Chapter 1

1.1 Exercice 1

Considérons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables tel que $U_n \leq U$ pour tout n et $\mathbb{E}[U_n] \uparrow \mathbb{E}_*[U]$. Soit $\omega \in \Omega$, on définit la suite de fonction suivante :

$$\phi_n(\omega) = \underset{k\geq n}{inf} U_k(\omega).$$

La suite de fonction $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue une suite croissante (p.s.) et nous avons, pour chaque n

$$\phi_n(\omega) = U(\omega), \quad \forall\omega \in \Omega.$$

Considérons la fonction mesurable U_* définie par :

$$U_*(\omega) = \underset{n\to\infty}{lim} \phi_n(\omega).$$

Clairement $U_* \leq U$ et par le théorème de convergence monotone :

$$\mathbb{E}[U_*] = \mathbb{E}[\underset{n\to\infty}{lim} \phi_n] = \underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{E}\phi_n = \mathbb{E}_*U.$$

Pour toute fonction mesurable V tel que $V \leq U$, nous avons $V \vee U_* \leq U$, de plus

$$\mathbb{E}[V \vee U_*] \leq \mathbb{E}_*U = \mathbb{E}U_*.$$

Nous obtenons alors :

$$\mathbb{E}V \vee U_* = \mathbb{E}U_*.$$

Ce qui nous permet d'obtenir que $V \vee U_* = U_*$, d'où $U_* \geq V$ presque sûrement.

1.2 Exercice 2

Supposons ici $\mathbb{E}^*T < \infty$. Puisque, en dehors d'un ensemble négligeable, la suite $f_n(x)$ est croissante en n, la limite existe dans $\bar{\mathbb{R}}$. Ainsi, T est définie presque sûrement et, de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}^*T_n \leq \mathbb{E}^*T_{n+1} \leq \mathbb{E}^*T < \infty.$$

Par monotonicité de l'intégrale extérieure, il suit

$$\underset{n}{limsup} \mathbb{E}^*T_n = \underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{E}^*T_n \leq \mathbb{E}^*T.$$

Puisque chaque $\mathbb{E}^*T_n \leq \infty$, par définition, il existe une suite de fonction étagées tel que :

$$0 \leq T_n(\omega) \leq \phi_n(\omega), \quad a.s,$$

et

$$\mathbb{E}_n^T \leq \mathbb{E}\phi_n \leq \mathbb{E}^*T_n + 2^{-n}.$$

Puisque, pour tout entier $n \leq m$

$$\psi_n := \underset{m\geq n}{\phi_m}, \quad \phi = \underset{n\to\infty}{lim} \phi_n,$$

satisfont, presque sûrement et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots,$$
$$0 \leq T_n \leq \phi_n \leq \phi_n,$$

et

$$0 \leq T \leq \phi.$$

Maintenant, le théorème de convergence monotone s'applique à la suite de fonction mesurable ψ_n, en combinant l'ensemble des inégalités, nous obtenons :

$$\mathbb{E}^*T \leq \mathbb{E}\psi = \underset{n\to}{lim} \mathbb{E}\psi_n \leq \underset{n\to}{lim} \mathbb{E}\phi_n = \underset{n\to}{lim} \mathbb{E}^*T_n \leq \mathbb{E}^*T$$

1.3 Exercice 4

Dans un premier temps, montrons que

$$|T_n - T^*| \leq 2S^*.$$

Si $T_n \to T$, alors $|T| \leq S$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons $|T_n| \leq S$. Donc,

$$|T_n - T| \leq 2S \leq 2S^*$$

Par définition de S^* (voir page 6). Or $2S^* \in \mathcal{M}(\Omega, \bar{\mathbb{R}}^+)$ tel que $2S^* \geq |T_n - T|$. Par definition, il suit que :

$$|T_n - T^*| \leq 2S^*. \tag{1.1}$$

Ce qui est le premier résultat souhaité. Avant de poursuivre, introduisont un lemme :

Lemma 1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré où* μ *est une mesure finie. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables* $\Omega \to \mathbb{R}$ *vérifiant :*

- *La suite* (f_n) *converge simplement* $\mu - p - p$ *sur* Ω *vers* f*;*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega), \quad \mu - p.p.$$

- *il existe une constante telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $|T_n| \leq M$.

