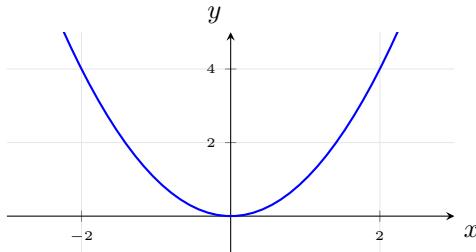


Formulario Analisi 1: Grafici Fondamentali

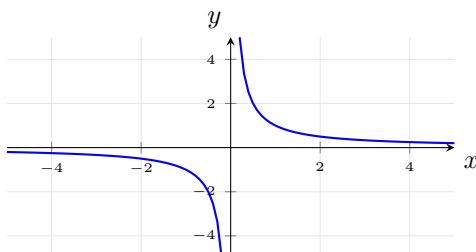
1. Potenze e Razionali

Parabola: $y = x^2$ (Pari)



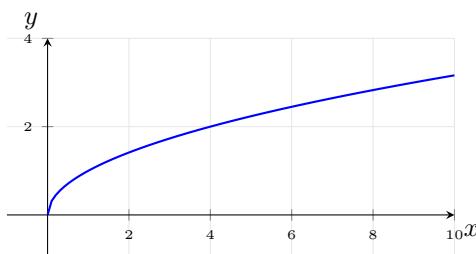
$D : \mathbb{R}$, $Im : [0, +\infty)$. Convessa \cup .

Iperbole Equilatera: $y = 1/x$ (Dispari)



$D : \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Asintoti: $x = 0, y = 0$.

Radice Quadrata: $y = \sqrt{x}$

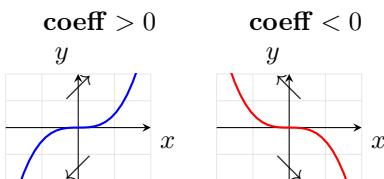


$D : [0, +\infty)$. Derivata verticale in 0.

2. Polinomi (Comportamento)

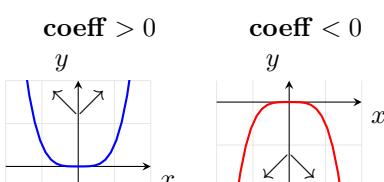
Grado DISPARI ($x^3, x^5 \dots$)

Uno su, uno giù.



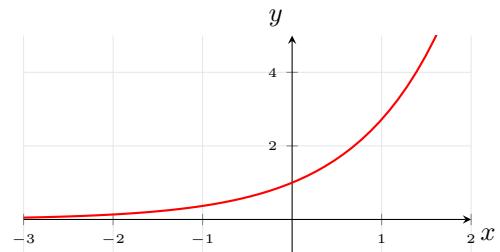
Grado PARI ($x^4, x^6 \dots$)

Entrambi stessa direzione.



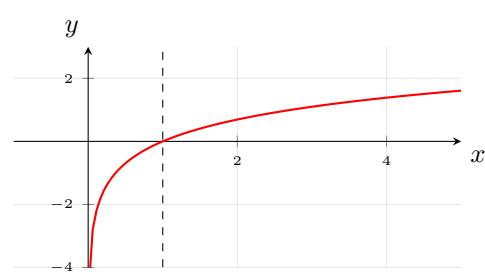
3. Esponenziali e Logaritmi

Esponenziale: $y = e^x$



$Im : (0, +\infty)$. Cresce velocissima.

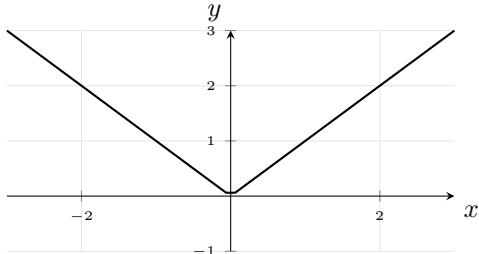
Logaritmo: $y = \ln(x)$



$D : (0, +\infty)$. Asintoto vert: $x = 0$.

