مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره بیست و سوم / تابستان ۱۳۹٤

مدل برنامه‌ریزی خطی فازی برای مسئله انتخاب سبد سهام بهینه

مقصود امیری[۱]
مهسا محبوب قدسی[۲]

تاریخ دریافت: ۹۳/۷/۳ تاریخ پذیرش: ۹۳/۹/۲۶

چکیده

در تصمیم‌گیری به منظور سرمایه‌گذاری، دو عامل از اهمیت بسزایی برخوردار بوده و مبنای سرمایه‌گذاری می‌باشد. این دو عامل ریسک و بازده هستند. امروزه مدیریت ریسک به همان اندازه کسب حداکثر بازده برای سرمایه‌گذاران مهم و حیاتی است. تاکنون معیارهای مختلفی برای تعیین ریسک پرتفوی معرفی شده است بتای نامطلوب یکی از معیارهای ریسک نامطلوب می باشد، این معیار تغییر پذیری بازده شرکت نسبت به بازده بازار را تنها در دوره هایی بررسی می‌کند که بازده بازار کمتر از میانگین بوده و یا از مقدار «بازده بدون ریسک» یا «حداقل بازده قابل قبول سرمایه گذار» کم‌تر باشد. هدف اصلی پژوهش حاضر حل مسئله انتخاب سهم برای پرتفوی با کمترین ریسک نامطلوب با استفاده از حل مدل برنامه‌ریزی خطی در شرایط فازی می‌باشد. بدین منظور با استفاده از اطلاعات قیمت ۹ سهم پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران از سال ۱۳۷۴ تا سال ۱۳۹۲، مدل خطی فازی توسط روش پیشنهادی حل شده و وزن هر سهم و مقدار ریسک نامطلوب سبد بهینه بدست آمده‌است.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی، تئوری فازی، بهینه سازی پرتفوی، بتای نامطلوب.

۱- دانشیار دانشکده مدیریت و حسابداری دانشگاه علامه طباطبایی mg_amiri@yahoo.com
۲- دانشجوی دکترای مدیریت صنعتی گرایش تحقیق درعملیات، دانشگاه علامه طباطبایی (نویسنده مسئول)
mahsa.mahboob@gmail.com

۱- مقدمه

بهینه سازی پرتفوی عبارت است از انتخاب ترکیبی از داراییهای مالی به گونه ای که تا حد ممکن بازده پرتفوی سرمایه‌گذاری حداکثر و ریسک پرتفوی حداقل شود (هایکس، ۱۹۳۵). میزان ریسک و بازده دارایی های سرمایه ای دو مؤلفه مهم در انتخاب برای سرمایه گذاری در پرتفوی بهینه است. دو رویکرد شناخته شده در بهینه‌سازی پرتفوی عبارتند از: الف) کمینه‌سازی ریسک پرتفوی با داشتن حداقل معینی از بازدهی. ب) بیشنه‌سازی بازدهی با داشتن محدودیت معینی از ریسک. انتخاب مجموعه دارایی بهینه اغلب با تبادل بین ریسک و بازده صورت می‌گیرد و هرچه ریسک مجموعه دارایی بیشتر باشد، سرمایه گذاران انتظار دریافت بازده بالاتری را خواهند داشت (مارکویتز، ۱۹۵۲). مارکویتز اولین کسی بود که واریانس یا انحراف معیار را به عنوان معیاری از ریسک معرفی کرد. مارکویتز با ارایه مدل میانگین واریانس خود نشان داد، با تشکیل سبدی از دارایی‌های مالی این امکان به وجود می‌آید که در سطح معینی از بازده ریسک را کاهش‌داد (مارکویتز، ۱۹۹۱).

قابلیت حل مدل‌های LP[1] برای کاربردی بودن آنها در مسائل واقعی مالی بسیار مهم است (اسپرانزا، ۱۹۹۶). در مدل‌های کلاسیک بهینه‌سازی پرتفوی تمامی معیارهای ریسک بصورت تابعی غیر خطی از اوزان پرتفوی می‌باشند. امروزه، روش های حل در دسترس برای مدل‌های برنامه‌ریزی غیرخطی بسیار پیچیده تر از روش های حل مدل‌های خطی می‌باشند. لذا چنانچه ملاحظه می‌شود طی سالیان گذشته محققان بسیاری با فرضیات مختلف مطالعات وسیعی دربارۀ ارائه مدلی خطی برای انتخاب بهینه پرتفوی انجام داده اند. در این تحقیقات معیار های متعددی برای محاسبه ریسک پرتفوی مطرح شده است (مانیسی و همکاران، ۲۰۱۳). در تعاریف جدیدی که برای ریسک ارائه شده است، ریسک را احتمال زیان می دانند یعنی تغییرات مطلوب و یا افزایش نرخ بازدهی دارایی سرمایه ای دیگر محسوب نمی‌شود. لذا ریسک فقط شامل مشاهداتی می‌باشد که نرخ بازدهی دارایی سرمایه‌ای کمتر از مقدار معینی است. به عبارت دیگر ریسک را به عنوان ریسک نامطلوب می شناسند و معیار های اندازه گیری جدیدتری برای ریسک تعریف شده است که در مقایسه با معیار های متعارف اندازه گیری ریسک دقیقتر می‌باشد. هدف این تحقیق بهینه سازی انتخاب پرتفوی توسط ارائه یک مدل برنامه ریزی فازی و روش حل آن می‌باشد که در آن تابع هدف حداقل سازی ریسک نامطلوب (بتای نامطلوب) می‌باشد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

اندازه‌گیری ریسک نامطلوب همراه با تئوری پرتفوی برای اولین بار توسط روی در مقاله ای که در سال ۱۹۵۲ منتشر کرد، مطرح شد (روی، ۱۹۵۲). از جمله معیارهایی که برای محاسبه ریسک نامطلوب معرفی شده اند می‌توان نیم‌واریانس و نیم‌انحراف معیار را نام برد. با اینکه مارکویتز در سال ۱۹۵۹ معیار نیم واریانس را مطرح کرد ولی ازآنجایی که نیم واریانس به محاسبات بیشتری نسبت به واریانس نیاز دارد، تحقیقاتش را با واریانس ادامه داد. با این وجود مارکویتز در نتایج تحقیق خود تایید کرد که سرمایه گذار بیشتر به دنبال کاهش ریسک نامطلوب است چرا که ریسک نامطلوب با انعکاس آنچه ذهنیت انسان از

مفهوم ریسک دارد بیشتر هماهنگ می باشد (سورتینو و واندر،۱۹۹۱). در سال ۱۹۷۰ ثابت شد که سرمایه- گذار فقط به ریسک نامطلوب توجه دارد و استفاده از نیم واریانس را ترجیح می‌دهد (مائو، ۱۹۷۰).

