{x^2/2}}$. Questo è un "Infinito di tipo **Doppio Esponenziale**" (e elevato alla e).

In analisi, il doppio esponenziale è infinitamente più potente dell'esponenziale singolo (proprio come l'esponenziale è più potente di un polinomio). Il denominatore cresce molto più velocemente del numeratore e "schiaccia" la frazione a zero.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$$

6. Lineare Standard (Calcoli Lunghi)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = \cos(x) + e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento: È un'equazione lineare del primo ordine $y' + a(x)y = f(x)$ con $a(x) = 1$. La formula risolutiva è:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int f(x) e^{A(x)} dx + c \right)$$

Dove $A(x) = \int 1 dx = x$.

Sostituendo:

$$y(x) = e^{-x} \left(\int (\cos x + e^x) e^x dx + c \right)$$

$$y(x) = e^{-x} \left(\underbrace{\int e^x \cos x dx}_{I_1} + \underbrace{\int e^{2x} dx}_{I_2} + c \right)$$

Calcolo degli integrali:

- $I_2 = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$. (Facile)

- $I_1 = \int e^x \cos x \, dx$. (Integrale ciclico per parti).

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x &= e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \\ &= e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \cos x \right) \end{aligned}$$

Portando l'integrale a sinistra:

$$2 \int e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x) \implies I_1 = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x)$$

Composizione della soluzione generale:

$$y(x) = e^{-x} \left[\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} e^{2x} + c \right]$$

Moltiplichiamo per e^{-x} (ricorda di distribuirlo su tutti i termini!):

$$y(x) = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} e^x + c e^{-x}$$

Condizione Iniziale: Imponiamo $y(0) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} (\sin 0 + \cos 0) + \frac{1}{2} e^0 + c e^0 \\ 0 &= \frac{1}{2} (0 + 1) + \frac{1}{2} + c \\ 0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c \implies 0 = 1 + c \implies c = -1 \end{aligned}$$

Soluzione Finale:

$$y(x) = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} e^x - e^{-x}$$

7. Coefficiente Razionale

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{1+x^2} = e^{-\arctan x}$$

Svolgimento: Equazione lineare con $a(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Calcoliamo la primitiva $A(x)$:

$$A(x) = \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x)$$

Applichiamo la formula risolutiva:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int f(x) e^{A(x)} \, dx + c \right)$$

$$y(x) = e^{-\arctan x} \left(\int e^{-\arctan x} \cdot e^{\arctan x} dx + c \right)$$

Il passaggio chiave: Gli esponenziali si annullano ($e^{-k} \cdot e^k = e^0 = 1$):

$$y(x) = e^{-\arctan x} \left(\int 1 dx + c \right)$$

Soluzione:

$$y(x) = e^{-\arctan x} (x + c)$$

8. Fattore Integrante Singolare

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \cos(x^2) \\ y(\sqrt{\pi}) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento: Equazione lineare definita per $x \neq 0$. Poiché la condizione iniziale è data in $x_0 = \sqrt{\pi}$ (che è positivo), lavoriamo nell'intervallo $x > 0$.

Calcoliamo il fattore integrante (primitiva di $1/x$):

$$A(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| = \ln(x) \quad (\text{visto che } x > 0)$$

Formula risolutiva:

$$y(x) = e^{-\ln x} \left(\int \cos(x^2) \cdot e^{\ln x} dx + c \right)$$

Semplifichiamo gli esponenziali ($e^{\ln x} = x$):

$$y(x) = \frac{1}{x} \left(\int x \cos(x^2) dx + c \right)$$

Calcolo dell'integrale: L'integrale è quasi immediato (la derivata di x^2 è $2x$). Moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sin(x^2)$$

Quindi la soluzione generale è:

$$y(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} \sin(x^2) + c \right) = \frac{\sin(x^2)}{2x} + \frac{c}{x}$$

Condizione Iniziale: Imponiamo $y(\sqrt{\pi}) = 1$:

$$1 = \frac{\sin(\pi)}{2\sqrt{\pi}} + \frac{c}{\sqrt{\pi}}$$

Sapendo che $\sin(\pi) = 0$:

$$1 = 0 + \frac{c}{\sqrt{\pi}} \implies c = \sqrt{\pi}$$

Soluzione Finale:

$$y(x) = \frac{\sin(x^2)}{2x} + \frac{\sqrt{\pi}}{x} = \frac{\sin(x^2) + 2\sqrt{\pi}}{2x}$$

9. Risonanza Esponenziale

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = \sin(x) + e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento: Fattore integrante $A(x) = x$. Moltiplichiamo tutto per e^x . La formula risolutiva è:

$$y(x) = e^{-x} \left(\int (\sin x + e^{-x}) e^x dx + c \right)$$

Espandiamo l'integrale:

$$\int (\sin x \cdot e^x + \underbrace{e^{-x} \cdot e^x}_1) dx = \int e^x \sin x dx + \int 1 dx$$

Calcolo degli integrali:

- $\int 1 dx = x$. (Ecco la risonanza!).
- $\int e^x \sin x dx$. Usiamo la formula nota (o integriamo per parti due volte come nell'Ex 6, ma occhio ai segni):

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$$

Soluzione generale:

$$y(x) = e^{-x} \left[\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + x + c \right]$$

$$y(x) = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) + x e^{-x} + c e^{-x}$$

Condizione Iniziale: Imponiamo $y(0) = 0$:

$$0 = \frac{1}{2} (\sin 0 - \cos 0) + 0 + c \cdot 1$$

$$0 = \frac{1}{2} (0 - 1) + c$$

$$0 = -\frac{1}{2} + c \implies c = \frac{1}{2}$$

Soluzione Finale:

$$y(x) = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) + \left(x + \frac{1}{2} \right) e^{-x}$$

10. Coefficiente Irrazionale

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}y(x) = \arctan(x)e^{-\sqrt{x}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento: È un'equazione lineare $y' + a(x)y = f(x)$ definita per $x > 0$ (con continuità in 0 da destra).

Calcoliamo la primitiva del coefficiente $a(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$A(x) = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}$$

Formula risolutiva:

$$y(x) = e^{-\sqrt{x}} \left(\int \arctan(x)e^{-\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} dx + c \right)$$

Gli esponenziali nell'integrale si elidono ($e^{-\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} = 1$):

$$y(x) = e^{-\sqrt{x}} \left(\int \arctan(x) dx + c \right)$$

Calcolo dell'integrale (per parti): Prendiamo $u(x) = \arctan x$ (da derivare) e $v'(x) = 1$ (da integrare):

$$\int 1 \cdot \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

Per risolvere il secondo integrale, moltiplichiamo e dividiamo per 2 per avere al numeratore la derivata del denominatore:

$$= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Soluzione generale:

$$y(x) = e^{-\sqrt{x}} \left[x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \right]$$

Condizione Iniziale: Imponiamo $y(0) = 0$:

$$0 = e^0 \left[0 \cdot \arctan(0) - \frac{1}{2} \ln(1) + c \right]$$

$$0 = 1 \cdot [0 - 0 + c] \implies c = 0$$

Soluzione Finale:

$$y(x) = e^{-\sqrt{x}} \left(x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right)$$

11. Polinomiale-Esponenziale

$$\begin{cases} y'(x) + 4x^3 y(x) = x e^{-x^4} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Svolgimento: Equazione lineare con $a(x) = 4x^3$. Calcoliamo la primitiva:

$$A(x) = \int 4x^3 dx = x^4$$

Formula risolutiva:

$$y(x) = e^{-x^4} \left(\int x e^{-x^4} \cdot e^{x^4} dx + c \right)$$

Semplifichiamo gli esponenziali ($e^{-x^4} \cdot e^{x^4} = 1$):

$$y(x) = e^{-x^4} \left(\int x dx + c \right)$$

L'integrale è immediato:

$$y(x) = e^{-x^4} \left(\frac{x^2}{2} + c \right)$$

Condizione Iniziale: Imponiamo $y(0) = y_0$:

$$y_0 = e^0 (0 + c) \implies c = y_0$$

Soluzione Finale:

$$y(x) = e^{-x^4} \left(\frac{x^2}{2} + y_0 \right)$$

12. Con Sommatoria

Risolvere per $N \in \mathbb{N}$ l'equazione differenziale:

$$y'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^N \cos(nx)$$

Svolgimento: Equazione lineare a coefficienti costanti con $a(x) = 1$. Fattore integrante e^x . La formula risolutiva è:

$$y(x) = e^{-x} \left(\int e^x \left[\sum_{n=0}^N \cos(nx) \right] dx + c \right)$$

