06/11/2024

TEMA 7

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar el valor de $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}$ para que $\boldsymbol{y = mx + 3}$ sea recta tangente de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{x+2} - x^3 + 5}$ en el valor $\boldsymbol{x_0 = -1}$.

Si la recta tangente a la función en $x_0 = -1$ es $y = mx + 3$ y sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la función es el valor de la derivada evaluada en el x_0 dado, entonces debemos hallar el valor de m tal que $f'(-1) = m$

(Tema: Aplicación de la derivada, recta tangente).

Comenzamos derivando la función, con las reglas de derivación:

$$f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} - 3x^2$$

Evaluando la función en $x_0 = -1$:

$$f'(-1) = -\frac{3}{(-1+2)^2} - 3 \cdot (-1)^2$$

$$f'(-1) = -3 - 3$$

$$f'(-1) = -6$$

Por ende, $m = -6$

2. El valor de $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}$ para el cual $\boldsymbol{f(x) = 2(3^{x+1} - 4) - m}$ tiene una raíz en $\boldsymbol{x = -2}$.

Para resolver este ejercicio debemos trabajar con el concepto de funciones- raíz de una función- funciones exponenciales.

Para hallar el valor de “m” es importante recordar que la raíz de una función representa el punto de intersección entre la gráfica y el eje de abscisas (x), por lo tanto:

$$f(-2) = 0$$

$$f(-2) = 2.(3^{-2+1} - 4) - m = 0$$

$$2.(3^{-1} - 4) - m = 0$$

Resolvemos la ecuación para hallar el valor de “m”

$$2\left(\frac{1}{3} - 4\right) = m + 0$$

$$2.\left(-\frac{11}{3}\right) = m$$

$$-\frac{22}{3} = m$$

La función queda definida:

$$f(x) = 2(3^{x+1} - 4) + \frac{22}{3}$$

3. Resolver: $\int \frac{\mathbf{4x-3}}{\mathbf{2x^2-3x+1}}\ \boldsymbol{dx}$

Para la realización de este ejercicio se deben considerar los siguientes contenidos:
Sesión 4: Función cuadrática; Función polinómica; Polinomios
Sesión 9: Función logarítmica
Sesión 10: Derivadas. Tabla de derivadas
Sesión 12: Integrales; Métodos de integración

Es posible resolver esta integral mediante el método de sustitución:

$$\int \frac{\mathbf{4x-3}}{\mathbf{2x^2-3x+1}}\ \boldsymbol{dx}$$

Realizamos un cambio de variable: $u = 2x^2 - 3x + 1$ (1)

Derivando: $du = 4x - 3\ dx$ (2)

Reemplazando (1) y (2) en la integral: $\int \frac{1}{u} du$

Resolviendo la integral: $\ln|u| + C$

Reemplazando en la expresión por (1): $\ln|2x^2 - 3x + 1| + C$

4. Dados los vectores de $\mathbb{R}^2$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{1}; \mathbf{1}) \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{2}; -\mathbf{3}) \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{c}} = (-\mathbf{4}; \mathbf{0})$$

Hallar: $\vec{\boldsymbol{c}}.\vec{\boldsymbol{b}}$; $-\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{a}}.\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{c}}$; $\vec{\boldsymbol{a}}.\vec{\boldsymbol{a}}$

Para la realización de este ejercicio, es conveniente ver el apunte teórico correspondiente a: Vectores en $\mathbb{R}^2$

Recordemos que, según lo visto en la teoría, si consideramos dos vectores $\vec{u} = (a; b)\ y$ $\vec{v} = (c; d)$, el producto escalar $\vec{u}.\vec{v}$ se calcula como:

$\vec{u}.\vec{v} = a.c + b.d$

Por lo tanto, para realizar $\vec{\boldsymbol{c}}.\vec{\boldsymbol{b}}$, debemos proceder de la siguiente manera:

$\vec{c}.\vec{b} = (-4; 0).(2; -3)$

$\vec{c}.\vec{b} = -4\,.\,2 + 0\,.\,(-3)$

$\vec{c}.\vec{b} = -8 + 0$

$\vec{c}.\vec{b} = -8$

Por otro lado, al realizar $-\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{a}}.\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{c}}$, debemos recordar la siguiente propiedad:

El producto de un vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ definido en forma cartesiana, por un escalar $\boldsymbol{k}$, es otro vector cuyas coordenadas son las coordenadas del vector $\vec{v}$ multiplicadas por el escalar k.

En otras palabras:

Si $\vec{v} = (a;\ b)\ y\ k$ es un número real, entonces $k.\,\vec{v}$ = $(k.\,a; k.\,b)$

Entonces:

$-2\vec{a}.2\vec{c} = -2.(1; 1) \quad . \quad 2.(-4; 0)$

$-2\vec{a}.2\vec{c} = (-2.1; -2.1) \quad . \quad (2\,.(-4); 2\,.0)$

$-2\vec{a}.2\vec{c} = (-2; -2)\,.(-8; 0)$

Finalmente resolvemos el producto escalar:

$-2\vec{a}.2\vec{c} = -2\,.(-8) + (-2).0$

$-2\vec{a}.2\vec{c} = -2\,.(-8) + (-2).0$

$-2\vec{a}.2\vec{c} = 16 + 0$

$-2\vec{a}.2\vec{c} = 16$

Por último, se nos pide calcular $\vec{\boldsymbol{a}}.\vec{\boldsymbol{a}}$. Una posible forma de resolver podría ser mediante la siguiente propiedad:

El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de su módulo:

$\vec{v}.\,\vec{v}$ = $|\vec{v}|^2$

Con lo cual:

$\vec{\boldsymbol{a}}.\vec{\boldsymbol{a}} = |\vec{a}|^2$

Como a su vez, el módulo de un vector puede calcularse como la raíz cuadrada de la suma de cada una de sus componentes al cuadrado, podremos resolver de la siguiente manera:

$\vec{\boldsymbol{a}}.\vec{\boldsymbol{a}} = \left(\sqrt{\mathbf{1^2 + 1^2}}\right)^{\mathbf{2}}$

$\vec{\boldsymbol{a}}.\vec{\boldsymbol{a}} = \left(\sqrt{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}$

$\vec{\boldsymbol{a}}.\vec{\boldsymbol{a}} = \mathbf{2}$