Temas: Mini-teste 1

Introdução ás f.R.V.V.R: noções topológicas em $\mathbb{R}^n$. Domínios e gráficos. Conjuntos de nível.

Espaço euclideano

$\mathbb{R}^n \rightarrow$ espaço vetorial de dimensão n munido de produto interno

Vamos essencialmente trabalhar com funções com $n=2$ ou $n=3$.

O caso $n=1$ já é bem conhecido por nós!

Exemplos de f.R.V.V.R

funções reais de várias variáveis reais

① $f(\underline{x,y}) = \ln(x+y)$

② $V_{\text{pirâmide quadrangular}} = V(\underline{l,h}) = \frac{1}{3} l^2 \times h$

2 variáveis

3 variáveis

③ $C(\underline{n,j,C_0}) = C_0 (1+j)^n$

Capital acomulado em juro composto

n = períodos

j = taxa de juro

C_0 = capital investido (inicial)

④ $E_c = E(m, v) = \frac{1}{2} m v^2$ 2 variáveis

↳ Energia cinética

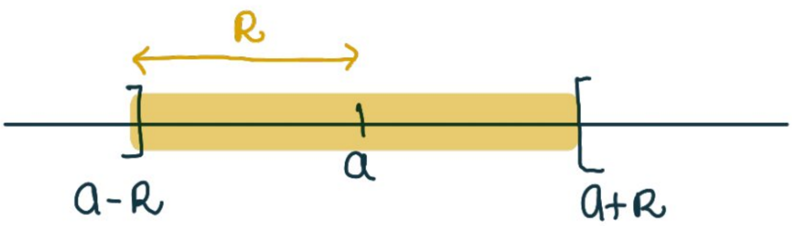
Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

Bola → Chamamos bola (aberta) de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $R > 0$ ao conjunto

$$\boxed{B_R(a) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \underline{\|x - a\|} < R \}}$$

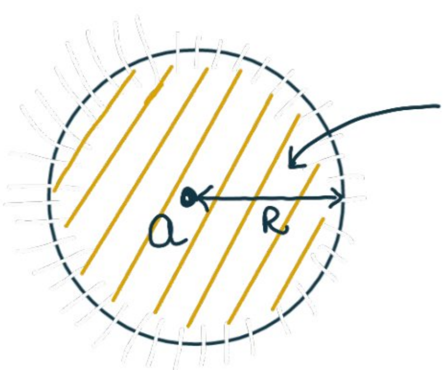
Distância entre $\underline{\underline{x}}$ e $\underline{\underline{a}}$

n = 1



Intervalo aberto

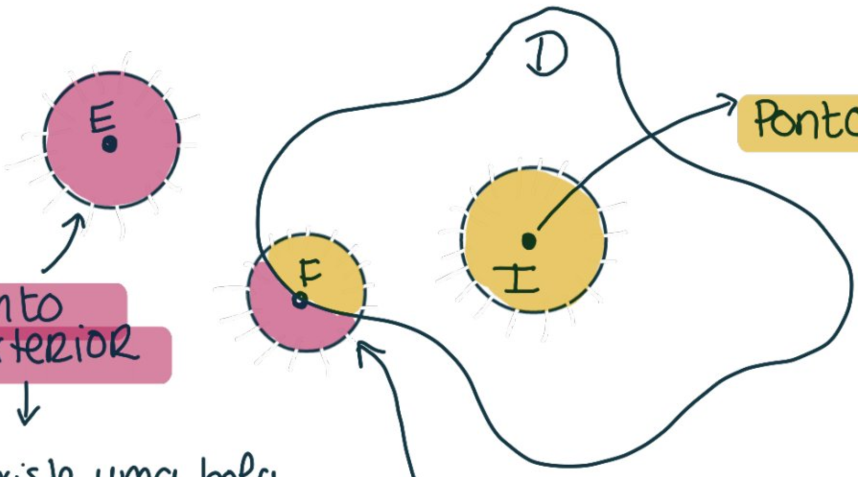
n = 2



interior do círculo de centro $\underline{\underline{a}}$ e raio $\underline{\underline{R}}$

n = 3 Interior da esfera de centro $\underline{\underline{a}}$ e raio $\underline{\underline{R}}$

Ponto interior, exterior e fronteiro



ponto exterior

se existe uma bola centrada em E e raio R que esteja contida em D^c (complementar de D)

$$\boxed{\exists R>0 : B_R(a) \subseteq D^c}$$

Ponto interior

se existe uma bola de centro em I e de raio R que esteja completamente contida em D.

$$\boxed{\exists R>0,\ B_R(a) \subseteq D}$$

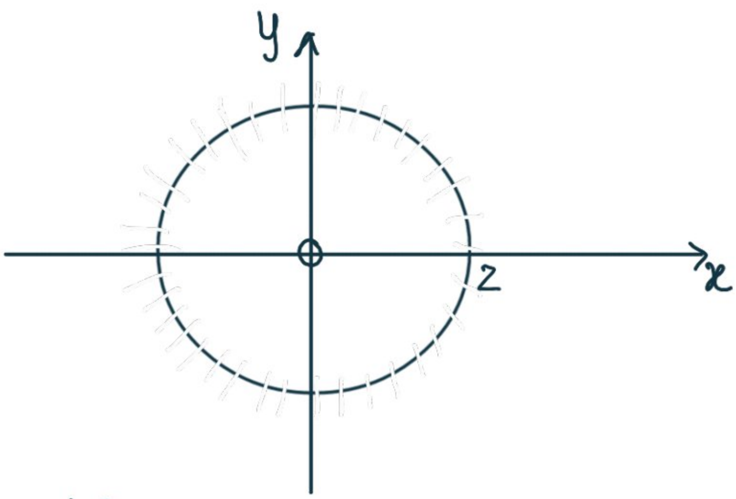
Ponto fronteiro

se qualquer bola centrada em F interseta D e o seu complementar D^c.

