

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Competências Transferíveis 2
Sessão 04

Robert Valente (robertt@ua.pt)

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Tópicos para hoje

tensões e deformações

assemblagem e estrutura de um código MEF

análise linear vs. análise não linear

Tensões e Deformações

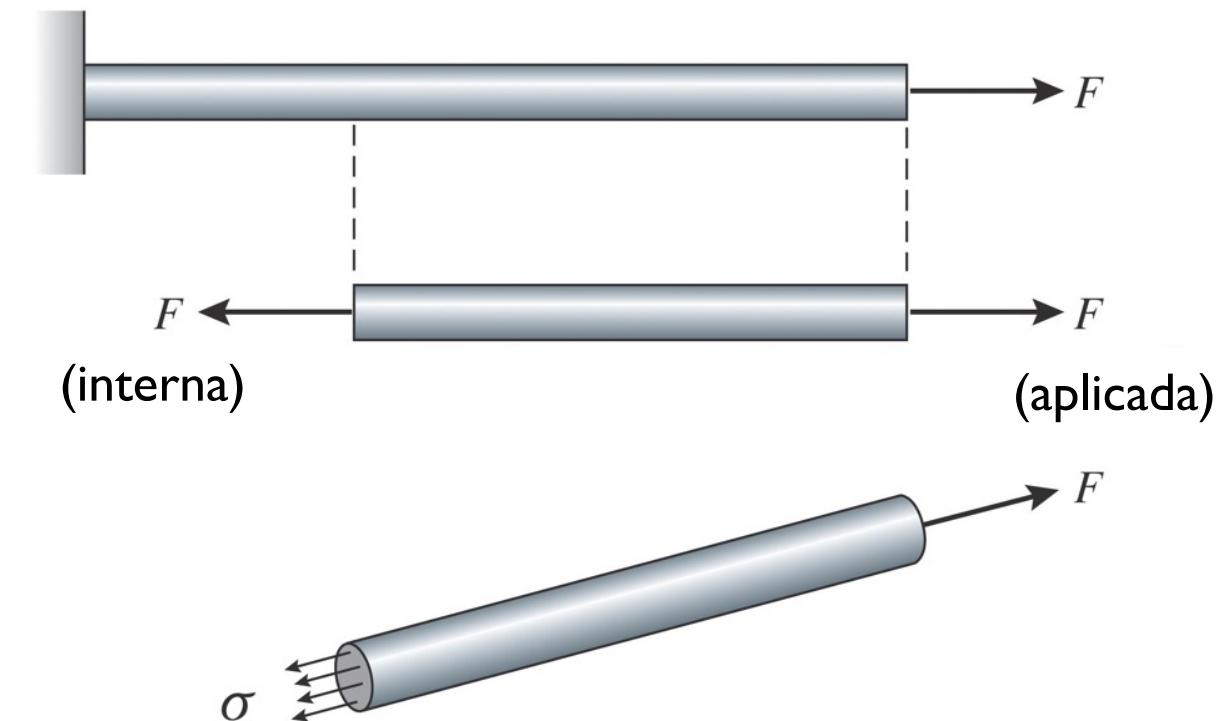
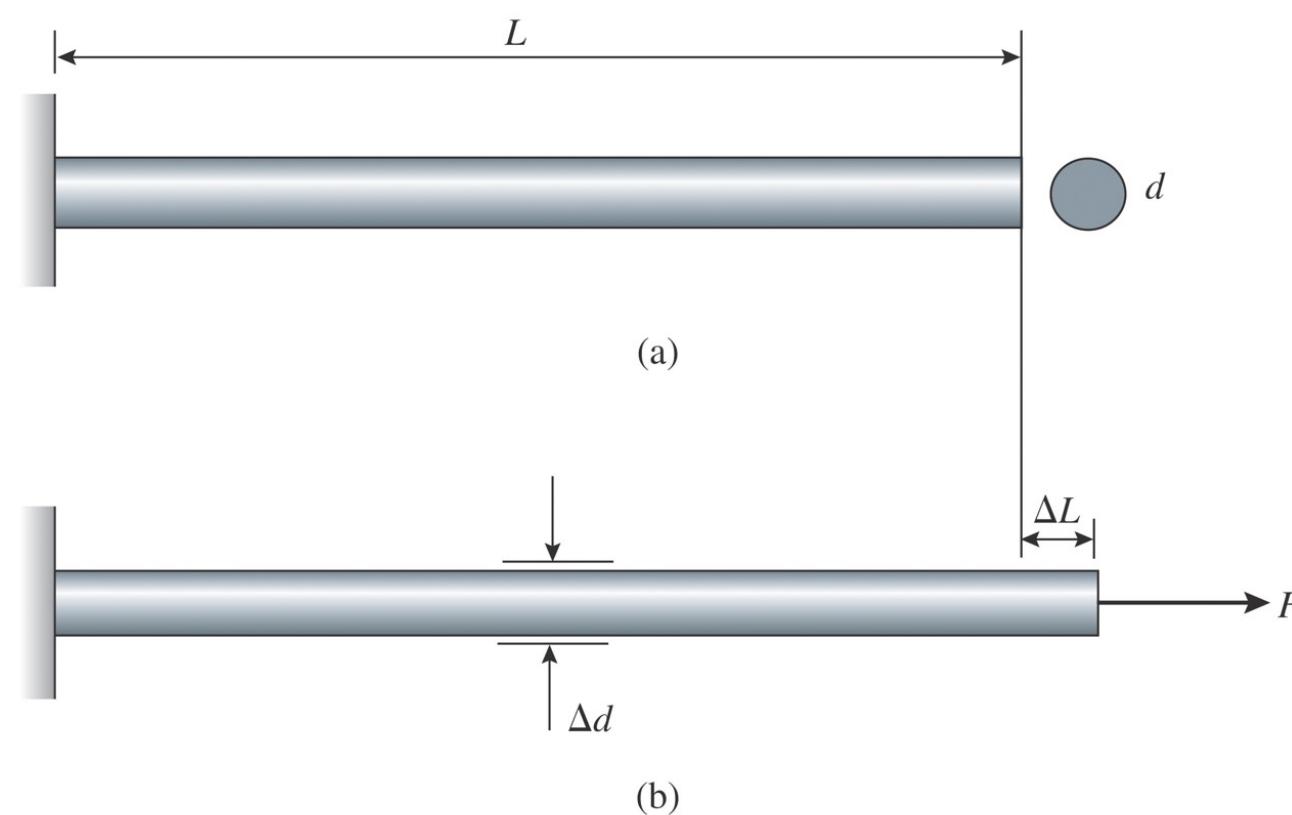
Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Tensão
normal

