

Cálculo 2 - filipa Santana

Extremos de FRVVR

Para estudarmos a existência de extremos de uma função real de várias variáveis, precisamos de conhecer o conceito de ponto crítico ou ponto de estacionariedade.

Teorema de Fermat:

Sejam $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \text{int}(D)$. Se $f(a)$ for extremo relativo de f , então ou uma das derivadas parciais não existe em a ou $\underbrace{\nabla f(a) = \vec{0}}$
Todas as derivadas parciais são nulas.

Aos pontos $a \in D$ que anulam o gradiente de f , ou seja, tal que $\nabla f = \vec{0}$, chamamos pontos críticos de f ou pontos de estacionariedade de f .

* Exemplo 1:

$$f(x,y) = 3x^2y \quad D_f = \mathbb{R}^2$$

① Os pontos críticos são soluções da equação:

$$\nabla f = \vec{0}$$

$$f'_x(x,y) = 3y \cdot 2x = 6xy \quad f'_y(x,y) = 3x^2$$

$$\begin{cases} 6xy = 0 \\ 3x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0y=0 \rightarrow y \in \mathbb{R} \\ x=0 \end{cases}$$

∴ Todos os pontos $\{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}$ são pontos críticos.

* Exemplo 2:

$$f(x, y) = x^2 + xy \quad D_f = \mathbb{R}^2$$

$$\textcircled{1} \quad \nabla f = \vec{0}$$

$$f'_x(x, y) = 2x + y$$

$$f'_y(x, y) = x$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

∴ $(0, 0)$ é ponto crítico de f .

Os pontos críticos de f serão os candidatos a extremantes de f .

De seguida vamos ver duas formas de verificar se o ponto é ou não extremante e, no caso de o ser, ver como o classificar como minimizante ou maximizante.

Para tal precisamos de conhecer mais um conceito:

Matriz Hessiana

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 .

Chamamos Matriz Hessiana de f no ponto (a, b) :

$$H_f(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

(* menor de ordem 1
(* menor de ordem 2 (submatriz 2×2)

*) A própria Hessiana coincide com o menor de ordem n.

No caso particular de \mathbb{R}^2 :

$$H_f(a, b) = \begin{bmatrix} f''_{x^2}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{yx}(a, b) & f''_{y^2}(a, b) \end{bmatrix}$$

Usam-se as derivadas de 2ª ordem de f

O Primeiro método para a classificação dos pontos críticos chama-se Teste da 2ª Derivada.

}

(1) se todos os menores principais de $H_f(a, b)$ são positivos então $f(a, b)$ é um mínimo local ou relativo de f

(2) se os menores principais são alternadamente positivos e negativos, sendo o primeiro negativo, então $f(a, b)$ é máximo local ou relativo de f

(3) se existir um menor de ordem par negativo ou dois menores de ordem ímpar com sinais diferentes, então (a, b) é ponto de sela, não é

extremante.

Método de Sylvester

No caso particular de \mathbb{R}^2

(1) se $f''_{x^2}(a,b) > 0$ e $\det H_f(a,b) > 0$ então $f(a,b)$ é um mínimo relativo.

(2) se $f''_{x^2}(a,b) < 0$ e $\det H_f(a,b) > 0$ então $f(a,b)$ é um máximo relativo.

(3) se $\det H_f(a,b) < 0$ então (a,b) é ponto de sela.

* Exemplo 3:

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 - x + 12 \quad D = \mathbb{R}^2$$

Para encontrar e classificar os pontos críticos:

$$\textcircled{1} \quad f'_x = 2x + 2y - 1$$

$$f'_y = 2x - 2y$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2y + 1 \\ -2y + 1 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y = -1 \\ -4y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -2 \times \frac{1}{4} + 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{1}{2} + 1 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Então $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ é ponto crítico de f .

$$H_f(a,b) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad f''_{x^2} = 2$$

$$f''_{x^2} = (2x + 2y + 1)'_x = 2 \quad \rightarrow \quad f''_{xy} = 2$$

$$f''_{xy} = (2x + 2y - 1)'_y = 2 \quad \rightarrow \quad f''_{yx} = 2$$

$$f''_{y^2} = (2x - 2y)'_y = -2 \quad \rightarrow \quad f''_{y^2} = -2$$

são sempre iguais!

Menores principais:

menor de ordem 1: $2 > 0$

menor de ordem 2: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 2 \cdot 2 = -4 - 4 = -8 < 0$

$\therefore \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ é ponto de sela.

