

Taller evaluado espacios lineales

Alejandra Echeverry
Cod: 2221413



3. Considere un triángulo equilátero que se muestra en la figura 2.1. Se pueden identificar operaciones de rotación alrededor de un eje perpendicular a la figura que pasa por su baricentro \star y, reflexiones respecto a planos, \mathcal{X}_A , \mathcal{X}_B y \mathcal{X}_C , que dejan invariante la figura del triángulo. El lector puede consultar los ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3 para fijar ideas.

Ahora bien, se puede definir la operación concatenación de rotaciones y reflexiones que dejan igualmente invariante al triángulo, tal y como mostramos en la mencionada figura 2.1. Note que lo ilustrado en la figura, puede esquematizarse como:

$$(A \alpha, B \beta, C \gamma) \quad \xrightarrow{\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{3}}} \quad (A \gamma, B \alpha, C \beta) \quad \xrightarrow{\mathcal{X}_A} \quad (A \gamma, B \beta, C \alpha).$$

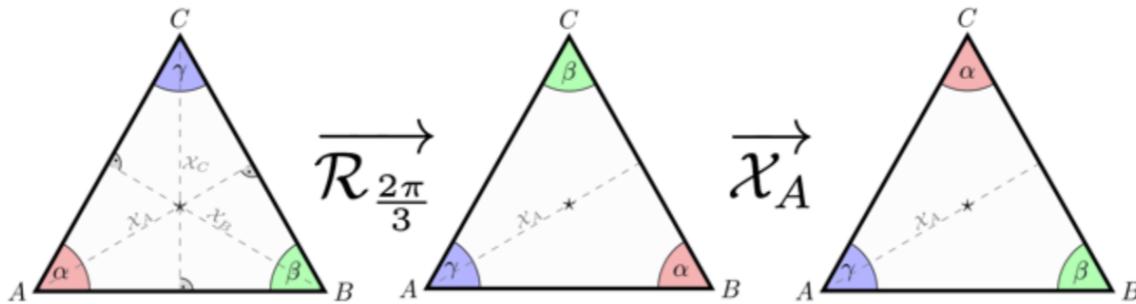


Figura 2.1: Transformaciones que dejan invariante un triángulo equilátero. Concatenación de una rotación, $\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{3}}$ con una reflexión, \mathcal{X}_A , respecto a un plano que pasa por A . Vale la pena mencionar que la tabla de multiplicación del grupo de las rotaciones y reflexiones que dejan invariante un triángulo equilátero es isomorfa a la del grupo de permutaciones que desarrollamos en el ejemplo 2.3.

- (a). Construya la tabla de multiplicación para \mathbf{G}_Δ , vale decir $\mathbf{G}_\Delta = \{\mathcal{I}, \{\mathcal{R}_i\}, \{\bar{\mathcal{R}}_j\}, \{\mathcal{X}_k\}\}$ y la operación es concatenación tal y como mostramos en la figura 2.1. Donde \mathcal{I} es la operación identidad, $\{\mathcal{R}_i\}$ es un conjunto de rotaciones en sentido horario, mientras que $\{\bar{\mathcal{R}}_j\}$ es un conjunto de rotaciones en el sentido antihorario, y $\{\mathcal{X}_k\}$ el conjunto de las reflexiones que dejan invariante el triángulo.
- (b). Muestre que el conjunto de estas operaciones forman el grupo: \mathbf{G}_Δ .
- (c). Identifique cada una de las \mathcal{R}_i y $\bar{\mathcal{R}}_j$, y muestre además, que forman un subgrupo cíclico de orden 3. De igual modo identifique las reflexiones y muestre que, cada una de las reflexiones y la identidad, $\{\mathcal{I}, \mathcal{X}_i\}$, forman también un subgrupo cíclico, pero de orden 2.
- (d). Considere las siguientes matrices:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Muestre que forman grupo bajo la multiplicación de matrices y que ese grupo es isomorfo a \mathbf{G}_Δ .