$$\boxed{\forall R>0,\ B_R(a) \cap D \neq \emptyset \wedge B_R(a) \cap D^c \neq \emptyset}$$

Exemplo 2

$$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x^2 + y^2 < 4 \}$$



Relembrar:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ circunferência de raio R e centro (a,b)

conjunto dos pontos interiores $\rightarrow$ $\text{int}(S) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4 \}$

Conjunto dos pontos exteriores $\rightarrow$ $\text{Ext}(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 4\}$

Conjunto dos pontos fronteiros $\rightarrow$ $\text{fr}(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4 \vee x^2+y^2=0\}$

fecho ou aderência

Chamamos fecho ou aderência de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ao conjunto $\overline{D} = D \cup \text{fr}(D)$.

Conjunto Aberto / Fechado

Um conjunto diz-se **aberto** se coincide com o seu interior, isto é, $D = \text{int}(D)$

E diz-se **fechado** se coincide com o seu fecho, isto é, $D = \overline{D} = D \cup \text{fr}(D)$

Exemplo 2 (voltando)

$S = \text{int}(S) \rightsquigarrow$ **S é aberto**

$\overline{S} = S \cup \text{fr}(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2+y^2 \leq 4\} \neq S$

$\rightsquigarrow$ Não é fechado

Exemplo 3

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\}$$

$$\boxed{\text{Relembrar:} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \underline{\text{elipse}}}$$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\sqrt{2}^2} = 1$$

$$\text{int}(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\}$$

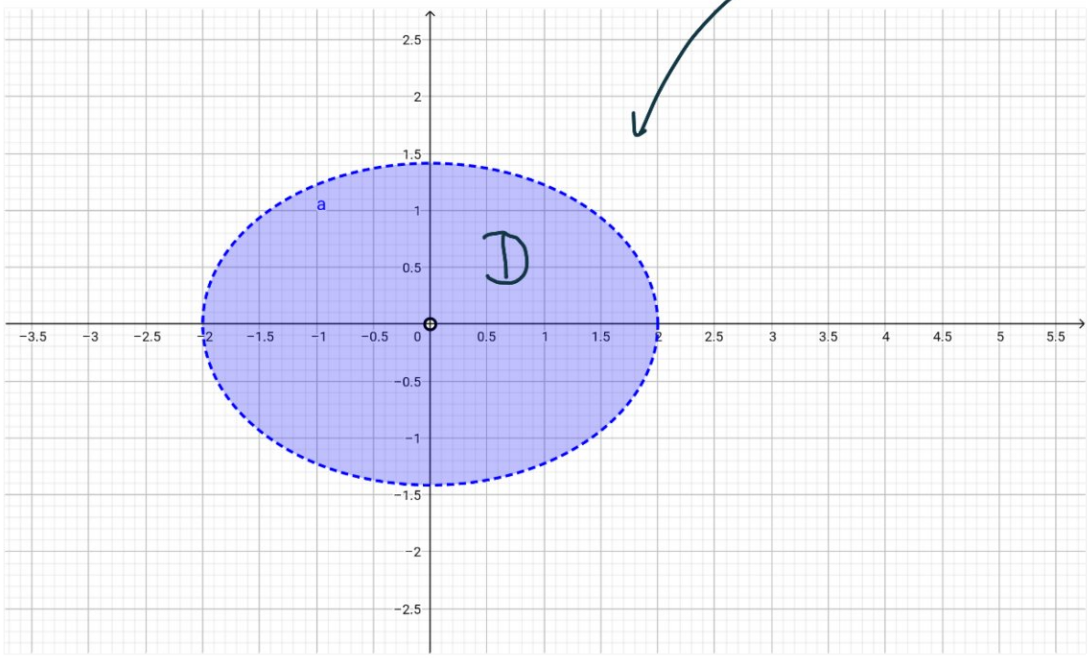
$$\text{ext}(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 > 4\}$$

$$\text{fr}(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 4\} \cup \{(0,0)\}$$

$$\overline{D} = D \cup \text{fr}(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4\}$$

$D = \text{int}\, D \rightarrow$ D é aberto

$D \neq \overline{D} \rightarrow$ D ñ é fechado



Exemplo 4

Slides disciplina

↳ Toda a bola (aberta) $B_r(a)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$.

$$D = B_R(a) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < R \}$$

$$int(D) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < R \}$$

$$ext(D) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| > R \}$$

$$fr(D) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| = R \}$$

$$\overline{D} = D \cup fr(D) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq R \}$$

iguais

Então D é Aberto pois $D = int(D)$

Diferentes então D não é fechado

Ponto de acomulação / isolado

Um ponto a diz-se de acomulação de D se:

$$\boxed{\forall R > 0, \ B_a(R) \cap (D \setminus \{a\}) \neq \emptyset}$$

Se qualquer bola centrada em a interseta sempre o conjunto, sem contarmos com o próprio ponto a.

Ao conjunto dos pontos de acomulação chamamos Derivado, D'

Caso a interseção da bola centrada em a e o conjunto seja apenas o próprio ponto a, então dizemos que temos um ponto isolado.