با توجه به مفاهیم ریسک نامطلوب، برای سنجش ریسک سیستماتیک نیز معیار های متعددی تعریف شده است. بتا یکی از شاخص های سنجش ریسک سیستماتیک محسوب می شود و در واقع بتا ناظر به اندازه گیری «تغییرپذیری بازده شرکت نسبت به تغییرات بازده شاخص بازار» در تمامی مشاهدات بازده بازار است (ناوراکی، ۱۹۹۹). به عبارت دیگر چه تغییر بازده بازار نسبت به میانگین مثبت (مطلوب) بوده و چه منفی (نامطلوب) باشد مشاهدات بازده در محاسبه منظور می شوند. نتایج تحقیقاتی که در مورد مقایسه دو معیار بتا و نیم بتا (بتای نامطلوب) صورت گرفته است حاکی از برتری معیار بتا است (فیشبرن، ۱۹۷۷). استرادا در سال ۲۰۰۷ نشان داد که بر اساس داده های تجربی معیار بتای نامطلوب از اعتبار بیشتری نسبت به معیار های سنتی ریسک برخوردار است (استرادا، ۲۰۰۷).

با توجه به تعریف سنتی ریسک، در محاسبه ی بتا از تمامی داده های مربوط به بازدهی استفاده می شود. برای نیم بتا چند فرمول مختلف بیان شده است که فرمولی که در این مقاله از آن استفاده شده است برگرفته از بتای ارائه شده توسط باوا و لیندنبرگ به صورت رابطه (۱) می باشد (باوا و لیندنبرگ، ۱۹۷۷).

$$\beta_{im}^{(BL)} = \frac{E\left(R_i - R_f\right).\min\left(R_m - R_f, 0\right)}{E\left[\min\left(R_m - R_f, 0\right)\right]^2} \qquad (۱)$$

که در آن E به معنای امید ریاضی، R_i متغیر تصادفی بازده روزانه داراییjام است که دارای توزیع نرمال با میانگین μ_j و واریانس σ_j، R_f نرخ بازده بدون ریسک و R_m بازده بازار می باشد. پرایس و همکاران با انتخاب نمونه‌ای از بازار اوراق بهادار ایالات متحده، به بررسی ارتباط میان بتای نامطلوب و بتای سنتی پرداختند و به نتیجه رسیدند که در صورت پایین بودن نرخ بازدهی هدف، از نرخ بازدهی بدون ریسک، بتای سنتی مربوط به دارایی‌های با ریسک پایین باید بیشتر از بتای نامطلوب باشد (پرایس و همکاران، ۱۹۸۲). در تحقیقی که در سال ۱۹۹۹به انجام رسید به این نتیجه رسیده شد که بهتر است در محاسبه بتا، بتای مطلوب و نامطلوب از هم جدا شود (وینود،۱۹۹۹). در سال ۲۰۰۸ اظهار شد که اگر در بهینه‌سازی پرتفوی از معیار ریسک نامطلوب استفاده شود، ریسک پرتفوی ایجاد شده با ادراک سرمایه‌گذاران از ریسک بیشتر منطبق است (لوهر و همکاران، ۲۰۰۸).

در این بخش پیشینه‌ای از رویکردهای ارائه شده برای انتخاب پرتفوی نیز معرفی می‌شود. مدل اصلی مارکویتز بصورت یک مساله برنامه‌ریزی غیر خطی بود ولی برای اولین بار شارپ (شارپ، ۱۹۷۱) سعی کرد تا این مدل را بصورت برنامه ریزی خطی تبدیل کند. پس از آن تلاش های بسیاری برای خطی‌سازی فرایند بهینه سازی پرتفوی صورت گرفته است (مانیسی و همکاران، ۲۰۱۳). در تحقیق دیگری مدلی قابل حل از طریق برنامه‌ریزی خطی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری ارائه کردند که معیار سنجش ریسک این مدل

متوسط قدر مطلق انحرافات بود (کونو و یامازاکی، ۱۹۹۱). در سال ۲۰۰۰ مدلی خطی برای بهینه‌سازی پرتفوی مطرح شد که در آن ریسک بر مبنای بدترین سناریو تعریف می‌شد (سای و همکاران، ۲۰۰۰). این مدل را رویکرد حداقل نمودن حداکثر[۲] نامیدند. در همان سال مدل جدید دیگری بصورت برنامه‌ریزی خطی چند معیاره ارائه‌شد که یک تکنیک جامع محسوب می‌شد و تمامی روش های یاد شده را پوشش میداد (اگریزاک، ۲۰۰۰). در سال ۲۰۰۰ و ۲۰۰۲، در تحقیقی دیگر، مدلی از نوع برنامه ریزی خطی ارائه شد که در آن تابع هدف شامل ارزش در معرض خطر شرطی ($CVaR$[۳]) بود (راک فلر و اوریاسف،۲۰۰۲). مدل‌های ($CVaR$) تاثیر عمده ای بر توسعه معیار های ریسک در دهه اول قرن ۲۱ ام داشت. کار اصلی آن ها در این رویکرد، ارائه‌ی تکنیکی جهت محاسبه VaR و به دنبال آن بهینه سازی $CVaR$ بود. در سال ۲۰۰۳ در مقاله-ای مروری تحت عنوان «مدل‌های قابل حل برای بهینه سازی پرتفوی» به معرفی و طبقه بندی انواع مدل-های خطی انتخاب پرتفوی پرداخته شد (مانیسی و همکاران، ۲۰۰۳). ده سال بعد، در مقاله‌ی مروری دیگری، تمامی مدل‌ها و روش‌های حل مدل‌های بهینه‌سازی پرتفوی مطرح شده در طی بیست سال ارائه شد (مانیسی و همکاران، ۲۰۱۳). در یک پژوهش داخلی به تجزیه و تحلیل نقاط ضعف و قوت مدل اسپرانزا پرداخته شد و با بهبود مدل مبنا مدلی جدید را در قالب برنامه ریزی خطی جهت بهینه‌سازی پرتفوی با در نظر گرفتن حداقل ریسک، ارائه شد. در تحقیقی دیگر نیز با استفاده از مسئله برنامه‌ریزی کسری- خطی، رویکردی برای حل مدل مارکویتز ارائه شد (صافی و همکاران، ۱۳۹۱).

