Raccolta Ragionata Esercizi d'Esame

Alessio Avarappattu

Dicembre 2025

Legenda Difficoltà:
● Esercizio Standard / Applicazione Formule
●● Esercizio Intermedio / Richiede ragionamento sui parametri
● ● ● Esercizio Avanzato / Studio qualitativo o calcoli complessi

Indice

1 Studi con Parametri e Numero di Soluzioni

In questa sezione il focus è sulla discussione grafica al variare di λ o altri parametri.

1. **• Radice Irrazionale** *(sol. pag 6)*
   Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione:
   $$\sqrt{\frac{x^3}{x+2}} = \lambda$$

2. **• Esponenziale (Monotonia e Convessità)** *(sol. pag 7)*
   Si consideri per $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x^2 - 2x + \lambda)e^{-x}$. Determinare:
   - i valori di λ per i quali f è monotona;
   - i valori di λ per i quali f è convessa.

3. **• Misto Fratto-Esponenziale** *(sol. pag 9)*
   Studiare la funzione $f(x) = \frac{x+1}{xe^x}$ $(x \neq 0)$ e determinare il numero di soluzioni di $f(x) = \lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. **•• studio derivata geometrico** *(sol. pag 10)*
   Determinare per quali $\lambda > 0$ la funzione definita su $[0, +\infty[$:
   $$f(x) = \lambda x + e^{-x^2}$$
   ammette punti di massimo e minimo relativo/assoluto.

5. **•• Studio Completo Parametrico (f" lunga)** *(sol. pag 12)*
   Studiare, al variare di $\lambda > 0$, la funzione definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{1/\lambda\}$:
   $$f(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda x - 1}$$
   determinando massimi, minimi e intervalli di convessità.

6. **•• Parametro Moltiplicativo** *(sol. pag 14)*
   Si consideri la funzione $f(x) = (x^2 - \lambda x)e^{\lambda x}$ per $\lambda \in \mathbb{R}$. Studiare l'andamento generale al variare del parametro.

7. **•• Equazione Trascendente** *(sol. pag 16)*
   Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione:
   $$x^2 \log(|x|) = \lambda$$

8. **••• Parametro all'Esponente** *(sol. pag 17)*
   Data la funzione per $x \geq 0$ e $\lambda > 0$, $f(x) = xe^{-x^\lambda}$. Trovare il massimo (se esiste) e studiare il comportamento di tale massimo per $\lambda \to +\infty$.

9. **•• Arcotangente Parametrica** *(sol. pag 19)*
   Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione:
   $$f(x) = \arctan(\lambda x) + x$$

10. **••• Potenza Parametrica** *(sol. pag 20)*
    Si consideri $f(t) = \frac{1+t^p}{(1+t)^p}$ con $p > 1$. Cercare eventuali massimi e minimi per $t \geq 0$ e tracciare il grafico qualitativo.

2 Valori Assoluti e Funzioni a Tratti

Esercizi che richiedono attenzione ai punti di non derivabilità (cuspidi, punti angolosi) e definizioni a tratti.

1. **●● Doppio Valore Assoluto** *(sol. pag 22)*
   Studiare la funzione $f(x) = |2e^{-|x|} - 1|$ determinando massimi/minimi locali e assoluti e intervalli di convessità.

2. **●● Radice con Modulo Parametrico** *(sol. pag 23)*
   Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \sqrt[3]{2 - \lambda|x|}$ determinando dominio, derivabilità e asintoti.

3. **●● Derivabilità nell'Origine (A tratti)** *(sol. pag 25)*
   Si consideri $f(x) = e^{-1/x^2}$ per $x > 0$ e $f(x) = 0$ per $x \leq 0$. Trovare massimi/minimi e calcolare $f'(0)$ e $f''(0)$ tramite definizione.

4. **●● Logaritmo e Moduli** *(sol. pag 26)*
   Studiare la funzione:
   $$f(x) = \frac{1}{3}|x| + \log\left(\frac{2(|x| - 1)}{|x| - 2}\right)$$

5. **●● Seno** *(sol. pag 28)*
   Studiare la funzione $f(x) = (|x + 1| - |x - 1|)\sin(\pi x)$.
   (Suggerimento: analizzare come si comportano i moduli negli intervalli).

6. **●● Polinomio in Modulo** *(sol. pag 30)*
   Studiare la funzione definita su $\mathbb{R}$: $f(x) = |x^3 + x^2 + x + 1| - x^2$.

7. **●● Radice ed Esponenziale** *(sol. pag 32)*
   Studiare $f(x) = e^{-|x|}\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ determinando massimi e minimi relativi/assoluti.

8. **● Prolungamento per Continuità** *(sol. pag 35)*
   Si studi per $\lambda > 0$ la funzione definita da $f(x) = xe^{-\lambda/x^2}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

9. **●● Connessione Grafica** *(sol. pag 36)*

   a) Si studi $f(x) = |x^3|e^{-x}$ per $x > 0$, individuando estremi.
   b) Utilizzando lo studio, determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni di $ke^x = |x^3|$.

3 Logaritmi ed Esponenziali (Analisi Qualitativa)

Studi di funzione puri focalizzati sulle proprietà dei logaritmi e degli esponenziali.

1. **●● Limitatezza Parametrica** *(sol. pag 38)*
   Studiare $f(x) = \frac{x^2}{2} + \log_a |x + 1|$ $(a \in]0, +\infty[\setminus\{1\})$ e determinare per quali a è limitata inferiormente.

2. **●● Convessità Logaritmica** *(sol. pag 39)*
   Studiare per $a \in \mathbb{R}\setminus\{0, \pm 1\}$ la funzione $f(x) = \log_{a^2} |x+1|$ determinando se esistono a per cui f è convessa.

3. **●● Logaritmo Composto** *(sol. pag 40)*
Studiare $f(x) = \ln x - \ln(\ln x)$ e determinare le soluzioni di $f(x) = \lambda$.

4. **●● Razionale Logaritmica I** *(sol. pag 42)*
Studiare per $x \in]0, 8[\setminus\{1\}$: $f(x) = \frac{1}{\log^2 x} - \frac{2}{\log x} + 1$.

5. **● Razionale Logaritmica II** *(sol. pag 43)*
Data $f(x) = \log\left(\frac{x-4}{x-6}\right)$, determinarne dominio, asintoti, estremi e flessi.

6. **● ● ● Taylor** *(sol. pag 45)*
Studiare la funzione $f(x) = \frac{\log x}{(x-1)^2}$.

7. **● Base Variabile** *(sol. pag 46)*
Studiare per $x > 0$ la funzione $f(x) = x^{\log x}$. (Suggerimento: passare alla base e).

8. **● ● ● Singolarità Essenziale** *(sol. pag 47)*
Si studi la funzione per $x \neq \pm 1$: $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x^2-1}}$.

9. **●● logaritmi** *(sol. pag 49)*
Studiare il grafico della funzione (attenzione al dominio): $f(x) = |\log x|^{\log x}$.

10. **●● Mista Log-Quadratico** *(sol. pag 51)*
Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{1-\log(x^2)}{\log^2 x}$.

4 Trigonometria e Oscillazioni

Funzioni periodiche o quasi-periodiche, composizioni inverse.

1. **● ● ● Conteggio Estremi (Trig Mista)** *(sol. pag 52)*
Determinare il numero di punti di massimo e minimo di $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\pi^x\right)$ su $[0, 2]$.

2. **●● Trigonometria Razionale** *(sol. pag 55)*
Studiare per $x \in]0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$ la funzione $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x} + 1$ determinando gli estremi.

3. **● ● ● Composizione e Flessi** *(sol. pag 56)*
Studiare $f(x) = \sin(\arctan(x^3))$. Trovare i punti di flesso.
Dimostrare preliminarmente che $\cos(\arctan t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

4. **● ● ● Seno Composto** *(sol. pag 56)*
Studiare per $0 < x < e$ (con $f(0) = 0$) la funzione $f(x) = \sin(1 + x\log x)$.

5. **● ● ● Oscillazioni Smorzate** *(sol. pag 58)*
Si studi la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+|\sin x|}$ (attenzione al comportamento all'infinito).

5 Teoria, Funzioni Integrali e Inverse

Esercizi che richiedono l'uso del Teorema Fondamentale del Calcolo, criteri di integrabilità o teoremi sulle funzioni inverse.

1. • **Funzione Integrale** *(sol. pag 43)*
   Studiare il grafico di $f(x) = \int_1^{x^2+1} e^{-t}\,dt$ determinando massimi, minimi e flessi.

2. • **Integrabilità Impropria** *(sol. pag 59)*
   Si studi $f(x) = \frac{x^3-x}{\sqrt{x^6+1}}$ e si determini se esiste finito $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

3. • **Razionale Standard** *(sol. pag 61)*
   Studio veloce della funzione $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$ (utile per confronto asintotico).

4. •• **Invertibilità Locale** *(sol. pag 63)*
   Data $f(x) = \frac{x^3+x^2+10x+1}{x^2+1}$:

   - Determinare il più grande intervallo contenente l'origine su cui f è invertibile.
   - Calcolare, se possibile, $(f^{-1})'(1)$.

5. • • • **Studio Misto e Integrale Improprio** *(sol. pag 65)*
   Si studi $f(x) = \frac{e^x(5x-3)}{x^2+2x-3}$. Successivamente, studiare la convergenza dell'integrale improprio $\int_{-\infty}^{-2} f(x)\,dx$.

6 Soluzioni

1. Radice Irrazionale

Testo: Determinare le soluzioni di $\sqrt{\frac{x^3}{x+2}} = \lambda$.

1. Dominio e Regolarità (Analisi Preliminare)

- **Dominio:** L'argomento della radice deve essere ≥ 0.

$$\frac{x^3}{x+2} \geq 0 \implies \begin{cases} x^3 \geq 0 \to x \geq 0 \\ x+2 > 0 \to x > -2 \end{cases}$$

  Facendo il grafico dei segni otteniamo: $D = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$.

- **Continuità:** La funzione è **continua in tutto il dominio** D, in quanto composizione di funzioni elementari continue (polinomi e radice).

2. Limiti agli estremi

- $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \sqrt{\frac{-8}{0^-}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$ (**Asintoto Verticale** $x = -2$).
- $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = +\infty$ (Si comporta come $\sqrt{x^2} = |x|$).
- Valore in zero: $f(0) = 0$.

3. Derivata Prima

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}} \cdot D\left[\frac{x^3}{x+2}\right]$$

Calcolo derivata argomento (regola quoziente):

$$D\left[\frac{x^3}{x+2}\right] = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

Sostituendo e semplificando i 2:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}} \cdot \frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

4. Segno e Monotonia Il segno di $f'(x)$ dipende solo dal fattore $(x+3)$ (gli altri sono quadrati o radici positive).

$$f'(x) > 0 \iff x > -3$$

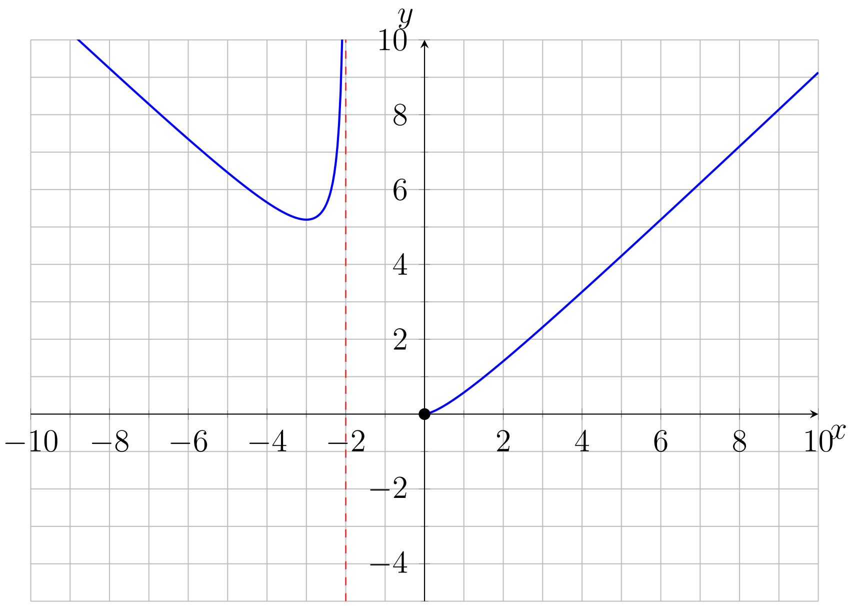
Nel dominio $D = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$:

- $x \in (-\infty, -3)$: $f'(x) < 0$ (Decrescente $\searrow$)
- $x \in (-3, -2)$: $f'(x) > 0$ (Crescente $\nearrow$)
- $x \in [0, +\infty)$: $f'(x) > 0$ (Crescente $\nearrow$)

Minimo Relativo: $x = -3$, con valore $f(-3) = \sqrt{\frac{-27}{-1}} = 3\sqrt{3}$.

5. Discussione Grafica ($y = \lambda$) Immaginando la retta orizzontale che sale:

- $\lambda < 0$: **0 sol.**
- $\lambda = 0$: **1 sol.** ($x = 0$).
- $0 < \lambda < 3\sqrt{3}$: **1 sol.** (ramo destro).
- $\lambda = 3\sqrt{3}$: **2 sol.** (1 tangente a sx + 1 a dx).
- $\lambda > 3\sqrt{3}$: **3 sol.** (2 a sx + 1 a dx).



2. Esponenziale (Monotonia e Convessità)

Testo: $f(x) = (x^2 - 2x + \lambda)e^{-x}$. Determinare λ per cui f è monotona e convessa.

1. Analisi Preliminare

- **Dominio:** $D = \mathbb{R}$ (prodotto di funzioni ovunque definite).
- **Continuità/Derivabilità:** $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
- **Limiti:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + \lambda}{e^x} = 0 \quad (\text{Gerarchia: } e^x \gg x^2)$$

2. Monotonia (Studio di f') Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = (2x - 2)e^{-x} + (x^2 - 2x + \lambda)(-e^{-x})$$

Raccogliamo e^{-x} (attenzione ai segni):

$$f'(x) = e^{-x}[2x - 2 - (x^2 - 2x + \lambda)]$$

$$f'(x) = e^{-x}[-x^2 + 4x - (2 + \lambda)]$$

Affinché f sia **monotona**, $f'(x)$ non deve cambiare segno su $\mathbb{R}$. Poiché $e^{-x} > 0$, studiamo il segno del polinomio $P(x) = -x^2 + 4x - (2 + \lambda)$. Essendo una parabola rivolta verso il basso ($a = -1 < 0$), essa è sempre negativa o nulla se e solo se il discriminante è $\Delta \leq 0$.

$$\frac{\Delta}{4} = (2)^2 - (-1)(-(2 + \lambda)) = 4 - (2 + \lambda) = 2 - \lambda$$

Imponiamo la condizione:

$$\Delta \leq 0 \implies 2 - \lambda \leq 0 \implies \lambda \geq 2$$

Conclusione 1: Per $\lambda \geq 2$, la funzione è sempre decrescente (monotona).

3. Convessità (Studio di f'') Partiamo da $f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 4x - \lambda - 2)$.

$$f''(x) = (-e^{-x})(-x^2 + 4x - \lambda - 2) + e^{-x}(-2x + 4)$$

Raccogliamo e^{-x}:

$$f''(x) = e^{-x}[-(-x^2 + 4x - \lambda - 2) - 2x + 4]$$
$$f''(x) = e^{-x}[x^2 - 4x + \lambda + 2 - 2x + 4]$$
$$f''(x) = e^{-x}[x^2 - 6x + (\lambda + 6)]$$

Affinché f sia **convessa** su tutto $\mathbb{R}$, serve $f''(x) \geq 0$ per ogni x. Poiché $e^{-x} > 0$, studiamo il polinomio $Q(x) = x^2 - 6x + (\lambda + 6)$. Essendo una parabola rivolta verso l'alto ($a = 1 > 0$), essa è sempre positiva o nulla se $\Delta \leq 0$ (non interseca l'asse x o lo tocca in un punto).

$$\frac{\Delta}{4} = (-3)^2 - (1)(\lambda + 6) = 9 - \lambda - 6 = 3 - \lambda$$

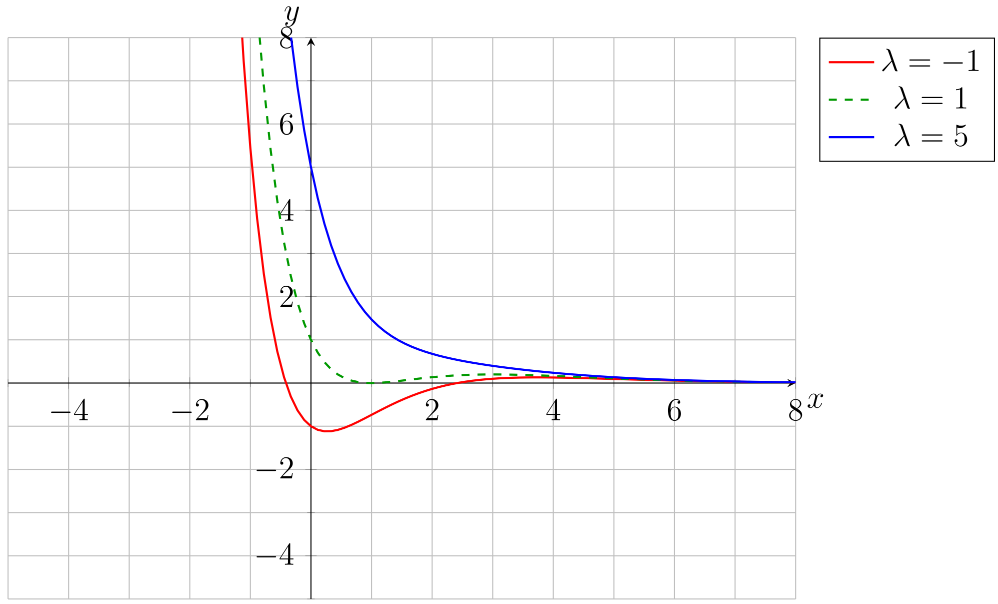
Imponiamo la condizione:

$$\Delta \leq 0 \implies 3 - \lambda \leq 0 \implies \lambda \geq 3$$

Conclusione 2: Per $\lambda \geq 3$, la funzione è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

Es. 2: $f(x) = (x^2 - 2x + \lambda)e^{-x}$

Al variare di λ, la funzione trasla verticalmente "pesata" dall'esponenziale.



3. Misto Fratto-Esponenziale

Testo: $f(x) = \frac{x+1}{xe^x}$. Determinare soluzioni di $f(x) = \lambda$.

1. Dominio e Limiti

- **Dominio:** $x \neq 0$ (Denominatore non nullo). $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- **Limiti (Comportamento agli estremi):**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x} e^{-x} = [1 \cdot (+\infty)] = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{0^-} = -\infty \quad (\textbf{Asintoto Verticale})$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (\textbf{Asintoto Verticale})$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{xe^x} \approx \lim \frac{1}{e^x} = 0^+ \quad (\textbf{Asintoto Orizzontale } y = 0)$$

2. Derivata e Monotonia

$$f(x) = \frac{x+1}{x} e^{-x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-x}$$

Usiamo la regola del prodotto (più veloce del quoziente qui):

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)(-e^{-x})$$

Raccogliamo $-e^{-x}$:

$$f'(x) = -e^{-x} \left[\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x}\right] = -e^{-x} \left[\frac{1 + x^2 + x}{x^2}\right]$$

Analisi del segno:

- $-e^{-x}$: Sempre negativo.
- x^2 (den): Sempre positivo.
- $x^2 + x + 1$ (num): Il discriminante è $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Essendo una parabola rivolta verso l'alto senza zeri, è **sempre positiva**.

Conclusione: $f'(x)$ è il prodotto di un termine negativo per uno positivo.

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in D$$

La funzione è **strettamente decrescente** in entrambi gli intervalli del dominio. Non ci sono massimi né minimi relativi.

3. Discussione Grafica ($y = \lambda$) Visualizziamo i due rami separati dall'asintoto verticale $x = 0$:

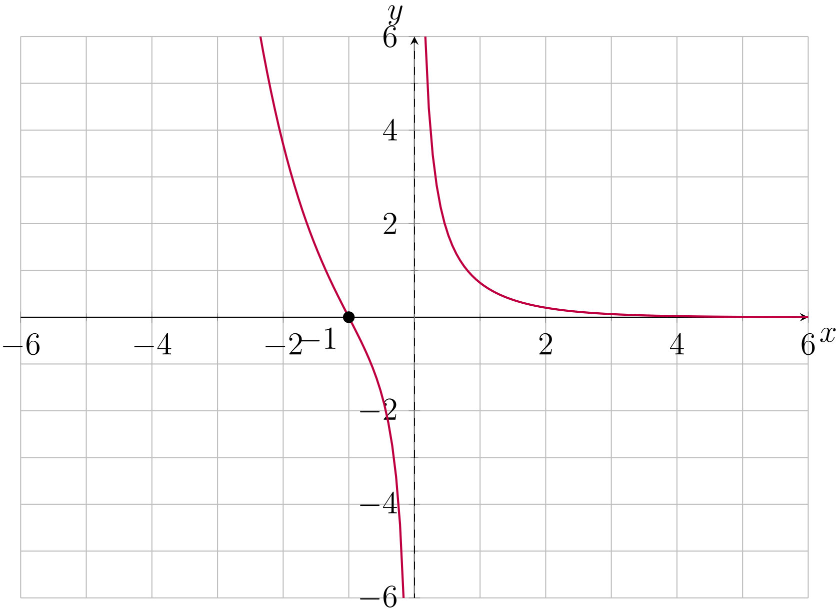
- **Ramo Sinistro ($x < 0$):** Scende da $+\infty$ a $-\infty$. Copre tutti i valori reali di y.

- **Ramo Destro ($x > 0$):** Scende da $+\infty$ e tende a 0^+ (senza mai scendere sotto l'asse x). Copre solo i valori $y > 0$.

Intersezioni con $y = \lambda$:

- $\lambda \leq 0$: **1 soluzione** (Solo il ramo sinistro attraversa i valori negativi/nulli).
- $\lambda > 0$: **2 soluzioni** (Una intersezione sul ramo sinistro + una sul ramo destro).

Es. 3: $f(x) = \frac{x+1}{xe^x}$
Asintoto in $x = 0$. Zero in $x = -1$. L'origine è esclusa dal dominio.



4. Parametro Lineare ed Esponenziale

Testo: $f(x) = \lambda x + e^{-x^2}$ su $[0, +\infty[$ con $\lambda > 0$.

1. Limiti e Teoremi (Weierstrass Generalizzato)

- $f(0) = 0 + e^0 = 1$.
- $\lim_{x\to+\infty}(\lambda x + e^{-x^2}) = +\infty$ (Poiché $\lambda > 0$).

Nota: Poiché f è continua su $[0, +\infty)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, per il **Teorema di Weierstrass Generalizzato** (versione per intervalli illimitati), la funzione ammette sicuramente un **Minimo Assoluto** nell'intervallo. Resta da capire se tale minimo è al bordo ($x = 0$) o interno.

2. Derivata Prima e "Studio nello Studio"

$$f'(x) = \lambda + e^{-x^2}(-2x) = \lambda - 2xe^{-x^2}$$

Cerchiamo i punti stazionari ($f'(x) = 0$) e il segno:

$$\lambda - 2xe^{-x^2} \geq 0 \iff \lambda \geq 2xe^{-x^2}$$

Non potendo isolare la x, usiamo il **Metodo Grafico**. Definiamo la funzione ausiliaria $g(x) = 2xe^{-x^2}$ e confrontiamola con la retta orizzontale $y = \lambda$.

