APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{6x+1}$ en el punto de abscisa $x = 4$.

En primer lugar, analizamos qué valor toma la función $f(x)$ en $x = 4$:

$$f(4) = \sqrt{6.4 + 1}$$

$$f(4) = 5$$

Para determinar la ecuación de la recta tangente a gráfica de la función $f(x)$ debemos hallar su derivada y evaluarla en $x = 4$.

$$f(x) = \sqrt{6x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2.\sqrt{6x+1}}.6$$

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x+1}}$$

Reemplazamos por $x = 4$:

$$f'(4) = \frac{3}{\sqrt{6.4+1}} = \frac{3}{5}$$

Como la derivada de la función en un punto es igual a la pendiente de la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto, entonces:

$$y = \frac{3}{5}x + b$$

Para hallar el valor de b, reemplazamos por las coordenadas del punto (4; 5):

$$5 = \frac{3}{5}4 + b$$

$$5 - \frac{12}{5} = b$$

$$\frac{13}{5} = b$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es: $\boldsymbol{y = \frac{3}{5}x + \frac{13}{5}}$

2. Calcular el valor de $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ sabiendo que: $\int_{1}^{4}\left(\boldsymbol{kx}-\sqrt{\boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{dx}=\frac{31}{3}$

De acuerdo con lo estudiado en Integrales, Métodos de Integración y Propiedades de la Integral Definida, previamente se procede al cálculo de una primitiva de $f(x)=kx-\sqrt{x}$

Entonces,

$$\int (kx-\sqrt{x})dx=\int (kx-x^{\frac{1}{2}})dx=k\frac{x^2}{2}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=k\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

donde C es la constante de integración.

Luego, se calcula la integral definida aplicando la regla de Barrow:

$$\int_{1}^{4}\left(kx-\sqrt{x}\right)dx=k\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{4}$$

$$\int_{1}^{4}\left(kx-\sqrt{x}\right)dx=k\frac{4^2}{2}-\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}-\left(k\frac{1^2}{2}-\frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\int_{1}^{4}\left(kx-\sqrt{x}\right)dx=8k-\frac{16}{3}-\frac{1}{2}k+\frac{2}{3}$$

$$\int_{1}^{4}\left(kx-\sqrt{x}\right)dx=\frac{15}{2}k-\frac{14}{3}$$

Según el enunciado, el valor de la integral es $\frac{31}{3}$

Entonces,

$$\frac{15}{2}k-\frac{14}{3}=\frac{31}{3}$$

Queda una ecuación de primer grado con la incógnita $k$que se despeja según los procedimientos estudiados:

$$\frac{15}{2}k=\frac{31}{3}+\frac{14}{3}$$

$$\frac{15}{2}k=15$$

$$k=2$$

3. Siendo $\vec{u}=(1;0;-1)$ y $\vec{v}=(4;2;1)$ hallar los valores de a y b $\in \mathbb{R}$ tal que $a\vec{u}+b\vec{v}=(10;6;5)$

Para determinar los valores solicitados planteamos la expresión dada y reemplazamos los vectores u y v:

$$\boldsymbol{a\vec{u}+b\vec{v}=(10;6;5)} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a(1;0;-1)+b(4;2;1)=(10;6;5)}$$

$$\boldsymbol{(a;0;-a)+(4b;2b;b)=(10;6;5)}$$

$$\boldsymbol{(a+4b;2b;-a+b)=(10;6;5)}$$

De esta igualdad de vectores surgen las siguientes ecuaciones:

$$\boldsymbol{a+4b=10} \quad , \quad \boldsymbol{2b=6} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{-a+b=5}$$

Despejamos $\boldsymbol{b}$ en la segunda ecuación y reemplazamos en la tercera:

$$\boldsymbol{b=3 \;\Longrightarrow\; -a+3=5 \;\Longrightarrow\; -a=2 \;\Longrightarrow a=-2}$$

Podemos utilizar la primera ecuación para verificar:

$$\boldsymbol{-2+4.3=10}$$

Por lo tanto los valores buscados son:

$$\boldsymbol{a=-2 \quad y \quad b=3}$$

4. Sea $f(x) = 2^{3x+2} - 1$. Obtener los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes cartesianos.

Para hallar la intersección con el eje x tenemos en cuenta que sus puntos son de la forma $(x; 0)$, por lo tanto, debemos encontrar los valores de x que hacen que la función valga 0, es decir:

$$f(x) = 0$$

$$2^{3x+2} - 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación que quedó planteada para hallar los valores de x buscados. Sumamos 1 en ambos miembros de la igualdad:

$$2^{3x+2} = 1$$

Para que el resultado de esta potencia sea 1, el exponente debe ser nulo, con lo cual:

$$3x + 2 = 0$$

Restamos 2 en ambos miembros de la igualdad:

$$3x = -2$$

Dividimos por 3:

$$x = -\frac{2}{3}$$

Entonces: $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$

Para hallar la intersección con el eje y tenemos en cuenta que sus puntos son de la forma $(0; y)$, entonces, debemos encontrar la imagen de $x = 0$, es decir:

$$f(0) = 2^{3\cdot 0+2} - 1$$

$$f(0) = 2^2 - 1$$

$$f(0) = 4 - 1$$

$$f(0) = 3$$

Entonces, $(0; 3)$