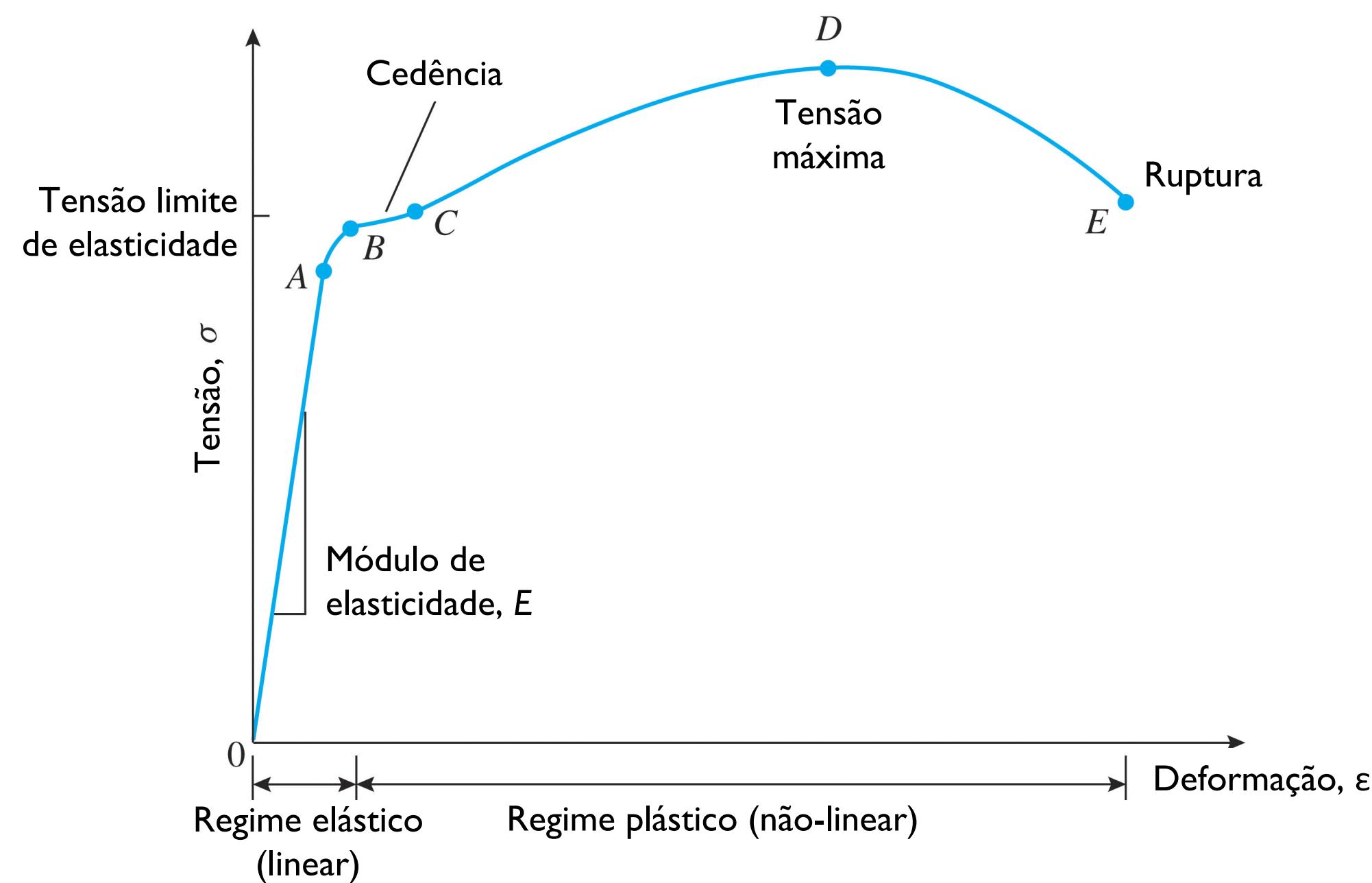
Tração



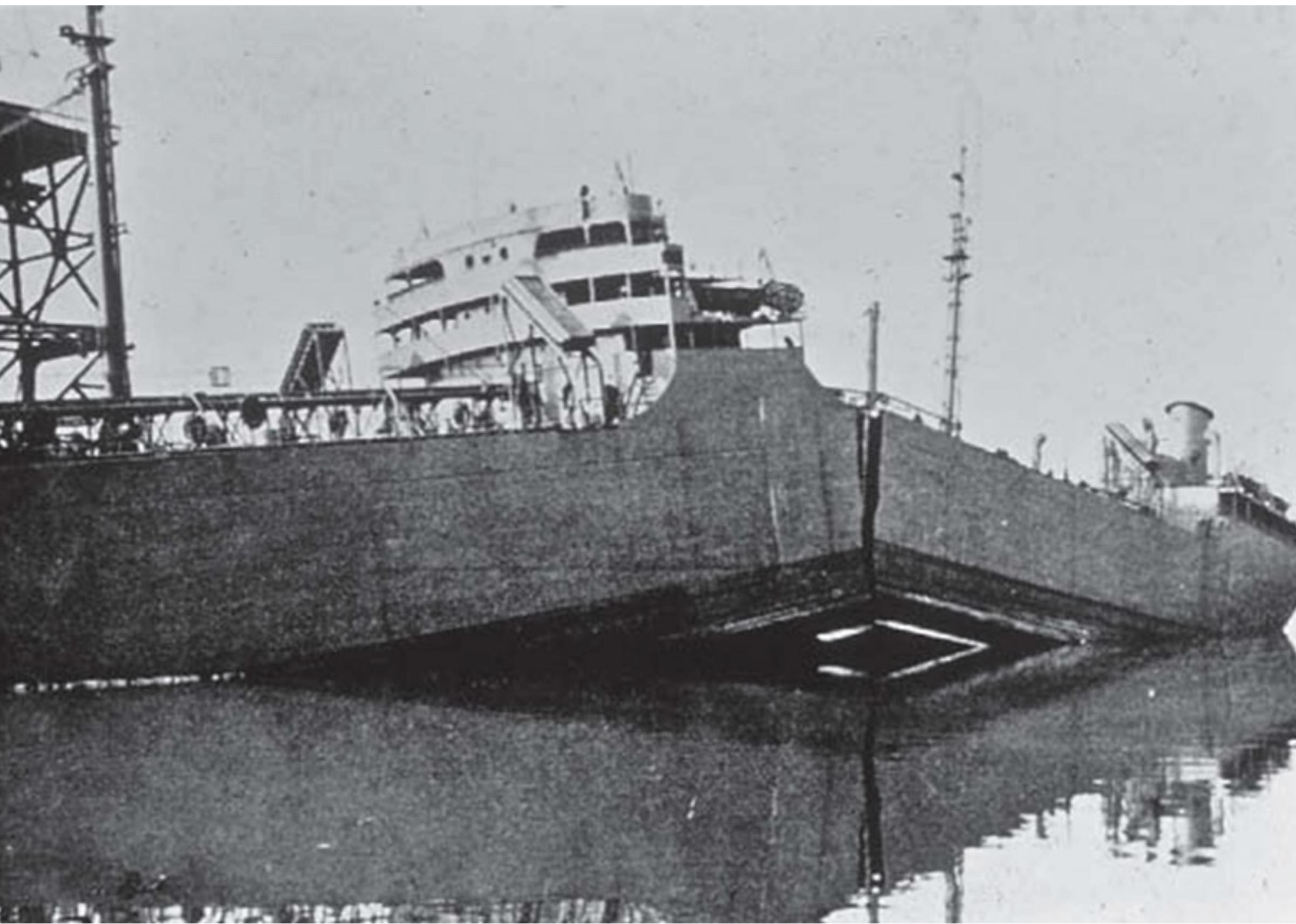
Compressão



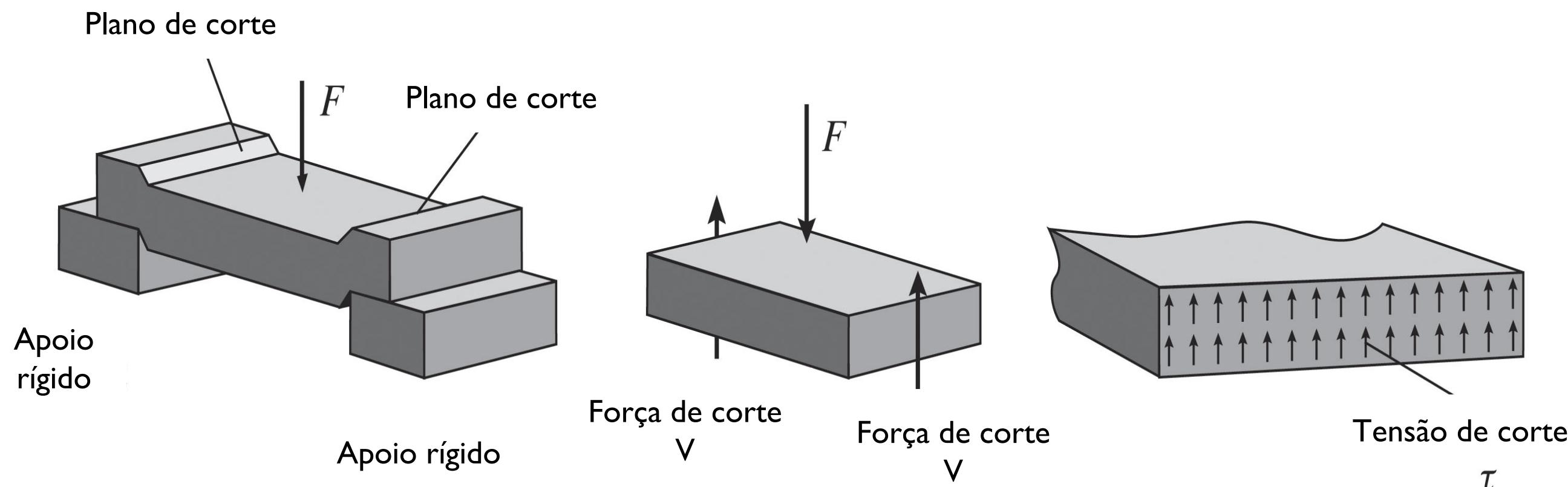
Materiais dúcteis: uma curva típica



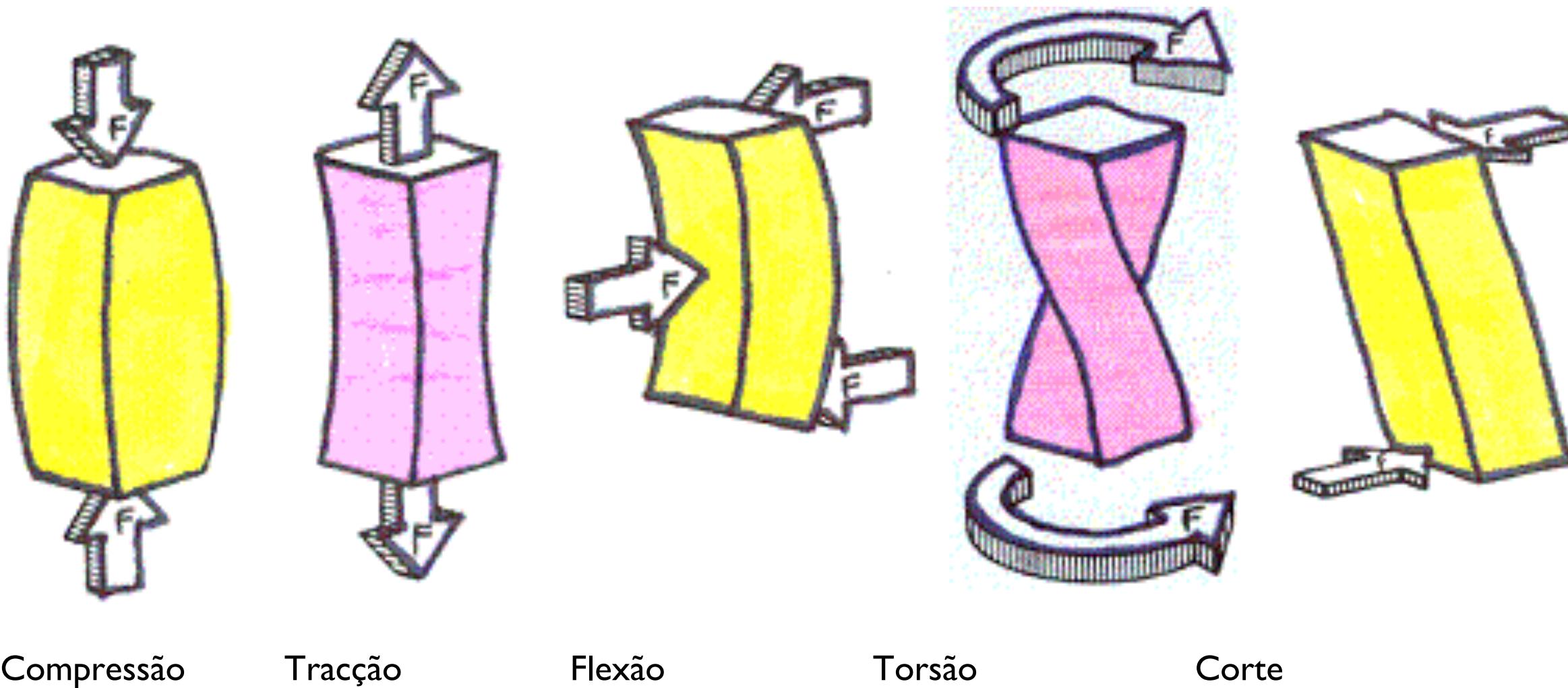
Introdução ao Método dos Elementos Finitos



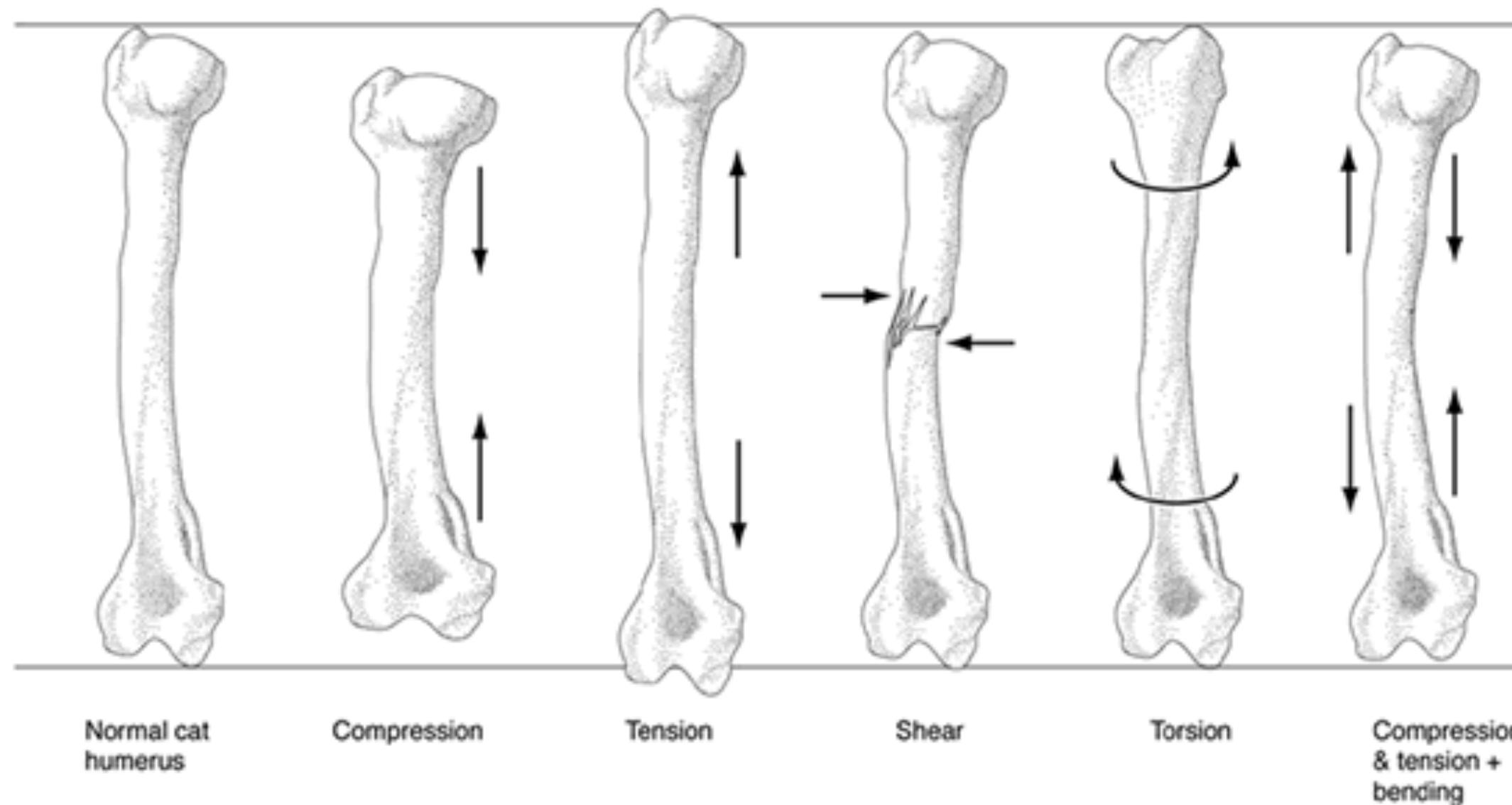
Tensão de corte



Tipos de carregamento (solicitações, esforços)



Tipos de carregamento (solicitações, esforços)



Tensão de projeto / Tensão equivalente / Tensão de von Mises

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \frac{\sigma_0}{C_s}$$

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Material		Ultimate Strength, S_u		Yield Strength, S_y	
		ksi	MPa	ksi	MPa
Aluminum alloys	3003-A	16	110	6	41
	6061-A	18	124	8	55
	6061-T6	45	310	40	276
Copper alloys	Naval brass-A	54	376	17	117
	Cartridge brass-CR	76	524	63	434
Steel alloys	1020-HR	66	455	42	290
	1045-HR	92	638	60	414
	4340-HR	151	1041	132	910
Stainless steels	303-A	87	600	35	241
	316-A	84	579	42	290
	440C-A	110	759	70	483
Titanium alloy	Commercial	80	551	70	482

*The numerical values given are representative, and values for specific materials could vary with composition and processing. A = annealed, HR = hot-rolled, CR = cold-rolled, and T = tempered.

