APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Dados los vectores $\vec{u} = (3; m; 9)$ y $\vec{v} = (5; 20; 15)$ se pide:

a) Hallar el valor de $m \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} \perp \vec{v}$
b) Hallar el valor de $m \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} \,//\, \vec{v}$

a) Para la resolución de este punto debemos tener en cuenta que si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es nulo. Esto significa que:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}.\vec{v} = 0$$

Planteamos el producto escalar, igualamos a $\mathbf{0}$ y resolvemos:

$$\vec{u}.\vec{v} = 3.5 + m.20 + 9.15 \quad \Longrightarrow \quad 15 + 20m + 135 = 0$$

$$20m = -150 \quad \Longrightarrow \quad m = -\frac{15}{2}$$

b) Dos vectores son paralelos si tienen la misma dirección, por lo tanto debe verificarse que:

$$\vec{u} \;//\; \vec{v} \Longrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \qquad y \quad k \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto:

$$\vec{u} = k\vec{v} \quad \Longrightarrow \quad (3; m; 9) = k(5; 20; 15) \quad \Longrightarrow \quad (3; m; 9) = (5k; 20k; 15k)$$

Teniendo en cuenta que dos vectores son iguales si sus componentes son iguales, entonces:

$$3 = 5k \quad , \quad m = 20k \quad y \quad 9 = 15k$$

De la primera y tercera ecuación concluimos que $k = \frac{3}{5}$. Entonces:

$$m = 20k \quad \Longrightarrow \quad m = 20.\frac{3}{5} \quad \Longrightarrow \quad m = 12$$

2. Sea $f(x) = 2^{-x+k} - 2^{2x}$, obtener el valor de $k \in R$ para que la ordenada al origen de la función f sea 1.

Para hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ pedido, debemos tener en cuenta que $y = 1$ es la ordenada al origen de la función, por lo tanto, hallamos $f(0)$

$$f(0) = 2^{0+k} - 2^{2\cdot 0}$$
$$1 = 2^{0+k} - 2^{0}$$
$$1 = 2^{k} - 1$$

Sumamos 1 en ambos miembros:

$$2 = 2^{k}$$

Para que se verifique la igualdad ambas potencias deben ser iguales, como las bases son iguales, los exponentes deben serlo:

$$1 = k$$

3. Determinar el/los valores de $x \in \mathbb{R}$ para que $h'(x) = 4$, si se sabe que $h(x) = fog$; $f(x) = 2x$ $g(x) = -2x^2 + 3$.

Para resolver este ejercicio tendremos en cuenta los conceptos vistos en los apartados **"Derivadas"** y **"Derivada función compuesta"**

Para poder hallar lo pedido en el ejercicio, primero debemos calcular la derivada de la función compuesta. Esto lo realizamos teniendo en cuenta la regla de la cadena:

$$fog'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g(x)$$
$$f'(x) = 2$$

Entonces $f'(g(x)) = 2$

$$g'(x) = -4x$$

Por lo tanto:

$$fog'(x) = 2 \cdot (-4x)$$
$$h'(x) = -8x$$

Como el enunciado nos pide hallar los valores de x para que la derivada de h sea 4, planteamos:

$$4 = -8x$$
$$\frac{4}{-8} = x$$
$$-\frac{1}{2} = x$$

4. Determinar los límites de integración $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ sabiendo que $b = 3a$ y $a < b$ para que: $\int_a^b (4x+1)dx = 68$

De acuerdo con lo estudiado en Integrales, Métodos de Integración, y Propiedades de la Integral Definida, previamente se procede al cálculo de una primitiva de $f(x) = 4x + 1$

Entonces,

$$\int (4x+1)dx = 4\frac{x^2}{2} + x + C$$

Simplificando,

$$\int (4x+1)dx = 2x^2 + x + C$$

donde C es la constante de integración.

Luego, se calcula la integral definida aplicando la regla de Barrow:

$$\int_a^b (4x+1)dx = (2x^2 + x)|_a^b$$

$$\int_a^b (4x+1)dx = 2b^2 + b - (2a^2 + a)$$

Quitando el paréntesis precedido por el signo menos,

$$\int_a^b (4x+1)dx = 2b^2 + b - 2a^2 - a$$

Según el enunciado, el valor de la integral es 68

Entonces,

$$2b^2 + b - 2a^2 - a = 68$$

Se sabe, además, que $b = 3a$.

Sustituyendo, queda una ecuación con una sola incógnita:

$$2(3a)^2 + 3a - 2a^2 - a = 68$$

Se distribuye el cuadrado en el primer término,

$$2.9a^2 + 3a - 2a^2 - a = 68$$

$$18a^2 + 3a - 2a^2 - a = 68$$

Al reducir los términos semejantes, queda:

$$16a^2 + 2a - 68 = 0$$

Dividiendo miembro a miembro por 2, resulta:

$$8a^2 + a - 34 = 0$$

Se trata de una ecuación cuadrática cuyas soluciones se obtienen a partir de la conocida fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado. Entonces,

$$a_1 = 2 \ \text{ y } \ a_2 = -\frac{17}{8}$$

Considerando que $b = 3a$, resulta:

$$b_1 = 6 \ \text{ y } \ b_2 = -\frac{51}{8}$$

Debe tenerse en cuenta que $a < b$. Este desigualdad se verifica sólo para a_1 y b_1 pues $2 < 6$ pero $-\frac{17}{8} > -\frac{51}{8}$ (recordar la ubicación de los números en la recta numérica)

En definitiva,

$$a = 2 \ \text{ y } \ b = 6$$