۳- روش شناسی پژوهش

پژوهش حاضر از جیث هدف، کاربردی و از نظر شیوه اجرا توصیفی- ریاضی می‌باشد. کلیه‌ی شرکت های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران از سال ۱۳۷۴ تا پایان سال ۱۳۹۲ جامعه‌ی مورد بررسی در این تحقیق را تشکیل می‌دهند. از بین شرکت های پذیرفته شده در بورس ۹ شرکت برای این تحقیق انتخاب شده و داده‌های مربوط به بازدهی این شرکت ها برای بررسی و استخراج عوامل مورد مطالعه تحقیق از جمله نرخ بازده سالیانه و مقدار بتای نامطلوب سالیانه، مورد استفاده قرار گرفته است. بعد از انتخاب نمونه نهایی،داده های روزانه ۹ شرکت نمونه ، طی یک دوره ۱۸ ساله (از ابتدای سال۱۳۷۴ تا انتهای سال ۱۳۹۲) جمع آوری گردید جدول (۱و۳).

۴- مدل برنامه‌ریزی فازی پشنهادی برای انتخاب پرتفوی

در سرمایه‌گذاری، دانش و تجربه کارشناسان سرمایه‌گذاری در تصمیم‌گیری بسیار مهم است. با توجه به پیچیدگی و غیر قابل پیش بینی بودن بازار های مالی، ارائه یک تخمین دقیق از ریسک و بازده مورد انتظار کار بسیار مشکلی می‌باشد. لذا می‌توان با فازی در نظر گرفتن ریسک و بازده عدم قطعیت را کاهش داد. در برخی از تحقیقاتی که تاکنون انجام شده، اعداد فازی برای نمایش عدم اطمینان در بازدهی و ریسک دارایی ها بکار برده شده است (ژ اورتی و همکاران، ۲۰۰۲). در یک مساله بهینه سازی پرتفوی استاندارد، x_j

بیانگر نسبت ارزش دارایی j ام به ارزش کل سرمایه ایست که یک سرمایه‌گذار برای پرتفوی با n دارایی، سرمایه‌گذاری می‌کند. این پرتفوی بصورت $P(x)=\{x_1,...,x_n\}$ نشان‌داده می‌شود.

مدل برنامه‌ریزی و برای تخصیص پرتفوی بهینه می‌توانیم محدودیتهای زیادی را در نظر بگیریم که هر یک از این محدودیت‌ها به تنهایی می‌تواند تأثیر بسزایی بر روی مدل داشته باشد و چه بسا در مواردی وجود بعضی از محدودیتها مدل را از حالت برنامه‌ریزی خطی خارج سازد. با توجه به اینکه سرمایه‌گذار به دنبال کاهش ریسک نامطلوب پرتفوی خویش با تضمین یک حداقل بازدهی می باشد، فرم کلی مدل برنامه ریزی فازی انتخاب پرتفوی را بصورت مدل (۱) در نظر گرفت. همچنانکه ملاحظه می شود تابع هدف که تعیین کننده مقدار ریسک نامطلوب پرتفوی می باشد از نوع مینیمم و قیود مربوط با فرضیات مدل برنامه ریزی خطی همخوانی دارد.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad Z=\sum_{j=1}^{n}\tilde{\beta}'_j x_j \\
&\quad s.t \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_j x_j \ge \tilde{R} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}x_j=1 \qquad x_j\ge 0 \qquad j=1,...,n \\
&\qquad L_j \le x_j \le U_j \qquad j=1,...,n \\
&\qquad x_j \ge 0 \qquad\qquad j=1,...,n
\end{aligned}
\qquad \text{مدل.۱}
$$

- تعریف متغیرهای تصمیم‌گیری:

x_j: بیانگر نسبت ارزش دارایی j ام به ارزش کل سرمایه.

- تعریف پارامترهای مدل

$\tilde{r}_j$: بازده فازی دارایی j ام در پرتفوی.

$\tilde{\beta}'_j$ بتای نامطلوب فازی دارایی j ام در پرتفوی.

$\tilde{R}$: حداقل بازدهی فازی مورد انتظار برای پرتفوی.

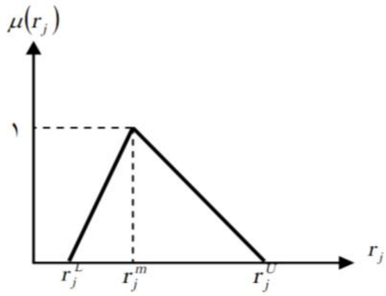
u_j و l_j: بترتیب حداکثر و حداقل مقداری است که می توان در دارایی j ام سرمایه گذاری کرد.

