Chapter 1

1.1 Exercice 1

Considérons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables tel que $U_n \leq U$ pour tout n et $\mathbb{E}[U_n] \uparrow \mathbb{E}_*[U]$. Soit $\omega \in \Omega$, on définit la suite de fonction suivante :

$$\phi_n(\omega) = \underset{k\geq n}{inf} U_k(\omega).$$

La suite de fonction $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue une suite croissante (p.s.) et nous avons, pour chaque n

$$\phi_n(\omega) = U(\omega), \quad \forall\omega \in \Omega.$$

Considérons la fonction mesurable U_* définie par :

$$U_*(\omega) = \underset{n\to\infty}{lim} \phi_n(\omega).$$

Clairement $U_* \leq U$ et par le théorème de convergence monotone :

$$\mathbb{E}[U_*] = \mathbb{E}[\underset{n\to\infty}{lim} \phi_n] = \underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{E}\phi_n = \mathbb{E}_* U.$$

Pour toute fonction mesurable V tel que $V \leq U$, nous avons $V \vee U_* \leq U$, de plus

$$\mathbb{E}[V \vee U_*] \leq \mathbb{E}_* U = \mathbb{E}U_*.$$

Nous obtenons alors :

$$\mathbb{E}V \vee U_* = \mathbb{E}U_*.$$

Ce qui nous permet d'obtenir que $V \vee U_* = U_*$, d'où $U_* \geq V$ presque sûrement.

1.2 Exercice 2

Ici, $T^*(\omega) = T(\omega)$ puisque T est mesurable. Or, puisque $\mathbb{P}$ est la mesure de Cauchy, $\mathbb{E}T$ n'existe pas. Donc $\mathbb{E}T^*$ n'existe pas. Néanmoins, $\mathbb{E}^*T$ doit exister : il s'agit du minimum pris sur des espérance qui existent. Soit $U \geq T$ mesurable tel que $\mathbb{E}U$ existe. Notons U^+ (*resp.* U_-) sa partie positive (*resp.* sa partie négative). Nous avons

$$\mathbb{E}U^+ \geq \mathbb{E}T^+ = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\omega}{1+\omega^2}d\omega = \infty.$$

Donc $\mathbb{E}U^+ = \infty$. Puisque $\mathbb{E}U$ existe, cela induit que

$$\mathbb{E}U_- < \infty.$$

Ainsi $\mathbb{E}U = \mathbb{E}U^+ - \mathbb{E}U_- = \infty$. Puisque U est choisit arbitraire, on a donc

$$\mathbb{E}^*T = \infty.$$

1.3 Exercice 3

Supposons ici $\mathbb{E}^*T < \infty$. Puisque, en dehors d'un ensemble négligeable, la suite $f_n(x)$ est croissante en n, la limite existe dans $\bar{\mathbb{R}}$. Ainsi, T est définie presque sûrement et, de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}^*T_n \leq \mathbb{E}^*T_{n+1} \leq \mathbb{E}^*T < \infty.$$

Par monotonicité de l'intégrale extérieure, il suit

$$\underset{n}{limsup}\mathbb{E}^*T_n = \underset{n\to\infty}{lim}\mathbb{E}^*T_n \leq \mathbb{E}^*T.$$

Puisque chaque $\mathbb{E}^*T_n \leq \infty$, par définition, il existe une suite de fonction étagées tel que :

$$0 \leq T_n(\omega) \leq \phi_n(\omega), \quad a.s,$$

et

$$\mathbb{E}T_n \leq \mathbb{E}\phi_n \leq \mathbb{E}^*T_n + 2^{-n}.$$

Puisque, pour tout entier $n \leq m$

$$\psi_n := \underset{m\geq n}{inf}\,\phi_m, \quad \phi = \underset{n\to\infty}{lim}\,\phi_n,$$

satisfont, presque sûrement et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots,$$
$$0 \leq T_n \leq \phi_n \leq \phi,$$

et

$$0 \leq T \leq \phi.$$

Maintenant, le théorème de convergence monotone s'applique à la suite de fonction mesurable ψ_n, en combinant l'ensemble des inégalités, nous obtenons :

$$\mathbb{E}^*T \leq \mathbb{E}\psi = \underset{n\to\infty}{lim}\mathbb{E}\psi_n \leq \underset{n\to}{lim}\mathbb{E}\phi_n = \underset{n\to\infty}{lim}\mathbb{E}^*T_n \leq \mathbb{E}^*T$$

