Chapter 1

1.1 Exercice 1

Considérons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables tel que $U_n \leq U$ pour tout n et $\mathbb{E}[U_n] \uparrow \mathbb{E}_*[U]$. Soit $\omega \in \Omega$, on définit la suite de fonction suivante :

$$\phi_n(\omega) = \underset{k\geq n}{inf} U_k(\omega).$$

La suite de fonction $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue une suite croissante (p.s.) et nous avons, pour chaque n

$$\phi_n(\omega) = U(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Considérons la fonction mesurable U_* définie par :

$$U_*(\omega) = \underset{n\to\infty}{lim} \phi_n(\omega).$$

Clairement $U_* \leq U$ et par le théorème de convergence monotone :

$$\mathbb{E}[U_*] = \mathbb{E}[\underset{n\to\infty}{lim} \phi_n] = \underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{E}\phi_n = \mathbb{E}_* U.$$

Pour toute fonction mesurable V tel que $V \leq U$, nous avons $V \vee U_* \leq U$, de plus

$$\mathbb{E}[V \vee U_*] \leq \mathbb{E}_* U = \mathbb{E} U_*.$$

Nous obtenons alors :

$$\mathbb{E} V \vee U_* = \mathbb{E} U_*.$$

Ce qui nous permet d'obtenir que $V \vee U_* = U_*$, d'où $U_* \geq V$ presque sûrement.

1.2 Exercice 2

Supposons ici $\mathbb{E}^* T < \infty$. Puisque, en dehors d'un ensemble négligeable, la suite $f_n(x)$ est croissante en n, la limite existe dans $\bar{\mathbb{R}}$. Ainsi, T est définie presque sûrement et, de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}^* T_n \leq \mathbb{E}^* T_{n+1} \leq \mathbb{E}^* T < \infty.$$

Par monotonicité de l'intégrale extérieure, il suit

$$\underset{n}{limsup}\mathbb{E}^*T_n = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^*T_n \leq \mathbb{E}^*T.$$

Puisque chaque $\mathbb{E}^*T_n \leq \infty$, par définition, il existe une suite de fonction étagées tel que :

$$0 \leq T_n(\omega) \leq \phi_n(\omega), \quad a.s,$$

et

$$\mathbb{E}_n^T \leq \mathbb{E}\phi_n \leq \mathbb{E}^*T_n + 2^{-n}.$$

Puisque, pour tout entier $n \leq m$

$$\psi_n := \underset{m\geq n}{\phi_m}, \quad \phi = \lim_{n\to\infty}\phi_n,$$

satisfont, presque sûrement et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots,$$
$$0 \leq T_n \leq \phi_n \leq \phi_n,$$

et

$$0 \leq T \leq \phi.$$

Maintenant, le théorème de convergence monotone s'applique à la suite de fonction mesurable ψ_n, en combinant l'ensemble des inégalités, nous obtenons :

$$\mathbb{E}^*T \leq \mathbb{E}\psi = \lim_{n\to}\mathbb{E}\psi_n \leq \lim_{n\to}\mathbb{E}\phi_n = \lim_{n\to}\mathbb{E}^*T_n \leq \mathbb{E}^*T$$

1.3 Exercice 4

Dans un premier temps, montrons que

$$|T_n - T^*| \leq 2S^*.$$

Si $T_n \to T$, alors $|T| \leq S$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons $|T_n| \leq S$. Donc,

$$|T_n - T| \leq 2S \leq 2S^*$$

Par définition de S^* (voir page 6). Or $2S^* \in \mathcal{M}(\Omega, \bar{\mathbb{R}}^+)$ tel que $2S^* \geq |T_n - T|$. Par definition, il suit que :

$$|T_n - T^*| \leq 2S^*. \tag{1.1}$$

Ce qui est le premier résultat souhaité. Avant de poursuivre, introduisont un lemme :

Lemma 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure finie. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $\Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

- *La suite (f_n) converge simplement $\mu - p - p$ sur Ω vers f;*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \underset{n\to\infty}{lim} f_n(\omega) = f(\omega), \quad \mu - p.p.$$

- *il existe une constante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|T_n| \leq M$.*

Alors,

$$\underset{n\to\infty}{lim} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$$

Proof. D'après les hypothèses, on voit immédiatement que la fonction limite f est bornée par la même constante,

$$|f| \leq M.$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé, le théorème d'Egorov nous permet de trouver un sous ensemble $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ avec :

$$\mu \left(\Omega \setminus \Omega_\epsilon \right) \leq \epsilon,$$

en restriction auquel on a convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f. Alors, sur Ω_ϵ, nous pouvons trouver un entier $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ assez grand tel que,

$$n \geq N_\epsilon \quad \Longrightarrow \quad (\forall \omega \in \Omega_\epsilon, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)| \, d\mu(x) &= \int_{\Omega_\epsilon} |f_n(x) - f(x)| \, d\mu(x) + \int_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon} |f_n(x) - f(x)| \, d\mu(x) \\ &\leq \epsilon\mu(\Omega_\epsilon) + 2 \int_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon} M d\mu(x) \\ &\leq \epsilon(\mu(\Omega_\epsilon + 2N)) \end{aligned}$$

Ce qui est le résultat attendu. □

Soit $N \in \mathbb{N}$, notons l'ensemble mesurable suivant :

$$G_N = \{\omega \in \Omega, \quad S^*(\omega) \leq N\}.$$

La suite de fonction (g_N) définie par

$$g_N(\omega) = S^*(\omega)\mathbb{1}_{G_N}(\omega),$$

est mesurable et croissante, une application du théorème de convergence monotone nous permet d'obtenir, pour $\epsilon > 0$, l'existence d'un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_\epsilon$

$$\int_{\Omega \backslash G_N} g_n(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \leq \epsilon \tag{1.2}$$

De plus, grâce au lemme, nous avons l'existence d'un entier n_ϵ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$:

$$\int_{G_N} |T_n - T|^* \, d\mathbb{P} \leq \epsilon \tag{1.3}$$

Grâce à ces deux inégalités, nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |T_n - T|^* \, d\mathbb{P} &= \int_{G_N} |T_n - T|^* \, d\mathbb{P} + \int_{\Omega \backslash G_N} |T_n - T|^* \, d\mathbb{P}, \\ &\leq \epsilon + 2\epsilon. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E} \, |T_n - T|^* \to 0$$

ce qui implique notre résultat.

