SCC0201 - Introdução à Ciência da Computação II

Relatório do Projeto 1

Alunos	**NUSP**
Alec Campos Aoki	15436800
Fernando Valentim Torres	15452340

Análise Teórica

Força Bruta

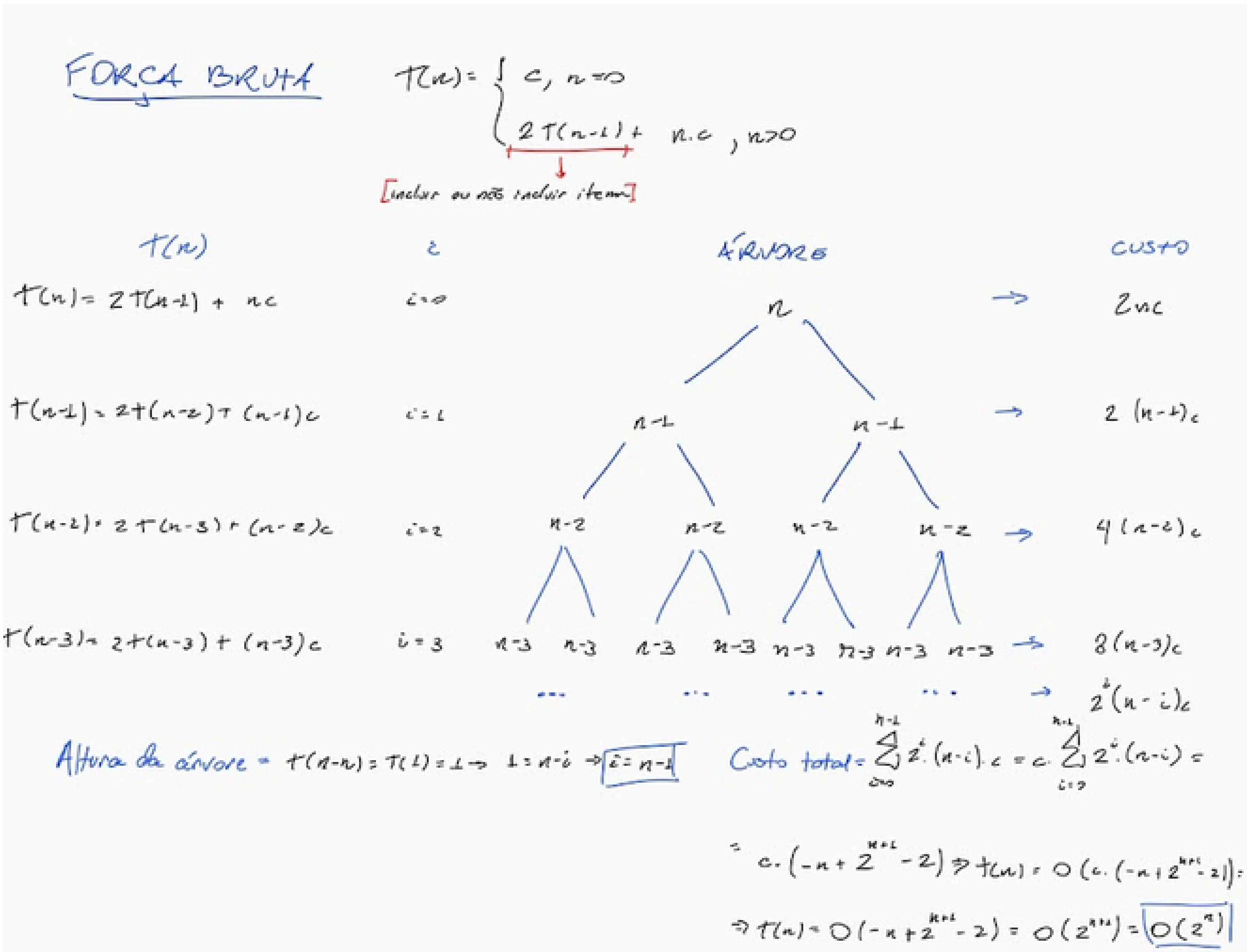
🞎 Implementação

```c
#include "../brute.h"

int brute(ITEM **itemList, int maxWeight, int itemsQuantity) {
 if (itemsQuantity == 0 || maxWeight == 0) { //O(1)
   return 0; //O(1)
 }
 int itemWeight = getWeight(itemList[itemsQuantity - 1]); //O(1)
 if (itemWeight > maxWeight) //O(1)
   return brute(itemList, maxWeight, itemsQuantity - 1); //T(n-1)
 int bestPathIncludingTheItem = //O(1)
     getValue(itemList[itemsQuantity - 1]) + //O(1)
     brute(itemList, maxWeight - itemWeight, itemsQuantity - 1); //T(n-1)
 int bestPathExcludingTheItem = brute(itemList, maxWeight, itemsQuantity - 1); //T(n-1)
 return maxBetween(bestPathExcludingTheItem, bestPathIncludingTheItem); //O(1)
}
// T(n) = c, n=0 (caso base)
// T(n) = 2*T(n-1) + 2*n*c, n>0
```