4. Valore Assoluto

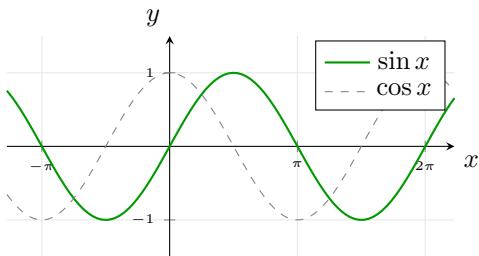
$y = |x|$ (Pari)



$f(x) = x$ se $x \geq 0$, $-x$ se $x < 0$. Non derivabile in $x = 0$ (Punto angoloso).

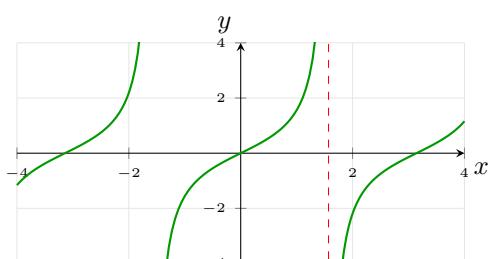
5. Trigonometria

Seno e Coseno



Periodo 2π . Sin dispari, Cos pari.

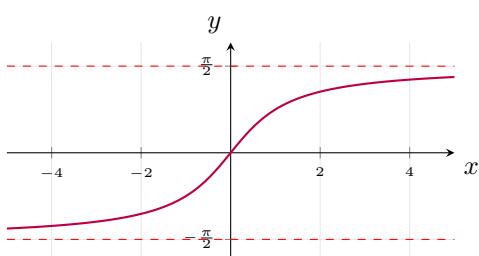
Tangente: $y = \tan(x)$



Asintoti vert: $\pm \frac{\pi}{2}$. Periodo π .

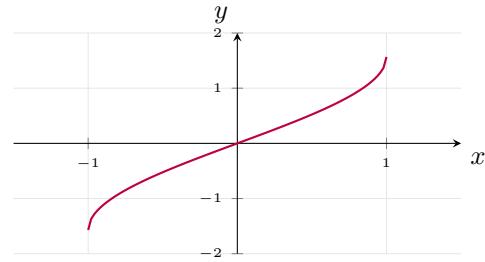
6. Inverse (Fondamentali)

Arcotangente: $y = \arctan(x)$ (!)



$D : \mathbb{R}$. Asintoti Orizz: $y = \pm \frac{\pi}{2}$.

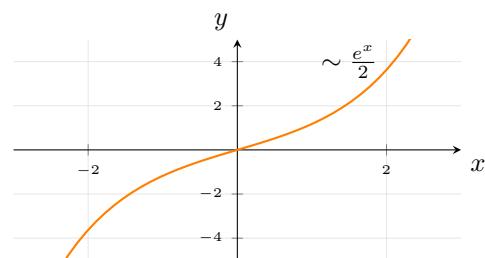
Arcoseno: $y = \arcsin(x)$



$D : [-1, 1]$. Tangenti verticali agli estremi.

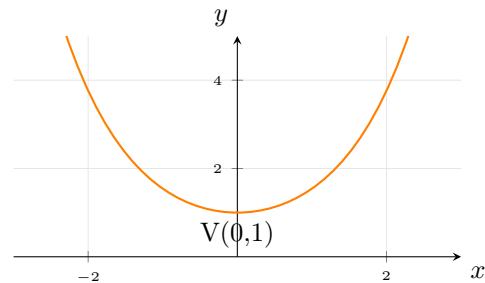
6. Funzioni Iperboliche

Seno Iperbolico: $\sinh(x)$ (Dispari)



Def: $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Simile a x^3 . $D : \mathbb{R}$.

Coseno Iperbolico: $\cosh(x)$ (Pari)



Def: $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Simile a x^2 . $Im : [1, +\infty)$.

Le 2 Formule "Salva-Vita"

Da usare per semplificare equazioni e limiti.