Strategia (Linearità): Invece di calcolare la somma trigonometrica, scambiamo l'integrale con la sommatoria:

$$\int e^x \sum_{n=0}^N \cos(nx) dx = \sum_{n=0}^N \left(\int e^x \cos(nx) dx \right)$$

Calcoliamo l'integrale per un generico n (usando l'integrazione per parti ciclica o la formula nota):

$$\int e^x \cos(nx) dx = \frac{e^x}{1+n^2} (\cos(nx) + n \sin(nx))$$

Nota: La formula vale anche per $n = 0$ (dove restituisce e^x), quindi non serve dividere i casi.

Sostituiamo questo risultato nella formula generale:

$$y(x) = e^{-x} \left(\sum_{n=0}^N \left[\frac{e^x}{1+n^2} (\cos(nx) + n \sin(nx)) \right] + c \right)$$

Portando e^{-x} dentro la parentesi, si semplifica con gli e^x della sommatoria:

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{\cos(nx) + n \sin(nx)}{1+n^2} + ce^{-x}$$

13. Parametro n Naturale

Si risolva, per $n \in \mathbb{N}$, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'_n(x) + y_n(x) = x^n e^{-x} \\ y_n(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento: Equazione lineare con $a(x) = 1$, quindi fattore integrante e^x . Appliciamo la formula risolutiva:

$$y_n(x) = e^{-x} \left(\int x^n e^{-x} \cdot e^x dx + c \right)$$

Semplificazione: Gli esponenziali nell'integrale si elidono ($e^{-x} \cdot e^x = 1$):

$$y_n(x) = e^{-x} \left(\int x^n dx + c \right)$$

L'integrale è immediato (regola della potenza):

$$y_n(x) = e^{-x} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \right)$$

Condizione Iniziale: Imponiamo $y_n(0) = 0$:

$$0 = e^0 \left(\frac{0^{n+1}}{n+1} + c \right) \implies 0 = 1 \cdot (0 + c) \implies c = 0$$

Soluzione Finale:

$$y_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x}$$

14. Cauchy Lineare Fratta

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1+x}{x}y(x) + x - x^2 \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione è nella forma $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$. Identifichiamo il coefficiente $a(x) = \frac{1}{x} + 1$. La primitiva è $A(x) = \ln(x) + x$ (per $x > 0$).

Usiamo la formula risolutiva diretta:

$$y(x) = e^{\ln x + x} \left(\int (x - x^2) e^{-(\ln x + x)} dx + c \right)$$

Semplifichiamo gli esponenziali:

- Fuori: $e^{\ln x + x} = xe^x$.
- Dentro: $e^{-\ln x - x} = \frac{1}{x}e^{-x}$.

Nell'integrale la x al denominatore si semplifica con $(x - x^2)$:

$$\frac{x - x^2}{x} = 1 - x$$

Quindi dobbiamo calcolare:

$$y(x) = xe^x \left(\int (1 - x)e^{-x} dx + c \right)$$

Calcolo dell'integrale: Spezziamo in due integrali distinti:

$$I = \int e^{-x} dx - \int xe^{-x} dx$$

1. Il primo è immediato: $\int e^{-x} dx = -e^{-x}$. 2. Il secondo si fa per parti (x deriva, e^{-x} integra):

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - \int (-e^{-x}) dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

Mettiamo tutto insieme (attenzione al segno meno davanti al secondo integrale):

$$I = (-e^{-x}) - (-xe^{-x} - e^{-x})$$

$$I = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}$$

Sostituiamo nella soluzione generale:

$$y(x) = xe^x (xe^{-x} + c) = x^2 + cxe^x$$

Condizione Iniziale: Imponiamo $y(1) = \alpha$:

$$\alpha = 1 + ce \implies c = \frac{\alpha - 1}{e}$$

Soluzione Finale:

$$y(x) = x^2 + (\alpha - 1)xe^{x-1}$$

15. Con Analisi del Limite (λ)

$$\begin{cases} y'_\lambda(x) - y_\lambda(x) = e^{(1+\lambda^2)x} \\ y_\lambda(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento: Scriviamo l'equazione in forma normale portando la y a destra:

$$y'(x) = 1 \cdot y(x) + e^{(1+\lambda^2)x}$$

Identifichiamo il coefficiente $a(x) = 1$. La primitiva è $A(x) = \int 1 \, dx = x$.

Applichiamo la formula risolutiva:

$$y(x) = e^x \left(\int e^{(1+\lambda^2)x} \cdot e^{-x} \, dx + c \right)$$

Semplifichiamo l'esponentiale dentro l'integrale (somma degli esponenti):

$$(1 + \lambda^2)x - x = x + \lambda^2x - x = \lambda^2x$$

Quindi dobbiamo calcolare:

$$y(x) = e^x \left(\int e^{\lambda^2x} \, dx + c \right)$$

Qui bisogna distinguere i casi per l'integrale:

CASO 1: $\lambda \neq 0$ (Allora $\lambda^2 \neq 0$)

$$\int e^{\lambda^2x} \, dx = \frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda^2x}$$

Sostituendo:

$$y(x) = e^x \left(\frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda^2x} + c \right) = \frac{1}{\lambda^2} e^{(1+\lambda^2)x} + ce^x$$

Imponiamo $y(0) = 0$:

$$0 = \frac{1}{\lambda^2} + c \implies c = -\frac{1}{\lambda^2}$$

Soluzione ($\lambda \neq 0$):

$$y_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2} \left(e^{(1+\lambda^2)x} - e^x \right)$$

CASO 2: $\lambda = 0$ (Allora l'esponente è 0)

$$\int e^0 \, dx = \int 1 \, dx = x$$

Sostituendo:

$$y(x) = e^x(x + c)$$

Imponiamo $y(0) = 0$:

$$0 = 1(0 + c) \implies c = 0$$

Soluzione ($\lambda = 0$):

$$y_0(x) = xe^x$$

Analisi del Limite: Verifichiamo se $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_\lambda(x) = +\infty$.

- Se $\lambda = 0$: $\lim x e^x = +\infty$. (Sì)
- Se $\lambda \neq 0$: Poiché $1 + \lambda^2 > 1$, l'esponenziale $e^{(1+\lambda^2)x}$ domina su e^x . Il coefficiente $1/\lambda^2$ è positivo. Il limite è $+\infty$. (Sì)

Risposta: Esiste per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

16. Bernoulli Standard

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = y^2(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Svolgimento: Equazione di Bernoulli con $\alpha = 2$. Dividiamo per y^2 :

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = 1$$

Sostituzione: $z = \frac{1}{y} \implies z' = -\frac{y'}{y^2}$. Sostituendo otteniamo:

$$-z' + z = 1$$

Risoluzione in z : Isoliamo z' (moltiplico per -1 e sposto):

$$z' = z - 1$$

Per usare la formula risolutiva delle lineari, riportiamo la z a sinistra per avere la forma $z' + a(x)z = f(x)$:

$$z' - z = -1$$

Ora procediamo come sempre:

- Coefficiente $a(x) = -1 \implies A(x) = -x$.
- Termine noto $f(x) = -1$.