Studio breve di $g(x) = 2xe^{-x^2}$ per $x \geq 0$:

- $g(0) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (asintoto orizzontale).
- $g'(x) = 2e^{-x^2} + 2x(-2x)e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1-2x^2)$.
- Massimo di $g(x)$: $1 - 2x^2 = 0 \implies x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Valore del Massimo (altezza della "gobba"):

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{2}{e}} \approx 0.85$$

3. Confronto e Conclusioni Ora sovrapponiamo la retta $y = \lambda$ al grafico di $g(x)$ (che parte da 0, sale a $\sqrt{2/e}$ e scende a 0). Ricordiamo che $f'(x)$ è positiva quando la retta λ sta *sopra* la gobba $g(x)$.

CASO A: $\lambda \geq \sqrt{\frac{2}{e}}$ **(Retta alta)** La retta sta sempre sopra (o tocca) il grafico di $g(x)$.

- $f'(x) \geq 0$ per ogni x.
- La funzione $f(x)$ è sempre **strettamente crescente**.
- **Estremi:** Non ci sono massimi/minimi relativi interni.
- Minimo assoluto in $x = 0$ (punto di partenza).

CASO B: $0 < \lambda < \sqrt{\frac{2}{e}}$ **(Retta taglia la gobba)** La retta interseca $g(x)$ in due punti x_1 e x_2 (con $x_1 < x_{max} < x_2$). Segno di $f'(x) = \lambda - g(x)$:

- Tra 0 e x_1: $\lambda > g(x) \implies f' > 0$ (Cresce).
- Tra x_1 e x_2: $\lambda < g(x) \implies f' < 0$ (Decresce).
- Oltre x_2: $\lambda > g(x) \implies f' > 0$ (Cresce).

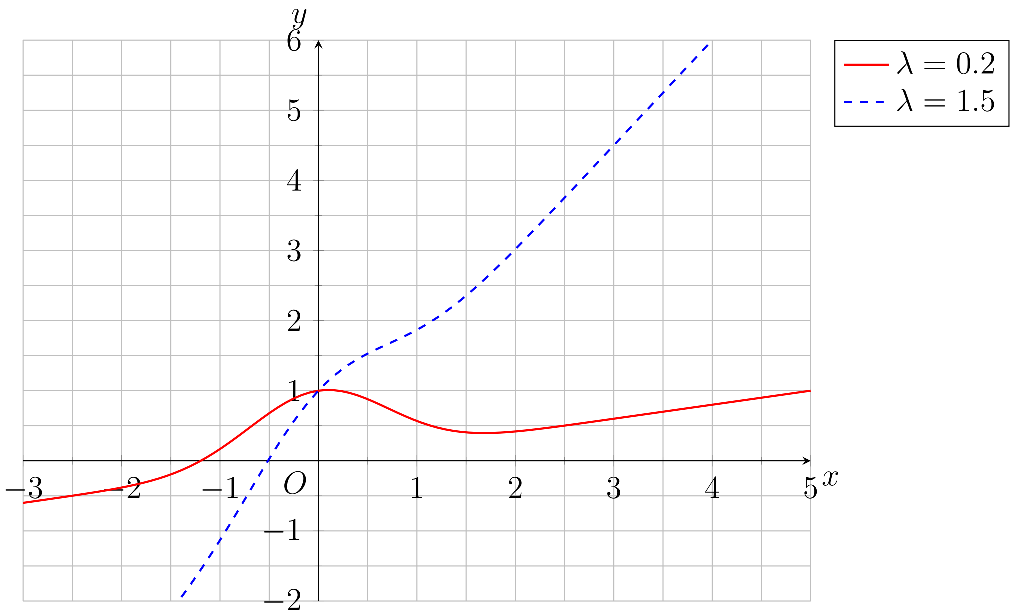
Conclusione: In questo caso la funzione ammette:

- Un **Massimo Relativo** in x_1.
- Un **Minimo Relativo** in x_2.

Risposta finale: La funzione ammette punti di massimo e minimo relativo interni se e solo se $\lambda \in \left(0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right)$.

Es. 4: $f(x) = \lambda x + e^{-x^2}$ (per $\lambda > 0$)

Interazione tra retta (dominante a $+\infty$) e gaussiana (dominante vicino a 0).



5. Studio Completo Parametrico

Testo: $f(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda x - 1}$ con $\lambda > 0$ e $x \neq 1/\lambda$.

1. Dominio e Limiti

- **Dominio:** $D = \mathbb{R} \setminus \{1/\lambda\}$.
- **Limiti:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{e^{+\infty}}{-\infty} = -\infty \quad \text{(Gerarchia: } e^x \text{ vince)}$$

$$\lim_{x \to (1/\lambda)^-} \frac{e^{-1}}{0^-} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to (1/\lambda)^+} \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty$$

(Asintoto Verticale in $x = 1/\lambda$)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{0}{+\infty} = 0 \quad \text{(Asintoto Orizzontale } y = 0\text{)}$$

2. Derivata Prima (Monotonia)

$$f'(x) = \frac{D[e^{-\lambda x}](\lambda x - 1) - e^{-\lambda x} D[\lambda x - 1]}{(\lambda x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x - 1) - e^{-\lambda x}(\lambda)}{(\lambda x - 1)^2}$$

Raccogliamo il termine comune $-\lambda e^{-\lambda x}$ al numeratore:

$$f'(x) = \frac{-\lambda e^{-\lambda x}[(\lambda x - 1) + 1]}{(\lambda x - 1)^2} = \frac{-\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)}{(\lambda x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\lambda^2 x e^{-\lambda x}}{(\lambda x - 1)^2}$$

Segno di $f'(x)$: Il denominatore è un quadrato (> 0), l'esponenziale è positivo, λ^2 è positivo. Il segno dipende solo da $-x$.

$$f'(x) \geq 0 \iff -x \geq 0 \iff x \leq 0$$

- $x < 0$: Crescente $\nearrow$
- $0 < x < 1/\lambda$: Decrescente $\searrow$
- $x > 1/\lambda$: Decrescente $\searrow$

Massimo Relativo: in $x = 0$, vale $f(0) = \frac{1}{-1} = -1$. (Nota: Il massimo è -1, indipendente da λ!).

3. Derivata Seconda (calcolo difficile) Riscriviamo la f' portando fuori le costanti per pulizia:

$$f'(x) = (-\lambda^2) \cdot \frac{xe^{-\lambda x}}{(\lambda x - 1)^2}$$

Deriviamo solo la frazione $g(x) = \frac{xe^{-\lambda x}}{(\lambda x-1)^2}$:

- Num (N): $xe^{-\lambda x} \implies N' = e^{-\lambda x} + x(-\lambda)e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x}(1 - \lambda x)$
- Den (D): $(\lambda x - 1)^2 \implies D' = 2(\lambda x - 1)\lambda$

Applichiamo la regola:

$$g'(x) = \frac{[e^{-\lambda x}(1 - \lambda x)](\lambda x - 1)^2 - [xe^{-\lambda x}] \cdot 2\lambda(\lambda x - 1)}{(\lambda x - 1)^4}$$

TRUCCO: Raccogli $(\lambda x - 1)$ al numeratore e semplificalo con il denominatore.

$$g'(x) = \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x - 1)[(1 - \lambda x) - 2\lambda x]}{(\lambda x - 1)^4}$$

Si cancella un $(\lambda x - 1)$:

$$g'(x) = \frac{e^{-\lambda x}[1 - \lambda x - 2\lambda x]}{(\lambda x - 1)^3} = \frac{e^{-\lambda x}(1 - 3\lambda x)}{(\lambda x - 1)^3}$$

Ora rimoltiplichiamo per la costante $(-\lambda^2)$ che avevamo lasciato fuori:

$$f''(x) = (-\lambda^2)\frac{e^{-\lambda x}(1 - 3\lambda x)}{(\lambda x - 1)^3} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda x}(3\lambda x - 1)}{(\lambda x - 1)^3}$$

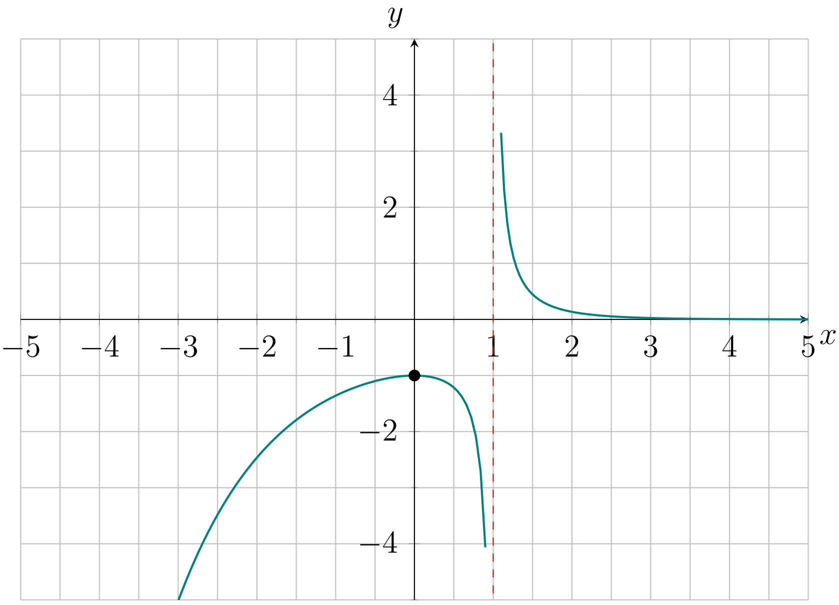
4. Segno della Derivata Seconda (Convessità) Studiamo il segno di $f''(x) > 0$. Num: $\lambda^2 e^{-\lambda x} > 0$ sempre. Resta $(3\lambda x - 1)$. Den: $(\lambda x - 1)^3$ ha lo stesso segno di $(\lambda x - 1)$. Disuguaglianza:

$$\frac{3\lambda x - 1}{\lambda x - 1} > 0$$

Zeri: Numeratore $x = 1/(3\lambda)$, Denominatore $x = 1/\lambda$. Essendo $1/(3\lambda) < 1/\lambda$, abbiamo (segni concordi esterni):

- $x < \frac{1}{3\lambda}$: $N(-), D(-) \to (+)$ **Convessa** $\cup$
- $\frac{1}{3\lambda} < x < \frac{1}{\lambda}$: $N(+), D(-) \to (-)$ **Concava** $\cap$
- $x > \frac{1}{\lambda}$: $N(+), D(+) \to (+)$ **Convessa** $\cup$

Punto di Flesso: $x = \frac{1}{3\lambda}$.
Es. 5: $f(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda x - 1}$
Grafico per $\lambda = 1$. *Asintoto verticale in* $x = 1$.



6. Parametro Moltiplicativo

Testo: $f(x) = (x^2 - \lambda x)e^{\lambda x}$.

1. Il Caso Banale ($\lambda = 0$) Se $\lambda = 0$, la funzione diventa $f(x) = x^2 \cdot e^0 = x^2$. È una parabola con vertice (minimo assoluto) in $(0, 0)$.

2. Studio per $\lambda \neq 0$ (Limiti e Asintoti) Il dominio è sempre $\mathbb{R}$. Gli asintoti dipendono dal segno dell'esponente.

- **Caso $\lambda > 0$:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty)e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = [+\infty \cdot 0] = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - \lambda x}{e^{-\lambda x}} = 0^+ \quad (\text{Asint. Orizz. } y = 0 \text{ a } -\infty)$$

- **Caso $\lambda < 0$ (Speculare):**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (+\infty)e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+ \quad (\text{Asint. Orizz. } y = 0 \text{ a } +\infty)$$

3. Derivata Prima (Generale) Calcoliamo la derivata senza sostituire λ:

$$f'(x) = (2x - \lambda)e^{\lambda x} + (x^2 - \lambda x) \cdot \lambda e^{\lambda x}$$

Raccogliamo $e^{\lambda x}$:

$$f'(x) = e^{\lambda x}[2x - \lambda + \lambda x^2 - \lambda^2 x]$$

Ordiniamo il polinomio di secondo grado tra parentesi:

$$f'(x) = e^{\lambda x}[\lambda x^2 + (2 - \lambda^2)x - \lambda]$$

4. Studio dei Punti Stazionari Poniamo $f'(x) = 0$. Poiché $e^{\lambda x} \neq 0$, studiamo il polinomio:

$$\lambda x^2 + (2 - \lambda^2)x - \lambda = 0$$

Calcoliamo il discriminante Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2 - \lambda^2)^2 - 4(\lambda)(-\lambda)$$

$$\Delta = (4 - 4\lambda^2 + \lambda^4) + 4\lambda^2$$

I termini $4\lambda^2$ si cancellano!

$$\Delta = \lambda^4 + 4$$

Osservazione Fondamentale: $\Delta = \lambda^4 + 4$ è **sempre positivo** per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi esistono **sempre due soluzioni distinte** x_1, x_2.

Le soluzioni sono:

$$x_{1,2} = \frac{-(2 - \lambda^2) \pm \sqrt{\lambda^4 + 4}}{2\lambda} = \frac{\lambda^2 - 2 \pm \sqrt{\lambda^4 + 4}}{2\lambda}$$

5. Classificazione (Max/Min) Il segno della derivata dipende dal coefficiente di x^2 (che è λ) e dall'intervallo delle radici. Siano $x_1 < x_2$ le due radici trovate.

Se $\lambda > 0$ (Parabola verso l'alto): Segni: $(+) \dots x_1 \dots (-) \dots x_2 \dots (+)$.

- Cresce fino a x_1, poi decresce $\implies$ x_1 è **Massimo Relativo**.
- Decresce fino a x_2, poi cresce $\implies$ x_2 è **Minimo Relativo**.

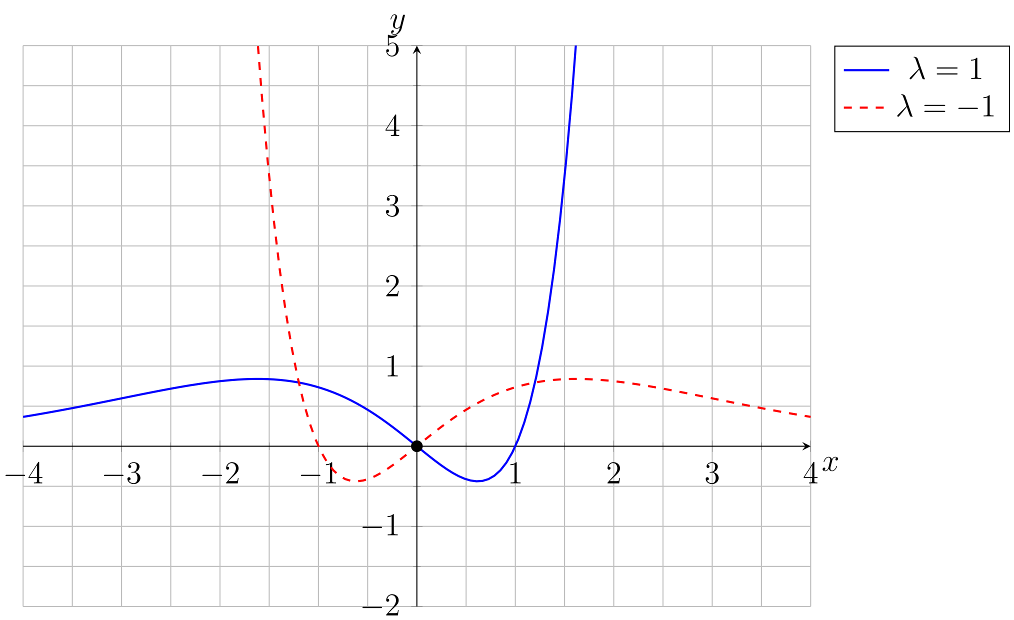
Se $\lambda < 0$ (Parabola verso il basso): Segni: $(-) \dots x_1 \dots (+) \dots x_2 \dots (-)$.

- Decresce fino a x_1, poi cresce $\implies$ x_1 è **Minimo Relativo**.
- Cresce fino a x_2, poi decresce $\implies$ x_2 è **Massimo Relativo**.

Conclusione: Per ogni $\lambda \neq 0$, la funzione ha sempre un asintoto orizzontale (da un lato), diverge (dall'altro) e possiede esattamente un massimo e un minimo locale.

Es. 6: $f(x) = (x^2 - \lambda x)e^{\lambda x}$

Confronto tra $\lambda = 1$ (crescita esponenziale a dx) e $\lambda = -1$ (crescita esponenziale a sx). Si notano gli zeri in 0 e λ.



7. Equazione Trascendente (Simmetria)

Testo: Determinare il numero di soluzioni di $x^2 \log(|x|) = \lambda$.

1. Analisi Preliminare (Simmetria e Dominio)

- **Dominio:** Argomento del logaritmo $> 0 \implies |x| > 0 \implies x \neq 0$.
- **Simmetria:** $f(-x) = (-x)^2 \log(|-x|) = x^2 \log|x| = f(x)$. La funzione è **PARI**. La studiamo solo per $x > 0$ e riflettiamo i risultati.
- **Regolarità:** Continua e derivabile in tutto il dominio $(0, +\infty)$.

2. Studio per $x > 0$ (Funzione $y = x^2 \ln x$)

- **Limiti:**

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0^- \quad \text{(Limite notevole } x^\alpha \ln x \to 0\text{)}$$

Nota: La funzione ha un "buco" nell'origine, ma tende a 0.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \ln x = +\infty$$

- **Derivata Prima:**

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

- **Monotonia ($x > 0$):** $f'(x) \geq 0 \implies 2 \ln x + 1 \geq 0 \implies \ln x \geq -1/2 \implies x \geq e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
  - Tra 0 e $\frac{1}{\sqrt{e}}$: Decrescente $\searrow$ (parte da 0 e scende).
  - Dopo $\frac{1}{\sqrt{e}}$: Crescente $\nearrow$ (risale a $+\infty$).
- **Minimo Relativo (e Assoluto):** $x_{min} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Valore: $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\left(e^{-1/2}\right) = \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$.

3. Ricostruzione Grafica Completa Sfruttando la simmetria pari:

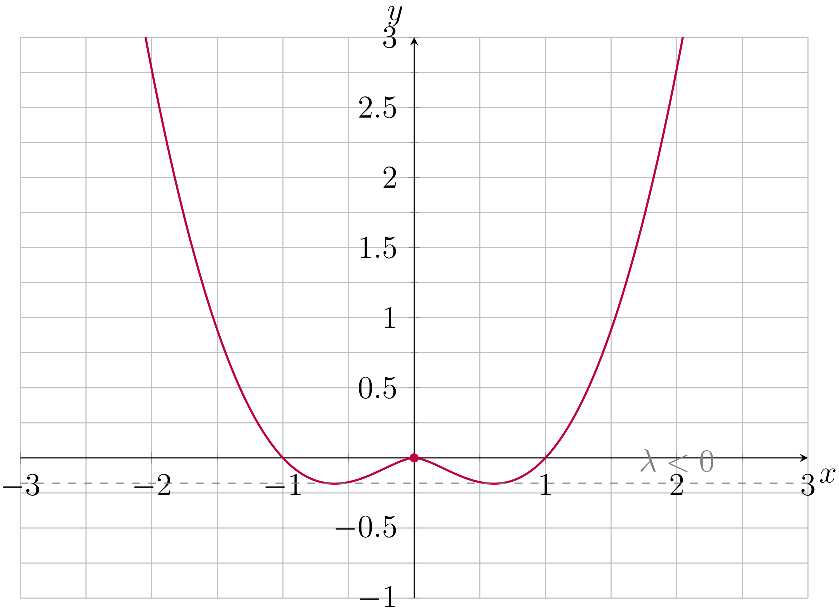
- La funzione ha **due minimi assoluti** gemelli in $x = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$ con valore $y = -\frac{1}{2e}$.
- Nell'origine tende a 0 (senza toccarlo, $x \neq 0$).
- Va a $+\infty$ per $|x| \to \infty$.
- Forma a "W" smussata, con la punta centrale che manca (buco in 0).

4. Discussione Soluzioni ($f(x) = \lambda$) Immaginando la retta orizzontale che sale dal basso:

- $\lambda < -\frac{1}{2e}$: **0 soluzioni** (Sotto i minimi).
- $\lambda = -\frac{1}{2e}$: **2 soluzioni** (Tangente ai due minimi).
- $-\frac{1}{2e} < \lambda < 0$: **4 soluzioni** (Taglia entrambi i rami della "W").

- $\lambda = 0$: **2 soluzioni** ($x = \pm 1$, poiché $\ln|x| = 0$). Il punto $x = 0$ è escluso dal dominio.
- $\lambda > 0$: **2 soluzioni** (Una sul ramo dx che va a infinito, una sul sx).

Es. 7: $f(x) = x^2 \log(|x|)$



8. Parametro all'Esponente

Testo: $f(x) = xe^{-x^\lambda}$ con $x \geq 0, \lambda > 0$.

1. Derivata Prima (passaggio critico) Usiamo la regola del prodotto: $D[x] \cdot e^{-x^\lambda} + x \cdot D[e^{-x^\lambda}]$. Attenzione alla derivata composta: $D[e^{-x^\lambda}] = e^{-x^\lambda} \cdot (-\lambda x^{\lambda-1})$.

Sostituendo:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^\lambda} + x \cdot [e^{-x^\lambda}(-\lambda x^{\lambda-1})]$$

Raccogliamo e^{-x^λ}:

$$f'(x) = e^{-x^\lambda}[1 - \lambda \cdot x \cdot x^{\lambda-1}]$$

Qui applichiamo la proprietà delle potenze ($x^1 \cdot x^{\lambda-1} = x^{1+\lambda-1} = x^\lambda$):

$$f'(x) = e^{-x^\lambda}(1 - \lambda x^\lambda)$$

2. Studio del Segno e Massimo Poiché $e^{-x^\lambda} > 0$, il segno dipende solo dalla parentesi:

$$f'(x) \geq 0 \iff 1 - \lambda x^\lambda \geq 0 \iff \lambda x^\lambda \leq 1$$

$$x^\lambda \leq \frac{1}{\lambda}$$

Estraiamo la radice λ-esima (possiamo farlo perché $x \geq 0$ e la funzione potenza è monotona):

$$x \leq \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^{1/\lambda}} = \lambda^{-\frac{1}{\lambda}}$$

Conclusione:

- La funzione cresce per $x < \lambda^{-1/\lambda}$.
- La funzione decresce per $x > \lambda^{-1/\lambda}$.
- Esiste un **Unico Massimo Assoluto** in $x_{max} = \lambda^{-1/\lambda}$.

3. Valore del Massimo (y_{max}) Sostituiamo x_{max} nella funzione originale $f(x)$:

$$f(x_{max}) = (\lambda^{-1/\lambda}) \cdot e^{-(\lambda^{-1/\lambda})^{\lambda}}$$

Semplifichiamo l'esponente dell'esponenziale:

$$(\lambda^{-1/\lambda})^{\lambda} = \lambda^{-\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda} = \lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda}$$

Quindi:

$$y_{max} = \lambda^{-\frac{1}{\lambda}} \cdot e^{-\frac{1}{\lambda}}$$

4. Comportamento asintotico ($\lambda \to +\infty$) Studiamo cosa succede al punto di massimo quando λ diventa grandissimo.

