APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30’. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar el/los vector/es $\boldsymbol{\vec{w}} \in \mathbb{R}^2$ que sea perpendicular a $\vec{v} = (2; -1)$ que tenga módulo **4**.

Debemos encontrar un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ que sea perpendicular al vector $\vec{v} = (2; -1)$. Sabemos que para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo, es decir $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

Planteamos el producto para este caso y resulta:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Resolvemos el producto escalar:

$$(2; -1) \cdot (w_x; w_y) = 0$$

$$2w_x - w_y = 0$$

$$w_y = 2w_x$$

Por lo tanto, los vectores que estamos buscando son de la forma: $\vec{w} = (w_x; 2w_x)$. De estos infinitos vectores que verifican la condición propuesta debemos encontrar aquellos de módulo 4. Entonces:

$$|\vec{w}| = \sqrt{{w_x}^2 + (2w_x)^2}$$

Como sabemos que el módulo de $\vec{b}$ es 4, reemplazamos y resulta:

$$4 = \sqrt{{w_x}^2 + 4{w_x}^2}$$

Resolvemos y obtenemos que

$$16 = 5{w_x}^2$$

Despejamos,

$$\frac{16}{5} = {w_x}^2 \leftrightarrow \sqrt{\frac{16}{5}} = |w_x| \leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{5}} = |w_x|$$

$$w_{x_1} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad o \quad w_{x_2} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Por lo tanto, existen dos vectores $\vec{w}$ que verifican las condiciones pedidas.

Si $w_{x_1} = \frac{4}{\sqrt{5}}$ como sabemos que $w_y = 2w_x$, entonces $w_{y_1} = \frac{8}{\sqrt{5}}$

Con lo cual, $\overrightarrow{w_1} = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{8}{\sqrt{5}}\right)$

Si $w_{x_2} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ como sabemos que $w_y = 2w_x$, entonces $w_{y_2} = -\frac{8}{\sqrt{5}}$

Por lo tanto, $\overrightarrow{w_2} = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; -\frac{8}{\sqrt{5}}\right)$

2. Hallar el valor de la constante $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ **,** $\boldsymbol{k} > \mathbf{1}$, para que se cumpla la siguiente igualdad

$$\int_{1}^{k} (20x^4 + 4kx^3 + 1)\, dx = 155$$

En primer lugar vamos a resolver la integral definida propuesta; para ello utilizaremos la regla de Barrow:

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y sea g una primitiva de f en el intervalo:

$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$

Con lo cual para nuestra integral:

$$\int_{1}^{k} (20x^4 + 4kx^3 + 1)\, dx = (20\frac{x^5}{5} + 4k\frac{x^4}{4} + x)|_1^k = (4x^5 + kx^4 + x)|_1^k =$$

$$=4k^5 + k.k^5 + k - (4 + K + 1) = 5k^5 + k - 4 - k - 1 = 5k^5 - 5$$

La integral propuesta está dada por la expresión $\mathbf{5k^5 - 5}$

Con lo cual:

$5k^5 - 5 = 155$

$5k^5 = 160$

$k^5 = 32$

$k = \sqrt[5]{32}$

$k = 2$

3. Resolver: $\int(\boldsymbol{4x^2 - 3x + 8})^3 \, . \, (\boldsymbol{8x - 3})\boldsymbol{dx}$

Para la realización de este ejercicio se deben considerar los siguientes contenidos:

Sesión 10: Derivadas. Tabla de derivadas

Sesión 12: Integrales; Métodos de integración: sustitución

Es posible resolver esta integral mediante el método de sustitución:

$$\int(4x^2 - 3x + 8)^3 \, . \, (8x - 3)dx$$

Realizamos un cambio de variable: $u = 4x^2 - 3x + 8$ (1)

Derivando: $du = 8x - 3\ dx$ (2)

Reemplazando (1) y (2) en la integral: $\int u^3 du$

Resolviendo la integral: $\frac{u^4}{4} + C$

Reemplazando por (1) en la expresión: $\frac{(4x^2-3x+8)^4}{4} + C$

4. Sea $\boldsymbol{f(x) = x^3 + x^2 - 1}$ hallar el intervalo para el cual la función es decreciente.

En primer lugar, analizamos el dominio de la función $f(x)$.

$$Dom\ f(x): \Re$$

Para determinar el intervalo de decrecimiento, analizaremos primero si la función dada tiene extremos relativos, derivamos la función.

$$f´(x) = 3x^2 + 2x - 0$$

Analizamos los puntos críticos, estos son los valores de x para los cuales la derivada no existe y los valores de x para los cuales la derivada es 0.

Teniendo en cuenta el primer caso (los valores para los cuales no existe la derivada), por tratarse de una función polinómica, descartamos esta posibilidad.

Buscamos luego los valores que anulan a la derivada:

$$f´(x) = 0$$

$$3x^2 + 2x = 0$$

$$3x\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, los puntos críticos de la función son: $x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = -\frac{2}{3}$

Determinamos, usando el criterio de la derivada primera, si existen extremos:

Analizamos el signo de la derivada en los intervalos $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}; 0\right)\ y$ (0;+∞).

Para ello tomamos algún valor de x que pertenezca a cada intervalo y evaluamos la derivada en él. Nos ayudamos con una tabla:

Intervalo	$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3};\ 0\right)$	$(0; +\infty)$
Para	$x = -1$	$x = -\frac{1}{3}$	$x = 1$
Signo de $f´(x)$	$f'\left(-\frac{1}{3}\right) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(-1) > 0$

La función decrece en los intervalos en los que $f' < 0$, por lo tanto, el intervalo de decrecimiento es:

$$C^{\downarrow} = \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$$