Exemplo 5

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<4\} \cup \{(3,0)\}$$

$$\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<4\}$$

$$\text{ext}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>4\} \setminus \{(3,0)\}$$

$$\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\} \cup \{(3,0)\}$$

$$\bar{D} = D \cup \text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \cup \{(3,0)\}$$

$$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$$

Pontos isolados: $(3,0)$

Aberto / fechado: $D \neq \text{int}(D) \rightarrow$ Não aberto
$D \neq \bar{D} \rightarrow$ Não fechado

Conjunto limitado

Um conjunto diz-se limitado se existir uma bola que o contenha.

Exemplo 5 $\rightarrow$ conjunto é limitado!

Domínio e gráfico de uma f.r.v.v.r

Uma função real de várias variáveis reais $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ faz corresponder a cada elemento $X = (x_1, \cdots, x_n)$ de D um único número real $z = f(x_1, \cdots, x_n)$. Isto é,

$$\boxed{X = (x_1, \cdots, x_n) \xrightarrow{\quad f \quad} z = f(x_1, \cdots, x_n)}$$

A **D** chamamos **domínio de f** e determina-se tendo em conta as **restrições** da expressão analítica de f.

seja $X = (x_1, \cdots, x_n)$

$$\frac{A(X)}{B(X)} \Rightarrow B(X) \neq 0$$

$$\sqrt[n]{A(X)} \overset{n \text{ par}}{\Longrightarrow} A(X) \geq 0$$

$$\ln(A(X)) \Rightarrow A(X) > 0$$

> As restrições que conhecíamos para f.r.v.r são generalizadas para o caso f.r.v.v.r

O **Gráfico de f** é um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e representa-se por:

$$G_f = \{ (\underbrace{x_1, \cdots, x_n}_{n \text{ variáveis independentes}}, \underbrace{z}_{1 \text{ var. dependente}}) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(x_1, \cdots, x_n) \}$$

Vejamos alguns exemplos dos slides (Com Geogebra)

Algumas funções (de domínio $\mathbb{R}^2$, exceto a última)

1. $f(x, y) = 2x - y$; $\quad CD_f = \mathbb{R}$.

   $$\mathcal{G}_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x - y\right\}$$ ▸ Esboço gráfico (plano)

2. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\quad CD_f = \mathbb{R}_0^+$.

   $$\mathcal{G}_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\right\}$$ ▸ Esboço gráfico (parabolóide circular)

3. $g(x, y) = 4 - y^2$; $\quad CD_g =]-\infty, 4]$. ▸ esboço gráfico (cilindro parabólico)

4. $h(x, y) = x^2 - y^2$; $\quad CD_h = \mathbb{R}$. ▸ esboço gráfico (parabolóide hiperbólico)

5. $s(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$; $\quad CD_s = [-1, 1]$. ▸ esboço gráfico

6. $u(x, y) = \sin(x)$; $\quad CD_u = [-1, 1]$.

7. $v(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$; $\quad CD_v = \mathbb{R}_0^+$.

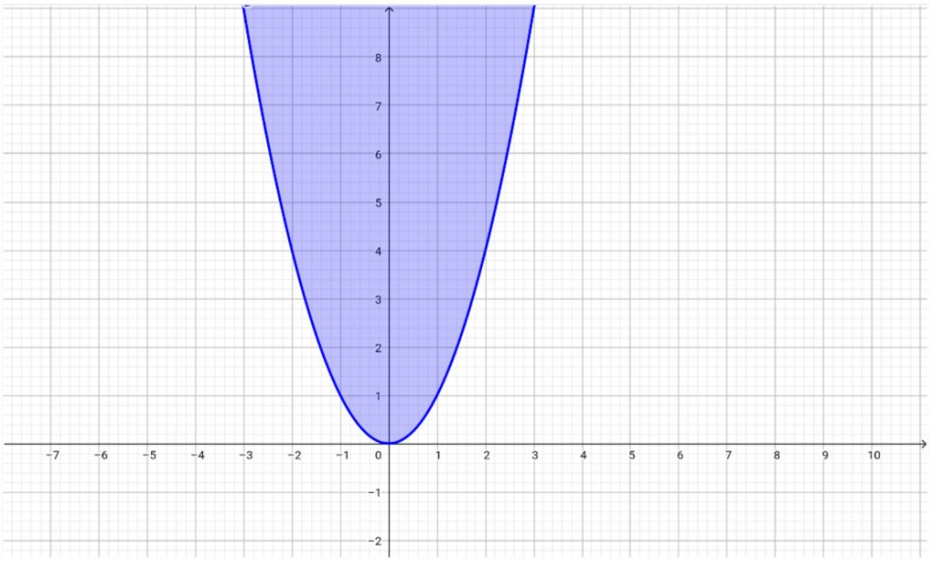
8. $w(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; $\quad D_w = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad CD_w = \mathbb{R}$.

