

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Competências Transferíveis 2  
Sessão 01

Robert Valente ([robertt@ua.pt](mailto:robertt@ua.pt))

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

## Objetivos globais deste módulo

I. identificar formas de modelar (de maneira aproximada) um problema real

2. discutir e compreender os fundamentos do MEF

3. desenvolver competências de pensamento crítico sobre resultados obtidos com o MEF

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

“start with why”

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

“start with why”

Robertt Valente

[robertt@ua.pt](mailto:robertt@ua.pt)

Departamento de Engenharia Mecânica

gabinete 22.4.15 (último piso, edifício 22)

coordenador da unidade curricular “Competências Transferíveis 2”

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

“how”

- 1º período: semana de 07 de Março a 01 de Abril (8 sessões)
- 2º período: semana de 04 de Abril a 20 de Maio (8 sessões)
- 3º período: semana de 23 de Maio a 23 de Junho (9 sessões)

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

“how”

- 1º período: semana de 07 de Março a 01 de Abril (8 sessões), momento de avaliação: 31 de março
- 2º período: semana de 04 de Abril a 20 de Maio (8 sessões)
- 3º período: semana de 23 de Maio a 23 de Junho (9 sessões)
- Material de apoio (slides, guião da UC, etc.): eLearning
- Acompanhamento / dúvidas fora do horário das aulas: presencialmente e/ou por vídeo-conferência
- Questões, sugestões, comentários: pessoalmente e/ou email para [robertt@ua.pt](mailto:robertt@ua.pt)

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Objetivos para hoje: uma visão global

Métodos computacionais (modelação e simulação numérica)

Motivação e aplicações

Método dos Elementos Finitos / Finite Element Method (FEM)

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

## Boeing 767



# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Aloha April, 28th 1988,



Los Angeles, June, 2nd 2006,



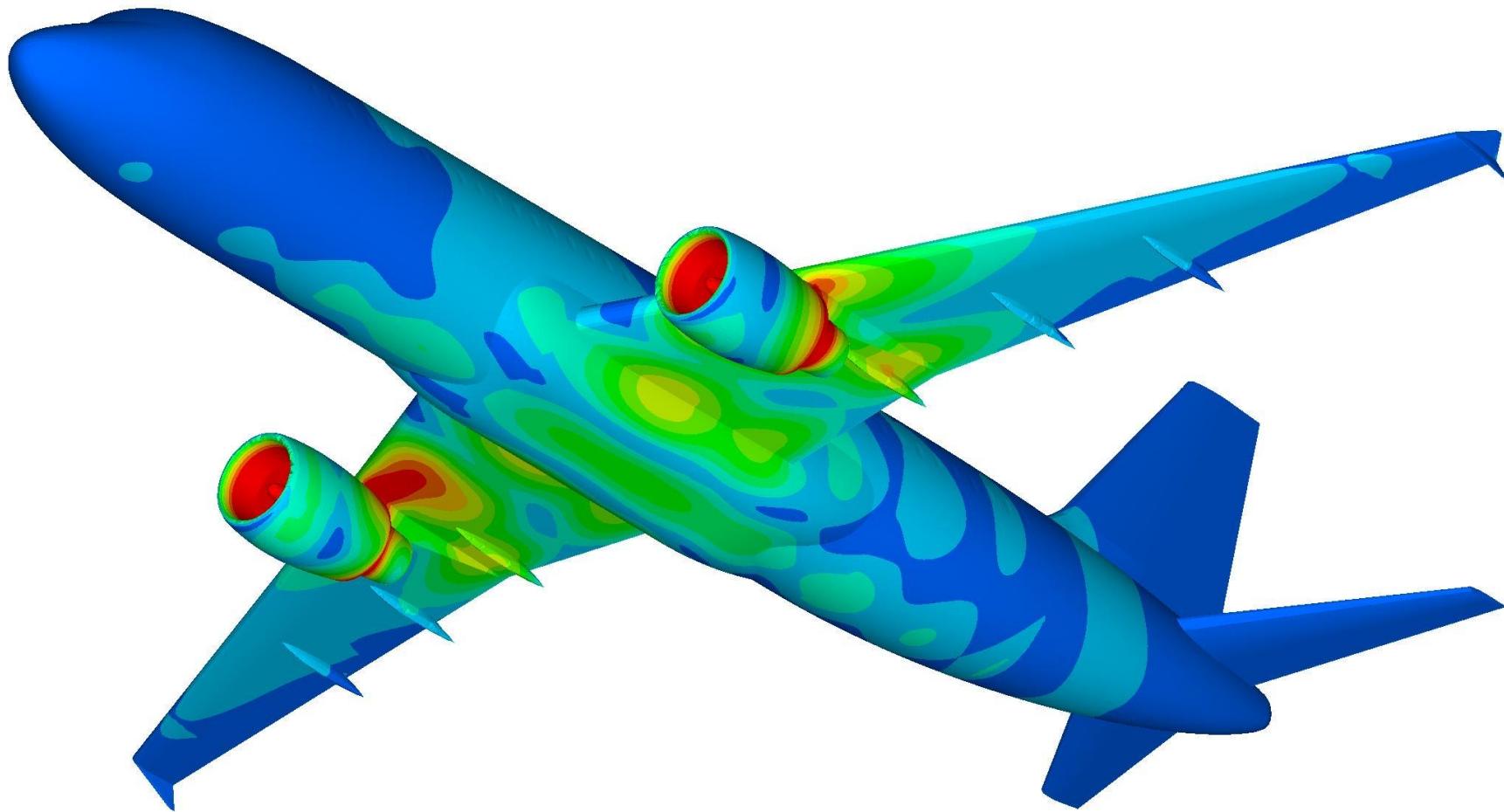
# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

## Boeing 767

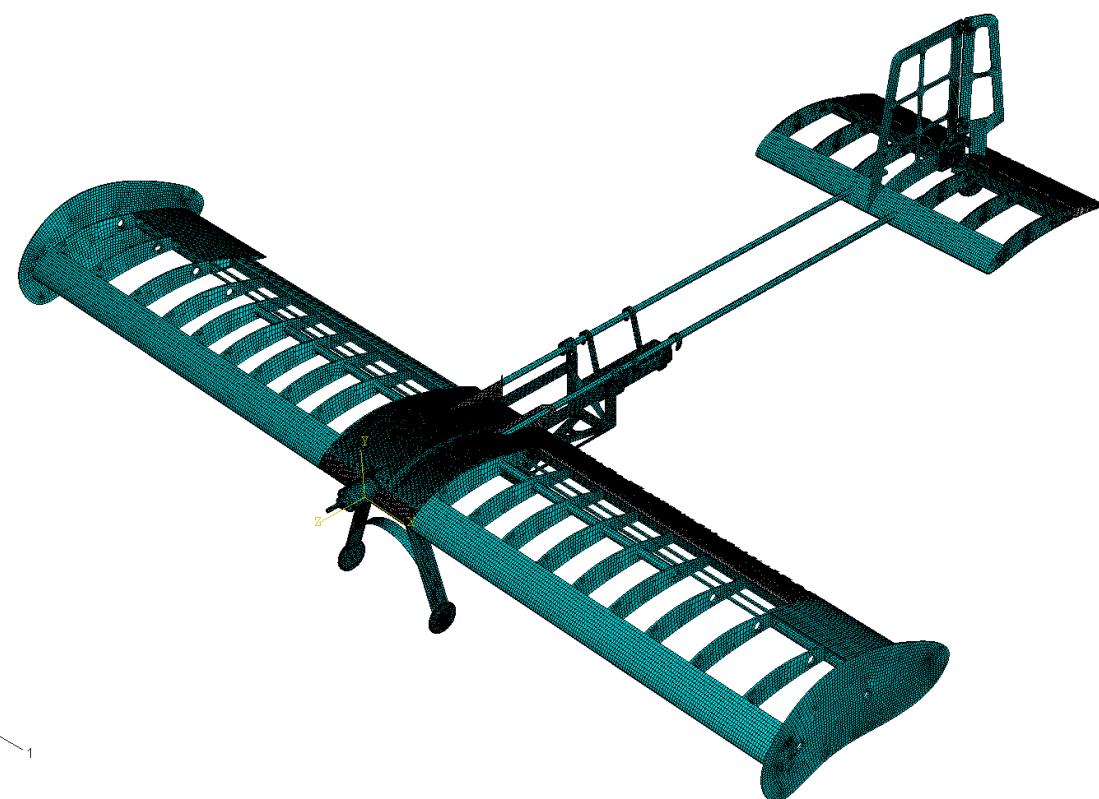
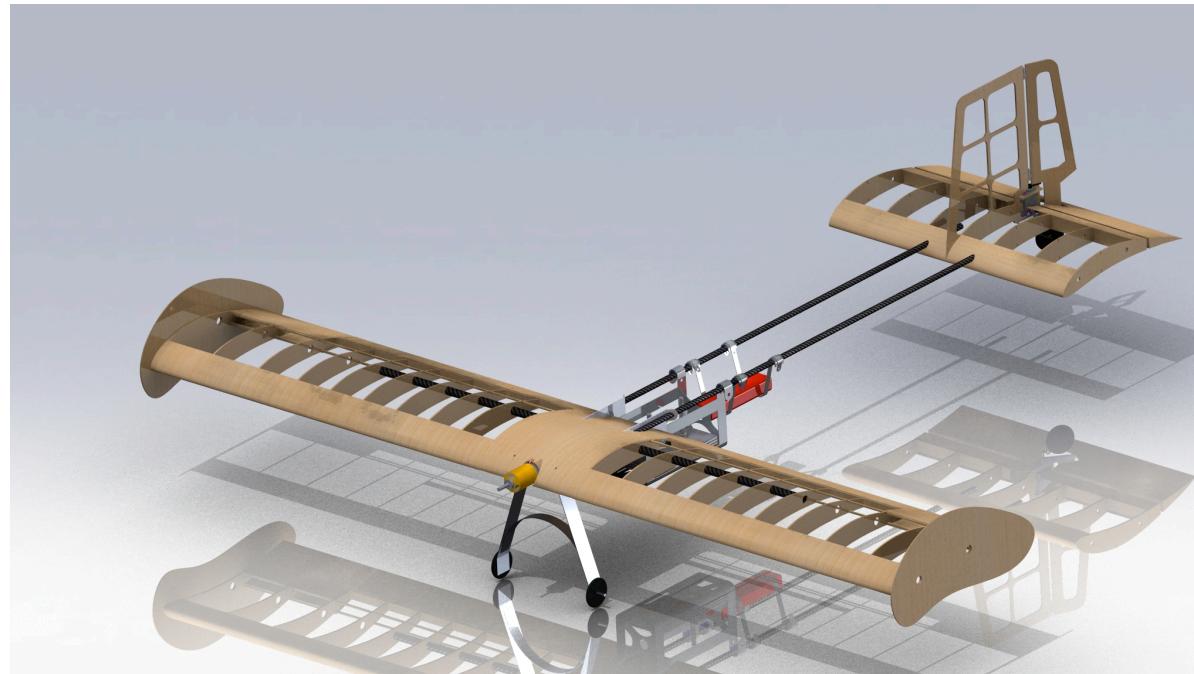


# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

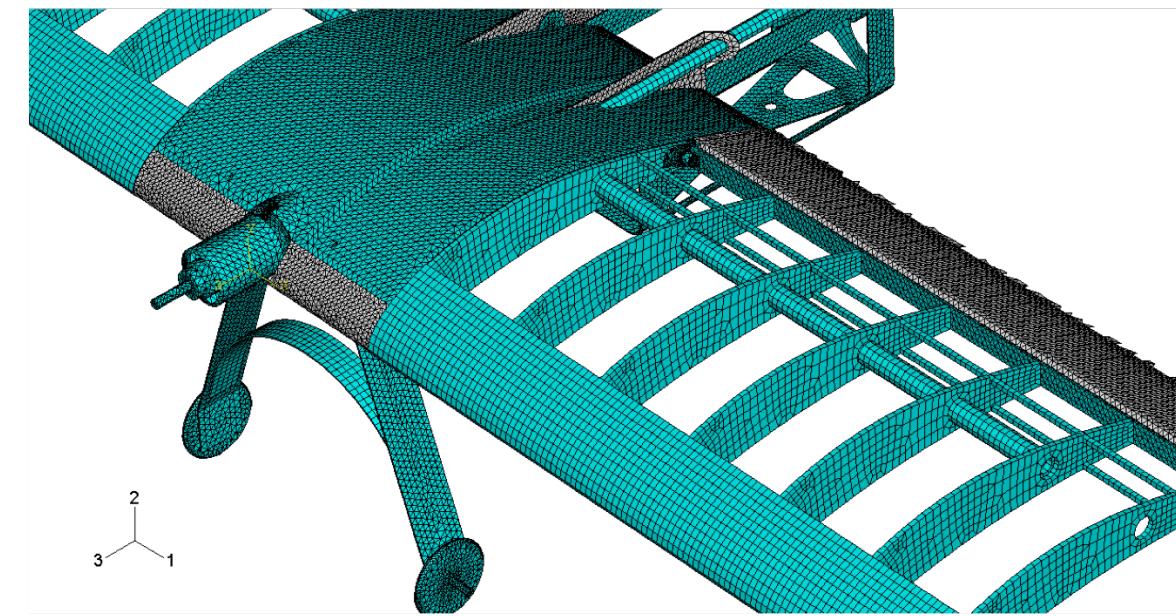
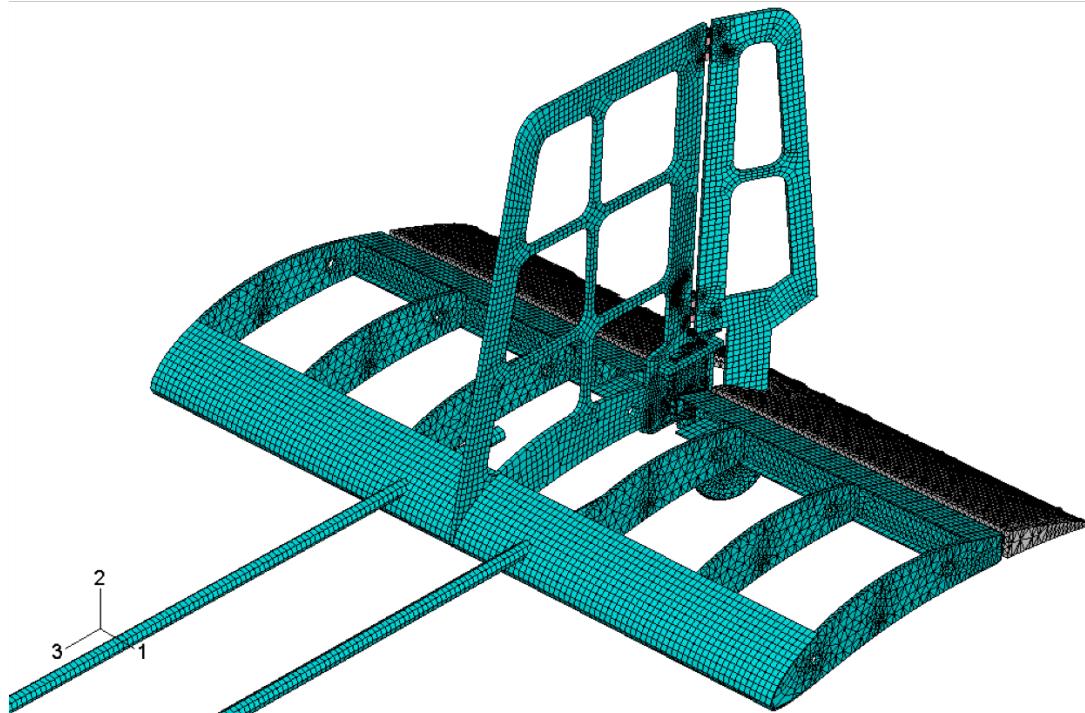
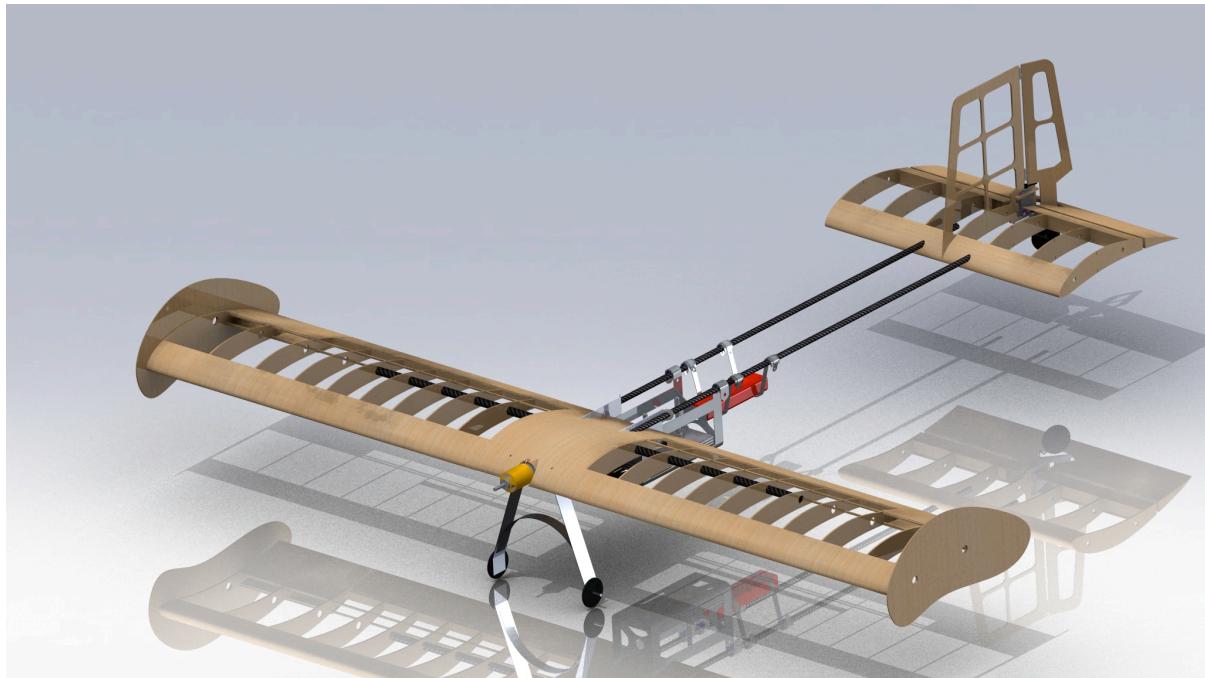
## Boeing 767



