APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30’. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Dada la función $f(x)=\frac{x}{3x-k}$ hallar su función inversa $f^{-1}(x)$ y obtener el valor de la constante $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que $f^{-1}(2)=4$

En principio, para determinar la expresión analítica de f^{-1}, planteamos:

$$y=\frac{x}{3x-k}$$

$$y\cdot(3x-k)=x \quad \text{siempre que } x\neq\frac{k}{3}$$

$$3xy-ky=x$$

$$3xy-x=ky$$

$$x\cdot(3y-1)=ky$$

$$x=\frac{ky}{3y-1}$$

De donde, finalmente:

$$f^{-1}(x)=\frac{kx}{3x-1}$$

Por otra parte:

$$f^{-1}(2)=4\to 4=\frac{2k}{3.2-1}$$

$$\to 4=\frac{2k}{6-1}$$

$$\to 4=\frac{2k}{5}$$

$$\to \frac{4.5}{2}=k$$

$$\to 10=k$$

<u>Observación</u>

Otra forma de obtener el valor de la constante $k\in\mathbb{R}$ es a partir de la siguiente consideración teórica:

Si $f^{-1}(2)=4$ entonces $f(4)=2$, por lo que también se podría trabajado sobre la expresión analítica de f, tal como se muestra a continuación:

$$2 = \frac{4}{3.4 - k}$$

$$\rightarrow \ 2 = \frac{4}{12 - k}$$

$$\rightarrow 2 \cdot (12 - k) = 4$$

$$\rightarrow 24 - 2k = 4$$

$$\rightarrow \frac{24 - 4}{2} = k$$

$$\rightarrow 10 = k$$

En la resolución del presente ejercicio empleamos el concepto general de función inversa desarrollado en el marco de la unidad temática “Funciones”.

2. Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = -kx + 1}$ y $\boldsymbol{g(x) = (x+1)^2 + 2}$. Calcular $\boldsymbol{k \in R}$, sabiendo que la abscisa de uno de los puntos de intersección de las curvas es 1.

Sabemos que las funciones se intersecan en, al menos, un punto. El valor de x de uno de esos puntos es 1, luego podemos plantear que $f(1) = g(1)$.

Igualando ambas expresiones consideradas en $x = 1$, llegamos a:

$$f(1) = g(1)$$

$$-k.1 + 1 = (1+1)^2 + 2$$

$$-k = 6 - 1$$

$$-k = 5$$

$$k = -5$$

Entonces, $f(x) = 5x + 1$ y $g(x) = (x+1)^2 + 2$

3. Hallar el conjunto de negatividad de la función $\boldsymbol{h(x) = x^2(3 - x)}$.

Para determinar el conjunto de negatividad pedido planteamos la siguiente inecuación:

$$x^2(3 - x) < 0$$

Considerando que un producto es negativo cuando ambos factores son de distinto signo, y que x^2 siempre es mayor que cero (positivo) cuando "x" es distinto de 0, resulta necesariamente:

$$3 - x < 0$$

$$3 < x$$

$$Solución: (3; +\infty)$$

4. Sea $h(x)=\frac{3+x}{2-bx}$ hallar $b \in \mathbb{R}$ tal que h tenga asíntota vertical en $x=2$.

Para que f tenga asíntota vertical en $x=2$, el límite de f cuando x tiende a 2 es igual a infinito. Es decir: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$.

Entonces, evaluamos el límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3+x}{2-bx}=\frac{3+2}{2-b.(2)}=\frac{5}{2-2b}$$

Para que el límite no exista, el denominador debe tender a cero. Por lo tanto:

$$2-2b=0$$
$$-2b=-2$$
$$b=1$$