1.4 Exercice 4

Dans un premier temps, montrons que

$$|T_n - T^*| \leq 2S^*.$$

Si $T_n \to T$, alors $|T| \leq S$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons $|T_n| \leq S$. Donc,

$$|T_n - T| \leq 2S \leq 2S^*$$

Par définition de S^* (voir page 6). Or $2S^* \in \mathcal{M}(\Omega, \bar{\mathbb{R}}^+)$ tel que $2S^* \geq |T_n - T|$. Par définition, il suit que :

$$|T_n - T^*| \leq 2S^*. \tag{1.1}$$

Ce qui est le premier résultat souhaité. Avant de poursuivre, introduisons un lemme :

Lemma 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure finie. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $\Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

- *La suite (f_n) converge simplement $\mu - p - p$ sur Ω vers f;*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \underset{n\to\infty}{lim} f_n(\omega) = f(\omega), \quad \mu - p.p.$$

- *il existe une constante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|T_n| \leq M$.*

Alors,

$$\underset{n\to\infty}{lim} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$$

Proof. D'après les hypothèses, on voit immédiatement que la fonction limite f est bornée par la même constante,

$$|f| \leq M.$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé, le théorème d'Egorov nous permet de trouver un sous ensemble $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ avec :

$$\mu\left(\Omega \setminus \Omega_\epsilon\right) \leq \epsilon,$$

en restriction auquel on a convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f. Alors, sur Ω_ϵ, nous pouvons trouver un entier $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ assez grand tel que,

$$n \geq N_\epsilon \quad \Longrightarrow \quad (\forall \omega \in \Omega_\epsilon, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x) &= \int_{\Omega_\epsilon} |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x) + \int_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon} |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x) \\
&\leq \epsilon\mu(\Omega_\epsilon) + 2\int_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon} M d\mu(x) \\
&\leq \epsilon(\mu(\Omega_\epsilon + 2N))
\end{aligned}
$$

Ce qui est le résultat attendu. □

Soit $N \in \mathbb{N}$, notons l'ensemble mesurable suivant :

$$G_N = \{\omega \in \Omega, \quad S^*(\omega) \leq N\}.$$

La suite de fonction (g_N) définie par

$$g_N(\omega) = S^*(\omega)\mathbb{1}_{G_N}(\omega),$$

est mesurable et croissante, une application du théorème de convergence monotone nous permet d'obtenir, pour $\epsilon > 0$, l'existence d'un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_\epsilon$

$$\int_{\Omega\setminus G_N} g_n(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \leq \epsilon \tag{1.2}$$

De plus, grâce au lemme, nous avons l'existence d'un entier n_ϵ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$:

$$\int_{G_N} |T_n - T|^*\, d\mathbb{P} \leq \epsilon \tag{1.3}$$

Grâce à ces deux inégalités, nous pouvons obtenir :

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} |T_n - T|^*\, d\mathbb{P} &= \int_{G_N} |T_n - T|^*\, d\mathbb{P} + \int_{\Omega\setminus G_N} |T_n - T|^*\, d\mathbb{P}, \\
&\leq \epsilon + 2\epsilon.
\end{aligned}
$$

D'où

$$\mathbb{E}\, |T_n - T|^* \to 0$$

ce qui implique notre résultat.

1.5 exercice 5

Nous avons

$$|S^* - T_*| = |S^* \pm T^* - T_*| \leq |S^* - T^*| + (T^* - T_*) \leq |S - T|^* + (T^* - T_*)\,.$$

Où la dernière ligne provient du lemme 1.2.2. Suivant le même raisonnement, nous pouvons montrer

$$\begin{aligned} |S^* - T_*| &= |S^* \pm S_* - T_*| \leq |S_* - T_*| + (S^* - S_*)\,, \\ &\leq |(-S)^* - (-T)^*| + (S^* - S_*) \leq |S - T|^* + (S^* - S_*)\,. \end{aligned}$$

Utilisant ces deux inégalités mènent à

$$|S^* - T_*| \leq |S^* - T^*| + (T^* - T_*) \wedge (S^* - S_*)\,.$$

Ce que nous voulions démontrer. Nous avons immédiatement que, d'après le lemme 1.2.2

$$(S^* - T_*) \vee (T^* - S_*) = |S^* - T_*|\,.$$

donc nous obtenons l'inégalité de gauche. Pour celle de droite, nous devons montrer que

$$S^* - T_* \geq (S - T)^*. \tag{1.4}$$

En effet, $S^* - T_* = S^* + (-T)^* \geq (S - T)^*$ à nouveau par l'utilisation du lemme 1.2.2. D'où

$$(S^* - T_*) \wedge (T^* - S_*) \geq (S - T)^* \wedge (T - S)^* = |S - T|^*\,.$$

Ce qui finit l'exercice.

