EDO'S lineares de ordem superior - Filipa Santana
Aula

uma EDO diz-se Linear de ordem superior se tem a forma:

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)$$

onde

$b\colon I \to \mathbb{R}$;

$a_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

$\downarrow$

coeficientes da equação

- Se $b \equiv 0$, a equação diz-se incompleta (ou homogénea); Caso contrário, a equação diz-se completa (ou não homogénea);
- Se os coeficientes da equação são funções constantes, a equação diz-se de linear de coeficientes constantes.

Já tinhamos usado as mesmas designações nas EDOs Lineares de 1ª ordem.

Se na equação

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)$$

tomarmos $b(x) \equiv 0$, obtemos a chamada equação homogénea associada.

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\,y = 0$$

Solução de uma EDO Linear

Teorema:
A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

Soluções da EDO linear homogénea associada

Teorema: Toda a equação linear homogénea de ordem n

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0,$$

num dado intervalo I ($a_0, a_1, \ldots a_n$ contínuas em I; $a_0(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite n soluções, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, linearmente independentes e qualquer sua solução, y, pode escrever-se como sua combinação linear, *i.e.*,

$$y = C_1\varphi_1 + \cdots + C_n\varphi_n, \text{ para } C_j \in \mathbb{R}\,.$$

$(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ é uma base do subespaço vetorial das soluções da EDO linear homogénea associada.

Dizemos que $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ é um conjunto fundamental de soluções (SFS) da EDO linear homogénea associada.

Se nos for dado um conjunto de soluções podemos verificar se é um SFS através da matriz wronskiana

Proposição:

Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soluções de uma EDOL homogénea de ordem n, nas condições do slide anterior. $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ é um conjunto fundamental de soluções se e só se a matriz

$$\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

é invertível, para todo o $x \in I$.

se $\det[W(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)] \neq 0 \Rightarrow W(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ é invertível

ALGA

Exemplo 1

$y'' + y = 0$ $\quad \varphi_1(x) = \cos(x)$ e $\varphi_2(x) = \text{sen}(x)$ são soluções da EDO

(φ_1, φ_2) será um sistema fundamental de soluções?

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ -\text{sen}(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$

$$\det\left(W(\varphi_1, \varphi_2)\right) = \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \neq 0$$

$$\therefore (\cos x, \text{sen}\, x) \text{ é um S.F.S.}$$

$$\Rightarrow y_R = C_1 \cos(x) + C_2 \,\text{sen}(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Algumas notas:

1. A resolução de uma EDO linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções. Todavia, para $n > 1$, não existe método geral que permita obter um tal conjunto de soluções.
2. Se a EDO linear homogénea tiver coeficientes constantes, um sistema fundamental de soluções pode ser obtido a partir do conhecimento das raízes do chamado polinómio caraterístico (ver slides seguintes).

① Se $n = 1$ temos que a EDO linear homogénea associada tem a forma:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = 0$$

que é sempre uma EDO de variáveis separáveis.

Então a solução geral é dada por:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_0(x)y' = -a_1(x)y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}y' = \frac{-a_1(x)}{a_0(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$$

Então, $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| + C = \int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx + K \quad , \quad K = -C$$

$$\Leftrightarrow \quad y = e^{\int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx + K}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = C_1 e^{\int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx} \quad , \; C_1 = e^K$$

Solução da homogénea associada

②

Se $n > 1$ sendo os coeficientes constantes a EDO fica com a forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

com $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \wedge a_0 \neq 0$

Chamamos **polinómio característico** ao polinómio da forma:

$$\boxed{P(r)} = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n \overset{1}{\cancel{r^0}}$$

as potências de r têm expoente igual à ordem das derivadas

As **raizes** deste polinómio vão permitir-nos calcular/determinar as soluções da EDO linear homogénea

❗ **raizes = zeros do polinómio**
($P(r) = 0$)

Consoante o tipo e multiplicidade das raizes de $P(r)$ teremos diferentes formatos do SFS.

↓

1º caso: raizes reais simples (multiplicidade 1)

Então as funções $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$ formam um SFS.

Exemplo:

$$y''' + 4y'' - 5y' = 0$$

↓ Polinómio característico

$P(R) = R^3 + 4R^2 - 5R$

$\downarrow$ Raizes de P

$P(R) = 0$

$\Leftrightarrow R^3 + 4R^2 - 5R = 0$

$\Leftrightarrow R^2 + 4R - 5 = 0 \vee R = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{R = 1 \vee R = -5 \vee R = 0}$

Raizes distintas e simples

Então e^{1x}, e^{-5x} e e^{0x} formam um SFS

e $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x} + C_3 e^{0x}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

↳ solução geral da EDO linear homogénea.