* Exemplo 4:

$$f(x,y) = -3x^2y - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 1$$

$$f'_x(x,y) = -6xy + 4x$$

$$f'_y(x,y) = -3x^2 - 3y^2 + 4y$$

$$\begin{cases} -6xy + 4x = 0 \\ -3x^2 - 3y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(-6y + 4) = 0 \\ -3x^2 - 3y^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -3y^2 + 4y = 0 \end{cases} \quad v \quad \begin{cases} y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ -3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y(-3y+4)=0 \end{cases} \quad v \quad \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ -3x^2 = -\frac{8}{3} + \frac{12}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \vee y = \frac{4}{3} \end{cases} \quad v \quad \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ -3x^2 = -\frac{12}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \vee y = \frac{4}{3} \end{cases} \quad v \quad \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = \pm \frac{2}{3} \end{cases}$$

Pontos críticos: $(0,0), (0, \frac{4}{3}), (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$$\text{Hessiana de } f : H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4-6y & -6x \\ -6x & 4-6y \end{bmatrix}$$

$$f''_{xx}(x,y) = (-6xy + 4x)'_x = -6y + 4$$

$$f''_{yy}(x,y) = (-6xy + 4x)'_y = -6x$$

$$f''_{yx}(x,y) = -6x$$

$$f''_{yy}(x,y) = (-3x^2 - 3y^2 + 4y)'_y = -6y + 4$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \text{positivo} \quad \left| \begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{array} \right| = 16 > 0 \quad f(0,0) \text{ é um Mínimo Local.}$$

$$H_f\left(0, \frac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \text{negativo} \quad \left| \begin{array}{cc} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{array} \right| = 16 > 0 \quad f\left(0, \frac{4}{3}\right) \text{ é um Máximo Local.}$$

$$H_f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \left| \begin{array}{cc} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{array} \right| = -16 < 0 \quad \left. \right\} \text{Pontos de Sela}$$

$$H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \left| \begin{array}{cc} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{array} \right| = 16 < 0$$

rever
ALGA ↗

- o 2º método para classificar os pontos críticos é usando
- o valores próprios da Matriz Hessiana de f no ponto p .

Teorema: Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que as derivadas parciais de 2ª ordem são contínuas na vizinhança de $p \in \text{int}(D)$. Se p é ponto crítico de f :

- (1) Se todos os valores próprios são negativos, então $f(p)$ é máximo local de f .

(2) se todos os valores próprios são positivos, então

$f(p)$ é mínimo local de f .

(3) se H_f tem valores próprios positivos e negativos, então p é ponto de sela.

Voltando ao exemplo 4:

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular os valores próprios:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

$\lambda = 4$ e $\lambda = 4$ Valores próprios todos positivos

∴ $f(0,0)$ é mínimo local, como já tinhemos concluído anteriormente.

Extremos Globais/Absolutos e Teorema de Weierstrass

Quando queremos resolver problemas de otimização,

isto é, problemas em que procuramos o valor máximo (ou mínimo) que a função pode tomar, estamos à procura dos extremos absolutos.

O Teorema de Weierstrass que conhecemos das F.R.V.R. generaliza-se para as F.R.V.V.R.

Teorema de Weierstrass

Se $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua definida num Compacto D, então f atinge um máximo e um mínimo absolutos em D .

Conjunto fechado e limitado

Então como resolvemos um problema de optimização?

- ① Encontrar os pontos críticos de f no interior de D
- ② Encontrar os extremantes sujeitos à restrição da fronteira de D .
- ③ Encontrar os valores da função para os pontos obtidos em ① e ②

* Exemplo 5:

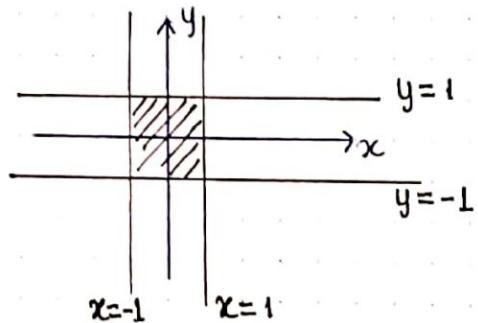
$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - 2x^2y + 1 \quad D = [-1,1] \times [-1,1]$$

1. Pontos críticos:

$$f'_x(x,y) = 8x - 4yx$$

$$f'_y(x,y) = -2y - 2x^2$$

$$\begin{cases} 8x - 4yx = 0 \\ -2y - 2x^2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(8-4y) = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee y=2 \\ -2y=0 \vee -2x^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{v} \quad \begin{cases} y=2 \\ -2x^2=4 \end{cases}$$

↓
Eond. Imp.