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Tension and compression

Stress

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Strain

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Material response

$$\sigma = E\varepsilon$$

Rod deformation

Elongation

$$\Delta L = \frac{FL}{EA}$$

Diameter change

$$\Delta d = -\nu d \frac{\Delta L}{L}$$

Hooke's law

$$F = k\Delta L$$

Stiffness

$$k = \frac{EA}{L}$$

Shear

Stress

$$\tau = \frac{V}{A}$$

Yield strength

$$S_{sy} = \frac{S_y}{2}$$

Factor of safety

Tension

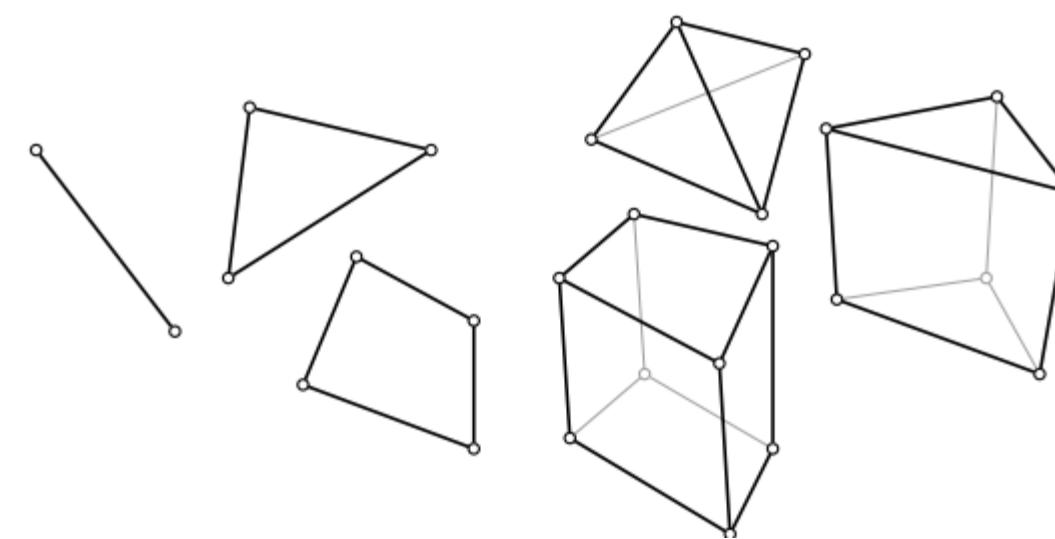
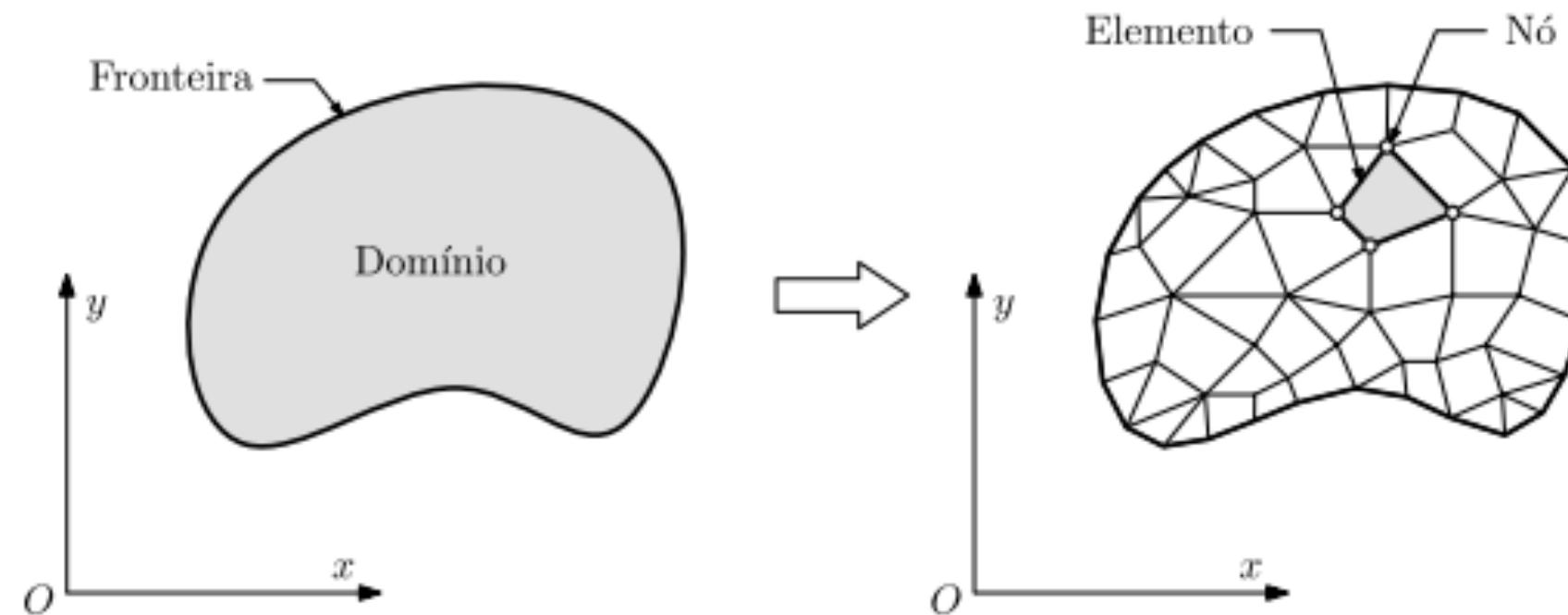
$$n_{tension} = \frac{S_y}{\sigma}$$

Shear

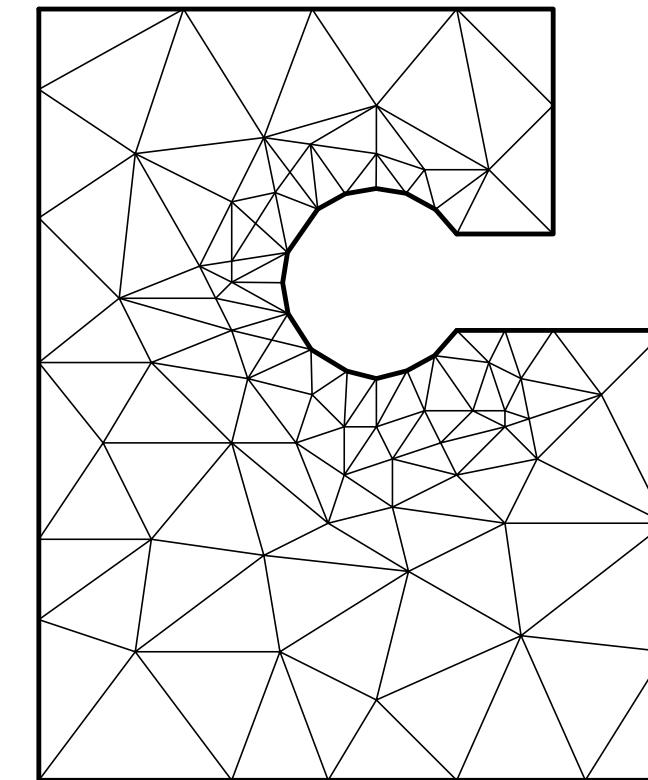
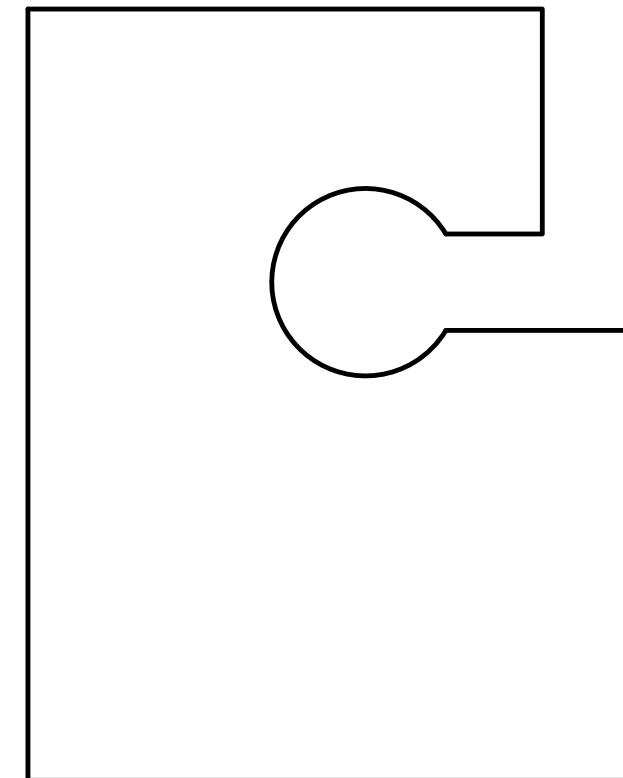
$$n_{shear} = \frac{S_{sy}}{\tau}$$

De volta ao MEF: assemblagem

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

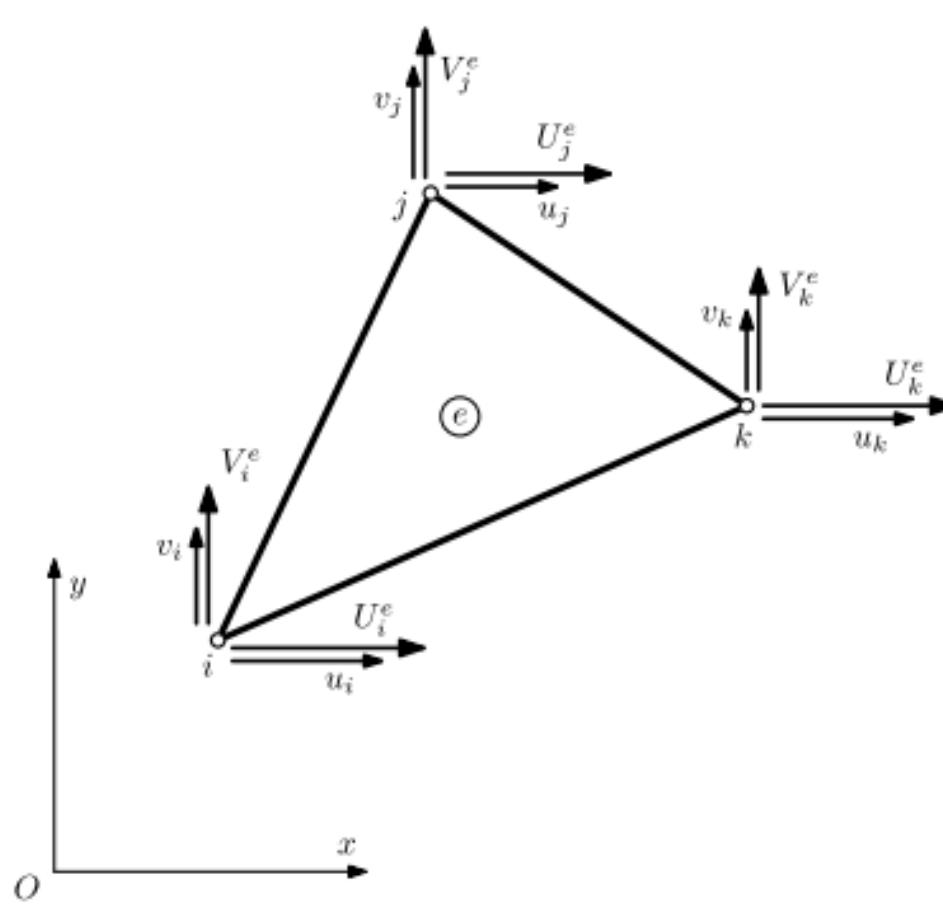


Introdução ao Método dos Elementos Finitos



Introdução ao Método dos Elementos Finitos

A nível de cada elemento finito...



graus de liberdade nodais

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

forças nodais

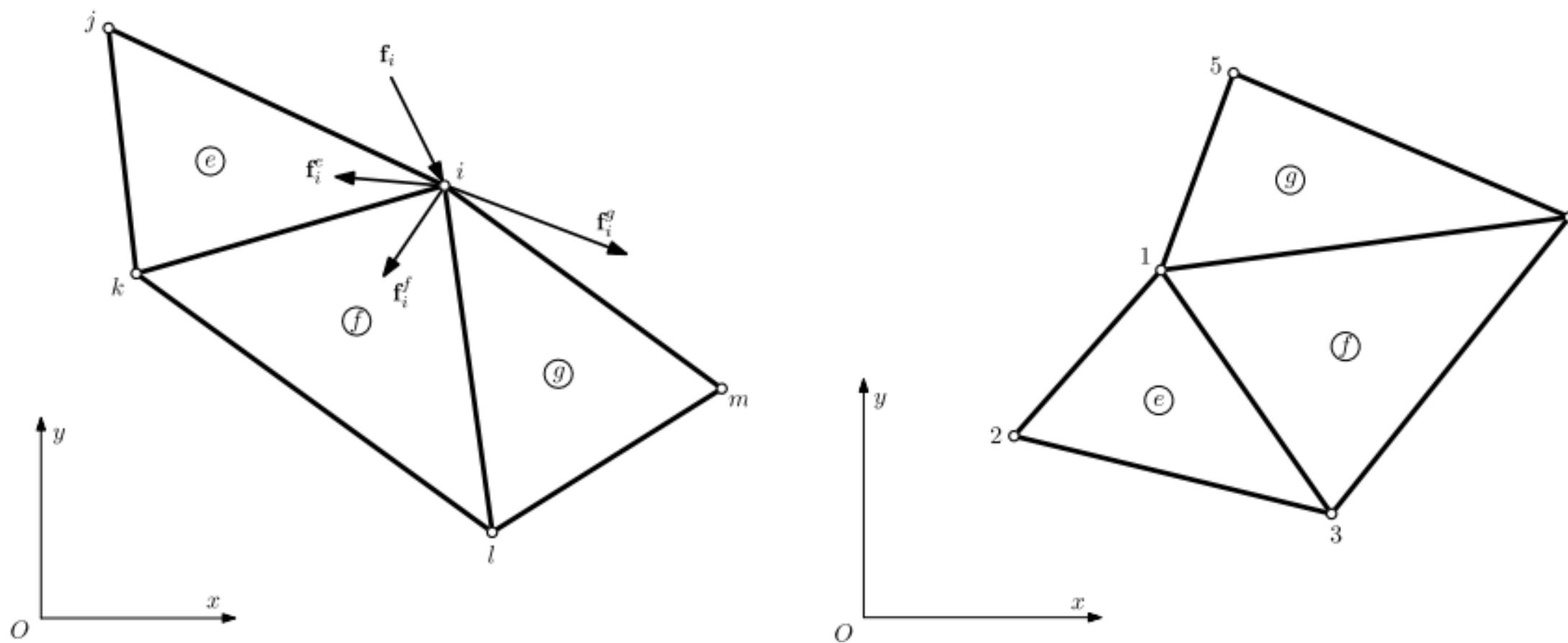
$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} U_i^e \\ V_i^e \\ U_j^e \\ V_j^e \\ U_k^e \\ V_k^e \end{Bmatrix}$$

Equação de equilíbrio

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e$$

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

A nível de uma malha com mais do que um elemento...

