تعمیم نظریه مارکویتز در بهینه‌سازی سبد سهام

دکتر حمید شهرستانی
استاد اقتصاد دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران*
دکتر فرهاد ثوابی اصل
استادیار اقتصاد دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کرج**
دکتر بیژن بیدآباد
استاد اقتصاد مؤسسه تحقیقات پولی و بانکی***

تاریخ دریافت: ۸۷/۹/۳۰ تاریخ پذیرش: ۸۸/۴/۲۰ صفحات: ۲۲۹-۲۰۷

الگوی مارکوویتز درتعیین سهم هریک از سهام در سبد دارایی، برمبنای انتخاب بهینه سهام برای حداکثر نمودن درآمد انتظاری سبد استوار است، از یک طرف، این الگو امید ریاضی ارزش هر سهم را در الگو وارد می‌نماید. ازطرف دیگر، این مدل کوواریانس نوسانات ارزشی سهام را ثابت و برونزا درنظر می‌گیرد. بنابراین دراین مقاله از طریق ترکیب نظریات مارکوویتز و شارپ و پیشنهاد مدلی جدید الگوی جامع تری را معرفی می‌کنیم که نسبت به مرزسنتی مارکوویتز کاراتر خواهد بود.

به عبارت دیگر از طریق درونزا نمودن کوواریانس‌های نرخهای بازدهی مربوط به سهام واقع شده در پرتفولیوی اختیار شده در مدل توسعه یافته مدل مارکوویتز، بازده انتظاری مدل پیشنهادی، همواره در هر سطح مشخص ریسک، بزرگتر یا مساوی با بازده انتظاری مدل سنتی مارکوویتز خواهد بود.

در الگوی پیشنهادی، سهم بخش ریسک غیرسیستماتیک که طبق نظریه شارپ بازار برای آن پاداشی را درنظر نمی‌گیرد در هر سطح از ریسک پرتفولیو، همواره در پایین‌ترین سطح ممکن قرار می‌گیرد.

برتری نظریه پیشنهادی هم از طریق نظری و هم از طریق عملی با یافتن سبد بهینه سهام شرکتهای بزرگ سیمان، فعال در بورس تهران در مقایسه با نظریه مارکوویتز تأیید می‌شود.

طبقه بندی JEL: P48, P14, O50, D23

کلید واژه‌ها:
بورس سهام تهران، مرزکارای میانگین- واریانس، خط بازار سرمایه، ریسک سیستماتیک، ریسک غیرسیستماتیک و CAPM

*. E. mail: shahrest@ohio.edu
**. E. mail: farhad_savabi1@yahoo.com
***. E. mail: bijan @bidabad.com

مقدمه

مدل قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای (CAPM)[۱]، توسعه مدل «هری مارکوویتز»[۲] از زاویه‌ای خاص و اولین نظریه دربارهٔ قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای ارائه شده توسط «شارپ و لینتنر»[۳] است. در واقع مطالعه نظریه "انتخاب پرتفولیو"[۴] مربوط به مارکوویتز، در خصوص نحوهٔ ارتباط بین ریسک و بازدهی که اولین بار در سال ۱۹۵۲ میلادی منتشر شده بود، به همراه نسخه به روز درآمده آن درسال ۱۹۵۹میلادی توسط شارپ زمینه را برای ظهور اولین نظریهٔ قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای فراهم نمود.

شارپ از طریق اختیار نمودن پاره‌ای از مفروضات موفق شد مرزکارای غیرخطی مارکوویتز را توسعه داده و آنرا تبدیل به مرز کارای خطی نماید که این مرز خطی در ادبیات مالی به خط بازار سرمایه (CML)[5] معروف است.

فرض اساسی دربارهٔ مدل CAPM همانا فرض وجود سبد فراگیر بازار[۶] است. فرضی که توسط تعدادی از محققین مالی از جمله «رول»[۷] مردود شناخته شده است .

در واقع وجود چنین فرضی به ما این امکان را می‌داد که بتوانیم حداکثر مقدار را برای نسبت شارپ[۸] ، و یا همانا حداکثر پاداش بازای هر واحد از ریسک سیستماتیک بازار را استخراج کنیم. تحت شرایط یاد شده، سرمایه‌گذار قادر بود با اختیار ترکیبی دلخواه از سبد فراگیر بازار و یک دارایی بدون ریسک، با توجه به شکل منحنیهای بی‌تفاوتی خود در ارتباط با مقدار ریسک و بازدهی، همواره بریکی از نقاط واقع بر خط بازار سرمایه قرارگیرد. هرقدر سرمایه‌گذار ریسک گریزتر باشد، تمایل به قرض دادن در او بیشتر و برعکس هرقدر ریسک‌پذیرتر باشد، تمایل به وام گرفتن در او بیشتر تقویت می‌شد.

1. Capital Asset Pricing Model (CAPM)
2. Harry Markowitz , (1959)
3. Sharpe & Lintner, (1962).
4. Portfolio Selection
5. Capital Market Line
6. Market Portfolio
7. Roll, (1970).
8. Sharpe Ratio

نکتهٔ مهم و قابل توجهی که درتحقیق حاضر باید به آن اشاره نمود این است که آیا از طریق حذف برونزا بودن عناصر ماتریس واریانس- کوواریانس نرخهای بازدهی کل مربوط به مارکوویتز به کمک مدل قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای، می‌توان تعداد تخمینهای بالای مدل مارکوویتز را کاهش داده و مدل یادشده را به وضعیت کاربردی‌تری تبدیل نمود؟

برمبنای تحلیل مطالب نظری، فرضیه‌ای را که در تحقیق حاضر با آن مواجه هستیم می‌توان به شرح زیر در نظرگرفت:

الگوی مارکوویتز توسعه یافته (الگوی پیشنهادی) عملکرد بهتری نسبت به الگوی مارکوویتز سنتی دارد.

مقصود از عملکرد بهتر در فرضیه یاد شده یعنی اثبات نظری و عملی این موضوع که همواره در هرسطح مشخص از ریسک در نظرگرفته شده برای مدل پیشنهادی و مدل سنتی، همواره بازده انتظاری مدل پیشنهادی بزرگتر یا مساوی با بازده انتظاری مدل سنتی است. به عبارت دیگر همواره مرزکارای مدل پیشنهادی بر بالای مرز کارای سنتی در ازای هر سطح مشخص از بازده انتظاری برای پرتفولیوی درنظرگرفته شده است.