با توجه به شرایط عدم قطعیت در دنیای واقعی، استفاده از اعداد قطعی بدست آمده از داده‌های تاریخی، برای نمایش داده‌های پیش‌بینی شده نرخ بازده و ریسک نامطلوب نامناسب می‌باشد. به همین منظور همانطور که در رابطه‌های (۲) و (۳) مشاهده می‌کنید، $\tilde{R}_j$ و $\tilde{\beta}'_j$ بصورت اعداد فازی مثلثی تعریف شده-

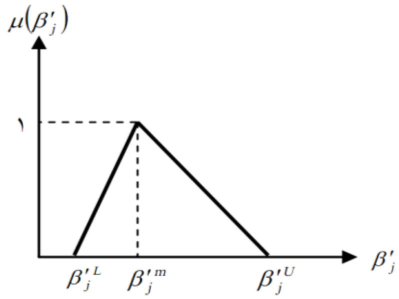
اند و توابع مطلوبیت آنها به ترتیب در شکل‌های ۱و۲ نشان داده می شوند. در اینجا $\tilde{r}_j^{\,m}$ و $\tilde{\beta}_j^{\,m}$ بترتیب برابر مقدار میانگین نرخ بازدهی و میانگین ریسک نامطلوب سالانه شرکت j می‌باشد.

$$\tilde{r}_j = \left(\tilde{r}_j^{\,L}, \tilde{r}_j^{\,m}, \tilde{r}_j^{\,U}\right) \tag{۲}$$

$$\tilde{\beta}'_j = \left(\tilde{\beta}_j^{\,L}, \tilde{\beta}_j^{\,m}, \tilde{\beta}_j^{\,U}\right) \tag{۳}$$



شکل۱) تابع مطلوبیت بازده سهم jام



شکل۲) تابع مطلوبیت ریسک نامطلوب سهم jام

فرض کنید دامنه اعداد فازی مثلثی نرخ بازده و ریسک نامطلوب، از هر طرف به میزان دو برابر انحراف معیار هر یک متغیرها باشد (چن و هانگ، ۲۰۰۹).

۵- روش حل مدل برنامه‌ریزی فازی انتخاب پرتفوی

به منظور حل مدل برنامه‌ریزی فازی انتخاب پرتفوی، میتوان از روش نور (نورا و سلجوقی، ۱۳۸۳) کمک گرفت. با اعمال برش α بر روی ضرایب تابع هدف و پارامتر های مدل روابط (۴) را خواهیم داشت.

$$\tilde{r}_{j\alpha} \in \left[\tilde{r}_j^{\,L}, \tilde{r}_j^{\,U}\right] = \left[\tilde{r}_j^{\,L} + \alpha\left(\tilde{r}_j^{\,m} - \tilde{r}_j^{\,L}\right), \tilde{r}_j^{\,U} - \alpha\left(\tilde{r}_j^{\,u} - \tilde{r}_j^{\,m}\right)\right] \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\tilde{\beta}'_{j\alpha} \in \left[\tilde{\beta}'^{L}_j, \tilde{\beta}^{U}_j\right] = \left[\tilde{\beta}'^{L}_j + \alpha\left(\tilde{\beta}'^{m}_j - \tilde{\beta}'^{L}_j\right), \tilde{\beta}'^{U}_j - \alpha\left(\tilde{\beta}'^{U}_j - \tilde{\beta}'^{m}_j\right)\right] \quad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (۴)$$

$$\tilde{R}_{\alpha} \in \left[\tilde{R}^{L}, \tilde{R}^{U}\right] = \left[\tilde{R}^{L} + \alpha\left(\tilde{R}^{m} - \tilde{R}^{L}\right), \tilde{R}^{U} - \alpha\left(\tilde{R}^{U} - \tilde{R}^{m}\right)\right]$$

در صورتیکه مدل (۱) را با جایگذاری روابط (۲) بازنویسی کرد مدل فازی را میتوان بصورت مدل (۲) نوشت.

$$\begin{aligned}
Max \quad & Z = \sum_{j=1}^{n}\left[\beta'^{L}_j + \alpha\left(\beta'^{m}_j - \beta'^{L}_j\right), \beta'^{U}_j - \alpha\left(\beta'^{U}_j - \beta'^{m}_j\right)\right]x_j \\
s.t \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n}\left[r_j^{\,L} + \alpha\left(r_j^{\,m} - r_j^{\,L}\right), r_j^{\,U} - \alpha\left(r_j^{\,U} - r_j^{\,m}\right)\right]x_j \geq \left[R^{L} + \alpha\left(R^{m} - R^{L}\right), R^{U} - \alpha\left(R^{U} - R^{m}\right)\right] \qquad (۲) \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& L_j \leq x_j \leq U_j \quad j = 1, \ldots, n \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

در این مرحله به ازای مقادیر مختلف آلفا مدل فازی (۲) به صورت مدل (۳) با پارامتر های فاصله‌ای تبدیل می شود. اگر مقادیر حد پایین و حد بالای اعداد فاصله‌ای ضرایب تابع هدف و ضرایب محدودیت‌ها و طرف راست محدودیت‌ها را در مدل (۲) بصورت روابط (۵) تغییر داد، مدل فاصله‌ای (۳) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}'^{L}_j &= \beta'^{L}_j + \alpha\left(\beta'^{m}_j - \beta'^{L}_j\right) \\
\bar{\beta}'^{U}_j &= \beta'^{U}_j - \alpha\left(\beta'^{U}_j - \beta'^{m}_j\right) \\
\bar{r}_j^{\,L} &= r_j^{\,L} + \alpha\left(r_j^{\,m} - r_j^{\,L}\right) \\
\bar{r}_j^{\,U} &= r_j^{\,U} - \alpha\left(r_j^{\,U} - r_j^{\,m}\right) \qquad (۵) \\
\bar{R}^{L} &= R^{L} + \alpha\left(R^{m} - R^{L}\right) \\
\bar{R}^{U} &= R^{U} - \alpha\left(R^{U} - R^{m}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
min \quad & Z = \sum_{j=1}^{n}\left[\bar{\beta}'^{L}_j, \bar{\beta}'^{U}_j\right]x_j \\
s.t \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n}\left[\bar{r}_j^{\,L}, \bar{r}_j^{\,U}\right]x_j \geq \left[\bar{R}^{L}, \bar{R}^{U}\right] \qquad \text{مدل (۳)} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n, \\
& L_j \leq x_j \leq U_j \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

برای حل مدل های فاصله‌ای بدست آمده، با توجه به مفهوم بازه های محدب می توان از تبدیلات روابط (۶) استفاده کرد.