Formula risolutiva:

$$z(x) = e^x \left(\int -1 \cdot e^{-x} dx + c \right)$$

$$z(x) = e^x (e^{-x} + c)$$

$$z(x) = 1 + ce^x$$

Ritorno alla y : Dato che $y = 1/z$:

$$y(x) = \frac{1}{1 + ce^x}$$

Condizione Iniziale: $y(0) = y_0 \implies y_0 = \frac{1}{1+c}$. Da cui ricaviamo c :

$$1 + c = \frac{1}{y_0} \implies c = \frac{1}{y_0} - 1 = \frac{1 - y_0}{y_0}$$

Soluzione Finale: Sostituendo c e semplificando la frazione:

$$y(x) = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^x}$$

17. Bernoulli Guidata

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - x(y(x))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento: Scriviamo l'equazione come $y' - y = -xy^2$. È una Bernoulli con $\alpha = 2$.

Passo 1: Sostituzione Dividiamo per y^2 :

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = -x$$

Poniamo $z = \frac{1}{y}$. Derivando: $z' = -\frac{y'}{y^2} \implies \frac{y'}{y^2} = -z'$.

Sostituiamo nell'equazione:

$$-z' - z = -x$$

Moltiplichiamo tutto per -1 per avere la forma normale:

$$z' + z = x$$

Passo 2: Risoluzione in z Equazione lineare con $a(x) = 1$. Fattore integrante e^x .

$$z(x) = e^{-x} \left(\int x e^x dx + c \right)$$

Calcoliamo l'integrale per parti:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x(x - 1)$$

Sostituiamo nella formula di z :

$$z(x) = e^{-x} [e^x(x - 1) + c]$$

$$z(x) = (x - 1) + c e^{-x}$$

Passo 3: Ritorno alla y Poiché $y = 1/z$:

$$y(x) = \frac{1}{x - 1 + c e^{-x}}$$

Passo 4: Condizione Iniziale Imponiamo $y(0) = 1$:

$$1 = \frac{1}{0 - 1 + c \cdot e^0} \implies 1 = \frac{1}{-1 + c}$$

$$c - 1 = 1 \implies c = 2$$

Soluzione Finale:

$$y(x) = \frac{1}{x - 1 + 2e^{-x}}$$

18. Standard Trigonometrica

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \cos(2x) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento:

1. Soluzione Omogenea (y_h) Equazione caratteristica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Scomponiamo: $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$. Radici: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

2. Soluzione Particolare (y_p) Il termine noto è $\cos(2x)$. Poiché $2i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione della forma:

$$y_p(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$$

Calcoliamo le derivate:

$$y'_p = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$$

$$y''_p = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)$$

Sostituiamo nell'equazione completa ($y'' - 3y' + 2y = \cos(2x)$):

$$(-4A \cos - 4B \sin) - 3(-2A \sin + 2B \cos) + 2(A \cos + B \sin) = \cos(2x)$$

Raccogliamo i termini simili:

- Cos: $-4A - 6B + 2A = -2A - 6B$
- Sin: $-4B + 6A + 2B = 6A - 2B$

Impostiamo il sistema uguagliando i coefficienti a quelli del termine noto ($1 \cdot \cos + 0 \cdot \sin$):

$$\begin{cases} -2A - 6B = 1 \\ 6A - 2B = 0 \end{cases} \implies B = 3A$$

Sostituiamo B nella prima:

$$-2A - 6(3A) = 1 \implies -20A = 1 \implies A = -\frac{1}{20}$$

Quindi $B = 3A = -\frac{3}{20}$.

La soluzione particolare è:

$$y_p(x) = -\frac{1}{20} \cos(2x) - \frac{3}{20} \sin(2x)$$

3. Integrale Generale

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \frac{1}{20} \cos(2x) - \frac{3}{20} \sin(2x)$$

4. Problema di Cauchy Calcoliamo la derivata dell'integrale generale per imporre la condizione su y' :

$$y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \sin(2x) - \frac{3}{10} \cos(2x)$$

Imponiamo le condizioni:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \implies c_1 + c_2 - \frac{1}{20} = 0 \\ y'(0) = 1 \implies c_1 + 2c_2 - \frac{3}{10} = 1 \end{cases}$$

Sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{20} \\ c_1 + 2c_2 = \frac{13}{10} \quad (= \frac{26}{20}) \end{cases}$$

Sottraendo la prima dalla seconda: $c_2 = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$. Ricaviamo c_1 : $c_1 = \frac{1}{20} - \frac{25}{20} = -\frac{24}{20} = -\frac{6}{5}$.

Soluzione Finale:

$$y(x) = -\frac{6}{5}e^x + \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{1}{20}\cos(2x) - \frac{3}{20}\sin(2x)$$

19. Doppia Risonanza Esponenziale

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y''(t) - y(t) = e^t - e^{-t}$$

Svolgimento:

1. Soluzione Omogenea Equazione caratteristica: $\lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$.

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

2. Soluzione Particolare Il termine noto è somma di due esponenziali che coincidono entrambi con le radici dell'omogenea. Abbiamo risonanza per entrambi. Cerchiamo una soluzione della forma:

$$y_p(t) = Ate^t + Bte^{-t}$$

Calcoliamo le derivate (regola del prodotto):

$$\begin{aligned} y'_p &= A(e^t + te^t) + B(e^{-t} - te^{-t}) \\ y''_p &= A(e^t + e^t + te^t) + B(-e^{-t} - (e^{-t} - te^{-t})) \\ y''_p &= A(2e^t + te^t) + B(-2e^{-t} + te^{-t}) \end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione $y'' - y = e^t - e^{-t}$:

$$[A(2e^t + te^t) + B(-2e^{-t} + te^{-t})] - [Ate^t + Bte^{-t}] = e^t - e^{-t}$$

Semplifichiamo (i termini con la t si cancellano sempre se la risonanza è impostata bene):

$$\begin{aligned} 2Ae^t + \cancel{Ate^t} - 2Be^{-t} + \cancel{Bte^{-t}} - \cancel{Ate^t} - \cancel{Bte^{-t}} &= e^t - e^{-t} \\ 2Ae^t - 2Be^{-t} &= 1e^t - 1e^{-t} \end{aligned}$$

Uguagliamo i coefficienti:

- Per e^t : $2A = 1 \implies A = 1/2$.
- Per e^{-t} : $-2B = -1 \implies B = 1/2$.

Quindi la soluzione particolare è:

$$y_p(t) = \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}te^{-t} = \frac{t}{2}(e^t + e^{-t})$$

(Nota: questo equivarrebbe a $t \sinh t$ o $t \cosh t$ a seconda dei segni, ma lasciamolo così).

3. Integrale Generale

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}te^{-t}$$

20. Termine Noto Polinomiale (Risonanza)

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) = t + 1 \\ y(0) = k, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento:

1. Soluzione Omogenea Equazione caratteristica: $\lambda^2 - \lambda = 0 \implies \lambda(\lambda - 1) = 0$.
Radici: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$.

$$y_h(t) = c_1e^{0t} + c_2e^{1t} = c_1 + c_2e^t$$

(La presenza della costante c_1 isolata conferma la risonanza con polinomi).

2. Soluzione Particolare Termine noto $f(t) = t + 1$ (grado 1). Poiché $\lambda = 0$ è radice semplice, cerchiamo un polinomio di grado $1 + 1 = 2$, senza termine noto (inutile):

$$y_p(t) = At^2 + Bt$$

Calcoliamo le derivate:

$$y'_p(t) = 2At + B$$

$$y''_p(t) = 2A$$

Sostituiamo in $y'' - y' = t + 1$:

$$(2A) - (2At + B) = t + 1$$

$$-2At + (2A - B) = 1t + 1$$

Sistema dei coefficienti:

$$\begin{cases} -2A = 1 \implies A = -\frac{1}{2} \\ 2A - B = 1 \implies 2(-\frac{1}{2}) - B = 1 \end{cases}$$

Dalla seconda: $-1 - B = 1 \implies B = -2$.

