2.3.6.

5. Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas. Tal y como demostraremos con rigor en la sección 4.3.2.2, una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^\dagger)^i_j \to (A^*)^j_i \equiv A^j_i$:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real}, \\ z_4^* = z_4 & \text{real}, \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos}. \end{cases}$$

Entonces

(a). Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.4 forman una base para ese espacio vectorial.

(b). Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a | b \rangle \rightleftharpoons \text{Tr}(\mathbb{A}^\dagger \mathbb{B})$ que introdujimos en los ejercicios de esa misma sección.

(c). Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras.

Matriz generica:

$$A = \begin{pmatrix} a & u \\ u^* & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \; u \in \mathbb{C} \Rightarrow u = c + id \quad (c, d \in \mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{pmatrix} \rightarrow \text{tiene 4 grados de libertad reales}$$

Definamos la matrices de Pauli

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Base:

$$A = \frac{a+b}{2}\sigma_0 + c\sigma_1 + d\sigma_2 + \frac{a-b}{2}\sigma_3$$

(b) Ortogonalidad con $\langle A | B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$

las pauli son hermíticas, así que

$$\langle \sigma_u | \sigma_v \rangle = \text{Tr}(\sigma_u \sigma_v) = 2\delta_{uv} \quad (u, v = 0, 1, 2, 3)$$

(c) Subespacios de matrices reales e imaginarias puras.

- Reales:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \frac{a+b}{2}\sigma_0 + c\sigma_1 + \frac{a-b}{2}\sigma_3$$

Subespacio de dimensión 3 con base: $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3\}$

- Imaginarias puras:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & id \\ -id & 0 \end{pmatrix} = d\sigma_2 .$$

Subespación de dimensión 1 generado por $\{\sigma_2\}$ ✓