$$\begin{aligned}
&\bar{\beta}_j'^L \le \beta_j \le \bar{\beta}_j'^U \\
&\beta_j = \lambda_j \bar{\beta}_j'^U + (1-\lambda_j)\bar{\beta}_j'^L = \bar{\beta}_j'^L + \lambda_j\left(\bar{\beta}_j'^U - \bar{\beta}_j'^L\right) \quad 0 \le \lambda_j \le 1 \quad j = 1,\dots,n \\
&\bar{r}_j^{\,L} \le r_j \le \bar{r}_j^{\,U} \\
&r_j = \alpha_j \bar{r}_j^{\,U} + (1-\alpha_j)\bar{r}_j^{\,L} = \bar{r}_j^{\,L} + \alpha_j\left(\bar{r}_j^{\,U} - \bar{r}_j^{\,L}\right) \quad 0 \le \alpha_j \le 1 \quad j = 1,\dots,n \\
&\bar{R}^L \le R \le \bar{R}^U \\
&R = \rho \bar{R}^U + (1-\rho)\bar{R}^L = \bar{R}^L + \rho\left(\bar{R}^U - \bar{R}^L\right) \quad 0 \le \rho \le 1
\end{aligned} \tag{۶}$$

مدل (۴)، با جایگذاری روابط (۶) در مدل (۳) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\min \quad & Z = \sum_{j=1}^{n}\left[\bar{\beta}_j'^L + \lambda_j\left(\bar{\beta}_j'^U - \bar{\beta}_j'^L\right)\right]x_j \\
s.t \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n}\left[\bar{r}_j^{\,L} + \alpha_j\left(\bar{r}_j^{\,U} - \bar{r}_j^{\,L}\right)\right]x_j \ge \bar{R}^L + \rho\left(\bar{R}^U - \bar{R}^L\right) \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \quad x_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,n \\
& L_j \le x_j \le U_j \quad j = 1,\dots,n, \\
& x_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,n, \\
& 0 \le \lambda_j \le 1 \quad j = 1,\dots,n, \\
& 0 \le \alpha_j \le 1 \quad j = 1,\dots,n, \\
& 0 \le \rho \le 1
\end{aligned}$$

مدل (۴)

حال می توان به منظور خطی‌سازی مدل غیرخطی فوق، تغییر متغیرهای زیر را با توجه به روابط $w_j = \alpha_j x_j$ و $\mu_j = \lambda_j x_j$ انجام داد، مدل (۵) در واقع همان مدل (۴) می باشد که بصورت خطی تبدیل شده‌است.

$$\begin{aligned}
Min \quad & Z = \sum_{j=1}^{n}\bar{\beta}_j'^L x_j + \sum_{j=1}^{n}\mu_j\left(\bar{\beta}_j'^U - \bar{\beta}_j'^L\right) \\
s.t \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n}\bar{r}_j^{\,L} x_j + \sum_{j=1}^{n}\omega_j\left(\bar{r}_j^{\,U} - \bar{r}_j^{\,L}\right) \ge \bar{R}^L + \rho\left(\bar{R}^U - \bar{R}^L\right) \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \quad j = 1,\dots,n \\
& L_j \le x_j \le U_j \quad j = 1,\dots,n \\
& \omega_j \le x_j \quad j = 1,\dots,n \\
& \mu_j \le x_j \quad j = 1,\dots,n \\
& x_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,n \\
& \omega_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,n, \\
& \mu_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,n \\
& 0 \le \rho \le 1
\end{aligned}$$

مدل (۵)

از آنجایی که می دانیم با بزرگتر شدن ناحیه شدنی جواب بهینه بدتر نخواهد شد. لذا برای اینکه مطلوبترین جواب یا $Z_{\min}$ را بدست آوریم باید پارامتر های مدل را بصورت زیر اختیار کنیم:

$$\mu_j = 0$$

$$\omega_j = x_j$$

$$\rho = 0$$

با جایگذاری مقادیر فوق در مدل (۶) بدست می آید :

$$\begin{aligned}
Min \quad & Z = \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta}_j'^{L} x_j \\
s.t \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} \overline{r}_j^{U} x_j \geq \overline{R}^{L} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad j = 1,\dots,n \\
& L_j \leq x_j \leq U_j \qquad j = 1,\dots,n \\
& x_j \geq 0 \qquad j = 1,\dots,n
\end{aligned}$$

مدل (۶)

بمنظور اینکه نامطلوبترین جواب را بدست آوریم باید پارامتر های را چنان اختیار کنیم که ناحیه‌ی‌شدنی تا حد ممکن کوچکتر گردد:

$$\mu_j = x_j$$

$$\omega_j = 0$$

$$\rho = 1$$

با قرار دادن مقادیر فوق در مدل(۷) بدست می‌آید. با حل این مدل نا مطلوبترین جواب یا $Z_{\max}$ بدست می‌آید. میتوان نتیجه گرفت جواب بهینه در بازه $[Z_{\min}, Z_{\max}]$ قرار دارد.

$$\begin{aligned}
Min \quad & Z = \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta}_j'^{U} x_j \\
s.t \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} \overline{r}_j^{L} x_j \geq \overline{R}^{U} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad j = 1,\dots,n \\
& L_j \leq x_j \leq U_j \qquad j = 1,\dots,n \\
& x_j \geq 0 \qquad j = 1,\dots,n
\end{aligned}$$

مدل (۷)

۶- یافته های پژوهش

مثال عددی. در این بخش به منظور پیاده‌سازی و بررسی اثربخشی مدل و روش حل پیشنهادی، یک مثال عددی برای انتخاب سبد سهام بهینه از بازار سهام ایران ارائه می‌دهیم. فرض کنید سرمایه‌گذاری میخواهد از بین ۹ سهام شرکت‌های پذیرفته‌شده در بورس اوراق بهادار تهران پرتفویی با حداقل ریسک نامطلوب تشکیل دهد بطوریکه حداقل مقدار بازده $\tilde{R} = (0.001, 0.003, 0.004)$ و میزان سرمایه ۱۲۰۰۰۰۰ تومان باشد. در این تحقیق به منظور تنوع‌بخشی به سبد سهام انتخاب شده، حدود بالا و پایین سهم هر سهم در پرتفوی بهینه بین صفر و ۰,۲ می‌باشد ($0 \le x_j \le 0.2$). جدول (۲) و جدول (۴) به ترتیب نشان دهنده مقادیر فازی بازدهی سالانه و بتای نامطلوب برای ۹ سهم پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران از سال ۱۳۷۴ تا سال ۱۳۹۲می‌باشد. نتایج حل مدل برنامه‌ریزی خطی فازی برای انتخاب پرتفوی بهینه بدست آمده، به ازای آلفاهای متفاوت بصورت جدول (۵) می‌باشد. برای حل تمامی مدل‌ها، بسته نرم افزاری Lingo11 بکار برده شده‌است.