Soluzione particolare:

$$y_p(t) = -\frac{1}{2}t^2 - 2t$$

3. Integrale Generale

$$y(t) = c_1 + c_2 e^t - \frac{1}{2} t^2 - 2t$$

4. Problema di Cauchy

Calcoliamo la derivata:

$$y'(t) = c_2 e^t - t - 2$$

Imponiamo le condizioni:

- $y'(0) = 0 \implies c_2 e^0 - 0 - 2 = 0 \implies c_2 = 2.$
- $y(0) = k \implies c_1 + c_2 - 0 - 0 = k \implies c_1 + 2 = k \implies c_1 = k - 2.$

Soluzione Finale:

$$y(t) = (k - 2) + 2e^t - \frac{1}{2} t^2 - 2t$$

21. Risonanza Completa (e^x)

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento:

1. Soluzione Omogenea Equazione caratteristica: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \implies (\lambda - 1)^2 = 0$. Radice: $\lambda = 1$ con molteplicità $\mu = 2$.

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

2. Soluzione Particolare Il termine noto è e^x . Poiché $\alpha = 1$ coincide con la radice doppia dell'omogenea, dobbiamo cercare una soluzione moltiplicata per x^2 :

$$y_p(x) = A x^2 e^x$$

Calcoliamo le derivate (con calma):

$$y'_p = A(2x e^x + x^2 e^x) = A e^x (x^2 + 2x)$$

Per la derivata seconda, deriviamo il prodotto $e^x \cdot (x^2 + 2x)$:

$$y''_p = A[e^x(x^2 + 2x) + e^x(2x + 2)]$$

$$y''_p = A e^x (x^2 + 4x + 2)$$

Sostituiamo nell'equazione $y'' - 2y' + y = e^x$. Dividiamo subito tutto per e^x (che non è mai zero) per semplificare i conti:

$$A(x^2 + 4x + 2) - 2A(x^2 + 2x) + A x^2 = 1$$

Raccogliamo le potenze di x :

- Termini x^2 : $A - 2A + A = 0$ (Deve annullarsi!)

- Termini x : $4A - 4A = 0$ (Deve annullarsi!)
- Termini noti: $2A = 1$

Dall'ultima equazione: $2A = 1 \implies A = 1/2$.

Soluzione particolare:

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$$

3. Integrale Generale

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x = e^x \left(c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2 \right)$$

4. Problema di Cauchy Condizione $y(0) = 0$:

$$0 = e^0(c_1 + 0 + 0) \implies c_1 = 0$$

Aggiorniamo la funzione per derivare meno roba ($y = c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$):

$$y'(x) = c_2(e^x + xe^x) + \frac{1}{2}(2xe^x + x^2e^x)$$

Condizione $y'(0) = 0$:

$$0 = c_2(1 + 0) + \frac{1}{2}(0 + 0) \implies c_2 = 0$$

Soluzione Finale:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$$

22. Soluzione 1. Soluzione Generale

Risolviamo prima l'omogenea associata $y'' - y' - 2y = 0$. Il polinomio caratteristico è:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Le radici sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$, quindi la soluzione omogenea è:

$$y_h(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$$

Cerchiamo una soluzione particolare per $12e^{2x}$. Poiché $\lambda = 2$ è radice semplice del polinomio caratteristico, usiamo il metodo della somiglianza con risonanza (moltiplichiamo per x):

$$y_p(x) = Axe^{2x}$$

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ae^{2x}(1 + 2x) \\ y_p''(x) &= Ae^{2x}(2 + 2(1 + 2x)) = Ae^{2x}(4x + 4) \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale completa:

$$Ae^{2x}(4x + 4) - Ae^{2x}(1 + 2x) - 2(Axe^{2x}) = 12e^{2x}$$

Dividendo per e^{2x} :

$$A(4x + 4 - 1 - 2x - 2x) = 12 \implies 3A = 12 \implies A = 4$$

La soluzione generale è dunque:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + 4x e^{2x}$$

2. Condizione Mista

Imponiamo $y(0) + y'(0) = 18$. Calcoliamo $y(0)$ e $y'(0)$:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 \\ y'(x) &= 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x} + 4(e^{2x} + 2x e^{2x}) \\ y'(0) &= 2c_1 - c_2 + 4 \end{aligned}$$

Sommando e imponendo la condizione:

$$(c_1 + c_2) + (2c_1 - c_2 + 4) = 18 \implies 3c_1 + 4 = 18 \implies c_1 = \frac{14}{3}$$

La famiglia di soluzioni cercata è:

$$y(x) = \frac{14}{3} e^{2x} + c_2 e^{-x} + 4x e^{2x}$$

3. Limite

Verifichiamo se esiste c_2 tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{14}{3} e^{2x} + 4x e^{2x} + c_2 e^{-x} \right)$$

Notiamo che:

- $\frac{14}{3} e^{2x} \rightarrow 0$
- $4x e^{2x} \rightarrow 0$ (gerarchia degli infiniti)
- $c_2 e^{-x} \rightarrow \pm\infty$ (poiché l'esponente diventa positivo), a meno che $c_2 = 0$.

Affinché il limite sia finito e pari a 0, dobbiamo imporre $c_2 = 0$. La soluzione finale è:

$$y(x) = \frac{14}{3} e^{2x} + 4x e^{2x}$$

23. Soluzione

1. Soluzione Generale

Risolviamo l'omogenea $y'' + y = 0$. Le radici caratteristiche sono $\lambda = \pm i$, quindi:

$$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Per la soluzione particolare, sfruttiamo la linearità. Invece di espandere la sommatoria, risolviamo per il termine generico $\sin(kx)$ con $k \in \{2, 3, 4, 5\}$. Poiché la pulsazione naturale è $\omega = 1$ e $k \geq 2$, non c'è risonanza. Cerchiamo $y_{p,k}(x) = A_k \sin(kx)$. Sostituendo in $y'' + y$:

Calcolo dei coefficienti:

Cerchiamo una soluzione particolare della forma $y_{p,k}(x) = A_k \sin(kx)$. Sostituiamo $y_{p,k}$ e la sua derivata seconda $y''_{p,k} = -k^2 A_k \sin(kx)$ nell'equazione completa:

$$-k^2 A_k \sin(kx) + A_k \sin(kx) = \sin(kx)$$

Raccogliamo i termini simili a sinistra:

$$A_k(1 - k^2) \cdot \sin(kx) = 1 \cdot \sin(kx)$$

Uguagliamo i coefficienti del termine $\sin(kx)$ (il termine tra parentesi a sinistra deve essere uguale al coefficiente 1 a destra):

$$A_k(1 - k^2) = 1$$

Da cui ricaviamo il valore di A_k :

$$A_k = \frac{1}{1 - k^2}$$

La soluzione particolare complessiva è la somma delle soluzioni particolari:

$$y_p(x) = \sum_{k=2}^5 \frac{1}{1 - k^2} \sin(kx)$$

La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \sum_{k=2}^5 \frac{1}{1 - k^2} \sin(kx)$$

3. Problema di Cauchy

Imponiamo $y(0) = 0$:

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \sum 0 = 0 \implies c_1 = 0$$

Imponiamo $y'(0) = 0$. Calcoliamo prima la derivata:

$$y'(x) = -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + \sum_{k=2}^5 \frac{k}{1 - k^2} \cos(kx)$$

In $x = 0$:

$$y'(0) = c_2 + \sum_{k=2}^5 \frac{k}{1 - k^2} = 0 \implies c_2 = -\sum_{k=2}^5 \frac{k}{1 - k^2} = \sum_{k=2}^5 \frac{k}{k^2 - 1}$$

Svolgiamo la somma numerica per $k = 2, 3, 4, 5$:

$$c_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \frac{4}{15} + \frac{5}{24} = \frac{80 + 45 + 32 + 25}{120} = \frac{182}{120} = \frac{91}{60}$$

La soluzione finale è:

$$y(x) = \frac{91}{60} \sin(x) + \sum_{k=2}^5 \frac{1}{1 - k^2} \sin(kx)$$

24. Soluzione

1. Omogenea associata

L'equazione caratteristica è $r^2 - 5r + 6 = 0$, che ha radici $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. La soluzione omogenea è:

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

2. Soluzione particolare (Discussione su α)

Il termine noto è $e^{\alpha x}$. Dobbiamo distinguere se α coincide con le radici caratteristiche.