1. Relazione Fondamentale (Iperbole)

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Nota il MENO! (nella trigonometria normale è +)

2. Regola delle Derivate

- $D[\sinh x] = \cosh x$
- $D[\cosh x] = \sinh x$ (Niente meno!)

11. Forme Indeterminate e Strategie

Le 7 Forme Indeterminate

Se ottieni una di queste, il limite non è finito: devi lavorarci.

Tipo	Forma	Strategia / Trucco
Algebriche	$\infty - \infty$	Raccogli la potenza più alta ("il più forte") o Razionalizza (se ci sono radici).
Algebriche	$0 \cdot \infty$	Trasforma in frazione: $f \cdot g = \frac{f}{1/g}$. Diventerà $0/0$ o ∞/∞ .
Algebriche	$\frac{0}{0}$	Usare Sviluppi di Taylor (consigliato per funzioni miste) o De L'Hôpital.
Algebriche	$\frac{\infty}{\infty}$	Vince la gerarchia degli infiniti (vedi sotto) o De L'Hôpital.
Esponenziali	$1^\infty, 0^0, \infty^0$	Usa la trasformazione fondamentale: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$ Poi calcola il limite dell'esponente.

Gerarchia degli Infiniti ($x \rightarrow +\infty$)

Chi "vince" determina il risultato. Ordine dal più lento al più veloce:

$$\ln x \ll x^a \ll a^x \ll x! \ll x^x$$

- $\ln x$: Perde sempre (va a infinito lentissimo).
- x^n : Le potenze perdono contro gli esponenziali.
- e^x : Vince contro qualsiasi polinomio.

Attenzione: NON sono Indeterminate

Questi fanno subito il risultato scritto, non applicare L'Hôpital!

- $\frac{0}{\infty} = 0$ (Zero diviso qualsiasi cosa fa zero)
- $\frac{\infty}{0} = \infty$ (Enorme diviso piccolissimo fa enorme)
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $0^{+\infty} = 0$

7. Equivalenze Asintotiche e Limiti Notevoli

Sviluppi Fondamentali per $x \rightarrow 0$

Valgono se l'argomento tende a 0 (anche se è una funzione $f(x) \rightarrow 0$).

Funzione	Equivalente ($x \rightarrow 0$)
$\sin(x)$	$\sim x$
$\tan(x)$	$\sim x$
$\arcsin(x)$	$\sim x$
$\arctan(x)$	$\sim x$
$1 - \cos(x)$	$\sim \frac{1}{2}x^2$ (!)
$e^x - 1$	$\sim x$
$\ln(1 + x)$	$\sim x$
$(1 + x)^\alpha - 1$	$\sim \alpha x$
$\sinh(x)$	$\sim x$
$\cosh(x) - 1$	$\sim \frac{1}{2}x^2$

Esempio: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \frac{3x}{x} = 3$.

10. Sviluppi di Taylor e Formule Utili

Se sviluppi centrato in un punto x_0 (Taylor):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3)$$

Sviluppi di McLaurin ($x \rightarrow 0$, ordine 3)

Tutti gli sviluppi includono $+o(x^3)$.

Funzione	Sviluppo
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
e^{-x}	$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$
$\ln(1 + x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{6}$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2}$ (term. x^3 nullo)
$\tan(x)$	$x + \frac{x^3}{3}$
$\arcsin(x)$	$x + \frac{x^3}{6}$
$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6}$
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3}$
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{6}$
$\sqrt{1 + x}$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$
$(1 + x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 + \dots$

Formule di Addizione (per cambi variabile)

Utili quando $x \rightarrow x_0$ invece di $x \rightarrow 0$.

- $\sin(x + a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$
- $\cos(x + a) = \cos x \cos a - \sin x \sin a$

11. Trucchi "Salva-Vita" (Cambio Variabile)

Come applicare Taylor se l'argomento non è 0?

Regola Ferrea: Puoi sostituire $f(t) \sim t$ solo se $t \rightarrow 0$.

1. Il Trucco del "+1 - 1" (Per Logaritmi)

Usalo quando hai $\ln(\text{qualcosa})$ e quel "qualcosa" tende a 1 invece che a 0. Devi ricreare la forma $\ln(1 + \text{mostro})$.

