Temas: Convergência uniforme de séries de potências (em subintervalos fechados e limitados do domínio de convergência). Derivação e integração termo a termo de séries de potências. Unicidade de representação de uma função em série de potências (de Taylor)

uma vez que a série de potências é um caso particular de uma série de funções, em que condições esta será uniformemente convergente?

Teorema:

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$. Então a série converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado e limitado do seu intervalo de convergência $]c-R, c+R[$.

Prova para $c=0$

$x \in [a,b] \subseteq]-R, R[$

$\hookrightarrow |x| \leq \max\{|a|, |b|\} = M$

Assim $|f_n(x)| = |a_n x^n| \leq |a_n| M^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| M^n$ é convergente pois $M \in [0, R[$

Pelo critério de <u>weierstrass</u> a série converge uniformemente em $[a,b]$.

Desafio: prova para $c \neq 0$

Teorema de Abel:

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$. Se a série converge no ponto $x = c + R$ (resp., no ponto $x = c - R$), então ela converge uniformemente em $[c, c+R]$ (resp., em $[c-R, c]$).

Exemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n\sqrt{n+1}}$$

Vamos verificar que $D = [-7, 3[$.

$$a_n = \frac{1}{5^n\sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad R = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Usando a fórmula do raio

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{5^n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{5^{n+1}\sqrt{n+2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1}\sqrt{n+2}}{5^n\sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 5\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = 5 \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = 5$$

Como o centro é $\boxed{-2}$, em $]\overbrace{-2-5}^{-7}, \overbrace{-2+5}^{3}[$ a série conv. absolutamente. Resta ver o que acontece nos limites do intervalo.

$\boxed{x=-7}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7+2)^n}{5^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n\sqrt{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{5^n}}{\cancel{5^n}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow \text{alternada}$$

<u>Série dos módulos</u>: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

harmónica $\alpha < 1$ divergente

$\Rightarrow$ Séries têm a mesma natureza.

<u>Crit. Leibniz</u> $\quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

- $n \geq 0 \Leftrightarrow n+1 \geq 1$
$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} \geq \sqrt{1}$ $\qquad \therefore u_n > 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} \geq 1$
$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$

- $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ é decrescente?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} \times \sqrt{n+2}} < 0$$

- $\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$

$\therefore$ Há conv. simples em $x = -7$

$x = 3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{5^n}}{\cancel{5^n}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Já vimos que é divergente.

$\therefore D = [-7, 3[$

Conv. unif. em $[-7, -2]$
e em $[a,b] \subset]-7, 3[$

Consequentemente, uma série de potências é uniformemente convergente em qualquer intervalo limitado e fechado do seu intervalo de convergência. Deste modo (no seu intervalo de convergência):

- A função soma é contínua.
- Podemos integrar termo-a-termo
- Podemos derivar termo-a-termo

Assim, temos:

Teorema: Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências, $I =]c-R, c+R[$ o seu intervalo de convergência, e $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$. Então:

(i) A função f é contínua em todo o domínio (de convergência da série).

(ii) A função f é diferenciável em I e $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-c)^{n-1}$, $\forall x \in I$.

(iii) A função F, definida por $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$, é a primitiva de f em I tal que $F(c) = 0$.

(iv) A função f é integrável em qualquer subintervalo $[a, b]$ do domínio de convergência e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n(x-c)^n dx.$$

Unicidade de representação de uma função em série de potências:

Teorema:
Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n, \qquad x \in I =]c-R, c+R[\ ,$$

então f possui derivadas finitas de qualquer ordem em I e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

O teorema anterior mostra-nos que sempre que uma série de potências converge para f(x) numa vizinhança de $x=c$ então essa série coincide com a série de Taylor de f centrada em c.