هدف این مقاله عبارتست از تعمیم و ادغام نظریه‌های مارکوویتز و شارپ بگونه‌ای که نخست تعداد تخمینهای مدل مارکوویتز را کاهش داده، دوم از طریق ارائه یک مدل ریاضی خرده سرمایه‌گذاران[1] را درامر انتخاب یک پرتفولیوی بهینه و یا همانا اختیار پرتفولیویی که سهم بخش زائد ریسک و یا دقیق‌تر ریسک غیرسیستماتیک آن را که بازار برای آن حاضر به پرداخت پاداش نیست را در هرسطح دلخواه ممکن از ریسک کل پرتفولیو حداقل نمائیم .

شایان ذکر است که در این مقاله از داده‌های ماهانه مربوط به E/P هرسهم به عنوان بازده سهم در دوره زمانی ۸۶-۷۹ مربوط به بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است.

[1]. واژه خرده سرمایه‌گذار، اشاره به سرمایه‌گذارانی دارد که برای سرمایه‌گذاری وجوه خود تنها به تعداد محدودی سهام توجه دارند.

برای بررسی فرضیه تحقیق و نیز تجزیه و تحلیل آماری داده‌ها و ترسیم نمودارها از بسته‌های نرم‌افزاری (spss)[1]، (Eeviews)[2] و نیز از بسته نرم‌افزاری (GAMS)[3] مربوط به شاخه تحقیق درعملیات استفاده شده است.

در بخش نخست، مروری برادبیات موضوع، سپس ارائه مدل، پس از آن، تخمین پارامترهای الگوی پیشنهادی و الگوی سنتی، سپس، استخراج مرز کارای مدل پیشنهادی و سنتی و در انتها نتیجه‌گیری و پیشنهادات ارائه می‌شود.

مروری بر ادبیات موضوع

مدل CAPM، توسعه مدل مارکوویتز از زاویه‌ای خاص و اولین نظریه در قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای توسط شارپ و لینتز است.

نکتهٔ مهم و درخور توجه دربارهٔ مدل CAPM، همانا فرض وجود سبد فراگیر بازار (Market portfolio) است. در این مدل فرض برآن است که این سبد نه تنها وجود داشته بلکه قابل محاسبه نیز بوده و در ضمن بر روی مرزکارای مارکوویتز واقع است.

در واقع وجود چنین فرضی به ما این امکان را می‌داد که بتوانیم حداکثر مقدار را برای نسبت شارپ استخراج نماییم.

نسبت شارپ یا شاخص شارپ[4] درادبیات مالی طبق رابطه (۱) به شرح زیرتعریف می‌شود.

$$S = \frac{E[R_P - R_f]}{\sqrt{Var[R_P - R_f]}} = \frac{E[R_P - R_f]}{\sigma_p} \qquad (۱)$$

1. Statistical Package for Social Science
2. Econometric Views
3. General Algebrical Model Solution
4. Sharpe Index

چنانچه پرتفولیوی p درناحیه قابل دسترس مارکوویتز که ناحیه‌ای متشکل از ترکیبات گوناگون داراییهای ریسکی با مقادیر ریسک و بازده انتظاری متناظر با خود هستند مطابق نمودار (۱)، واقع شده باشد[۱]، سرمایه‌گذار قادر است با برقراری فرض وام‌گیری و وام دادن در یک نرخ بهره بدون ریسک و فرض وجود دارایی غیرریسکی با بازدهی R_f، از طریق ترکیب سبد P با دارایی غیرریسکی یادشده، یک مرز کارای خطی همچون R_fP را بوجود آوردکه شیب آن همانا مقدار بدست آمده از نسبت شارپ بوده، بطوریکه این نسبت مقدار پاداش درنظرگرفته شده به ازای هر واحد پذیرش ریسک سبد P را به نمایش می‌گذارد.[۲]

حال از آنجایی که سبد بازار بر روی مرزکارای مارکوویتز واقع است[۳]؛ اولاً دارای ماکزیمم مقدار برای نسبت شارپ بوده ، ثانیاً تمامی ریسک آن از نوع سیستماتیک است و ثالثاً بر طبق مفروضات CAPM این پرتفولیو، پرتفولیوی تقاضا شده از سوی تمامی سرمایه‌گذاران است[۴] لذا با توجه به توضیحات داده شده، نسبت یاد شده در این حالت بیانگر حداکثر مقدار پاداش درنظرگرفته شده از سوی بازار در صورت اختیار نمودن این پرتفولیو از سوی سرمایه‌گذاران به ازاء پذیرش هر واحد از ریسک سیستماتیک آن است.

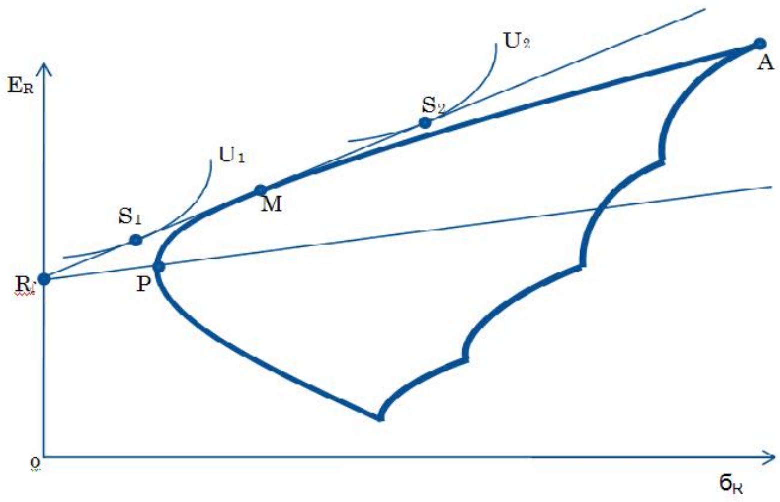
بدین ترتیب یک سرمایه‌گذار قادر خواهد بود از طریق ترکیبی دلخواه از سبد فراگیر بازار و یک دارایی بدون ریسک، با توجه به شکل منحنیهای بی‌تفاوتی خود درارتباط با مقدار ریسک و بازدهی ، همواره بریکی از نقاط واقع بر خط بازار سرمایه (CML) قرارگیرد.