Exemplo 6 FT 3 2.a)

$$f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y - x^2 \geq 0 \}$$

C. aux: $y - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x^2$

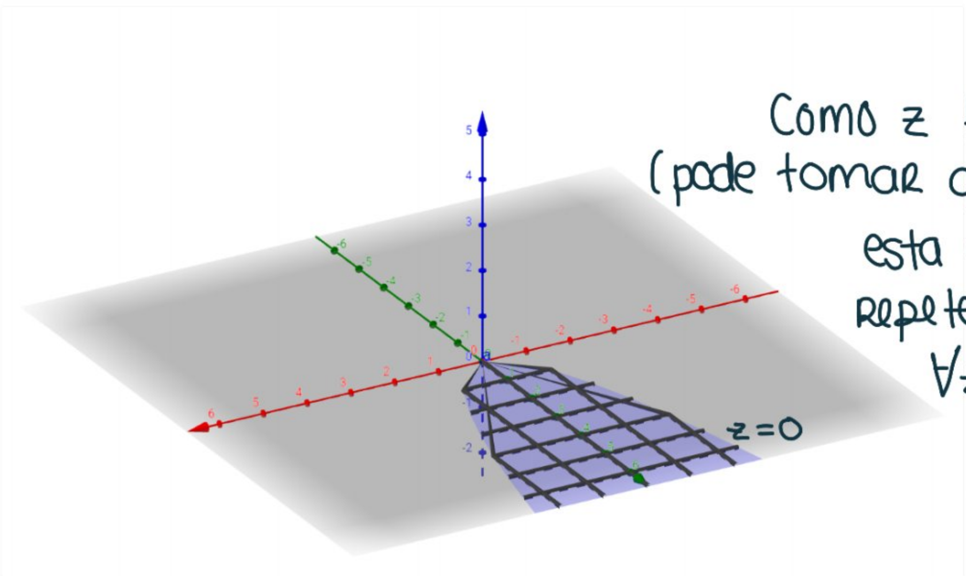


Exemplo 7 FT3 2.b)

$$f(x,y,z) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; y - x^2 \geq 0 \}$$

C. Aux: $y \geq x^2$



Como z fica livre
(pode tomar qualquer valor)
esta imagem
repete-se para
$\forall z \in \mathbb{R}$

Exemplo 8 — Slides Cap.3 p.12

$$f(x,y,z) = 2 + \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \}$$

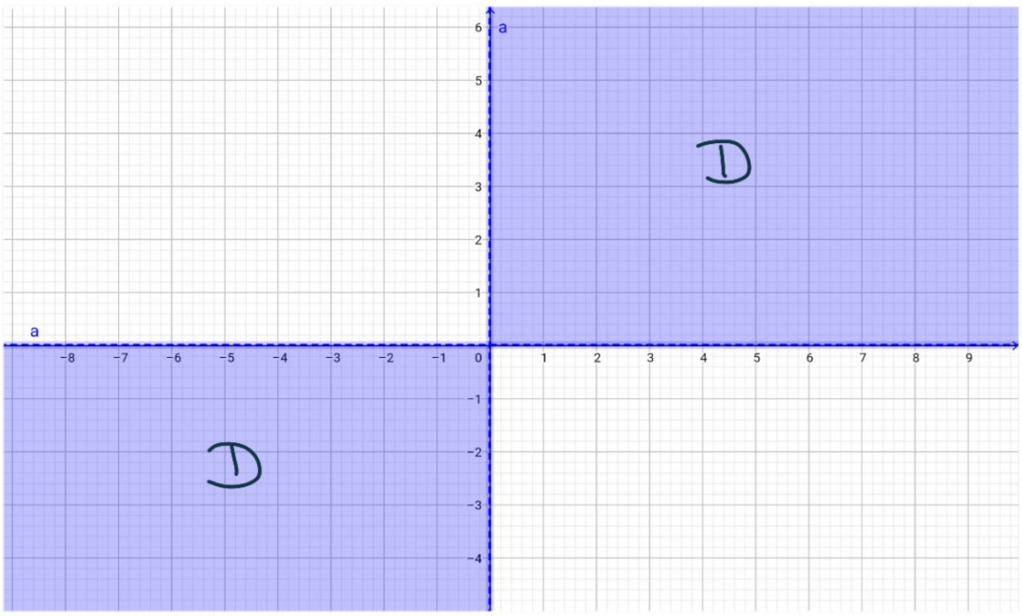
$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1}_{\text{esfera de centro em } (0,0,0) \text{ e raio } 1} \}$$

Exemplo 9 — FT3

$$f(x,y) = \ln(xy)$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0 \}$$

$\begin{matrix} + & + \\ - & - \end{matrix}$ têm mesmo sinal



Conjuntos de nível

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Chama-se **conjunto de nível K**, $K \in \mathbb{R}$, de f ao conjunto:

$$\boxed{N_K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = K\}}$$

→ $n=2$ **curva de nível** K

→ $n=3$ **superfície de nível** K

Exemplos

Calculus, Stewart

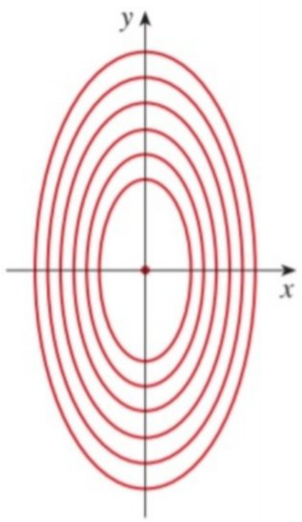
EXAMPLE 12 Sketch some level curves of the function $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

curvas de nível

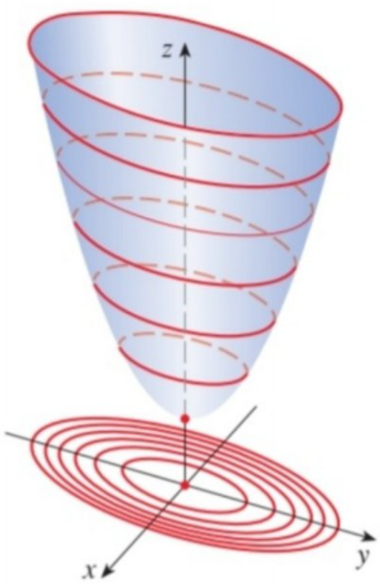
SOLUTION The level curves are

$$4x^2 + y^2 + 1 = k \qquad \text{or} \qquad \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