2º caso: P possui n raizes reais e pelo menos uma delas tem multiplicidade > 1

seja $\underline{R}$ a raiz de P com multiplicidade K

$e^{Rx}, xe^{Rx}, \ldots, x^{K-1}e^{Rx}$ são soluções da EDO que correspondem à raiz $\underline{R}$

Depois juntamos as restantes como no 1º Caso

Exemplo:

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$$

$\downarrow$ Polinómio Característico

$$P(R) = R^3 - 5R^2 + 8R - 4$$

$\downarrow$ Raizes de $P(R)$

$$P(R) = 0$$

$$\Leftrightarrow (R-1)(R^2 - 4R + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow R - 1 = 0 \vee R^2 - 4R + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow R = 1 \vee R = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow R = 1 \vee \underbrace{R = 2 \vee R = 2}_{\text{Raiz real dupla}}$$

Regra de Rufini:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -5 & 8 & -4 \\
\boxed{1} & & 1 & -4 & 4 \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & \boxed{0 = R}
\end{array}$$

Devemos tentar com divisores do termo independente (-4)

$$\text{SFS}: \{e^{1x}, e^{2x}, xe^{2x}\}$$

$$\therefore\ y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ solução geral da EDO linear homogénea.

3º Caso: P tem pelo menos uma raiz complexa simples

Seja $r = \alpha \pm \beta i$ raiz complexa de P
então $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ são duas soluções linearmente independentes da EDO linear homogénea.

As restantes raizes são abordadas como nos 1º caso ou/e 2º caso

Exemplo:

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$\downarrow$ Polinómio Característico

$$P(r) = r^2 + 2r + 5$$

$\downarrow$ Raizes do Polinómio Característico

$$P(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{-2 \pm 4i}{2} \Leftrightarrow r = -1 \pm 2i$$

Raiz complexa simples

$$\text{SFS}: \left\{ e^{-1x}\cos(2x), e^{-1x}\operatorname{sen}(2x) \right\} = \left\{ e^{-x}\cos(2x), e^{-x}\operatorname{sen}(2x) \right\}$$

$$\therefore\ y_h = C_1 e^{-x}\cos(2x) + C_2 e^{-x}\operatorname{sen}(2x),\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

↳ solução geral da EDO linear homogénea.

4º caso: P tem pelo menos uma raiz complexa de multiplicidade $k>1$

Seja $R=\alpha\pm\beta i$ raiz de P de multiplicidade k, então:

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ xe^{\alpha x}\cos(\beta x),\ \dots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$
e
$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x),\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x),\ \dots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

As restantes raizes são abordadas como nos 1º caso, 2º caso e/ou 3º caso

Exemplo:

$$y^{(4)}+4y''+4y=0$$

Polinómio característico

$$P(R)=R^4+4R^2+4$$

$$P(R)=0 \Leftrightarrow R^4+4R^2+4=0$$
$$\Leftrightarrow (R^2)^2+4R^2+4=0$$
$$\Leftrightarrow R^2=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot4}}{2}$$
$$\Leftrightarrow R^2=-2 \ \vee\ R^2=-2$$
$$\Leftrightarrow R=\pm\sqrt{2}\,i \ \vee\ R=\pm\sqrt{2}\,i$$

Raiz complexa dupla

$$\text{SFS: } \left\{e^{0x}\cos(\sqrt{2}x),\ xe^{0x}\cos(\sqrt{2}x),\ e^{0x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x),\ xe^{0x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right\}$$

$$\therefore\ y_h=C_1\cos(\sqrt{2}x)+C_2x\cos(\sqrt{2}x)+C_3\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)+C_4x\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$$
$$C_1,C_2,C_3,C_4\in\mathbb{R}$$

Exercícios extra:

19. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

(a) $y' + y = \operatorname{sen} x$;
(b) $y'' - y + 2\cos x = 0$;
(c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x$;
(d) $y'' - 4y' + 4y = x\,e^{2x}$;
(e) $y'' + y' = e^{-x}$;
(f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x)$;
(g) $y''' + y' = \operatorname{sen} x$;
(h) $y'' + 9y = \operatorname{sen} x - e^{-x}$.

Vamos, para já, encontrar a solução das EDO's lineares homogéneas associadas a cada EDO linear.