1.6 Exercice 7

Nous avons clairement, pour tout $c \in \mathbb{R}$ que $\{T > c\} \subset \{T^* > c\}$, ainsi

$$\mathbb{P}^* \{T > c\} \leq \mathbb{P}\{T^* > c\}\,.$$

Pour obtenir l'autre sens de l'inégalité, considérons A une couverture mesurable de l'ensemble $\{T > c\}$ tel que $A \supset \{T > c\}$. On en tire alors que $\mathbb{P}^*\{T > c\} = \mathbb{P}(A)$. Ainsi $T^*(\omega) \leq c$ presque sûrement si $\omega \notin A$. D'où $\mathbb{P}\{T^* > c\} \leq \mathbb{P}(A)$ et ainsi

$$\mathbb{P}\{T^* > c\} = \mathbb{P}^* \{T > c\}\,.$$

Par passage au complémentaire, nous obtenons

$$\mathbb{P}\{T^* \leq c\} = 1 - \mathbb{P}^* \{T \leq c\} = \mathbb{P}_* \{T \leq c\}\,. \tag{1.5}$$

Et nous obtenons le résultat. On en déduit immédiatement que si $\mathbb{P}^* \{T \leq c\} = 1$ alors $\mathbb{P}\{T^* \leq c\} = 0$. Ce qui conclut l'exercice.

1.7 Exercice 8

Par définition, nous avons :

$$T^* \geq T,$$

donc

$$g(T^*) \geq g(T),$$

en ayant exploité le caractère croissant de la fonction g. Or $g \circ T^*$ est mesurable comme composition de deux fonctions qui le sont (g l'est car elle est continue à gauche par hypothèse). D'où

$$g(T)^* \leq g(T^*)$$

Nous obtenons ainsi notre première inégalité. Pour la seconde inégalité, soit $\epsilon > 0$, nous avons

$$T^* - \epsilon < T$$

Pour obtenir cette inégalité, raisonner par l'absurde et utiliser la définition de la fonction couverture-mesurable (*measurable cover function* en V.O.). Donc

$$g(T^* - \epsilon) \leq g(T).$$

Toujours par le caractère croissant de g. On en déduit ainsi

$$g(T^* - \epsilon) \leq g(T)^*,$$

et en exploitant la continuité à gauche, il suit en faisant tendre ϵ vers 0

$$g(T^*) \leq g(T)^*$$

ce qui est le résultat souhaité. La deuxième assertion suit de la première appliqué à la fonction $x \mapsto -g(-x)$.

Supposons à présent g mesurable, croissante et de bijection mesurable. A nouveau, puisque

$$g(T^*) \geq g(T),$$

nous obtenons

$$g(T)^* \leq g(T^*).$$

Considérons U une fonction mesurable tel que l'inégalité suivante soit vérifiée presque sûrement

$$g(T^*) \geq U \geq g(T).$$

Nous obtenons alors, en exploitant la bijection réciproque de g

$$g^{-1}(U) \geq T.$$

Or $g^{-1}(U)$ est mesurable comme composée de fonctions qui le sont, d'où

$$g^{-1}(U) \geq T^* \quad \Longleftrightarrow \quad U \geq g(T^*),$$

vérifiée presque sûrement. Ainsi

$$g(T^*) = U \geq g(T)^*$$

Par définition. Ce qui conclut l'exercice.

1.8 Exercice 9

Nous avons, par définition

$$T_1^* \geq T_1, \quad T_2^* \geq T_2,$$

donc puisque g est croissant en chaque coordonnée, nous avons

$$g(T_1^*, T_2^*) \geq g(T_1, T_2).$$

Puisque $g(T_1^*, T_2^*)$ est mesurable comme composée de fonctions qui le sont, donc

$$g(T_1^*, T_2^*) \geq g(T_1, T_2)^*.$$

Nous obtenons notre première inégalité. Considérons $U \in \mathcal{M}(\Omega_1 \times \Omega_2, \bar{\mathbb{R}})$ tel que $U \geq g(T_1, T_2)$ presque sûrement. Par application du théorème de Fubini, pour $\mathbb{P}_1$-presque tout ω_1, nous avons

$$U(\omega_1, \omega_2) \geq g\left(T_1(\omega_1), T_2(\omega_2)\right), \quad \text{pour } \mathbb{P}_2 \text{ presque tout } \omega_2.$$

Soit $f : \omega_2 \mapsto U(\omega_1, \omega_2)$ et $h : y \mapsto g(x, y)$ avec $x \in \mathbb{R}$. Nous obtenons ainsi l'inégalité suivante

$$f(\omega_2) \geq h(T_2(\omega_2)), \quad \text{pour } \mathbb{P}_2 \text{ presque tout } \omega_2.$$