- (e). Considere el conjunto de permutaciones de 3 objetos y la operación composición de permutaciones que discutimos como ejemplo en la sección 2.3 ¿Es ese grupo isomorfo a G_{Δ} ? Justifique su respuesta.
- (f). ¿Qué puede decir de las operaciones simetrías que dejan invariante un triángulo isósceles? ¿formarán grupo? ¿y si el triángulo es escaleno, cuales son las operaciones de simetría que lo dejan invariante?

(a)

| | e | r | r^2 | s | rs | r^2s |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| e | e | r | r^2 | s | rs | r^2s |
| r | r | r^2 | e | rs | r^2s | s |
| r^2 | r^2 | e | r | r^2s | s | rs |
| s | s | r^2s | rs | e | r^2 | r |
| rs | rs | s | r^2s | r | e | r^2 |
| r^2s | r^2s | rs | s | r^2 | r | e |

$$\{R_i\} = \{r\}$$

$$\{\bar{R}_j\} = \{r^2\}$$

$$\{X_k\} = \{s, rs, r^2s\}$$

(b) Que forman un grupo:

- Cierre: La tabla de arriba es cerrada por construcción
- Identidad: e actúa como identidad (primera fila/c)
- Inversos:
 - $r^{-1} = r^2$
 - $(r^2)^{-1} = r$
 - $s^{-1} = s$
 - $(rs)^{-1} = rs$
 - $(r^2s)^{-1} = r^2s$
- Asociatividad: Todas las simetrías del plano son isometrías & se componen asociativamente, tambien pueden representarse por matrices 2×2 , cuya multiplicación es asociativa.

(c) Subgrupos cíclicos

- Rotaciones:

$\langle r \rangle = \{e, r, r^2\}$ es cíclico de orden 3

- Reflexiones:

Cada reflexión con la I genera un cíclico de orden 2:

$$\langle s \rangle = \{e, s\}$$

$$\langle rs \rangle = \{e, rs\}$$

$$\langle r^2s \rangle = \{e, r^2s\}$$

(d) Matrices:

- Clasificar cada matriz:

Una rotación en \mathbb{R}^2 tiene forma:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \rightarrow \text{Ortogonal} \& \det = +1$$

Una reflexión respecto $x\varphi$ con el eje x

$$S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \rightarrow \text{Ortogonal} \& \det = -1$$

$$\bullet A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = R_{-120^\circ}$$

$$\bullet C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S_{90^\circ} \quad \text{Espejo vertical}$$

$$\bullet B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = R_{+120^\circ}$$

$$\bullet D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = S_{-30^\circ}$$

• I es la identidad

$$\bullet E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = S_{30^\circ}$$

Equilátero centrado en el origen con vértices:

$$v_1 = (1, 0), v_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), v_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Transformaciones de las matrices anteriores:

- B rota 120° (cicla $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1$)
- $A = B^2$ rota 240°
- $C, D, E \Rightarrow 3$ espejos \rightarrow pasan por el origen.

Generadores: $r \equiv B$ & $s \equiv C$

- $r^3 = B^3 = I$ (rotar 120° tres veces)
- $s^2 = C^2 = I$ (reflejar 2 veces)
- $srs = r^{-1}$

$$D_3 : \langle r, s \mid r^3 = s^2 = I, srs = r^{-1} \rangle$$

Conclusión

las seis matrices dadas son exactamente las seis simetrías del triángulo equilátero

El mapa:

$$e \mapsto I, r \mapsto B, r^2 \mapsto A, s \mapsto C, rs \mapsto E$$

$$r^2s \mapsto D$$

Es un isomorfismo entre $G_\Delta \cong D_3$ & el grupo generado por esas matrices

10. Sea \mathcal{P}_n el conjunto de todos los polinomios de grado n , en x , con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \Rightarrow p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i.$$

- (a). Demostrar que \mathcal{P}_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).
- (b). Si los coeficientes a_i son enteros ¿ \mathcal{P}_n será un espacio vectorial? ¿Por qué?
- (c). ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de \mathcal{P}_n es un subespacio vectorial?
- El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n - 1$.
 - El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.
 - Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).
 - Todos los polinomios que tienen a $x - 1$ como un factor.