به یقین هرچه سرمایه‌گذار محتاط‌تر و یا اصطلاحاً ریسک گریزتر[۵] باشد، وی تمایل به اختیار نمودن ترکیبهای واقع بین R_fM را دارد، درحالیکه یک سرمایه‌گذار با روحیه تهاجمی‌تر و یا اصطلاحاً ریسک‌پذیرتر[۶] تمایل به اختیار نمودن ترکیبهای واقع درامتداد MK

---

1. Eugene. Fama & French. Kenneth, "Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies", Vol. 51, (1996), pp.55-84.
2. S. Kevin, ***Security Analysis& Portfolio Management***, (Prentice Hall of India Private, 2006).
3. Harry. Markowitz, ***Mean~Variance Analysis in Portfolio Choice & Capital Markets***, (Cambridge, 1987).
4. Eugene. Fama & French. Kenneth, "The Capital Asset Pricing Model: Theory & Evidence"., ***Journal of Finance***, (2004), pp.1-32 .
5. Risk Averse
6. Risk Seeker

را از خود بروز خواهدداد. این امر به ترتیب با منحنیهای بی‌تفاوتی U_1 وU_2 به نمایش گذاشته شده است. نکته درخور توجه دیگر دراین تئوری همانا وجود رابطه خطی (۲) به عنوان شرایط لازم، مسئله حداکثرسازی رابطه (۳) است.[1] که در ادبیات مالی به «خط بازار سهم» (SML)[2] معروف است.[3]



نمودار ۱. رابطه بین ریسک و بازده پرتفولیوی (مدل مارکوویتز و شارپ)

$$E(R_i) = R_f + \beta_{im}\left[E(R_m) - R_f\right] \qquad (۲)$$

---

[1]. به پیوست A مراجعه کنید

[2]. Security Market Line

[3]. Ramesh. Rao., ***Fundamentals of Financial Management***, (Macmilan, 1989).

$$Max\,S = \frac{E[R_p - R_s]}{\sigma_p} = \frac{E[R_p - R_f]}{\sqrt{Var[R_p - R_f]}} \qquad (۳)$$

$$S.to: (۱)\sum_{i=۱}^{n} \omega_{ip} = ۱$$
$$(۲)\omega_{ip} \geq o$$

مطابق نمودار (۱) ماکزیمم مقدار نسبت شارپ دررابطهٔ (۳) زمانی اتفاق خواهد افتاد که پرتفولیو P، همان پرتفولیوی بازار (M) باشد.

همچنین مطابقه رابطه (۲) ، ملاحظه می‌شود که متوسط بازده دارایی ریسکی i ام یک تابع خطی از متوسط بازدهی بازار است.

در این رابطه داریم:

β_{iM}: معرف نسبت ریسک سیستماتیک دارایی iام به ریسک بازار که ضمناً مقدار آن به شرح زیر است:

$$\beta_{iM} = \frac{\sigma_i}{\sigma_M}\rho_{iM}$$

همچنین دررابطه اخیر ρ_{iM} معرف ضریب همبستگی موجود بین بازدهی بازار و بازدهی دارایی ریسکی i ام و طبق فرض مقدار آن درنامساوی مضاعف زیر صدق می‌کند.

$$o \leq \rho_{iM} \leq ۱$$

اینک با ملاحظه رابطه (۲) سوال اصلی آن است که چنانچه یک سرمایه‌گذار خواهان سرمایه‌گذاری درتعداد محدودی از سهام موجود درپرتفولیو M باشد. با توجه به این حقیقت که دراین حالت بخشی از ریسک پرتفولیو از نوع غیرسیستماتیک است، چگونه قادر است که

میزان این بخش زائد از ریسک را درپرتفولیوی اختیار شده از سوی خود که بازار برای آن حاضر به پرداخت نمی باشد را کاهش دهد.

سؤال دیگری که می‌تواند مطرح باشد، آن است که آیا می‌توان ازطریق ارائه یک الگوریتم مناسب سرمایه‌گذاران را درجهت بدست آوردن یک مرزکارا درشرایط پیش آمده با توجه به مسئله ریسک پذیری یا ریسک گریزی آنان یاری رسان باشیم. به سؤالاتی از این قبیل درادامه مقاله پاسخ داده خواهد شد. در این خصوص نیاز به ترکیب و ادغام نظریات شارپ و مارکوویتز را خواهیم داشت.

به این ترتیب که درمدل اولیه مارکوویتز، فرض برونزا بودن متوسط بازدهیهای داراییهای ریسکی را کنارگذارده و بجای آن فرض می‌کنیم که این متوسط بازدهیها از رابطه (۲) تبعیت می‌کنند.

ادغام و ترکیب یادشده درجهت پاسخگویی به سؤالات مطرح شده، سبب این امر می‌شود. که اولاً مشکل محاسبه تعداد تخمینهای بالا درمدل اولیه ارائه شده از سوی مارکوویتز کاهش یابد[1]، ثانیاً ما را قادر می‌سازد تا از طریق ارائه یک الگوریتم ریاضی، شرکتهای سرمایه‌گذاری و سرمایه‌گذاران انفرادی بالقوه و بالفعل را در جهت استخراج مرز کارای جدید یاری رسان باشیم.

لازم به ذکر است که با توجه به بررسیهای انجام شده، بررسی و پژوهش مشابهی با آنچه که درمقاله حاضر به آن پرداخته شده، از سوی سایر محققین تاکنون به عمل نیامده است.

ارائه مدل پیشنهادی

در مدل پیشنهادی سعی ما برآن است تا ازطریق وارد کردن مدل قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای منسوب به شارپ (CAMP) به مدل مارکوویتز، اولاً مشکل تعداد تخمینهای زیاد درمدل مارکوویتز را کاهش داده، ثانیاً از طریق ارائه یک الگوریتم نسبتاً سادهٔ

[1]. تعداد کل تخمینها درمدل مارکوویتز متشکل از n قلم دارایی ریسکی عبارت است از: $\frac{n(n+۳)}{۲}$

ریاضی، شرکتهای سرمایه‌گذاری و سرمایه‌گذاران انفرادی را درتخمین هرچه سریعتر و کاهش قابل ملاحظه در هزینه‌های مالی و زمانی درجهت استخراج مرکز کارای جدید یاری‌رسان باشیم. لازم است باز هم یادآور شویم که این امر تنها برای خرده سرمایه‌گذاران مطابق مقدمه ذکر شده صحیح است.