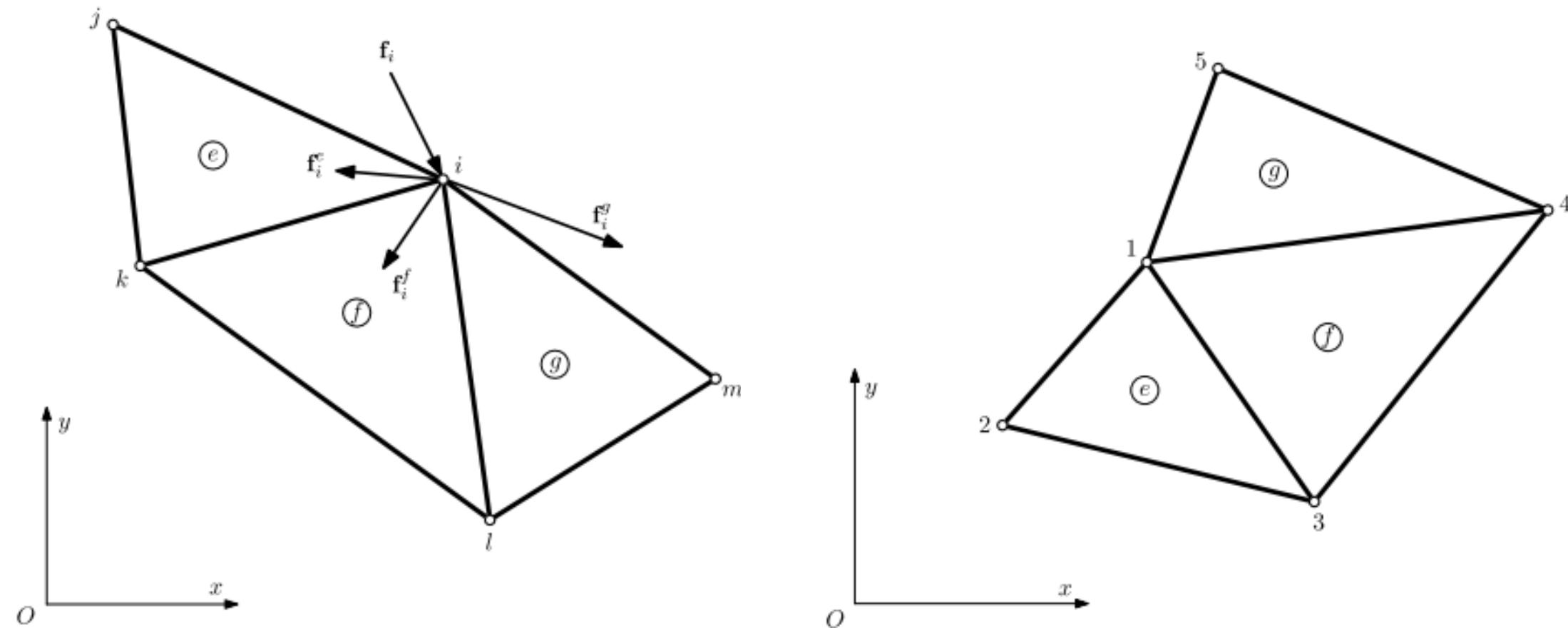


$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^f = \begin{bmatrix} k_{11}^f & k_{13}^f & k_{14}^f \\ k_{31}^f & k_{33}^f & k_{34}^f \\ k_{41}^f & k_{43}^f & k_{44}^f \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^g = \begin{bmatrix} k_{11}^g & k_{14}^g & k_{15}^g \\ k_{41}^g & k_{44}^g & k_{45}^g \\ k_{51}^g & k_{54}^g & k_{55}^g \end{bmatrix}$$

Assemblagem (agrupamento) das várias contribuições...



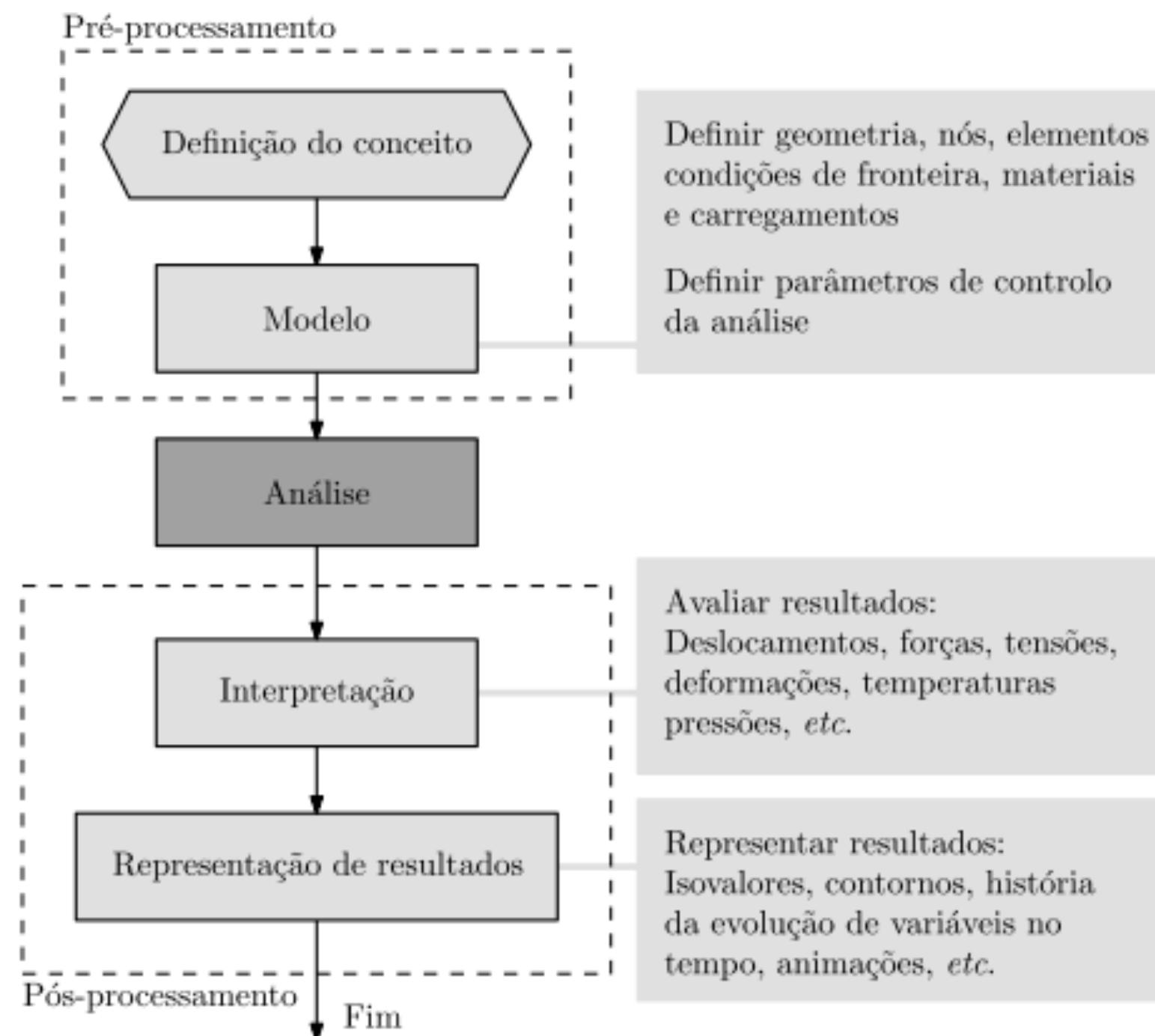
$$\begin{bmatrix}
 k_{11}^e + k_{11}^f + k_{11}^g & k_{12}^e & k_{13}^e + k_{13}^f & k_{14}^f + k_{14}^g & k_{15}^g \\
 k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e & 0 & 0 \\
 k_{31}^e + k_{31}^f & k_{32}^e & k_{33}^e + k_{33}^f & k_{34}^f & 0 \\
 k_{41}^f + k_{41}^g & 0 & k_{43}^f & k_{44}^f + k_{44}^g & k_{45}^g \\
 k_{51}^g & 0 & 0 & k_{54}^g & k_{55}^g
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5
 \end{Bmatrix}
 \quad
 f = \begin{Bmatrix}
 f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5
 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}
 f_1^e + f_1^f + f_1^g \\ f_2^e \\ f_3^e + f_3^f \\ f_4^f + f_4^g \\ f_5^g
 \end{Bmatrix}$$

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Competências Transferíveis 2
Sessão 05

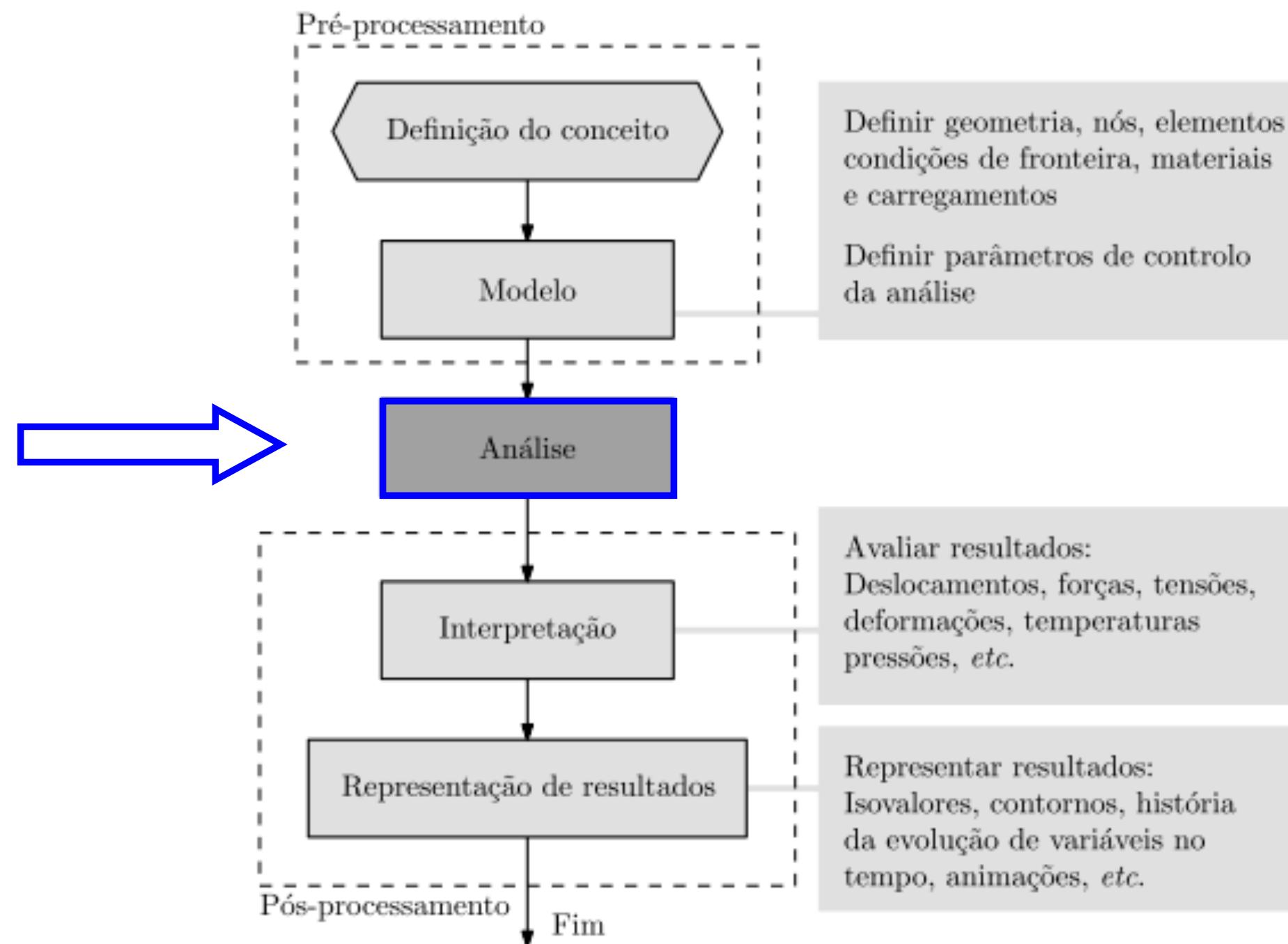
Robert Valente (robertt@ua.pt)

Estrutura típica de um *software MEF*



Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Estrutura típica de um *software MEF*



análise linear vs. análise não linear

Introdução ao Método dos Elementos Finitos



a natureza é não linear...

Fontes de não linearidades

Fontes de não linearidades

grandes deformações, extensões e/ou mudanças de forma:

não linearidade geométrica

Fontes de não linearidades

grandes deformações, extensões e/ou mudanças de forma:

não linearidade geométrica

deformações não recuperáveis após remoção das cargas aplicadas:

não linearidade do material

Fontes de não linearidades

grandes deformações, extensões e/ou mudanças de forma:

não linearidade geométrica

deformações não recuperáveis após remoção das cargas aplicadas:

não linearidade do material

condições de contorno que variam com o tempo:

não linearidades de contacto

Fontes de não linearidades

grandes deformações, extensões e/ou mudanças de forma:

não linearidade geométrica

deformações não recuperáveis após remoção das cargas aplicadas:

não linearidade do material

condições de contorno que variam com o tempo:

não linearidades de contacto

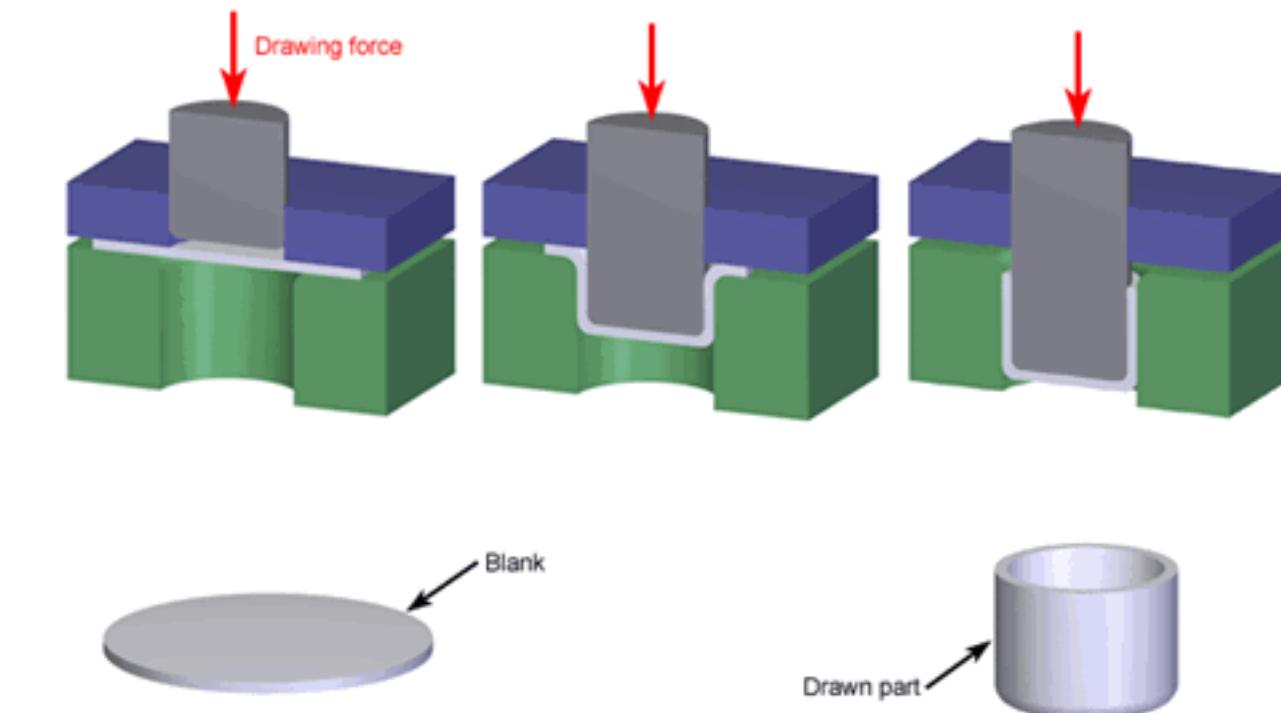
outras fontes de não linearidades (material):

fractura, desgaste, mudanças de fases, etc...