- **Ascissa del massimo (x_{max}):**

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda^{1/\lambda}} = \frac{1}{1} = 1$$

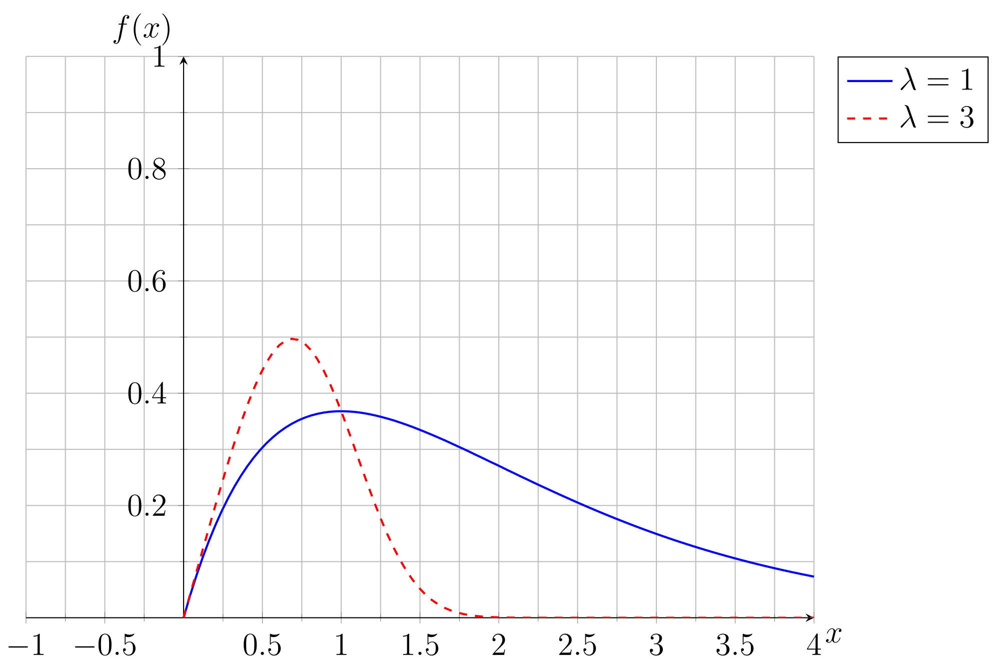
  (Limite notevole: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$).

- **Ordinata del massimo (y_{max}):**

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \underbrace{\lambda^{-1/\lambda}}_{\to 1} \cdot \underbrace{e^{-1/\lambda}}_{\to e^0=1} = 1 \cdot 1 = 1$$

Interpretazione: Al crescere di λ, il picco della funzione si sposta verso il punto $(1, 1)$. La funzione tende a schiacciarsi verso l'asse x per $x > 1$ e a diventare molto ripida per $x < 1$. **Es. 8:** $f(x) = xe^{-x^{\lambda}}$ (per $x \geq 0$)

Al crescere di λ, il picco si sposta e la discesa diventa più ripida (comportamento "a scatola").



9. Arcotangente Parametrica

Testo: $f(x) = \arctan(\lambda x) + x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Analisi Preliminare

- **Dominio:** $\mathbb{R}$ ovunque.
- **Limiti:** Il termine x domina sull'arcotangente (che è limitata tra $\pm\pi/2$).

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

(Quindi non ci sono asintoti orizzontali, ma potrebbero esserci obliqui, $m = 1$).

2. Derivata Prima

$$f'(x) = \frac{\lambda}{1 + (\lambda x)^2} + 1$$

Studiamo il segno $f'(x) \geq 0$:

$$\frac{\lambda + 1 + \lambda^2 x^2}{1 + \lambda^2 x^2} \geq 0$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, studiamo il numeratore:

$$\lambda^2 x^2 + (\lambda + 1) \geq 0$$

3. Discussione dei Casi (Il cuore del problema) Dobbiamo capire quando questa parabola $\lambda^2 x^2 + (\lambda + 1)$ tocca l'asse o scende sotto.

CASO A: $\lambda \geq -1$ In questo caso, il termine noto $(\lambda + 1)$ è ≥ 0. Sommato a un quadrato $(\lambda^2 x^2)$, otteniamo una quantità sempre positiva (o nulla).

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Conclusione A: La funzione è **strettamente crescente** su tutto $\mathbb{R}$. Nessun massimo o minimo.

CASO B: $\lambda < -1$ In questo caso, $(\lambda + 1)$ è negativo. La derivata può diventare negativa tra le radici. Risolviamo $f'(x) = 0$:

$$\lambda^2 x^2 = -(\lambda + 1) \implies x^2 = -\frac{\lambda + 1}{\lambda^2}$$

Poiché $\lambda < -1$, il numeratore $-(\lambda + 1)$ è positivo, quindi le radici esistono reali:

$$x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{-(\lambda + 1)}}{|\lambda|}$$

Essendo la derivata una parabola rivolta verso l'alto (coeff x^2 positivo):

- $f'(x) > 0$ all'esterno delle radici.
- $f'(x) < 0$ all'interno delle radici.

Conclusione B:

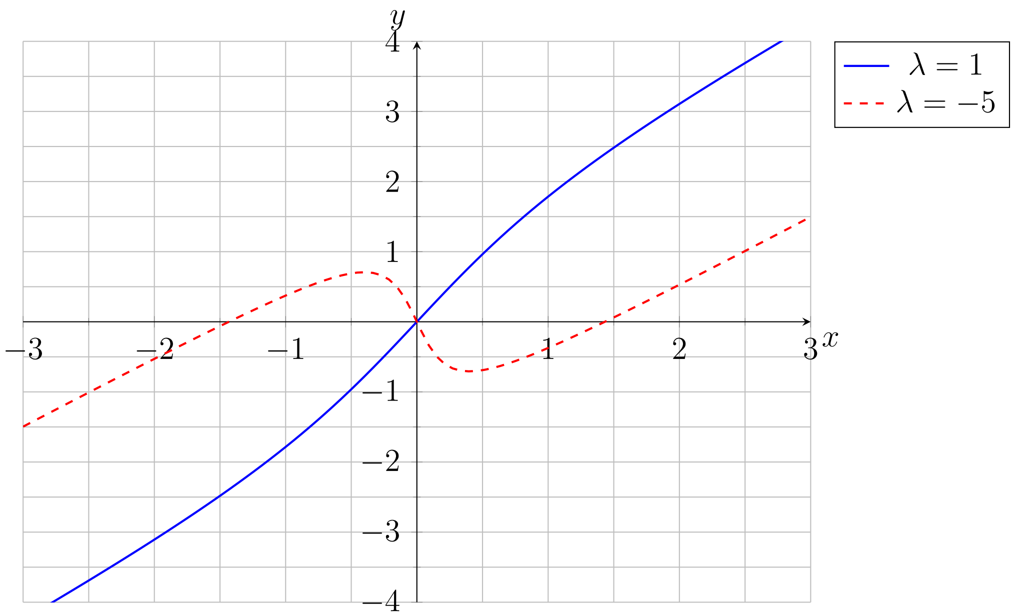
- $x_1 = -\frac{\sqrt{-(\lambda+1)}}{|\lambda|}$ è un punto di **Massimo Relativo**.

- $x_2 = +\frac{\sqrt{-(\lambda+1)}}{|\lambda|}$ è un punto di **Minimo Relativo**.

Interpretazione Grafica: La funzione $y = x$ è una retta a 45 gradi (pendenza 1). L'arcotangente $\arctan(\lambda x)$ ha pendenza massima λ nell'origine.

- Se $\lambda > -1$ (es. $\lambda = -0.5$), l'arcotangente scende troppo piano per contrastare la salita della x. La somma sale sempre.
- Se $\lambda < -1$ (es. $\lambda = -5$), l'arcotangente scende molto ripida nell'origine, "piegando" temporaneamente la funzione verso il basso (creando la "conca" con max e min).

Es. 9: $f(x) = \arctan(\lambda x) + x$
Se $\lambda > 0$, la funzione è sempre crescente. Se λ è molto negativo (es. -5), la derivata diventa negativa vicino all'origine creando max/min locali.



10. Potenza Parametrica (Confronto di Infiniti)

Testo: $f(t) = \frac{1+t^p}{(1+t)^p}$ con $t \geq 0$ e $p > 1$.

1. Limiti e Comportamento agli estremi

- $f(0) = \frac{1+0}{1} = 1$.
- $\lim_{t\to+\infty} \frac{1+t^p}{(1+t)^p} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^p}{t^p}\left(\frac{1/t^p+1}{(1/t+1)^p}\right) = 1$. (Asintoto Orizzontale $y = 1$).

Nota: La funzione parte da 1 e tende a 1. Deve succedere qualcosa nel mezzo (o è costante, o scende e risale, o sale e riscende).

2. Derivata Prima Applichiamo la regola del quoziente:

$$f'(t) = \frac{[pt^{p-1}](1+t)^p - (1+t^p)[p(1+t)^{p-1}]}{[(1+t)^p]^2}$$

Semplificazione Cruciale: Al numeratore abbiamo un fattore comune $p(1+t)^{p-1}$ in entrambi i termini. Raccogliamolo

$$f'(t) = \frac{p(1+t)^{p-1} \cdot [t^{p-1}(1+t) - (1+t^p)]}{(1+t)^{2p}}$$

Semplifichiamo il termine $(1+t)^{p-1}$ col denominatore:

$$f'(t) = \frac{p[t^{p-1}(1+t) - 1 - t^p]}{(1+t)^{p+1}}$$

Ora svolgiamo la moltiplicazione dentro la parentesi quadra:

$$t^{p-1}(1+t) = t^{p-1} + t^p$$

Sostituiamo nel numeratore:

$$f'(t) = \frac{p[t^{p-1} + t^p - 1 - t^p]}{(1+t)^{p+1}}$$

I termini t^p e $-t^p$ si cancellano:

$$f'(t) = \frac{p(t^{p-1} - 1)}{(1+t)^{p+1}}$$

3. Studio del Segno Adesso è facilissimo.

- Denominatore: Sempre positivo ($t \geq 0$).
- Costante p: Positiva.
- Segno dipende da: $t^{p-1} - 1$.

Poiché $p > 1$, l'esponente $p - 1$ è positivo. La funzione potenza è crescente.

$$f'(t) \geq 0 \iff t^{p-1} \geq 1 \iff t \geq 1$$

4. Conclusione e Grafico

- $0 < t < 1$: La funzione **decresce**.
- $t > 1$: La funzione **cresce**.
- $t = 1$: Punto di **Minimo Assoluto**.

Valore del minimo:

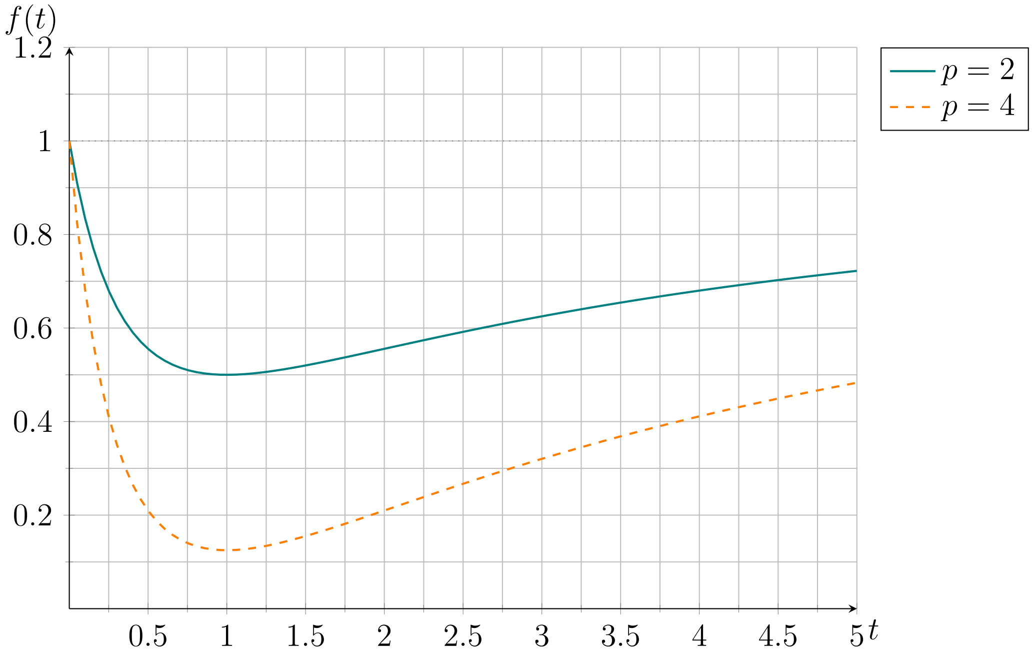
$$f(1) = \frac{1 + 1^p}{(1+1)^p} = \frac{2}{2^p} = 2^{1-p}$$

Essendo $p > 1$, $1-p < 0$, quindi il minimo è un valore piccolo ma positivo (sotto l'asintoto $y = 1$).

Riassunto grafico: La funzione parte da $(0, 1)$, scende fino al minimo $(1, 2^{1-p})$, e poi risale asintoticamente verso $y = 1$ senza mai superarlo.

Es. 10: $f(t) = \frac{1+t^p}{(1+t)^p}$ (con $p > 1, t \geq 0$)

La funzione parte da 1, scende a un minimo in $t = 1$ e risale asintoticamente a 1.



11. Doppio Valore Assoluto

Testo: $f(x) = |2e^{-|x|} - 1|$.

1. Strategia (Simmetria) La funzione è **Pari** ($f(-x) = f(x)$). Studiamo solo per $x \geq 0$ e riflettiamo il grafico. Per $x \geq 0$, $|x| = x$, quindi studiamo $y = |2e^{-x} - 1|$.

2. Studio dell'Argomento (senza modulo esterno) Poniamo $g(x) = 2e^{-x} - 1$.

- **Segno:** $2e^{-x} - 1 \geq 0 \iff e^{-x} \geq 1/2 \iff -x \geq \ln(1/2) \iff x \leq \ln 2$. Quindi l'argomento è positivo tra 0 e $\ln 2$, negativo dopo.

3. Definizione a tratti (per $x \geq 0$)

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-x} - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \ln 2 \\ -(2e^{-x} - 1) = 1 - 2e^{-x} & \text{se } x > \ln 2 \end{cases}$$

4. Derivata Prima e Monotonia

- **Tra 0 e $\ln 2$:** $f'(x) = -2e^{-x}$. Sempre negativa (< 0). La funzione scende.
- **Oltre $\ln 2$:** $f'(x) = -(-2e^{-x}) = 2e^{-x}$. Sempre positiva ($> 0$). La funzione sale.

Punti Notevoli:

- $x = \ln 2$: Punto di **Minimo Assoluto** (vale 0, è uno zero del modulo). È un punto angoloso.
- $x = 0$: Vediamo l'attacco. $f(0) = 1$. Poiché scende subito dopo, è un **Massimo Relativo**. Essendo $f(x)$ pari, in $x = 0$ c'è un punto angoloso (derivata destra -2, sinistra $+2$).
- **Asintoto:** $\lim_{x \to +\infty}(1 - 2e^{-x}) = 1$. Asintoto orizzontale $y = 1$.

5. Derivata Seconda e Convessità Qui sta la sorpresa. Deriviamo le espressioni della $f'(x)$:

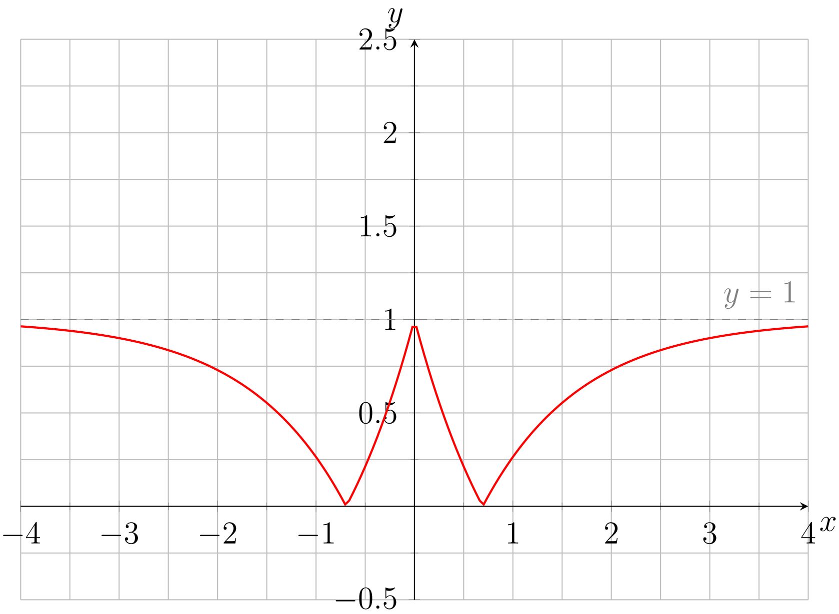
- **Tra** 0 **e** $\ln 2$**:** $f''(x) = D[-2e^{-x}] = 2e^{-x} > 0$. **Convessa** $\cup$ (sorride).
- **Oltre** $\ln 2$**:** $f''(x) = D[2e^{-x}] = -2e^{-x} < 0$. **Concava** $\cap$ (triste).

Non c'è un flesso "classico" perché il cambio di concavità avviene nel punto angoloso $x = \ln 2$.

6. Ricostruzione Completa (con simmetria)

- **Minimi Assoluti:** $x = \pm \ln 2$ (Valore $y = 0$, punti a "V").
- **Massimo Relativo:** $x = 0$ (Valore $y = 1$, punto a "V" rovesciata).
- **Asintoto:** $y = 1$ (sia a $+\infty$ che a $-\infty$).
- **Forma:** Una "M" molto larga, dove le gambe laterali non scendono ma risalgono asintoticamente a 1. (Convessa tra $-\ln 2$ e $\ln 2$, Concava all'esterno).

Es. 11: $f(x) = |2e^{-|x|} - 1|$
Funzione pari. Asintoto orizzontale $y = 1$. Punti di non derivabilità (cuspidi) dove l'argomento si annulla ($x = \pm \ln 2$) e in 0.



12. Radice Cubica con Modulo Parametrico

Testo: $f(x) = \sqrt[3]{2 - \lambda|x|}$.

1. Simmetria e Dominio

- La funzione è **PARI**: $f(-x) = f(x)$. Studiamo per $x \geq 0$ e riflettiamo.
- **Dominio:** $\mathbb{R}$ per ogni λ (la radice è dispari).
- **Caso Banale ($\lambda = 0$):** $f(x) = \sqrt[3]{2}$ (Retta orizzontale).

2. Studio per $x \geq 0$ (Segno e Limiti) La funzione diventa $f(x) = \sqrt[3]{2 - \lambda x}$.

- **Se $\lambda < 0$ (es. $\lambda = -3$):** L'argomento è $2 - (-3)x = 2 + 3x$. È sempre positivo. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{2 + |\lambda| x} = +\infty$.

- **Se $\lambda > 0$ (es. $\lambda = 3$):** L'argomento è $2-3x$. Si annulla in $x_0 = 2/\lambda$. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{2-\lambda x} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$.

3. Derivata Prima (Studio $x > 0$)

$$f(x) = (2-\lambda x)^{1/3} \implies f'(x) = \frac{1}{3}(2-\lambda x)^{-2/3} \cdot (-\lambda)$$

$$f'(x) = \frac{-\lambda}{3\sqrt[3]{(2-\lambda x)^2}}$$

Analizziamo questa frazione:

- Il **Denominatore** è una radice di un quadrato: è **sempre positivo** (tranne dove si annulla).
- Il **Numeratore** è $-\lambda$.

4. Analisi dei Casi (Monotonia)

CASO A: $\lambda < 0$ (es. -1) * $-\lambda$ è positivo. * $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$. * La funzione cresce sempre per $x > 0$. * In $x = 0$ (unendo col ramo sinistro simmetrico che decresce) abbiamo un **Minimo Assoluto** a cuspide/angoloso.

CASO B: $\lambda > 0$ (es. 1) * $-\lambda$ è negativo. * $f'(x) < 0$ per ogni $x \neq 2/\lambda$. * La funzione decresce sempre per $x > 0$. * In $x = 0$ abbiamo un **Massimo Assoluto** (valore $\sqrt[3]{2}$).

5. Derivabilità (I punti critici)

- **Punto $x = 0$ (Origine):** Limite destro della derivata:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{-\lambda}{3\sqrt[3]{4}} \neq 0$$

Essendo la funzione pari, la derivata sinistra sarà l'opposto ($+\lambda/...$). Poiché $f'_+ \neq f'_-$, $x = 0$ è un **Punto Angoloso**.

- **Punto $x = 2/\lambda$ (Solo per $\lambda > 0$):** Qui l'argomento della radice si annulla. Il denominatore della derivata va a 0.

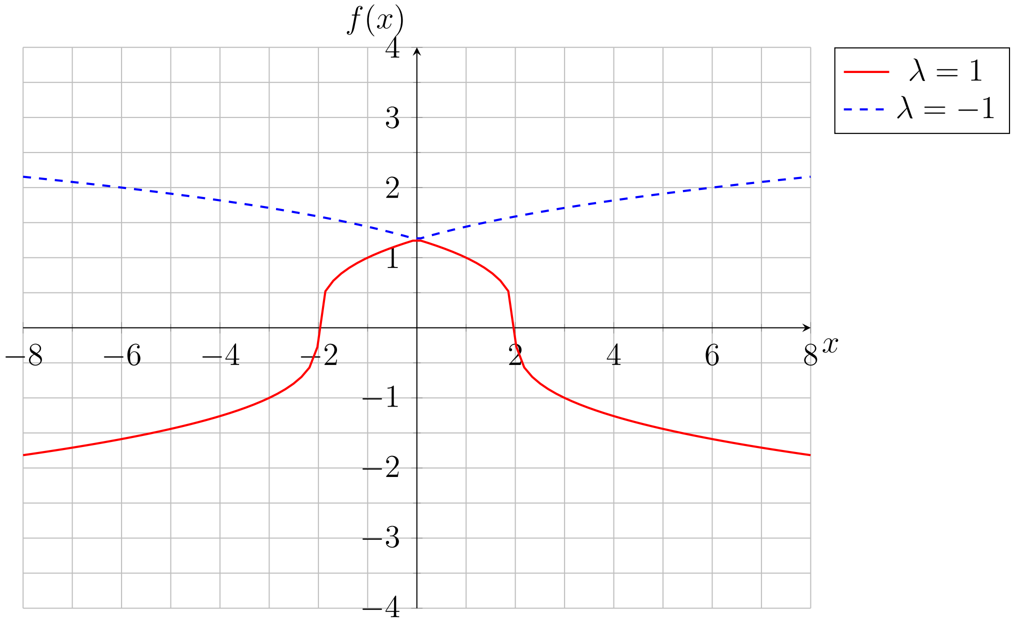
$$\lim_{x\to(2/\lambda)} f'(x) = \frac{-\lambda}{0^+} = -\infty$$

C'è una **Tangente Verticale**. La funzione passa dall'essere positiva a negativa con pendenza infinita (flesso a tangente verticale).

Riassunto Grafico:

- $\lambda < 0$: Forma a "V" stondata (simile a un gabbiano che vola alto), minimo in 0.
- $\lambda > 0$: Forma a "Campana" appuntita (cuspide in alto), che poi scende e taglia l'asse x verticalmente.

Es. 12: $f(x) = \sqrt[3]{2-\lambda|x|}$
Cuspide in $x = 0$. Se $\lambda > 0$ va a $-\infty$, se $\lambda < 0$ va a $+\infty$.



13. Derivabilità nell'Origine (A tratti)

Testo: $f(x) = e^{-1/x^2}$ per $x > 0$, $f(x) = 0$ per $x \leq 0$.

1. Analisi Preliminare La funzione è chiaramente continua e derivabile per $x \neq 0$. Per $x \to 0^+$, $\lim e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0$. Dato che $f(0) = 0$, la funzione è **continua** in $x = 0$. Non ci sono massimi/minimi evidenti (la funzione è strettamente positiva per $x > 0$ e cresce, vedi derivata).