Esempio classico ($x \rightarrow 1$):

$$\ln(x) = \ln(1 + \underbrace{x - 1}_t) \sim x - 1$$

Esempio avanzato ($\ln(\cos x)$ per $x \rightarrow 0$): Il coseno tende a 1. Aggiungi e togli 1:

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + \underbrace{\cos x - 1}_t) \sim (\cos x - 1) \sim -\frac{x^2}{2}$$

2. Raccoglimento Forzato (Per costanti diverse da 1)

Se hai $\ln(2 + x)$ o $\sqrt{4 + x}$, devi far uscire il numero per ottenere un "1".

Esempio Logaritmo:

$$\ln(2 + x) = \ln \left[2 \left(1 + \frac{x}{2} \right) \right] = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right)$$

Ora puoi sviluppare il secondo pezzo ($\sim x/2$).

Esempio Radice:

$$\sqrt{4 + x} = \sqrt{4 \left(1 + \frac{x}{4} \right)} = 2 \sqrt{1 + \frac{x}{4}} \sim 2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x}{4} \right)$$

3. Cambio di Variabile Standard ($x \rightarrow c$)

Se il limite non è a 0, poni $t = x - c$ (quindi $t \rightarrow 0$). Sostituisci $x = c + t$.

Esempio ($x \rightarrow 2$):

$$e^x \rightarrow e^{2+t} = e^2 \cdot e^t \sim e^2(1 + t + \dots)$$

13. Tavola delle Derivate Completate

A. Derivate Elementari (Da sapere a memoria)

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$\sin x$	$\cos x$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$ (!)
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$ x $	$\frac{x}{ x } = \operatorname{sgn}(x)$	$\cosh x$	$\sinh x$

Nota bene su a^x e $\log_a x$:

- Quando derivi l'esponenziale (a^x), il $\ln a$ va al **numeratore** (moltiplica).
- Quando derivi il logaritmo ($\log_a x$), il $\ln a$ va al **denominatore** (divide).

B. I "Pattern" Ricorrenti (Funzioni Composte)

Le strutture che trovi sempre negli esercizi.

Tipo	Funzione	Derivata Veloce
Logaritmo	$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
Radice	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
Reciproco	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
Potenza Funz.	$[f(x)]^n$	$n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
Esponenziale	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
Arcotangente	$\arctan(f(x))$	$\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

B. I "Pattern" Ricorrenti (Velocizza i calcoli!)

Queste sono le derivate composte che escono sempre negli studi di funzione. Impara direttamente la forma finale.

Tipo	Funzione	Derivata Veloce
Logaritmo	$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
Radice	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
Reciproco	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
Potenza Funz.	$[f(x)]^n$	$n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
Esponenziale	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
Arcotangente	$\arctan(f(x))$	$\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

C. Il "Mostro": Funzione elevata a Funzione

$$y = f(x)^{g(x)}$$

Non usare regole a caso! Usa il trucco dell'esponenziale:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

Formula finale:

$$D [f(x)^{g(x)}] = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

Consiglio: Non imparare la formula a memoria, impara il trucco di scriverlo come e^{\dots} e derivare quello.

D. Regole di Derivazione (Generali)

- **Prodotto:** $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- **Quoziente:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (Occhio al meno!)
- **Catena:** $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

14. Trigonometria: I Fondamentali

1. Tabella dei Valori Noti

Questi numeri devono essere automatici.

Rad	Deg	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	±
π	180°	0	-1	0

2. Formule di Addizione e Sottrazione

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ (!)

Occhio al coseno: se c'è +, nella formula diventa -.

3. Formule di Duplicazione (Cruciali)

Servono sempre per semplificare le derivate.

Seno:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Coseno (3 versioni):

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x\end{aligned}$$

4. Formule di Bisezione / Linearizzazione

VITALI per fare gli integrali di \sin^2 e \cos^2 !

Invece di usare le radici, impara queste (Linearizzazione):

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Ti permettono di integrare quadrati trasformandoli in coseni semplici.