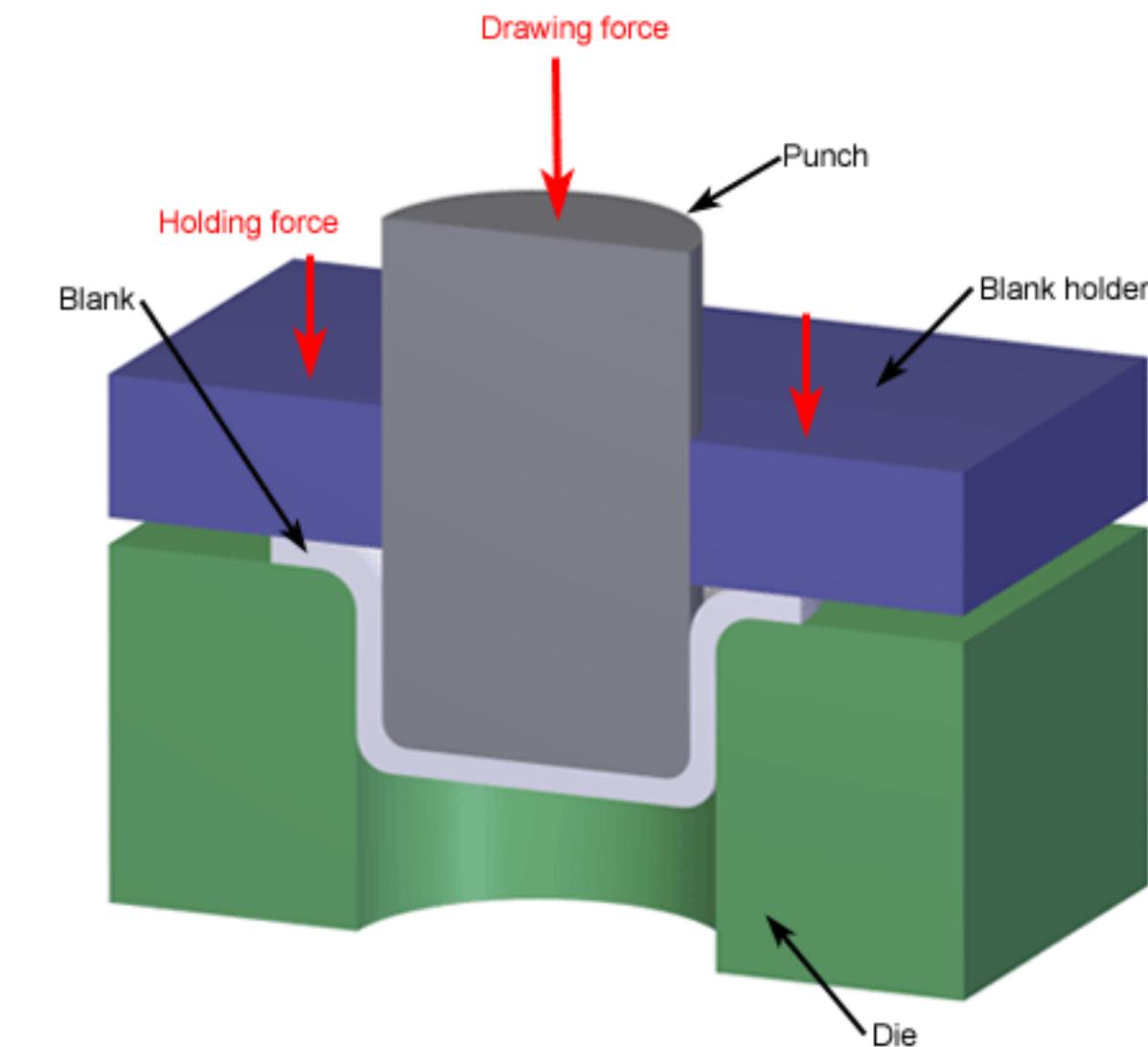
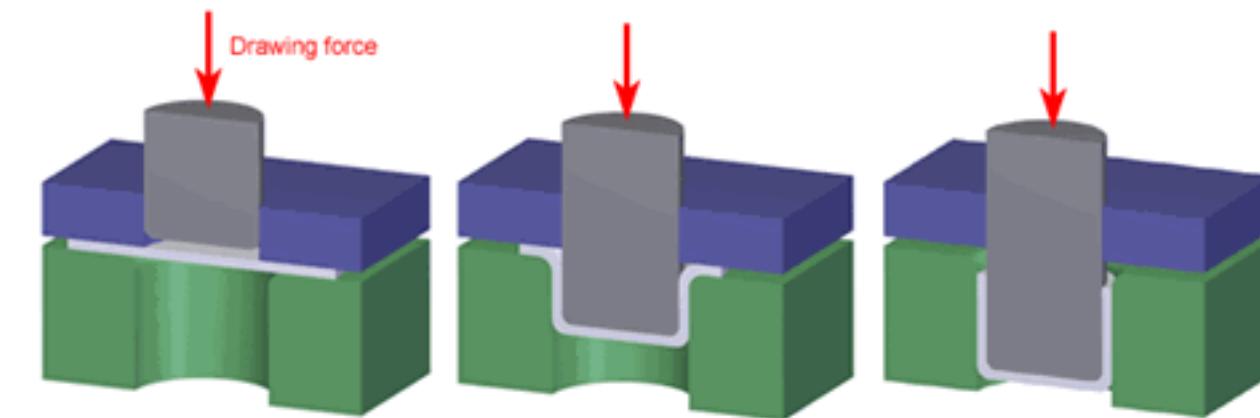
Introdução ao Método dos Elementos Finitos



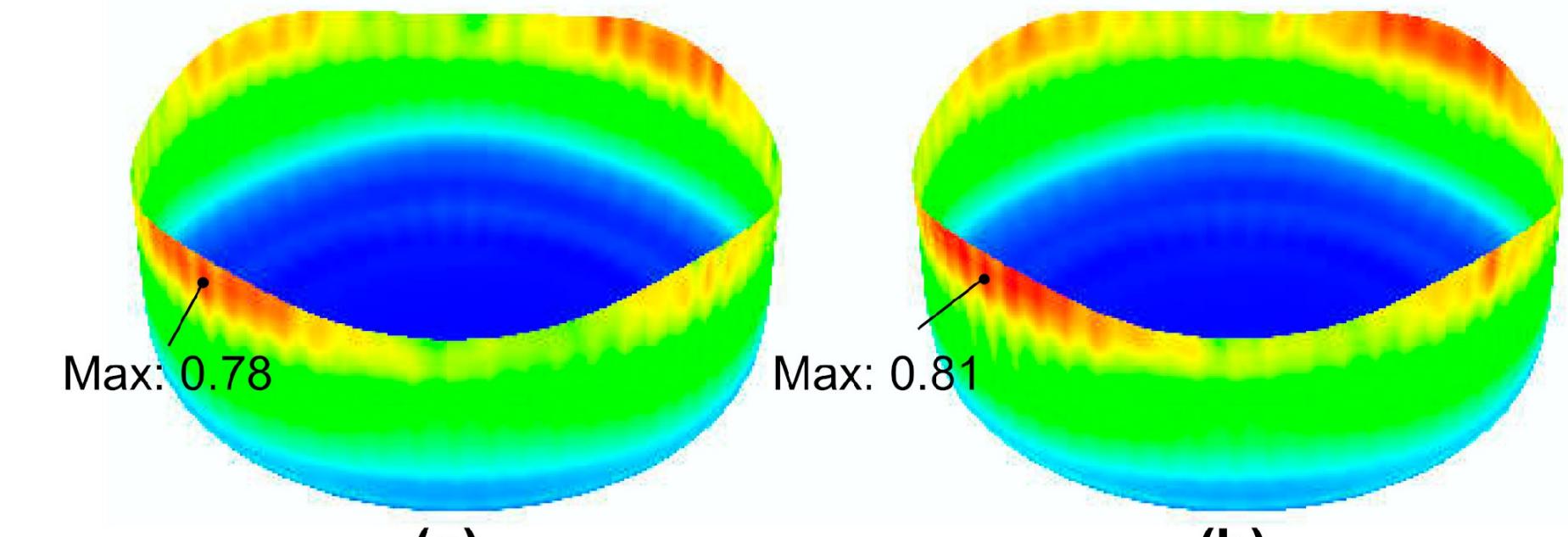
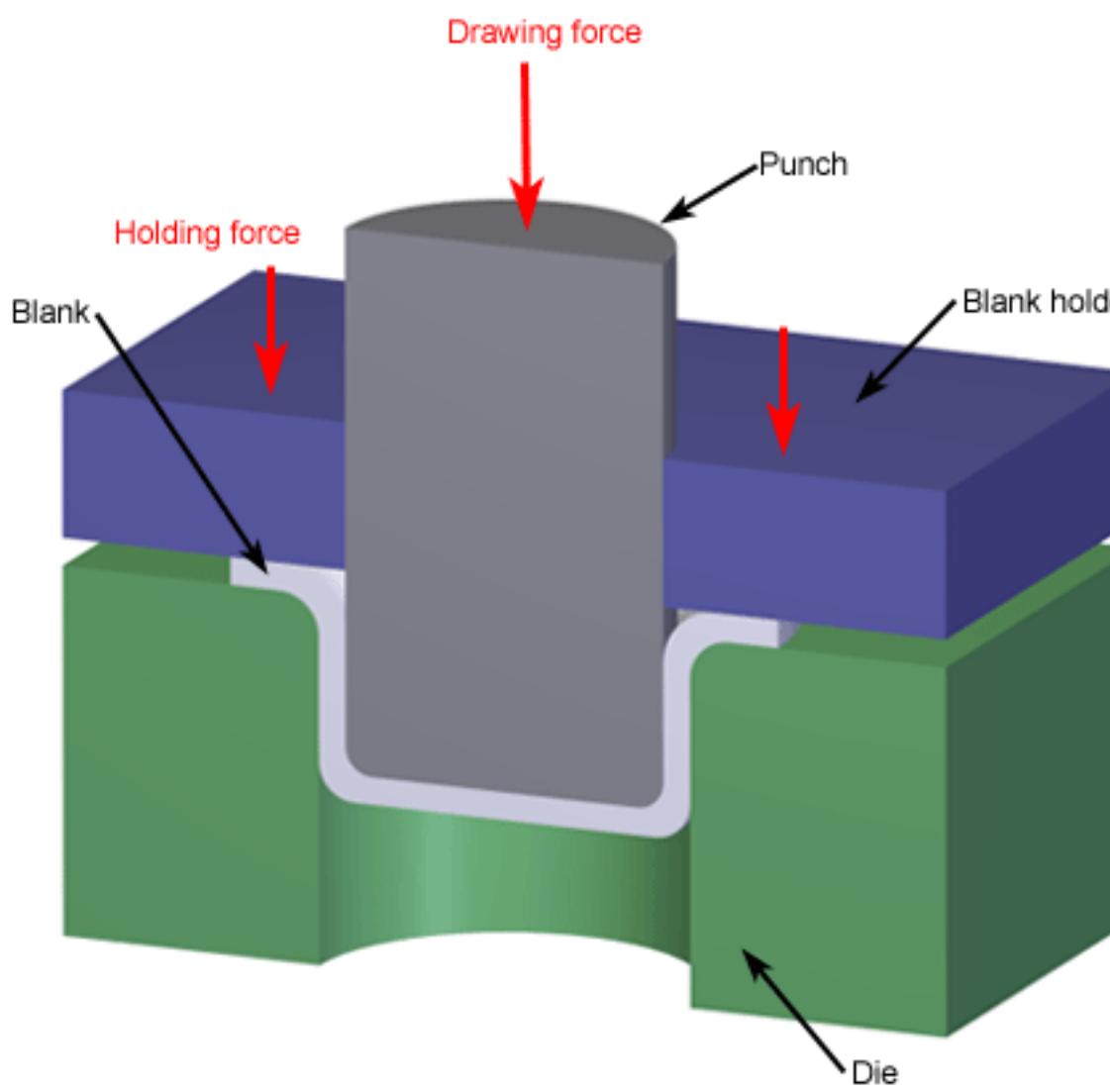
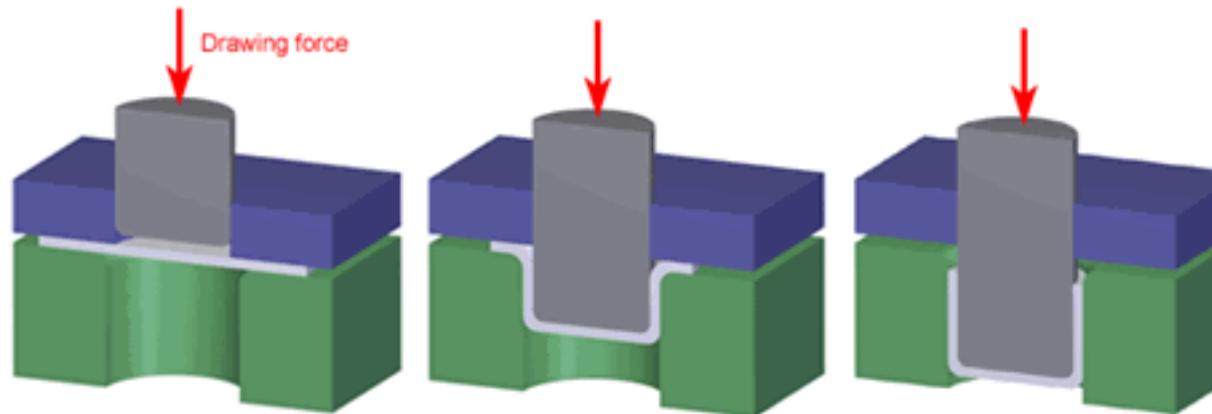
Introdução ao Método dos Elementos Finitos