- **Caso $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq 3$ (Nessuna risonanza):**

Cerchiamo $y_p = Ae^{\alpha x}$. Sostituendo nell'equazione otteniamo:

$$A(\alpha^2 - 5\alpha + 6)e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \implies A = \frac{1}{\alpha^2 - 5\alpha + 6}$$

- **Caso $\alpha = 2$ (Risonanza semplice):**

Poiché $\alpha = 2$ è radice semplice, cerchiamo $y_p = Axe^{2x}$. Calcoliamo le derivate (regola del prodotto):

$$y'_p = Ae^{2x}(1 + 2x)$$

$$y''_p = Ae^{2x}(4 + 4x)$$

Sostituiamo nell'equazione $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$:

$$Ae^{2x}[(4 + 4x) - 5(1 + 2x) + 6x] = e^{2x}$$

I termini con la x si elidono ($4x - 10x + 6x = 0$). Rimane:

$$A(4 - 5) = 1 \implies -A = 1 \implies A = -1$$

Quindi $y_p = -xe^{2x}$.

- **Caso $\alpha = 3$ (Risonanza semplice):**

Poiché $\alpha = 3$ è radice semplice, cerchiamo $y_p = Axe^{3x}$. Calcoliamo le derivate:

$$y'_p = Ae^{3x}(1 + 3x)$$

$$y''_p = Ae^{3x}(6 + 9x)$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$Ae^{3x}[(6 + 9x) - 5(1 + 3x) + 6x] = e^{3x}$$

I termini con la x si elidono ($9x - 15x + 6x = 0$). Rimane:

$$A(6 - 5) = 1 \implies A = 1$$

Quindi $y_p = xe^{3x}$.

Soluzione Generale:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-2)(\alpha-3)} e^{\alpha x} & \text{se } \alpha \neq 2, 3 \\ -xe^{2x} & \text{se } \alpha = 2 \\ xe^{3x} & \text{se } \alpha = 3 \end{cases}$$

25. Soluzione

1. Soluzione Omogenea

L'equazione omogenea associata è $y'' - \alpha^2 y = 0$. Per trovare le radici, scriviamo l'equazione caratteristica nella forma $ar^2 + br + c = 0$:

$$1 \cdot r^2 + 0 \cdot r - \alpha^2 = 0$$

Identifichiamo i coefficienti:

$$a = 1, \quad b = 0 \quad (\text{poiché manca } y'), \quad c = -\alpha^2$$

Calcoliamo il discriminante Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-\alpha^2) = 4\alpha^2$$

Poiché $\Delta \geq 0$, abbiamo radici reali:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{4\alpha^2}}{2} = \frac{\pm 2\alpha}{2} = \pm \alpha$$

Quindi le soluzioni dell'omogenea sono:

- Se $\alpha > 0$ (radici distinte $\pm\alpha$): $y_h(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$
- Se $\alpha = 0$ (radice doppia 0): $y_h(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} = c_1 + c_2 x$

2. Soluzione Particolare

Il termine noto è e^x (che ha esponente 1). Confrontiamo l'esponente 1 con le radici trovate ($\pm\alpha$).

- **Caso $\alpha \neq 1$ (Nessuna risonanza):**

L'esponente 1 è diverso dalle radici $\pm\alpha$. Cerchiamo $y_p = Ae^x$. Sostituendo nell'equazione $y'' - \alpha^2 y = e^x$:

$$Ae^x - \alpha^2 Ae^x = e^x \implies A(1 - \alpha^2)e^x = e^x$$

Confrontando i coefficienti:

$$A = \frac{1}{1 - \alpha^2}$$

- **Caso $\alpha = 1$ (Risonanza):**

Se $\alpha = 1$, le radici sono ± 1 . La radice $+1$ coincide con l'esponente del termine noto. Cerchiamo quindi la soluzione moltiplicando per x :

$$y_p = Axe^x$$

Calcoliamo le derivate (regola del prodotto):

$$y'_p = Ae^x(1 + x), \quad y''_p = Ae^x(2 + x)$$

Sostituiamo nell'equazione con $\alpha = 1$ (cioè $y'' - y = e^x$):

$$[Ae^x(2 + x)] - [Axe^x] = e^x$$

Sviluppando:

$$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x$$

I termini con la x si elidono perfettamente. Rimane:

$$2Ae^x = e^x \implies 2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}$$

Quindi $y_p = \frac{1}{2}xe^x$.

Soluzione Generale:

$$y(x) = \begin{cases} c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x} + \frac{1}{1-\alpha^2}e^x & \text{se } \alpha \neq 1, \alpha > 0 \\ c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x & \text{se } \alpha = 1 \\ c_1x + c_2 + e^x & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

26. Parametro α all'Esponente

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = e^{\alpha^2 x}, \quad \alpha \geq 0$$

Svolgimento: Analizziamo l'equazione caratteristica: $\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \implies \lambda = \pm\alpha$.

CASO 1: $\alpha = 0$ L'equazione diventa $y'' = 1$. Si può risolvere integrando due volte consecutivamente:

$$y'(x) = \int 1 dx = x + c_1$$
$$y(x) = \int (x + c_1) dx = \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

(Nota: qui la risonanza era doppia, $\lambda = 0$ con m.a.=2).

CASO 2: $\alpha = 1$ L'equazione diventa $y'' - y = e^x$. Le radici sono $\lambda = \pm 1$. Il termine noto e^x va in **risonanza** con $\lambda_1 = 1$. Cerchiamo soluzione particolare: $y_p(x) = Axe^x$.

Derivate: $y'_p = Ae^x(1+x)$ $y''_p = Ae^x(2+x)$

Sostituiamo:

$$Ae^x(2+x) - Axe^x = e^x$$
$$2Ae^x = e^x \implies 2A = 1 \implies A = 1/2$$

Soluzione per $\alpha = 1$:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$$

CASO 3: $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$ Le radici sono $\lambda = \pm\alpha$. L'esponente del termine noto è α^2 . Dato che $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 0$, allora $\alpha^2 \neq \alpha$. **Non c'è risonanza.**

Cerchiamo particolare della forma: $y_p(x) = Ke^{\alpha^2 x}$. Derivate: $y'_p = K\alpha^2 e^{\alpha^2 x}$ $y''_p = K\alpha^4 e^{\alpha^2 x}$

Sostituiamo:

$$K\alpha^4 e^{\alpha^2 x} - \alpha^2 (Ke^{\alpha^2 x}) = e^{\alpha^2 x}$$

Dividiamo per l'esponenziale:

$$K\alpha^4 - K\alpha^2 = 1$$

$$K(\alpha^4 - \alpha^2) = 1 \implies K = \frac{1}{\alpha^2(\alpha^2 - 1)}$$

Soluzione generale ($\alpha \neq 0, 1$):

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2(\alpha^2 - 1)} e^{\alpha^2 x}$$

27. Risonanza Polinomiale (Parametrica)

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha^2 y(x) = x^2 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento: Dobbiamo distinguere due casi in base al parametro α .