(a) \mathcal{P}_n es espacio vectorial (sobre \mathbb{R})

- Si $p, q \in \mathcal{P}_n$, entonces

$$(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i)x^i \in \mathcal{P}_n$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda p)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda a_i)x^i \in \mathcal{P}_n$

Axiomas: Suma & multiplicación escalar \Rightarrow commutativas \checkmark

Base & dimensión: $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ es base $\Rightarrow \dim \mathcal{P}_n = n$

(b) Si los a_i son enteros:

No es espacio vectorial (sobre \mathbb{R})

Ej: $p(x) = 1$ pero $\frac{1}{2}p(x) = \frac{1}{2}$ no (coeficientes no enteros)

(c) ¿Cuáles subconjuntos son subespacios?

1. Cero & los de grado $n - 1$

$$p = x^{n-1} \quad \& \quad q = -x^{n-1} + x^{n-2}$$

$$p + q = x^{n-2} \rightarrow \text{no es cero ni grado } n - 1$$

2. Ceros & los de grado par \Rightarrow NO!

$$P = x^2 + x$$

$$q = -x^2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{ambos} \\ \text{grado 2} \end{matrix} \Rightarrow p+q = x \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{grado 1} \end{matrix}$$

3. Polinomios con factor $x^n (n > 1) \Rightarrow$ SI!

P con $a_0 = 0$, es decir $p(x) = xq(x)$

suma & escalares \checkmark

contiene 0 \checkmark

Es subespacio (de dimensión $n-1$, base $\{x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$) \checkmark

4. Polinomios con factor $x-1 \Rightarrow$ SI!

Equivale a $p(1) = 0 \Rightarrow$ condición lineal homogénea

Si $p(1) = q(1) = 0 \Rightarrow (p+q)(1) = 0 \quad \& \quad (\lambda p)(1) = 0$

Es el núcleo de la forma lineal $L(p) = p(1) \Rightarrow$ subespacio
(dim. $n-1$)

6. Los vectores en \mathbb{R}^3 en coordenadas cartesianas los definimos como $\mathbf{a} = a^i |e_i\rangle = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}$
y definimos una "tabla de multiplicación" entre ellos de la forma $\langle e^i | e_j \rangle = \delta_j^i$ con $i, j = 1, 2, 3$,
esto es:

| $\langle e^i e_j \rangle$ | $\hat{\mathbf{i}}$ | $\hat{\mathbf{j}}$ | $\hat{\mathbf{k}}$ |
|-----------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\hat{\mathbf{i}}$ | 1 | 0 | 0 |
| $\hat{\mathbf{j}}$ | 0 | 1 | 0 |
| $\hat{\mathbf{k}}$ | 0 | 0 | 1 |

Un cuaternión cartesiano puede escribirse de manera análoga a los vectores cartesianos, vale decir:

$$|a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle = a^0 + a^i |q_i\rangle = a_0 + a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}},$$

con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ y donde las a^i (con $i = 1, 2, 3$) son números reales que representan las componentes vectoriales en coordenadas cartesianas de los cuaterniones, mientras que la a^0 , también un número real se le llama componente escalar¹⁷.

Los cuaterniones fueron inventados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton a mediados del siglo XIX, y por decirlo de alguna manera, son híbridos o generalizaciones a un plano hipercomplejo. Un vector cartesiano es un cuaternión con la componente escalar nula. Hoy encontramos aplicaciones del álgebra de cuaterniones en Física¹⁸ y más recientemente ha tenido impacto en las ingenierías¹⁹. Su utilización en computación gráfica la discutiremos en el próximo problema

dentro del contexto del álgebra geométrica y las álgebras de Grassman.