2. Derivata Prima in $x = 0$ (Tramite Definizione) Dobbiamo calcolare il limite del rapporto incrementale destro (a sinistra è identicamente nullo).

$$f'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-1/h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} e^{-1/h^2}$$

Effettuiamo il cambio di variabile $t = 1/h$. Se $h \to 0^+$, allora $t \to +\infty$.

$$= \lim_{t \to +\infty} t \cdot e^{-t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{t^2}}$$

Per la gerarchia degli infiniti, l'esponenziale e^{t^2} domina su qualsiasi potenza di t.

$$f'(0) = 0$$

Quindi la funzione è derivabile nell'origine e la tangente è orizzontale.

3. Derivata Seconda in $x = 0$ (Tramite Definizione) Per calcolare $f''(0)$, ci serve prima l'espressione di $f'(x)$ per $x > 0$:

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot (-(-2x^{-3})) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \quad \text{(per } x > 0\text{)}$$

Ora applichiamo la definizione di derivata seconda nell'origine:

$$f''(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f'(h) - f'(0)}{h}$$

Sappiamo che $f'(0) = 0$ (calcolato sopra).

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{2}{h^3} e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2}{h^4} e^{-1/h^2}$$

Stesso cambio di variabile $t = 1/h$ (quindi $t \to +\infty$):

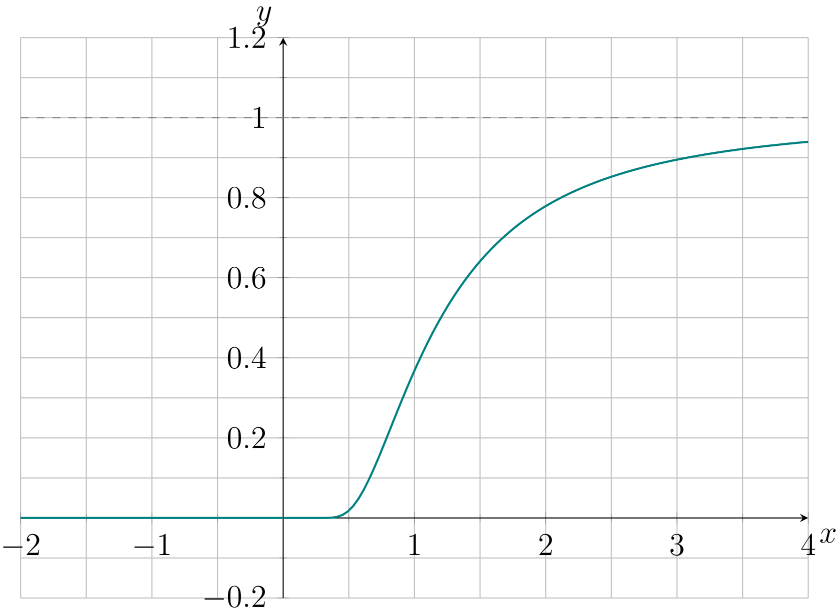
$$= \lim_{t \to +\infty} 2t^4 e^{-t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2t^4}{e^{t^2}} = 0$$

(L'esponenziale vince sempre contro il polinomio t^4).

4. Conclusione La funzione è "piattissima" nell'origine. Tutte le sue derivate in $x = 0$ ($f', f'', f''' \dots$) valgono 0. Questa funzione (nota come funzione "bump" o di Cauchy) è un classico esempio di funzione C^∞ che non è analitica (non coincide con la sua serie di Taylor, che sarebbe $0 + 0 + 0 \dots$).

Es. 13: $f(x) = e^{-1/x^2}$ per $x > 0$, 0 per $x \leq 0$

Esempio classico di funzione C^∞ (derivabile infinite volte) che si "incolla" perfettamente a 0. Asintoto $y = 1$.



14. Logaritmo e Moduli (Il trucco della scomposizione)

Testo: $f(x) = \frac{1}{3}|x| + \log\left(\frac{2(|x|-1)}{|x|-2}\right)$.

1. Simmetria e Dominio (Fase Fondamentale)

- **Simmetria:** La funzione è **Pari** (c'è solo $|x|$). Studiamo solo per $x \geq 0$.
- **Dominio:** Argomento > 0. Per $x \geq 0$, dobbiamo risolvere $\frac{x-1}{x-2} > 0$. Segni: Num > 0 per $x > 1$, Den > 0 per $x > 2$. Combinando i segni:

$$\text{Dominio per } x \geq 0 : [0, 1) \cup (2, +\infty)$$

(Quindi c'è un "buco" tra 1 e 2 dove la funzione non esiste).

2. Semplificazione della Funzione Per $x \geq 0$ (nel dominio), possiamo scrivere:

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \log(2) + \log|x-1| - \log|x-2|$$

Nota: Ho separato il logaritmo. La derivata di $\log(2)$ è 0.

3. Calcolo della Derivata (Metodo Smart) Invece di derivare la frazione gigante, deriviamo i pezzi singoli:

$$f'(x) = D\left[\frac{1}{3}x\right] + D[\log|x-1|] - D[\log|x-2|]$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$$

Ora facciamo il denominatore comune per studiare il segno:

$$f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{(x-2)-(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{3} + \frac{-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)-3}{3(x-1)(x-2)}$$

Svolgiamo il numeratore: $(x^2 - 3x + 2) - 3 = x^2 - 3x - 1$.

$$f'(x) = \frac{x^2-3x-1}{3(x-1)(x-2)}$$

4. Studio del Segno della Derivata

- **Denominatore:** $3(x-1)(x-2)$. Nel nostro dominio ($0 \leq x < 1$ e $x > 2$), analizziamo i segni: - Se $0 \leq x < 1$: $(x-1)$ è neg, $(x-2)$ è neg $\implies$ Denominatore **Positivo**. - Se $x > 2$: entrambi positivi $\implies$ Denominatore **Positivo**. Quindi il segno dipende **solo dal Numeratore**.
- **Numeratore:** $x^2 - 3x - 1 \geq 0$. Radici: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. $x_1 \approx \frac{3-3.6}{2} < 0$ (da scartare, siamo in $x \geq 0$). $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.3$.

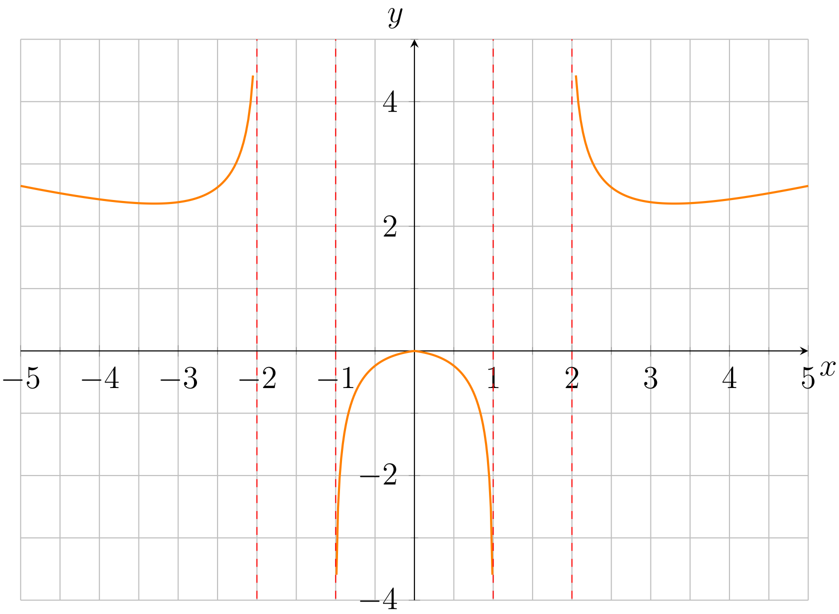
5. Conclusione Monotonia (per $x \geq 0$)

- **Tra 0 e 1:** La parabola (Numeratore) è negativa (siamo tra le radici, $0 < 3.3$). Quindi $f'(x) < 0$. La funzione **decresce**. Partendo da $x = 0$, scende verso l'asintoto in $x = 1$.
- **Tra 2 e 3.3:** Il numeratore è ancora negativo (fino a 3.3). $f'(x) < 0$. La funzione scende dall'asintoto ($x = 2$) fino al minimo.
- **Oltre 3.3:** Il numeratore diventa positivo. $f'(x) > 0$. La funzione sale.

Punti Critici:

- $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$: Punto di **Minimo Relativo**.
- $x = 0$: Poiché la funzione decresce subito dopo e f è pari, $x = 0$ è un **Massimo Relativo** (locale). Nota: $f(0) = 0 + \log(\frac{2(-1)}{-2}) = \log(1) = 0$.

Asintoti Verticali: $x = 1$ e $x = 2$.
Es. 14: $f(x) = \frac{1}{3}|x| + \log\left(\frac{2(|x|-1)}{|x|-2}\right)$
Dominio complesso: $x \in]-\infty, -2[\cup]-1, 1[\cup]2, +\infty[$. *Asintoti verticali in* ± 1 *e* ± 2.



15. Seno Modulato a Tratti

Testo: $f(x) = (|x + 1| - |x - 1|)\sin(\pi x)$.

1. Semplificazione dei Moduli (Split in intervalli) I punti critici dei moduli sono $x = -1$ e $x = 1$. Analizziamo il coefficiente $g(x) = |x + 1| - |x - 1|$ nelle tre zone:

- **Zona A ($x \leq -1$):** Entrambi gli argomenti sono negativi.

$$g(x) = -(x + 1) - [-(x - 1)] = -x - 1 + x - 1 = -2$$

  Quindi qui $f(x) = -2\sin(\pi x)$.

- **Zona B ($-1 < x < 1$):** Primo positivo, secondo negativo.

$$g(x) = (x + 1) - [-(x - 1)] = x + 1 + x - 1 = 2x$$

  Quindi qui $f(x) = 2x \sin(\pi x)$.

- **Zona C ($x \geq 1$):** Entrambi positivi.

$$g(x) = (x + 1) - (x - 1) = 2$$

  Quindi qui $f(x) = 2\sin(\pi x)$.

Riassunto della funzione a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin(\pi x) & x \leq -1 \\ 2x\sin(\pi x) & -1 < x < 1 \\ 2\sin(\pi x) & x \geq 1 \end{cases}$$

2. Considerazioni sulla Simmetria La funzione è **PARI** ($f(-x) = f(x)$). Verifica rapida: $g(x)$ è dispari ($g(-x) = -g(x)$) e il seno è dispari. Dispari $\times$ Dispari = Pari. Possiamo studiare solo $x \geq 0$.

3. Derivabilità nei punti di giunzione ($x = 1$) Questa è la parte interessante. Solitamente i moduli creano punti angolosi. Vediamo qui. Studiamo il raccordo tra la zona centrale ($2x\sin(\pi x)$) e quella esterna ($2\sin(\pi x)$) in $x = 1$.

- **Continuità:** $f(1^-) = 2(1)\sin(\pi) = 0$. $f(1^+) = 2\sin(\pi) = 0$. (Continua).
- **Derivata Sinistra ($x \to 1^-$):** $D[2x\sin(\pi x)] = 2\sin(\pi x) + 2x \cdot \pi\cos(\pi x)$. Sostituiamo $x = 1$: $2\sin(\pi) + 2\pi\cos(\pi) = 0 + 2\pi(-1) = -2\pi$.
- **Derivata Destra ($x \to 1^+$):** $D[2\sin(\pi x)] = 2\pi\cos(\pi x)$. Sostituiamo $x = 1$: $2\pi(-1) = -2\pi$.

Risultato Le derivate coincidono La funzione è **Derivabile** ovunque, anche in $x = 1$ e $x = -1$. Non ci sono punti angolosi. I due grafici si "incollano" perfettamente tangenti.

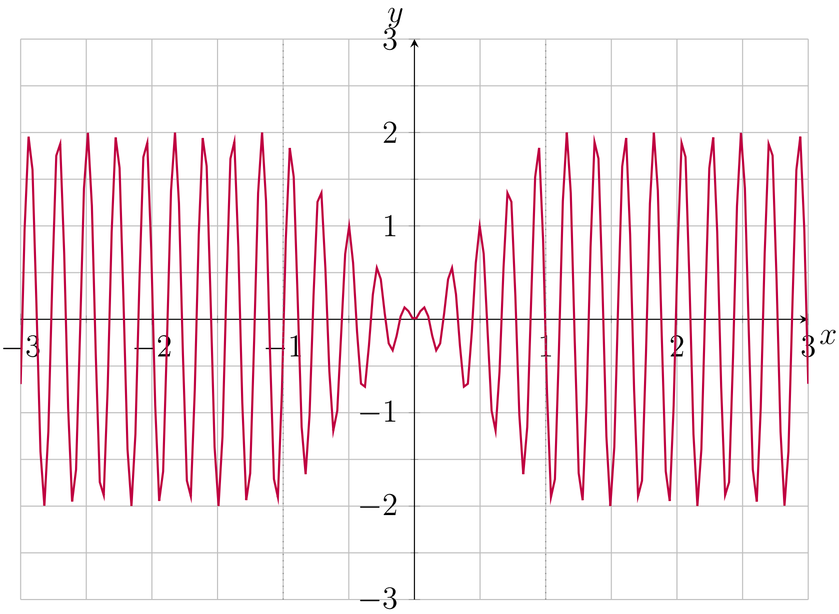
4. Grafico Qualitativo

- **Esterno ($x \geq 1$):** È una classica sinusoide dilatata di ampiezza 2. Oscilla tra $+2$ e -2. Si annulla negli interi ($x = 1, 2, 3\ldots$).
- **Interno ($0 \leq x < 1$):** È $2x\sin(\pi x)$. In $x = 0$ vale 0. Poi cresce (perché $2x$ aumenta l'ampiezza e sin sale). Ha un massimo prima di $x = 0.5$ (perché $2x$ spinge in su). Poi scende a 0 in $x = 1$.

Il grafico assomiglia a un'onda che parte dall'origine, cresce di ampiezza fino a stabilizzarsi a un'altezza costante di 2 fuori dall'intervallo $[-1, 1]$.

Es. 15: $f(x) = (|x+1| - |x-1|)\sin(\pi x)$

Funzione "Box": il termine tra moduli vale 2 per $x > 1$, -2 per $x < -1$, e $2x$ in mezzo. Oscillazione modulata.



16. Polinomio in Modulo

Funzione: $f(x) = |x^3 + x^2 + x + 1| - x^2$.

1. Analisi del Modulo

Prima di fare qualsiasi calcolo, dobbiamo "aprire" il valore assoluto. Studiamo il segno dell'argomento:

$$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

Raccoglimento parziale:

$$P(x) = x^2(x+1) + 1(x+1) = (x^2+1)(x+1)$$

Poiché $(x^2 + 1)$ è sempre positivo, il segno dipende solo da $(x + 1)$.

- Se $x \geq -1$: L'argomento è positivo (togliamo il modulo così com'è).
- Se $x < -1$: L'argomento è negativo (togliamo il modulo cambiando segno).

2. Scrittura della Funzione a tratti

Semplifichiamo l'espressione nei due casi:

CASO A ($x \geq -1$):

$$f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1) - x^2 = x^3 + x + 1$$

CASO B ($x < -1$):

$$f(x) = -(x^3 + x^2 + x + 1) - x^2 = -x^3 - x^2 - x - 1 - x^2$$

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 - x - 1$$

3. Calcolo delle Derivate

Deriviamo separatamente i due pezzi.

Per $x > -1$:

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

Questa quantità è somma di quadrati, quindi è **sempre positiva**. $\implies$ La funzione **cresce sempre** per $x > -1$.

Per $x < -1$:

$$f'(x) = -3x^2 - 4x - 1$$

Studiamo il segno: $-3x^2 - 4x - 1 \geq 0 \implies 3x^2 + 4x + 1 \leq 0$. Radici dell'equazione associata:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} \implies x = -1,\ x = -1/3$$

La parabola è positiva "tra le radici" $(-1 < x < -1/3)$. Ma noi siamo nel mondo $x < -1$! In questa zona $(x < -1)$, la derivata è **sempre negativa**. $\implies$ La funzione **decresce sempre** per $x < -1$.

4. Analisi del Punto di Raccordo ($x = -1$)

Abbiamo scoperto che:

- A sinistra di -1 la funzione scende.
- A destra di -1 la funzione sale.

Quindi $x = -1$ è sicuramente un punto di **MINIMO RELATIVO** (e assoluto). Valore del minimo: $f(-1) = |0| - (-1)^2 = -1$.

È un punto derivabile o un punto angoloso? Calcoliamo il limite della derivata a destra e a sinistra:

- Limite destro ($x \to -1^+$): Uso $f'(x) = 3x^2 + 1$.
$$\lim_{x \to -1^+} (3x^2 + 1) = 3(1) + 1 = \mathbf{4}$$
- Limite sinistro ($x \to -1^-$): Uso $f'(x) = -3x^2 - 4x - 1$.
$$\lim_{x \to -1^-} (-3x^2 - 4x - 1) = -3 + 4 - 1 = \mathbf{0}$$

Poiché $4 \neq 0$, il punto $x = -1$ è un **Punto Angoloso**. Geometricamente: la funzione arriva "piatta" da sinistra (pendenza 0) e riparte "ripida" a destra (pendenza 4).

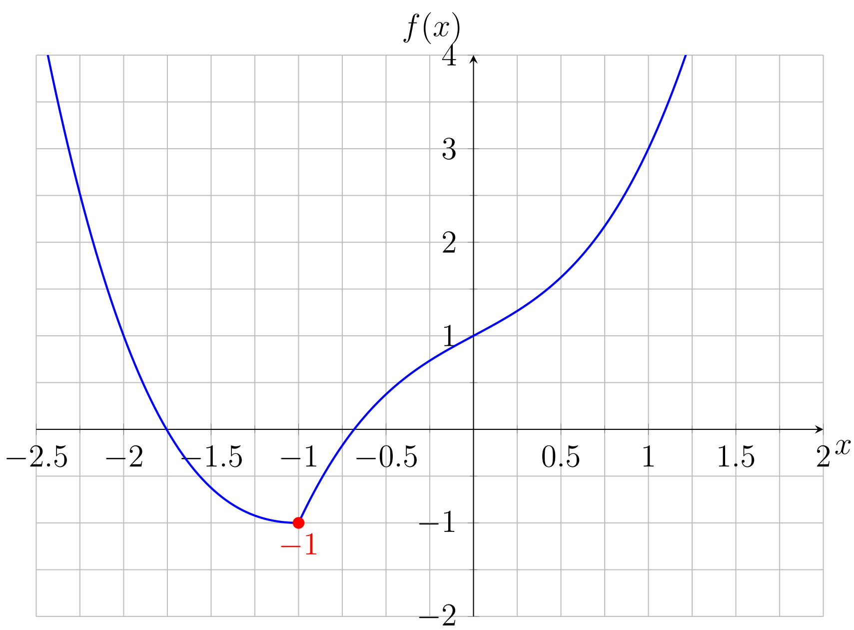
5. Limiti all'infinito (Grafico)

- $\lim_{x \to +\infty} (x^3 + x + 1) = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} (-x^3 - 2x^2 \dots) = -(-\infty) = +\infty$

Sintesi Grafico: Una forma a "V" asimmetrica (o a parabola storta) che scende dall'infinito, tocca il minimo spigoloso in $(-1, -1)$ e risale all'infinito.

Es. 16: $f(x) = |x^3 + x^2 + x + 1| - x^2$

Il polinomio dentro il modulo si annulla solo in $x = -1$. Cuspide in -1. A $+\infty$ si comporta come x^3, a $-\infty$ come $-x^3$.



17. Radice ed Esponenziale (Radici)

Testo: $f(x) = e^{-|x|}\sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

1. Dominio (La prima trappola) L'argomento della radice deve essere ≥ 0:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \implies (x-2)(x-3) \geq 0$$

Il dominio è: **$x \leq 2 \cup x \geq 3$**. *Nota bene:* C'è un "buco" tra 2 e 3. La funzione non esiste lì. Se trovi punti critici come 2.5, vanno buttati!

2. Derivata Prima (Divisa per casi) A causa di $|x|$, distinguiamo $x > 0$ e $x < 0$.

CASO A: $x > 0$ (ovvero $0 < x \leq 2$ e $x \geq 3$) Qui $|x| = x$, quindi $f(x) = e^{-x}\sqrt{x^2 - 5x + 6}$. Applicando la regola del prodotto:

$$f'(x) = -e^{-x}\sqrt{x^2 - 5x + 6} + e^{-x}\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

Raccogliamo e^{-x} e facciamo il denominatore comune $2\sqrt{\dots}$:

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{\dots}}\Big[-2(x^2 - 5x + 6) + (2x - 5)\Big]$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{\dots}}\Big[-2x^2 + 10x - 12 + 2x - 5\Big]$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{\dots}}(-2x^2 + 12x - 17)$$

Studio del segno (Caso A): Il segno dipende dal polinomio $-2x^2 + 12x - 17 \geq 0$. Radici: $\Delta = 144 - 136 = 8$.

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{8}}{-4} = \frac{12 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 3 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Approssimando $\sqrt{2} \approx 1.41$:

- $x_1 = 3 - 0.707 \approx 2.29$. (Cade nel BUCO tra 2 e 3! **SCARTARE**).
- $x_2 = 3 + 0.707 \approx 3.707$. (Accettabile).

Essendo una parabola rovesciata, è positiva tra le radici. Ma attenzione al dominio

- **Intervallo $(0, 2]$:** Siamo a sinistra delle radici ($x < 2.29$). La parabola è negativa. $f'(x) < 0$. La funzione **decresce**.
- **Intervallo $[3, +\infty)$:** - Tra 3 e 3.7: Siamo "dentro" le radici (tra 2.29 e 3.7). Parabola positiva. f **cresce**. - Oltre 3.7: Parabola negativa. f **decresce**.

CASO B: $x < 0$ (ovvero $x \leq 0$) Qui $|x| = -x$, quindi $f(x) = e^{x}\sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

$$f'(x) = e^{x}\sqrt{\dots} + e^{x}\frac{2x-5}{2\sqrt{\dots}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x}}{2\sqrt{\dots}}\Big[2(x^2 - 5x + 6) + 2x - 5\Big]$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{\dots}}(2x^2 - 8x + 7)$$

Studio del segno (Caso B): Polinomio: $2x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Radici: $\Delta = 64 - 56 = 8$.

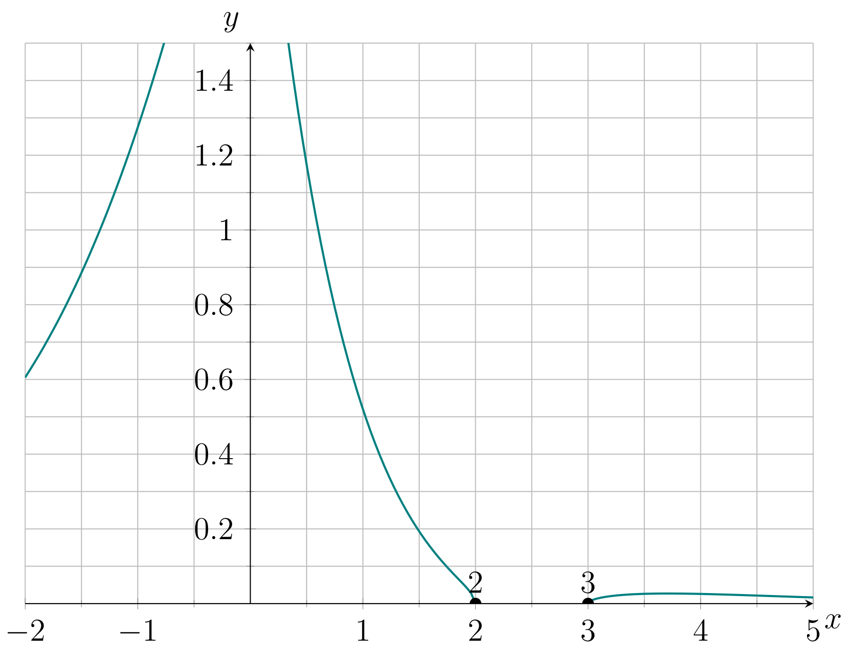
$$x_{3,4} = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{4} = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entrambe le soluzioni sono POSITIVE (≈ 1.3 e 2.7). Ma noi siamo nel caso $x < 0$! Per $x < 0$, la parabola $2x^2 - 8x + 7$ (che ha vertice nelle x positive) è sempre alta e positiva. **Conclusione Caso B:** $f'(x) > 0$ sempre per $x < 0$. La funzione **cresce** sempre.