Usando os teoremas e propriedades vistas anteriormente vamos resolver os seguintes exercícios:

Exercício

Representa em série de potências as seguintes funções:

a) $\frac{1}{(1-x)^2}$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' \underset{|x|<1}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad , \quad -1 < x < 1$$

Como uma série de potências converge uniformemente em em $]c-R, c+R[$ podemos aplicar derivação e integração termo a termo.

b) $\ln(x)$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-1+x}$$

$$\frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \qquad |1-x| < 1$$

$$\int_1^x \frac{1}{x}\, dx = \int_1^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_1^x (x-1)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$|1-x| < 1 \iff -1 < 1-x < 1$$
$$\iff -2 < -x < 0$$
$$\iff 0 < x < 2$$

c) $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ $\left[\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]' = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x}$

$$\int_0^x \frac{1}{1-x} dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x x^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad -1 < x < 1$$

d) $\arctan(x)$ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x \frac{1}{1-(-x^2)} dx$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$|x^2| < 1 \iff -1 < x < 1$$

e) $\ln(x+1)$ $\quad (c=0) \quad (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$

$$\ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{1+x}\,dx = \int_0^x \frac{1}{1-(-x)}\,dx =$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^n\,dx$$

$|x|<1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$$

Exercício

6. (a) Verifique que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ tem raio de convergência igual a 2.

(b) Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$, $\quad -2 < x < 2$. Explicite $f(x)$.

(Sugestão: use a representação em série de potências de $\frac{1}{1-x}$).

a) $a_n = \frac{n}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n \times 2^{n+1}}{(n+1)\times 2^n}$$

$$= 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 2 \quad \text{c.q.m}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1} n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]' = x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'$$

$$= x \times \left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)' = x\left(\frac{2}{2-x}\right)' = x\left(\frac{2}{(2-x)^2}\right) = \frac{2x}{(2-x)^2}$$

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff -1 < \frac{x}{2} < 1 \iff -2 < x < 2$$

Exercício

9. Sabendo que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

(a) obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x) = xe^{x^3}$ e indique o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que esta representação é válida;

(b) obtenha uma representação em série numérica do integral $\int_0^1 xe^{x^3}\,dx$.

a) $$x\, e^{x^3} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

b) Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}$ conv. absolutamente em $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ conv. uniformemente em $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ É válida integração termo a termo

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{3n+1}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{x^{3n+2}}{3n+2}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \times \frac{1}{3n+2} \;//$$

Exercício

5. Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}\pi^{2n}}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n(n+1)}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n n!}$.

a) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!} = \cos(2\pi) = 1$$

b) Relembrar: $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{2n}}{(2n)!} = \cosh(1)$$

c) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/3)^n}{n+1} = 3\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/3)^{n+1}}{n+1}}_{\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{1/3}x^n\,dx} = -3\ln\frac{2}{3}$$

$$= \int_0^{1/3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,dx = \int_0^{1/3}\frac{1}{1-x}\,dx = -\int_0^{1/3}\frac{-1}{1-x}\,dx$$

$$= -\Big[\ln|1-x|\Big]_0^{1/3} = -\ln\frac{2}{3}$$

d) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{(1/2)^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1/2)^{n-1}}{n!}}_{\sqrt{e}}{}^{\circledast} + \underbrace{\sum_{n=0}\frac{(1/2)^n}{n!}}_{\sqrt{e}}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n x^{n-1}}{n!} = e^x = \int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,dx = \sum_{n=0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\circledast$ Podemos tirar $n=0$ pois dá zero.

Exercício

1. **[50]** Considere a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n} x^n$.

   (a) Determine o domínio de convergência da série.

   (b) Justifique que

   $$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{para todo o } x \in]-1, 1[.$$

   [Sugestão: use convenientemente um dos desenvolvimentos indicados no formulário]

   (c) Usando a representação indicada da alínea (b), determine a soma $f(x)$ da série dada (no respetivo intervalo de convergência).

→ Desafio: a discutir numa próxima aula

Bom trabalho!

Filipa Santana