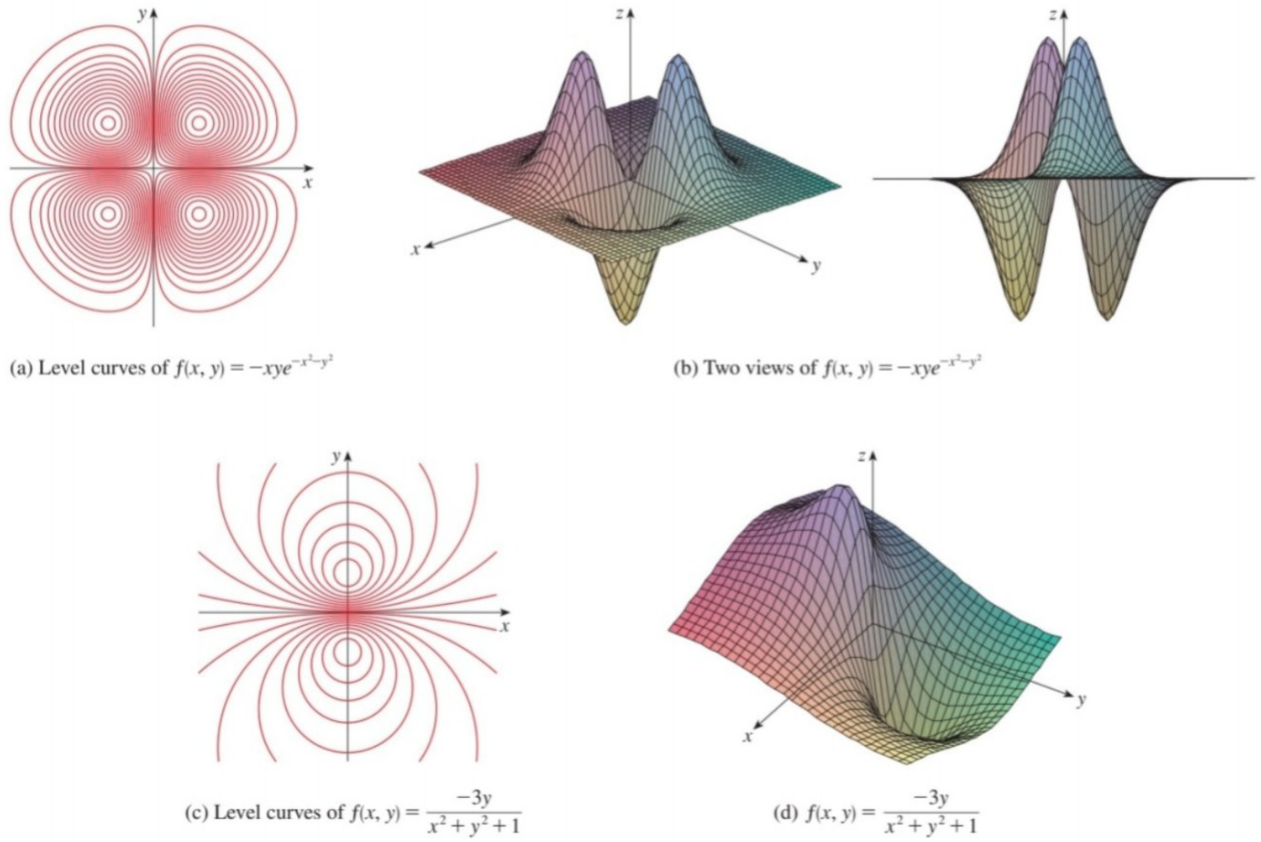
which, for $k > 1$, describes a family of ellipses with semiaxes $\frac{1}{2}\sqrt{k-1}$ and $\sqrt{k-1}$. Figure 18(a) shows a contour map of h drawn by a computer. Figure 18(b) shows these level curves lifted up to the graph of h (an elliptic paraboloid) where they become horizontal traces. We see from Figure 18 how the graph of h is put together from the level curves.