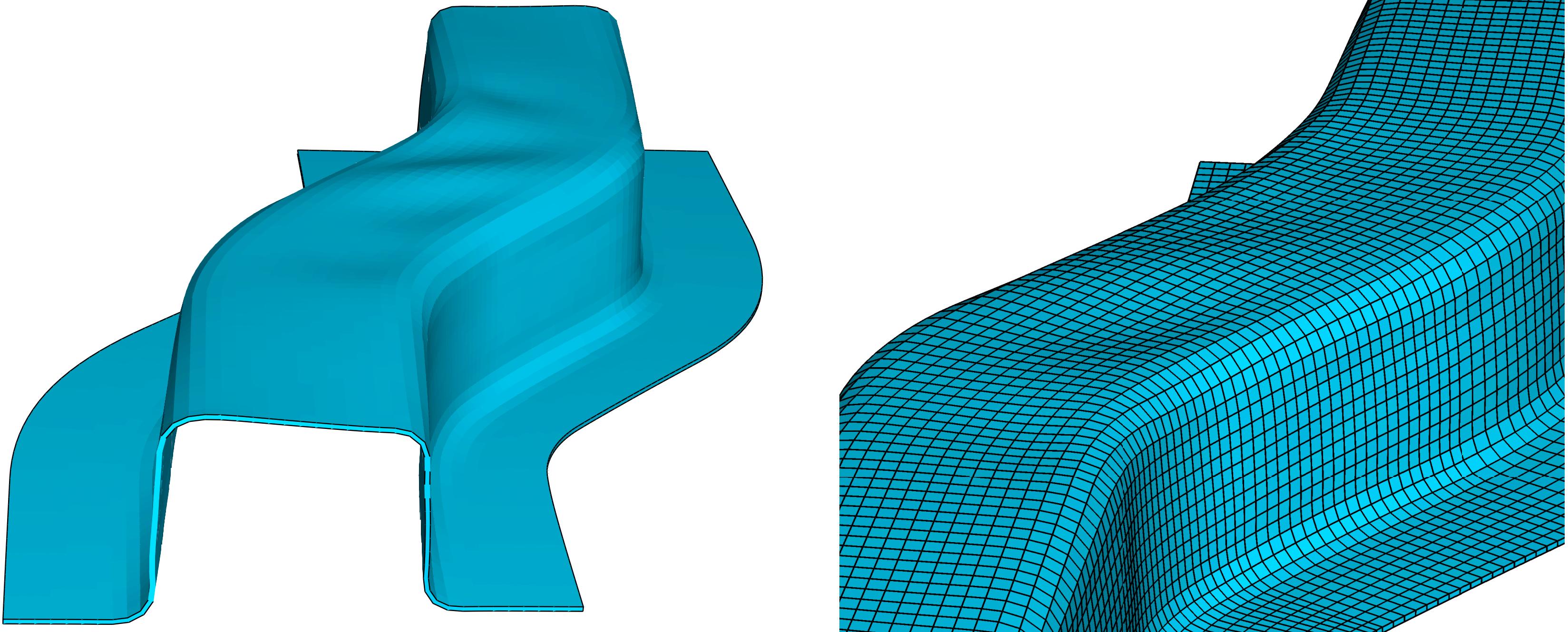
# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



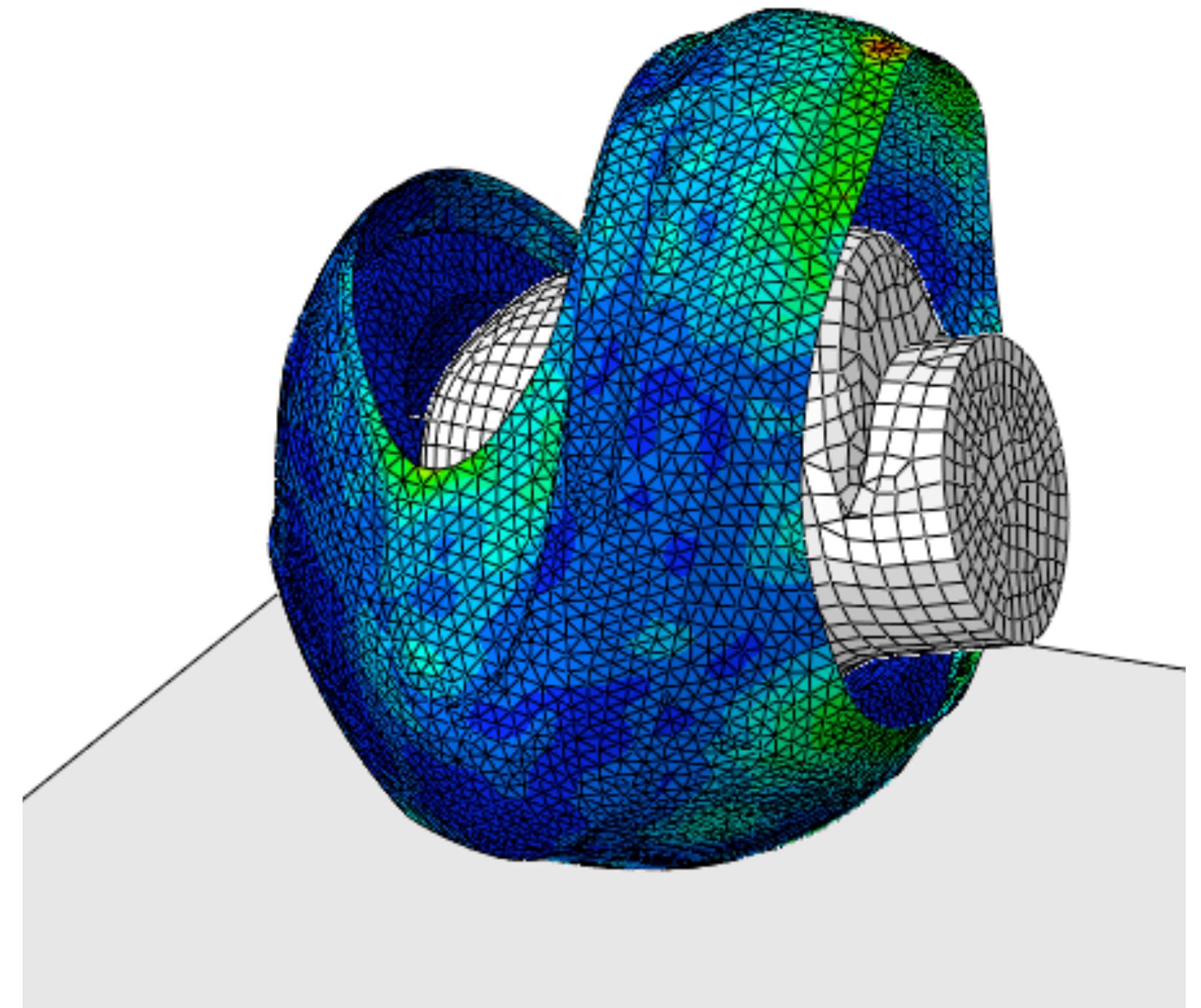
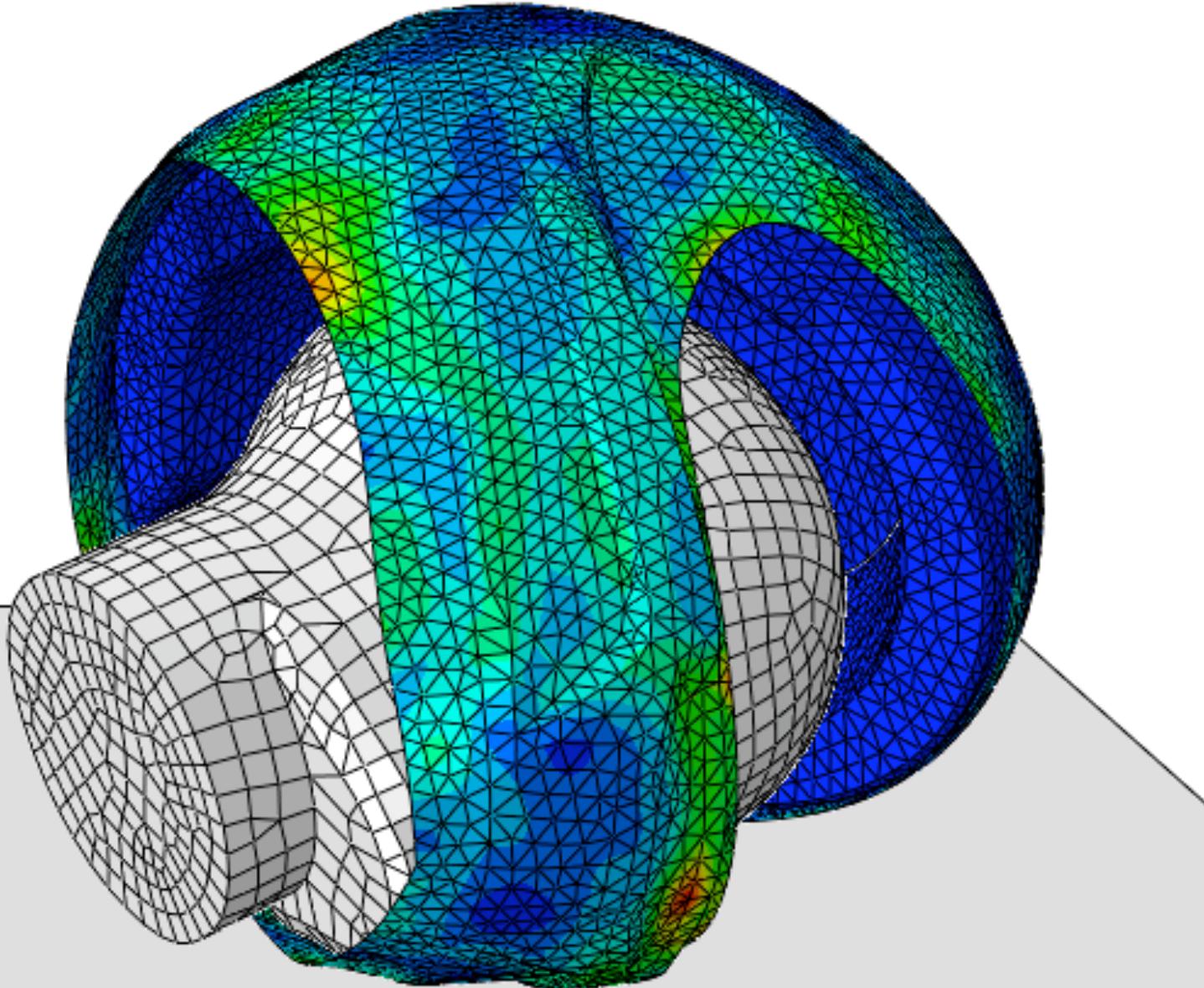
# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



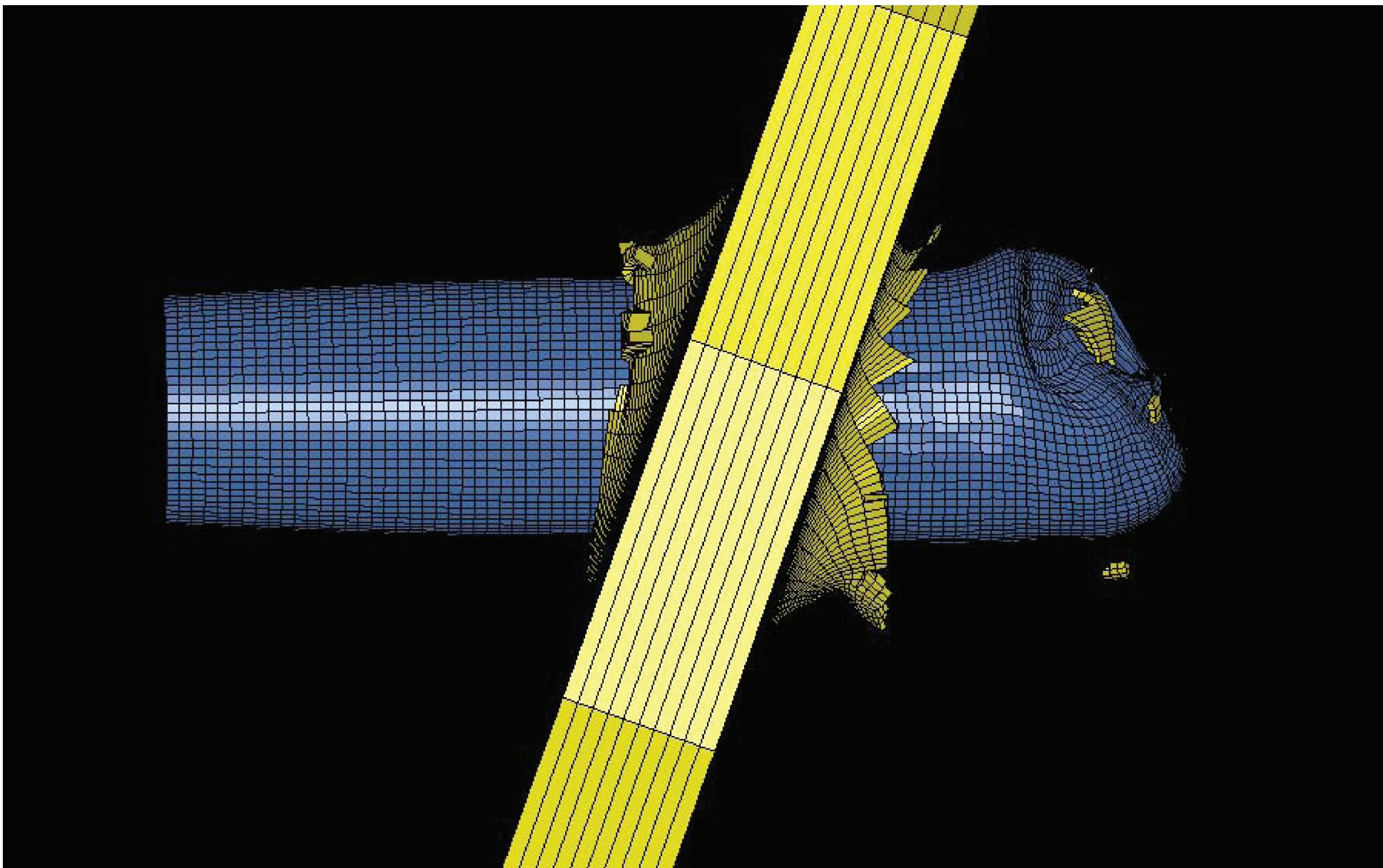
# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