Basándonos en este esquema podemos definir la “tabla de multiplicación” [20](#) para los cuaterniones cartesianos como:

| $ q_i\rangle \odot q_j\rangle$ | 1 | $ q_1\rangle$ | $ q_2\rangle$ | $ q_3\rangle$ |
|---------------------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | 1 | $ q_1\rangle$ | $ q_2\rangle$ | $ q_3\rangle$ |
| $ q_1\rangle$ | $ q_1\rangle$ | -1 | $ q_3\rangle$ | $- q_2\rangle$ |
| $ q_2\rangle$ | $ q_2\rangle$ | $- q_3\rangle$ | -1 | $ q_1\rangle$ |
| $ q_3\rangle$ | $ q_3\rangle$ | $ q_2\rangle$ | $- q_1\rangle$ | -1 |

Nótese que por el hecho de que:

$$|q_j\rangle \odot |q_j\rangle = -1 \Rightarrow |q_1\rangle \odot |q_1\rangle = |q_2\rangle \odot |q_2\rangle = |q_3\rangle \odot |q_3\rangle = -1,$$

se puede pensar que un cuaternion es la generalización de los números complejos a más de una dimensión (un número hipercomplejo), donde la parte imaginaria tendría tres dimensiones y no una como es costumbre.

Esto es,

$$|a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle = a^0 \underbrace{|q_0\rangle}_1 + a^j |q_j\rangle = a^0 + \underbrace{a^1 |q_1\rangle + a^2 |q_2\rangle + a^3 |q_3\rangle}_{\text{“parte compleja”}}.$$

Siendo consistente con esa visión de generalización de un número complejo, definiremos el conjugado de un cuaternion como:

$$|b\rangle^{\mathbf{H}} = b^0 |q_0\rangle - b^j |q_j\rangle, \quad \text{con } j = 1, 2, 3.$$

Es decir, en analogía con los números complejos el conjugado de un cuaternion cambia el signo de su “parte compleja vectorial”.

Igualmente, definiremos la suma entre cuaterniones de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} |a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle \\ |b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow |c\rangle = c^\alpha |q_\alpha\rangle = |a\rangle + |b\rangle = (a^\alpha + b^\alpha) |q_\alpha\rangle \Rightarrow c^\alpha = (a^\alpha + b^\alpha).$$

Esto quiere decir que los vectores se suman componente a componente. Mientras que la multiplicación por un escalar queda definida por $\alpha |c\rangle = \alpha c^\alpha |q_\alpha\rangle$, es decir se multiplica el escalar por cada componente.

Con la información anterior, responda las siguientes preguntas:

- (a). Compruebe si los cuaterniones, $|a\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en \mathbb{R}^3 en coordenadas cartesianas.
- (b). Dados dos cuaterniones cualesquiera $|b\rangle \equiv (b^0, \mathbf{b})$ y $|r\rangle \equiv (r^0, \mathbf{r})$, y su tabla de multiplicación, muestre que el producto entre esos cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podrá representarse

(a) Forman un campo vectorial?

$$|a\rangle = a_0 + a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3$$

$$|b\rangle = b_0 + b_1 q_1 + b_2 q_2 + b_3 q_3$$

$$|a\rangle + |b\rangle = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)q_1 + (a_2 + b_2)q_2 + (a_3 + b_3)q_3$$

$$(a_0, a) + (b_0, b) = (a_0 + b_0, a + b)$$

Si es un campo vectorial ✓

(b) Producto de dos cuaterniones:

$$|b\rangle = (b_0, b) \quad \& \quad |r\rangle = (r_0, r) \text{ con } b = b_i |q_i\rangle, r = r_i |q_j\rangle$$