قبل از ورود به بحث اصلی لازم است ابتدا شکل تجربی مدل CAMP را مورد ملاحظه قرار دهیم.

شکل تجربی مدل CAMP به شرح زیر است.

$$R_{it} - R_f = \beta_{iM}\left(R_{Mt} - R_f\right) + \varepsilon_{it} \qquad (۴)$$

بطوریکه:

R_{it} : بازده دارایی ریسکی i ام دردوره t؛

R_{Mt} : بازده بازار دردوره t؛

ε_{it}: جمله اختلال مربوط به دارایی ریسکی i ام دردوره t.

در خصوص ε_iها از آنجایی که متغیرهایی تصادفی هستند، فرض ما برآن است که تمامی مفروضات رگرسیون بجز فرض برابری واریانس جملات اختلال برآنها حاکم است.

در دنباله براساس شکل تجربی مدل CAMP و با توجه به مفروضات در نظرگرفته شده برای متغیرهای تصادفی مورد اشاره، می‌توان پس از انجام محاسباتی نوشت:[1]

$$\sigma_{ij} = \beta_{iM}\beta_{jM}\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i \varepsilon j} \qquad i, j = 1,2,\ldots,n \qquad (۵)$$

رابطه (۵) را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد:

[1]. S. Kevin, ***Op.Cit***.

$$\sigma_{ij} = \beta_{iM}\beta_{iM}\sigma_M^2 \qquad i \neq j \qquad (۶)$$

$$\sigma_i^2 = \beta_{iM}^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2 \qquad i = j \qquad (۷)$$

بطوریکه:

σ_{ij}: کوواریانس بین نرخهای بازدهی کل دارایی i ام و j ام؛

$\sigma_M^۲$: واریانس نرخهای بازدهی بازار؛

$\sigma_{\varepsilon i\varepsilon j}$: کوواریانس بین جملات اختلال ε_iام و ε_jام که طبق فرض برای $i \neq j$ معادل صفر است؛

$\sigma_{\varepsilon i}^۲$: واریانس جمله اختلال ε_i ام.

اینک با توجه به رابطه (۵) و با توجه به مدل CAPM می‌توان مدل برنامه‌ریزی غیرخطی مارکوویتز را بشرح زیردوباره‌نویسی کرد:

$$MaxE(R_p) = \sum_{i=۱}^{n}\omega_i E(R_i) \qquad (۸)$$

$$S.to: (۱)\sum_{i=۱}^{n}\omega_i^۲\sigma_i^۲ + \sum_{\substack{i=۱}}^{n}\sum_{\substack{i=۱ \\ i\neq j}}^{n}\omega_i\,\omega_j\sigma_{ij} = \sigma_p^۲$$

$$(۲)E(R_i) = R_f + \beta_{iM}\ (E(R_M) - R_f)$$

$$(۳)\sigma_{ij} = \beta_{iM}\ \beta_{jM}\sigma_M^۲ + \sigma_{\varepsilon i\varepsilon j}$$

$$(۴)\sum_{i=۱}^{n}\omega_i = ۱$$

$$(۵)\omega_i \geq o$$

مطابق رابطه (۸) و یا همان مدل پیشنهادی، تعداد تخمینهای مدل به شرح زیر قابل محاسبه هستند.

n(i) تخمین مربوط به محاسبه β_{iM}؛

1(ii) تخمین مربوط به محاسبه $\sigma_M^۲$؛

1(iii) تخمین مربوط به محاسبه $E(R_M)$؛

n (iv) تخمین مربوط به محاسبه $\sigma_{\varepsilon i}^۲$.

بنابراین تعداد کل تخمینها در مدل پیشنهادی عبارتست از:

$$n+1+1+n=2n+2=2(n+1)$$

برای ساده‌سازی رابطه (۸) می‌دانیم که طبق تعریف بتای پرتفولیوی p بقرار زیرمی است:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \beta_i$$

براساس تعریف فوق می‌توان نوشت :

$$\beta_p^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} \omega_i \beta_i\right]^2 = \left(\omega_1\beta_1 + \omega_2\beta_2 + ...\omega_n\beta_n\right)^2$$

لذا داریم:

$$\beta_p^2 = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i\beta_i)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\omega_i\beta_i)\left(\omega_j\beta_j\right) \qquad (۹)$$

مجدداً روابط (۵) و اولین قید رابطه (۸) را در نظر می‌گیریم.

با جایگذاری عبارت (۵) دراولین قید رابطه (۸) و نیز استفاده از رابطه (۹) خواهیم داشت:[1]

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 \qquad (۱۰)$$

جمله اول سمت راست معادله (۱۰) معرف آن بخش از ریسک کل پرتفولیوی p بوده که ناشی از نوسان در فعالیتهای اقتصادی و دقیقاً همان ریسکی است که بازار بابت آن حاضر به پرداخت پاداش است. درحالیکه جمله دوم همین رابطه نشان‌دهنده ریسک غیرسیستماتیک بوده و ازطریق پرگونه سازی قابل حذف بوده و به همین علت بازار برای آن پاداشی درنظرنمی گیرد.[2]

در دنباله با ساده سازی رابطه (۸) و با در نظر گرفتن رابطه (۱۰) رابطه (۱۱) را به شرح زیر خواهیم داشت:

$$MaxE(R_p) = R_f + \beta_p [E(R_M) - R_f] \qquad (۱۱)$$

$$S.to: (1)\sigma_M^2 (\sum_{i=1}^{n} \omega_i \ \beta_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \ \omega_i^2 \ \sigma_{\varepsilon i}^2 = \sigma_p^2$$

$$(2)\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

$$(3)\omega_i \geq o$$

---

1. Alan.Lewis, "Asimple Algorithm for the Portfolio Selection Problem"., ***Journal of Finance***, Vol. 43, (1988), pp. 71-82.

2. John. Lintner, "The Valuation of Risk Assets the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios & Capital Budgets"., ***Review of Economic & Statistics***, Vol. 47, (1965), pp.13-37.

از آنجایی که در عبارت (۱۱) مقادیر R_f ، $E(R_M)$ ثابت هستند، این عبارت هنگامی مقدار حداکثر خود را اختیار خواهد نمودکه ، β_p درمقدار حداکثر قرارگیرد.