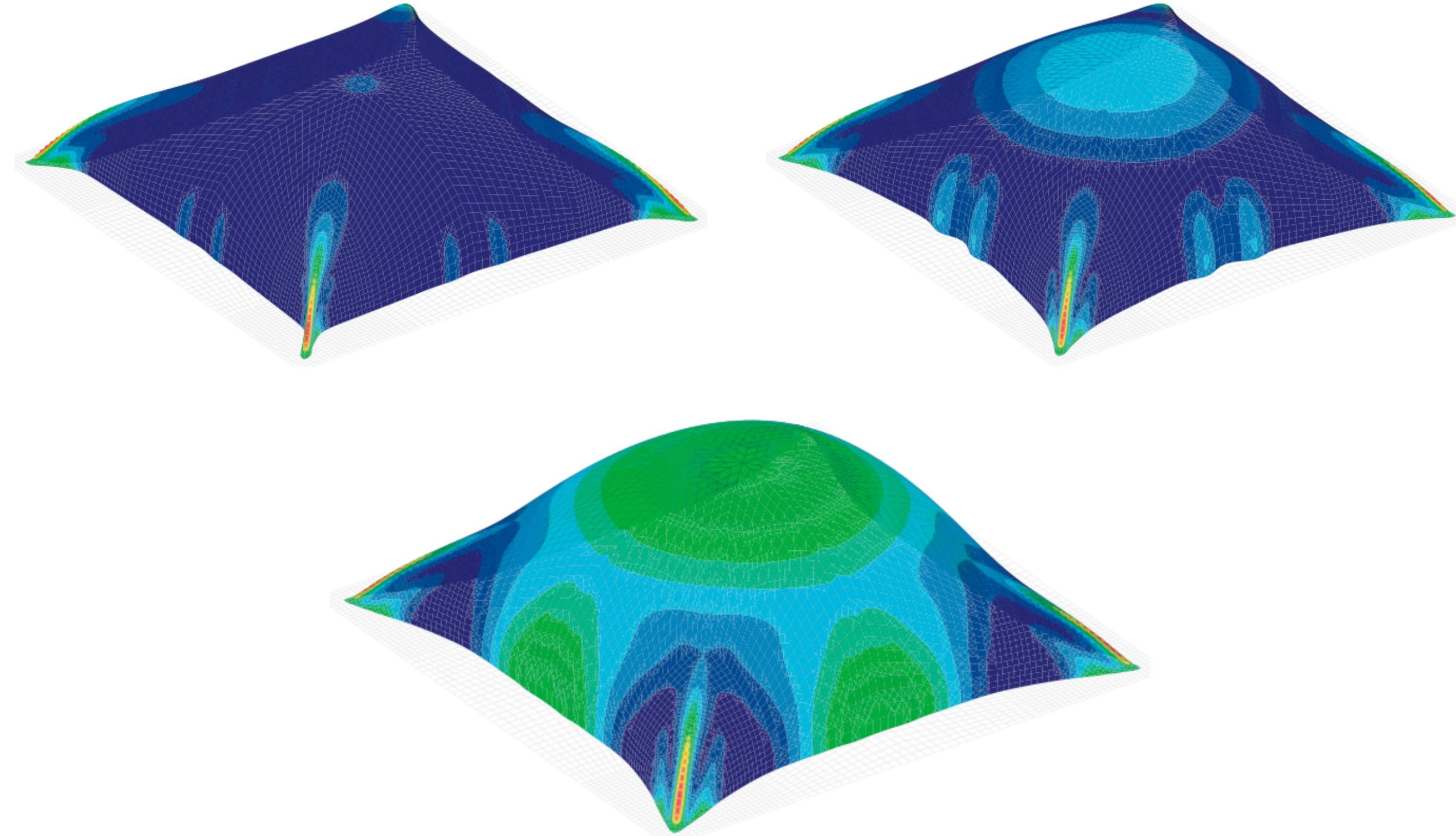
# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



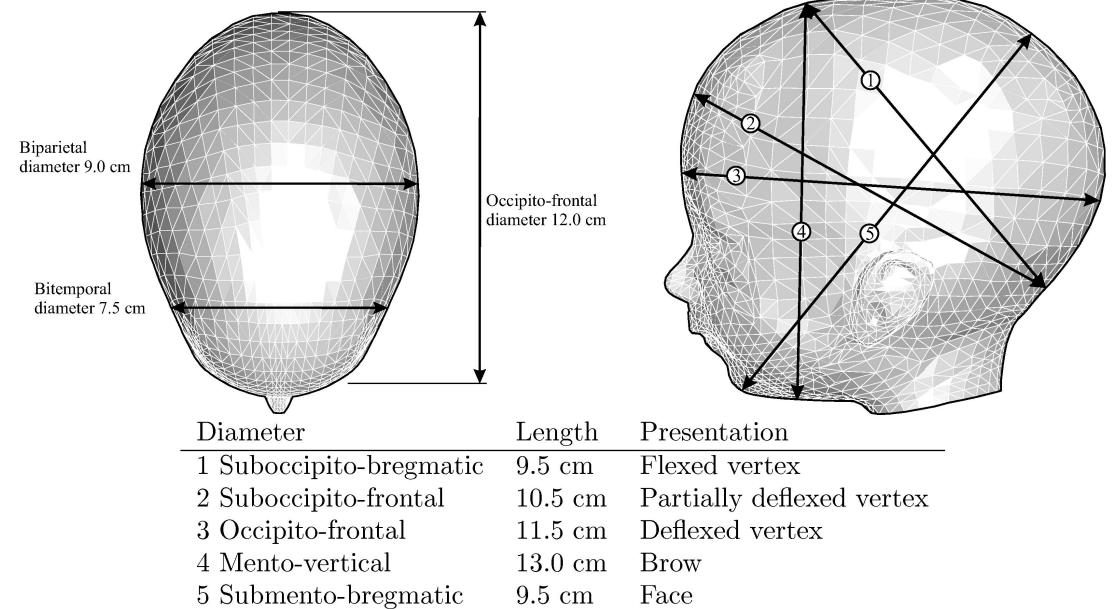
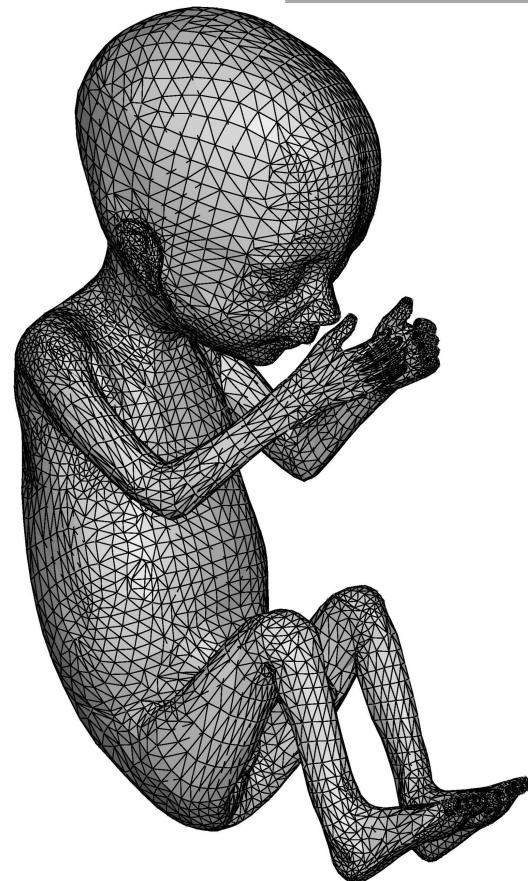
# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



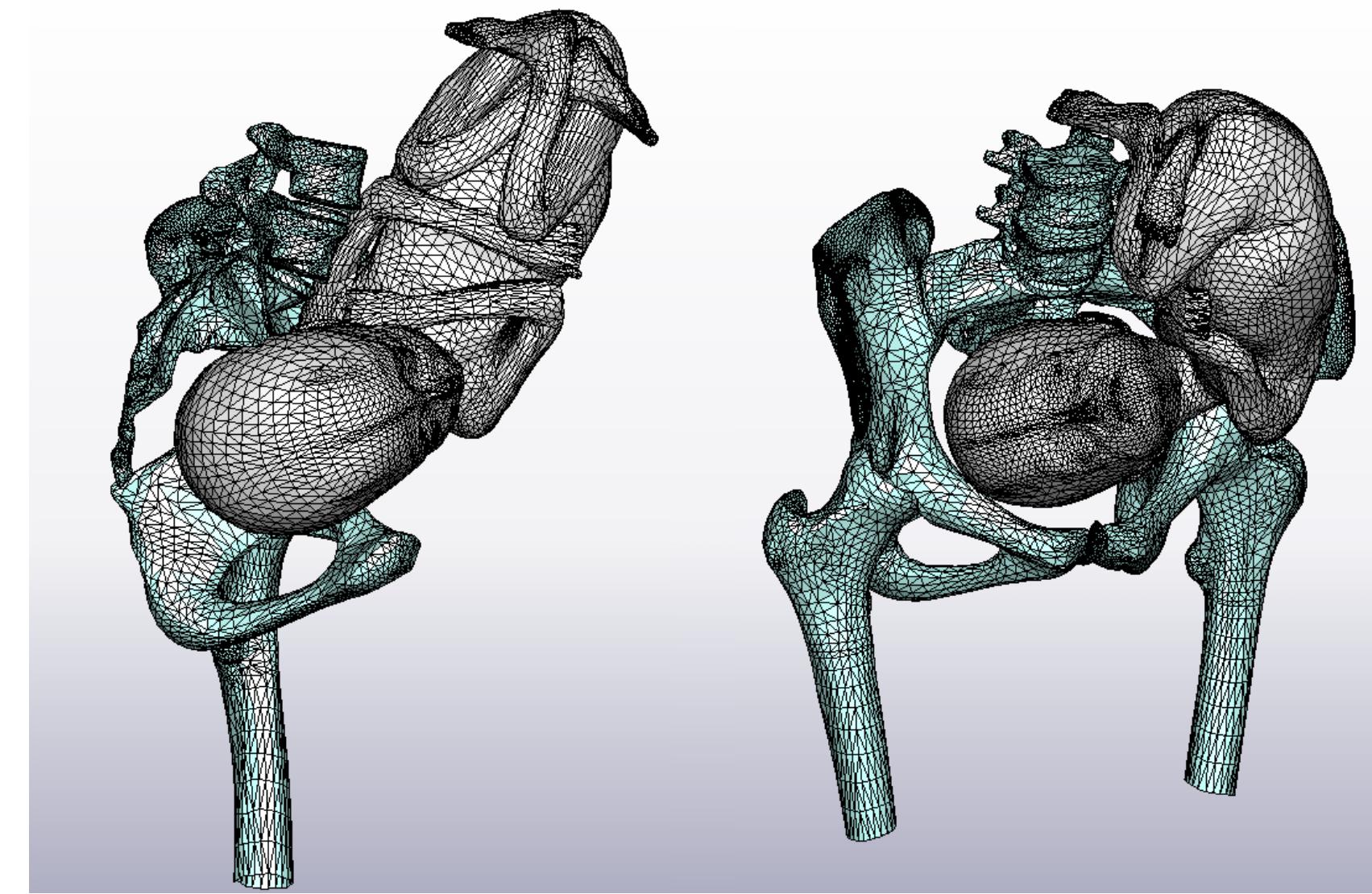
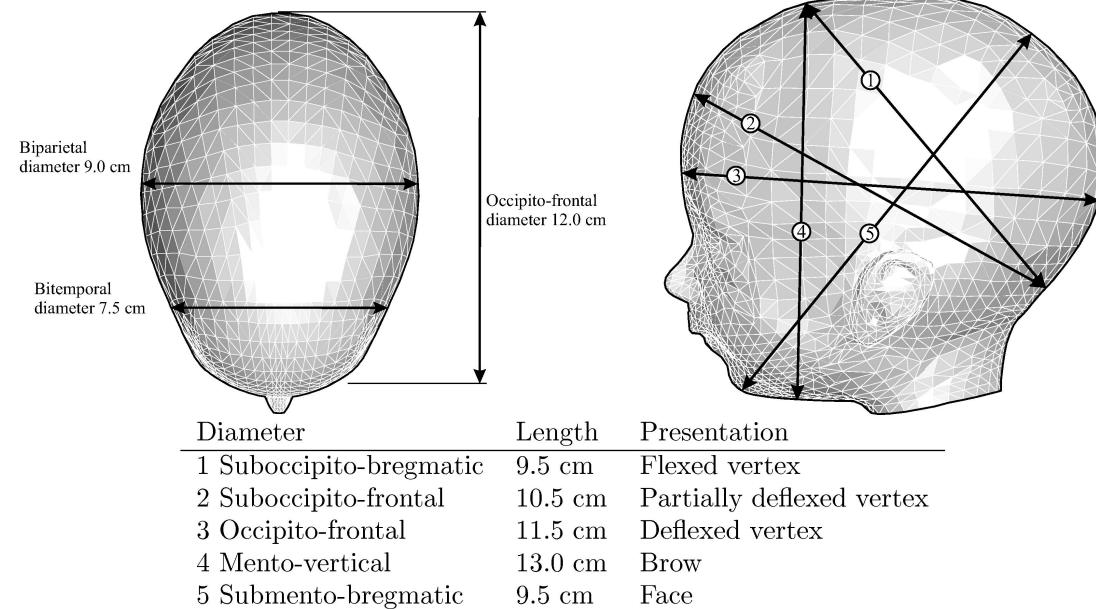
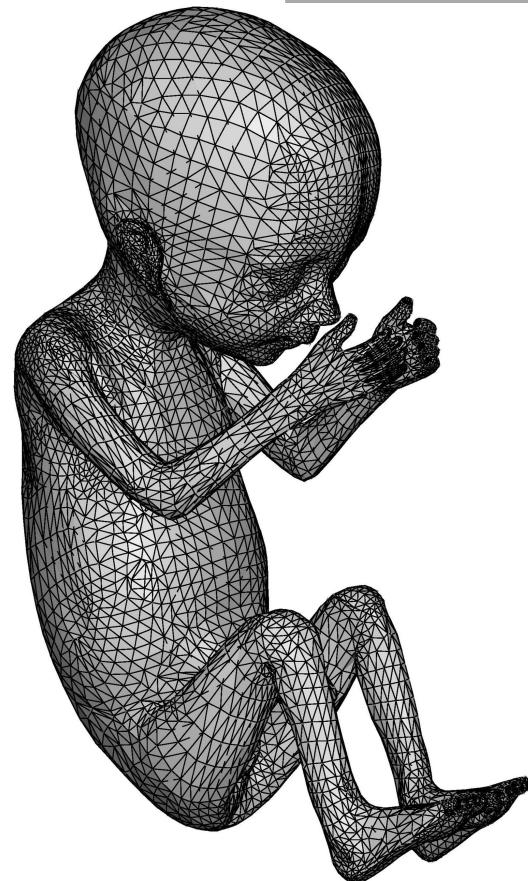
# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

O que há de comum em todos esses exemplos de aplicação?