3. Sintesi e Punti Notevoli Ricostruiamo il grafico da sinistra a destra:

- **Da $-\infty$ a 0:** Cresce sempre.
- **In $x = 0$:** $f(0) = \sqrt{6}$. È un punto di **Massimo Relativo** a cuspide. (A sinistra sale, a destra scende subito).
- **Da 0 a 2:** Decresce fino a $f(2) = 0$. Minimo locale (bordo dominio).
- **Da 2 a 3: VUOTO**.
- **Da 3 in poi:** Parte da $f(3) = 0$ (Minimo locale), sale fino al massimo, poi scende asintoticamente a 0.
- **Massimo Assoluto:** In $x = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Valore: $f(3.7) \approx e^{-3.7}\sqrt{\dots}$ (un numero piccolo ma positivo). Confrontandolo con $f(0) = \sqrt{6} \approx 2.45$, chiaramente il picco in $x = 0$ è molto più alto. Quindi $x = 0$ è il Massimo Assoluto, $x = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un Massimo Relativo "piccolo".

Es. 17: $f(x) = e^{-|x|}\sqrt{x^2 - 5x + 6}$
Dominio: $x \leq 2 \cup x \geq 3$. C'è un "buco" tra 2 e 3. Punti a tangente verticale in 2 e 3. Cuspide in 0.



Schema Strategico: Quando sdoppiare la derivata?

Quando incontri un valore assoluto $|A(x)|$, segui questo diagramma di flusso per decidere come comportarti con la derivata $f'(x)$.

1. Check Simmetria (La via veloce)

Verifica subito se la funzione è **Pari** ($f(-x) = f(x)$) o **Dispari** ($f(-x) = -f(x)$).

- **SE È SIMMETRICA (SÌ):**
  - **Cosa fare:** Studia solo $x \geq 0$. Calcola **una sola derivata** (quella per $x > 0$).
  - **Per $x < 0$:** Non calcolare nulla! Ribalta il grafico ottenuto (a specchio se pari, a specchio rovesciato se dispari).

  Esempio: $f(x) = e^{-|x|}$ oppure $f(x) = \frac{1+x^2}{|x|}$.

2. Check "Strutturale" (La via obbligata)

Se la funzione **NON è simmetrica**, devi chiederti: "Il modulo cambia la struttura algebrica?"

- **CASO A: Modulo "Semplice" su tutta la funzione**
  $f(x) = |g(x)|$.
  - **Cosa fare:** Studia l'argomento $g(x)$ e la sua derivata $g'(x)$ normalmente.
  - **Alla fine:** Ribalta le parti del grafico dove $g(x) < 0$.
- **CASO B: Modulo "Misto" (Il Caso Pericoloso)**
  Il modulo è solo su un pezzo (es. all'esponente, o solo su una x) e ci sono altri termini non modulati (es. x, $(x-1)$). *Esempio Ex 17:* $f(x) = e^{-|x|}\sqrt{x^2 - 5x + 6}$.
  - **PERCHÉ È PERICOLOSO:** Per $x > 0$ hai e^{-x} (derivata interna -1). Per $x < 0$ hai e^{x} (derivata interna $+1$). Questo cambio di segno, applicando la regola del prodotto, **modifica i coefficienti** del polinomio risultante.
  - **Cosa fare: OBBLIGATORIO fare due derivate separate.**
    1. Scrivi $f(x)$ per $x \geq 0$ e calcola $f'_+(x)$.
    2. Scrivi $f(x)$ per $x < 0$ e calcola $f'_-(x)$.

    I risultati saranno spesso polinomi completamente diversi.

Tabella Riassuntiva

Tipo di Funzione	Esempio	Strategia Derivata
Simmetrica (Pari/Dispari)	$x^2e^{-\|x\|}$	Solo $x > 0$ + Grafico specchiato
Modulo Totale	$\|\ln x - 1\|$	Deriva argomento + Ribalta grafico
Modulo Misto/Asimmetrico	$(x+1)e^{\|x\|}$	**DUE CASI DISTINTI** ($x > 0$ e $x < 0$)
Modulo Spostato	$\|x-1\|e^{x}$	**DUE CASI DISTINTI** ($x > 1$ e $x < 1$)

18. Prolungamento per Continuità

Testo: $f(x) = xe^{-\lambda/x^2}$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$ ($\lambda > 0$).

1. Simmetria e Continuità

- La funzione è **DISPARI**: $f(-x) = -xe^{-\lambda/x^2} = -f(x)$. Studiamo per $x \geq 0$ e ribaltiamo rispetto all'origine.
- **Continuità in 0:**
$$\lim_{x\to 0^+} xe^{-\lambda/x^2} = 0 \cdot 0 = 0$$
(L'esponenziale $e^{-\infty}$ va a 0 molto più velocemente di quanto x vada a 0, ma qui vanno entrambi a 0, quindi nessun conflitto). $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$.

2. Derivabilità nell'Origine Facciamo il limite del rapporto incrementale in $x = 0$:
$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{he^{-\lambda/h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{-\lambda/h^2} = 0$$
Quindi c'è una **Tangente Orizzontale** nell'origine. La funzione "nasce piatta".

3. Derivata Prima e Monotonia (x > 0)
$$f'(x) = 1 \cdot e^{-\lambda/x^2} + x \cdot e^{-\lambda/x^2} \cdot \left(-(-2\lambda x^{-3})\right)$$
$$f'(x) = e^{-\lambda/x^2} \left(1 + \frac{2\lambda}{x^2}\right)$$
Analizziamo i fattori per $x > 0$:

- $e^{-\cdots}$ è sempre positivo.
- $(1 + \frac{2\lambda}{x^2})$ è somma di positivi $\implies$ sempre positivo.

Conclusione: $f'(x) > 0$ sempre. La funzione è **strettamente crescente**. Non ci sono massimi né minimi relativi.

4. Comportamento all'Infinito (Asintoto Obliquo) Per $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$. Cerchiamo l'asintoto obliquo $y = mx + q$.

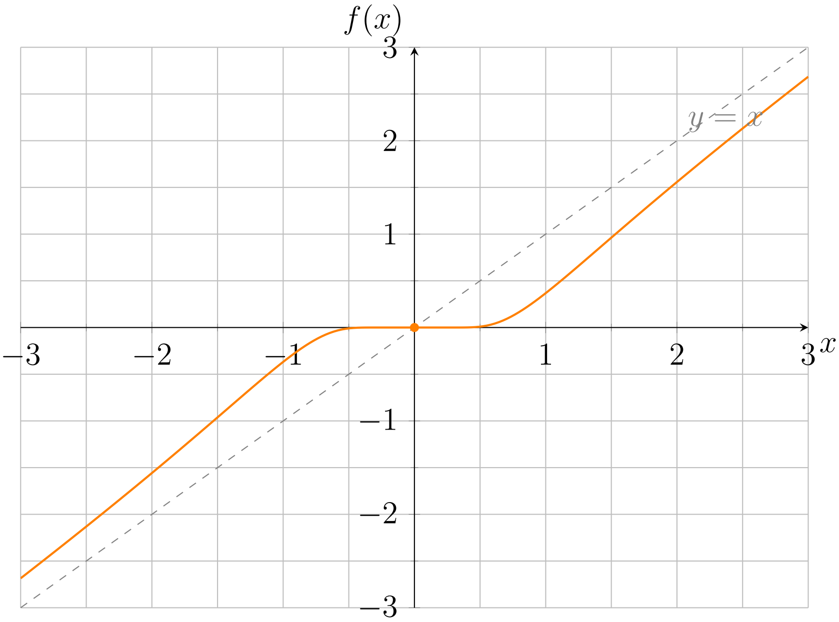
- $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim e^{-\lambda/x^2} = e^0 = 1$.
- $q = \lim_{x\to\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to\infty} x(e^{-\lambda/x^2} - 1)$. Usiamo lo sviluppo di Taylor $e^t \approx 1+t$ con $t = -\lambda/x^2$:
$$= \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{\lambda}{x^2} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} -\frac{\lambda}{x} = 0$$

Asintoto Obliquo: **$y = x$** (bisettrice).

5. Grafico Qualitativo La funzione passa per l'origine tangendo l'asse x, poi cresce sempre restando "sotto" la retta $y = x$ (poiché $e^{-\cdots} < 1$), avvicinandosi ad essa asintoticamente. È una specie di "S" stirata.

Es. 18: $f(x) = xe^{-\lambda/x^2}$ ($f(0) = 0$)

Grafico per $\lambda = 1$. Asintoto obliquo $y = x$. In 0 la funzione si schiaccia (derivata nulla, contatto di ordine infinito).



19. Connessione Grafica (Studio + Parametro)

Testo: a) Studiare $f(x) = |x^3|e^{-x}$ per $x > 0$. b) Risolvere al variare di k: $ke^x = |x^3|$.

PARTE A: Studio della funzione (per $x > 0$) Poiché $x > 0$, $|x^3| = x^3$. La funzione è $f(x) = x^3e^{-x}$.

- **Limiti:** $f(0) = 0$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ (Gerarchia infiniti). Asintoto orizzontale $y = 0$.
- **Derivata Prima:**

$$f'(x) = 3x^2e^{-x} + x^3(-e^{-x}) = x^2e^{-x}(3 - x)$$

  Studio del segno (per $x > 0$, x^2e^{-x} è sempre positivo):

$$f'(x) \geq 0 \iff 3 - x \geq 0 \iff x \leq 3$$

- **Estremi:** - La funzione cresce tra 0 e 3. - La funzione decresce dopo 3. - **Massimo Assoluto** in $x = 3$.
- **Valore del Massimo (y_{max}):**

$$f(3) = 3^3e^{-3} = \frac{27}{e^3} \approx \frac{27}{20} \approx 1.35$$

PARTE B: Risoluzione Grafica ($x \in \mathbb{R}$) L'equazione è $ke^x = |x^3|$. Moltiplichiamo per e^{-x} (che è sempre $\neq 0$) per separare il parametro k:

$$k = |x^3|e^{-x}$$

Questo significa cercare le intersezioni tra la retta orizzontale $y = k$ e la funzione $g(x) = |x^3|e^{-x}$ su tutto il dominio reale.

1. Completamento del grafico per $x < 0$ Per $x < 0$, $|x^3| = -x^3$, quindi $g(x) = -x^3e^{-x}$.

- **Limite:** Per $x \to -\infty$, abbiamo $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.
- **Monotonia:** La funzione scende da $+\infty$ a 0 senza gobbe (la derivata $x^2 e^{-x}(x-3)$ è sempre negativa per $x < 0$).

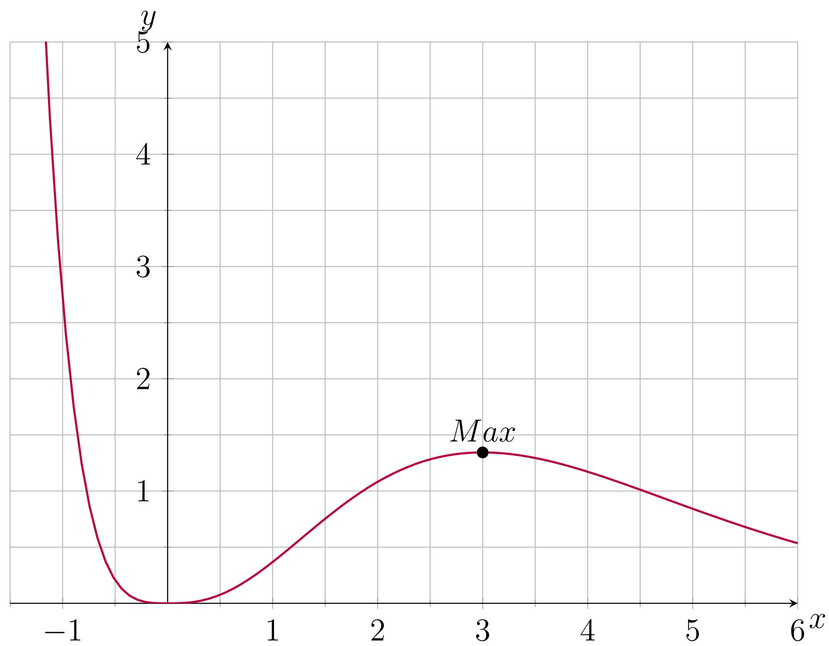
Quindi il grafico completo è formato da:

- Un ramo decrescente a sinistra (da $+\infty$ a 0).
- Una "gobba" a destra (da 0, sale a $27/e^3$, scende a 0).

2. Conteggio Soluzioni (metodo dell'asticella $y = k$) Facciamo scorrere una linea orizzontale dal basso verso l'alto:

- **Se $k < 0$:** Nessuna soluzione (la funzione è sempre ≥ 0).
- **Se $k = 0$: 1 soluzione** ($x = 0$).
- **Se $0 < k < \frac{27}{e^3}$:** La retta taglia 3 volte. (1 volta il ramo sinistro, 2 volte la "gobba" destra). $\to$ **3 soluzioni**.
- **Se $k = \frac{27}{e^3}$:** La retta tocca la cima della gobba e taglia a sinistra. (1 tangenza + 1 intersezione). $\to$ **2 soluzioni**.
- **Se $k > \frac{27}{e^3}$:** La retta passa sopra la gobba. Taglia solo il ramo sinistro infinito. $\to$ **1 soluzione**.

Es. 19: $f(x) = |x^3|e^{-x}$
Fondamentale per il numero di soluzioni. Max locale in $x = 3$. A sinistra esplode verso $+\infty$ perché l'esponenziale negativo al denominatore diventa enorme.



20. Limitatezza Parametrica (Il ruolo della Base)

Testo: $f(x) = \frac{x^2}{2} + \log_a |x+1|$ con $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

1. Dominio e Comportamento all'Infinito Dominio: $x \neq -1$. Per $x \to \pm\infty$: Il termine $\frac{x^2}{2}$ domina sul logaritmo.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Questo è un buon segno: "ai lati" la funzione va su, quindi non crea problemi di limitatezza inferiore.

2. Il Punto Critico: $x \to -1$

Sappiamo che $|x+1| \to 0^+$. Quindi l'argomento del logaritmo tende a zero. Sappiamo che $\log(0^+) \to -\infty$ (come "quantità pura"). Ma il segno finale dipende dalla base a!

Scriviamo il logaritmo in base naturale per vederlo meglio: $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{1}{2} + \lim_{x \to -1} \frac{\ln|x+1|}{\ln a} = \frac{1}{2} + \frac{-\infty}{\ln a}$$

CASO 1: $a > 1$ Se $a > 1$, allora $\ln a > 0$ (positivo).

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{-\infty}{+} = -\infty$$

Interpretazione: Vicino a $x = -1$, la funzione precipita in un abisso senza fondo. **Conclusione:** La funzione **NON** è limitata inferiormente.

CASO 2: $0 < a < 1$ Se $0 < a < 1$, allora $\ln a < 0$ (negativo).

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{-\infty}{-} = +\infty$$

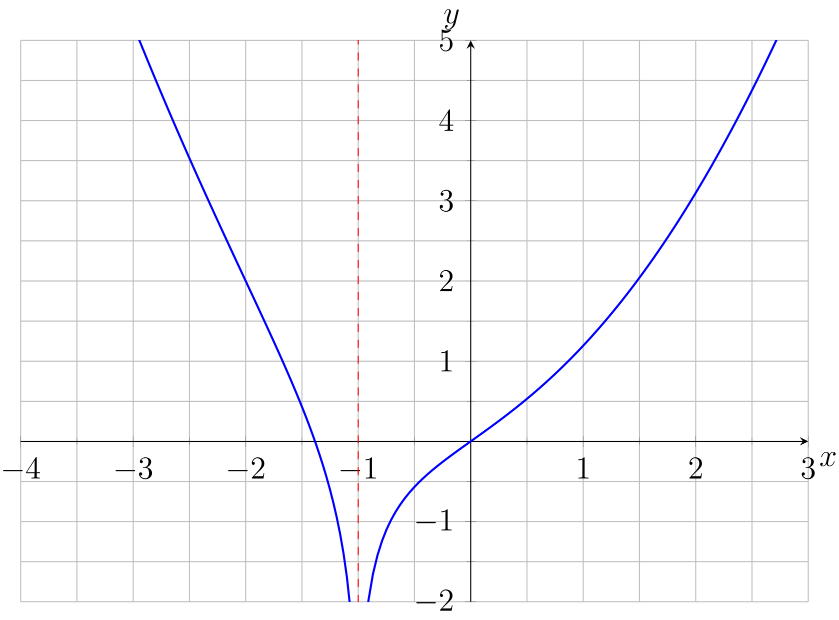
Interpretazione: Vicino a $x = -1$, la funzione schizza verso l'alto. Dato che va a $+\infty$ anche agli estremi del dominio ($\pm\infty$), la funzione ha la forma di una "W" (o due parabole con un asintoto centrale che va in alto). La funzione ha dei minimi assoluti finiti e non va mai a $-\infty$. **Conclusione:** La funzione **È limitata inferiormente**.

Risposta Finale La funzione è limitata inferiormente se e solo se:

$$a \in (0,1)$$

Es. 20: $f(x) = \frac{x^2}{2} + \log_a |x+1|$

Grafico per $a = e$ (base naturale). Asintoto verticale in $x = -1$. La parabola domina all'infinito.



21. Convessità Logaritmica (Base variabile)

Testo: $f(x) = \log_{a^2}|x+1|$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$. Trovare a affinché f sia convessa.

1. Riscrittura e Derivate Usiamo la formula del cambio di base per portare tutto in logaritmo naturale (più facile da derivare):

$$f(x) = \frac{\ln|x+1|}{\ln(a^2)}$$

Poniamo la costante $K = \frac{1}{\ln(a^2)}$.

$$f'(x) = K \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = K \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{-1}{(x+1)^2 \ln(a^2)}$$

2. Studio del Segno di f'' Affinché la funzione sia **convessa**, deve essere $f''(x) > 0$ in tutto il dominio. Analizziamo i termini della frazione:

- Il numeratore è -1 (sempre Negativo).
- Il termine $(x+1)^2$ è un quadrato (sempre Positivo).

Quindi, per avere il risultato finale Positivo (> 0), il termine $\ln(a^2)$ deve essere necessariamente **Negativo** (così $\frac{-}{-} = +$).

3. Risoluzione della Disequazione

$$\ln(a^2) < 0$$

$$0 < a^2 < 1$$

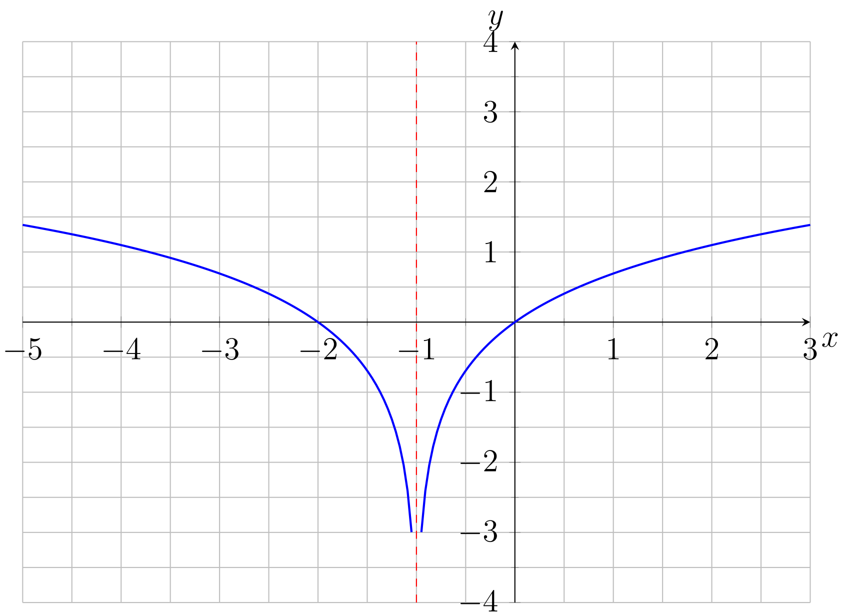
Risolvendo rispetto ad a:

$$-1 < a < 1$$

Ricordando le condizioni del testo ($a \neq 0$), la soluzione finale è:

$$a \in (-1, 1) \setminus \{0\}$$

Interpretazione Grafica: Normalmente il logaritmo ($\ln x$) è concavo (curva verso il basso). Quando la base è tra 0 e 1, il logaritmo si ribalta rispetto all'asse x, diventando convesso (curva verso l'alto, come una rampa da skate).
Es. 21: $f(x) = \log_{a^2} |x + 1|$
Funzione simmetrica rispetto all'asintoto verticale $x = -1$. L'uso di a^2 garantisce che la base sia positiva.



22. Logaritmo Composto

Testo: $f(x) = \ln x - \ln(\ln x)$. Determinare le soluzioni di $f(x) = \lambda$.
1. Dominio Devono essere validi entrambi i logaritmi:

1. Argomento interno: $x > 0$.
2. Argomento esterno: $\ln x > 0 \implies x > 1$.

Dominio: $D = (1, +\infty)$.
2. Limiti

- $\lim_{x\to 1^+}[\ln x - \ln(\ln x)] = 0 - (-\infty) = +\infty$. (Asintoto Verticale in $x = 1$).
- $\lim_{x\to +\infty}[\ln x - \ln(\ln x)]$. Forma indeterminata $\infty - \infty$. Raccogliamo il termine dominante ($\ln x$):

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x \left(1 - \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)$$

Poiché $\ln x$ è infinito di ordine superiore rispetto a $\ln(\ln x)$, la frazione tende a 0. Risultato: $+\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$.

3. Derivata e Monotonia

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right) = \frac{\ln x - 1}{x \ln x}$$

Analizziamo il segno per $x > 1$ (dove il denominatore è positivo):

$$\ln x - 1 \geq 0 \implies \ln x \geq 1 \implies x \geq e$$

- $1 < x < e$: Funzione decrescente.
- $x = e$: Punto di **Minimo Assoluto**.
- $x > e$: Funzione crescente.

