

11/06/2025

TEMA 5
Hoja 1 de 4

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	
TEL:	DOCENTE (nombre y apellido):
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar el dominio y la intersección con los ejes de la función $f(x) = \ln(2x + 1)$

- Dominio de la función:

Recordemos que el argumento de la función logarítmica debe tomar valores estrictamente mayores a cero. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2x + 1 &> 0 \\ 2x &> -1 \\ x &> -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego, $Dom_f = \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$

- Intersección con el eje X:

La función interseca al eje X cuando $f(x) = 0$. Esto es,

$$0 = \ln(2x + 1)$$

Sabemos que:

$$0 = \ln(1)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1 &= 2x + 1 \\ 0 &= 2x \\ 0 &= x \end{aligned}$$

Entonces, la intersección con el eje X ocurre en el punto $(0;0)$.

- Intersección con el eje Y:

La función interseca al eje Y cuando $x = 0$. Esto es,

$$\begin{aligned} f(0) &= \ln(2 \cdot 0 + 1) \\ f(0) &= \ln(1) \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, la intersección con el eje Y ocurre en el punto $(0;0)$.

2. Hallar los puntos críticos de la función $f(x) = \frac{1}{2x^2-5x-3}$ e indicar si se trata de máximos o mínimos.

En primer lugar, analizamos el dominio de la función. Como el denominador no puede ser cero, entonces:

$$Dom\ f(x): \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$$

Para determinar si la función dada tiene extremos relativos, derivamos la función considerando que la derivada de un cociente es: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{0 - 1 \cdot (4x - 5)}{(2x^2 - 5x - 3)^2}$$

Analizamos los puntos críticos, estos son los valores de x para los cuales la derivada no existe y los valores de x para los cuales la derivada es 0.

Teniendo en cuenta el primer caso (los valores para los cuales no existe la derivada), analizamos que los valores $x=3$ y $x=-1/2$ anulan el denominador de $f'(x)$, por lo tanto, podrían ser puntos críticos, pero como estos valores no pertenecen al dominio de la función, los descartamos.

Buscamos luego los valores que anulan a la derivada. Estos serán los valores para los cuales el numerador es 0, esto significa que:

$$\frac{-4x + 5}{(2x^2 - 5x - 3)^2} = 0 \rightarrow -4x + 5 = 0$$

Por lo tanto, el punto crítico de la función está en $x = \frac{5}{4}$

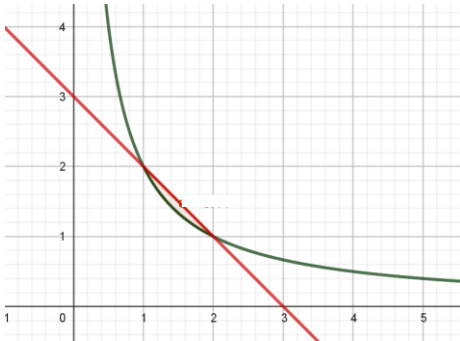
Determinamos, usando el criterio de la derivada primera, si existen extremos. Analizamos el signo de la derivada en los intervalos $(-\infty; -\frac{1}{2})$; $(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4})$; $(\frac{5}{4}; 3)$ y $(3; +\infty)$

Para ello tomamos algún valor de x que pertenezca a cada intervalo y evaluamos la derivada en él. Nos ayudamos con una tabla:

Intervalo	$(-\infty; -1/2)$	$(-1/2; 5/4)$	$(5/4; 3)$	$(3; +\infty)$
Para	$x=-1$	$x=0$	$x=2$	$x = 5$
Signo de $f'(x)$	$f'(-1)>0$	$f'(0)>0$	$f'(2)<0$	$f'(5)<0$

Como f' cambia de positiva a negativa en $x = 5/4$, alcanza en dicho valor un máximo local. Por lo tanto, el punto de coordenadas $(\frac{5}{4}; -\frac{8}{49})$ es un máximo local.

3. Hallar el área de la región comprendida por los gráficos de $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$



En primer lugar debemos buscar los valores de x en los que se intersectan las gráficas de las funciones dadas. Estos valores son $x = 1$ y $x = 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \frac{2}{x} &= 3 - x \\ 2 &= 3x - x^2 \\ 0 &= -x^2 + 3x - 2 \\ x_1 &= 1 \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Como nos piden calcular el área del recinto determinado por las gráficas de las funciones calculamos la integral $\int_1^2 [g(x) - f(x)] dx$ aplicando la Regla de Barrow.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 \left[(3 - x) - \frac{2}{x} \right] dx \\ \text{Área} &= \left(3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln x \right) \Big|_1^2 \\ \text{Área} &= \left(3 \cdot 2 - \frac{4}{2} - 2\ln 2 \right) - \left(3 \cdot 1 - \frac{1}{2} - 2\ln 1 \right) \\ \text{Área} &= (4 - 2\ln 2) - \left(\frac{5}{2} - 2 \cdot 0 \right) \\ \text{Área} &= \frac{3}{2} - 2\ln 2 \end{aligned}$$

4. Determinar el/los valores de $x \in \mathbb{R}$ para que $h'(x) = -\frac{5}{2}$, si se sabe que $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$; $f(x) = 2x$
 $g(x) = -2x^2 + 3$.

Para resolver este ejercicio tendremos en cuenta los conceptos vistos en el apartado de “Derivadas”

Para poder hallar lo pedido en el ejercicio, primero debemos dar la expresión de la función h.

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$h(x) = \frac{-2x^2 + 3}{2x}$$

Ahora, debemos calcular la derivada de esta función teniendo en cuenta la regla de la derivada de una división:

$$h'(x) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$g'(x) = -4x$$

$$f'(x) = 2$$

Por lo tanto:

$$h'(x) = \frac{-4x \cdot 2x - (-2x^2 + 3) \cdot 2}{(2x)^2}$$

Operando algebraicamente:

$$h'(x) = \frac{-8x^2 - (-4x^2 + 6)}{4x^2}$$

$$h'(x) = \frac{-8x^2 + 4x^2 - 6}{4x^2}$$

$$h'(x) = \frac{-4x^2 - 6}{4x^2}$$

Como el enunciado nos pide hallar los valores de x para que la derivada de h sea -5/2, planteamos:

$$\frac{-4x^2 - 6}{4x^2} = -\frac{5}{2}$$

$$-4x^2 - 6 = -\frac{5}{2} \cdot 4x^2$$

$$-4x^2 - 6 = -10x^2$$

$$-4x^2 + 10x^2 = 6$$

$$6x^2 = 6$$

$$x^2 = \frac{6}{6}$$

$$x^2 = 1$$

$$|x| = \sqrt{1}$$

$$|x| = 1$$

Por lo tanto, los valores de x que satisfacen esta ecuación son 1 y -1.

$$S = \{-1; 1\}$$