Temas: Cálculo do raio de convergência usando apenas a sucessão dos coeficientes da série.
Polinómio de Taylor.

Podemos analisar o raio de convergência da série de potências usando apenas a sucessão dos coeficientes da série.

Vamos considerar um caso geral e recorrer, por exemplo ao Critério de D'Alembert:

Série de potências: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}(x-c)^{n+1}|}{|a_n(x-c)^n|}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|x-c|}{|a_n|}$$

$$= |x-c| \times \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

$$= \frac{|x-c|}{\underbrace{\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}_{R}}$$

$+\infty \Rightarrow L = 0 < 1, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{c\}$

$\Rightarrow$ Domínio de conv. $= \mathbb{R}$

$]0,+\infty[\Rightarrow$ A série conv. Absolutamente se $\frac{|x-c|}{R} < 1$

Se $x \in]c-R, c+R[$

$0 \Rightarrow L = +\infty > 1, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{c\}$

$\Rightarrow$ Domínio de conv: $\{c\}$

De forma análoga, aplicando o critério de Cauchy, podemos concluir que:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Em resumo:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad (\text{Crit. de D'Alembert})$$

ou

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad (\text{Crit. de Cauchy})$$

Exemplo 1:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^5+3}$ $\qquad c = 2 \qquad a_n = \dfrac{1}{n^5+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n^5+3}}{\frac{1}{(n+1)^5+3}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^5+3}{n^5+3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \to +\infty} \frac{n^5}{n^5} = 1$$

$\therefore R = 1 \implies$ A série converge absolutamente em: $]2-1, 2+1[=]1, 3[$

$x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5+3}$$ Alternada

série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5+3}$$

$$\frac{1}{n^5+3} \leq \frac{1}{n^5}$$ ← Dirichlet Conv.

(Crit. Comparação)

Conv. Absoluta

$x = 3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^5+3}$$ ↓

Absolutamente convergente

Exemplo 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(n-1)!} \rightsquigarrow c = 0 \quad a_n = \frac{2^n}{(n-1)!}$$

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{2^n}{(n-1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n \; n!}{2^{n+1} (n-1)!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} n = +\infty$$

$$\therefore R = +\infty$$

$\Rightarrow$ A série dada é absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$

Exemplo 3 ⊛

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

Reparem ! $\;= \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^6}{27} + \cdots$

$$= 0x + \frac{1}{3}x^2 + 0x^3 + \frac{1}{9}x^4 + 0x^5 + \frac{1}{27}x^6 + \cdots$$

Se considerassemos $a_n = \frac{1}{3^n}$ a sucessão dos coeficientes tinhamos incoerências

n	1	2	3	$\cdots$
a_n	$1/3$	$1/9$	$1/27$	$\cdots$

Não bate certo !

Nestas situações optamos por estudar o raio usando o termo geral da série de potências.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{x^{2(n+1)}}{3^{n+1}}\right|}{\left|\frac{x^{2n}}{3^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|x^{2n+2} \cdot 3^n\right|}{\left|x^{2n} \cdot 3^{n+1}\right|}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} |x^2| \times \frac{1}{3} = \frac{|x^2|}{3} < 1 \rightsquigarrow \text{para que exista conv. absoluta}$$

$$\frac{|x^2|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x^2| < 3$$

$$\Leftrightarrow -3 < x^2 < 3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 > -3}_{\text{C. Univ.}} \wedge x^2 < 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

$$x^2 - 3 = 0$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

C. Aux

Desafio $(x = -\sqrt{3})\,(x = \sqrt{3})$

Exemplo 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

$c=0 \qquad a_n = \dfrac{n^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{n^n}{n!}\right|}{\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n (n+1)!}{(n+1)^{n+1}\, n!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n (n+1)}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

limite notável

$\therefore$ Em $\left]0-\frac{1}{e}; 0+\frac{1}{e}\right[= \left]-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right[$ a série de potências converge absolutamente.

