APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Dada $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 12$, hallar todas sus raíces sabiendo que $x = -2$ es una de ellas.

Para identificar el resto de las raíces de la función podemos, primeramente, aplicar la regla de Ruffini:

	3	9	0	-12
-2		-6	-6	12
	3	3	-6	0

Por lo cual queda: $f(x) = (x + 2).(3x^2 + 3x - 6)$

Aplicando la fórmula resolvente en el paréntesis de la cuadrática obtendremos las raíces faltantes, las cuales deben ser como máximo 3 por el grado del polinomio:

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\,.\,3.(-6)}}{2\,.\,3}$$

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 72}}{6}$$

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{6}$$

Por lo tanto, las raíces faltantes son:

$$\boldsymbol{x_2 = 1}$$

$$\boldsymbol{x_3 = -2\ (raíz\ doble)}$$

2. Hallar el valor de $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ sabiendo que $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{-2x+k}}$ y se cumple que $\boldsymbol{f^{-1}(3) = 8}$.

Para hallar el valor de k es necesario plantear que, como $f^{-1}(3) = 8$ es la inversa de $f(x)$, entonces $f(8) = 3$. Luego, utilizando este dato en la función se obtiene:

$$f(8) = 3$$

$$3 = \frac{8+1}{-2 \cdot 8 + k}$$

$$3 = \frac{9}{-16 + k}$$

$$3 \cdot (-16 + k) = 9$$

$$3 \cdot (-16) + 3 \cdot k = 9$$

$$-48 + 3k = 9$$

$$3k = 9 + 48$$

$$3k = 57$$

$$k = \frac{57}{3}$$

$$k = 19$$

3. Dadas $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ y $g(x) = kx + 4$ hallar el valor de la constante $k \in R$ para que $(gof)(2) = 3$ y determinar el dominio de gof.

De acuerdo con lo estudiado en la Unidad 3, Estudio de Funciones, Composición de funciones, luego de comprobar que, efectivamente, el conjunto imagen de f (todos los números reales distintos de 2) está incluido en el dominio de g (función lineal, definida para todos los valores reales) se obtiene la expresión de gof con el procedimiento conocido.

Entonces, según la definición:

$$(gof)(x) = g[f(x)]$$

Luego,

$$(gof)(x) = g\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$$

$$(gof)(x) = k\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) + 4$$

Teniendo en cuenta que $(gof)(2) = 3$, resulta:

$$k\left(\frac{2.2+1}{2-1}\right) + 4 = 3$$

$$k.5 + 4 = 3$$

$$k = -\frac{1}{5}$$

Para determinar el dominio de gof previamente se obtiene su expresión algebraica reemplazando en la misma el valor de la constante k calculado.

Entonces,

$$(gof)(x) = -\frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) + 4$$

En este caso, por ser una función racional fraccionaria, deben excluirse los valores que anulan el denominador del primer término de la expresión. Se plantea la ecuación y se resuelve.

Entonces,

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

En definitiva,

$$Dom_{gof} = R - \{1\}$$

4. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^5 + 1}{x + 1}$$

Tenemos el límite $\lim_{x \to -1} \frac{x^5+1}{x+1}$.

Aplicamos álgebra de límites viendo cómo nos queda la expresión reemplazando por $x = 1$:

$\frac{(-1)^5+1}{(-1)+1} = \frac{0}{0}$, lo cual es una indeterminación.

Luego, para resolver esta indeterminación veamos si podemos factorizar al polinomio

$P_1 = x^5 + 1$ como $P_2 = x + 1$ multiplicado por un polinomio $Q(x)$ de grado 4.

Para eso podemos hacer la división de los polinomios $\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = Q(x)$:

$x^5 + 1 \quad : \quad x + 1$

$\downarrow \; -(x^5 + x^4) \qquad x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

$\downarrow \; -x^4 + 1$

$\downarrow \; -(-x^4 - x^3)$

$\downarrow \; x^3 + 1$

$\downarrow \; -(x^3 + x^2)$

$\downarrow \; -x^2 + 1$

$\downarrow \; -(-x^2 - x)$

$\downarrow \; x + 1$

$\downarrow \; -(x + 1)$

$\downarrow \; 0$

Por lo tanto, nos queda que $Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

Y tenemos que $x^5 + 1 = (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x + 1)$

Luego, escribimos al límite como,

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^5+1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 5$$