Valore del Minimo:

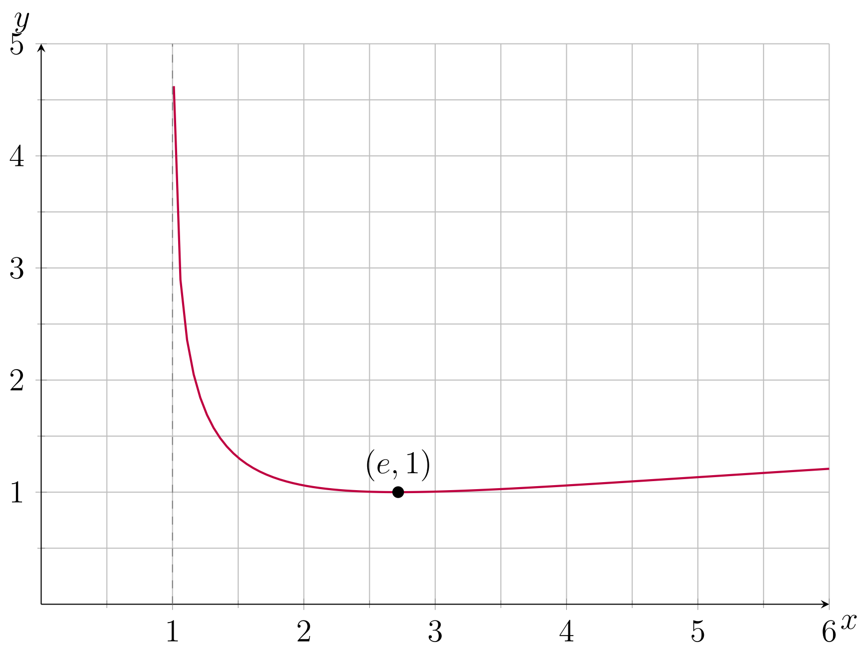
$$f(e) = \ln e - \ln(\ln e) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$$

Il punto di minimo è $M(e, 1)$.

4. Risoluzione parametrica $f(x) = \lambda$ Guardando il grafico (una "U" asimmetrica che parte dall'alto, tocca quota 1 e risale):

- **Se** $\lambda < 1$**:** Nessuna soluzione (la retta passa sotto il minimo).
- **Se** $\lambda = 1$**:** **1 soluzione** (tangenza nel minimo $x = e$).
- **Se** $\lambda > 1$**:** **2 soluzioni** (taglia sia il ramo discendente che quello ascendente).

Es. 22: $f(x) = \ln x - \ln(\ln x)$
Dominio: $x > 1$. *Asintoto verticale in* $x = 1$. *Minimo assoluto in* $x = e$ *dove* $y = 1$.



23. Razionale Logaritmica (Il Quadrato Nascosto)

Testo: $f(x) = \frac{1}{\log^2 x} - \frac{2}{\log x} + 1$ per $x \in]0, 8[\setminus \{1\}$.

1. Semplificazione Algebrica (Il Trucco) Riconosciamo la struttura di un quadrato perfetto ($A^2 - 2A + 1$):

$$f(x) = \left(\frac{1}{\log x} - 1\right)^2$$

Questa forma ci dice subito due cose importantissime:

- **Segno:** Essendo un quadrato, $f(x) \geq 0$ sempre!
- **Zeri:** $f(x) = 0 \iff \frac{1}{\log x} = 1 \iff \log x = 1 \iff x = e$.

2. Limiti

- $x \to 0^+$: $\log x \to -\infty$. I termini $\frac{1}{\infty}$ vanno a 0.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = (0 - 1)^2 = 1$$

La funzione parte dal punto $(0, 1)$ (buco nel dominio).

- $x \to 1$: $\log x \to 0$.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\to 0} - 1\right)^2 = (\infty)^2 = +\infty$$

Asintoto Verticale in $x = 1$.

3. Derivata Prima (Metodo Rapido) Deriviamo la forma al quadrato $f(x) = [(\log x)^{-1} - 1]^2$ usando la regola della catena $D[g(x)^2] = 2g(x)g'(x)$.

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{\log x} - 1\right) \cdot D\left[\frac{1}{\log x} - 1\right]$$

La derivata interna di $(\log x)^{-1}$ è $-(\log x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}$.

$$f'(x) = 2\left(\frac{1 - \log x}{\log x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x \log^2 x}\right)$$

Portiamo il "meno" nella prima parentesi per cambiare segno ($1 - \log x \to \log x - 1$):

$$f'(x) = \frac{2(\log x - 1)}{x \log^3 x}$$

4. Studio del Segno della Derivata Dominio $x \in (0, 8)$. Il termine x è sempre positivo. Studiamo $\frac{\log x - 1}{\log^3 x} \geq 0$.

- **Numeratore:** $\log x - 1 \geq 0 \implies \log x \geq 1 \implies x \geq e$.
- **Denominatore:** $\log^3 x > 0 \implies \log x > 0 \implies x > 1$.

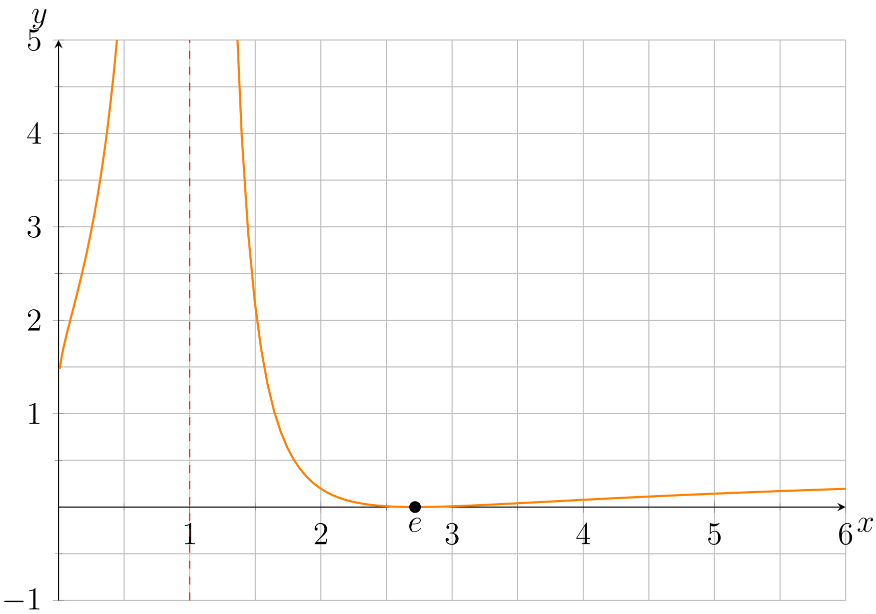
Tabella dei segni in $(0, 8)$:

x	0		1		e	
Num	$\|\|$	-	-	-	$+$	$+$
Den	$\|\|$	-	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	-	0	$+$

Comportamento:

- $0 < x < 1$: Cresce (da 1 a $+\infty$).
- $1 < x < e$: Decresce (da $+\infty$ a 0).
- $e < x < 8$: Cresce.
- **Minimo Assoluto:** In $x = e$ vale $f(e) = 0$.

Es. 23: $f(x) = \frac{1}{\log^2 x} - \frac{2}{\log x} + 1 = \left(\frac{1}{\log x} - 1\right)^2$
Sempre positiva. Asintoto verticale per $x = 1$. Si annulla (tocca l'asse) in $x = e$. Per $x \to 0^+$, tende a 1.



24. Razionale Logaritmica

Testo: $f(x) = \log\left(\frac{x-4}{x-6}\right)$.

1. Dominio Argomento del logaritmo > 0:

$$\frac{x-4}{x-6} > 0$$

Segni concordi (entrambi positivi o entrambi negativi):

$$D = (-\infty, 4) \cup (6, +\infty)$$

Attenzione: L'intervallo $(4, 6)$ è escluso

2. Limiti e Asintoti

- $x \to \pm\infty$: L'argomento tende a 1. $\log(1) = 0$. **Asintoto Orizzontale:** $y = 0$.

- $x \to 4^-$: L'argomento $\frac{0^-}{-2} = 0^+$. $\log(0^+) = -\infty$. **Asintoto Verticale:** $x = 4$.
- $x \to 6^+$: L'argomento $\frac{2}{0^+} = +\infty$. $\log(+\infty) = +\infty$. **Asintoto Verticale:** $x = 6$.

3. Derivata Prima Deriviamo come funzione composta $f(\text{arg})$:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-4}{x-6}} \cdot D\left[\frac{x-4}{x-6}\right] = \frac{x-6}{x-4} \cdot \frac{1(x-6) - 1(x-4)}{(x-6)^2}$$

Semplificando:

$$f'(x) = \frac{x-6}{x-4} \cdot \frac{-2}{(x-6)^2} = \frac{-2}{(x-4)(x-6)}$$

Nel dominio D, il prodotto $(x-4)(x-6)$ è sempre positivo (argomento del log). Il numeratore è negativo. **Monotonia:** $f'(x) < 0$ sempre. La funzione è **sempre decrescente** in entrambi i rami. Nessun massimo o minimo.

4. Derivata Seconda e Flessi Riscriviamo $f'(x) = -2(x^2 - 10x + 24)^{-1}$.

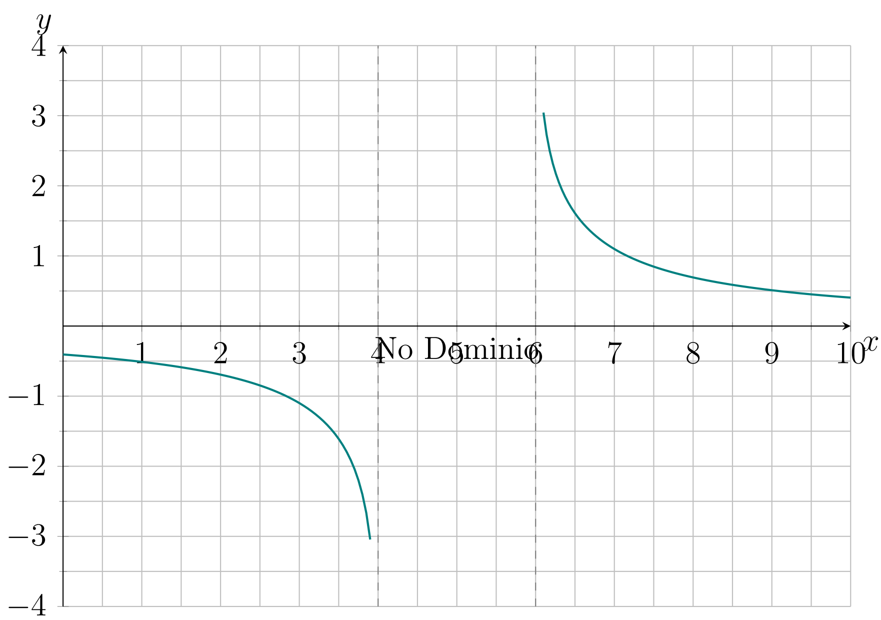
$$f''(x) = -2 \cdot (-1)(x^2 - 10x + 24)^{-2} \cdot (2x - 10)$$

$$f''(x) = \frac{4(x-5)}{[(x-4)(x-6)]^2}$$

Studio del segno: Il denominatore è positivo. Il segno dipende da $(x - 5)$.

- $f''(x) > 0$ se $x > 5$.
- $f''(x) < 0$ se $x < 5$.
- $f''(x) = 0$ in $x = 5$.

TRAPPOLA: Verrebbe da dire "Flesso in $x = 5$". Tuttavia, $x = 5$ **NON appartiene al dominio**. **Conclusione:** Non esistono punti di flesso. La concavità è verso il basso per $x < 4$ (triste) e verso l'alto per $x > 6$ (felice), ma il cambio avviene "nel vuoto".
Es. 24: $f(x) = \log\left(\frac{x-4}{x-6}\right)$
Il dominio esclude l'intervallo $[4, 6]$. *Asintoti verticali "inversi": a* $-\infty$ *per* $x \to 4^-$, *a* $+\infty$ *per* $x \to 6^+$.



25. Polo di Ordine 2

Testo: $f(x) = \frac{\log x}{(x-1)^2}$.

1. Dominio e Segno Dominio: $x > 0$ (log) e $x \neq 1$ (denom). $D = (0,1) \cup (1,+\infty)$. Segno:

- Il denominatore $(x-1)^2$ è sempre positivo.
- Il numeratore $\log x$ è positivo per $x > 1$ e negativo per $0 < x < 1$.

Quindi la funzione cambia segno in $x = 1$: negativa a sinistra, positiva a destra.

2. Limiti

- $x \to 0^+$: $\frac{-\infty}{1} = -\infty$. (Asintoto Verticale).
- $x \to 1$: Forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Usiamo Taylor per il logaritmo: $\log x \approx (x-1)$.

  $$f(x) \approx \frac{x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$$

  Vicino a 1 la funzione si comporta come un'iperbole semplice $1/y$, non come $1/y^2$.

  - $x \to 1^-$ (sinistra): $\frac{1}{0^-} = -\infty$.
  - $x \to 1^+$ (destra): $\frac{1}{0^+} = +\infty$.
- $x \to +\infty$: Vince la potenza al denominatore. $f(x) \to 0^+$.

3. Derivata Prima (Il Massimo Nascosto)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1)^2 - \log x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

Semplifichiamo un $(x-1)$ (fondamentale per non impazzire!):

$$f'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - 2\log x}{(x-1)^3} = \frac{x - 1 - 2x\log x}{x(x-1)^3}$$

4. Studio del Segno della Derivata Il denominatore $x(x-1)^3$ ha lo stesso segno di $(x-1)$. Il numeratore è $N(x) = x - 1 - 2x\log x$. Questo non si risolve analiticamente, ma si studia graficamente o per tentativi:

- Per $x > 1$: $N(x)$ è sempre negativo (la funzione x perde contro $x\log x$). Dato che il Denom è positivo $\implies f'(x) < 0$. La funzione decresce sempre a destra di 1.
- Per $0 < x < 1$: - $N(0) \to -1$. - $N(1) = 0$. - Facendo un rapido studio di $N(x)$, si vede che sale fino a un picco positivo e poi scende a 0. Quindi esiste un punto α (tra 0 e 1) dove il numeratore cambia segno.

Risultato Combinato in $(0,1)$: Il denominatore qui è **Negativo**.

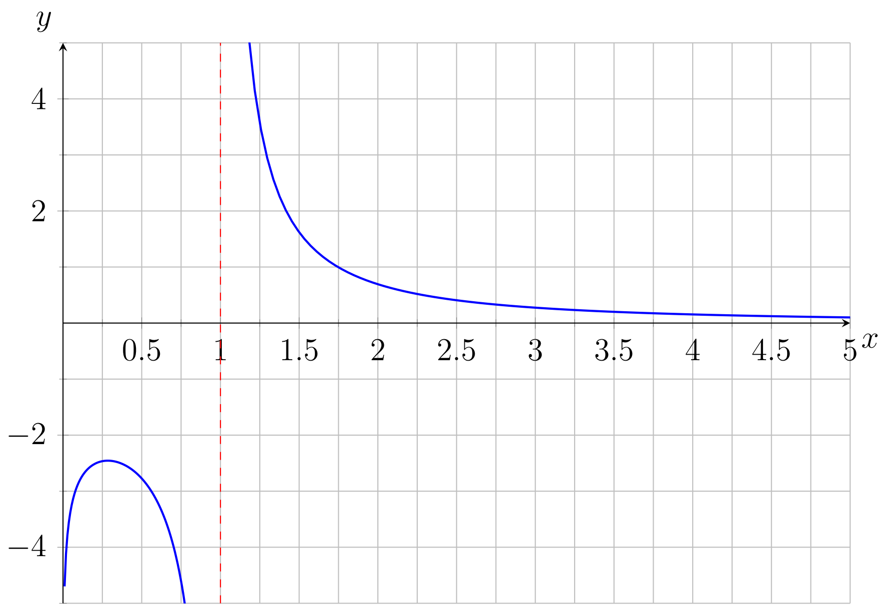
- Tra 0 e α: Num negativo / Den negativo $\implies f'(x) > 0$ (Cresce).
- Tra α e 1: Num positivo / Den negativo $\implies f'(x) < 0$ (Decresce).

C'è un **Massimo Relativo** in $x = \alpha$ (circa 0.5).

5. Grafico Qualitativo

- **Sinistra** $(0 < x < 1)$**:** La funzione parte da $-\infty$ (in 0), sale fino al Massimo α (che è un valore negativo, la funzione sta sempre sotto l'asse), e poi riscende a $-\infty$ (in 1). Forma a "U rovesciata".
- **Destra** $(x > 1)$**:** La funzione scende da $+\infty$ (asintoto) e va a 0 asintoticamente.

Es. 25: $f(x) = \frac{\log x}{(x-1)^2}$
Discontinuità in $x = 1$*. Il limite sx è* $-\infty$*, il limite dx è* $+\infty$*. A* $+\infty$ *tende a 0.*



26. Base Variabile

Testo: $f(x) = x^{\log x}$ con $x > 0$.

1. Trasformazione Fondamentale Usiamo l'identità $A^B = e^{B \ln A}$.

$$f(x) = e^{\log x \cdot \log x} = e^{(\log x)^2}$$

Ora la funzione è molto più amichevole: è un esponenziale con esponente al quadrato.

2. Limiti

- $x \to 0^+$: $\log x \to -\infty$. Quindi $(\log x)^2 \to +\infty$. Risultato: $e^{+\infty} = +\infty$. (Asintoto Verticale).
- $x \to +\infty$: $\log x \to +\infty$. Risultato: $e^{+\infty} = +\infty$. (Crescita molto rapida, super-lineare).

3. Derivata e Monotonia Deriviamo la forma composta $e^{g(x)}$ dove $g(x) = (\log x)^2$:

$$f'(x) = e^{(\log x)^2} \cdot D[(\log x)^2]$$

$$f'(x) = x^{\log x} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = 2x^{\log x - 1} \log x$$

Studio del segno:

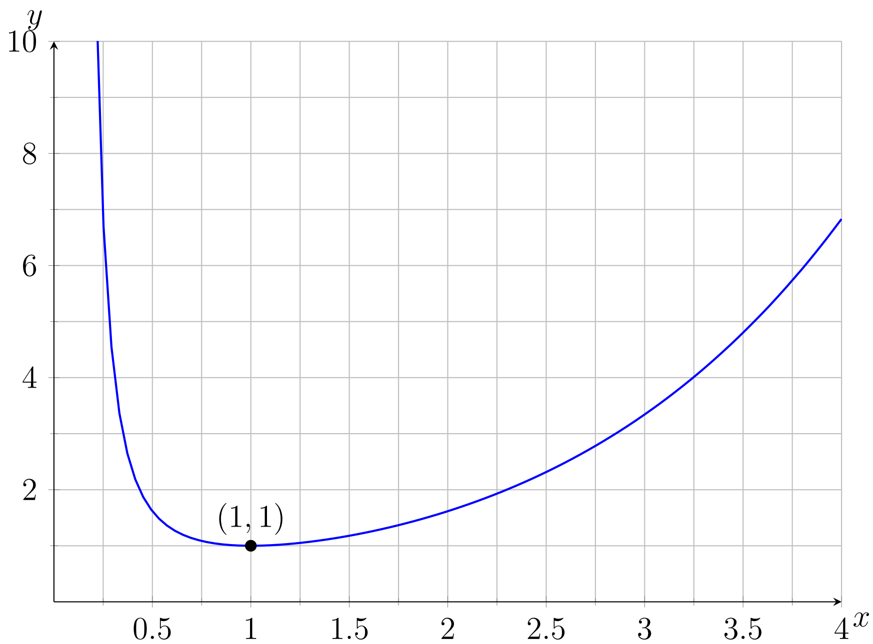
- $x^{\log x - 1}$ è un esponenziale $\implies$ Sempre Positivo.
- 2 è positivo.
- Il segno dipende solo da $\log x$.

$$f'(x) \geq 0 \iff \log x \geq 0 \iff x \geq 1$$

Conclusioni:

- $0 < x < 1$: La funzione decresce.
- $x = 1$: Punto di **Minimo Assoluto**. Valore: $f(1) = 1^{\log 1} = 1^0 = 1$. Il punto è $M(1, 1)$.
- $x > 1$: La funzione cresce.

Grafico: È una curva a forma di "U" (simile a una parabola ma asimmetrica) che sta tutta sopra la retta $y = 1$. Non tocca mai l'asse y (asintoto) e va all'infinito a destra.
Es. 26: $f(x) = x^{\log x} = e^{(\ln x)^2}$
Dominio $x > 0$. *La funzione è sempre* ≥ 1. *Ha un minimo assoluto in* $(1, 1)$. *Cresce molto rapidamente per* $x \to +\infty$ *e per* $x \to 0^+$.



27. Singolarità Essenziale

Testo: $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x^2-1}}$ per $x \neq \pm 1$.
1. Segno

- L'esponenziale è sempre positivo (> 0).
- Il segno dipende solo da $(x - 1)$.
- $f(x) > 0$ per $x > 1$.

- $f(x) < 0$ per $x < 1$ (nel dominio).

2. Limiti agli estremi del dominio (Il cuore del problema) Qui bisogna fare molta attenzione ai segni dell'esponente.

$$\text{Esponente: } E(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

Punto $x = 1$:

- $x \to 1^+$: $E(x) \to \frac{1}{0^+} = +\infty$.

$$f(x) = 0^+ \cdot e^{+\infty} \quad (\text{Forma } 0 \cdot \infty)$$

  Vince l'esponenziale (gerarchia degli infiniti). L'esponenziale di $1/(x-1)$ esplode molto più velocemente di quanto il termine lineare $(x-1)$ vada a zero.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \quad (\text{Asintoto Verticale})$$

- $x \to 1^-$: $E(x) \to \frac{1}{0^-} = -\infty$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0^- \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$

  A sinistra di 1 la funzione non ha asintoto, ma "muore" in 0.

Punto $x = -1$:

- $x \to -1^+$: $E(x) \to \frac{1}{(-2)(0^+)} = -\infty$.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = (-2) \cdot e^{-\infty} = -2 \cdot 0 = 0$$

  La funzione parte da 0.

- $x \to -1^-$: $E(x) \to \frac{1}{(-2)(0^-)} = +\infty$.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = (-2) \cdot e^{+\infty} = -\infty \quad (\text{Asintoto Verticale})$$

3. Comportamento all'Infinito (Asintoto Obliquo) Per $x \to \pm\infty$, abbiamo la forma $\infty \cdot 1 = \infty$. Cerchiamo l'asintoto obliquo $y = mx + q$.

- $m = \lim \frac{f(x)}{x} = 1$.
- $q = \lim[f(x) - x]$. Usiamo **Taylor** per fare prima! Ricordiamo che $e^t \approx 1 + t$ per $t \to 0$. Qui $t = \frac{1}{x^2-1}$.

$$f(x) \approx (x-1)\left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right) = (x-1) + \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

  Semplifichiamo:

$$f(x) \approx x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

  Per $x \to \infty$, l'ultimo termine svanisce. Restano i termini dell'asintoto: $y = x - 1$.

4. Derivata Prima

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \cdot \left[1 + (x-1) \cdot \frac{-2x}{(x^2-1)^2}\right]$$

Semplificando un $(x-1)$ nel secondo termine:

$$f'(x) = e^{\cdots} \left[1 - \frac{2x}{(x-1)(x+1)^2}\right]$$

Facendo il denominatore comune, al numeratore esce un polinomio di terzo grado:

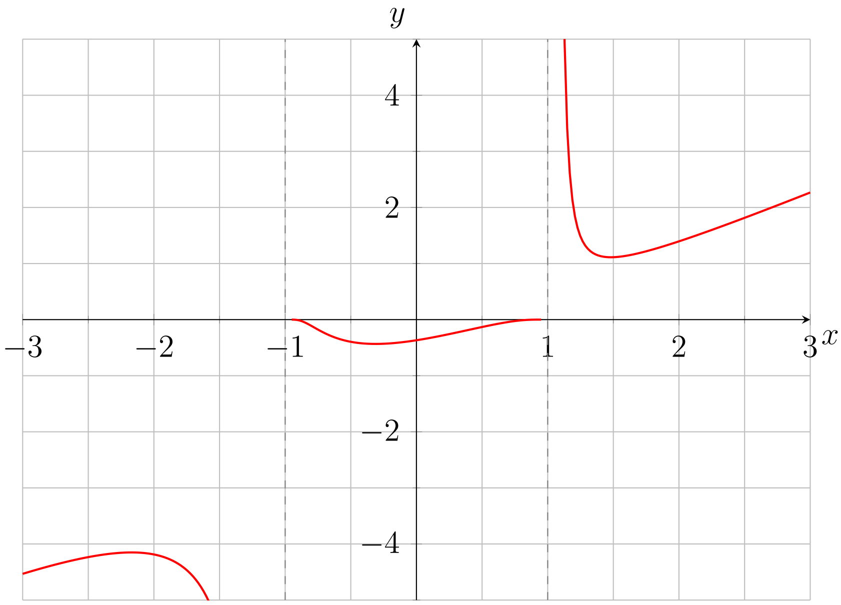
$$N(x) = x^3 + x^2 - 3x - 1$$

Non risolvibile elementarmente, ma studiando il segno si nota che ha 3 radici reali: $x_1 \approx -2.1$ (Max relativo), $x_2 \approx -0.3$ (Min relativo), $x_3 \approx 1.5$ (Min relativo).