جدول ۱) نرخ بازدهی شرکت های انتخابی

		سیمان دورود	تکاب	پترو آبادان	پترو خارک	ایرانتر نسفو	پارس دارو	سیمان تهران	آفست	دکوثر
1374		-0.4350	-0.4000	-0.3190	-0.0650	-0.4570	-0.4770	-0.3180	-0.1730	-0.3050
1375		0.2380	0.3360	0.0760	0.2380	0.1070	0.7140	0.2850	0.0980	0.5130
1376		-0.2950	-0.0930	0.3810	-0.0780	-0.4240	0.1650	-0.0470	0.2000	0.0550
1377		-0.0360	-0.0900	-0.0510	-0.0770	-0.1890	-0.0430	0.1040	0.0300	-0.1260
1378		-0.2400	-0.1940	0.0870	-0.1870	0.6370	-0.2770	-0.1710	-0.1830	-0.2800
1379		0.1260	1.1130	0.2620	0.1560	0.8650	0.4760	-0.0390	0.0670	-0.0030
1380		0.6390	0.5800	0.3410	0.3510	0.3130	0.2250	0.1490	0.3000	0.4280
1381		0.2820	0.4730	0.2270	0.2330	0.6370	0.2900	0.2600	0.1030	0.1920
1382		0.5780	0.2290	0.3520	0.3490	0.3730	0.2160	0.4190	0.2160	0.4460
1383		0.2890	-0.1260	0.1530	-0.2090	-0.0370	-0.2720	-0.0780	-0.0460	-0.0880
1384		0.1840	0.0090	-0.0990	0.3550	0.0260	0.1440	0.1690	-0.0710	-0.1270
1385		0.1140	0.0000	0.0380	-0.2310	0.1530	0.1070	-0.0350	0.0560	-0.0150
1386		-0.2220	0.2230	0.2730	0.2460	0.0670	0.3210	0.1330	0.0380	0.3050
1387		0.3270	0.6500	0.0910	-0.2480	0.5790	0.3050	0.7320	0.0890	-0.0960
1388		0.3330	-0.1310	0.0540	-0.0640	0.0400	0.1950	0.0210	0.0900	0.0160
1389		0.0620	0.1750	0.1090	0.0790	0.4340	0.3900	0.1310	0.0830	0.1280
1390		-0.0480	-0.0840	0.2100	0.0670	-0.0270	-0.0720	0.0060	0.0350	-0.0100
1391		0.1850	0.7560	0.1120	0.0770	0.4690	0.7150	0.9080	0.1760	0.1540
1392		-0.4350	-0.4000	-0.3190	-0.0650	-0.4570	-0.4770	-0.3180	-0.1730	-0.3050
حداکثر بازده	$\tilde{r}_j^U$	0.7038	0.9718	0.5008	0.4588	0.9395	0.8255	0.7440	0.3144	0.5389
حداقل بازده	$\tilde{r}_j^L$	-0.5305	-0.6533	-0.2925	-0.3612	-0.6122	-0.5470	-0.5007	-0.2160	-0.4460
میانگین	$\tilde{r}_j^m$	0.0866	0.1593	0.1041	0.0488	0.1636	0.1392	0.1216	0.0492	0.0464

جدول ۲) نرخ بازدهی شرکت های انتخابی بصورت اعداد فازی $\tilde{r}_j \in \left(\tilde{r}_j^{\,L}, \tilde{r}_j^{\,m}, \tilde{r}_j^{\,U}\right)$

	سیمان دورود	تکاب	پترو آبادان	پترو خارک	ایرانتر نسفو	پارس دارو	سیمان تهران	آفست	دکوثر
نرخ بازده فاصله ای	(-0.5305, 0.0866,) 0.7038	(-0.6533, 0.1593, 0.9718)	(-0.2925, 0.1041, 0.5008)	(-0.3612, 0.0488, 0.4588)	(-0.6122, 0.1636, 0.9395)	(-0.5470, 0.1392, 0.8255)	(-0.5007, 0.1216, 0.7440)	(-0.2160, 0.0492, 0.3144)	(-0.4460, 0.0464, 0.5389)