Temos agora de estudar o que acontece em:

$x = -\frac{1}{e}$ e $x = \frac{1}{e}$

Desafio

Exemplo 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-2)^n \qquad c = 2 \qquad a_n = n^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|n^n|}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\therefore$ Como o raio de convergência é zero. Isso significa que a série dada apenas converge absolutam. em $x = 2$.

$$D = I = \{2\}$$

Exemplo 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$$

$$= \sum_{n=1} \frac{2^n}{2n+4} \left(x - \frac{3}{2}\right)^n$$

C. Aux:

$$(2x-3)^n = \left(2\left(x - \frac{3}{2}\right)\right)^n$$
$$= 2^n \left(x - \frac{3}{2}\right)^n$$

$$c = \frac{3}{2} \qquad a_n = \frac{2^n}{2n+4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{2^n}{2n+4}\right|}{\left|\frac{2^{n+1}}{2(n+1)+4}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\,(2n+6)}{2^{n+1}(2n+4)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+6}{2n+4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ No intervalo $\left]\frac{3}{2}-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right[= \left]1,2\right[$ há conv. absoluta.

$x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+4}$$

(alternadas)

igual

$x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+4}$$

(Divergente)

série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+4}$$

Vamos comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que é uma dirichlet divergente $(\alpha = 1)$.

<u>Comp. pass. limite:</u>

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n+4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+4} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+$$

$\therefore$ As séries têm a mesma natureza (Divergentes) logo não há conv. absoluta.

<u>Crit. Leibniz:</u> $u_n = \frac{1}{2n+4} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (verificar!)

u_n é decrescente (verificar!) e $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+4} = 0$

$\therefore$ Temos conv. simples em $x = 1$

$\therefore \quad D = \left]1,2\right[\quad I = \left[1,2\right[$

Polinómio de Taylor

<u>Objetivo</u>: usar polinómios para aproximar funções não tão simples de trabalhar.

f admite derivadas até a ordem n

A um polinómio do tipo:

$$\boxed{T_c^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}$$

$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Chamamos **Polinómio de Taylor** de ordem n de f no ponto c.

Se c=0 chamamos **Polinómio de Maclaurin** de ordem n de f.

<u>Notem!</u>

- $n=1$ $\quad T_c^1 f(x) = f(c)$ Imagem de c
- $n=2$ $\quad T_c^2 f(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x=c$

Curiosidade: ver link seguinte

Aplicação Geogebra

https://www.geogebra.org/m/Wv4gg9GT?fbclid=IwAR1mRPHR_HYJDLO9AXecrL-GGzDaDHFTDFB7XDUQm0HKcDCXfoRjDKqpd14

Exemplo 1

$$T_0^3(x^3+2x+1)$$

$c=0$ $\quad f(0)=1$

$f'(x)=3x^2+2 \qquad f'(0)=2$

$f''(x)=6x \qquad f''(0)=0$

$f'''(x)=6 \qquad f'''(0)=6$

$$T_0^3(x^3+2x+1) = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3$$

$$= 1+2x+x^3$$

$\rightsquigarrow$ o polinómio de Taylor coincide com o polinómio.

Desafio:

$$\boxed{T_0^4(x^4+2x+1)}$$

Exemplo 2

$$T_{\pi}^{3}(\cos(x))$$

$c=\pi$

$$f(\pi) = \cos\pi = -1$$
$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) \longrightarrow f'(\pi) = 0$$
$$f''(x) = -\cos(x) \longrightarrow f''(\pi) = -(-1) = 1$$
$$f'''(x) = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow f'''(\pi) = 0$$

$$T_{\pi}^{3}(\cos x) = -1 + \frac{0}{1!}(x-\pi) + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{0}{3!}(x-\pi)^3$$
$$= -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2$$

Exemplo 3

$$T_{1}^{n}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad c = 1$$

- $f(1) = 1$
- $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \rightarrow f'(1) = -\dfrac{1}{1} = -1$
- $f''(x) = \left(-x^{-2}\right)' = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3} \longrightarrow f''(1) = 2$
- $f'''(x) = (2x^{-3})' = -6x^{-4} = \dfrac{-6}{x^4} \rightarrow f'''(1) = -6$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}} \longrightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$$

$$T_{1}^{n}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1!}{1!}(x-1) + \frac{2!}{2!}(x-1)^2 + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!}(x-1)^n$$
$$= \sum_{K=1}^{n} (-1)^K (x-1)^K$$

Exemplo 4

$$T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

mostrar

DESAFIO

Exemplo 5

$T_0^n(e^x)$ $\quad c=0 \quad f(0)=1$

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x)$$

$\hookrightarrow f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \{1, 2, \cdots, n\}$

Então,

$$T_0^n(e^x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Nota: Já podem resolver FT1_Ex 2 e Ex 3

Ver texto de apoio: pág. 8-13

Bom trabalho!

Filipa.