APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30’. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar $h(x)$, si $h = g \circ f$ para $f(x) = \frac{x-2k}{x-1}$, $g(x) = x - k$ y sabiendo que se cumple $h(2) = -1$.

Para la realización de este ejercicio se deben considerar los siguientes contenidos: Funciones (introducción: dominio - imagen); Función lineal. Composición de funciones

En primer lugar, antes de realizar la composición de funciones, debemos verificar que:

$$\text{Im } f \subseteq \text{ Dom } g$$

Como g es una función lineal, su dominio será: $\mathbb{R}$, con lo cual es posible realizar $h = g \circ f$.

$$h(x) = g[f(x)]$$

$$h(x) = g\left(\frac{x-2k}{x-1}\right)$$

$$h(x) = \frac{x-2k}{x-1} - k$$

$$h(x) = \frac{x-2k-k.(x-1)}{x-1}$$ (Buscamos el común denominador para poder sumar los numeradores)

$$h(x) = \frac{x-2k-kx+k}{x-1}$$ (Aplicamos propiedad distributiva)

$$h(x) = \frac{x(1-k)-k}{x-1}$$

Luego, como tenemos de dato que $h(2) = -1$, reemplazamos en la expresión para hallar k:

$$h(2) = \frac{2.(1-k)-k}{2-1}$$

$$-1 = \frac{2.(1-k)-k}{2-1}$$

$$-1 = 2 - 2k - k$$

$$-1 - 2 = -3k$$ (sumamos miembro a miembro -2)

$$-3 = -3k$$

$$\frac{-3}{-3} = k$$ (dividimos miembro a miembro por -3)

$$k = 1$$

Finalmente, como nos piden su expresión reemplazamos el valor de k hallado:

$$h(x) = \frac{x.(1-k)-k}{x-1}$$

$$h(x) = \frac{x.(1-1)-1}{x-1}$$

$$h(x) = -\frac{1}{x-1}$$

2. Hallar analíticamente los valores de k para que la distancia entre los puntos $A = (2;\ 1)$ y $B = (-6; -k)$ sea 10.

Para determinar la distancia entre dos puntos $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$ utilizamos la fórmula:

$$d(A;B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

En este caso sería:

$$d(A;B) = \sqrt{\big(2-(-6)\big)^2 + \big(1-(-k)\big)^2} \implies 10 = \sqrt{8^2 + (1+k)^2}$$

$$100 - 64 = (1+k)^2 \implies |1+k| = \sqrt{36} \implies |1+k| = 6$$

Por lo tanto:

$$1 + k = 6 \qquad o \qquad 1 + k = -6$$

$$k = 5 \qquad o \qquad k = -7$$

De acuerdo a esto, las coordenadas del punto B son:

$$k = 5 \implies -k = -5 \implies B = (-6; -5)$$

$$k = -7 \implies -k = 7 \implies B = (-6; 7)$$

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(2;3)$ y por el punto en común que tienen las rectas

$$\boldsymbol{x + y = 1 \quad y \quad 2x + y = 5}$$

Para resolver este ejercicio utilizaremos los conceptos vistos en los apartados **"Ecuaciones e inecuaciones", "Funciones" y "Función lineal"**

Para hallar la ecuación de la recta pedida, como en el enunciado ya nos dan un punto de paso, debemos calcular el otro punto por el que pasa dicha recta. Para esto debemos trabajar con algún método de resolución de sistemas de ecuaciones. Si pensamos en igualar ambas funciones, podemos despejar, por ejemplo, la variable "y" de ambas e igualar las expresiones que queden (ya que estos valores deben ser el mismo para ambas funciones):

$$y = -x + 1 \quad y \quad y = -2x + 5$$

$$-x + 1 = -2x + 5$$

De esta ecuación, vamos a obtener el valor de "x" del punto en el que se intersecan:

$$-x + 2x = 5 - 1$$

$$x = 4$$

Para hallar el valor de "y" reemplazamos el valor obtenido de "x" en la ecuación de alguna de las rectas dadas:

$$y = -4 + 1$$

$$y = -3$$

Entonces, la ecuación de la recta pedida pasa por los puntos $(2;3)$ y $(4;-3)$

Debemos hallar tanto la pendiente de la función como su ordenada al origen.

Para calcular la pendiente utilizamos la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-3 - 3}{4 - 2}$$

$$m = -\frac{6}{2}$$

$$m = -3$$

Por lo tanto, $y = -3x + b$

Para hallar b utilizamos alguno de los puntos por el que sabemos que pasa dicha recta. Por ejemplo, el $(2;3)$

$$3 = -3 \cdot 2 + b$$

$$3 + 6 = b$$

$$9 = b$$

Así, la ecuación de la recta pedida es $y = -3x + 9$

4. Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4-5x+3}{x^5+4x^3-2}$

Si evaluamos la expresión algebraica fraccionaria cuando x tiende a infinito se presenta una indeterminación (cociente de infinitos), para resolver este tipo de límites es conveniente dividir numerador y denominador por la variable x elevada a la mayor potencia que aparezca en la expresión, en este caso x^5:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4-5x+3}{x^5+4x^3-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^4-5x+3}{x^5}}{\frac{x^5+4x^3-2}{x^5}}$$

Luego distribuimos los denominadores, resolvemos los cocientes de potencias de igual base y nos queda:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^4}+\frac{3}{x^5}}{1+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^5}} = \frac{0}{1}$$

Todos los términos que son cociente entre un número y alguna potencia de x tienden a $\mathbf{0}$ porque es un número dividido un valor que crece o decrece infinitamente.

Por lo tanto el numerador tiende a $\mathbf{0}$ y el denominador a $\mathbf{1}$.

Entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4-5x+3}{x^5+4x^3-2} = 0$$

Para la resolución de este ejercicio trabajamos con el concepto de Límite de Funciones desarrollado en el apunte “Límites y Asíntotas”.