تخمین پارامترهای الگوی پیشنهادی والگوی سنتی

مطابق مطالب ارائه شده در بخش پیشین و با توجه به شکل کلی مدلهای پیشنهادی و سنتی می‌توان گفت که هردو مدل یاد شده، مدل‌های برنامه‌ریزی غیرخطی پیچیده هستند؛ با این اختلاف که تخمین پارامترهای مدل پیشنهادی به مراتب محدودتر از مدل سنتی است.

چنانچه درهریک از دو مدل مقادیر متفاوتی از $\sigma_p^{۲}$ در نظر گرفته شوند، آنگاه مقادیرمتفاوتی از $E(R_p)$ را خواهیم داشت که به کمک آنها می‌توان مرزکارا را در هریک از دو مدل استخراج نمود.

انتظار ما به لحاظ نظری بر آن است که مرزکارای مدل پیشنهادی بر بالای مرز کارای سنتی قرارگیرد. علت این امر را می‌توان دراین حقیقت جستجو نمود که:

ملاحظه گردید شارپ از طریق اختیار نمودن یک دارایی غیرریسکی و پاره‌ای از مفروضات، موفق به استخراج مرزکارایی شد که همواره بر بالای مرز کارای مارکوویتز واقع بود. اینک از آنجایی که درمدل پیشنهادی نیز مقادیر بازده انتظاری هرسهم از شرایط لازم حداکثرسازی نسبت شارپ بدست می‌آیند، طبیعتاً در هرسطح در نظرگرفته شده از ریسک کل یک پرتفولیو انتظار بر آن است که بازده انتظاری پرتفولیوی مربوط به مدل پیشنهادی همواره بزرگتر یا مساوی با بازده انتظاری، پرتفولیوی متناظر مربوط به مدل سنتی باشد.

در جهت اثبات عملی فرضیه ارائه شده در بخش مقدمه مقاله، اولین شش شرکت عمده تولیدکننده سیمان کشور از بین کلیه شرکتهای تولیدکننده سیمان کشور به عنوان پرتفولیوی اختیار شده از سوی سرمایه‌گذاران اختیار گردید که به ترتیب و براساس حروف اختصاری به شرح زیر هستند.

۱. سیمان تهران (T)   ۲. سیمان سپاهان (Se)   ۳. سیمان صوفیان (Su)

۴. سیمان کرمان (k)   ۵. سیمان درود (d)   ۶. سیمان هرمزگان (h)

بطوریکه شکل پارامتری مدل پیشنهادی و مدل سنتی براساس علائم اختصاری فوق به شرح زیر هستند.

الف) مدل سنتی

$$Max\ \ E(R_P)=\omega_t E(R_t)+\omega_{se}E(R_{se})+\omega_{su}E(R_{su})+\omega_k E(R_K)+\omega_d E(R_d)+\omega_h E(R_h)$$

$$s.to:\quad (1)\quad \sigma_T^2\omega_T^2+\sigma_{se}^2\omega_{se}^2+\sigma_{su}^2\omega_{su}^2+\sigma_k^2\omega_k^2+\sigma_d^2\omega_d^2+\sigma_h^2\omega_h^2$$

$$+2\omega_T\omega_{se}\sigma_{Tse}+2\omega_T\omega_{su}\sigma_{Tsu}+2\omega_T\omega_k\sigma_{Tk}+2\omega_T\omega_d\sigma_{Td}+2\omega_T\omega_h\sigma_{Th}$$

$$+2\omega_{se}\omega_{su}\sigma_{sesu}+2\omega_{se}\omega_k\sigma_{sek}+2\omega_{se}\omega_d\sigma_{sed}+2\omega_{se}\omega_h\sigma_{seh}$$

$$+2\omega_{su}\omega_k\sigma_{suk}+2\omega_{su}\omega_d\sigma_{sud}+2\omega_{su}\omega_h\sigma_{suh}$$

$$+2\omega_k\omega_d\sigma_{kd}+2\omega_k\omega_h\sigma_{kh}$$

$$+2\omega_d\omega_h\sigma_{dh}=\sigma_p^2$$

$$(2)\quad \omega_T+\omega_{se}+\omega_{su}+\omega_k+\omega_d+\omega_h=1$$

$$(3)\quad \omega_i\geq 0\qquad : i=T,se,su,k,d,h$$

ب) مدل پیشنهادی

$$\text{Max } \mathrm{E}(\mathrm{R_p}) = R_f + (\beta_T\omega_T + \beta_{se}\omega_{se} + \beta_{su}\omega_{su} + \beta_k\omega_k + \beta_d\omega_d + \beta_h\omega_h)[E(R_m) - R_f]$$

$$
\begin{aligned}
s.to \quad : \quad & (1)(\beta_T^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon T}^2)\omega_T^2 + (\beta_{se}^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon se}^2)\omega_{se}^2 + (\beta_{su}^2\sigma_m^2 + \omega_{\varepsilon su}^2)\omega_{su}^2 \\
& + (\beta_k^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon k}^2)\omega_k^2 + (\beta_d^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon d}^2)\omega_d^2 + (\beta_h^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon h}^2)\omega_h^2 \\
& + 2\beta_T\beta_{se}\sigma_m^2\omega_T\omega_{se} + 2\beta_T\beta_{su}\sigma_m^2\,\omega_T\omega_{su} + 2\beta_T\beta_k\sigma_m^2\omega_T\omega_k \\
& + 2\beta_T\beta_d\sigma_m^2\omega_T\omega_d + 2\beta_T\beta_h\sigma_m^2\,\omega_T\omega_h \\
& + 2\beta_{se}\beta_{su}\sigma_m^2\omega_{se}\omega_{su} + 2\beta_{se}\beta_k\sigma_m^2\,\omega_{se}\omega_k + 2\beta_{se}\beta_d\sigma_m^2\omega_{se}\omega_d \\
& + 2\beta_{se}\beta_h\sigma_m^2\omega_{se}\omega_h \\
& + 2\beta_{su}\beta_k\sigma_m^2\omega_{su}\omega_k + 2\beta_{su}\beta_d\sigma_m^2\,\omega_{su}\omega_d + 2\beta_{su}\beta_h\sigma_m^2\omega_T\omega_h \\
& + 2\beta_k\beta_d\sigma_m^2\omega_k\omega_d + 2\beta_k\beta_h\sigma_m^2\,\omega_k\omega_h \\
& + 2\beta_d\beta_h\sigma_m^2\omega_d\omega_h \\
& (2)\omega_T + \omega_{se} + \omega_{su} + \omega_k + \omega_d + \omega_h = 1 \\
& (3)\omega_i \geq 0 \qquad : i = T, se, su, k, d, h
\end{aligned}
$$

تخمین پارامترهای الگوی پیشنهادی

برای تخمین پارامترهای الگوی پیشنهادی از آنجائیکه درخصوص نرخ بازده بدون ریسک (R_f) در بازار مالی ایران توافق کلی وجود نداشت، به ناچار تصمیم گرفته شد که علاوه بر تخمین بتاهای شرکتهای مورد مطالعه نرخ بازده بدون ریسک نیز به طور همزمان مورد تخمین واقع گردد.

