APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Dadas $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x - 3$ con $h = g \circ f$, determinar $h^{-1}(x)$ y su dominio.

Para la resolución del ejercicio se han tenido en cuenta los contenidos desarrollados en la Unidad 3: Estudio de Funciones, Composición de Funciones, Función Inversa, Sesión 5.

Teniendo en cuenta que, por definición:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Reemplazando la expresión de f ,

$$h(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

Aplicando g,

$$h(x) = \frac{1}{x} - 3$$

La función compuesta queda definida porque el conjunto imagen de f está incluido en el dominio de g puesto que $Dom_g = R$ (función lineal)

Para el cálculo de la función inversa de h se efectúa el despeje de x considerando que:

$$y = \frac{1}{x} - 3$$

Sumando 3 en ambos miembros,

$$y + 3 = \frac{1}{x}$$

Se multiplican ambos miembros por x puesto que $x \neq 0$ ya que 0 no pertenece al dominio de f (se trata del único valor que anula el denominador)

$$x(y + 3) = 1$$

Entonces, dividiendo miembro a miembro por $y + 3 \neq 0$ resulta,

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{y+3}} \qquad \textbf{(1)}$$

La ecuación **(1)** tiene solución única para cualquier $\boldsymbol{y \neq -3}$ lo cual asegura la biyectividad y la existencia de la función inversa.

Entonces, permutando las variables porque es costumbre usar la letra $\boldsymbol{x}$ como variable independiente, la expresión de la función inversa de $\boldsymbol{h}$ queda:

$$\boldsymbol{h^{-1}(x) = \frac{1}{x+3}}$$

Para la determinación de su dominio, se excluyen los valores que anulan el denominador de la expresión.

En definitiva:

$$\boldsymbol{Dom_{h^{-1}} = R - \{-3\}}$$

2. Dadas $f(x) = -3x + 1$ y $g(x) = x^2 + kx - 2$, calcular $k \in R$ sabiendo que la abscisa de uno de los puntos de intersección de las funciones es 1.

Sabemos que las funciones se intersecan en, al menos, un punto. El valor de x de uno de esos puntos es 1, luego podemos plantear que $f(1) = g(1)$.

Igualando ambas expresiones consideradas en $x = 1$, llegamos a:

$$f(1) = g(1)$$

$$-3.1 + 1 = 1^2 + k.1 - 2$$

$$-2 = k - 1$$

$$k = -1$$

Entonces, $f(x) = -3x + 1$ y $g(x) = x^2 - x - 2$

3. Hallar el conjunto de positividad de la función $P(x) = (x-1)^2(x+2)$.

Para determinar el conjunto de positividad pedido planteamos la siguiente inecuación:

$$(x-1)^2(x+2) > 0$$

Considerando que un producto es positivo cuando ambos factores son del mismo signo, y que $(x-1)^2$ siempre es mayor que cero (positivo) cuando "x" es distinto de 1, resulta necesariamente:

$$x+2>0$$

$$x>-2$$

$$Solución: (-2; +\infty) - \{1\}$$

4. Sea $g(x) = \frac{x+4}{ax-1}$ **hallar** $a \in \mathbb{R}$ **tal que** g **tenga asíntota vertical en** $x = -3$**.**

Para que f tenga asíntota vertical en $x = -3$, el límite de f cuando x tiende a -3 es igual a infinito. Es decir: $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$.

Entonces, evaluamos el límite:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+4}{ax-1} = \frac{-3+4}{a.(-3)-1} = \frac{1}{-3a-1}$$

Para que el límite no exista, el denominador debe tender a cero. Por lo tanto:

$$-3a - 1 = 0$$
$$-3a = 1$$
$$a = -\frac{1}{3}$$