12/06/2024

TEMA 7

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar el dominio y, si existen, los puntos críticos de la función $f(x) = (x^3+1)^{-1}.e^{x^3}$, determinando si son máximos o mínimos.

En primer lugar, analizamos el dominio de la función: $f(x) = (x^3+1)^{-1}.e^{x^3} = \frac{e^{x^3}}{x^3+1}$

Como el denominador no puede ser cero, entonces:

$$\boldsymbol{Dom\, f(x)}: \mathfrak{R} - \{-1\}$$

Para determinar si la función dada tiene extremos relativos, derivamos la función considerando que la derivada de un cociente es: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v+u.v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{e^{x^3}.3x^2.(x^3+1) - e^{x^3}(3x^2)}{(x^3+1)^2}$$

Analizamos los puntos críticos, estos son los valores de x para los cuales la derivada no existe y los valores de x para los cuales la derivada es 0.

Teniendo en cuenta el primer caso (los valores para los cuales no existe la derivada), el valor x=-1, que anula el denominador de $f'(x)$ podría ser un punto crítico, pero como este valor no pertenece al dominio de la función, lo descartamos.

Buscamos luego los valores que anulan a la derivada. Estos serán los valores para los cuales el numerador es 0, esto significa que:

$$\frac{e^{x^3}.3x^2.x^3}{(x^3+1)^2} = 0 \rightarrow e^{x^3}.3x^5 = 0$$

Como $e^{x^3} \neq 0$ entonces $3x^5 = 0$

Por lo tanto, el punto crítico de la función es $x = 0$

Determinamos, usando el criterio de la derivada primera, si existen extremos. Analizamos el signo de la derivada en los intervalos (−∞; -1); (-1; 0) y (0;+∞).

Para ello tomamos algún valor de x que pertenezca a cada intervalo y evaluamos el signo de la derivada en él. Nos ayudamos con una tabla:

Intervalo	(−∞; -1)	(-1;0)	(0;+∞)
Para	x=-2	x=-0,5	x=2
Signo de $f'(x)$	$f'(-1)<0$	$f'(0{,}5)<0$	$f'(2)>0$

Como f' cambia de negativa a positiva en x =0, alcanza en dicho valor un mínimo local. Por lo tanto, el punto de coordenadas (0; 1) es un mínimo local.

2. Sea $\boldsymbol{f(x) = ln(x^2 - x)}$. Hallar $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{f'(a) = 0}$.

Para resolver este ejercicio se tendrán en cuenta los conceptos abordados durante la cursada en la unidad de derivadas de una función.

Veamos que la función propuesta está representada por una función compuesta, por lo tanto, para resolver utilizaremos la regla de la cadena y las propiedades de derivación.
Primero debemos calcular la derivada de la función propuesta:

$$f(x) = ln(x^2 - x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - x} . (x^2 - x)'$$
$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - x} . (2x - 1)$$
$$f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

Ahora bien, el ejercicio nos pide hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $f'(a) = 0$.

Por lo tanto:

$$f'(a) = 0$$
$$f'(a) = \frac{2a - 1}{a^2 - a} = 0$$

Resolvemos la ecuación propuesta:

$$\frac{2a - 1}{a^2 - a} = 0$$
$$\frac{2a - 1}{a^2 - a} . (a^2 - a) = 0 . (a^2 - a)$$
$$2a - 1 = 0$$

Sumamos miembro a miembro 1:

$$2a - 1 + 1 = 0 + 1$$
$$2a = 1$$

Divido miembro a miembro 2:

$$\frac{2a}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$$

3. Determinar el/los ceros de la función $h(x) = \log_a x + b$, si $h(1) = 1$ y $h(3) = 2$.

Para resolver este ejercicio utilizaremos los conceptos vistos en los apartados **“Ecuaciones e inecuaciones”** y **“Funciones exponencial y logaritmo”**

Para poder determinar los ceros de la función, debemos hallar los valores de "a" y de "b".

Para ello, utilizaremos los datos dados que nos brinda el enunciado. Como sabemos que $h(1) = 1$:

$$h(1) = \log_a 1 + b$$
$$1 = 0 + b$$
$$1 = b$$

Ahora sabiendo que $b = 1$, utilizamos el otro dato del enunciado para hallar "a”:

$$h(3) = \log_a 3 + 1$$
$$2 = \log_a 3 + 1$$
$$2 - 1 = \log_a 3$$
$$1 = \log_a 3$$
$$a^1 = 3$$
$$a = 3$$

Entonces, la función es $h(x) = \log_3 x + 1$

Para determinar los ceros la igualamos a cero y despejamos para obtener el valor de x:

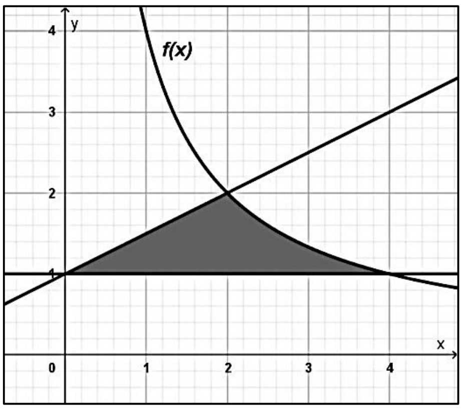
$$0 = \log_3 x + 1$$
$$-1 = \log_3 x$$

Aplicando definición de logaritmo:

$$3^{-1} = x$$
$$\frac{1}{3} = x$$

Entonces, $C^0 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

4. Sabiendo que $f(x) = \frac{4}{x}$, calcular el área de la región sombreada.



Podemos observar que la ordenada al origen de la función lineal es 1

$$y = ax + 1$$

Además, pasa por (2;2)

$$2 = a.2 + 1$$

$$\frac{1}{2} = a$$

Por lo que la función resulta:

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

Planteamos dos integrales, ya que el primer tramo está delimitado por la recta y la función constante y=1 y el segundo está delimitado por f y la función constante

$$\int_0^2 \frac{1}{2}x + 1 - 1\, dx + \int_2^4 \frac{4}{x} - 1 dx$$

$$\int_0^2 \frac{1}{2}x dx + \int_2^4 \frac{4}{x} - 1 dx$$

$$\left(\frac{2^2}{4}\right) - \left(\frac{0^2}{4}\right) + (4\ln(4) - 4) - (4\ln(2) - 2)$$

$$1 + 4\ln(4) + 4 - 4\ln(2) + 2$$

$$8\ln(2) - 4\ln(2) - 1$$

$$4\ln(2) - 1$$