برای نیل به هدف یادشده از روش رگرسیونهای بظاهر غیرمرتبط (SUR) [1] استفاده گردید که نتایج آن پس از تخمین مطابق با جدول (۱) ارائه شده است.

1. Seemingly Unrelated Regression

جدول ۱

System: FINAL1
Estimation Method: Iterative Seemingly Unrelated Regression
Date: 06/14/08   Time: 11:58
Sample: 1379:01 1386:10
Included observations: 92
Total system (unbalanced) observations 420
Simultaneous weighting matrix & coefficient iteration
Convergence achieved after: 61 weight matrices, 62 total coef iterations

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	17.72055	0.269335	65.79376	0.0000
C(2)	1.580024	0.088780	17.79717	0.0000
C(3)	0.199754	0.054270	3.680743	0.0003
C(8)	-9.945532	0.351958	-28.25771	0.0000
C(4)	2.822827	0.263235	10.72359	0.0000
C(5)	1.894421	0.086631	21.86770	0.0000
C(6)	1.751018	0.106433	16.45189	0.0000
C(7)	2.037597	0.096903	21.02723	0.0000

Determinant residual covariance 2740052.

Equation: RTEH=C(1)+C(2)*(RM1-C(1))
Observations: 92

R-squared	0.613516	Mean dependent var	12.34348
Adjusted R-squared	0.609222	S.D. dependent var	6.616608
S.E. of regression	4.136191	Sum squared resid	1539.727
Durbin-Watson stat	0.125352		

Equation: RSEP=C(1)+C(3)*(RM1-C(1))+C(8)*DUM8486
Observations: 90

R-squared	0.840435	Mean dependent var	10.32289
Adjusted R-squared	0.836767	S.D. dependent var	5.933417
S.E. of regression	2.397227	Sum squared resid	499.9627
Durbin-Watson stat	0.493987		

Equation: RSOF=C(1)+C(4)*(RM1-C(1))
Observations: 79

R-squared	0.567987	Mean dependent var	18.97620
Adjusted R-squared	0.562376	S.D. dependent var	17.36278
S.E. of regression	11.48602	Sum squared resid	10158.51
Durbin-Watson stat	0.045558		

Equation: RKER=C(1)+C(5)*(RM1-C(1))
Observations: 88

R-squared	0.817520	Mean dependent var	14.32352
Adjusted R-squared	0.815398	S.D. dependent var	9.135750
S.E. of regression	3.925200	Sum squared resid	1325.019
Durbin-Watson stat	0.239948		

Equation: RDOR=C(1)+C(6)*(RM1-C(1))
Observations: 45

R-squared	0.596557	Mean dependent var	9.850222
Adjusted R-squared	0.587174	S.D. dependent var	5.721642
S.E. of regression	3.676242	Sum squared resid	581.1343
Durbin-Watson stat	0.185159		

Equation: RHOR=C(1)+C(7)*(RM1-C(1))
Observations: 26

R-squared	0.326000	Mean dependent var	8.315000
Adjusted R-squared	0.297917	S.D. dependent var	2.372907
S.E. of regression	1.988269	Sum squared resid	94.87714
Durbin-Watson stat	0.276959		

مطابق با جدول (۱) ملاحظه شد اولاً تمام ضرایب برآورد شده در سطح ۹۹٪ معنی‌دار بوده ثانیاً مقادیر نرخ بازده بدون ریسک و بتاهای شرکتهای مورد مطالعه بطور تقریبی به قرار زیر هستند:

$$\beta_{Se}=0/19 \quad \beta_T=1/58 \quad , \quad \beta_{Su}=2/82 \quad , \quad \beta_k=1/89 \quad , \quad \beta_d=1/75$$
$$R_f=17/7 \quad , \quad \beta_h=2$$

مشاهده می‌شود که مقادیر بدست آمده در سازگاری کامل با تئوری‌های موجود در زمینهٔ مهندسی مالی هستند.

همچنین درجهت اجرای مدل پیشنهادی به مقادیرنرخ بازدهی بازار و انحراف معیار مربوط به آن نیاز است. در این راستا بر اساس اطلاعات موجود در بازار بورس اوراق بهادار تهران این مقادیر به شرح زیر برآورد شدند.

$$E\left(R_M\right)=18.45\,\%$$

$$\sigma_M=1.4\%$$

تخمین پارامترهای الگوی سنتی

برای تخمین پارامترهای الگوی سنتی براساس داده‌های بازده ماهانه E/P سهام شرکتهای یاد شده درطول دوره مالی ۸۶-۷۹ پس از تخمین، جدول (۲) درخصوص مقادیر میانگین نرخهای بازدهی و انحراف معیار مقادیر مربوطه به شرح زیر استخراج شد: [۱]

[۱]. بطور خلاصه E/P هرسهم معرف بازده غیر سوداگرانه یک سهم است. از آنجایی که بخش بازده سوداگرانه سهم به تحلیلهای تکنیکال مربوط شده و مدل مارکوویتز مدل بنیادی محسوب می‌شود، بنابراین در این مقاله توجه ما به E/P هر سهم متمرکز شد.

جدول ۲

انحراف معیار نرخ بازدهی بر حسب درصد	میانگین نرخ بازدهی برحسب درصد	علامت اختصاری	نام شرکت
۶/۶۲	۱۲/۳۴	سیمان تهران	T
۵/۹۴	۱۰/۳۲	سیمان سپاهان	Se
۱۷/۳۶	۱۸/۹۷	سیمان صوفیان	Su
۹/۱۳	۱۴/۳۲	سیمان کرمان	k
۵/۷۲	۹/۸۵	سیمان درود	d
۲/۳۷	۸/۳۱	سیمان هرمزگان	h

همچنین از آنجایی که دراجرای مدل سنتی ، تخمین پارامترهای ماتریس واریانس- کوواریانس نیز مورد نیاز است جدول (۳) به کمک بسته نرم افزاری SPSS به شرح زیر استخراج شد.