CASO 1: $\alpha = 0$ L'equazione diventa:

$$y''(x) = x^2$$

Procediamo per integrazione diretta due volte:

$$y'(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c_1$$

$$y(x) = \int \left(\frac{x^3}{3} + c_1 \right) dx = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

- $y'(0) = 0 \implies 0 + c_1 = 0 \implies c_1 = 0.$
- $y(0) = 0 \implies 0 + 0 + c_2 = 0 \implies c_2 = 0.$

Soluzione per $\alpha = 0$:

$$y(x) = \frac{x^4}{12}$$

CASO 2: $\alpha \neq 0$

1. Soluzione Omogenea Equazione caratteristica: $\lambda^2 + \alpha^2 = 0 \implies \lambda = \pm i\alpha.$

$$y_h(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)$$

2. Soluzione Particolare Termine noto $P(x) = x^2$. Poiché 0 non è soluzione dell'omogenea, **non c'è risonanza**. Cerchiamo un polinomio generico di grado 2:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Derivate:

$$y'_p = 2Ax + B$$

$$y''_p = 2A$$

Sostituiamo nell'equazione completa ($y'' + \alpha^2 y = x^2$):

$$(2A) + \alpha^2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

Ordiniamo per potenze di x :

$$(\alpha^2 A)x^2 + (\alpha^2 B)x + (2A + \alpha^2 C) = 1x^2 + 0x + 0$$

Sistema dei coefficienti:

$$\begin{cases} \alpha^2 A = 1 \implies A = \frac{1}{\alpha^2} \\ \alpha^2 B = 0 \implies B = 0 \\ 2A + \alpha^2 C = 0 \implies C = -\frac{2A}{\alpha^2} \end{cases}$$

Sostituendo A in C :

$$C = -\frac{2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\alpha^2} = -\frac{2}{\alpha^4}$$

Quindi la soluzione particolare è:

$$y_p(x) = \frac{1}{\alpha^2}x^2 - \frac{2}{\alpha^4}$$

3. Problema di Cauchy Integrale generale:

$$y(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x) + \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^4}$$

Derivata:

$$y'(x) = -\alpha c_1 \sin(\alpha x) + \alpha c_2 \cos(\alpha x) + \frac{2x}{\alpha^2}$$

Condizioni:

- $y(0) = 0$:

$$c_1(1) + 0 + 0 - \frac{2}{\alpha^4} = 0 \implies c_1 = \frac{2}{\alpha^4}$$

- $y'(0) = 0$:

$$0 + \alpha c_2(1) + 0 = 0 \implies \alpha c_2 = 0 \implies c_2 = 0$$

Soluzione Finale ($\alpha \neq 0$):

$$y(x) = \frac{2}{\alpha^4} \cos(\alpha x) + \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^4}$$

28. Integrabilità all'Infinito

$$\begin{cases} y''(t) - 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = \beta \end{cases}$$

Svolgimento:

1. Soluzione Omogenea Equazione caratteristica: $\lambda^2 - 2 = 0 \implies \lambda = \pm\sqrt{2}$.

Integrale generale:

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

Derivata:

$$y'(t) = \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

2. Problema di Cauchy Imponiamo le condizioni:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \implies c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = \beta \implies \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 = \beta \end{cases}$$

Dalla prima ricaviamo $c_2 = 1 - c_1$. Sostituiamo nella seconda:

$$\sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}(1 - c_1) = \beta$$

$$\sqrt{2}c_1 - \sqrt{2} + \sqrt{2}c_1 = \beta$$

$$2\sqrt{2}c_1 = \beta + \sqrt{2}$$

$$c_1 = \frac{\beta + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\beta}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$$

Ora troviamo c_2 :

$$c_2 = 1 - c_1 = 1 - \left(\frac{\beta}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{2}}$$

Quindi la soluzione unica del problema di Cauchy è:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} \right) e^{\sqrt{2}t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} \right) e^{-\sqrt{2}t}$$

3. Integrabilità all'Infinito Ci viene chiesto per quali β vale:

$$\int_0^{+\infty} |y(t)| dt < +\infty$$

Analizziamo i due termini della soluzione:

- Il termine con $e^{-\sqrt{2}t}$ tende a 0 velocemente per $t \rightarrow +\infty$. Questo termine è ****sempre integrabile**** (converge).
- Il termine con $e^{\sqrt{2}t}$ tende a $+\infty$ velocemente. Questo termine ****non è mai integrabile**** all'infinito, a meno che... non sparisca del tutto!

Affinché l'integrale converga, dobbiamo "uccidere" il termine che esplode. Condizione necessaria e sufficiente: il coefficiente di $e^{\sqrt{2}t}$ deve essere ZERO.

$$c_1 = 0 \implies \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{\beta}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = -\sqrt{2}$$

Conclusione: L'unico valore per cui la soluzione è integrabile è $\beta = -\sqrt{2}$. In tal caso la soluzione diventa semplicemente $y(t) = e^{-\sqrt{2}t}$.

29. Terzo Ordine

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y'''(x) - y'(x) = \cos(x)$$

Svolgimento:

1. Soluzione Omogenea Equazione caratteristica:

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \implies \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

Le radici sono reali e distinte: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

2. Soluzione Particolare Termine noto: $\cos(x)$. Non c'è risonanza. Cerchiamo:

$$y_p(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$$

Calcoliamo le derivate:

- $y'_p = -A \sin(x) + B \cos(x)$
- $y''_p = -A \cos(x) - B \sin(x)$
- $y'''_p = A \sin(x) - B \cos(x)$

Sostituiamo nell'equazione $y''' - y' = \cos(x)$:

$$[A \sin(x) - B \cos(x)] - [-A \sin(x) + B \cos(x)] = \cos(x)$$

Sommiamo i termini simili:

$$2A \sin(x) - 2B \cos(x) = \cos(x)$$

Uguagliando i coefficienti:

$$\begin{cases} 2A = 0 \implies A = 0 \\ -2B = 1 \implies B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione particolare:

$$y_p(x) = -\frac{1}{2} \sin(x)$$

3. Integrale Generale

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin(x)$$

30. Quarto Ordine

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y''''(x) - y(x) = e^{-x}$$

Svolgimento:

1. Soluzione Omogenea Equazione caratteristica:

$$\lambda^4 - 1 = 0 \implies (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

Abbiamo 4 radici:

- $\lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$ (Reali)
- $\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i$ (Immaginarie)

Soluzione omogenea (somma di esponenziali e oscillazioni):

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x)$$

2. Soluzione Particolare Termine noto e^{-x} . Poiché $\lambda = -1$ è radice semplice dell'omogenea, c'è risonanza Dobbiamo moltiplicare per x :

$$y_p(x) = A x e^{-x}$$

Calcoliamo le derivate (regola del prodotto ripetuta):

- $y_p' = A(1 - x)e^{-x}$
- $y_p'' = A(-1 - (1 - x))e^{-x} = A(x - 2)e^{-x}$
- $y_p''' = A(1 - (x - 2))e^{-x} = A(3 - x)e^{-x}$
- $y_p'''' = A(-1 - (3 - x))e^{-x} = A(x - 4)e^{-x}$

Sostituiamo nell'equazione $y'''' - y = e^{-x}$:

$$[A(x - 4)e^{-x}] - [A x e^{-x}] = e^{-x}$$

Svolgiamo:

$$A x e^{-x} - 4A e^{-x} - A x e^{-x} = e^{-x}$$

I termini con x si cancellano (ottimo segno!):

$$-4A e^{-x} = e^{-x}$$

Confronto coefficienti:

$$-4A = 1 \implies A = -\frac{1}{4}$$

Soluzione particolare:

$$y_p(x) = -\frac{1}{4} x e^{-x}$$

3. Integrale Generale

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x) - \frac{1}{4} x e^{-x}$$

31. Oscillatore Armonico Forzato (ω)

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = \cos(\omega x) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento: Omogenea: $y_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$.

CASO 1: $\omega \neq 3$ (Nessuna Risonanza) Cerchiamo $y_p(x) = A \cos(\omega x)$.

Calcolo derivate:

$$y_p'(x) = -A\omega \sin(\omega x)$$

$$y_p''(x) = -A\omega^2 \cos(\omega x)$$

Sostituzione in $y'' + 9y = \cos(\omega x)$:

$$[-A\omega^2 \cos(\omega x)] + 9[A \cos(\omega x)] = \cos(\omega x)$$

$$A(9 - \omega^2) \cos(\omega x) = \cos(\omega x) \implies A = \frac{1}{9 - \omega^2}$$

CASO 2: $\omega = 3$ (**Risonanza**) Cerchiamo $y_p(x) = x[A \cos(3x) + B \sin(3x)] = Ax \cos(3x) + Bx \sin(3x)$.

