28/04/2025 **TEMA 11**

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = -kx + 1}$ y $\boldsymbol{g(x) = (x+1)^2 + 2}$. Calcular $\boldsymbol{k \in R}$, sabiendo que la abscisa de uno de los puntos de intersección de las curvas es 1.

Sabemos que las funciones se intersecan en, al menos, un punto. El valor de x de uno de esos puntos es 1, luego podemos plantear que $f(1) = g(1)$.

Igualando ambas expresiones consideradas en $x = 1$, llegamos a:

$$f(1) = g(1)$$

$$-k.1 + 1 = (1+1)^2 + 2$$

$$-k = 6 - 1$$

$$-k = 5$$

$$k = -5$$

Entonces, $f(x) = 5x + 1$ y $g(x) = (x+1)^2 + 2$

2. Sea $h(x) = \frac{3+x}{2-bx}$ hallar $b \in \mathbb{R}$ tal que h tenga asíntota vertical en $x = 2$.

Para que f tenga asíntota vertical en $x = 2$, el límite de f cuando x tiende a 2 es igual a infinito. Es decir: $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$.

Entonces, evaluamos el límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3+x}{2-bx} = \frac{3+2}{2-b.(2)} = \frac{5}{2-2b}$$

Para que el límite no exista, el denominador debe tender a cero. Por lo tanto:

$$2 - 2b = 0$$
$$-2b = -2$$
$$b = 1$$

3. Dada la función $f(x) = \frac{x}{3x-k}$ hallar su función inversa $f^{-1}(x)$ y obtener el valor de la constante $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que $f^{-1}(2) = 4$

En principio, para determinar la expresión analítica de f^{-1}, planteamos:

$$y = \frac{x}{3x-k}$$

$$y \cdot (3x-k) = x \quad \text{siempre que } x \neq \frac{k}{3}$$

$$3xy - ky = x$$

$$3xy - x = ky$$

$$x \cdot (3y-1) = ky$$

$$x = \frac{ky}{3y-1}$$

De donde, finalmente:

$$f^{-1}(x) = \frac{kx}{3x-1}$$

Por otra parte:

$$f^{-1}(2) = 4 \rightarrow 4 = \frac{2k}{3.2-1}$$

$$\rightarrow 4 = \frac{2k}{6-1}$$

$$\rightarrow 4 = \frac{2k}{5}$$

$$\rightarrow \frac{4.5}{2} = k$$

$$\rightarrow 10 = k$$

Observación

Otra forma de obtener el valor de la constante $k \in \mathbb{R}$ es a partir de la siguiente consideración teórica:

Si $f^{-1}(2) = 4$ entonces $f(4) = 2$, por lo que también se podría trabajado sobre la expresión analítica de f, tal como se muestra a continuación:

$$2 = \frac{4}{3.4-k}$$

$$\rightarrow 2 = \frac{4}{12-k}$$

$$\rightarrow 2 \cdot (12-k) = 4$$

$$\rightarrow 24 - 2k = 4$$

$$\rightarrow \frac{24-4}{2} = k$$

$$\rightarrow 10 = k$$

En la resolución del presente ejercicio empleamos el concepto general de función inversa desarrollado en el marco de la unidad temática “Funciones”.

4. Hallar el conjunto de negatividad de la función $h(x) = x^2(3 - x)$.

Para determinar el conjunto de negatividad pedido planteamos la siguiente inecuación:

$$x^2(3 - x) < 0$$

Considerando que un producto es negativo cuando ambos factores son de distinto signo, y que x^2 siempre es mayor que cero (positivo) cuando "x" es distinto de 0, resulta necesariamente:

$$3 - x < 0$$

$$3 < x$$

$$Solución: (3; +\infty)$$