جدول ۳

Correlations

		EPT	EPSU	EPK	EPH	EPS	EPDROO
EPT	Pearson Correlation	1	.872**	.919**	.752**	.308**	.915**
	Sig. (2-tailed)	.	.000	.000	.000	.003	.000
	Sum of Squares and Cross-products	4052.215	7972.900	4840.637	141.317	1083.981	1051.803
	Covariance	43.572	99.661	54.389	5.653	11.912	23.905
	N	94	81	90	26	92	45
EPSU	Pearson Correlation	.872**	1	.919**	.458*	-.072	.575**
	Sig. (2-tailed)	.000	.	.000	.028	.523	.000
	Sum of Squares and Cross-products	7972.900	23738.469	10695.198	56.029	-572.348	413.629
	Covariance	99.661	296.731	137.118	2.547	-7.245	11.179
	N	81	81	79	23	80	38
EPK	Pearson Correlation	.919**	.919**	1	.741**	.103	.919**
	Sig. (2-tailed)	.000	.000	.	.000	.339	.000
	Sum of Squares and Cross-products	4840.637	10695.198	7348.743	111.713	474.640	938.807
	Covariance	54.389	137.118	82.570	4.655	5.456	22.353
	N	90	79	90	25	88	43
EPH	Pearson Correlation	.752**	.458*	.741**	1	.644**	.563*
	Sig. (2-tailed)	.000	.028	.000	.	.000	.012
	Sum of Squares and Cross-products	141.317	56.029	111.713	140.767	191.861	127.773
	Covariance	5.653	2.547	4.655	5.631	7.674	7.098
	N	26	23	25	26	26	19
EPS	Pearson Correlation	.308**	-.072	.103	.644**	1	.744**
	Sig. (2-tailed)	.003	.523	.339	.000	.	.000
	Sum of Squares and Cross-products	1083.981	-572.348	474.640	191.861	3213.029	1208.350
	Covariance	11.912	-7.245	5.456	7.674	35.308	27.463
	N	92	80	88	26	92	45
EPDROO	Pearson Correlation	.915**	.575**	.919**	.563*	.744**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	.000	.000	.012	.000	.
	Sum of Squares and Cross-products	1051.803	413.629	938.807	127.773	1208.350	1440.436
	Covariance	23.905	11.179	22.353	7.098	27.463	32.737
	N	45	38	43	19	45	45

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

استخراج مرزکارای مدل پیشنهادی و سنتی

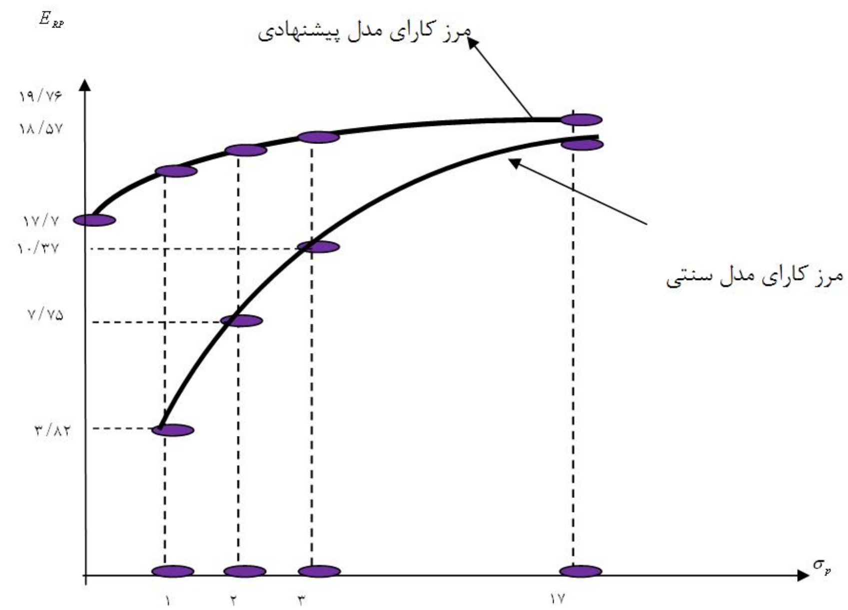
پس از تخمین پارامترهای مدل پیشنهادی و مدل سنتی مطابق با نتایج بدست آمده در بخش قبل، اینک می‌توان درهریک از دو مدل از طریق اختیار نمودن مقادیر متفاوت برای ریسک پرتفولیوی تشکیل شده از اولین شش شرکت عمده تولید کننده سیمان از بین مجموعه کلیه شرکتهای تولید کننده سیمان کشور، مقادیر بازدهیهای انتظاری متناظر را و به دنبال آن مرزکارا را درهریک از دو مدل پیشنهادی و سنتی بدست آورد.

از آنجایی که هردو مدل پیشنهادی و سنتی مدل‌های برنامه‌ریزی غیرخطی پیچیده می‌باشند به ناچار از بسته نرم‌افزاری (GAMS) استفاده کرده و بدین ترتیب جدول (۴) به شرح زیر استخراج شده است.

