11/06/2025 **TEMA 10**

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Calcular el valor de $k \in \mathbb{R}$ sabiendo que: $\int_1^4 (kx - \sqrt{x})dx = \frac{31}{3}$

De acuerdo con lo estudiado en Integrales, Métodos de Integración y Propiedades de la Integral Definida, previamente se procede al cálculo de una primitiva de $f(x) = kx - \sqrt{x}$

Entonces,

$$\int (kx - \sqrt{x})dx = \int (kx - x^{\frac{1}{2}})dx = k\frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = k\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

donde C es la constante de integración.

Luego, se calcula la integral definida aplicando la regla de Barrow:

$$\int_1^4 (kx - \sqrt{x})dx = k\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4$$

$$\int_1^4 (kx - \sqrt{x})dx = k\frac{4^2}{2} - \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} - \left(k\frac{1^2}{2} - \frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\int_1^4 (kx - \sqrt{x})dx = 8k - \frac{16}{3} - \frac{1}{2}k + \frac{2}{3}$$

$$\int_1^4 (kx - \sqrt{x})dx = \frac{15}{2}k - \frac{14}{3}$$

Según el enunciado, el valor de la integral es $\frac{31}{3}$

Entonces,

$$\frac{15}{2}k - \frac{14}{3} = \frac{31}{3}$$

Queda una ecuación de primer grado con la incógnita $k$que se despeja según los procedimientos estudiados:

$$\frac{15}{2}k = \frac{31}{3} + \frac{14}{3}$$

$$\frac{15}{2}k = 15$$

$$k = 2$$

2. Sea $f(x) = 2^{3x+2} - 1$. Obtener los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes cartesianos.

Para hallar la intersección con el eje x tenemos en cuenta que sus puntos son de la forma $(x; 0)$, por lo tanto, debemos encontrar los valores de x que hacen que la función valga 0, es decir:

$$f(x) = 0$$

$$2^{3x+2} - 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación que quedó planteada para hallar los valores de x buscados. Sumamos 1 en ambos miembros de la igualdad:

$$2^{3x+2} = 1$$

Para que el resultado de esta potencia sea 1, el exponente debe ser nulo, con lo cual:

$$3x + 2 = 0$$

Restamos 2 en ambos miembros de la igualdad:

$$3x = -2$$

Dividimos por 3:

$$x = -\frac{2}{3}$$

Entonces: $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$

Para hallar la intersección con el eje y tenemos en cuenta que sus puntos son de la forma $(0; y)$, entonces, debemos encontrar la imagen de $x = 0$, es decir:

$$f(0) = 2^{3\cdot 0+2} - 1$$

$$f(0) = 2^2 - 1$$

$$f(0) = 4 - 1$$

$$f(0) = 3$$

Entonces, $(0; 3)$

3. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{6x+1}}$ en el punto de abscisa $\boldsymbol{x=4}$.

En primer lugar, analizamos qué valor toma la función $f(x)$ en $x=4$:

$$f(4)=\sqrt{6.4+1}$$

$$f(4)=5$$

Para determinar la ecuación de la recta tangente a gráfica de la función $f(x)$ debemos hallar su derivada y evaluarla en $x=4$.

$$f(x)=\sqrt{6x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2.\sqrt{6x+1}}.6$$

$$f'(x)=\frac{3}{\sqrt{6x+1}}$$

Reemplazamos por $x=4$:

$$f'(4)=\frac{3}{\sqrt{6.4+1}}=\frac{3}{5}$$

Como la derivada de la función en un punto es igual a la pendiente de la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto, entonces:

$$y=\frac{3}{5}x+b$$

Para hallar el valor de b, reemplazamos por las coordenadas del punto (4; 5):

$$5=\frac{3}{5}4+b$$

$$5-\frac{12}{5}=b$$

$$\frac{13}{5}=b$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es: $\boldsymbol{y=\frac{3}{5}x+\frac{13}{5}}$

4. Siendo $\vec{u} = (1; 0; -1)$ y $\vec{v} = (4; 2; 1)$ hallar los valores de a y b $\in \mathbb{R}$ tal que $a\vec{u} + b\vec{v} = (10; 6; 5)$

Para determinar los valores solicitados planteamos la expresión dada y reemplazamos los vectores u y v:

$$a\vec{u} + b\vec{v} = (10; 6; 5) \quad \Longrightarrow \quad a(1; 0; -1) + b(4; 2; 1) = (10; 6; 5)$$

$$(a; 0; -a) + (4b; 2b; b) = (10; 6; 5)$$

$$(a + 4b; 2b; -a + b) = (10; 6; 5)$$

De esta igualdad de vectores surgen las siguientes ecuaciones:

$$a + 4b = 10 \quad , \quad 2b = 6 \quad y \quad -a + b = 5$$

Despejamos b en la segunda ecuación y reemplazamos en la tercera:

$$b = 3 \;\Longrightarrow\; -a + 3 = 5 \;\Longrightarrow\; -a = 2 \;\Longrightarrow a = -2$$

Podemos utilizar la primera ecuación para verificar:

$$-2 + 4.3 = 10$$

Por lo tanto los valores buscados son:

$$a = -2 \quad y \quad b = 3$$