1.4 exercice 5

Nous avons

$$|S^* - T_*| = |S^* \pm T^* - T_*| \leq |S^* - T^*| + (T^* - T_*) \leq |S - T|^* + (T^* - T_*) \, .$$

Où la dernière ligne provient du lemme 1.2.2. Suivant le même raisonnement, nous pouvons montrer

$$\begin{aligned} |S^* - T_*| &= |S^* \pm S_* - T_*| \leq |S_* - T_*| + (S^* - S_*) \, , \\ &\leq |(-S)^* - (-T)^*| + (S^* - S_*) \leq |S - T|^* + (S^* - S_*) \, . \end{aligned}$$

Utilisant ces deux inégalités mènent à

$$|S^* - T_*| \leq |S^* - T^*| + (T^* - T_*) \wedge (S^* - S_*) \, .$$

Ce que nous voulions démontrer.
Nous avons immédiatement que, d'après le lemme 1.2.2

$$(S^* - T_*) \vee (T^* - S_*) = |S^* - T_*| \, .$$

donc nous obtenons l'inégalité de gauche. Pour celle de droite, nous devons montrer que

$$S^* - T_* \geq (S - T)^*. \tag{1.4}$$

En effet, $S^* - T_* = S^* + (-T)^* \geq (S-T)^*$ à nouveau par l'utilisation du lemme 1.2.2. D'où

$$(S^* - T_*) \wedge (T^* - S_*) \geq (S-T)^* \wedge (T-S)^* = |S-T|^* .$$

Ce qui finit l'exercice.

1.5 Exercice 7

Nous avons clairement, pour tout $c \in \mathbb{R}$ que $\{T > c\} \subset \{T^* > c\}$, ainsi

$$\mathbb{P}^* \{T > c\} \leq \mathbb{P} \{T^* > c\} .$$

Pour obtenir l'autre sens de l'inégalité, considérons A une couverture mesurable de l'ensemble $\{T > c\}$ tel que $A \supset \{T > c\}$. On en tire alors que $\mathbb{P}^*\{T > c\} = \mathbb{P}(A)$. Ainsi $T^*(\omega) \leq c$ presque sûrement si $\omega \notin A$. D'où $\mathbb{P}\{T^* > c\} \leq \mathbb{P}(A)$ et ainsi

$$\mathbb{P} \{T^* > c\} = \mathbb{P}^* \{T > c\} .$$

Par passage au complémentaire, nous obtenons

$$\mathbb{P} \{T^* \leq c\} = 1 - \mathbb{P}^* \{T \leq c\} = \mathbb{P}_* \{T \leq c\} . \tag{1.5}$$

Et nous obtenons le résultat. On en déduit immédiatement que si $\mathbb{P}^* \{T \leq c\} = 1$ alors $\mathbb{P} \{T^* \leq c\} = 0$. Ce qui conclut l'exercice.

1.6 Exercice 8

Par définition, nous avons :

$$T^* \geq T,$$

donc

$$g(T^*) \geq g(T),$$

en ayant exploité le caractère croissant de la fonction g. Or $g \circ T^*$ est mesurable comme composition de deux fonctions qui le sont (g l'est car elle est continue à gauche par hypothèse). D'où

$$g(T)^* \leq g(T^*)$$

Nous obtenons ainsi notre première inégalité. Pour la seconde inégalité, soit $\epsilon > 0$, nous avons

$$T^* - \epsilon < T$$

Pour obtenir cette inégalité, raisonner par l'absurde et utiliser la définition de la fonction couverture-mesurable (*measurable cover function* en V.O.). Donc

$$g(T^* - \epsilon) \leq g(T).$$

Toujours par le caractère croissant de g. On en déduit ainsi

$$g(T^* - \epsilon) \leq g(T)^*,$$

et en exploitant la continuité à gauche, il suit en faisant tendre ϵ vers 0

$$g(T^*) \leq g(T)^*$$

ce qui est le résultat souhaité. La deuxième assertion suit de la première appliqué à la fonction $x \mapsto -g(-x)$.
Supposons à présent g mesurable, croissante et de bijection mesurable. A nouveau, puisque

$$g(T^*) \geq g(T),$$

nous obtenons

$$g(T)^* \leq g(T^*).$$

Considérons U une fonction mesurable tel que l'inégalité suivante soit vérifiée presque sûrement

$$g(T^*) \geq U \geq g(T).$$

Nous obtenons alors, en exploitant la bijection réciproque de g

$$g^{-1}(U) \geq T.$$

Or $g^{-1}(U)$ est mesurable comme composée de fonctions qui le sont, d'où

$$g^{-1}(U) \geq T^* \quad \Longleftrightarrow \quad U \geq g(T^*),$$

vérifiée presque sûrement. Ainsi

$$g(T^*) = U \geq g(T)^*$$

Par définition. Ce qui conclut l'exercice.