🞎 Equações de Recorrência/Análise de Complexidade

A implementação força bruta consiste de testar todos os casos possíveis, um a um. Isto é feito criando, a cada item, dois caminhos: o de incluí-lo e o de não incluí-lo na mochila. Obviamente, nos casos em que adicionar o item é impossível (o peso máximo da mochila ultrapassado), a única

possibilidade é o de não incluí-lo. O **caso base** é quando não há mais itens a serem checados, ou quando a mochila já se encontra cheia.
Analisando o código, chegamos em sua equação de recorrência (ver comentários no código abaixo). Resolvendo a árvore de recorrência, temos que a complexidade do algoritmo de força bruta é $O(2^n)$, ou seja, exponencial. Essa complexidade é coerente com a lógica do algoritmo, visto que ele checa **todos** os casos possíveis, e a taxa de crescimento exponencial é uma das mais rápidas possíveis, tornando este o método mais lento dentre os 3. Esse algoritmo alcança a resposta correta 100% das vezes pois calcula todas as possibilidades e seleciona a melhor.



Algoritmo Guloso

Implementação

```
#include "../greedy.h"
```

```c
int greedy(ITEM **itemList, int maxWeight, int itemsQuantity) {

 quicksort(itemList, 0, itemsQuantity - 1); //O(n^2) pior caso, O(n*log(n)) caso médio
 float biggestMoneyAmount = 0; //O(1)
 for (int i = 0; i < itemsQuantity; i++) { //O(n)
   int itemWeight = getWeight(itemList[i]); //O(1)
   if (itemWeight <= maxWeight) { //O(1)
     maxWeight -= itemWeight; //O(1)
     biggestMoneyAmount += getValue(itemList[i]); //O(1)
   }
 }
 return biggestMoneyAmount; //O(1)
}
//Análise de recorrência não aplicável. T(n) = O(n^2)
```

▯ Equações de Recorrência/Análise de Complexidade

O algoritmo guloso funciona selecionando os arquivos com a maior relação $\frac{valor}{peso}$. Para isso, o vetor precisa estar ordenado. Em nossa implementação, calculamos todas as relações e as ordenamos usando o algoritmo *quicksort*, que tem complexidade $O(n^2)$ em seu pior caso (mas complexidade $O(nlog(n)$ em seu caso médio). Após o *quicksort*, a única operação dependente do tamanho da entrada é um laço *for* que percorre o vetor ordenado (responsável por adicionar os itens na mochila), ou seja, tem complexidade $O(n)$. Levando como limite superior a função de maior taxa de crescimento, temos $T(n) = O(n^2)$. Apesar de o algoritmo guloso não possuir recorrências, podemos analisar o algoritmo de ordenação utilizado nele.

ALGORITMO GULOSO

→ QUICKSORT → o vetor já está ordenado e tomamos como pivot o último vetor, o que gera a equação de recorrência a seguir

PIOR CASO: $\begin{cases} T(n) = c, & n = 1 \\ T(n) = T(n-1) + c.n \end{cases}$

i	ÁRVORE DE RECORRÊNCIA	CUSTO
$i=0$	n	cn
$i=1$	$n-1$	$c.(n-1)$
$i=2$	$n-2$	$c.(n-2)$
i	$n-i$	$c.(n-i)$

caso base: $T(n)=1 \rightarrow n-i=1 \rightarrow \boxed{i=n-1}$ → profundidade da árvore

custo total: $\sum_{i=0}^{n-1}[c.(n-i)] = c.\sum_{i=0}^{n-1}(n-i) = c.\left(\sum_{i=0}^{n-1} n - \sum_{i=0}^{n-1} i\right) = c.\left(n.(n-1) - \frac{(n-1).n}{2}\right) =$

$= c.\frac{n.(n-1)}{2} \rightarrow T(n) = O\left(c.\frac{(n^2-n)}{2}\right) = O\left(\frac{n^2-n}{2}\right) = O(n^2-n) = \boxed{O(n^2)}$