5. Angoli Associati (Simmetrie)

Come ricondursi al primo quadrante.

A. Opposti ($-x$):

- $\sin(-x) = -\sin x$ (Dispari)
- $\cos(-x) = \cos x$ (Pari, "mangia il meno")

B. Supplementari ($\pi - x$) (II quadrante):

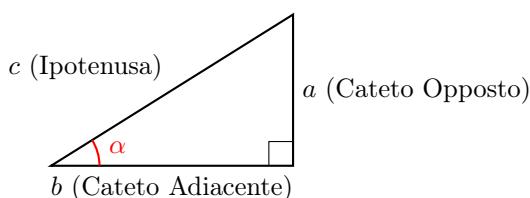
- $\sin(\pi - x) = \sin x$ (Seno uguale)
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ (Coseno opposto)

C. Complementari ($\frac{\pi}{2} - x$):

- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ (Scambio!)
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

6. Relazioni sui Triangoli Rettangoli

Risoluzione dei cateti.



Formule Fondamentali:

$$1. \text{ Cateto} = \text{Ipo} \cdot \sin(\text{opposto})$$

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

$$2. \text{ Cateto} = \text{Ipo} \cdot \cos(\text{adiacente})$$

$$b = c \cdot \cos \alpha$$

$$3. \text{ Cateto} = \text{Altro Cateto} \cdot \tan(\text{opposto})$$

$$a = b \cdot \tan \alpha$$

13-bis. Derivata della Funzione Inversa

La Formula

Sia $y = f(x)$ una funzione invertibile. La derivata della sua inversa $f^{-1}(y)$ nel punto y_0 è:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Attenzione! Qui x_0 è il punto tale che $f(x_0) = y_0$. Geometricamente: Le tangenti sono simmetriche rispetto alla bisettrice, quindi i coefficienti angolari sono reciproci.

Algoritmo di Calcolo (Senza trovare l'inversa)

Se ti chiedono $(f^{-1})'(k)$, segui questi 3 step:

1. TROVA LA X (Cruciale):

Risolvi l'equazione $f(x) = k$.

Nota: Spesso si risolve "a occhio" provando $x = 0, 1, -1, e, \pi$.

2. DERIVA LA DIRETTA:

Calcola $f'(x)$ e sostituisci la x trovata al punto 1.

3. FAI IL RECIPROCO:

Il risultato finale è $\frac{1}{\text{Valore trovato}}$.

Esempio (Classico da Esame)

Data $f(x) = x^3 + x + 2$. Calcolare $(f^{-1})'(4)$.

1. Cerco x: $x^3 + x + 2 = 4 \implies x^3 + x - 2 = 0$.

Si vede subito che $x = 1$ (infatti $1 + 1 + 2 = 4$).

2. Derivo f: $f'(x) = 3x^2 + 1$.

Valuto in $x = 1$: $f'(1) = 3(1)^2 + 1 = 4$.

3. Reciproco: Il risultato è $\frac{1}{4}$.

15. La Funzione Integrale (Derivata)

Il Teorema Fondamentale (Torricelli-Barrow)

Se $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, allora $F'(x) = f(x)$.

Tabella Completa delle Derivate

Qui c'è tutto, dal caso base a quello generale.

Caso	Integrale $F(x)$	Derivata $F'(x)$
Base	$\int_a^x f(t) dt$	$f(x)$
Invertito	$\int_x^a f(t) dt$	$-f(x)$
Sopra ($h(x)$)	$\int_a^{h(x)} f(t) dt$	$f(h(x)) \cdot h'(x)$
Sotto ($g(x)$)	$\int_{g(x)}^b f(t) dt$	$-f(g(x)) \cdot g'(x)$
COMPLETO	$\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$	$f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$

Regola mnemonica per il caso Completo:

(Sostituisci **Sopra** \times Derivata Sopra) **MENO** (Sostituisci **Sotto** \times Derivata Sotto).