Alors,

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$$

Proof. D'après les hypothèses, on voit immédiatement que la fonction limite f est bornée par la même constante,

$$|f| \leq M.$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé, le théorème d'Egorov nous permet de trouver un sous ensemble $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ avec :

$$\mu\left(\Omega \setminus \Omega_\epsilon\right) \leq \epsilon,$$

en restriction auquel on a convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f. Alors, sur Ω_ϵ, nous pouvons trouver un entier $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ assez grand tel que,

$$n \geq N_\epsilon \quad \Longrightarrow \quad (\forall \omega \in \Omega_\epsilon, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f_n(x) - f(x)| \, d\mu(x) &= \int_{\Omega_\epsilon} |f_n(x) - f(x)| \, d\mu(x) + \int_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon} |f_n(x) - f(x)| \, d\mu(x) \\
&\leq \epsilon\mu(\Omega_\epsilon) + 2\int_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon} M d\mu(x) \\
&\leq \epsilon(\mu(\Omega_\epsilon + 2N))
\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat attendu. □

Soit $N \in \mathbb{N}$, notons l'ensemble mesurable suivant :

$$G_N = \{\omega \in \Omega, \quad S^*(\omega) \leq N\}.$$

La suite de fonction (g_N) définie par

$$g_N(\omega) = S^*(\omega)\mathbb{1}_{G_N}(\omega),$$

est mesurable et croissante, une application du théorème de convergence monotone nous permet d'obtenir, pour $\epsilon > 0$, l'existence d'un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_\epsilon$

$$\int_{\Omega\setminus G_N} g_n(\omega)d\mathbb{P}(\omega) \leq \epsilon \tag{1.2}$$

De plus, grâce au lemme, nous avons l'existence d'un entier n_ϵ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$:

$$\int_{G_N} |T_n - T|^* \, d\mathbb{P} \leq \epsilon \tag{1.3}$$

Grâce à ces deux inégalités, nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |T_n - T|^* \, d\mathbb{P} &= \int_{G_N} |T_n - T|^* \, d\mathbb{P} + \int_{\Omega\setminus G_N} |T_n - T|^* \, d\mathbb{P}, \\ &\leq \epsilon + 2\epsilon.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}\,|T_n - T|^* \to 0$$

ce qui implique notre résultat.

1.4 exercice 5

Nous avons

$$|S^* - T_*| = |S^* \pm T^* - T_*| \leq |S^* - T^*| + (T^* - T_*) \leq |S - T|^* + (T^* - T_*)\,.$$

Où la dernière ligne provient du lemme 1.2.2. Suivant le même raisonnement, nous pouvons montrer

$$\begin{aligned}|S^* - T_*| = |S^* \pm S_* - T_*| &\leq |S_* - T_*| + (S^* - S_*)\,, \\ &\leq |(-S)^* - (-T)^*| + (S^* - S_*) \leq |S - T|^* + (S^* - S_*)\,.\end{aligned}$$

Utilisant ces deux inégalités mènent à

$$|S^* - T_*| \leq |S^* - T^*| + (T^* - T_*) \wedge (S^* - S_*)\,.$$

Ce que nous voulions démontrer.

Nous avons immédiatement que, d'après le lemme 1.2.2

$$(S^* - T_*) \vee (T^* - S_*) = |S^* - T_*| \, .$$

donc nous obtenons l'inégalité de gauche. Pour celle de droite, nous devons montrer que

$$S^* - T_* \geq (S - T)^*. \tag{1.4}$$

En effet, $S^* - T_* = S^* + (-T)^* \geq (S - T)^*$ à nouveau par l'utilisation du lemme 1.2.2. D'où

$$(S^* - T_*) \wedge (T^* - S_*) \geq (S - T)^* \wedge (T - S)^* = |S - T|^* \, .$$

Ce qui finit l'exercice.