Introdução ao Método dos Elementos Finitos

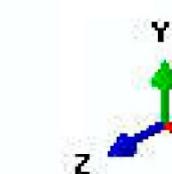
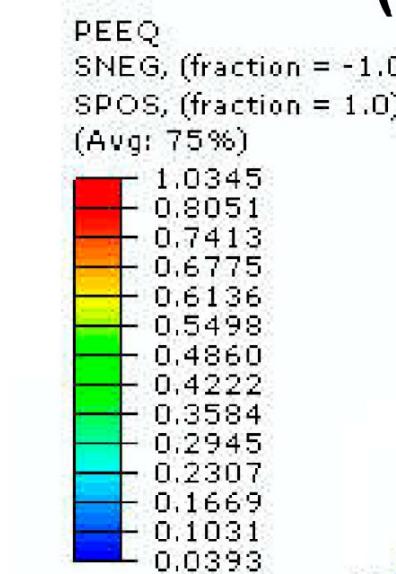


Introdução ao Método dos Elementos Finitos



(a)

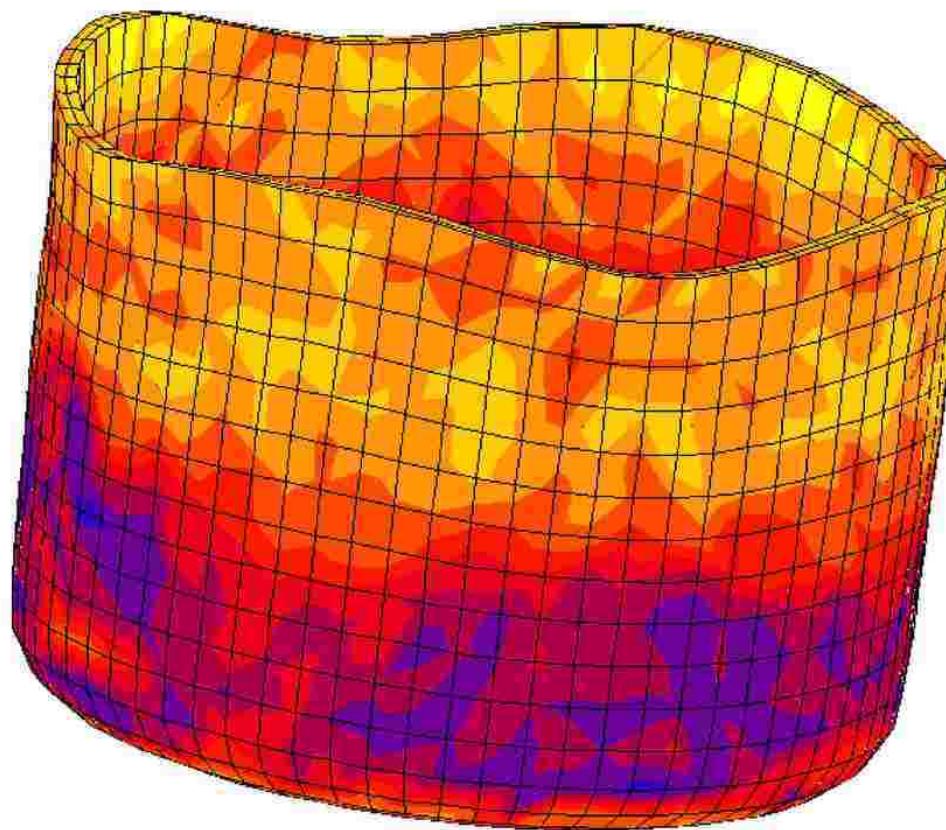
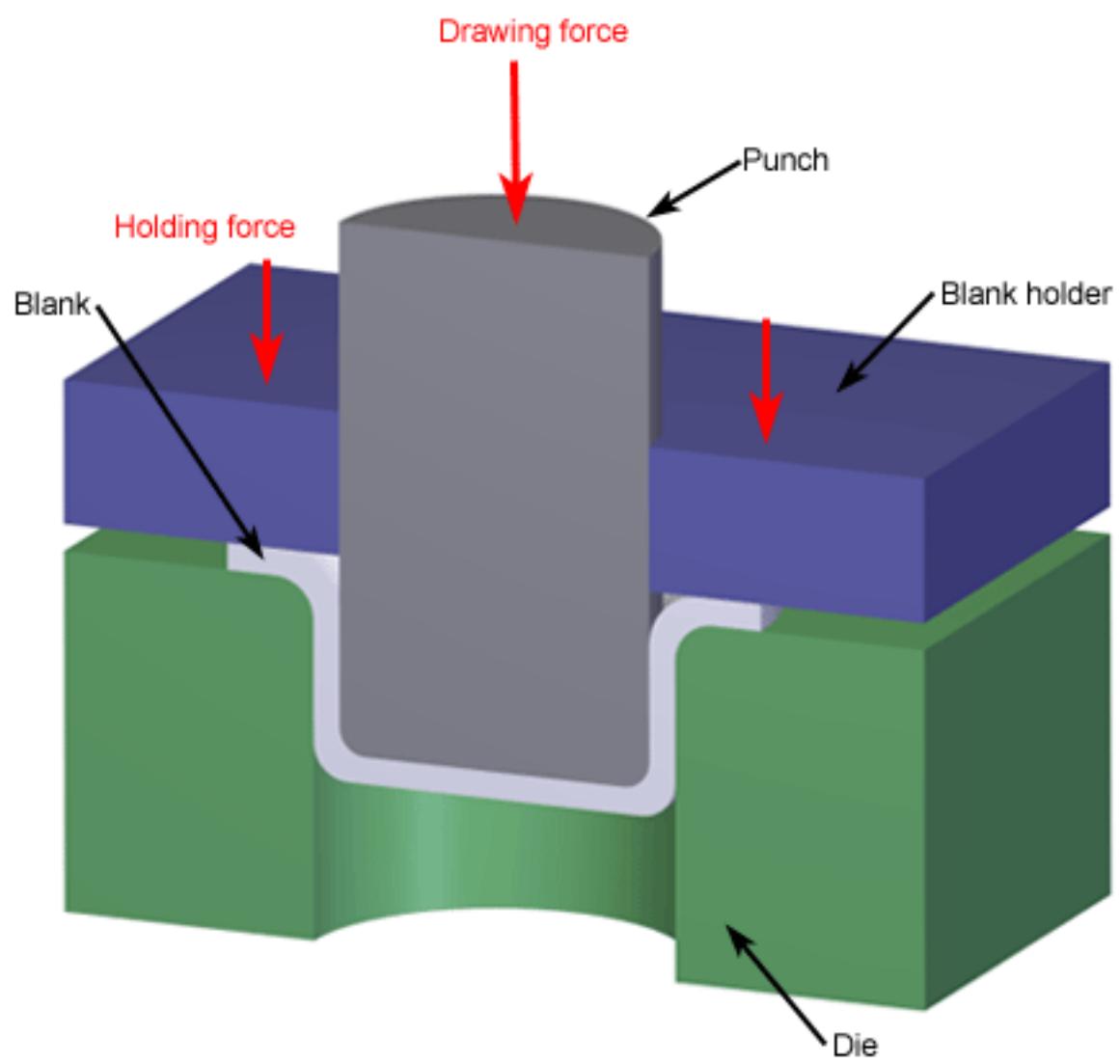
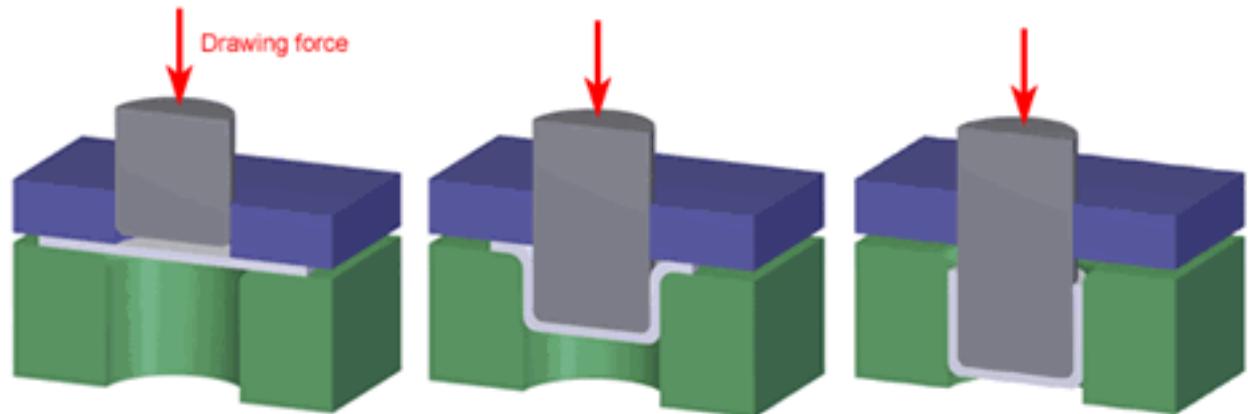
(b)



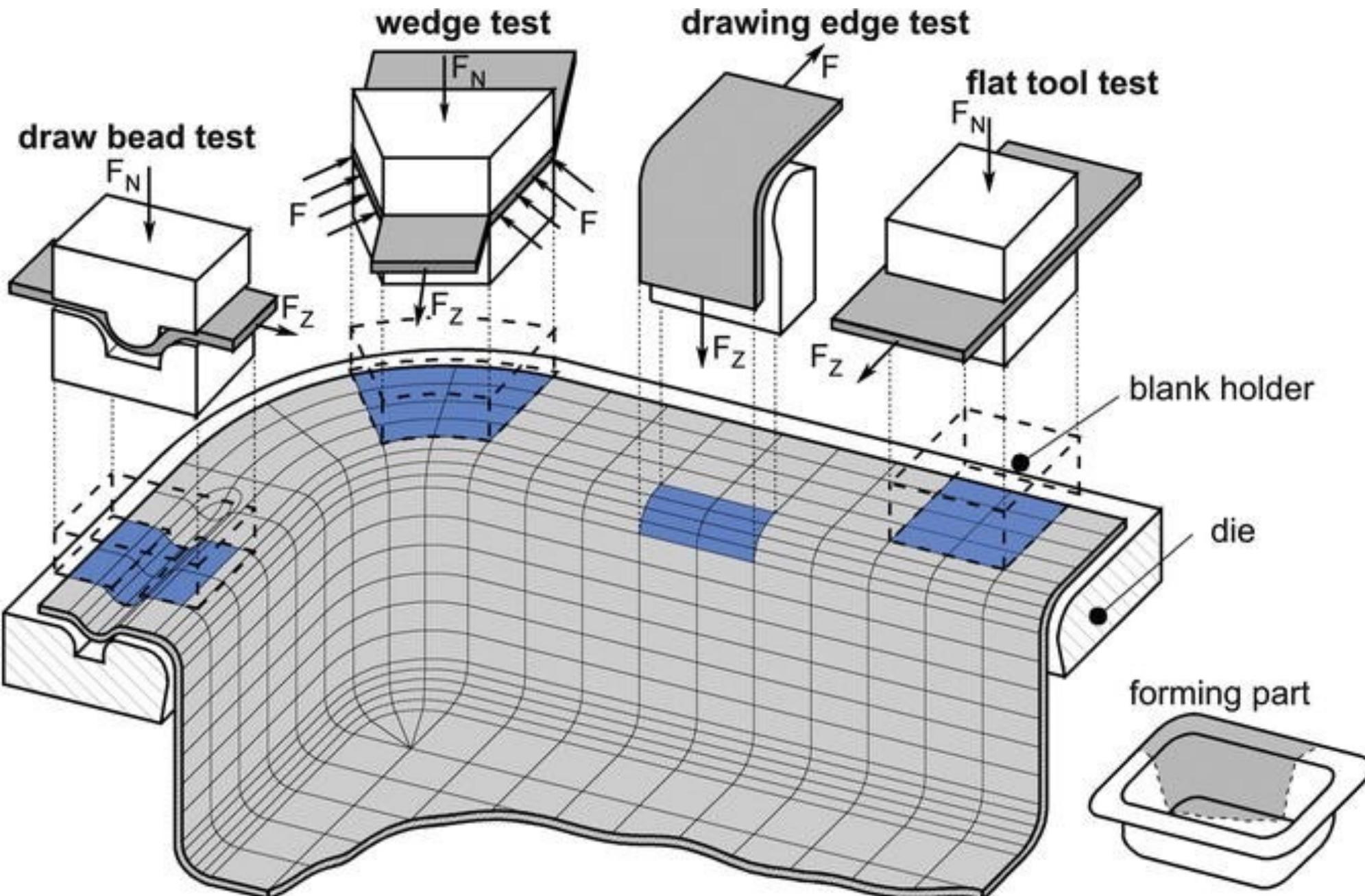
Max: 1.03

(c)