La fonction $f = U \circ \pi_2$ est mesurable comme composée de fonctions qui le sont, ainsi

$$f(\omega_2) \geq h(T_2(\omega_2))^*, \quad \text{pour } \mathbb{P}_2 \text{ presque tout } \omega_2.$$

Or, la fonction $y \mapsto h(y)$ est croissante et continue à gauche, donc d'après l'exercice précédent

$$f(\omega_2) \geq h(T_2^*(\omega_2)), \quad \text{pour } \mathbb{P}_2 \text{ presque tout } \omega_2.$$

Ce que l'on peut réécrire pour $\mathbb{P}_1$-presque tout ω_1

$$U(\omega_1,\omega_2) \geq g(T_1(\omega_1), T_2^*(\omega_2)), \quad \text{pour } \mathbb{P}_2 \text{ presque tout } \omega_2.$$

La reproduction du même raisonnement pour T_1 permet d'obtenir que

$$U(\omega_1,\omega_2) \geq g(T_1^*(\omega_1), T_2^*(\omega_2)), \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$

Donc

$$g(T_1,T_2)^* \geq g(T_1^*, T_2^*).$$

Ce qui est ainsi démontré.

1.9 Exercice 10

Soit $\mathcal{C} = \{A \cup N, A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$. On montre que $\mathcal{C}$ est une tribu. Ainsi, puisque $\mathcal{A} \cup \mathcal{N} \subset \mathcal{C}$, par minimalité, nous avons $\tilde{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) \subset \mathcal{C}$. Il est aussi clair que $\mathcal{C} \subset \tilde{\mathcal{A}}$. Montrons donc que $\mathcal{C}$ est une tribu.

Nous avons $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ et $\mathbb{P}^*(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$, d'où $\subset \mathcal{N}$. Donc $\Omega \in \mathcal{C}$. La stabilité par union dénombrable est directe. Montrons la stabilité par complémentaire, *i.e.* $(A \cup N)^c \in \mathcal{C}$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}$. Puisque $N \in \mathcal{N}$, il existe $B \in \mathcal{A}$ avec $N \subset B$ et $\mathbb{P}^*(B) = 0$. Supposons sans perte de généralité que $A \cap B = \emptyset$; pour le voir, on peut écrire $A \cup N = A \cup (N - A)$ et noter que $N - A \in \mathcal{A}$, ainsi $N - A \in \mathcal{N}$ et aussi $A \cap (B - A) = \emptyset$.

Maintenant, écrivons $A \cup N = (A \cup B) \cap (B^c \cup N)$ et ainsi $(A \cup N)^c = (A \cup B)^c \cup (B^c \cup N)^c = (A \cup B)^c \cup (B \cap N^c)$. Or, $(A \cup B)^c \in \mathcal{A}$ et $B \cap N^c \subset B$, donc $B \cap N^c \in \mathcal{N}$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est bien une tribu.

Montrons maintenant que $\tilde{\mathbb{P}}$ est bien définie. Si $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$ avec $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ et $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ alors $A_1 \triangle A_2 \subset N_1 \cup N_2$. Donc

$$\mathbb{P}(A_1 \triangle A_2) = 0,$$

et l'on en tire $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$. $\tilde{\mathbb{P}}$ est ainsi bien définie.

Montrons que

$$\tilde{\mathcal{A}} \subset \{A \in \Omega, \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}_*(A)\},$$

nous avons clairement $\forall A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}$

$$\mathbb{P}_*(A \cup N) \leq \mathbb{P}^*(A \cup N).$$

De plus, puisque $A \in \mathcal{A}$ (donc mesurable) et en utilisant des propriété de l'exercice 15

$$\mathbb{P}^*(A \cup N) \leq \mathbb{P}^*(A) + \mathbb{P}^*(N) = \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}_*(A) \leq \mathbb{P}_*(A \cup N).$$

Donc
$$\mathbb{P}_*(A \cup N) = \mathbb{P}^*(A \cup N).$$

Montrons à présent que $\{A \in \Omega, \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}_*(A)\}$ est une tribu et nous obtiendrons notre première inclusion. Nous avons, puisque $\emptyset \in \mathcal{A}$ que

$$\mathbb{P}^*(\emptyset) = \mathbb{P}_*(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Soit $A \in \{A \in \Omega, \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}_*(A)\}$, il suit que

$$\mathbb{P}^*(A^c) = 1 - (1 - \mathbb{P}^*(A^c)) = 1 - \mathbb{P}_*(A) = 1 - \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}_*(A^c).$$

Donc $A^c \in \{A \in \Omega, \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}_*(A)\}$.