Calcolo derivate (regola del prodotto):

$$y_p' = A \cos(3x) - 3Ax \sin(3x) + B \sin(3x) + 3Bx \cos(3x)$$

$$y_p'' = -3A \sin(3x) - [3A \sin(3x) + 9Ax \cos(3x)] + 3B \cos(3x) + [3B \cos(3x) - 9Bx \sin(3x)]$$

Raggruppando i termini della derivata seconda:

$$y_p'' = -6A \sin(3x) + 6B \cos(3x) - 9Ax \cos(3x) - 9Bx \sin(3x)$$

Sostituzione in $y'' + 9y = \cos(3x)$: Osserviamo che i termini con la x (quelli con il 9) si cancellano esattamente con $+9y_p$. Rimangono solo i termini "liberi":

$$-6A \sin(3x) + 6B \cos(3x) = \cos(3x)$$

Sistema:

$$\begin{cases} -6A = 0 \implies A = 0 & (\text{coefficiente del seno}) \\ 6B = 1 \implies B = 1/6 & (\text{coefficiente del coseno}) \end{cases}$$

Quindi $y_p(x) = \frac{1}{6}x \sin(3x)$.

Problemi di Cauchy

Ricordiamo le condizioni iniziali: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. L'omogenea è sempre $y_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$.

1. Per $\omega \neq 3$: Integrale generale:

$$y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + \frac{1}{9 - \omega^2} \cos(\omega x)$$

Derivata:

$$y'(x) = -3c_1 \sin(3x) + 3c_2 \cos(3x) - \frac{\omega}{9 - \omega^2} \sin(\omega x)$$

Imponiamo le condizioni:

- $y(0) = 1 \implies c_1(1) + 0 + \frac{1}{9 - \omega^2}(1) = 1 \implies c_1 = 1 - \frac{1}{9 - \omega^2}$
- $y'(0) = 0 \implies 0 + 3c_2(1) - 0 = 0 \implies c_2 = 0$

Soluzione finale ($\omega \neq 3$):

$$y(x) = \left(1 - \frac{1}{9 - \omega^2}\right) \cos(3x) + \frac{1}{9 - \omega^2} \cos(\omega x)$$

2. Per $\omega = 3$: Integrale generale:

$$y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + \frac{1}{6}x \sin(3x)$$

Derivata (attenzione alla regola del prodotto sull'ultimo termine):

$$y'(x) = -3c_1 \sin(3x) + 3c_2 \cos(3x) + \frac{1}{6} \sin(3x) + \frac{1}{2}x \cos(3x)$$

Imponiamo le condizioni:

- $y(0) = 1 \implies c_1(1) + 0 + 0 = 1 \implies c_1 = 1$
- $y'(0) = 0 \implies 0 + 3c_2(1) + \frac{1}{6}(0) + 0 = 0 \implies c_2 = 0$

Soluzione finale ($\omega = 3$):

$$y(x) = \cos(3x) + \frac{1}{6}x \sin(3x)$$

32. Studio Completo Risonanza Trigonometrica

Si considera $y''(x) + 4y(x) = \sin(\alpha x)$ con $\alpha \geq 0$.

Svolgimento:

a) Integrale Generale al variare di α

1. *Soluzione Omogenea:* $\lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda = \pm 2i$.

$$y_h(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

2. *Soluzione Particolare:* Distinguiamo se α coincide con la frequenza naturale (2).

Caso $\alpha \neq 2$ (No Risonanza): Cerchiamo $y_p(x) = A \sin(\alpha x)$. Derivate: $y_p'' = -A\alpha^2 \sin(\alpha x)$. Sostituzione:

$$-A\alpha^2 \sin(\alpha x) + 4A \sin(\alpha x) = \sin(\alpha x)$$

$$A(4 - \alpha^2) = 1 \implies A = \frac{1}{4 - \alpha^2}$$

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{4 - \alpha^2} \sin(\alpha x)$$

Caso $\alpha = 2$ (Risonanza): Cerchiamo $y_p(x) = x[A \cos(2x) + B \sin(2x)]$. Poiché manca y' , sappiamo che rimarrà il termine "sfasato" (il coseno). Svolgendo i calcoli completi si ottiene:

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = 0$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{4}x \cos(2x)$$

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - \frac{1}{4}x \cos(2x)$$

b) Limitata inferiormente? Dobbiamo vedere se $y(x) \rightarrow -\infty$ per qualche x .

- Se $\alpha \neq 2$: La soluzione è somma di seni e coseni limitati. La funzione è limitata (oscilla tra un max e un min).
- Se $\alpha = 2$: C'è il termine $-\frac{1}{4}x \cos(2x)$. L'ampiezza dell'oscillazione cresce linearmente con x . Quindi per $x \rightarrow +\infty$ la funzione assume valori arbitrariamente grandi e arbitrariamente piccoli (non è limitata né sup. né inf.).

Risposta: Solo per $\alpha = 2$.

c) Problemi di Cauchy ($y(0) = 1, y'(0) = 1$)

Caso $\alpha = 4$ (No Risonanza): Usiamo la formula generale con $\alpha = 4$:

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{4-16} \sin(4x)$$

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - \frac{1}{12} \sin(4x)$$

Derivata:

$$y'(x) = -2c_1 \sin(2x) + 2c_2 \cos(2x) - \frac{4}{12} \cos(4x)$$

Condizioni:

- $y(0) = 1 \implies c_1 = 1.$
- $y'(0) = 1 \implies 2c_2 - \frac{1}{3} = 1 \implies 2c_2 = \frac{4}{3} \implies c_2 = \frac{2}{3}.$

Soluzione ($\alpha = 4$):

$$y(x) = \cos(2x) + \frac{2}{3} \sin(2x) - \frac{1}{12} \sin(4x)$$

Caso $\alpha = 2$ (Risonanza): Formula risonante:

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - \frac{1}{4}x \cos(2x)$$

Derivata:

$$y'(x) = -2c_1 \sin(2x) + 2c_2 \cos(2x) - \frac{1}{4}[\cos(2x) - 2x \sin(2x)]$$

Condizioni:

- $y(0) = 1 \implies c_1 = 1.$
- $y'(0) = 1 \implies 0 + 2c_2 - \frac{1}{4}(1 - 0) = 1 \implies 2c_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \implies c_2 = \frac{5}{8}.$

Soluzione ($\alpha = 2$):

$$y(x) = \cos(2x) + \frac{5}{8} \sin(2x) - \frac{1}{4}x \cos(2x)$$

33. Parametro ϵ e Variabile Indipendente

$$\begin{cases} y''_{\epsilon}(x) - \epsilon^2 y_{\epsilon}(x) = x \\ y_{\epsilon}(0) = \epsilon^2, \quad y'_{\epsilon}(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento:

1. Soluzione Omogenea Equazione caratteristica: $\lambda^2 - \epsilon^2 = 0 \implies \lambda = \pm \epsilon$.

$$y_h(x) = c_1 e^{\epsilon x} + c_2 e^{-\epsilon x}$$

2. Soluzione Particolare Termine noto x (polinomio grado 1). Cerchiamo $y_p(x) = Ax + B$. Derivate: $y'_p = A$, $y''_p = 0$.