Gestire gli Infinti ($\pm\infty$)

L'infinito negli estremi si comporta come una costante: la sua derivata è 0.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{h(x)} f(t) dt \implies F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x)$$

Spiegazione: Spezzi l'integrale in un punto c : $\int_{-\infty}^c + \int_c^{h(x)}$. La prima parte è un numero (costante), quindi derivando s'sparisce.

20. Algoritmo di Risoluzione Integrali

START: Hai davanti $\int f(x) dx$

1. CONTROLLO TABELLA BASE

È nella lista degli integrali fondamentali ($x^\alpha, \sin, \cos, e^x$)?

↓ **NO**

2. CONTROLLO GENERALIZZATI (Derivata)

Vedi una funzione $f(x)$ e FUORI la sua derivata $f'(x)$?

(Es: $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$ oppure $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$)

↓ **NO** (Allora analizza la STRUTTURA)

A. Prodotto Misto	B. Rapporto Polinomi	C. Funzioni Simili/Composte
Hai funzioni di famiglie diverse moltiplicate? (Es: $x \cdot e^x, x \cdot \ln x$)	Hai una frazione con polinomi sopra e sotto? (Es: $\frac{x+1}{x^2-4}$)	Hai funzioni della stessa famiglia o argomenti "brutti"? (Es: $\sqrt{e^x + 1}, \cos(\sqrt{x})$)
↓ PER PARTI (Usa LIATE)	↓ FRATTI SEMPLICI (Scomponi e A, B)	↓ SOSTITUZIONE (Poni $t = \dots$)

Nota sulla Sostituzione (Il Jolly): Se sei bloccato e non rientri nei casi A o B, la sostituzione è l'ultima spiaggia. Cerca di porre t uguale alla parte che ti dà fastidio (es: la radice, l'esponente strano, l'argomento del logaritmo).

16. Integrali Immediati (Composti)

La Regola d'Oro ($f(x)$ composta)

Se vedi una funzione "intrappolata" e fuori c'è la sua derivata, puoi integrare subito.

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = G(f(x)) + c$$

Integrale	Risultato
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$\ln f(x) $
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx$	$e^{f(x)}$
$\int \sin(f(x)) \cdot f'(x) dx$	$-\cos(f(x))$
$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x) dx$	$\sin(f(x))$
$\int \tan(f(x)) \cdot f'(x) dx$	$-\ln \cos(f(x)) $
$\int \cot(f(x)) \cdot f'(x) dx$	$\ln \sin(f(x)) $
$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx$	$\tan(f(x))$
$\int \frac{f'(x)}{\sin^2(f(x))} dx$	$-\cot(f(x))$
$\int \frac{f'(x)}{\cosh^2(f(x))} dx$	$\tanh(f(x)) \quad (\text{Iperbolico})$
$\int \frac{f'(x)}{\sinh^2(f(x))} dx$	$-\coth(f(x)) \quad (\text{Iperbolico})$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} dx$	$\arcsin(f(x))$
$\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx$	$\arctan(f(x))$

Il Caso Lineare ($ax + b$)

Se l'argomento è di primo grado, la derivata è solo la costante a . Bilancia dividendo fuori.

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b}$$

Vale per tutte: $\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x)$.

17. Fratti Semplici (Metodo dei Polinomi)

Setup Iniziale

Devi calcolare $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$.

1. Se grado $N \geq$ grado D : Fai la **divisione polinomiale**.
2. Se grado $N <$ grado D : Scomponi il denominatore e usa la tabella sotto.

I 3 Casi del Denominatore ($ax^2 + bx + c$)

Delta ($D(x)$)	Scomposizione	Struttura Somma
1. $\Delta > 0$ (2 radici reali distinte x_1, x_2)	$a(x - x_1)(x - x_2)$	$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$ Integrazione: Logaritmi
2. $\Delta = 0$ (1 radice doppia x_1)	$a(x - x_1)^2$	$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2}$ Occhio al quadrato sul secondo!
3. $\Delta < 0$ (Complesso)	Irriducibile	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ Si risolve in 2 step (vedi sotto)

Come risolvere il caso $\Delta < 0$ (Il "Mostro")