Grafico Qualitativo:

- $x < -1$: Sale fino al Max (x_1), poi scende a $-\infty$ lungo l'asintoto verticale.
- $-1 < x < 1$: Parte da 0, scende al Min (x_2), risale a 0. (Tutto negativo).
- $x > 1$: Scende da $+\infty$ fino al Min (x_3), poi risale seguendo l'asintoto obliquo.

Es. 27: $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x^2-1}}$
Comportamento asimmetrico agli asintoti. Per $x \to 1^-$, l'esponente va a $-\infty$ e $f \to 0$. Per $x \to 1^+$, l'esponente va a $+\infty$ e $f \to +\infty$.



28. Torre di Logaritmi (Modulo in Esponente)

Testo: $f(x) = |\log x|^{\log x}$ con $x > 0$.

1. Riscrittura Esponenziale

$$f(x) = e^{\log x \cdot \log|\log x|}$$

Il dominio esclude i punti dove l'argomento del log interno è 0: $|\log x| > 0 \implies x \neq 1$. $D = (0,1) \cup (1, +\infty)$.

2. Limiti

- $x \to 0^+$: $\log x \to -\infty$. Esponente: $(-\infty) \cdot \log(+\infty) = -\infty$. $f(x) = e^{-\infty} = 0$. (La funzione parte dall'origine).
- $x \to 1$: $\log x \to 0$. Esponente: $0 \cdot (-\infty)$. Forma indeterminata. Usiamo il limite notevole $t \log t \to 0$ per $t \to 0$. Qui l'esponente tende a 0. $f(x) \to e^0 = 1$. (Discontinuità eliminabile in $x = 1$, "buco" nel grafico).
- $x \to +\infty$: $\log x \to +\infty$. Esponente: $+\infty \cdot +\infty = +\infty$. $f(x) \to +\infty$.

3. Derivata Prima Deriviamo l'esponente $E(x) = \log x \cdot \log |\log x|$:

$$E'(x) = \frac{1}{x} \log |\log x| + \log x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}$$

Semplificando $\log x$:

$$E'(x) = \frac{\log |\log x| + 1}{x}$$

Derivata completa:

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{\log |\log x| + 1}{x}$$

4. Monotonia Poiché $f(x) > 0$ e $x > 0$, il segno dipende solo dal numeratore:

$$\log |\log x| + 1 \geq 0$$

$$\log |\log x| \geq -1 \implies |\log x| \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

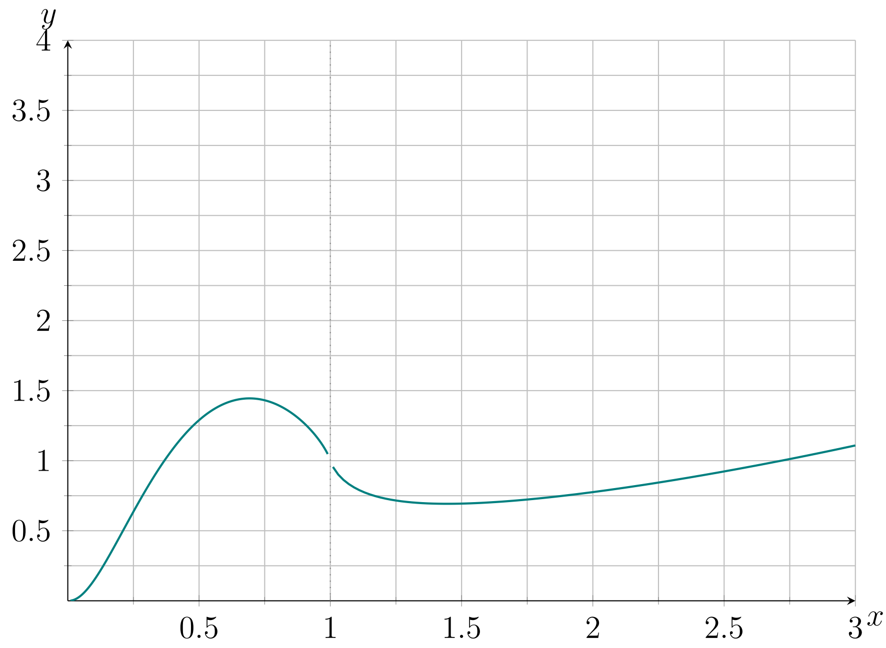
Sciogliamo il modulo (valori esterni):

- $\log x \geq \frac{1}{e} \implies x \geq e^{1/e}$
- $\log x \leq -\frac{1}{e} \implies x \leq e^{-1/e}$

Punti Critici:

- $M_1(e^{-1/e}, \dots)$ è un **Massimo Relativo** (prima di 1).
- $m_2(e^{1/e}, \dots)$ è un **Minimo Relativo** (dopo 1).

Il grafico fa una "gobba" tra 0 e 1, poi un buco in 1, poi scende un po' e risale per sempre.
Es. 28: $f(x) = |\log x|^{\log x}$
Definita per $x > 0, x \neq 1$. Per $x > 1$ cresce velocissima. Tra 0 e 1 ha un comportamento oscillante smorzato molto particolare.



29. Mista Log-Quadratico (Semplifica prima)

Testo: $f(x) = \frac{1-\log(x^2)}{\log^2 x}$.

1. Dominio e Semplificazione Condizioni: $x > 0$ (argomento log) e $\log x \neq 0 \implies x \neq 1$. $D = (0,1) \cup (1, +\infty)$.

Il Trucco: Sfruttiamo $\log(x^2) = 2\log x$.

$$f(x) = \frac{1 - 2\log x}{(\log x)^2}$$

Possiamo addirittura spezzare la frazione per derivare ancora più velocemente (facoltativo, ma comodo):

$$f(x) = \frac{1}{\log^2 x} - \frac{2}{\log x} = (\log x)^{-2} - 2(\log x)^{-1}$$

2. Limiti (sulla forma semplificata)

- $x \to 0^+$: $\log x \to -\infty$. $f(x) \approx \frac{-2(-\infty)}{(-\infty)^2} \to 0$. (Vince il quadrato al denominatore). La funzione parte da 0.
- $x \to 1$: $\log x \to 0$. Num $\to 1$, Den $\to 0^+$. $f(x) \to +\infty$. (Asintoto Verticale completo).
- $x \to +\infty$: $\log x \to +\infty$. Vince il grado del denominatore. $f(x) \to 0$.

3. Derivata Prima (Metodo Veloce) Usiamo la forma con le potenze negative: $f(x) = (\log x)^{-2} - 2(\log x)^{-1}$. Ricordando che $D[u^n] = nu^{n-1} \cdot u'$:

$$f'(x) = -2(\log x)^{-3} \cdot \frac{1}{x} - 2(-1)(\log x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}$$

Raccogliamo $\frac{2}{x}$ e mettiamo a fattor comune:

$$f'(x) = \frac{2}{x}\left[-\frac{1}{\log^3 x} + \frac{1}{\log^2 x}\right]$$

Denominatore comune $\log^3 x$:

$$f'(x) = \frac{2}{x}\left[\frac{-1+\log x}{\log^3 x}\right] = \frac{2(\log x - 1)}{x\log^3 x}$$

4. Studio del Segno Studiamo $f'(x) \geq 0$:

- $2/x > 0$ (sempre nel dominio).
- Num: $\log x - 1 \geq 0 \implies x \geq e$.
- Den: $\log^3 x > 0 \implies \log x > 0 \implies x > 1$.

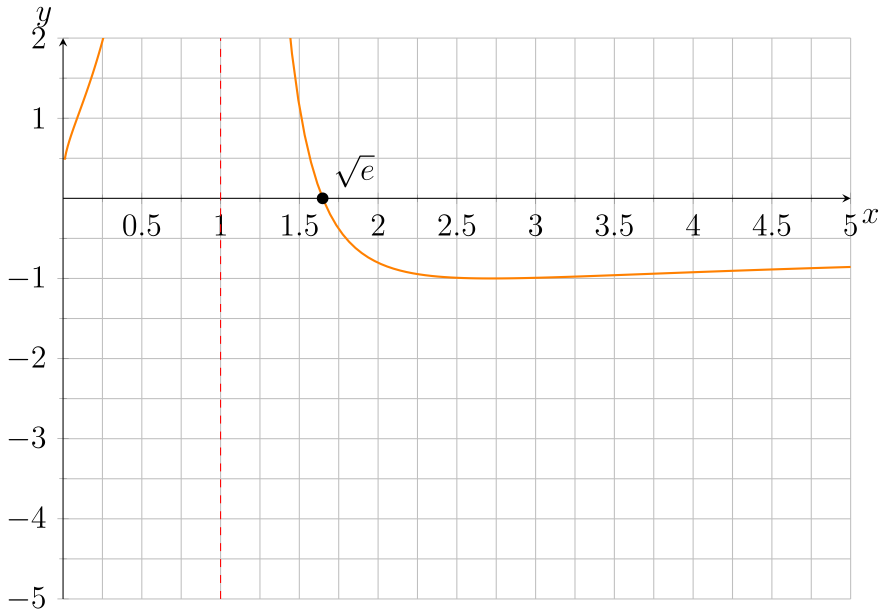
Tabella dei segni (tra 0 e $+\infty$):

- Tra 0 e 1: Num $(-)$ / Den $(-)$ $\implies$ **Positivo** (Cresce).
- Tra 1 e e: Num $(-)$ / Den $(+)$ $\implies$ **Negativo** (Decresce).
- Oltre e: Num $(+)$ / Den $(+)$ $\implies$ **Positivo** (Cresce).

Punto di Minimo: $x = e$. $f(e) = \frac{1-2(1)}{1^2} = -1$. Punto $m(e, -1)$.

Es. 29: $f(x) = \frac{1-\ln(x^2)}{\ln^2 x} = \frac{1-2\ln x}{(\ln x)^2}$

Dominio $x > 0, x \neq 1$. Si annulla in $x = \sqrt{e}$. Asintoto verticale in $x = 1$ (limite $-\infty$ da entrambi i lati).



30. Conteggio Estremi

Testo: Determinare il numero di massimi e minimi di $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\pi^x\right)$ su $[0, 2]$.

1. Analisi dell'Argomento Poniamo $t(x) = \frac{x}{2}\pi^x$ l'argomento del coseno. Studiamo la sua monotonia per capire "quanta strada fa".

$$t'(x) = \frac{1}{2}\pi^x + \frac{x}{2}\pi^x \ln\pi = \frac{1}{2}\pi^x(1 + x\ln\pi)$$

Per $x \in [0, 2]$, la derivata è sempre positiva ($t'(x) > 0$). L'argomento cresce strettamente (non oscillante).

2. Calcolo del Range (Il percorso)

- Start ($x = 0$): $t(0) = 0$.
- End ($x = 2$): $t(2) = \frac{2}{2}\pi^2 = \pi^2$.

Sapendo che $\pi \approx 3.14$, allora $\pi^2 \approx 9.86$. Quindi l'argomento varia nell'intervallo $[0, \approx 9.86]$.

3. Conteggio delle "Gobbe" (Stazionarietà) Il coseno ha:

- Massimi locali quando l'argomento è $2k\pi$ (multipli pari).
- Minimi locali quando l'argomento è $(2k+1)\pi$ (multipli dispari).
- In generale: Punti stazionari ($f'(x) = 0$) quando l'argomento è $k\pi$.

Elenchiamo i multipli di π che cadono nell'intervallo $[0, \pi^2]$ (cioè tra 0 e ≈ 9.86):

1. $k = 0 \implies t = 0$: $f(0) = \cos(0) = 1$. (**Punto di partenza - Max**).
2. $k = 1 \implies t = \pi$ (poiché $\pi \approx 3.14 < 9.86$): $f(x_1) = \cos(\pi) = -1$. (**Minimo**).
3. $k = 2 \implies t = 2\pi$ (poiché $2\pi \approx 6.28 < 9.86$): $f(x_2) = \cos(2\pi) = 1$. (**Massimo**).
4. $k = 3 \implies t = 3\pi$ (poiché $3\pi \approx 9.42 < 9.86$): $f(x_3) = \cos(3\pi) = -1$. (**Minimo**).
5. $k = 4 \implies t = 4\pi$ (poiché $4\pi \approx 12.56 > 9.86$): FUORI INTERVALLO.

4. Analisi dell'estremo finale ($x = 2$) L'argomento si ferma a $\pi^2 \approx 9.86$. L'ultimo punto critico era a $3\pi \approx 9.42$ (dove valeva -1). Da 9.42 a 9.86 l'argomento cresce, quindi il coseno sta risalendo da -1 verso l'alto. Il punto $x = 2$ è dunque un estremo superiore locale (un **Massimo** di bordo), anche se la derivata non è zero.

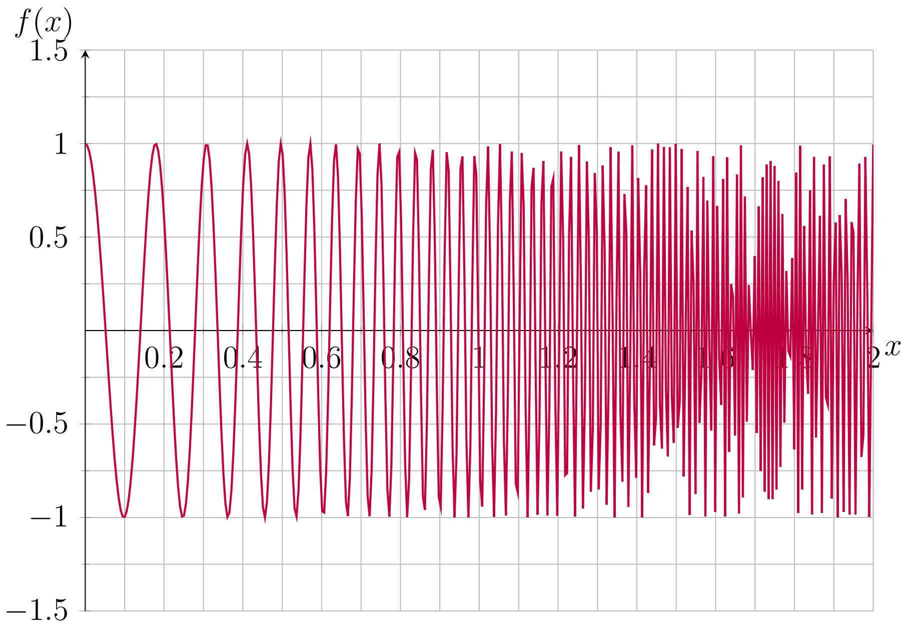
Risposta Finale:

- Punti a derivata nulla (interni): **3** (corrispondenti a $\pi, 2\pi, 3\pi$).
- Estremi totali (inclusi i bordi): **5** (Max, Min, Max, Min, Max).

Il grafico fa esattamente due oscillazioni complete e un pezzettino di risalita.

Es. 30: $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\pi^x\right)$ su $[0, 2]$

L'argomento del coseno cresce esponenzialmente, quindi le oscillazioni diventano sempre più frequenti man mano che ci si sposta a destra.



Consiglio: Il Metodo dell'Argomento (Trigonometria)

Quando dobbiamo trovare massimi e minimi di una funzione composta del tipo $f(x) = \sin(g(x))$ o $f(x) = \cos(g(x))$, non è sempre necessario calcolare la derivata completa.

La Regola d'Oro

Possiamo studiare direttamente l'andamento dell'argomento $t = g(x)$ se e solo se:

L'argomento $g(x)$ è strettamente MONOTONO nell'intervallo.

ovvero, se $g'(x)$ non cambia mai segno (è sempre positiva o sempre negativa).

Perché funziona?

La derivata completa è $f'(x) = \text{trig}'(g(x)) \cdot g'(x)$.

- Se $g'(x) > 0$ sempre (come per $e^x, \log x, \sqrt{x}$): Il segno di $f'(x)$ dipende **solo** dalla funzione trigonometrica esterna. L'argomento "corre in avanti" lungo l'onda. Basta vedere dove l'argomento tocca i picchi ($k\pi$).
- Se $g'(x)$ cambia segno (es. x^2 o polinomi che oscillano): Il termine $g'(x)$ diventa negativo in alcuni punti, invertendo il segno della derivata totale. Qui il metodo NON si può applicare ciecamente: bisogna fare la derivata completa.

Quando applicarlo

Usa questo metodo se l'argomento $g(x)$ è:

- Un esponenziale: π^x, e^{2x} (cresce sempre).
- Un logaritmo: $\ln x$ (cresce sempre).
- Una radice: $\sqrt{x}$ (cresce sempre).
- Una retta: $mx + q$ (monotona).
- Un prodotto di funzioni positive crescenti: $x \cdot e^x$ (per $x > 0$).

Esempio Pratico

Funzione: $f(x) = \cos(e^x)$.

1. Controllo argomento: $t = e^x$. È monotono? SÌ (cresce sempre).
2. Range: Se $x \in [0, 2]$, allora $t \in [1, e^2] \approx [1, 7.38]$.
3. Conto i picchi: Il coseno ha massimi a $0, 2\pi, \dots$ e minimi a $\pi, 3\pi, \dots$.
4. Controllo quali cadono in $[1, 7.38]$:
   - $\pi \approx 3.14$ (Minimo).
   - $2\pi \approx 6.28$ (Massimo).
5. Conclusione: C'è 1 Minimo e 1 Massimo interni. Fine.

Quando NON applicarlo

Se $f(x) = \cos(x^2 - x)$ su $[-2, 2]$. L'argomento è una parabola (scende e poi sale). La derivata interna $2x - 1$ cambia segno. Qui **DEVI** calcolare la derivata completa:

$$f'(x) = -\sin(x^2 - x) \cdot (2x - 1)$$

I punti stazionari saranno dati sia da $\sin(\dots) = 0$ CHE da $2x - 1 = 0$.

31. Trigonometria Razionale

Testo: $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x} + 1$ in $]0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$.

1. Semplificazione (Quadrato Perfetto) Riconosciamo la struttura $A^2 - 2A + 1$:

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sin x} - 1\right)^2 = \frac{(1 - \sin x)^2}{\sin^2 x}$$

Questo ci dice subito che $f(x) \geq 0$ e si annulla solo in $x = \pi/2$.

2. Derivata Prima Usiamo la forma con potenze negative: $f(x) = \sin^{-2} x - 2\sin^{-1} x + 1$.

$$f'(x) = -2\sin^{-3} x(\cos x) + 2\sin^{-2} x(\cos x)$$

$$f'(x) = \frac{2\cos x}{\sin^2 x} - \frac{2\cos x}{\sin^3 x} = \frac{2\cos x(\sin x - 1)}{\sin^3 x}$$

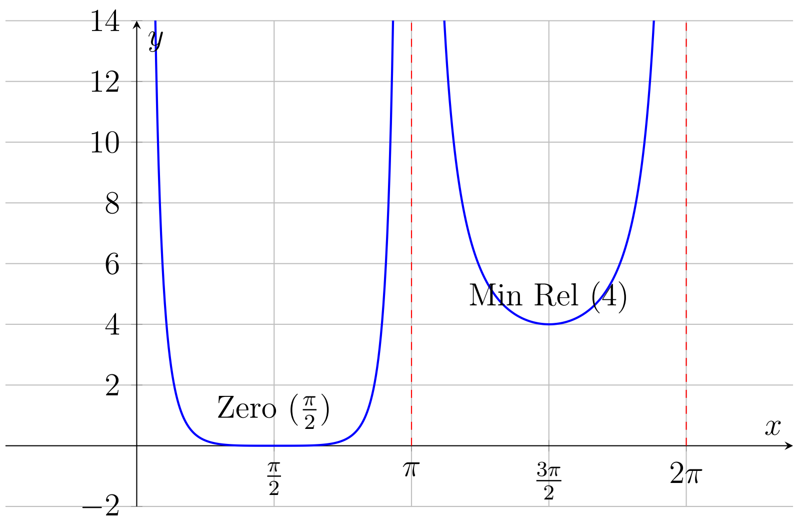
3. Studio del Segno Ricordando che $(\sin x - 1) \leq 0$ sempre:

- **Intervallo** $(0, \pi)$: $\sin^3 x > 0$. Il segno dipende da $\cos x \cdot$ (negativo). Quindi segno opposto al coseno: scende fino a $\pi/2$, poi sale. $\implies x = \pi/2$ è **Minimo** $(y = 0)$.
- **Intervallo** $(\pi, 2\pi)$: $\sin^3 x < 0$. Il segno dipende da $\frac{\cos x \cdot (\text{negativo})}{(\text{negativo})} = \cos x$. Quindi segno uguale al coseno: scende fino a $3\pi/2$ (dove cos cambia), poi sale. $\implies x = 3\pi/2$ è **Minimo** $(y = 4)$.

Grafico intuitivo: Una "U" che tocca zero a $\pi/2$, un asintoto verticale a π, e un'altra "U" più alta (che parte da altezza 4) a $3\pi/2$.

Grafico: $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x} + 1 = (\csc x - 1)^2$

Definita in $]0, 2\pi[$. Asintoti verticali per $x \to 0, \pi, 2\pi$. Minimo assoluto in $\pi/2$ e minimo relativo in $3\pi/2$.



32. Composizione e Flessi (Semplificazione Trigonometrica)

Testo: $f(x) = \sin(\arctan(x^3))$.

1. Semplificazione Algebrica (Fondamentale) Sfruttando il triangolo rettangolo con cateti t e 1, abbiamo $\sin(\arctan t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. Ponendo $t = x^3$, la funzione diventa puramente algebrica:

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^6}}$$

2. Derivata Prima

$$f'(x) = \frac{3x^2}{(1+x^6)^{3/2}}$$

Risulta $f'(x) \geq 0$ sempre. La funzione è strettamente crescente. In $x = 0$, $f'(0) = 0$, quindi è un punto a tangente orizzontale.

3. Derivata Seconda

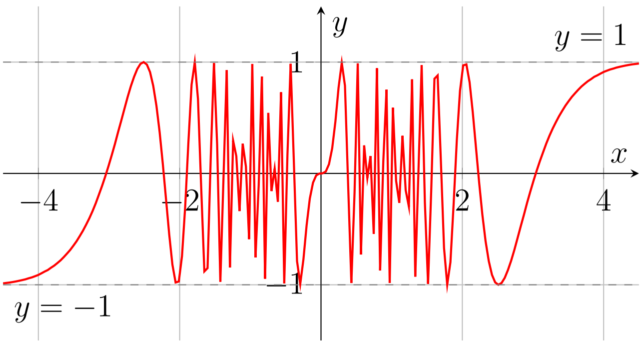
$$f''(x) = \frac{3x(2-7x^6)}{(1+x^6)^{5/2}}$$

I punti di flesso si hanno dove $f''(x)$ cambia segno:

- $x = 0$: Cambio segno del fattore x. (Flesso orizzontale).
- $2 - 7x^6 = 0 \implies x = \pm\sqrt[6]{2/7}$: Cambio segno della parentesi. (Flessi obliqui).