→ escolhemos o pivot de tal forma que dividimos o vetor ao meio

CASO MÉDIO: $\begin{cases} T(n) = c, & n=1 \\ T(n) = 2.T\left(\frac{n}{2}\right) + c.n \end{cases}$

i	ÁRVORE DE RECORRÊNCIA	CUSTO
$i=0$	n	$c.n$
$i=1$	$\frac{n}{2}$ $\frac{n}{2}$	$2.c.\frac{n}{2} = c.n$
$i=2$	$\frac{n}{4}$ $\frac{n}{4}$ $\frac{n}{4}$ $\frac{n}{4}$	$4.c.\frac{n}{4} = c.n$
	...	
i	$\frac{n}{2^i}$	$c.n$

caso base: $T(n)=1 \rightarrow \frac{n}{2^i}=1 \rightarrow 2^i = n \rightarrow \log_2 2^i = \log_2 n \rightarrow \boxed{i = \log_2 n}$ → profundidade da árvore

custo total: $\sum_{i=0}^{\log_2(n)} c.n = c.\sum_{i=0}^{\log_2(n)} n = c.n.\log_2(n) \rightarrow T(n) = O(c.n.\log_2(n)) = \boxed{O(n.\log_2(n))}$

Importante notar que esse algoritmo **não** garante uma solução ótima (não alcança a melhor resposta em 100% dos casos) para o problema da mochila 0/1 pois nesse problema devemos incluir ou excluir o item em sua totalidade (não podemos dividí-lo, como no problema da mochila fracionada). Podemos mostrar que o algoritmo guloso não é valido no problema 0/1 usando um exemplo: suponhamos uma mochila de peso 6, 1 item de valor 10 e peso 5 (relação = 2), e 2 itens de valores 5.5 e peso 3 (relação = 1.83); o primeiro item tem maior relação e seria escolhido pelo algoritmo guloso, mas os dois outros itens juntos resultam em um valor maior, apesar de terem uma relação menor. Esse método é o segundo mais eficiente dentre os três (a taxa de crescimento de n^2 é menor que 2^n), apesar de não conseguir atingir a resposta certa para todos os casos. Selecionando um algoritmo de ordenação com pior caso menor que n^2, como o *mergesort* ($O(nlog(n))$), o limite superior passa a ser a checagem do vetor de razões, ou seja, $O(n)$.

Programação Dinâmica

Implementação

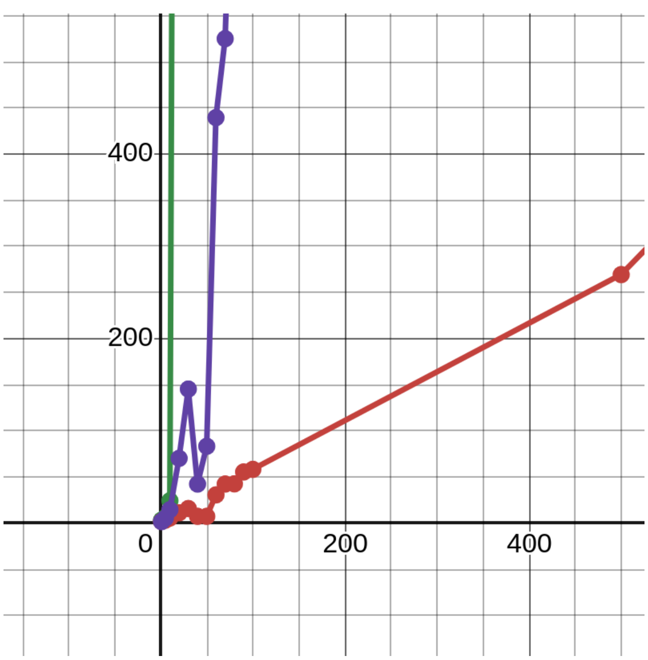
```
#include "../dynamic.h"

int dynamic(ITEM **itemList, int maxWeight, int itemQuantity) {
 int dp[itemQuantity + 1][maxWeight + 1]; //O(1)


  for (int i = 0; i <= itemQuantity; i++) { //O(n)
   for (int weight = 0; weight <= maxWeight; weight++) { //O(w)
     if (i == 0 || weight == 0) { //O(1)
       dp[i][weight] = 0; //O(1)
     } else if (getWeight(itemList[i - 1]) <= weight) { //O(1)
       dp[i][weight] = //O(1)
           maxBetween(getValue(itemList[i - 1]) +
                             dp[i - 1][weight - getWeight(itemList[i - 1])],
                         dp[i - 1][weight]);
     } else {
       dp[i][weight] = dp[i - 1][weight]; //O(1)
     }
   }
 }
 return dp[itemQuantity][maxWeight]; //O(1)
}
```