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Realidade > Modelos geométricos > Simplificações > Cálculo > Resultados

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Realidade > Modelos geométricos > Simplificações > Cálculo > Resultados

CAD

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Realidade > **Modelos geométricos** > Simplificações > **Cálculo** > Resultados

CAD

CAE

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Realidade > **Modelos geométricos** > Simplificações > **Cálculo** > Resultados

CAD

CAE

**garbage in, garbage out**

resultados (output) são influenciados pelos dados de entrada (input) do modelo computacional (e não pela realidade)

a cada resultado está associado um nível de incerteza, que depende da qualidade dos dados de entrada

relação custo-benefício: ter resultados para um modelo simplificado, mas tratável vs. não ter resultados, para uma realidade excessivamente complexa

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

**Modelação como ferramenta de engenharia – Possíveis abordagens**

## Modelação como ferramenta de engenharia – Possíveis abordagens



# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

## Modelação como ferramenta de engenharia – Possíveis abordagens



## Modelação como ferramenta de engenharia – Possíveis abordagens

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( k \cdot r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \cdot \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + q_v = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

where

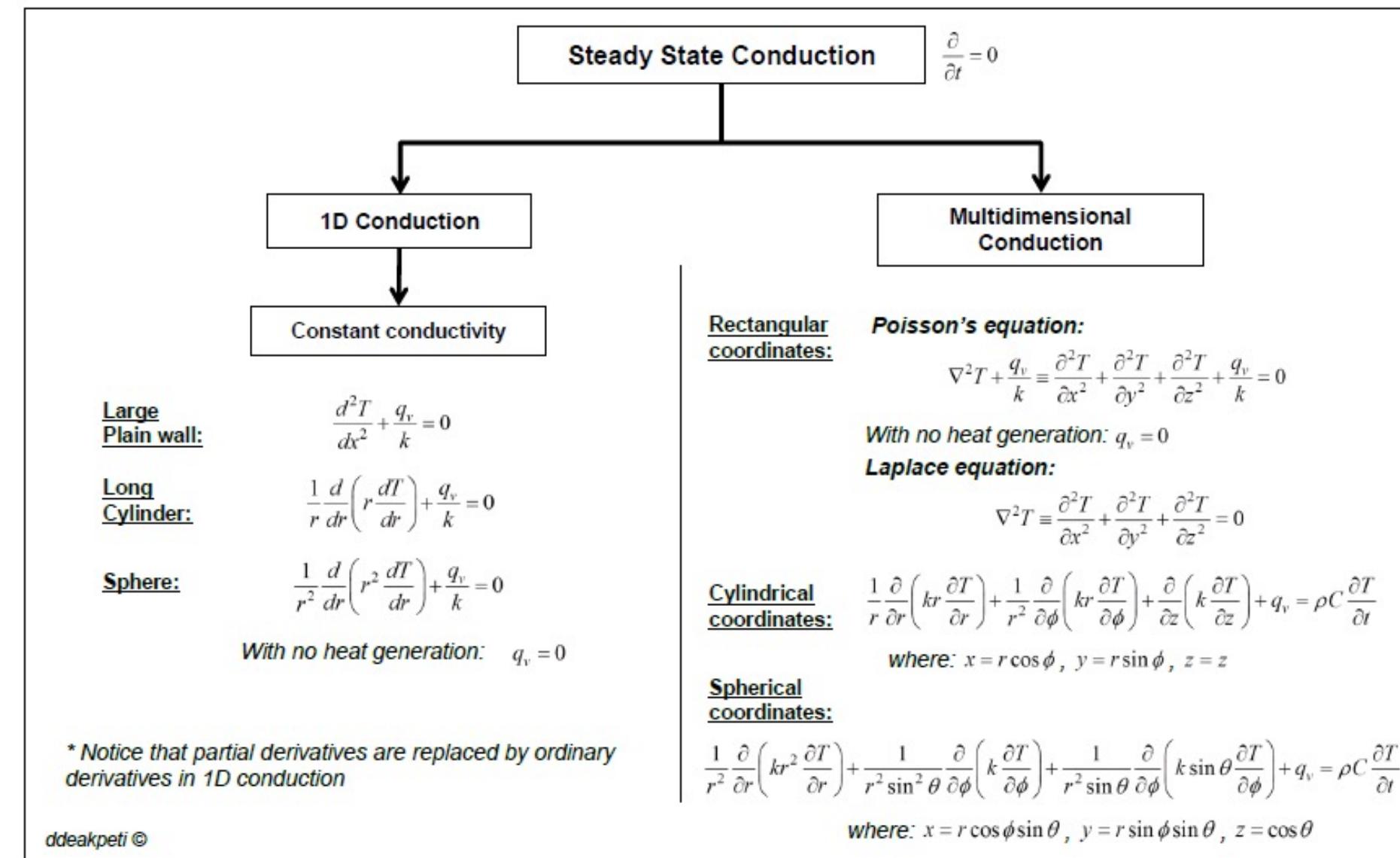
$k$  is the materials conductivity [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ]

$q_v$  is the rate at which energy is generated per unit volume of the medium [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ ]

$\rho$  is the density [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ]

$c_p$  is the specific heat capacity [ $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ]

## Modelação como ferramenta de engenharia – Possíveis abordagens



## Modelação como ferramenta de engenharia – Possíveis abordagens

### FINITE DIFFERENCED HEAT EQUATION

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

if  $\Delta x = \Delta y$

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + \frac{\dot{q} \Delta x^2}{k} - 4T_{m,n} = 0$$

## Modelação como ferramenta de engenharia – Possíveis abordagens



# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Competências Transferíveis 2  
Sessão 02

Robert Valente ([robertt@ua.pt](mailto:robertt@ua.pt))

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

“A **theory** has only the alternative of being right or wrong.  
A **model** has a third possibility: it may be right, but irrelevant.”

Manfred Eigen

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Hofstadter's Law says that a task always takes longer than you expect,  
even when you take into account Hofstadter's Law

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

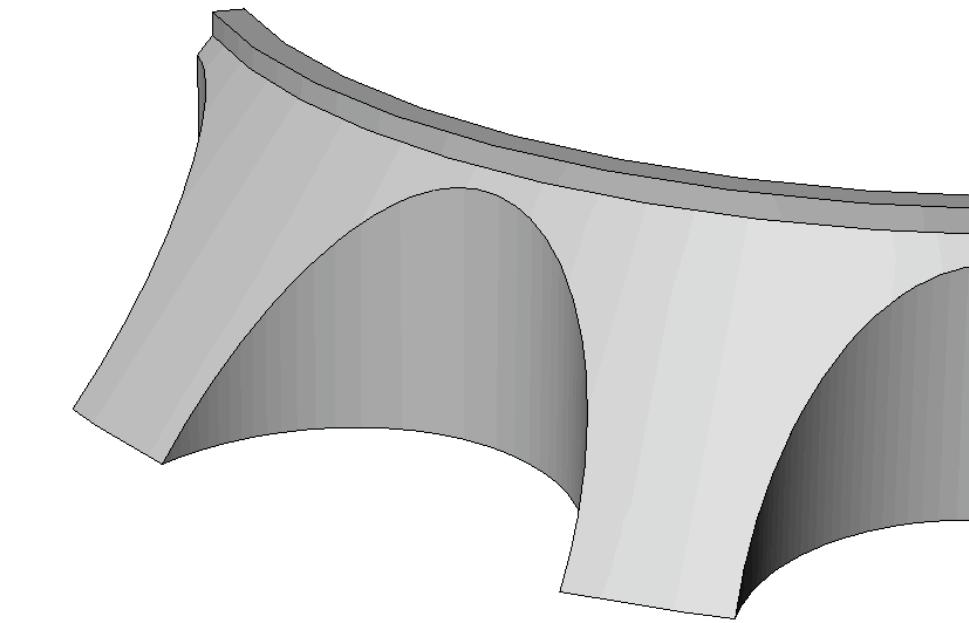
Realidade > Modelos geométricos > Simplificações > Cálculo > Resultados

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

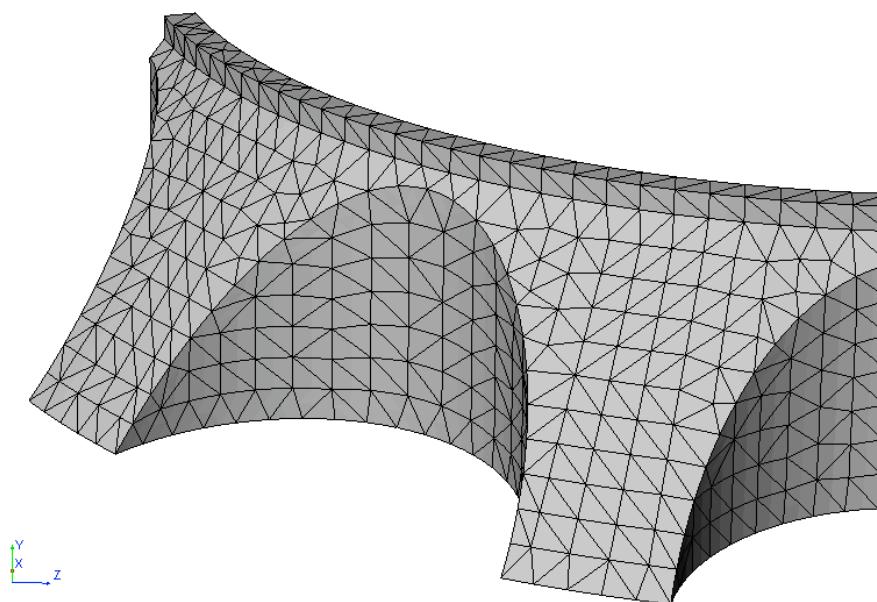
Realidade > Modelos geométricos > Simplificações > Cálculo > Resultados



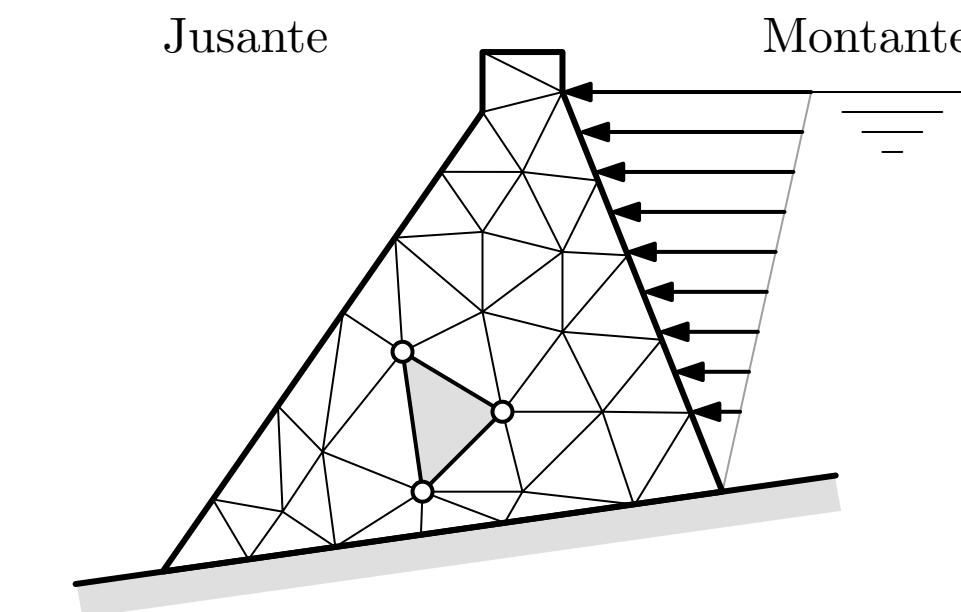
(a)



(b)



(c)

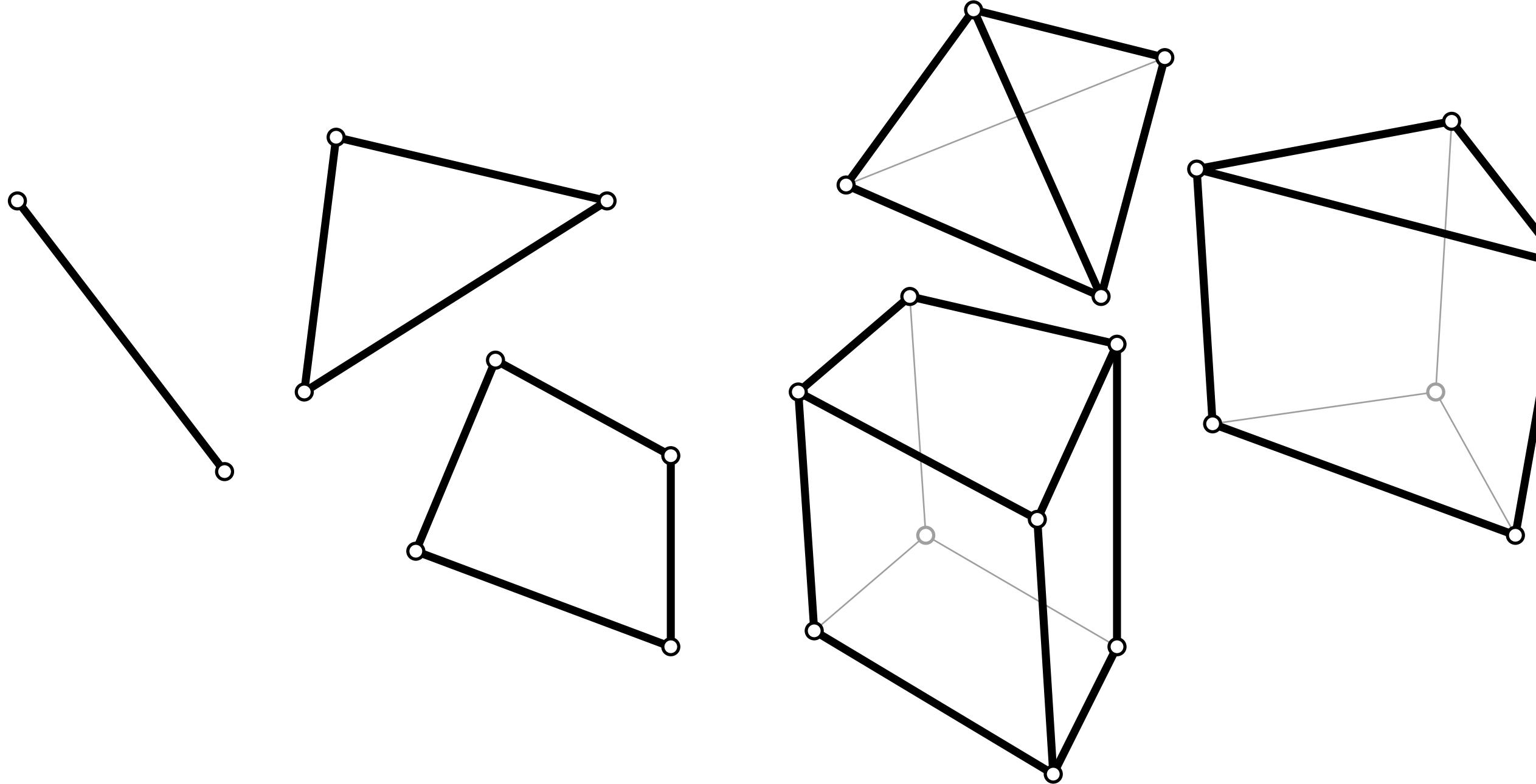


(d)

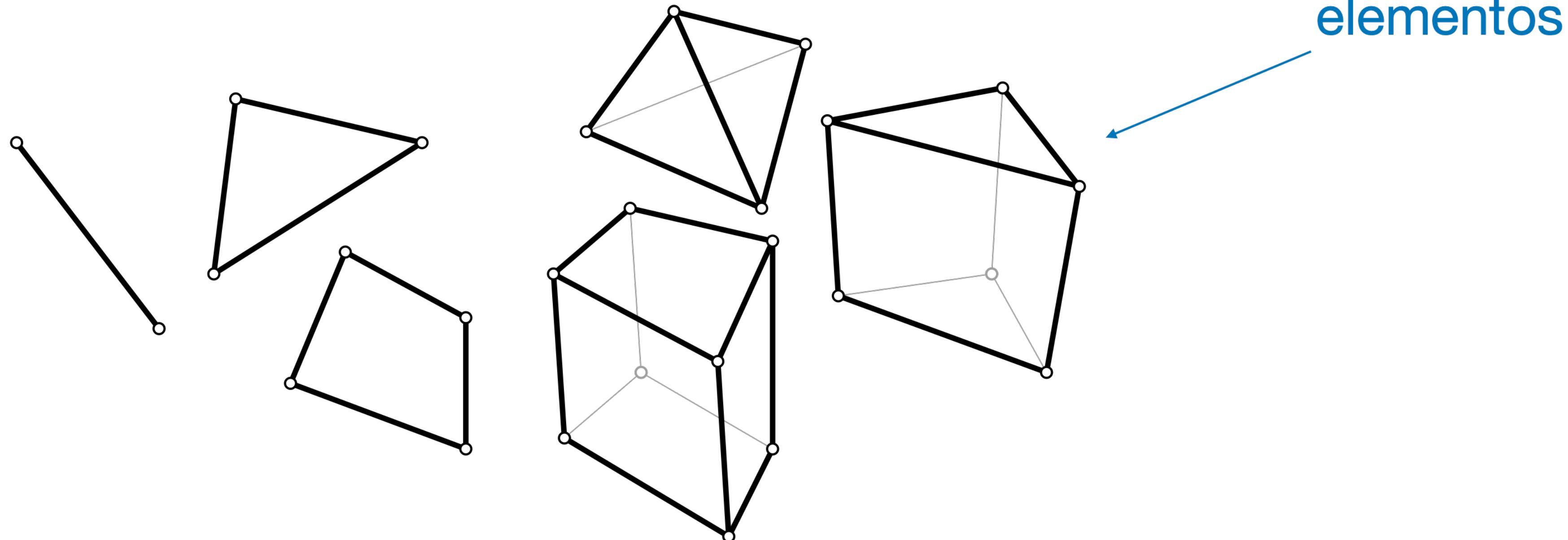
# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Ingredientes necessários...

