Chapter 1

1.1 Exercice 1

1.2 Exercice 2

1.3 Exercice 4

Dans un premier temps, montrons que

$$|T_n - T^*| \leq 2S^*.$$

Si $T_n \to T$, alors $|T| \leq S$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons $|T_n| \leq S$. Donc,

$$|T_n - T| \leq 2S \leq 2S^*$$

Par définition de S^* (voir page 6). Or $2S^* \in \mathcal{M}(\Omega, \bar{\mathbb{R}}^+)$ tel que $2S^* \geq |T_n - T|$. Par definition, il suit que :

$$|T_n - T^*| \leq 2S^*. \tag{1.1}$$

Ce qui est le premier résultat souhaité. Avant de poursuivre, introduisont un lemme :

Lemma 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure finie. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $\Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

- *La suite (f_n) converge simplement $\mu - p - p$ sur Ω vers f;*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega), \quad \mu - p.p.$$

- *il existe une constante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|T_n| \leq M$.*

Alors,

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$$

Proof. D'après les hypothèses, on voit immédiatement que la fonction limite f est bornée par la même constante,

$$|f| \leq M.$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé, le théorème d'Egorov nous permet de trouver un sous ensemble $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ avec :

$$\mu\left(\Omega \setminus \Omega_\epsilon\right) \leq \epsilon,$$

en restriction auquel on a convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f. Alors, sur Ω_ϵ, nous pouvons trouver un entier $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ assez grand tel que,

$$n \geq N_\epsilon \quad \Longrightarrow \quad (\forall \omega \in \Omega_\epsilon, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x) &= \int_{\Omega_\epsilon} |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x) + \int_{\Omega \setminus \Omega_\epsilon} |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x) \\
&\leq \epsilon\mu(\Omega_\epsilon) + 2\int_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon} M d\mu(x) \\
&\leq \epsilon(\mu(\Omega_\epsilon + 2N))
\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat attendu. □

Soit $N \in \mathbb{N}$, notons l'ensemble mesurable suivant :

$$G_N = \{\omega \in \Omega, \quad S^*(\omega) \leq N\}.$$

La suite de fonction (g_N) définie par

$$g_N(\omega) = S^*(\omega)\mathbb{1}_{G_N}(\omega),$$

est mesurable et croissante, une application du théorème de convergence monotone nous permet d'obtenir, pour $\epsilon > 0$, l'existence d'un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_\epsilon$

$$\int_{\Omega\setminus G_N} g_n(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \leq \epsilon \tag{1.2}$$

De plus, grâce au lemme, nous avons l'existence d'un entier n_ϵ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$:

$$\int_{G_N} |T_n - T|^*\, d\mathbb{P} \leq \epsilon \tag{1.3}$$

Grâce à ces deux inégalités, nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |T_n - T|^* \, d\mathbb{P} &= \int_{G_N} |T_n - T|^* \, d\mathbb{P} + \int_{\Omega \setminus G_N} |T_n - T|^* \, d\mathbb{P}, \\ &\leq \epsilon + 2\epsilon.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E} \, |T_n - T|^* \to 0$$

ce qui implique notre résultat.