L'integrale di $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ si spezza sempre in due pezzi:

Pezzo 1: Logaritmo Cerchi di far comparire la derivata del denominatore sopra (spesso moltiplicando/dividendo).

$$\rightarrow \ln(ax^2 + bx + c)$$

Pezzo 2: Arcotangente Ciò che avanza è una costante fratto il polinomio. Devi completare il quadrato al denominatore per ottenere la forma:

$$\int \frac{1}{1 + (\dots)^2} \rightarrow \arctan(\dots)$$

18. Integrazione per Parti (Metodo LIATE)

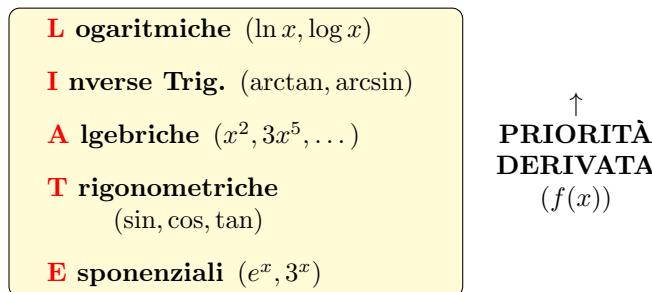
1. La Formula

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Il dilemma è sempre: **Chi derivo (f)? Chi integro (g')?**

2. La Regola LIATE (Chi derivare?)

Scegli come $f(x)$ (quella da **DERIVARE**) la funzione che compare **PRIMA** in questa lista. L'altra sarà $g'(x)$ (da integrare).



Esempi:

- $\int x \cdot \ln x dx$: Ho **A** (x) e **L** (\ln).
La **L** vince su A. \rightarrow Derivo $\ln x$, integro x .
- $\int x \cdot e^x dx$: Ho **A** (x) e **E** (e^x).
La **A** vince su E. \rightarrow Derivo x , integro e^x .

3. Il Caso Speciale "Ciclico" (Boomerang)

Se hai **Esponenziale + Trigonometrica** (es: $\int e^x \sin x dx$), sono in fondo alla lista insieme.

1. Applica la formula due volte.
2. Tornerai all'integrale di partenza (con un segno o coefficiente diverso).
3. Portalo a sinistra dell'uguale e somma.

$$I = \dots - I \implies 2I = \dots \implies I = \frac{1}{2}(\dots)$$

19. Algebra e Proprietà Fondamentali

1. Proprietà dei Logaritmi (Salva-Derivate)

Usale PRIMA di derivare per evitare calcoli mostruosi.

Siano $A, B > 0$:

- Prodotto → Somma:

$$\ln(A \cdot B) = \ln A + \ln B$$

- Rapporto → Differenza:

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$$

Utile per spezzare frazioni giganti nello studio di funzione.

- Esponente → Moltiplicazione (VITALE):

$$\ln(A^k) = k \cdot \ln A$$

Esempio: Derivare $\ln(x^{50})$ è difficile. Scrivi $50 \ln x$ e la derivata è immediata ($50/x$).

- Cambio Base: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Nota: $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.

2. Proprietà delle Potenze

- $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ (Sommi esponenti)
- $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$ (Moltiplicheri esponenti)
- $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$ (Giri la frazione)
- $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$ (Radice → Esponente fratto)

3. Prodotti Notevoli (Da sapere a memoria)

Quadrato di Binomio:

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

Cubo di Binomio:

$$\begin{aligned}(A + B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ (A - B)^3 &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3\end{aligned}$$

Mnemonica: 1, 3, 3, 1. Se c'è il meno, i segni si alternano (+ - + -).

Differenza di Quadrati:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

Somma/Differenza di Cubi:

$$\begin{aligned}A^3 - B^3 &= (A - B)(A^2 + AB + B^2) \\ A^3 + B^3 &= (A + B)(A^2 - AB + B^2)\end{aligned}$$

Nota: La seconda parentesi è un "Falso Quadrato" (non ha il 2 nel mezzo) ed è sempre irriducibile ($\Delta < 0$).