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

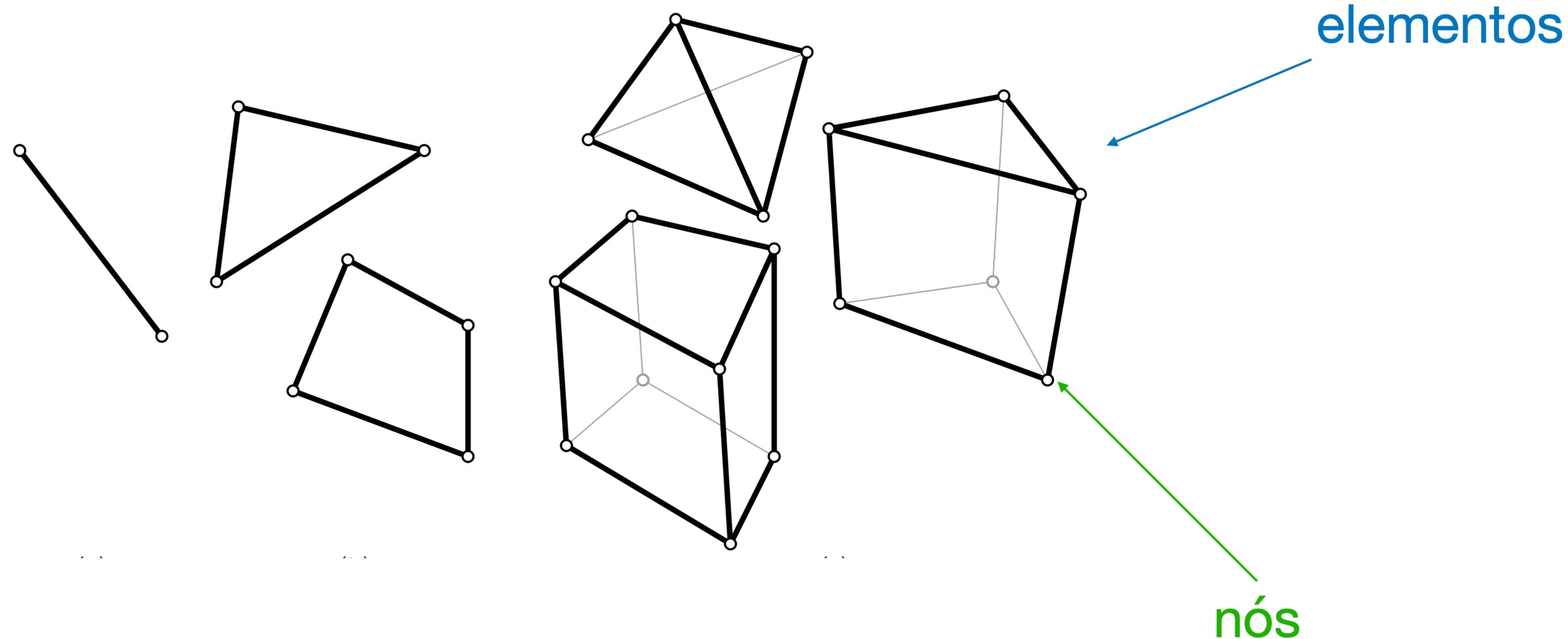


# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

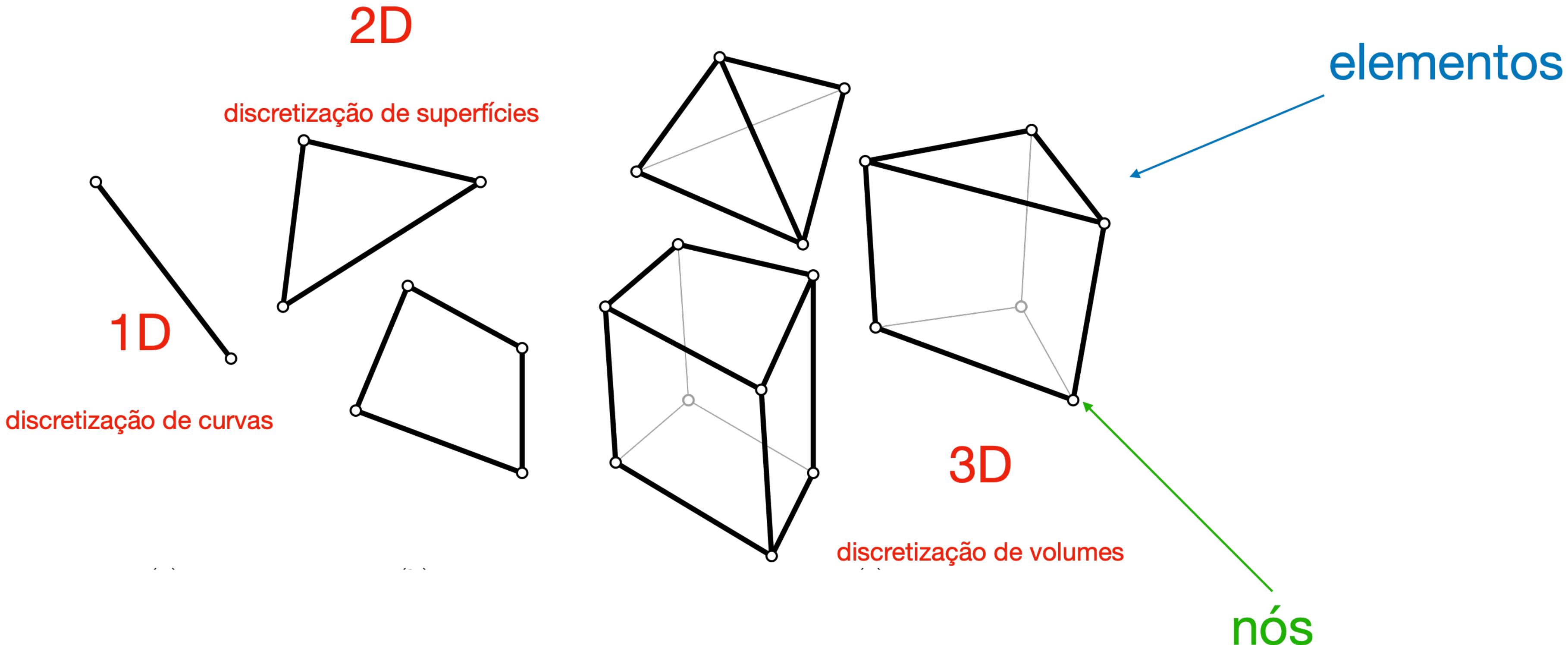


elementos

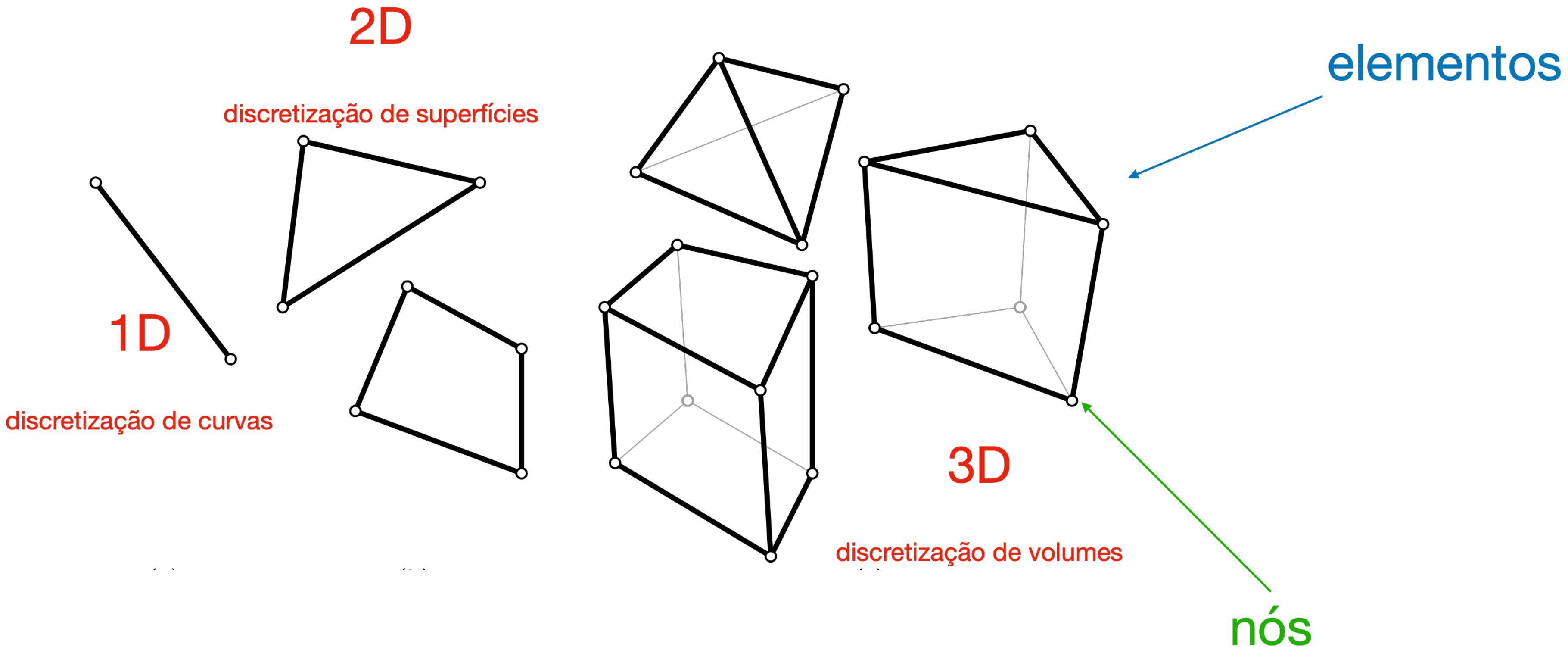
# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

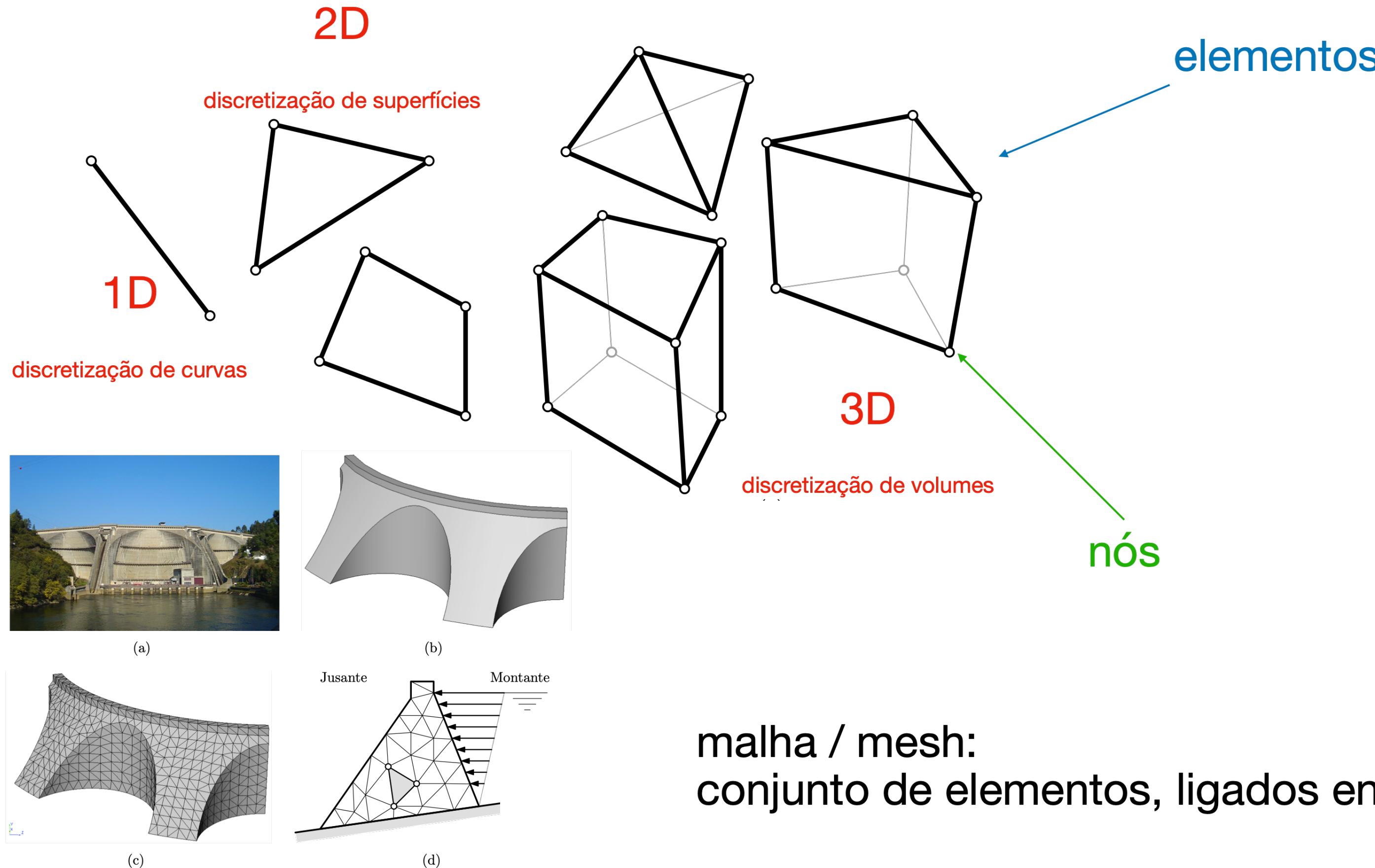


# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



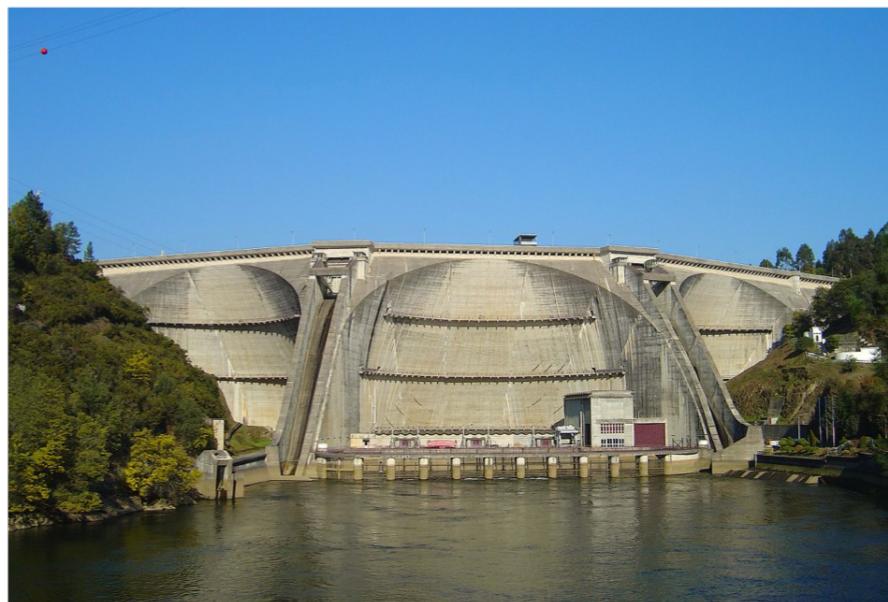
discretização / discretization: dividir uma linha, superfície, ou volume em elementos com uma dimensão pré-definida (elementos finitos)