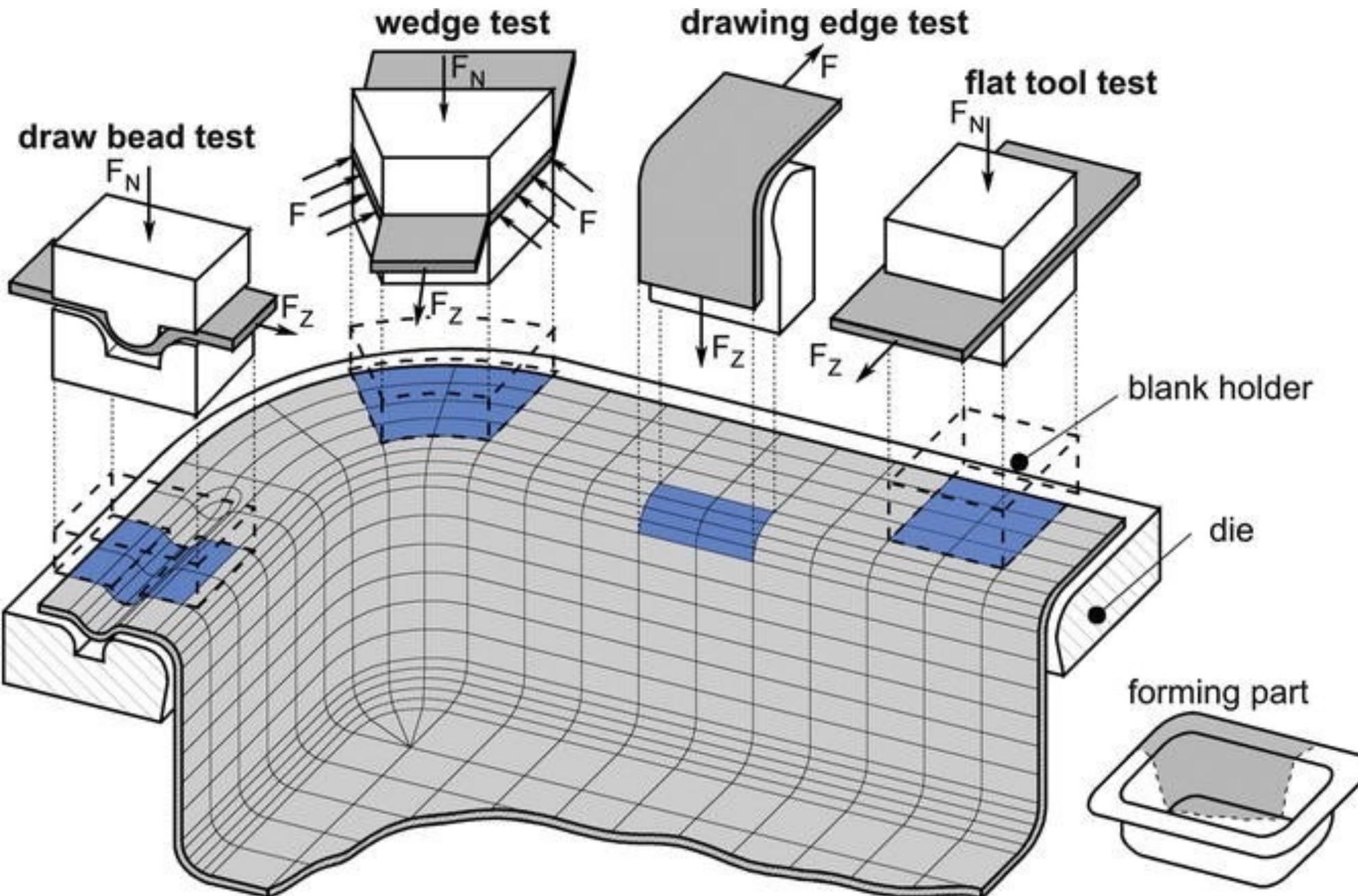
Introdução ao Método dos Elementos Finitos



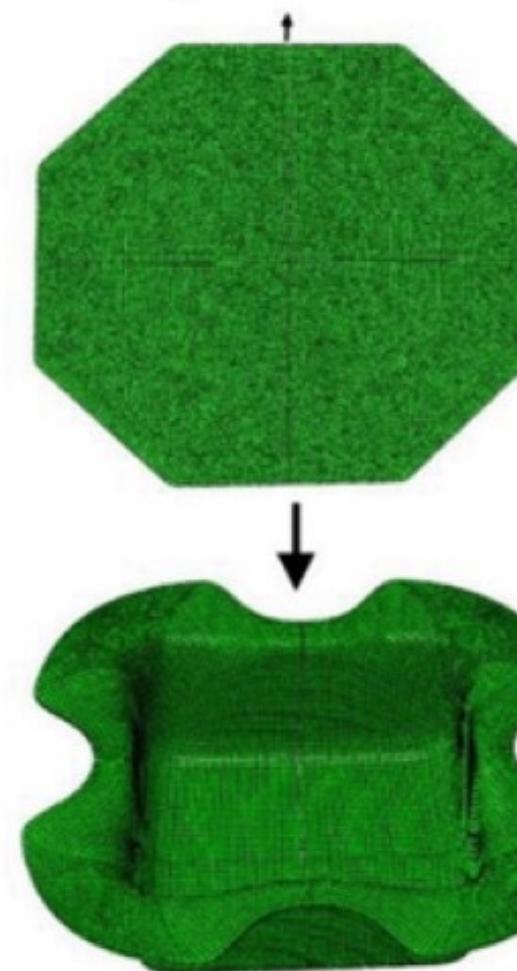
Introdução ao Método dos Elementos Finitos



Introdução ao Método dos Elementos Finitos

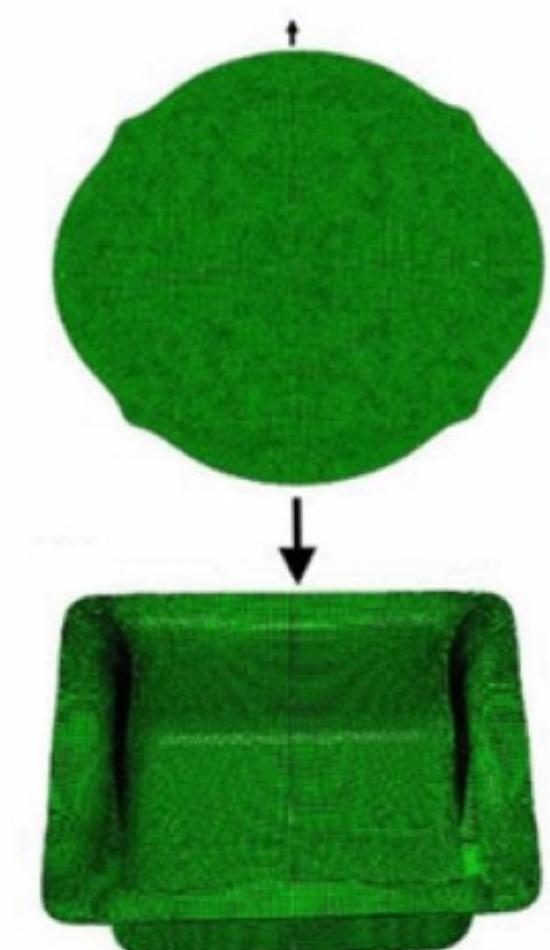


Initial blank before optimization



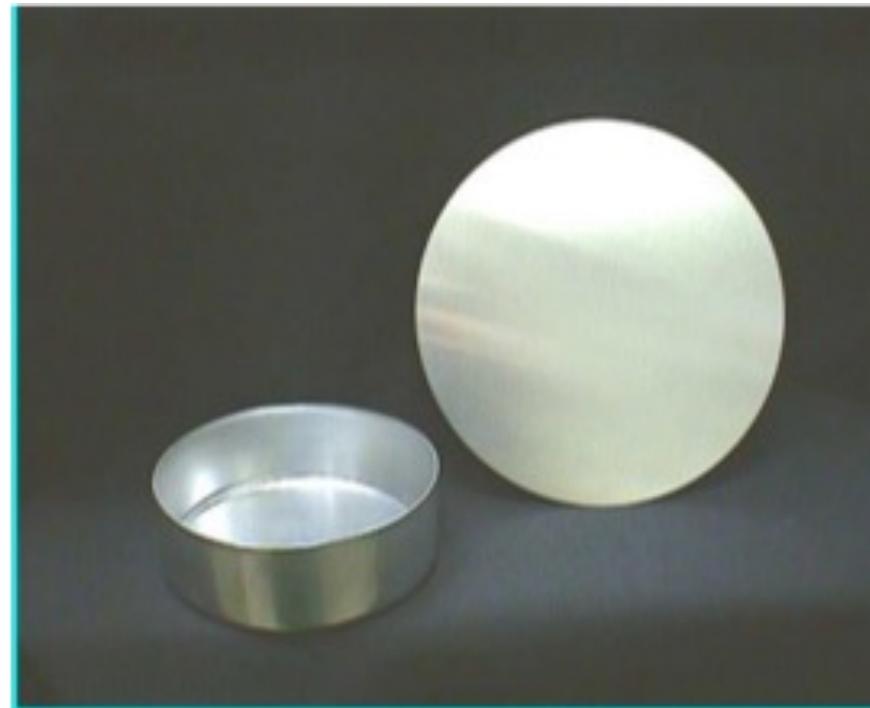
Deformation of the product before optimization