Equações de Recorrência/Análise de Complexidade

A solução do problema utilizando programação dinâmica consiste em ***indiretamente*** “testar” todas as possibilidades, sem necessariamente calculá-las repetidamente, por meio do uso do método da tabulação. Começamos construindo uma tabela com as colunas sendo os pesos máximos da mochila, e as linhas sendo cada item inserido. Analisamos coluna a coluna para cada linha; se conseguimos incluir o item da linha, verificamos se seu valor é superior ao definido para a mesma coluna, mas na linha anterior; se for, escrevemos esse valor na tabela, senão copiamos o valor da linha anterior.
Vamos dividir a análise de complexidade dessa solução em duas: uma chamada de *estados únicos* e outra chamada de *cache*. A complexidade de cache se refere à complexidade de cada execucação da função (sem considerar recursões). Analisando o código acima, temos dois laços *for*; o primeiro tem limites [0, n], *n* a quantidade de itens recebidas,e o segundo tem limites [0, w], *w* o peso máximo maximo da mochila. Ambos são incrementados 1 a 1. Isso nos dá uma complexidade de cache de $O(nw)$. A complexidade de estados únicos se refere à chamadas recursivas (ou seja, o total de vezes que a função será chamada). Nesse caso, coma a função é chamada somente uma vez (ela não é recursiva), temos que a complexidade de estados dela é $O(1)$. A complexidade de todo algoritmo pode ser dado unindo essas duas complexidades, o que resulta em $O(nw)$. Podemos pensar, também, que por estarmos preenchendo uma matriz *n* por *w*, temos $O(nw)$. Esse algoritmo é o mais eficiente dos 3, e chega sempre no resultado certo (checa todas as possibilidades assim como o caso de força bruta, mas mais efetivamente).

Análise Empírica

Gráficos



Força bruta ($O(2^n)$)

Guloso ($O(n^2)$)

Programação dinâmica ($O(nw)$)

Eixo X: quantidade de itens (n)

Eixo Y: tempo de execução (em nanosegundos)

x_1	y_1
1	3
5	6
10	24
20	2 561
30	8 228.6
40	38 672
50	197 499

x_2	y_2
1	1.6
5	3
10	5.33
20	11
30	15.6
40	7
50	7
60	30.3
70	42
80	42.3
90	55
100	58
500	269
750	524

x_3	y_3
1	1.3
5	5
10	14.3
20	70
30	145
40	42
50	83
60	439
70	524.6
80	812.3
90	954
100	1067.3
500	14268
750	39628.6

Discussões

□ Resultados Obtidos (Comparação)

Conforme esperado, temos que a programação dinâmica é notávelmente mais eficiente que os outros dois métodos, conforme indicado por sua complexidade e implementação. Sua taxa de crescimento é muito menor que as outras duas funções, como pode ser observado pelo gráfico. Analogamente, temos que o algoritmo de força bruta é o menos eficiente (como também indicado por sua complexidade e implementação), como também observável pelo gráfico. Por testarem todos os casos possíveis, a programação dinâmica e a força bruta conseguem encontrar o maior valor possível 100% das vezes, sendo soluções exatas/ótimas. Devido à natureza do algoritmo guloso, ele não alcança a resposta certa em todos os casos, sendo portanto uma solução aproximada.
Interessante notar que, a depender do algoritmo de ordenação utilizado no algoritmo guloso, seu tempo de execução pode se reduzir, e sua complexidade pode passar a ser $O(n)$, conforme explicado anteriormente.

□ Análise Teórica x Empírica

Conforme observável pelo gráfico, temos que, **a grosso modo**, cada algoritmo realmente opera conforme sua notação *big O*. No entanto, devido à própria natureza da notação, além de fatores inerentes ao computador, a implementação dos algoritmos e os casos testes, temos resultados que fogem do padrão esperado (como as quedas súbitas no tempo de execução observados no algoritmo guloso e na programação dinâmica), resultando em divergências do comportamento puramente teórico esperado. Disso concluímos que a análise teórica fornece uma boa **previsão** do comportamento do algoritmo, mas que ele pode diferir consideravelmente empiricamente, visto que a análise teórica desconsidera múltiplas variáveis que afetam o tempo de execução de um código.