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

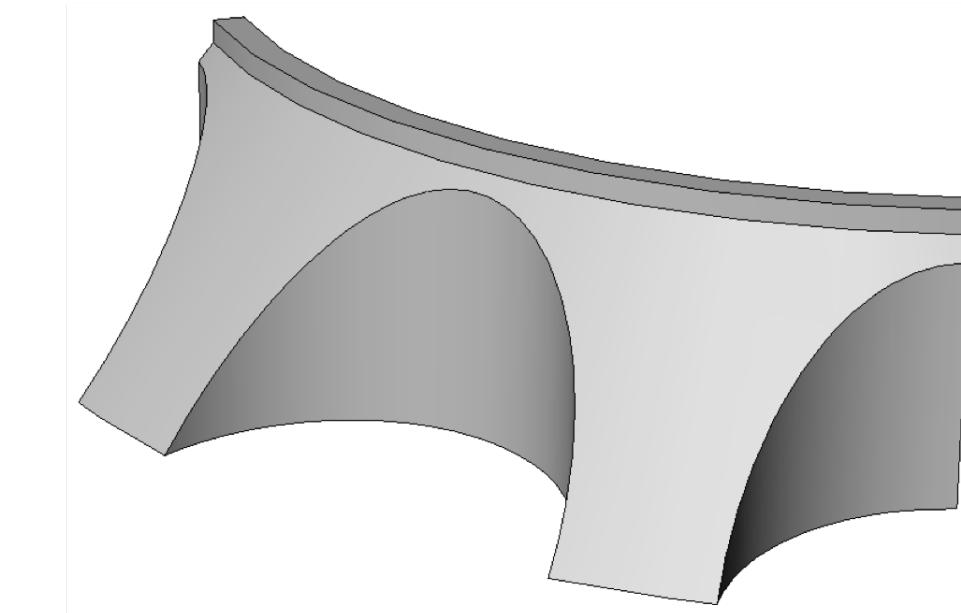


# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

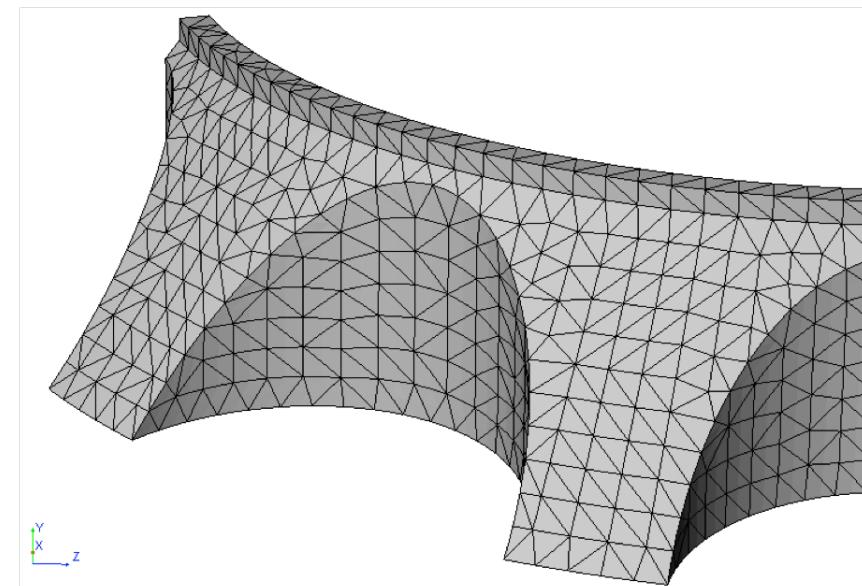
De volta a este exemplo...



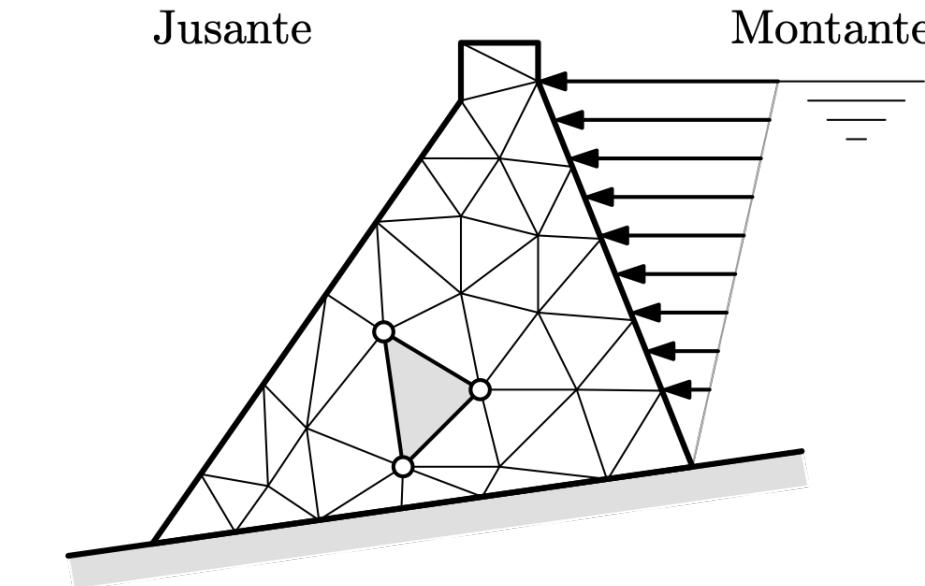
(a)



(b)



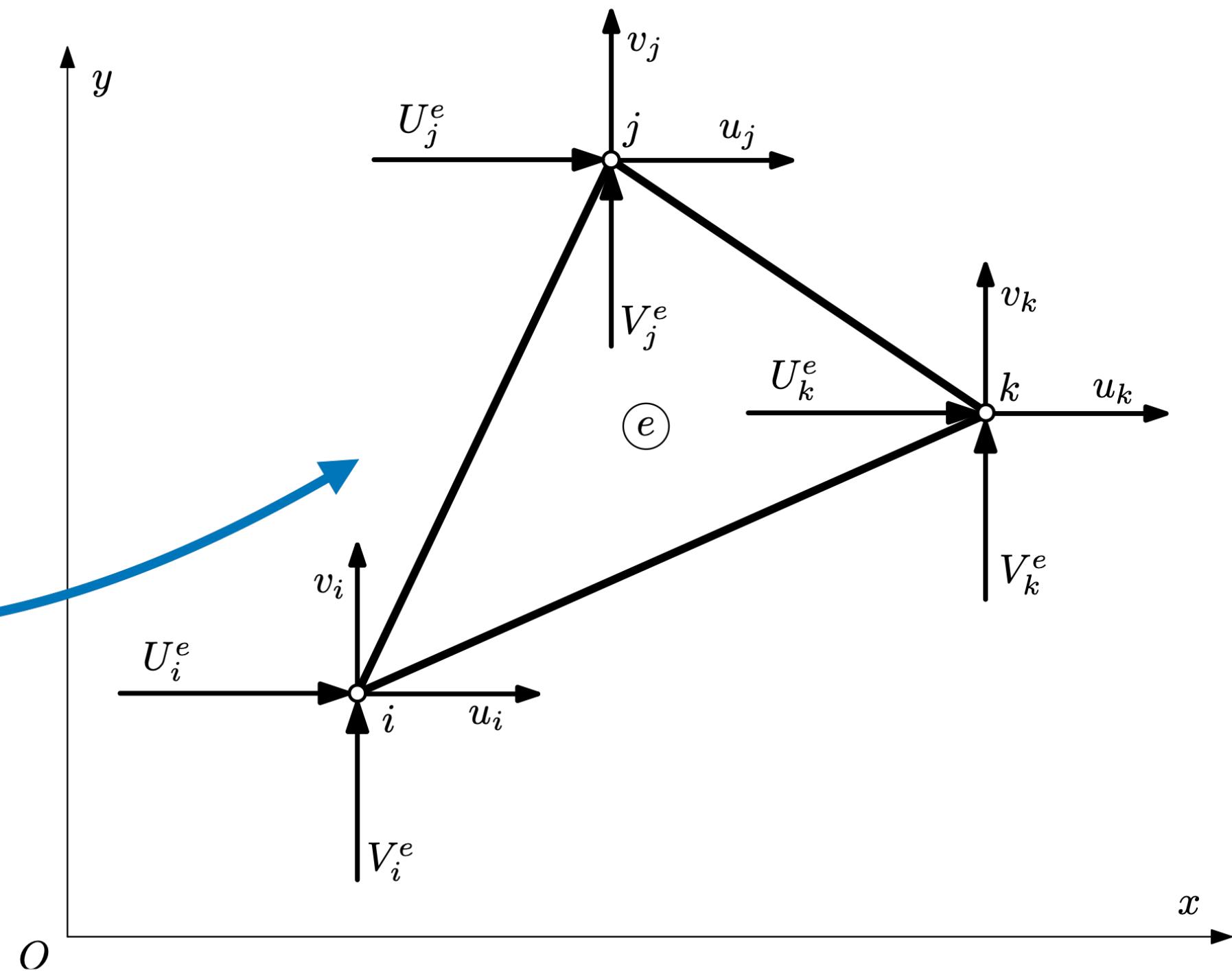
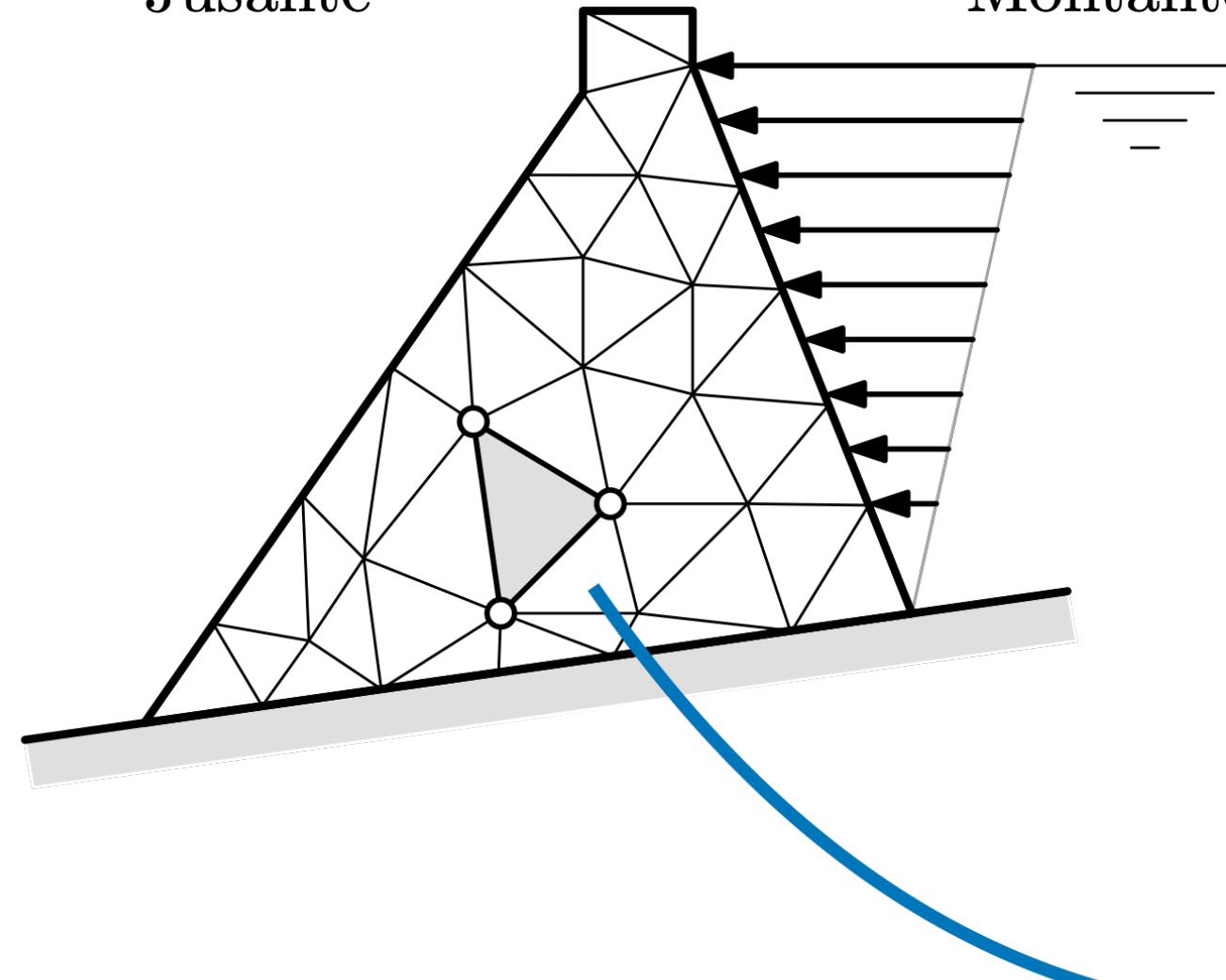
(c)



(d)