∴ $(0,0)$ é o único ponto crítico de f e pertence ao interior de D .

$$2. \text{ Considerando } y=1 \quad f(x,1) = 4x^2 - 1 - 2x^2 + 1 \\ = 2x^2 = g(x) \\ g'(x) = 4x$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 O ponto $(0, 1)$ é candidato a extremante.

Podemos estudar a existência de extremo usando os conceitos das F.R.V.R

$$\text{Considerando } y=-1 \quad f(x,-1) = 4x^2 - 1 + 2x^2 + 1 \\ = 6x^2 = g(x)$$

$$g'(x) = 12x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

O ponto $(0, -1)$ é candidato a extremante.

$$\text{Considerando } x=1 \quad f(1,y) = 4 - y^2 - 2y + 1 \\ = -y^2 - 2y + 5 = g(y)$$

$$g'(y) = -2y - 2$$

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow -2y - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow -2y = 2 \\ \Leftrightarrow y = \frac{2}{-2} = -1$$

O ponto $(1, -1)$ é candidato a extremante.

$$\text{Considerando } x=-1 \quad f(-1,y) = -y^2 - 2y + 5 = g(y)$$

O ponto $(-1, -1)$ é candidato a extremante.

$$3. \quad f(0,0) = 1$$

$$f(0,1) = 0$$

Então 0 é o mínimo Absoluto de f e é atingido em $(0,1)$ e $(0,-1)$.

$$f(0,-1) = 0$$

$$f(-1,-1) = 6$$

6 é máximo absoluto e é atingido em $(-1,-1)$ e $(1,-1)$.

$$f(1,-1) = 6$$

Extremos condicionados e os multiplicadores de Lagrange:

Muito útil para encontrar os extremos numa fronteira

Lagrange:

Quando o nosso problema de optimização envolve o cálculo de extremos de uma função em que as variáveis independentes estão sujeitas a uma ou várias condições, o método dos multiplicadores de Lagrange é uma boa opção.

sejam f e g duas funções diferenciáveis em D .

Seja $S = \{x \in D : g(x) = k\}$, sendo k uma constante real. Se a restrição de f a S tem um extremo local/relativo no ponto $p \in S$, tal que $\nabla g(p) \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$$

A λ chamamos multiplicador de Lagrange

A $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$ chamamos função

de Lagrange ou Lagrangeano.

* Na prática, se queremos encontrar extremos de uma função f sujeita a uma restrição do tipo $g(x, y) = 0$ basta:

① Encontrar os pontos críticos da função de

Lagrange: $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y))$

Conseguimos sempre transf. nestas forma.

(Tudo no 1º membro)

② Calcular os valores da função nos pontos obtidos no passo anterior.

* Exemplo 6:

Determina os extremos globais (absolutos) de $f(x,y) = xy$ no semi-círculo $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$

Como o conjunto D é limitado e fechado então pelo T de Weierstrass a função atinge máximo e mínimo absolutos em D .

1º) Vamos determinar os candidatos a extremos no interior de D ~~embaras~~

2º) Vamos encontrar os candidatos a extremos na fronteira

3º) Selecionar o máximo e mínimo absolutos

Na fronteira podemos definir duas restrições

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge y \geq 0\}$$

e

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -1 \leq x \leq 1\}$$

Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para estudar os candidatos a extremos de f em D_1 :

$$\circ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \quad x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2 - 1 = 0}_{g(x, y) = 0}$$

Então,

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_{\lambda}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x\lambda = 0 \\ x - 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x\lambda \\ x - 2(2x\lambda)\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x\lambda \\ x(1 - 4\lambda^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x\lambda \\ x = 0 \vee \lambda = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = x \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = -x \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Como } y > 0$$

C.Imp

}

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{pontos críticos}$$

em D_1

Em D_2 poderíamos usar a técnica vista antes (Exemplos) por ser um exemplo mais trivial (mais simples).

$$g(x) = f(x, 0) = 0$$

Logo, como g é constante então todos os pontos são máximos/mínimos de f em D_2 .

Então, falta estudar as imagens.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Máximo Absoluto de } f$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{Mínimo Absoluto de } f$$

$$f(x, 0) = 0$$