(a) Contour map



(b) Horizontal traces are raised level curves. ■



(a) Level curves of $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

(b) Two views of $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

(c) Level curves of $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

(d) $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

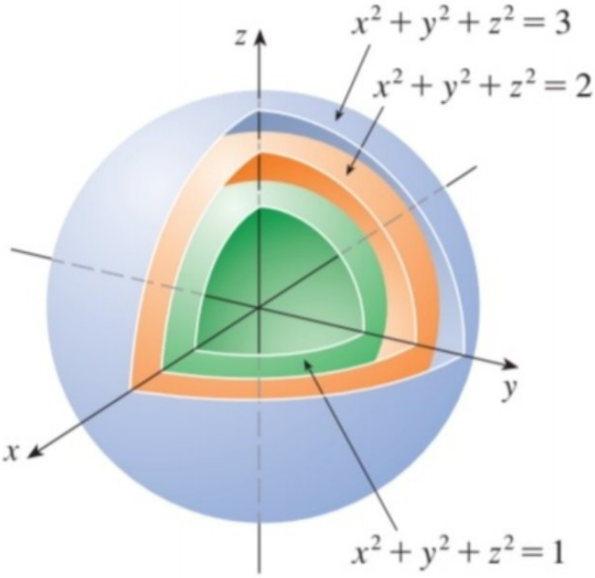
FIGURE 20

superfícies de nível

EXAMPLE 15 Find the level surfaces of the function

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

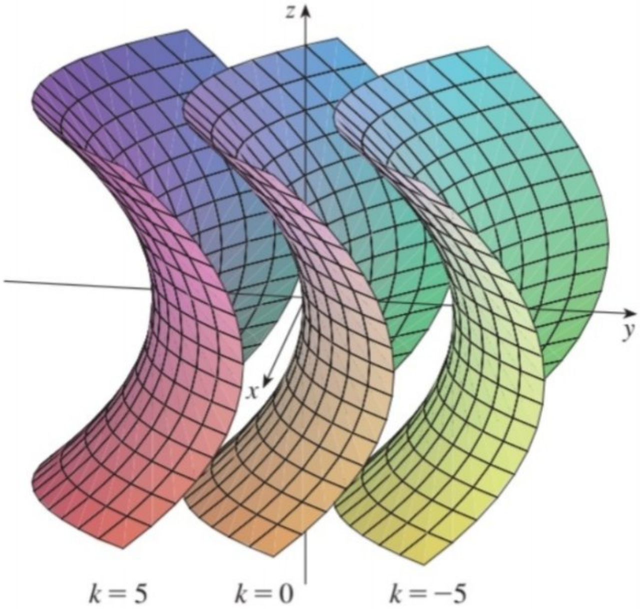
SOLUTION The level surfaces are $x^2 + y^2 + z^2 = k$, where $k \geqslant 0$. These form a family of concentric spheres with radius $\sqrt{k}$. (See Figure 21.) Thus, as (x, y, z) varies over any sphere with center O, the value of $f(x, y, z)$ remains fixed. ∎



EXAMPLE 16 Describe the level surfaces of the function

$$f(x, y, z) = x^2 - y - z^2$$

SOLUTION The level surfaces are $x^2 - y - z^2 = k$, or $y = x^2 - z^2 - k$, a family of hyperbolic paraboloids. Figure 22 shows the level surfaces for $k = 0$ and $k = \pm 5$.



Exemplo 10 FT3

$f(x,y) = e^{xy}$ $\qquad e^{xy} > 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow K > 0$

Como $n=2 \rightarrow$ curvas de nível

$$N_K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{e^{xy} = K} \}$$

$xy = \ln(K)$ $\boxed{x \neq 0} \longrightarrow y = \dfrac{\ln(K)}{x}$

Caso

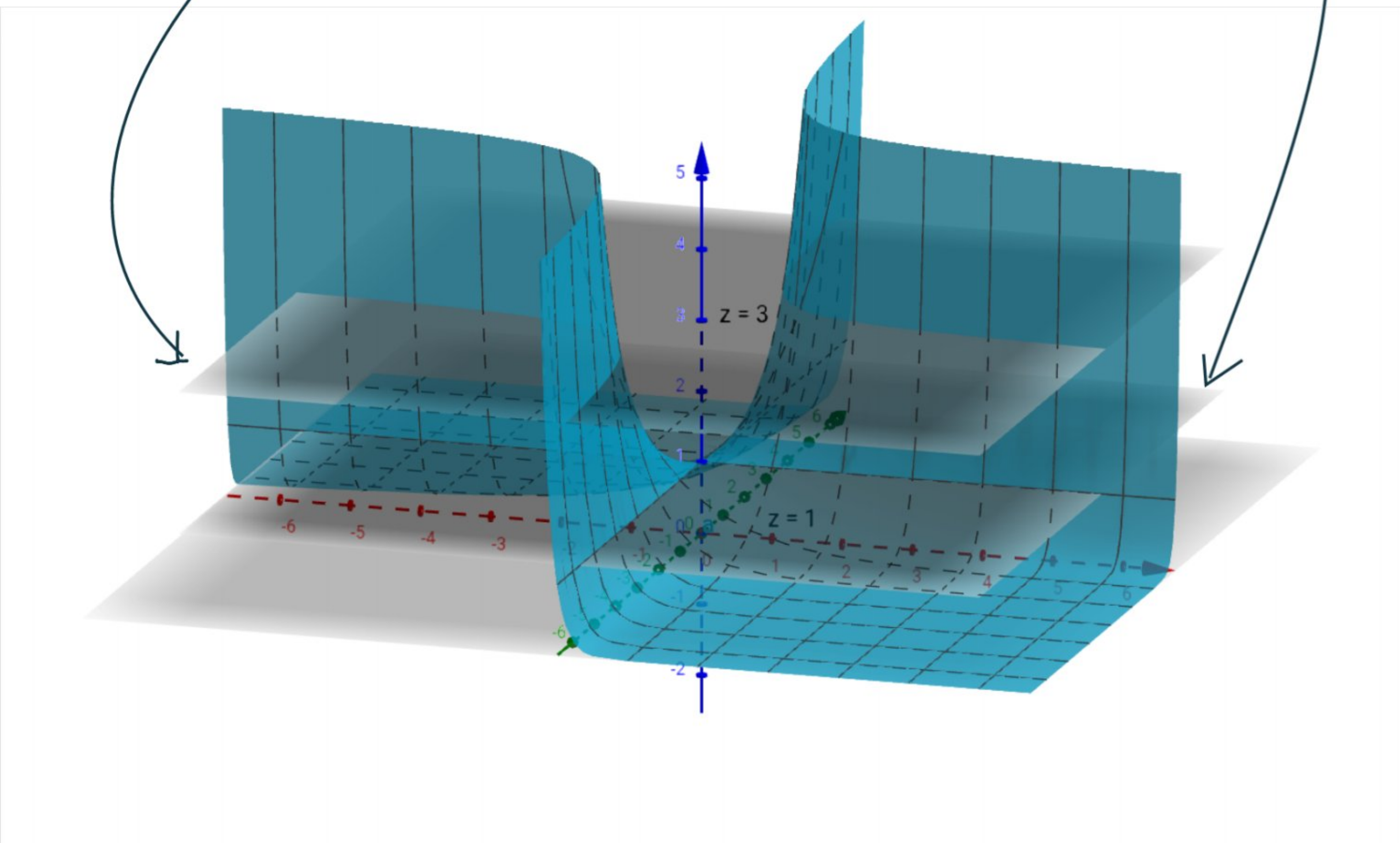
$x = 0 \rightarrow f(0,y) = e^0 = 1 \longrightarrow$ eixo Oy

