28/04/2025

TEMA 7

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar analíticamente los valores de k para que la distancia entre los puntos $A = (2;\ 1)$ y $B = (-k; -5)$ sea 10.

Para determinar la distancia entre dos puntos $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$ utilizamos la fórmula:

$$d(A;B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

En este caso sería:

$$d(A;B) = \sqrt{\left(2-(-k)\right)^2 + \left(1-(-5)\right)^2} \implies 10 = \sqrt{(2+k)^2 + 6^2}$$

$$100 - 36 = (2+k)^2 \implies |2+k| = \sqrt{64} \implies |2+k| = 8$$

Por lo tanto:

$$2 + k = 8 \qquad o \qquad 2 + k = -8$$

$$k = 6 \qquad o \qquad k = -10$$

2. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^4-5x+4}{2x^3-2}$

Para resolver este límite tendremos en cuenta los conceptos vistos en el apartado de "Límite y asíntotas"

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^4-5x+4}{2x^3-2} =$$

Al querer calcular este límite, vemos que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito. Por lo tanto, estamos ante una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$"

Para resolver esta indeterminación, dividimos a todos los términos de esa expresión por la x de mayor exponente que, en este caso, resulta ser x^4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6x^4}{x^4}-\frac{5x}{x^4}+\frac{4}{x^4}}{\frac{2x^3}{x^4}-\frac{2}{x^4}} =$$

Realizando las simplificaciones correspondientes, nos queda:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6-\frac{5}{x^3}+\frac{4}{x^4}}{\frac{2}{x}-\frac{2}{x^4}} =$$

Al volver a evaluar el límite, sabemos que los términos $\frac{5}{x^3}$; $\frac{4}{x^4}$; $\frac{2}{x}$ y $\frac{2}{x^4}$ tienden a cero.

Por lo tanto, el numerador tiende a 6 y el denominador a cero. Por lo que el límite tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6-\frac{5}{x^3}+\frac{4}{x^4}}{\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^4}} = \infty$$

3. Hallar $\boldsymbol{h(x)}$, si $\boldsymbol{h = f \circ g}$ para $\boldsymbol{f(x) = -3x + 2k}$, $\boldsymbol{g(x) = x^2 - kx + 1}$, y sabiendo que se cumple que $\boldsymbol{h(1) = 4}$.

Para la realización de este ejercicio se deben considerar los siguientes contenidos:

Sesión 3: Funciones (introducción: dominio - imagen); Función lineal

Sesión 4: Función cuadrática

Sesión 5: Composición de funciones

En primer lugar, antes de realizar la composición de funciones, debemos verificar que:

$$\text{Im } g \subseteq \text{ Dom } f$$

Como f es una función lineal, su dominio será: $\mathbb{R}$, con lo cual es posible realizar $h = f \circ g$:

$$h(x) = f[g(x)]$$

$$h(x) = f(x^2 - kx + 1)$$

$$h(x) = -3.(x^2 - kx + 1) + 2k$$

$$h(x) = -3x^2 + 3kx - 3 + 2k$$ (Aplicamos propiedad distributiva)

Luego, como tenemos de dato que $h(1) = 4$, reemplazamos en la expresión para hallar k:

$$h(1) = -3\,.\,1^2 + 3k - 3 + 2k$$

$$4 = -3 + 5k - 3$$

$$4 = -6 + 5k$$

$$4 + 6 = 5k$$ (sumamos miembro a miembro 6)

$$10 = 5k$$

(dividimos miembro a miembro por 5)

$$2 = k$$

4. Hallar el valor de $k \in \Re$, para que la gráfica de $y = f(x)$pase por el punto de coordenadas $(0; 2)$, siendo $2f(x) + 3 = 2x + k$

Para resolver este ejercicio utilizaremos los conceptos vistos en los apartados **“Ecuaciones e inecuaciones”, “Funciones” y “Función lineal”**

Si la función pasa por el punto $(0; 2)$ quiere decir que $f(0) = 2$.Por lo tanto, reemplazando, en la condición dada, a la "x" por 0, y despejando obtenemos que:

$$2f(0) + 3 = 2 \cdot 0 + k$$

$$2 \cdot 2 + 3 = 0 + k$$

$$7 = k$$