Optimal initial blank



Deformation of the product with the optimal initial blank

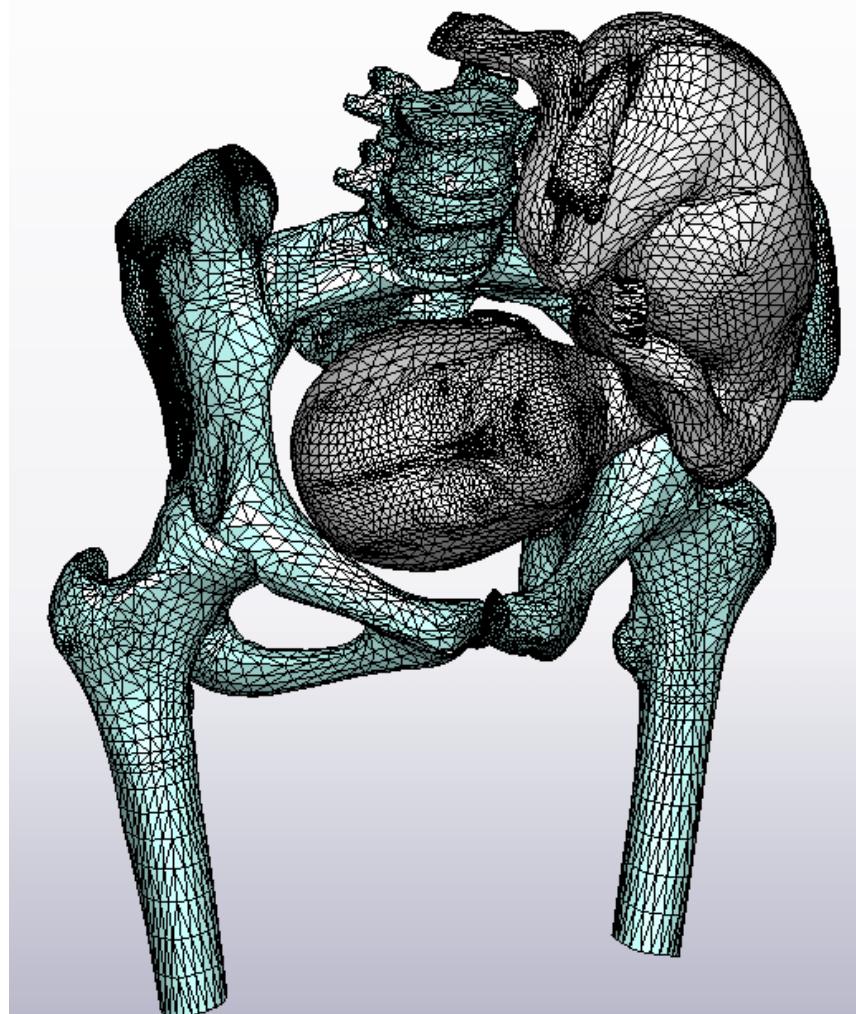
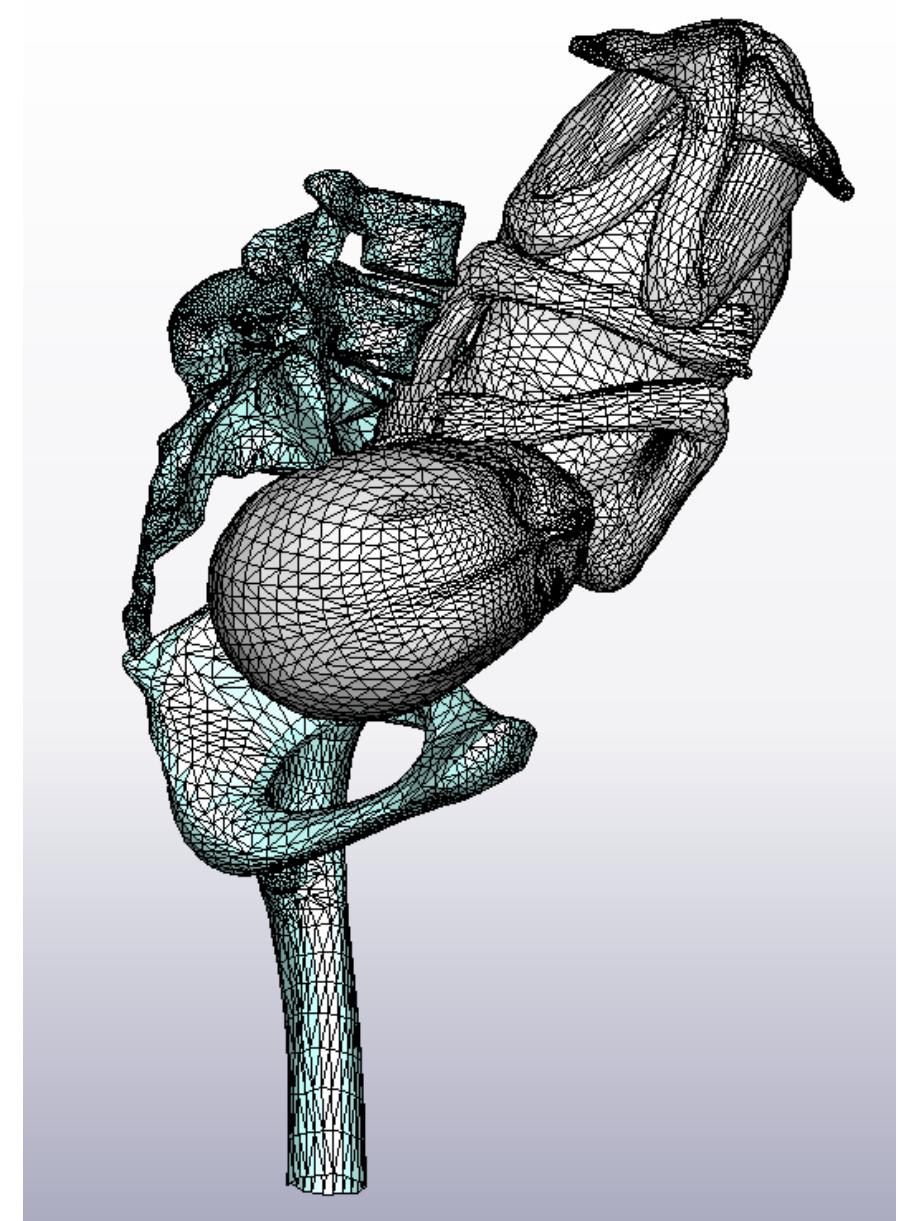
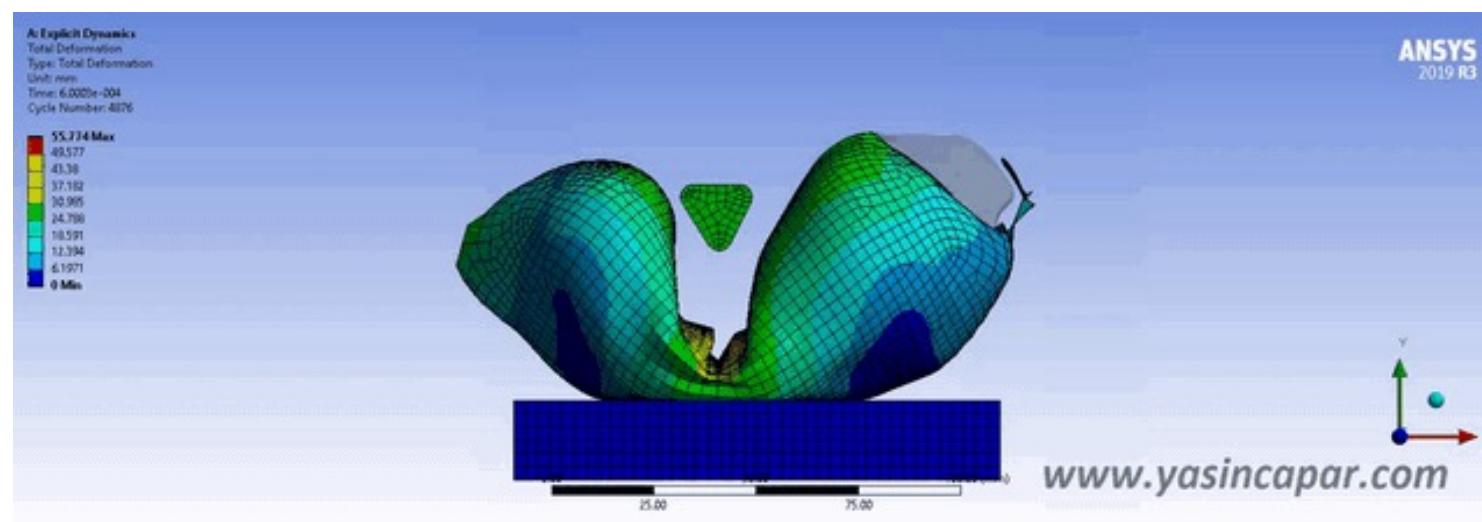
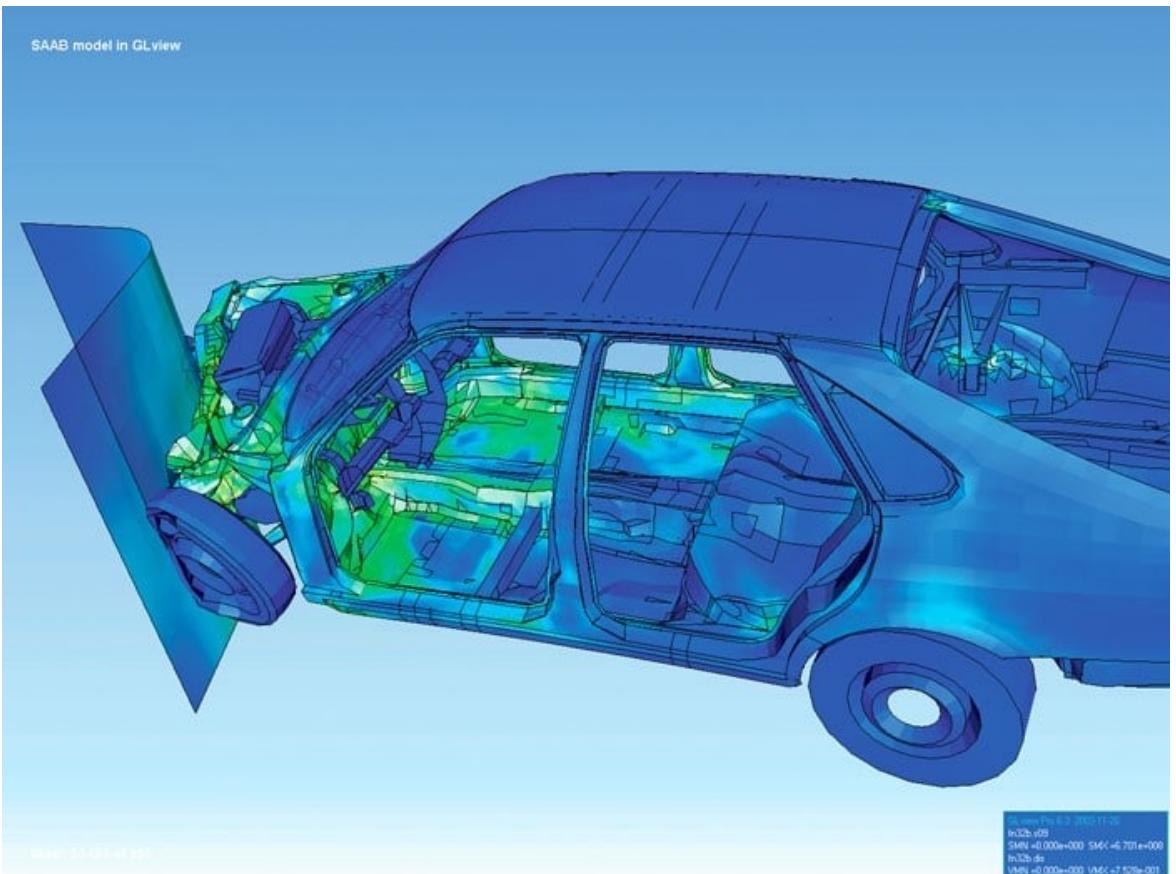
Introdução ao Método dos Elementos Finitos



<https://www.youtube.com/watch?v=hUhisi2FBuw>



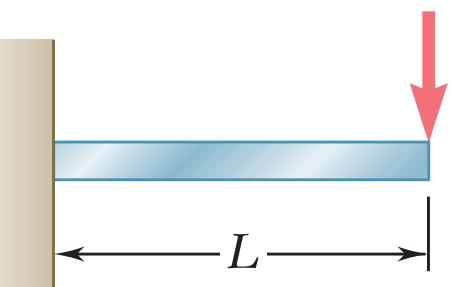
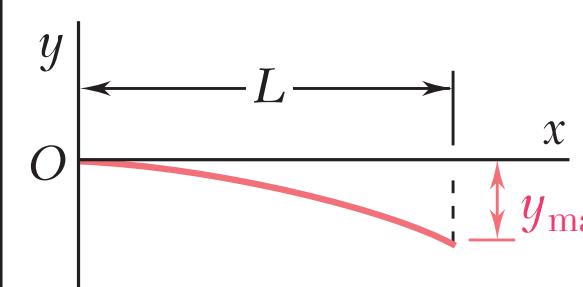
Introdução ao Método dos Elementos Finitos

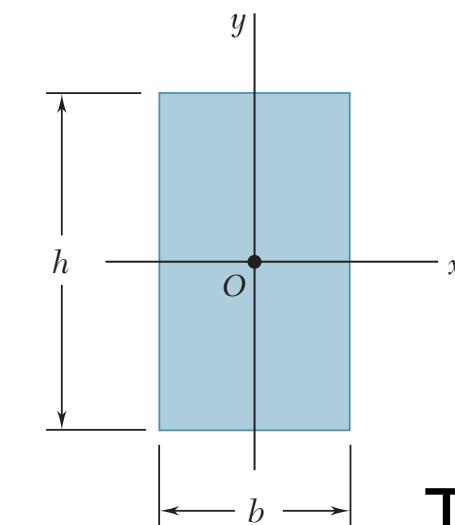


Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Exemplo (TPC)

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Beam and Loading	Elastic Curve	Maximum Deflection
1 		$-\frac{PL^3}{3EI}$

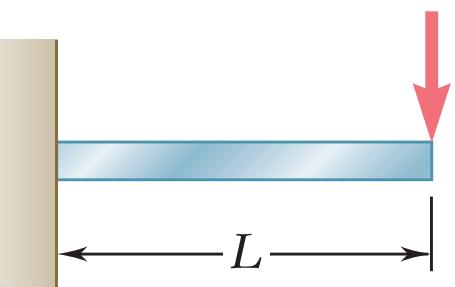
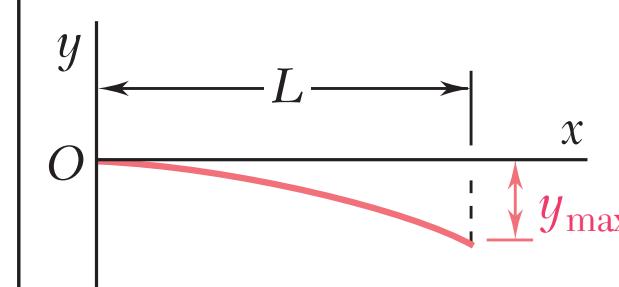
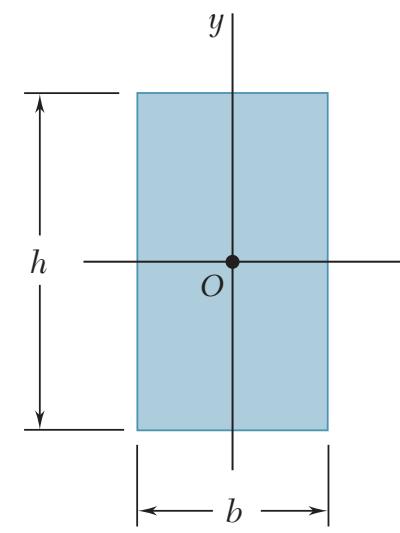


$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$

Material: aço
 $E = 200 \text{ GPa}$

Tensão de cedência: 250 MPa

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Beam and Loading	Elastic Curve	Maximum Deflection		
1 		$-\frac{PL^3}{3EI}$		$I_x = \frac{1}{12}bh^3$ Material: aço $E = 200$ Gpa Tensão de cedência: 250 MPa

Guião de análise

- Escolher um valor para a carga P
- Escolher um tipo de elemento finito (tridimensionais, por exemplo)

a) Para essa escolha, quantos elementos são necessários para o modelo computacional fornecer uma boa solução para o deslocamento máximo da viga? E, para essa malha de elementos finitos:

b) qual o máximo valor de carga (P_{max}) que a viga consegue suportar, antes de apresentar pontos com deformações permanentes (regime plástico)?

c) definir uma nova geometria para uma viga, com o mesmo cumprimento (L), mais leve, e que suporte a mesma carga máxima da alínea anterior.

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Próxima sessão

análise isoparamétrica (clássica) e abordagens mais avançadas

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Competências Transferíveis 2
Sessão 05

Robert Valente (robertt@ua.pt)