$$\text{Usando la tabla } q_i q_j = d_{ij} (-1) + \epsilon_{ijk} q_k$$

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (b_0 + b)(r_0 + r)$$

$$= b_0 r_0 + b_0 r + r_0 b + b r$$

$$= (b_0 r_0 - b \cdot r) |q_0\rangle + (b_0 r + r_0 b + b \times r)$$

Es decir

$$d_0 = b_0 r_0 - b \cdot r, \quad d = b_0 r + r_0 b + b \times r$$

(c) Conjugado & propiedades rápidas

$$|a\rangle^* = a_0 - |a|$$

$$|a\rangle \odot |a\rangle^* = (a_0^2 + \|a\|^2) |q_0\rangle \text{ norma cuadrada}$$

$$|b\rangle \odot |r\rangle = |r\rangle^* \odot |b\rangle^*$$

(d) Identificación da a , S & A ; d'vector o pseudovector?

$$a = b_0 r_0 - b \cdot r \text{ escalar}$$

$$S_j = b_0 r_j + r_0 b_j \text{ suma de dos vectores}$$

$$A^i_{jk} = \epsilon_{ijk} A \text{ parte antisimétrica}$$

(e) Base de Pauli para cuaterniones & matrices 2×2

$$q_0 \longleftrightarrow I, q_i \longleftrightarrow -i\sigma_i$$

$$\sigma_i \sigma_i = \delta_{ij} I + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \Rightarrow (-i\sigma_i)(-i\sigma_i) = -\delta_{ij} I + \epsilon_{ijk} (-i\sigma_k)$$

Todo cuaternion

$$|a\rangle = a_0 + a$$

$$M(a) = a_0 I - ia\sigma = \begin{pmatrix} z & w \\ -w & z \end{pmatrix}, z = a_0 - ia_3, w = -ia_1 - a_2$$

(f) Realización 4×4 real

$$q_1, q_2, q_3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas. Tal y como demostraremos con rigor en la sección 4.3.2.2, una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^\dagger)_j^i \rightarrow (A^*)_j^i \equiv A_j^i$:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \text{ es decir } \begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real,} \\ z_4^* = z_4 & \text{real,} \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos.} \end{cases} .$$

Entonces

- (a). Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.4 forman una base para ese espacio vectorial.
- (b). Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a | b \rangle \Leftrightarrow \text{Tr}(A^\dagger B)$ que introdujimos en los ejercicios de esa misma sección.
- (c). Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras.

$$(a) \langle A | B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B) \quad \alpha_0 = \frac{z_1 + z_4}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{z_1 - z_4}{2}$$

$$A^\dagger = A$$

$$\alpha_1 = a = \underline{z_2 + z_2^*} \quad \alpha_2 = b = \underline{z_2 - z_2^*}$$

Así, generan todo el espacio

$$\sum_{k=0}^3 c_k \sigma_k = 0 \Rightarrow c_k = 0 \forall k \xrightarrow{\text{lindamente independientes}} \text{Base} \xrightarrow{\left\{ \sigma_0, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \right\}}$$

(b) la base es ortogonal para $\langle A | B \rangle = \text{Tr}(A^+ B)$

$$\delta_k^+ = \delta_k$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ij} \delta_0 + i \epsilon_{ijk} \delta_k$$

$$\text{Tr}(\delta_i \delta_j) = \begin{cases} 2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{Tr}(\delta_0 \delta_i) = \text{Tr}(\delta_i) = 0 (i = x, y, z)$$
$$\text{Tr}(\delta_0 \delta_0) = 2$$

Es ortogonal

(c) Subespacios de reales e imaginarios puros

• Hermiticas reales:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \{ \delta_0, \delta_x, \delta_z \}$$

Es un subespacio de dimensión 3.

• Hermiticas imaginarias pures:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & ib \\ -ib & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \{ \delta_y \}$$

Es un subespacio de dimensión 1.

$$A = \underbrace{(\alpha_0 \delta_0 + \alpha_1 \delta_x + \alpha_3 \delta_z)}_{\text{Parte real}} + \underbrace{\delta_2 \delta_y}_{\text{Parte imaginaria}}$$