جدول ۳) بتای نامطلوب شرکت های انتخابی

		سیمان دورود	تکاب	پترو آبادان	پترو خارک	ایرانتر نسفو	پارس دارو	سیمان تهران	آفست	دکوثر
1374		0.1839	0.4314	0.2290	0.9340	0.1966	0.5853	0.4387	0.8491	0.6324
1375		1.2400	0.9106	0.1334	0.1299	0.2511	0.2238	0.3816	0.9340	0.0975
1376		0.4173	0.1818	0.1524	0.5688	0.6160	0.7513	0.7655	0.6787	0.2785
1377		0.0497	0.2638	0.8258	0.4694	0.4733	0.2551	0.7952	0.7577	0.5469
1378		0.9027	0.1455	0.5383	0.0119	0.3517	0.5060	0.1869	0.7431	0.9575
1379		0.9448	0.1361	0.9961	1.3371	0.8308	0.6991	0.4898	0.3922	0.9649
1380		0.4909	0.8693	0.0782	0.1622	0.5853	0.8909	1.4456	0.6555	0.1576
1381		0.4893	0.5797	0.4427	0.7943	0.5497	0.9593	0.6463	0.1712	0.9706
1382		0.3377	0.5499	0.1067	0.3112	0.9172	0.5472	0.7094	0.7060	0.9572
1383		0.9001	0.1450	0.9619	0.5285	0.2858	0.1386	0.7547	0.0318	0.4854
1384		0.3692	0.8530	0.0046	0.1656	0.7572	0.1493	0.2760	0.2769	0.8003
1385		0.1112	0.6221	0.4910	0.6020	0.7537	0.2575	0.6797	0.0462	0.1419
1386		0.7803	0.3510	0.8173	0.2630	0.3804	1.8407	0.6551	1.0971	0.4218
1387		0.3897	0.5132	0.8687	0.6541	0.5678	0.2543	0.1626	0.8235	0.9157
1388		0.2417	0.4018	0.0844	0.6892	0.0759	0.8143	0.1190	0.6948	0.7922
1389		0.4039	0.0760	0.3998	0.7482	0.0540	0.2435	0.4984	0.3171	0.9595
1390		0.0965	0.2399	0.2599	0.4505	0.5308	0.9293	0.9597	0.9502	0.6557
1391		0.1320	0.1233	0.8001	0.0838	0.7792	0.3500	0.3404	0.0344	0.0357
1392		0.1839	0.4314	0.2290	0.9340	0.1966	0.5853	0.4387	0.8491	0.6324
حداکثر بتای نامطلوب	$\left(\beta_j^U\right)$	1.1392	0.9447	1.1191	1.2114	1.0029	1.4006	1.2018	1.2598	1.2609
حداقل بتای نامطلوب	$\left(\beta_j^L\right)$	-0.2271	-0.1210	-0.2328	-0.1758	-0.0394	-0.2448	-0.0710	-0.1010	-0.0606
میانگین	$\left(\beta_j^m\right)$	0.4560	0.4118	0.4431	0.5178	0.4817	0.5779	0.5654	0.5794	0.6002

جدول ٤) بتای نا مطلوب شرکت های انتخابی بصورت اعداد فازی $\tilde{\beta}_j \in \left(\tilde{\beta}_j^L, \tilde{\beta}_j^{\,m}, \tilde{\beta}_j^U\right)$

	سیمان دورود	تکاب	پترو آبادان	پترو خارک	ایرانتر نسفو	پارس دارو	سیمان تهران	آفست	دکوثر
بتای نامطلوب فازی	(-0.2271, 0.4560, 1.1392)	(-0.1210, 0.4118, 0.9447)	(-0.2328, 0.4431, 1.1191)	(-0.1758, 0.5178, 1.2114)	(-0.0394, 0.4817, 1.0029)	(-0.2448, 0.5779, 1.4006)	(-0.0710, 0.5654, 1.2018)	(-0.1010, 0.5794, 1.2598)	(-0.0606, 0.6002, 1.2609)

به منظور نمایش نحوه فازی سازی، تابع مطلوبیت نرخ بازده و ریسک نامطلوب سهم سیمان دورود در رابطه (۷) و(۸) نشان داده می‌شود.

$$\mu(r_1)=\begin{cases} 1 & r_1=0.0866 \\ \dfrac{r_1+0.5305}{0.0866+0.5305} & -0.5305\le r_1\le 0.0866 \\ \dfrac{0.7038-r_1}{0.7038-0.0866} & 0.0866\le r_1\le 0.7038 \\ 0 & r_1\ge 0.7038 \text{ or } r_1\le -0.5305 \end{cases} \quad (۷)$$

$$\mu(\beta_1')=\begin{cases} 1 & \beta'=0.4560 \\ \dfrac{\beta'+0.2271}{0.4560+0.2271} & -0.2271\le \beta'\le 0.4560 \\ \dfrac{1.1392-\beta'}{1.1392-0.4560} & 0.4560\le \beta'\le 1.1392 \\ 0 & \beta'\ge 1.1392 \text{ or } \beta'\le -0.2271 \end{cases} \quad (۸)$$

جدول ۵) شرکت های انتخابی پرتفوی به همراه وزنشان در پرتفوی

	درصد سرمایه گذاری در هر سهم										
آلفا (α)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	بازده پرتفوی	بتای نا مطلوب پرتفوی
$\alpha=1$	0.09	0.08	0.13	0.16	0.17	0.11	0.10	0.06	0.09	0.9074	0.661 Z_{min}
$\alpha=0.8$	0.15	0.04	0.11	0.11	0.10	0.16	0.17	0.06	0.10	0.8734	0.408= Z_{min} 1.12= Z_{max}
$\alpha=0.6$	0.10	0.14	0.07	0.06	0.07	0.06	0.27	0.07	0.15	0.8158	=0.330, Z_{min} 1.476= Z_{max}
$\alpha=0.4$	0.12	0.09	0.08	0.03	0.06	0.20	0.17	0.07	0.17	0.8047	0.214, Z_{min} ,1.312 Z_{max}
$\alpha=0.5$	0.07	0.06	0.02	0.10	0.22	0.20	0.04	0.09	0.20	0.7270	0.097, Z_{min} 1.205 Z_{max}
$\alpha=0.2$	0.12	0.13	0.11	0.05	0.11	0.12	0.21	0.10	0.05	0.5469	0.044, Z_{min} 0.516= Z_{max}
$\alpha=0.3$	0.10	0.11	0.17	0.20	0.01	0.19	0.07	0.02	0.12	0.6324	0.061, Z_{min} 0.957= Z_{max}
$\alpha=0.1$	0.06	0.19	0.12	0.16	0.03	0.17	0.03	0.16	0.08	0.8003	0.117, Z_{min} 1.096= Z_{max}
$\alpha=0$	0.13	0.02	0.15	0.18	0.17	0.01	0.19	0.07	0.08	0.8375	0.543, Z_{min} 1.843= Z_{max}

با توجه به نتایج جدول ۵، در مدل ارائه شده برای انتخاب پرتفوی بهینه، با داشتن مقادیر فازی ریسک نامطلوب و بازده سهام می‌توان پرتفویی با حداقل میزان ریسک نامطلوب و بازده بیشتر از یک مقدار حداقل انتخاب کرد. همانطور که مشاهده می‌شود به ازای هر مقدار α یک سبد سهام و مقدار تابع هدف یا ریسک نامطلوب پرتفوی بهینه نشان داده شده است.

