$$V = \text{SPAN}\left\{ v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\3\end{pmatrix} \right\}$$

TROVARE $V^\perp$, PRODOTTO SCALARE STANDARD.

PRODOTTO SCALARE $\mathbb{R}^4$: $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 + t_1 \cdot t_2$

$$V^\perp = \{ w \in V^\perp \mid w \cdot v_1 = 0,\ w \cdot v_2 = 0 \}$$

$$\begin{cases} w \cdot v_1 = 0 \\ w \cdot v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x,y,z,t) \cdot (1,0,-1,1) = 0 \\ (x,y,z,t) \cdot (3,-1,-1,3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z + t = 0 \\ 3x - y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$V^\perp = \begin{cases} x - z + t = 0 \\ 3x - y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI CARTESIANE PER IL SOTTOSPAZIO $V^\perp$

DETERMINARE UNA BASE DI $V^\perp$:

$$\begin{cases} x = z - t \\ 3z - 3t - y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{"} \\ 2z - y = 0 \rightarrow \boxed{y = 2z} \end{cases}$$

$$(z - t, 2z, z, t) = \boxed{z(1,2,1,0) + t(-1,0,0,1)}$$

TROVARE UNA BASE DI $V^\perp$ ORTOGONALE RISPETTO AL PRODOTTO SCALARE STANDARD:

$$V^\perp = \text{SPAN}\{ \underset{v_1}{(1,2,1,0)}, \underset{v_2}{(-1,0,0,1)} \}$$

USIAMO IL METODO GRAM-SCHMIDT

$$V^\perp = \{v_1, v_2\} \quad V^{\perp'} = \{w_1, w_2\}$$

$v_2 \cdot w_1$ = PRODOTTO SCALARE $= -1$

$$w_1 = v_1 = (1,2,1,0)$$

$$w_2 = v_2 - \text{PROIEZIONE}_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{\underset{=6}{\|w_1\|^2}} \cdot w_1$$

$$= \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 1\right) \cdot 6 = (-5, 2, 1, 6)$$

$$\text{BASE ORTOGONALE} = \text{SPAN}\{ \underbrace{(1,2,1,0), (-5,2,1,6)} \}$$

SE FACCIAMO IL PRODOTTO SCALARE VIENE 0 INFATTI