ou $y=0 \rightarrow f(x,0) = 1 \longrightarrow$ eixo Ox

$K = 1$

$K=1$ $\quad N_1 = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : y=0 \vee x=0\}$

$K\neq 1$ e $K>0 \Rightarrow N_K = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\ln(K)}{x}\}$



Exemplo 11 FT3

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

fácil ver que $z = f(x,y) > 0 \ \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$

$\boxed{K>0}$

Como $n=2 \rightarrow$ curvas de nível

$$N_K = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = K\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = K \Leftrightarrow \frac{1}{K} = \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow \frac{1}{K^2} = 1-x^2-y^2$$

$$\iff \underbrace{x^2+y^2 = 1-\frac{1}{K^2}}$$

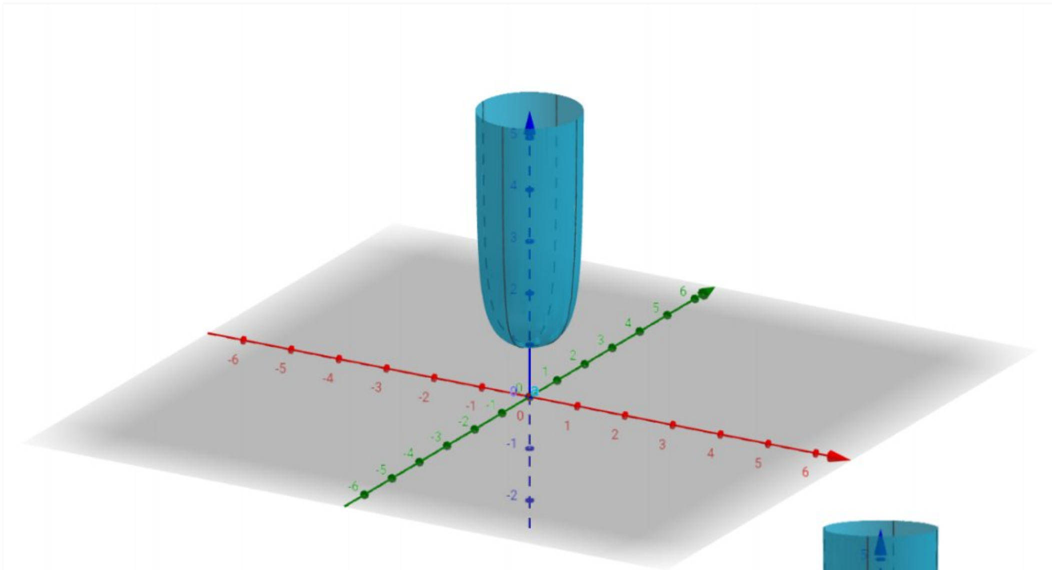
circunferências centro em $(0,0)$ e raio $= \sqrt{1-\frac{1}{K^2}}$

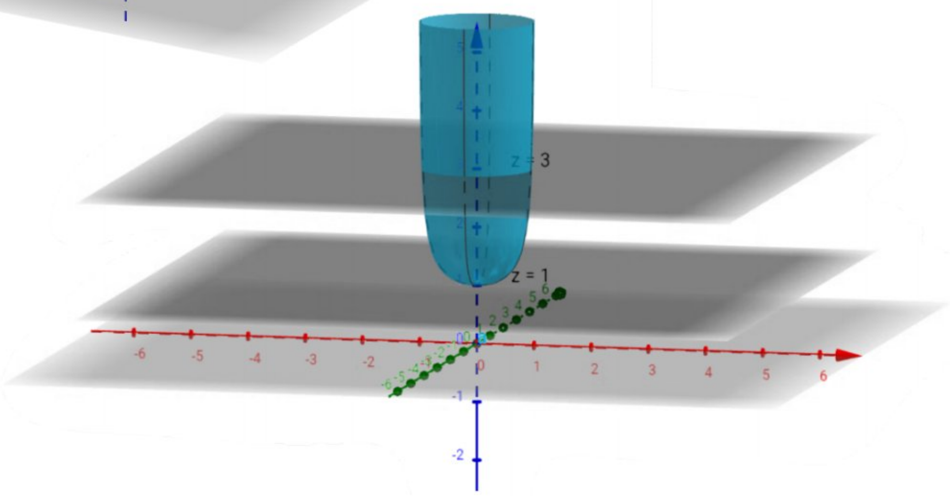
$$K>0 \;\wedge\; 1-\frac{1}{K^2} \geq 0$$
$$\iff K>0 \;\wedge\; 1 \geq \frac{1}{K^2}$$
$$\iff K>0 \;\wedge\; K^2 \geq 1$$
$$\iff K>0 \;\wedge\; (K \leq -1 \vee K \geq 1)$$
$$K \geq 1$$

se $K=1$ $\quad N_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 0\}$

$$= \{(0,0)\}$$

se $K>1$ $\quad N_K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1-\frac{1}{K^2}\}$