Grafico $f(x) = \sin(\arctan(x^3))$

Funzione dispari. Crescente su tutto il dominio. Asintoti orizzontali $y = \pm 1$. *Flesso orizzontale in* $(0, 0)$.



33. : Seno Composto (Studio Completo)

Testo: Studiare la funzione $f(x) = \sin(1 + x \ln x)$ nell'intervallo $x \in (0, e]$. *Nota:* $f(0) = 0$ *è dato come punto isolato o di partenza, ma studiamo il limite.*

1. Comportamento agli estremi

- **Limite per $x \to 0^+$:** Sappiamo che $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ (Gerarchia degli infiniti).

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \sin(1+0) = \sin(1) \approx 0.84$$

(La funzione parte da altezza 0.84, non da 0).

- **Valore in $x = e$:**

$$f(e) = \sin(1 + e \ln e) = \sin(1 + e) \approx \sin(3.71)$$

Poiché 3.71 è poco più di $\pi(\approx 3.14)$, siamo nel III quadrante (seno negativo). $f(e) \approx -0.5$.

2. Analisi dell'Argomento (Il Passo Cruciale)

Prima di derivare, studiamo "il viaggio" dell'argomento $g(x) = 1 + x \ln x$.

- $g'(x) = \ln x + 1$. Si annulla in $x = 1/e$.
- **Minimo dell'argomento:** In $x = 1/e$, $g(1/e) = 1 - 1/e \approx 0.63$.
- **Massimo dell'argomento:** In $x = e$, $g(e) = 1 + e \approx 3.71$.

Check dei Quadranti: L'argomento varia nell'intervallo $[0.63, 3.71]$. Questo intervallo contiene il valore critico $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ (e anche $\pi \approx 3.14$). **ATTENZIONE:** Significa che il coseno nella derivata **cambierà segno** anche se l'argomento continua a crescere!

3. Derivata Prima

$$f'(x) = \underbrace{\cos(1 + x \ln x)}_{\text{Segno variabile (Range)}} \cdot \underbrace{(\ln x + 1)}_{\text{Segno variabile (Log)}}$$

Studiamo i segni dei due fattori separatamente:
Fattore 1: Derivata Interna $(\ln x + 1)$

- $x < 1/e$: Negativo $(-)$
- $x > 1/e$: Positivo $(+)$

Fattore 2: Coseno $(\cos(g(x)))$ Dobbiamo vedere quando l'argomento $g(x)$ supera $\pi/2$. Essendo $g(x)$ crescente per $x > 1/e$, esiste un punto unico x_0 tale che:

$$1 + x_0 \ln x_0 = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$$

Poiché a destra $g(e) \approx 3.71$ (che è > 1.57), il coseno diventa negativo dopo x_0.

- Per $x < x_0$: Argomento nel I Quadrante $\implies$ $\cos > 0$ $(+)$.
- Per $x > x_0$: Argomento nel II/III Quadrante $\implies$ $\cos < 0$ $(-)$.

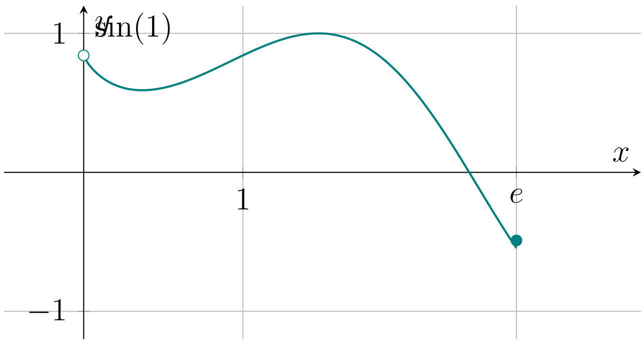
4. Tabella dei Segni Combinata

x	0	$\dots$	$1/e$	$\dots x_0 \dots$	e
Segno $(\ln x + 1)$		$-$	0	$+$	$+$
Argomento $g(x)$	$\searrow$	Decresce	Min	Cresce ($< \frac{\pi}{2}$)	Cresce ($> \frac{\pi}{2}$)
Segno $\cos(g(x))$		$+$	$+$	$+$	$-$
Segno Totale $f'(x)$		$-$	0	$+$	$-$

5. Conclusioni sui Punti Critici

- **Minimo Relativo in $x = 1/e$:** La derivata passa da $-$ a $+$. Valore: $y = \sin(1 - 1/e) \approx \sin(0.63) \approx 0.59$.
- **Massimo Relativo in $x = x_0$:** (Dove l'argomento vale $\pi/2$). La derivata passa da $+$ a $-$. Anche se non possiamo calcolare x_0 esatto (è circa 1.8), conosciamo l'altezza esatta:
$$y = f(x_0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
Questo è il punto più alto del grafico.

Sintesi Grafico: La funzione parte da $\sin(1)$, scende fino al minimo in $1/e$, risale fino al picco massimo 1 (in x_0), e poi scende fino a $f(e)$ diventando negativa.
Grafico $f(x) = \sin(1 + x\ln x)$ per $x \in (0, e]$
Il limite per $x \to 0^+$ è $\sin(1)$. Ha un minimo locale vicino all'origine, poi cresce fino a 1 e scende diventando negativa in e.



35: Oscillazioni (Metodo dell'Inviluppo)

Testo: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+|\sin x|}$ per $x \geq 0$.

1. Strategia:

Il calcolo diretto del segno della derivata porta a una disequazione trascendente irrisolvibile elementarmente. Procediamo per **maggiorazione e minorazione**.

Sappiamo che $0 \leq |\sin x| \leq 1$. Quindi:
$$1 \leq 1 + |\sin x| \leq 2$$
Passando ai reciproci e moltiplicando per $\sqrt{x}$ (che è ≥ 0), otteniamo la "gabbia":
$$\frac{\sqrt{x}}{2} \leq f(x) \leq \sqrt{x}$$

Interpretazione Grafica: La funzione $f(x)$ oscilla infinite volte rimanendo sempre compresa tra la parabola $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ e la parabola $y = \sqrt{x}$.

- **Punti di contatto col "Soffitto" ($y = \sqrt{x}$):** Avvengono quando $|\sin x| = 0 \implies x = k\pi$. In questi punti la funzione tocca il suo massimo locale "inviluppato".
- **Punti di contatto col "Pavimento" ($y = \frac{\sqrt{x}}{2}$):** Avvengono quando $|\sin x| = 1 \implies x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. In questi punti la funzione è schiacciata verso il basso.

2. Comportamento all'infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Tuttavia, non ci va in modo lineare, ma oscillando tra $\sqrt{x}$ e $\frac{\sqrt{x}}{2}$. Non esiste asintoto obliquo.

3. Analisi Qualitativa della Derivata

Per confermare l'oscillazione, calcoliamo la derivata (es. per $x \in (0, \pi)$ dove $\sin x > 0$):

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sin x}$$

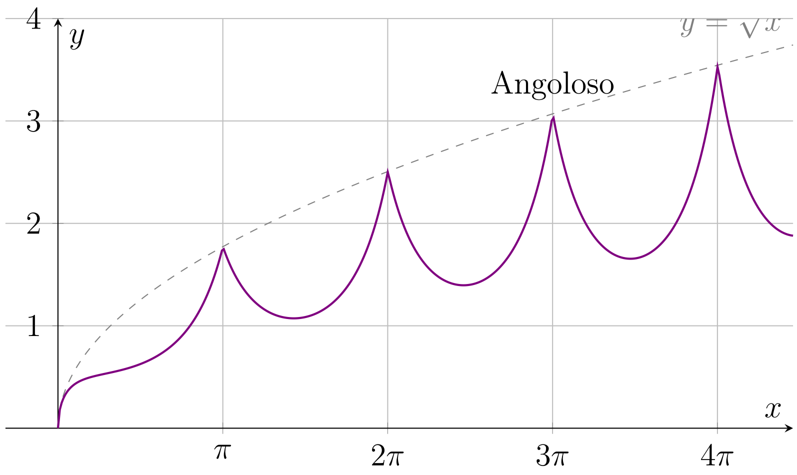
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sin x) - \sqrt{x}\cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{1 + \sin x - 2x \cos x}{2\sqrt{x}(1 + \sin x)^2}$$

Per x molto grandi ($x \to +\infty$), il termine dominante al numeratore è $-2x \cos x$.

- Poiché $\cos x$ continua a cambiare segno periodicamente, anche $f'(x)$ cambierà segno infinite volte.
- Questo conferma che ci sono **infiniti massimi e minimi locali** che si susseguono mentre la funzione sale verso infinito.

In questi esercizi, se si vedono termini limitati (seno/coseno) al denominatore e termini che crescono ($\sqrt{x}, x$) al numeratore, usare sempre il metodo del confronto invece della derivata **Grafico** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+|\sin x|}$ per $x \geq 0$

Funzione positiva che oscilla tra $\frac{\sqrt{x}}{2}$ *e* $\sqrt{x}$. *Presenta punti angolosi (cuspidi verso l'alto) in* $x = k\pi$ *dove tocca la parabola* $\sqrt{x}$.



36. Integrabilità e Asintoti

Testo: $f(x) = \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^6+1}}$. Esiste finito $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$?

1. Simmetria

Prima di tutto, controlliamo la parità.

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{\sqrt{(-x)^6 + 1}} = \frac{-x^3 + x}{\sqrt{x^6 + 1}} = -\frac{x^3 - x}{\sqrt{x^6 + 1}} = -f(x)$$

La funzione è **DISPARI** (simmetrica rispetto all'origine). Ci basterebbe studiarla per $x \geq 0$.

2. Comportamento all'infinito

Calcoliamo i limiti per vedere se la funzione "si spegne" a zero.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^6 + 1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(1 - 1/x^2)}{x^3\sqrt{1 + 1/x^6}} = 1$$

Dalla simmetria dispari:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

Conclusione sugli Asintoti:

- Asintoto orizzontale destro: $y = 1$.
- Asintoto orizzontale sinistro: $y = -1$.

3. Verdetto sull'Integrale

L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ richiede che l'area sottesa sia finita. Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \neq 0$, la funzione non è integrabile in senso generalizzato (l'area sotto la "coda" destra è infinita).

Risposta: L'integrale **non esiste finito** (Diverge).

---

se volessi fare la derivata?

Se si chiedesse i massimi/minimi locali, ecco come semplificare la "derivata mostruosa".

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 1)\sqrt{x^6 + 1} - (x^3 - x)\frac{3x^5}{\sqrt{x^6+1}}}{x^6 + 1}$$

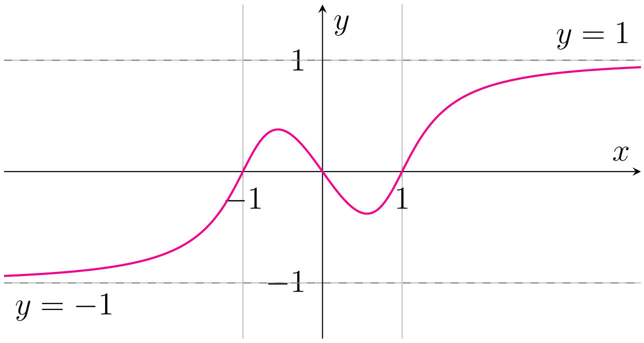
Moltiplico sopra e sotto per la radice $\sqrt{x^6 + 1}$ per pulire il numeratore:

$$\text{Num} = (3x^2 - 1)(x^6 + 1) - 3x^5(x^3 - x)$$

Sviluppando e semplificando i termini di grado 8 ($3x^8 - 3x^8$ si elidono):

$$\text{Num} = 2x^6 + 3x^2 - 1$$

Ponendo $t = x^2$, risolvi $2t^3 + 3t - 1 = 0$. C'è una soluzione reale positiva tra 0 e 1. **NON serviva per rispondere alla domanda sull'integrale**



37. Studio della Funzione: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

1. Dominio e Simmetrie

Il denominatore non deve annullarsi:

$$x^2 - 4 \neq 0 \implies x \neq \pm 2$$

Dominio: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

Controlliamo le simmetrie:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = f(x)$$

La funzione è **Pari** (simmetrica rispetto all'asse y). Basta studiarla per $x \geq 0$.

2. Segno della funzione

Poniamo $f(x) \geq 0$:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \geq 0$$

Studio del segno (Numeratore e Denominatore):

- $N \geq 0 \implies x^2 - 1 \geq 0 \implies x \leq -1 \vee x \geq 1$
- $D > 0 \implies x^2 - 4 > 0 \implies x < -2 \vee x > 2$

x		-2		-1		1		2	
Num	+	+	+	0	-	0	+	+	+
Den	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	+	$\nexists$	**-**	**0**	+	**0**	**-**	$\nexists$	+

Intersezioni con gli assi:

- Asse x ($f(x) = 0$): $x = \pm 1$
- Asse y ($x = 0$): $f(0) = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

3. Limiti e Asintoti

Agli estremi del dominio ($\pm\infty$):

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = 1$$

C'è un **Asintoto Orizzontale** $y = 1$.

Nei punti di discontinuità ($x = \pm 2$):

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

C'è un **Asintoto Verticale** in $x = 2$ (e per simmetria in $x = -2$).

4. Derivata Prima e Monotonia

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - (x^2-1)(2x)}{(x^2-4)^2}$$

Svolgendo i calcoli al numeratore:

$$2x^3 - 8x - (2x^3 - 2x) = 2x^3 - 8x - 2x^3 + 2x = -6x$$

Quindi:

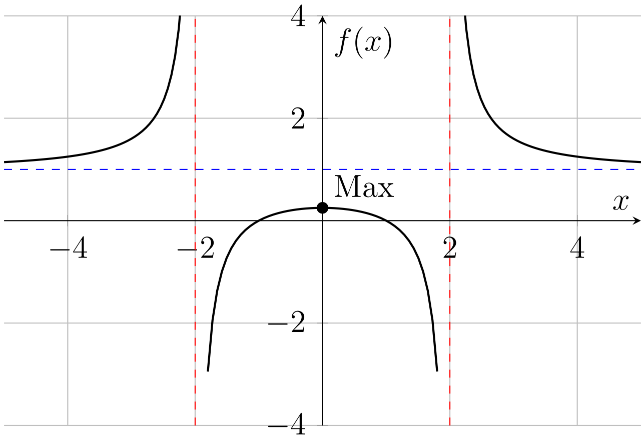
$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2-4)^2}$$

Studiamo il segno di $f'(x) \geq 0$:

- Num: $-6x \geq 0 \implies x \leq 0$
- Den: $(x^2-4)^2 > 0$ sempre nel dominio.

La funzione è:

- **Crescente** per $x < 0$ (e $x \neq -2$).
- **Decrescente** per $x > 0$ (e $x \neq 2$).
- **Massimo Relativo** in $M(0, \frac{1}{4})$.



38. Invertibilità Locale

Testo: $f(x) = \frac{x^3+x^2+10x+1}{x^2+1}$.

1. Trovare il più grande intervallo contenente l'origine ($x = 0$) dove f è invertibile.
2. Calcolare $(f^{-1})'(1)$.

1. Studio della Derivata Prima

Per determinare l'invertibilità, cerchiamo gli intervalli di **stretta monotonia** (dove $f'(x)$ ha segno costante). Calcoliamo la derivata con la regola del quoziente:

$$f'(x) = \frac{D[Num] \cdot Den - Num \cdot D[Den]}{(Den)^2}$$

Dove:

- $D[Num] = 3x^2 + 2x + 10$
- $D[Den] = 2x$

Sostituendo:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x + 10)(x^2 + 1) - (x^3 + x^2 + 10x + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

Semplificazione algebrica: Svolgiamo i calcoli al numeratore per vedere cosa si cancella.

$$N(x) = (3x^4 + 3x^2 + 2x^3 + 2x + 10x^2 + 10) - (2x^4 + 2x^3 + 20x^2 + 2x)$$

Raggruppiamo per potenze:

- x^4: $3x^4 - 2x^4 = \mathbf{x^4}$
- x^3: $2x^3 - 2x^3 = \mathbf{0}$ (Si cancellano!)
- x^2: $3x^2 + 10x^2 - 20x^2 = \mathbf{-7x^2}$
- x: $2x - 2x = \mathbf{0}$ (Si cancellano!)
- Costanti: **10**

La derivata semplificata è:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 7x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$$

2. Ricerca dell'Intervallo di Invertibilità

Studiamo il segno di $f'(x) \geq 0$. Poiché il denominatore è un quadrato (sempre positivo), studiamo solo il numeratore:

$$x^4 - 7x^2 + 10 \geq 0$$

Poniamo $t = x^2$ (equazione biquadratica):

$$t^2 - 7t + 10 \geq 0$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono $t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \implies t = 2, t = 5$. La disequazione è verificata per valori esterni:

$$t \leq 2 \quad \cup \quad t \geq 5$$

Torniamo alla variabile x:

- $x^2 \leq 2 \implies -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$
- $x^2 \geq 5 \implies x \leq -\sqrt{5} \cup x \geq \sqrt{5}$

Scelta dell'Intervallo: La funzione è crescente (quindi invertibile) in tre zone separate. Il testo chiede l'intervallo **contenente l'origine** ($x = 0$). L'unico intervallo tra questi che include lo 0 è $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

$\boxed{\text{Intervallo di invertibilità: } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}$

3. Calcolo della Derivata dell'Inversa

Vogliamo calcolare $(f^{-1})'(y_0)$ con $y_0 = 1$. Usiamo il Teorema della Derivata della Funzione Inversa:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dove x_0 è il punto tale che $f(x_0) = y_0 = 1$.

Passo A: Trovare x_0 Risolviamo l'equazione $f(x) = 1$:

$$\frac{x^3 + x^2 + 10x + 1}{x^2 + 1} = 1$$

$$x^3 + x^2 + 10x + 1 = x^2 + 1$$

Semplificando x^2 e 1 da entrambi i lati:

$$x^3 + 10x = 0 \implies x(x^2 + 10) = 0$$

Poiché $x^2 + 10$ non è mai zero, l'unica soluzione è $\mathbf{x_0 = 0}$. (Nota: 0 appartiene al nostro intervallo di invertibilità, quindi è accettabile).

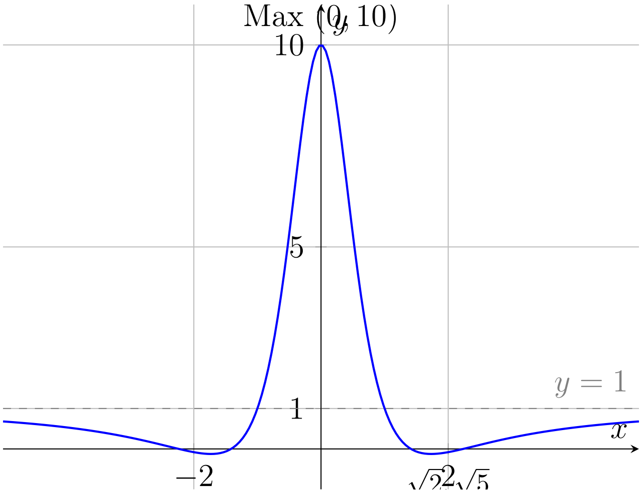
Passo B: Calcolare $f'(0)$ Usiamo la formula della derivata trovata al punto 1:

$$f'(0) = \frac{0^4 - 7(0)^2 + 10}{(0^2 + 1)^2} = \frac{10}{1} = 10$$

Passo C: Conclusione

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(1) = \frac{1}{10}}$$



39. Studio Misto e Integrale Improprio

Funzione: $f(x) = \frac{e^x(5x-3)}{x^2+2x-3}$.

1. Dominio (Fondamentale per l'integrale)

Denominatore $\neq 0$:

$$x^2 + 2x - 3 \neq 0 \implies (x+3)(x-1) \neq 0$$

Dominio: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.

2. Derivata Prima (Gestione dei calcoli)

Usiamo la regola del quoziente.

- **Derivata Numeratore (N'):** Usiamo la regola del prodotto su $e^x(5x-3)$. Ricorda il trucco: $D[e^x \cdot P(x)] = e^x(P(x) + P'(x))$.

$$N' = e^x(5x - 3 + 5) = e^x(5x + 2)$$

- **Derivata Denominatore (D'):**

$$D' = 2x + 2$$

Componiamo la frazione:

$$f'(x) = \frac{e^x(5x+2)(x^2+2x-3) - e^x(5x-3)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}$$

Semplificazione Intelligente: Raccogliamo e^x a fattor comune totale al numeratore **prima** di fare le moltiplicazioni.

$$\text{Num} = e^x\Big[\underbrace{(5x+2)(x^2+2x-3)}_{\text{Blocco A}} - \underbrace{(5x-3)(2x+2)}_{\text{Blocco B}}\Big]$$

Svolgiamo i conti dentro la parentesi quadra:

- **Blocco A:** $5x^3 + 10x^2 - 15x + 2x^2 + 4x - 6 = 5x^3 + 12x^2 - 11x - 6$
- **Blocco B:** $10x^2 + 10x - 6x - 6 = 10x^2 + 4x - 6$

Sottraiamo $(A - B)$:

- x^3: $5x^3$
- x^2: $12x^2 - 10x^2 = \mathbf{2x^2}$
- x: $-11x - 4x = \mathbf{-15x}$
- Costanti: $-6 - (-6) = \mathbf{0}$ (Si cancellano)

Derivata finale:

$$f'(x) = \frac{e^x(5x^3 + 2x^2 - 15x)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{x \cdot e^x(5x^2 + 2x - 15)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

3. Studio del Segno (Max/Min)

e^x e il denominatore quadrato sono sempre positivi. Studiamo solo:

$$x(5x^2 + 2x - 15) \geq 0$$

- Fattore 1: $x \geq 0$.
- Fattore 2: $5x^2 + 2x - 15 \geq 0$. Radici: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-5(-15)}}{5} = \frac{-1\pm\sqrt{76}}{5} \approx \frac{-1\pm 8.7}{5}$. Valori approx: $x \approx 1.5$ e $x \approx -1.9$.

---

4. Integrale Improprio (Trappola)

Testo: $\int_{-\infty}^{-2} f(x)\,dx$. Guardiamo l'intervallo di integrazione: $(-\infty, -2]$.

Controlliamo i punti critici nel dominio: Il dominio esclude $x = -3$ e $x = 1$. Notiamo che $\mathbf{x = -3}$ cade DENTRO l'intervallo di integrazione! L'integrale va spezzato:

$$\int_{-\infty}^{-3} f(x)dx + \int_{-3}^{-2} f(x)dx$$

Analisi Asintotica locale ($x \to -3$): Sostituiamo $x = -3$ nella parte "tranquilla" della funzione per vedere come si comporta la singolarità.

$$f(x) = \frac{e^x(5x - 3)}{(x + 3)(x - 1)}$$

Per $x \to -3$:

- Numeratore $\to e^{-3}(-15 - 3) \approx$ numero finito $\neq 0$.
- Denominatore (parte $x - 1$) $\to -4$.
- Denominatore (parte $x + 3$) $\to 0$ (infinitesimo di ordine 1).

Quindi:

$$f(x) \sim \frac{C}{x+3}$$

L'infinito è di **ordine 1**. Poiché l'ordine $\alpha = 1 \geq 1$, l'integrale **DIVERGE** in prossimità dell'asintoto verticale.

Conclusione: Non serve nemmeno guardare cosa succede a $-\infty$. Basta che diverga in un punto ($x = -3$) perché tutto l'integrale diverga. $\boxed{\text{L'integrale DIVERGE positivamente.}}$