Sostituzione:

$$\begin{aligned} 0 - \epsilon^2(Ax + B) &= x \\ -\epsilon^2 Ax - \epsilon^2 B &= x \end{aligned}$$

Uguaglianza coefficienti:

$$\begin{cases} -\epsilon^2 A = 1 \implies A = -\frac{1}{\epsilon^2} \\ -\epsilon^2 B = 0 \implies B = 0 \end{cases}$$

$$y_p(x) = -\frac{x}{\epsilon^2}$$

3. Problema di Cauchy Integrale generale:

$$y(x) = c_1 e^{\epsilon x} + c_2 e^{-\epsilon x} - \frac{x}{\epsilon^2}$$

Derivata:

$$y'(x) = c_1 \epsilon e^{\epsilon x} - c_2 \epsilon e^{-\epsilon x} - \frac{1}{\epsilon^2}$$

Imponiamo le condizioni ($y(0) = \epsilon^2, y'(0) = 0$):

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \epsilon^2 & (\text{da } y(0)) \\ \epsilon(c_1 - c_2) - \frac{1}{\epsilon^2} = 0 \implies c_1 - c_2 = \frac{1}{\epsilon^3} & (\text{da } y'(0)) \end{cases}$$

RisolviAMO il sistema (Somma e Sottrazione):

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2c_1 &= \epsilon^2 + \frac{1}{\epsilon^3} \implies c_1 = \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{1}{2\epsilon^3} \\ \bullet \quad 2c_2 &= \epsilon^2 - \frac{1}{\epsilon^3} \implies c_2 = \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{1}{2\epsilon^3} \end{aligned}$$

Soluzione Finale:

$$y_{\epsilon}(x) = \left(\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{1}{2\epsilon^3} \right) e^{\epsilon x} + \left(\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{1}{2\epsilon^3} \right) e^{-\epsilon x} - \frac{x}{\epsilon^2}$$

Forma alternativa con seno e coseno iperbolico:

$$y_{\epsilon}(x) = \epsilon^2 \cosh(\epsilon x) + \frac{1}{\epsilon^3} \sinh(\epsilon x) - \frac{x}{\epsilon^2}$$

34. Equazione Integro-Differenziale

Risolvere derivando ambo i membri:

$$\int_0^x y(t) dt + y'(x) = e^x, \quad \text{con } y(0) = 0$$

Svolgimento:

1. Trasformazione in Equazione Differenziale Deriviamo entrambi i membri dell'equazione rispetto a x :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x y(t) dt \right) + \frac{d}{dx}(y'(x)) = \frac{d}{dx}(e^x)$$

Applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo integrale:

$$y(x) + y''(x) = e^x$$

Riordiniamo:

$$y''(x) + y(x) = e^x$$

2. Determinazione delle Condizioni Iniziali Abbiamo bisogno di $y(0)$ e $y'(0)$.

- $y(0) = 0$ (Dato dal problema).
- Per trovare $y'(0)$, sostituiamo $x = 0$ nell'equazione *originale* (quella con l'integrale):

$$\begin{aligned} \int_0^0 y(t) dt + y'(0) &= e^0 \\ 0 + y'(0) &= 1 \implies y'(0) = 1 \end{aligned}$$

Il problema diventa:

$$\begin{cases} y'' + y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

3. Soluzione Omogenea $\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i$.

$$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

4. Soluzione Particolare Termine noto e^x . Non c'è risonanza (le radici sono immaginarie). Cerchiamo $y_p(x) = Ae^x$. Derivate: $y'_p = Ae^x$, $y''_p = Ae^x$.

Sostituzione:

$$Ae^x + Ae^x = e^x \implies 2Ae^x = e^x \implies 2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{1}{2}e^x$$

5. Calcolo delle Costanti Derivata dell'integrale generale:

$$y'(x) = -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + \frac{1}{2}e^x$$

Sistema condizioni:

- $y(0) = 0 \implies c_1(1) + 0 + \frac{1}{2} = 0 \implies c_1 = -\frac{1}{2}$
- $y'(0) = 1 \implies 0 + c_2(1) + \frac{1}{2} = 1 \implies c_2 = \frac{1}{2}$

Soluzione Finale:

$$y(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}e^x$$

Oppure raccogliendo:

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^x + \sin(x) - \cos(x))$$

35. Perturbazione Singolare (ϵ)

$$\begin{cases} -\epsilon^2 y''_\epsilon(x) + y_\epsilon(x) = e^{-x} \\ y_\epsilon(0) = 0 \\ y'_\epsilon(0) = \frac{1}{\epsilon(\epsilon+1)} \end{cases}$$

con $0 < \epsilon < 1$.

Svolgimento:

1. Soluzione Omogenea $-\epsilon^2 \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \implies \lambda = \pm \frac{1}{\epsilon}$.

$$y_h(x) = c_1 e^{\frac{x}{\epsilon}} + c_2 e^{-\frac{x}{\epsilon}}$$

2. Soluzione Particolare Termine noto e^{-x} . Poiché $0 < \epsilon < 1$, allora $1/\epsilon > 1$, quindi nessuna risonanza con -1 . Cerchiamo $y_p(x) = Ae^{-x}$.

$$y'_p = -Ae^{-x}, \quad y''_p = Ae^{-x}$$

Sostituiamo nell'equazione $-\epsilon^2 y'' + y = e^{-x}$:

$$-\epsilon^2(Ae^{-x}) + Ae^{-x} = e^{-x}$$

$$A(1 - \epsilon^2)e^{-x} = e^{-x} \implies A = \frac{1}{1 - \epsilon^2}$$

Integrale generale:

$$y(x) = c_1 e^{\frac{x}{\epsilon}} + c_2 e^{-\frac{x}{\epsilon}} + \frac{1}{1 - \epsilon^2} e^{-x}$$

3. Problema di Cauchy (passaggio critico) Calcoliamo la derivata:

$$y'(x) = \frac{c_1}{\epsilon} e^{\frac{x}{\epsilon}} - \frac{c_2}{\epsilon} e^{-\frac{x}{\epsilon}} - \frac{1}{1 - \epsilon^2} e^{-x}$$

Imponiamo le condizioni a $x = 0$:

$$(a) \ y(0) = 0 \implies c_1 + c_2 + \frac{1}{1 - \epsilon^2} = 0 \implies c_1 + c_2 = -\frac{1}{1 - \epsilon^2}$$

$$(b) \ y'(0) = \frac{1}{\epsilon(\epsilon+1)} \implies \frac{1}{\epsilon}(c_1 - c_2) - \frac{1}{1 - \epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon(\epsilon+1)}$$

Lavoriamo sulla seconda equazione per semplificarla. Moltiplichiamo tutto per ϵ :

$$c_1 - c_2 = \frac{1}{\epsilon + 1} + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon^2}$$

Notiamo che $1 - \epsilon^2 = (1 - \epsilon)(1 + \epsilon)$. Facciamo il denominatore comune a destra:

$$c_1 - c_2 = \frac{1(1 - \epsilon) + \epsilon}{(1 - \epsilon)(1 + \epsilon)} = \frac{1}{(1 - \epsilon)(1 + \epsilon)} = \frac{1}{1 - \epsilon^2}$$

Ora il sistema è pulitissimo:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{1}{1 - \epsilon^2} \\ c_1 - c_2 = \frac{1}{1 - \epsilon^2} \end{cases}$$

Sommando le due equazioni: $2c_1 = 0 \implies c_1 = 0$. Sottraendo: $2c_2 = -\frac{2}{1 - \epsilon^2} \implies c_2 = -\frac{1}{1 - \epsilon^2}$.

Soluzione $y_\epsilon(x)$:

$$\begin{aligned} y_\epsilon(x) &= -\frac{1}{1 - \epsilon^2} e^{-\frac{x}{\epsilon}} + \frac{1}{1 - \epsilon^2} e^{-x} \\ y_\epsilon(x) &= \frac{e^{-x} - e^{-x/\epsilon}}{1 - \epsilon^2} \end{aligned}$$

4. Limite Puntuale Calcoliamo $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} y_\epsilon(x)$ per un $x > 0$ fissato.

- Il denominatore $(1 - \epsilon^2) \rightarrow 1$.
- L'esponente $-x/\epsilon \rightarrow -\infty$ (poiché $x > 0$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$), quindi $e^{-x/\epsilon} \rightarrow 0$.
- Il termine e^{-x} rimane costante.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - e^{-x/\epsilon}}{1 - \epsilon^2} = \frac{e^{-x} - 0}{1} = e^{-x}$$