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

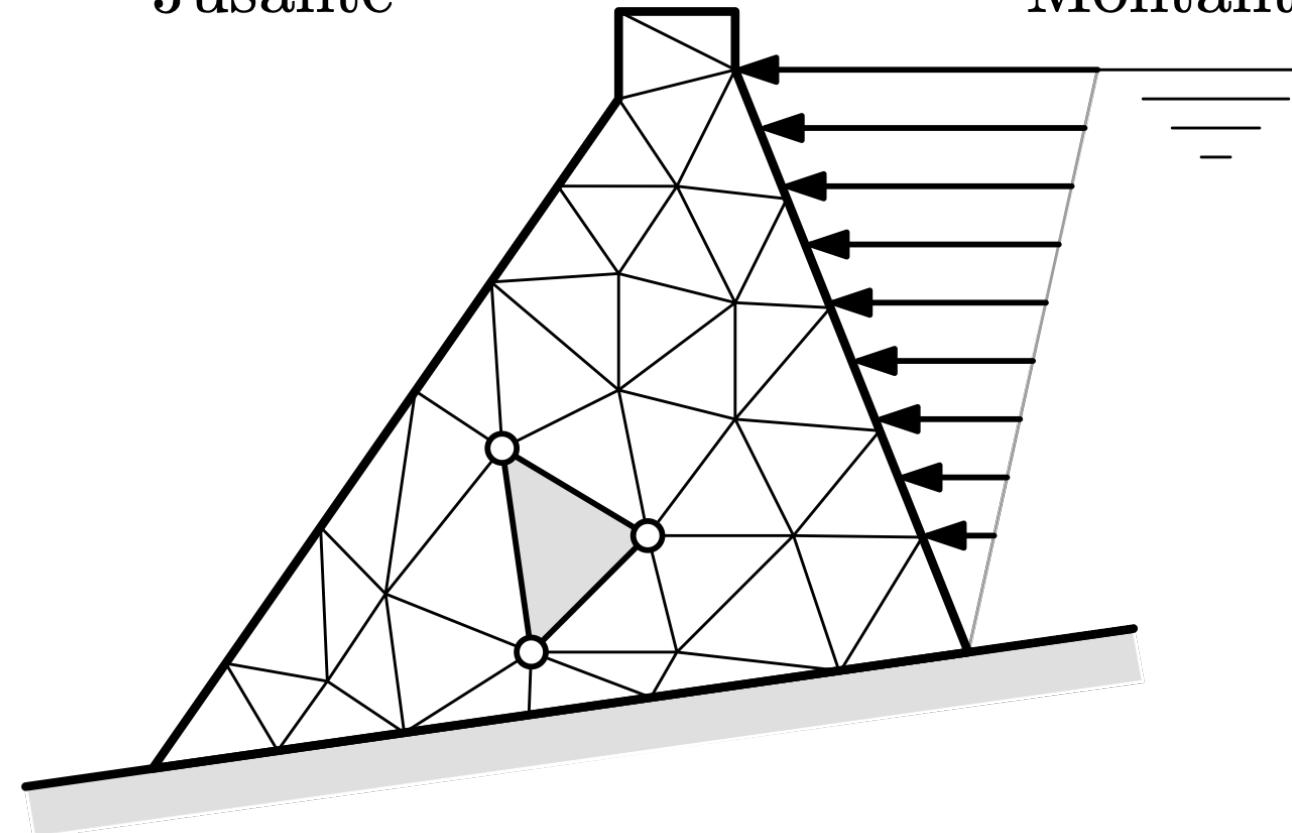
Jusante Montante



# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

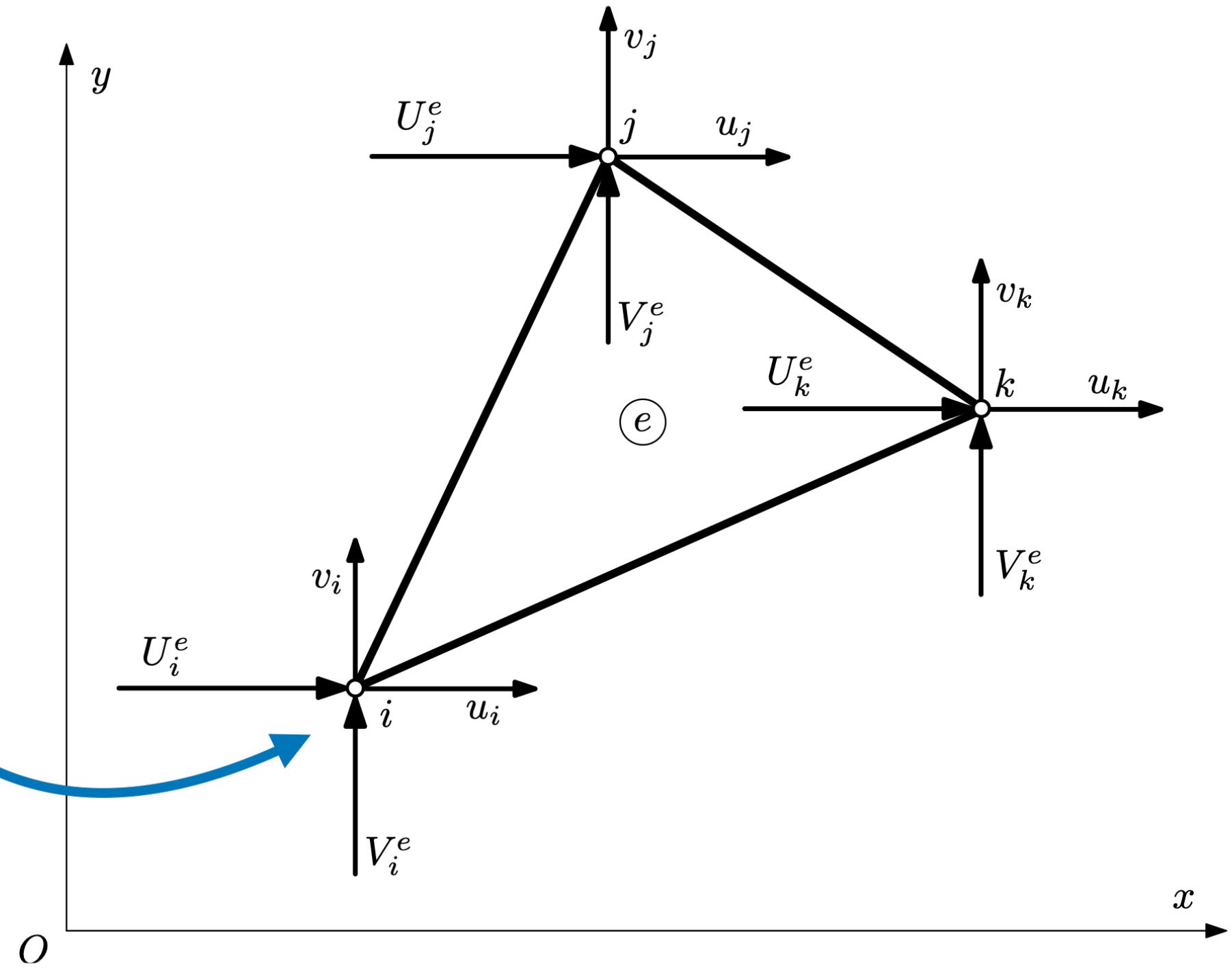
Jusante

Montante



$$\mathbf{f}_i^e = \begin{Bmatrix} U_i^e \\ V_i^e \end{Bmatrix}$$

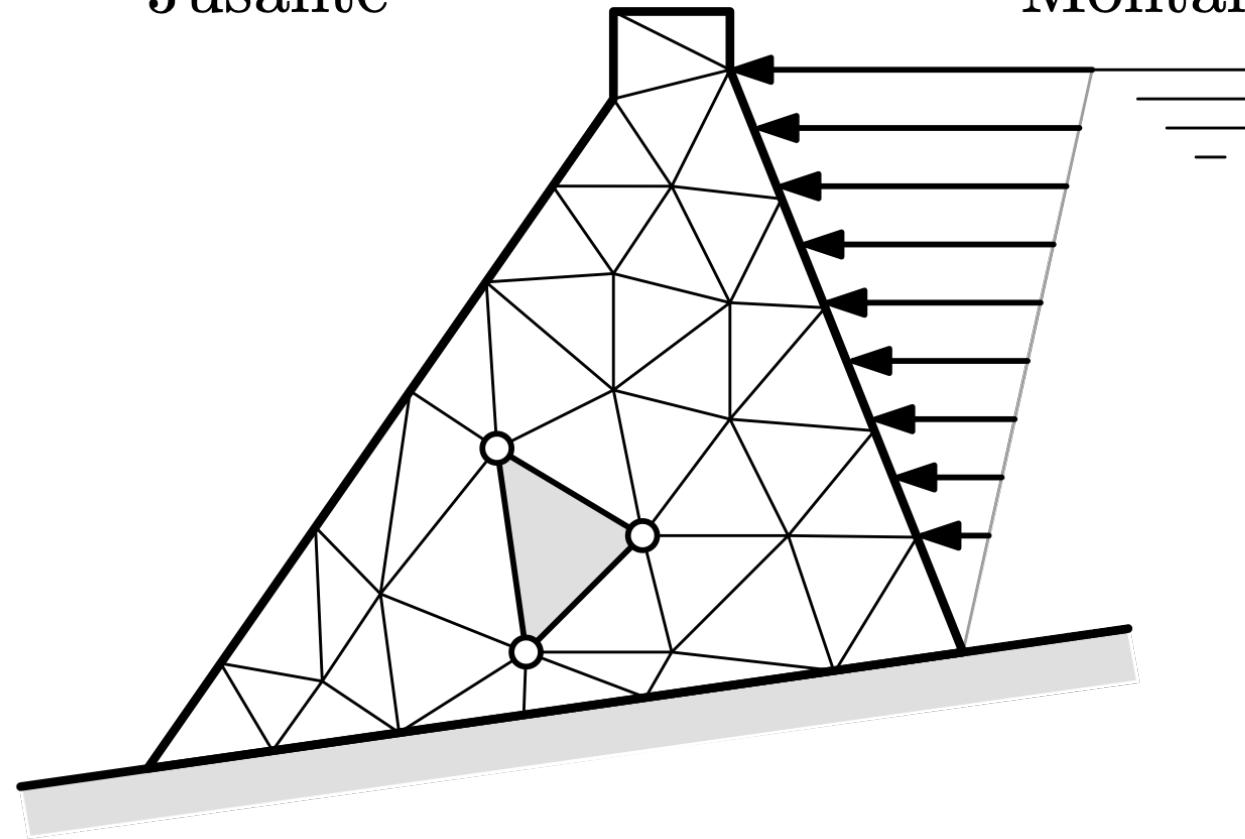
$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$



# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Jusante

Montante

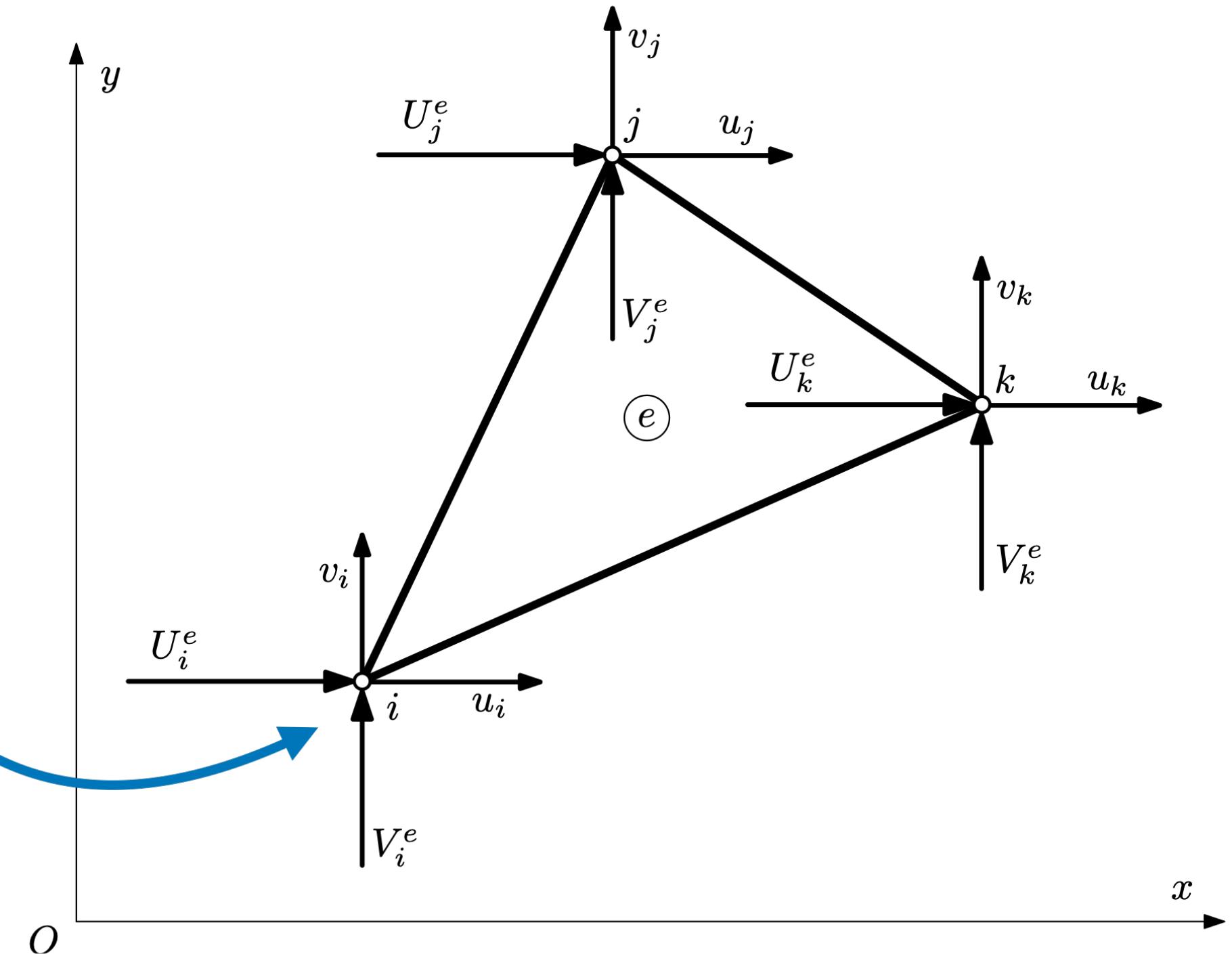


forças nodais

deslocamentos nodais  
(graus de liberdade)

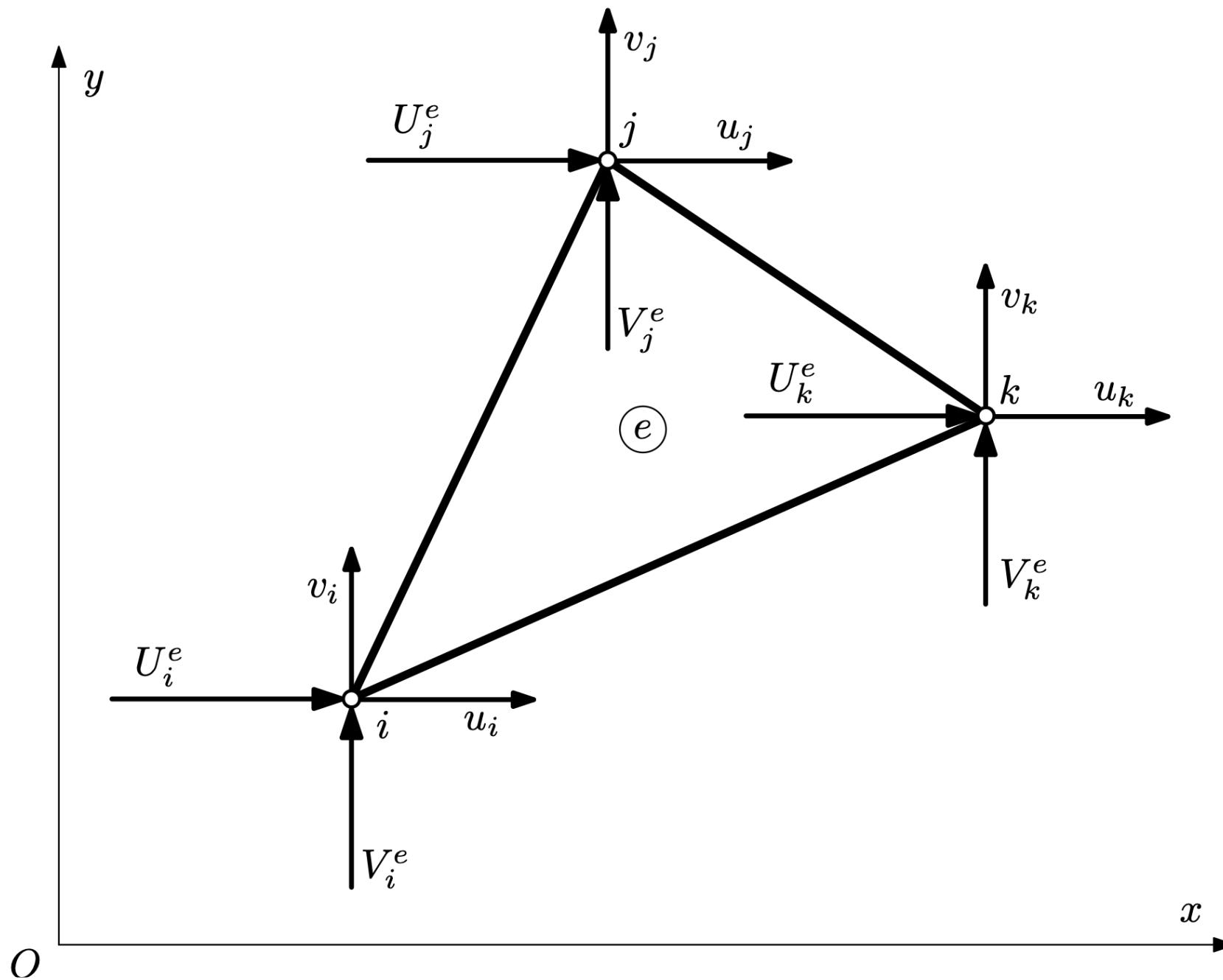
$$\mathbf{f}_i^e = \begin{Bmatrix} U_i^e \\ V_i^e \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$



# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

a nível do elemento, com os seus três nós...