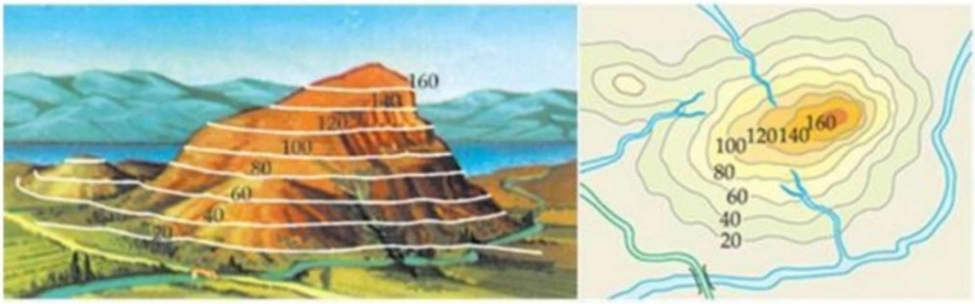




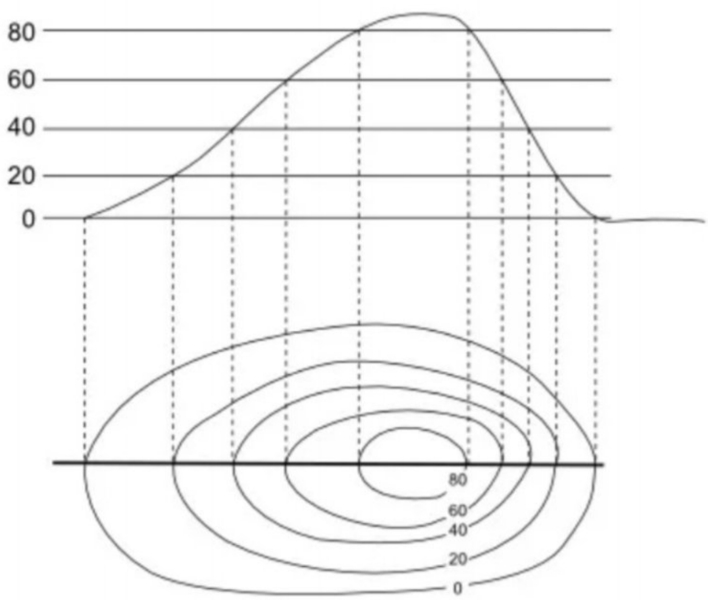
Aplicações dos conjuntos de nível

Importância do uso de curvas de nível

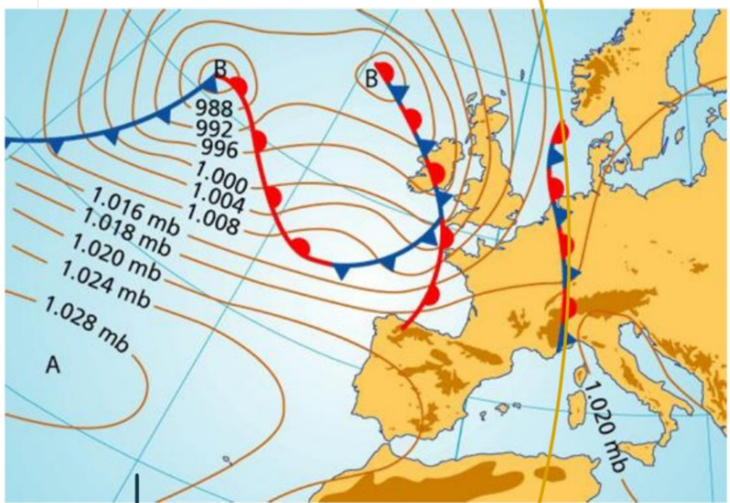
Por sua simplicidade e facilidade de reprodução, o uso de curvas de nível é a forma mais comum de se documentar o relevo na construção civil.



No mapa é informado as cotas que representam as curvas seja em relação ao nível do mar, ou outro referencial conhecido.

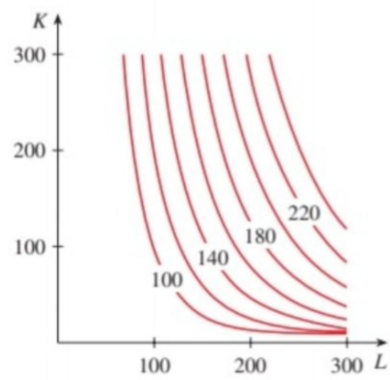


Representação de um perfil topográfico em curvas de nível



Pressão atmosférica

Existem muitas outras aplicações na economia e engenharia



EXAMPLE 13 Plot level curves for the Cobb-Douglas production function of Example 4.

SOLUTION In Figure 19 we use a computer to draw a contour plot for the Cobb-Douglas production function

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

Level curves are labeled with the value of the production P. For instance, the level curve labeled 140 shows all values of the labor L and capital investment K that result in a production of $P = 140$. We see that, for a fixed value of P, as L increases K decreases, and vice versa.

unidades de trabalho

unidades de capital