۸- نتیجه‌گیری و بحث

ریسک و بازده دو عامل بسیار مهم هستند که تصمیمات سرمایه‌گذاران راتحت تأثیر قرار می‌دهند. سرمایه‌گذاران برای به حداکثر رساندن مطلوبیت مورد نظر خود، از تمامی اطلاعات مربوط به تعیین و قیمت گذاری اوراق بهاردار، استفاده می‌کنند. با توجه به اینکه مدل پایه‌ای مسئله انتخاب پرتفوی مارکویتز بصورت غیر خطی می‌باشد. در مقایسه با تحقیقات پیشین، در این تحقیق با در نظرگرفتن بتای نامطلوب به عنوان شاخص ریسک سیستماتیک اوراق بهاردار، پیچیدگی روش حل و خطاهای ناشی از روش‌های خطی‌سازی کاهش یافته است. با توجه به شرایط عدم قطعیت سرمایه‌گذار در تعیین عوامل موثر در فرآیند سرمایه-گذاری از جمله مقدار دقیق بازده و ریسک سهام، در این مقاله سعی شده است تا مدلی توسط برنامه ریزی خطی در شرایط فازی و روش حل آن برای انتخاب بهینه پرتفوی ارائه گردد. از آنجایی که هدف از یک سرمایه‌گذاری داشتن حداقل ریسک در ازای مقدار قابل قبولی بازدهی است، لذا یک مدل بهینه‌سازی، با هدف کمینه کردن ریسک نامطلوب و بر اساس مقدار معینی بازدهی به کار گرفته شده است. نتایج محاسبات نشان می‌دهد مدل ارائه می‌تواند با داشتن بازده و بتای نامطلوب فازی به سرمایه‌گذار برای پیدا کردن یک سبد سرمایه‌گذاری کارا، با توجه به اولویت خود کمک کند.

فهرست منابع

* ابزری، مهدی،کتابی، سعیده و عباسی،عباس (۱۳۸۴). بهینه سازی سبد سرمایه گذاری با استفاده از روش های برنامه ریزی خطی و ارائه یک مدل کاربردی، نشریه علوم اجتماعی و انسانی دانشگاه شیراز، صص ۴۳، ۱- ۱۷.
* صافی، محمدرضا، باقری، امین و فولادی، پردیس (۱۳۹۱). استفاده از برنامه ریزی کسری خطی برای حل مسئله پرتفوی، سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، دانشگاه سمنان.
* عباسعلی، نورا و حسین زاده سلجوقی، فرانک، (۱۳۸۳). روش حلی برای مسائل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای و برنامه‌ریزی خطی فازی، پنجمین کنفرانس سیستم های فازی ایران.
* Bawa, V. S., & Lindenberg, E. B. (1977). Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework. Journal of Financial Economics, 5(2), 189-200.
* Cai, X., Teo, K. L., Yang, X., & Zhou, X. Y. (2000). Portfolio optimization under a minimax rule. Management Science, 46(7), 957-972.
* Chekhlov, A. V., Uryasev, S., & Zabarankin, M. (2000). Portfolio optimization with drawdown constraints. Department of Industrial & Systems Engineering, University of Florida.

* Chen, L. H., & Huang, L. (2009). Portfolio optimization of equity mutual funds with fuzzy return rates and risks. Expert Systems with Applications, 36(2), 3720-3727.
* Estrada, J. (2007). Mean-semivariance behavior: Downside risk and capital asset pricing. International Review of Economics & Finance, 16(2), 169-185.
* Fishburn, P. C. (1977). Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. The American Economic Review, 67(2), 116-126.
* J Ortí, F., Sáez, J., & Terceño, A. (2002). On the treatment of uncertainty in portfolio selection. Fuzzy economic review, 7(2), 59-80.
* Hicks, J. R. (1935). A suggestion for simplifying the theory of money.Economica, 2(5), 1-19.
* Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. Management science, 37(5), 519-531.
* Lohre, H., Neumann, T., & Winterfeldt, T. (2007). Portfolio Construction with Downside Risk. Available at SSRN 1112982.
* Mansini, R., Ogryczak, W., & Speranza, M. G. (2003). LP solvable models for portfolio optimization: A classification and computational comparison.IMA Journal of Management Mathematics, 14, 187–220.
* Mansini, R., Ogryczak, W., & Grazia Speranza, M. (2013). Twenty Years of Linear Programming Based Portfolio Optimization. European Journal of Operational Research.
* Mao, J. C. (1970). Survey of capital budgeting: Theory and practice. The Journal of Finance, 25(2), 349-360.
* Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. The journal of finance, 7(1), 77-91.
* Markowitz, H. M. (1991). Foundations of portfolio theory. The Journal of Finance, 46(2), 469-477.
* Nawrocki, D. N. (1999). A brief history of downside risk measures. The Journal of Investing, 8(3), 9-25.
* Ogryczak, W. (2000). Multiple criteria linear programming model for portfolio selection.Annals of Operations Research, 97, 143–162.
* Price, K., Price, B., & Nantell, T. J. (1982). Variance and lower partial moment measures of systematic risk: some analytical and empirical results. The Journal of Finance, 37(3), 843-855.
* Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general distributions.Journal of Banking & Finance, 26, 1443–1471.
* Roy, A. D. (1952). Safety-first and the holding of assets.Econometrica, 20, 431–449. Sankaran, J. K., & Patil, A. A. (1999). On the optimal selection of portfolios under limited diversification. Journal of Banking & Finance, 23, 1655–1666.
* Sharpe, W. F. (1971). A linear programming approximation for the general portfolio analysis problem. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 6(05), 1263-1275.
* Sortino, F. A., & Van Der Meer, R. (1991). Downside risk. The Journal of Portfolio Management, 17(4), 27-31.
* Speranza, M. G. (1996). A heuristic algorithm for a portfolio optimization model applied to the Milan stock market. Computers and Operations Research, 23, 433–441.
* Vinod, H. D., & Morey, M. R. (1999). Confidence intervals and hypothesis testing for the Sharpe and Treynor performance measures: A bootstrap approach.Computational Finance, 25-39

یادداشت‌ها

[1] Linear Programming
[2] minmax approach
[3] Conditional Value at Risk