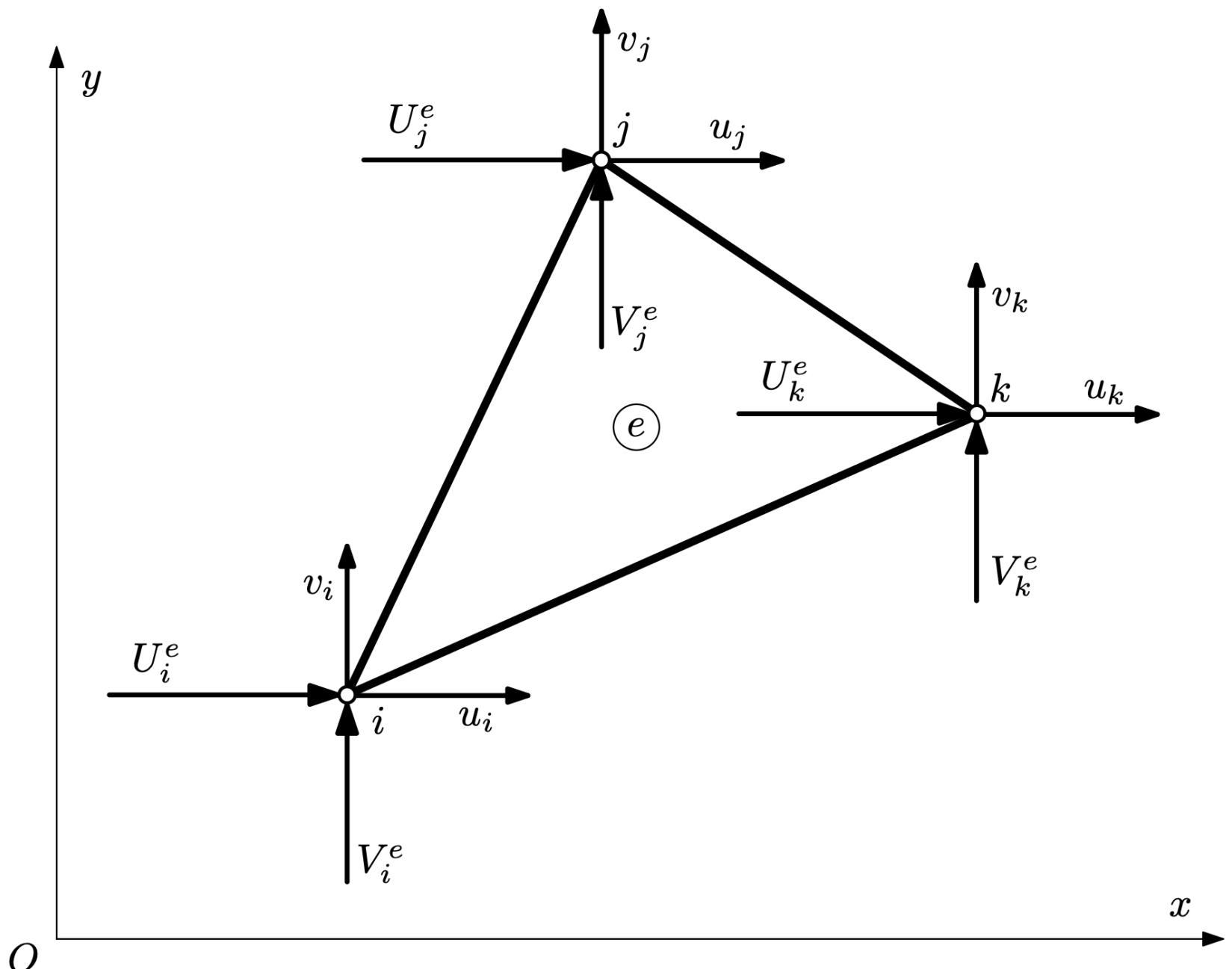
$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} U_i^e \\ V_i^e \\ U_j^e \\ V_j^e \\ U_k^e \\ V_k^e \end{Bmatrix}$$

forças nodais para o elemento (e)

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

deslocamentos nodais para o elemento (e)

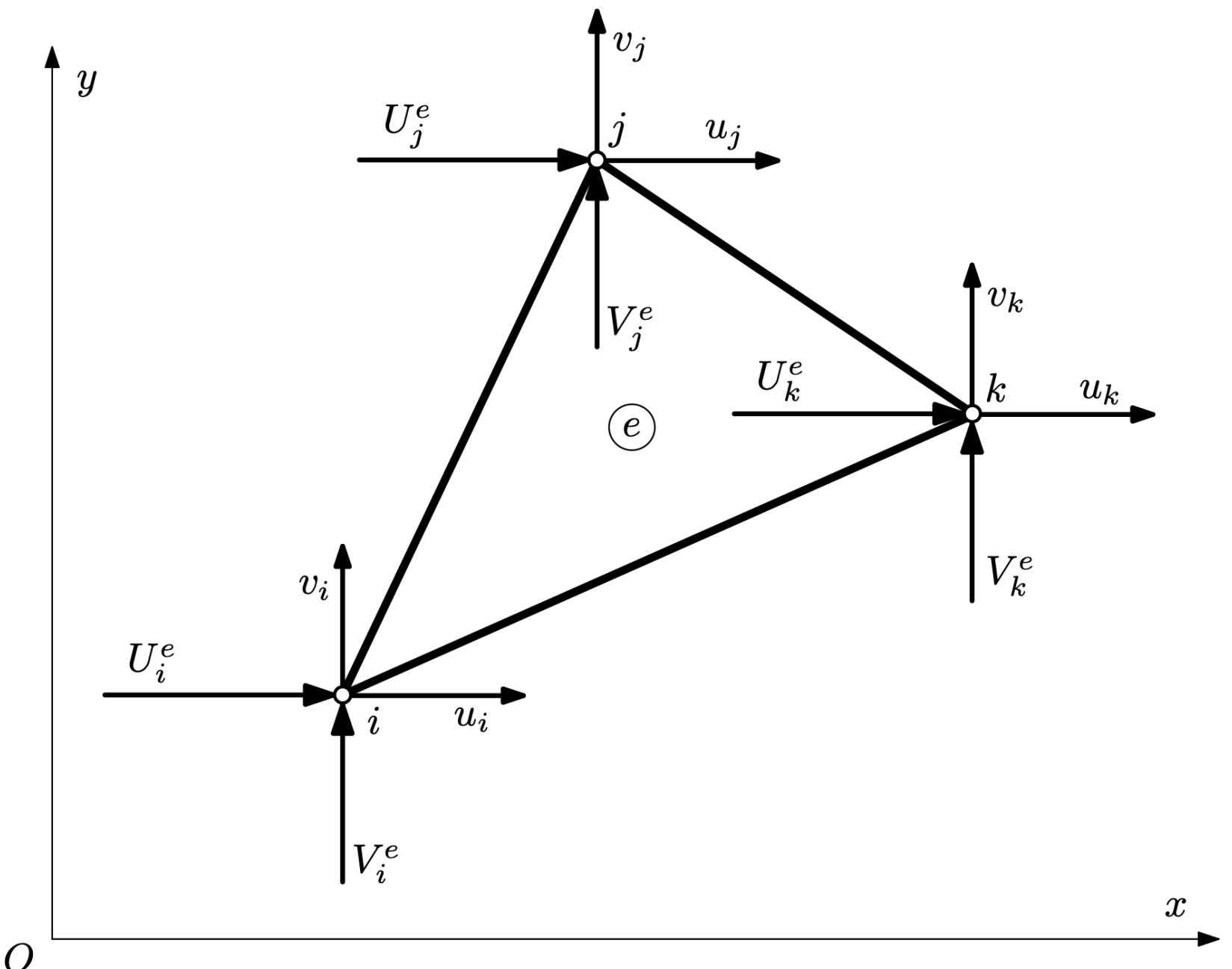
# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e$$

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e$$

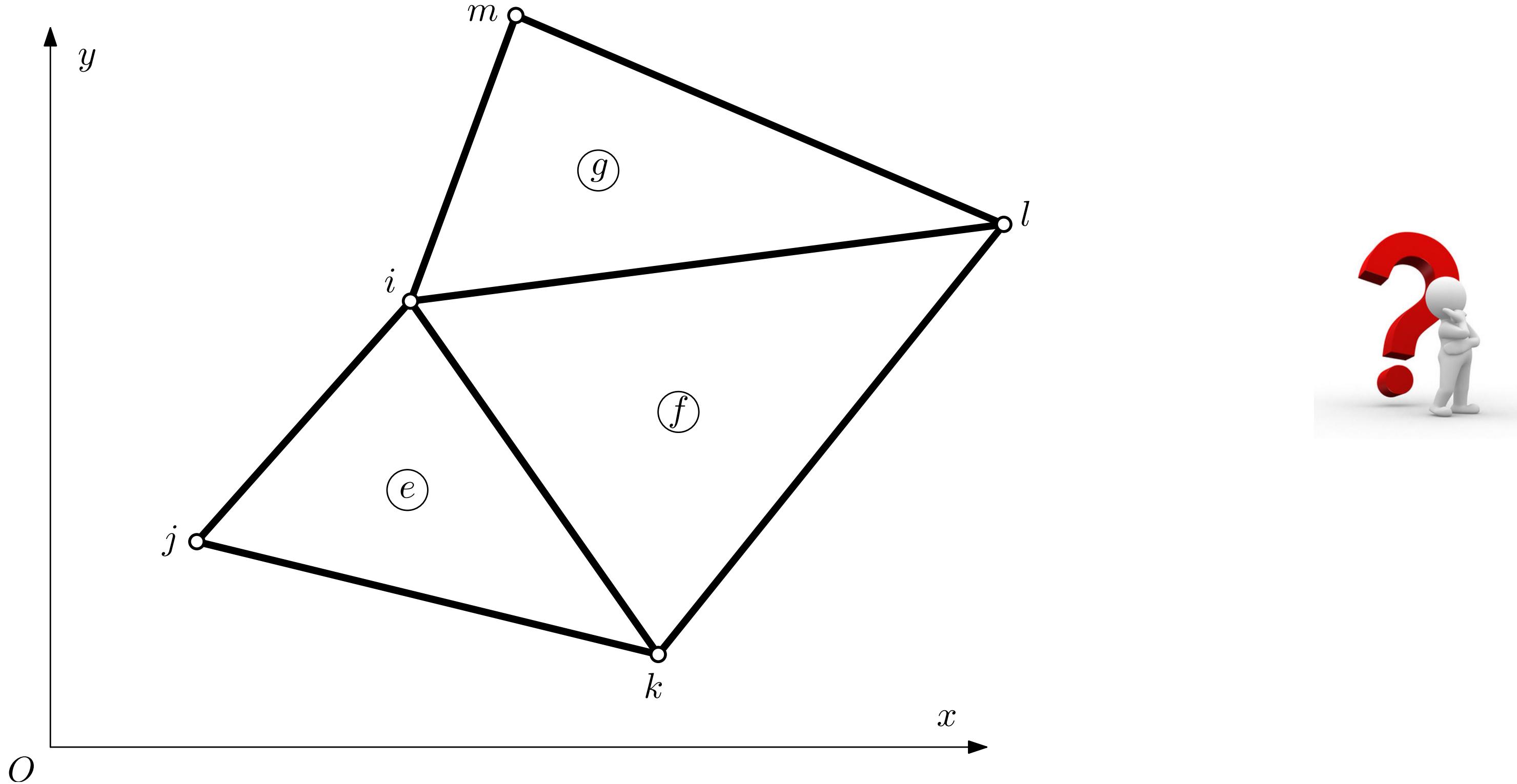
$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

matriz de rigidez

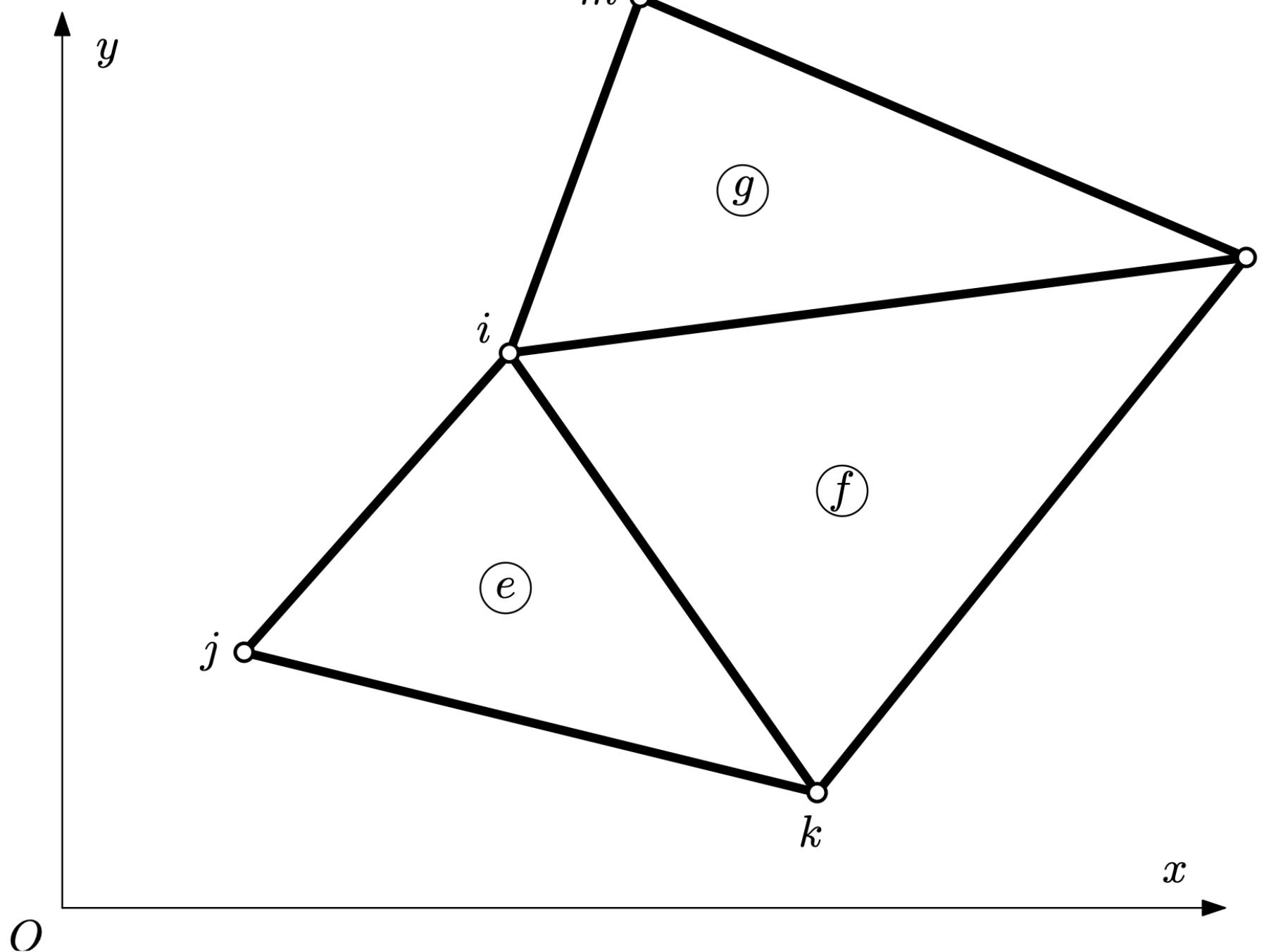
(material, geometria, etc.)

dimensão: 6x6

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



- três elementos ( $e, f, g$ ) na malha
- 5 nós ( $i, j, k, l, m$ ) na malha
- dois graus de liberdade por cada nó  
(deslocamento horizontal, deslocamento vertical)
- $2 \times 5 = 10$  graus de liberdade para a malha

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos



## Próximas etapas

introdução a conceitos relacionados com a resistência dos materiais

relação entre forças (input) e deslocamentos (output)

relação entre tensões (esforços internos) e deformações

resistência dos materiais como contexto para a criação e aplicação  
do Método dos Elementos Finitos

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

## Software comercial (CAD e CAE)

### SOLIDWORKS Desktop 3D CAD

For over 25 years, SOLIDWORKS® has been the trusted industry standard in design and engineering. Intuitive 3D design and product development solutions from SOLIDWORKS help you conceptualize, create, validate, communicate, manage, and transform your innovative ideas into great product designs.

- Create fast and accurate designs, including 3D models and 2D drawings of complex parts and assemblies
- Design for cost and manufacturing with cost estimation tools and manufacturability checks
- Interact with team members and control revisions with standardized data management tools
- Eliminate errors and rework by using integrated motion and stress analysis tools

### Explore SOLIDWORKS Desktop 3D CAD Solutions



PRODUCT • ON-PREMISES

#### SOLIDWORKS 3D CAD

SOLIDWORKS® 3D CAD solutions provide easy-to-learn, yet extremely powerful functionality that shortens ...



DATASHEET

#### SOLIDWORKS 3D CAD Datasheet

Compare the different versions of SOLIDWORKS 3D CAD and see which ...



VIDEO

#### First Look: SOLIDWORKS CAD

Take a look at what SOLIDWORKS 3D CAD can do for you and your business



SOLIDWORKS

#### SOLIDWORKS 3D CAD Customer Stories

Learn how different customers have found success with SOLIDWORKS 3D ...

## Software comercial (CAD e CAE): SolidWorks



The image shows the header of the University of Aveiro (UA) website. It features a black navigation bar at the top with the university's logo and name. Below this is a green footer bar containing links to various services. The main content area has a breadcrumb navigation at the top.

universidade de aveiro  
theoria poesis praxis

SOBRE A UA | ESTUDAR | VIVER | INVESTIGAR | COOPERAR | INTERNACIONAL | ⓘ | EN | Q

serviços de tecnologias de informação e comunicação

sobre | bud@ua | catálogo de serviços | manuais | ver mais

stic / SolidWorks ▾

### SolidWorks

O licenciamento do Solidworks disponibilizado para a UA inclui o acesso para utilização pessoal, em contexto de ensino e aprendizagem por parte dos seus professores e estudantes, através de duas modalidades:

#### SOLIDWORKS Student Premium (SSP)

*Procedimento:*

- A partir de <https://www.solidworks.com/support/community-download#no-back>
- Indicar nome, email e Student em cima
- Introduzir em 'I already have a Serial Number that starts with 9020': Yes
- Escolher a versão 2021-2022 em 'Academic Version'
- Após o download, instalar com serial number: 9020004909529005CPRJFM46

<https://www.ua.pt/pt/stic/solidworks>

## Próximas etapas

introdução a conceitos relacionados com a resistência dos materiais

relação entre forças (input) e deslocamentos (output)

relação entre tensões (esforços internos) e deformações

resistência dos materiais como contexto para a criação e aplicação  
do Método dos Elementos Finitos

# Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Competências Transferíveis 2  
Sessão 02

Robert Valente ([robertt@ua.pt](mailto:robertt@ua.pt))