جدول ۴

مدل پیشنهادی	مدل سنتی	مدل پیشنهادی	مدل سنتی	ریسک پرتفولیو
بازده انتظاری پرتفولیو		بردار وزنها		
$E(R_p)$		$W=(\omega_T,\omega_{se},\omega_{su},\omega_k,\omega_d,\omega_h)$		σ_p
۱۸.۳	۳.۸۲	$W_1^*=(0.02,0.05,0.01,0.01,0.03,0.33)$	$W1=(0.01,0.02,0.01,0.01,0.01,0.37)$	۱
۱۸.۹	۷.۷۵	$W_2^*=(0.05,0.11,0.01,0.02,0.05,0.68)$	$W2=(0.02,0.04,0.01$و$0.02,0.03,0.74)$	۲
۱۹.۲۴	۱۰.۳۷	$W_3^*=(0.01,0.01,0.11,0.01,0.01,0.85)$	$W3=(0.11,0.16,0.05,0.11,0.03,0.5)$	۳
۱۹.۳۴	۱۲.۵۳	$W_4^*=(0.01,0.01,0.26,0.01,0.01,0.7)$	$W4=(0.21,0.33,0.11,0.24,0.01,0.09)$	۵
۱۹.۴۱	۱۴.۱۴	$W_5^*=(0.01,0.01,0.39,0.01,0.01,0.6)$	$W5=(0.15,0.21,023,0.39,0.01,0.01)$	۷
۱۹.۴۹	۱۵.۳۸	$W_6^*=(0.01,0.01,0.5,0.01,0.01,0.46)$	$W6=(0.07,0.07,0.34,0.49,0.01,0.01)$	۹
۱۰. ۵۶	۱۶.۴۸	$W_7^*=(0.01,0.01,0.63,0.01,0.01,0.34)$	$W7=(0.01,0.01,0.50,0.46,0.01,0.01)$	۱۱
۱۹.۶۴	۱۷.۳۳	$W_8^*=(0.01,0.01,0.75,0.01,0.01,0.22)$	$W8=(0.01,0.01,0.68,0.28,0.01,0.01)$	۱۳
۱۹.۷۱	۱۸.۰۷	$W_9^*=(0.01,0.01,0.87,0.01,0.01,0.09)$	$W9=(0.01,0.01,0.84,0.12,0.01,0.01)$	۱۵
۱۹.۷۶	۱۸.۵۷	$W_{10}^*=(0.01,0.01,0.95,0.01,0.01,0.01)$	$W10=(0.01,0.01,0.95,0.01,0.01,0.01)$	۱۷

اینک می‌توان متناظر با جدول فوق نمودارهای دو الگوی پیشنهادی و سنتی را به شرح نمودار (۲) ترسیم نمود.



نمودار ۲. رابطه بین ریسک و بازده انتظاری پرتفولیوی (مدل پیشنهادی و مدل سنتی)

مطابق با اطلاعات موجود در جدول (۴) و نمودار (۲) ملاحظه می‌شود که مرزکارای مدل پیشنهادی به لحاظ عملی بربالای مرزکارای سنتی واقع است.

لذا این امر اثبات عملی فرضیه تحقیق را نیز به همراه دارد.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

به رغم استفاده از نظریه CAPM در محافل مالی از سوی سرمایه‌گذاران، ملاحظه شد که این مدل برای خرده سرمایه‌گذاران به دلیل آنکه پرتفولیوی اختیار شده از سوی آنان زیر مجموعه‌ای از پرتفولیوی بازار می‌باشد، نمی‌تواند مورد استفاده واقع شود.

همانطور که ملاحظه شد، در این حالت بخش قابل توجهی از ریسک پرتفولیو از نوع غیرسیستماتیک است که اولاً بازار برای آن حاضر به پرداخت پاداش نبوده، ثانیاً نمی‌توان بدلیل قابل توجه بودن، از آن صرفنظر نمود. تحت شرایط یادشده، در این مقاله سعی برآن

بود که به نارساییهای فوق در قالب پذیرش فرض مدل CAPM فائق آییم. ملاحظه شد که درالگوی پیشنهادی اولاً مشکل تعداد تخمینهای بالای موجود در مدل مارکوویتز برطرف شد، ثانیاً این امکان را برای خرده سرمایه‌گذارانی که تمایل به قرض‌گیری و قرض دادن وجوه خود را در نرخ بدون ریسک نداشته و ضمناً تمایلی نیز به اختیار نمودن پرتفولیوی بازار از خود نشان نمی‌دهند، جهت سرمایه‌گذاری وجوه محدود خود فراهم می‌آورد.

در پایان پیشنهاد می‌شود برای اثبات فرضیه که متکی برمدل CAPM است. سایر پژوهشگران علاقمند درصورت تمایل می‌توانند بقیه نظریه‌های موجود دربارهٔ قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای همچون نظریه سه عاملی فاما و فرنچ را که امروزه در ادبیات مالی کاربرد گسترده‌ای یافته مورد بررسی و آزمون قرار دهند. همچنین پیشنهاد می‌شود برای بررسی عملی فرضیه به داده‌های سایر بازارهای مالی بخصوص داده‌های مربوط به کشورهای پیشرفته صنعتی -که از درجه اعتبار بالاتری نسبت به داده‌های موجود در کشور برخوردارند و در قالب اختیار نمودن پرتفولیوی متعدد دیگر، همچون پرتفولیوهایی که شامل انواع ارزهای معتبر جهانی، طلا و غیره است- توجه نمایند.

پی‌نوشتها:

1. Buser, Stephen. "A Simplified Expression for the Effieient Frontier in Mean ~ Variance Portfolio Analysis"., ***Management Science***, Vo1.23, (1977): 901-903.

2. Evans & Archer. "Diversification & the Reduction of Dispersion: An Empinical Ana1ysis"., ***Journal of Finance***, Vol .23, (1968): 761-767.

3. Fama, Eugene F. & Kenneth R. French. "Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalics"., ***Journal of Finance***, Vol. 51, (1996): 55-84.

4. Fama, Eugene F.& kenneth R . French, "The Capital Asset Pricing Meodel: Theory & Evidence"., ***Journal of Finance***, (2004): 1-32.

5. Kevin. S. ***Security Analysis & Portfolio Management***. Prentice Hall of India Private., 2006.

6. Lintner, John. "The Valuation of Risk Assets the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios & Capital Budgets"., ***Review of Economic & Statistics***, Vol. 47, (1965): 13-37.

7. Lewis, Alan. "Asimple Algorithm for the Portfolio Selection Problem"., ***Journal of Finance***, Vol. 43, (1988): 71 –82

8. Markowitz, Harry. Mean~Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Cambridge, MA: Black Well, 1987.

9. Markowitz, Harry. "Portfolio Selection"., ***Journal of Finance***, Vol. 7, (1952): 77-91.

10. Markowitz, Harry. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Inverstment. Cowles Foundation Monograph, No. 16, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959.

11. Merton, Robert. "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier"., ***Journal of Financial & Quantitative Analysis***, Vol .2, (1972):1851- 1872

12. Rao, Ramesh. K. S. ***Fundamentals of Financial Management***. Macmilan, new York., 1989.

13. Roll, Richard. "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests Part 1: on Past a Potential Testability of the Theory"., ***Jornal of financial Economics***, Vol. 4, (1997): 129-176.

14. Sharpe, William F. "Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk"., ***Journal of Finance***, Vol. 19, (1964): 425-442.

15. Sharpe, William F. "A Simplified Model for Portfolio Analysis"., ***Management Science***, Vol.9, (1963): 243-277.