Caso n=1

a) $y' + y = \operatorname{sen} x$

EDO Linear homogénea associada

$$y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -1$$
$$\Leftrightarrow \ln|y| = -x + C \;,\; C \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow y = e^{-x+C}$$
$$\Leftrightarrow y = K e^{-x} \;,\; K = e^{C} \;,\; C \in \mathbb{R}$$

Ou usando diretamente a fórmula:

$$y = C_1 e^{\int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$
$$y = C_1 e^{\int -\frac{1}{1} dx}$$
$$y = C_1 e^{-x} \;,\; C_1 \in \mathbb{R}$$

b) $y'' - y = -2\cos x$

EDO Linear homogénea associada: $y'' - y = 0$

$P(R) = R^2 - 1$

$P(R) = 0$
$\Leftrightarrow R^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow R^2 = 1$
$\Leftrightarrow R = \pm 1$
$\Leftrightarrow R = 1 \vee R = -1$

Raizes reais simples

SFS: $\{e^{1x}, e^{-1x}\}$

$\therefore y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

c) $y'' + y' - 2y = 3 - 6x$

EDO Linear homogénea associada: $y'' + y' - 2y = 0$

$P(R) = R^2 + R - 2$

$P(R) = 0$
$\Leftrightarrow R^2 + R - 2 = 0$
$\Leftrightarrow R = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}}{2}$

$\Leftrightarrow R = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow R = -2 \vee R = 1$

Raizes reais simples

SFS: $\{e^{-2x}, e^{1x}\}$

$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

d) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$

EDO Linear homogénea associada: $y'' - 4y' + 4y = 0$

$P(R) = R^2 - 4R + 4$

$$\begin{aligned} P(R) = 0 &\Leftrightarrow R^2 - 4R + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (R-2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow R - 2 = 0 \quad \text{(raiz dupla)} \\ &\Leftrightarrow R = 2 \end{aligned}$$

SFS: $\{ e^{2x}, xe^{2x} \}$

$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

e) $y'' + y' = e^{-x}$

EDO Linear homogénea associada: $y'' + y' = 0$

$P(R) = R^2 + R$

$$\begin{aligned} P(R) = 0 &\Leftrightarrow R^2 + R = 0 \\ &\Leftrightarrow R(R+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow R = 0 \vee R = -1 \end{aligned}$$

Raizes reais simples

SFS: $\{ e^{0x}, e^{-1x} \} = \{ 1, e^{-x} \}$

$y_h = C_1 + C_2 e^{-x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ //

f) $y'' + 4y = \tan(2x)$

EDO Linear homogénea associada: $y'' + 4y = 0$

$P(R) = R^2 + 4$

$P(R) = 0 \Leftrightarrow R^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow R^2 = -4$

$\Leftrightarrow R = \pm 2i$ raiz complexa simples

SFS: $\{e^{0x}\cos(2x), e^{0x}\mathrm{sen}(2x)\} = \{\cos(2x), \mathrm{sen}(2x)\}$

$y_h = C_1\cos(2x) + C_2\,\mathrm{sen}(2x)\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

g) $y''' + y' = \mathrm{sen}(x)$

EDO Linear homogénea associada: $y''' + y' = 0$

$P(R) = R^3 + R$

$P(R) = 0 \Leftrightarrow R^3 + R = 0$

$\Leftrightarrow R(R^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow R = 0 \lor R^2 = -1$

$\Leftrightarrow R = 0 \lor R = \pm 1i$

SFS: $\{e^{0x}, e^{0x}\cos(1x), e^{0x}\mathrm{sen}(1x)\} = \{1, \cos(x), \mathrm{sen}(x)\}$

$y_h = C_1 + C_2\cos(x) + C_3\,\mathrm{sen}(x)\,,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ //

Como vamos encontrar a solução particular da EDO dada?

① **Método dos coeficientes indeterminados** (coeficientes constantes)

② **Método da variação das constantes** (caso geral)

① Método dos coeficientes indeterminados

Seja $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b(x)$

$\downarrow$ Tendo em atenção a forma de $b(x)$

$b(x)$ Tem de ter uma destas formas $\rightarrow$

1) Se $b(x)$ for de uma das seguintes formas:

$\rightarrow P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$

$\rightarrow \underbrace{P_m(x)}_{\text{polinómio grau } m} e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$

2) Então existe uma solução da EDO do tipo:

$$y_p = x^k e^{\alpha x} \left(P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \operatorname{sen}(\beta x) \right)$$

grau m

• K é a multiplicidade de $R = \alpha \pm \beta i$ como raiz de $P(R)$ → Polinómio Característico

↳ se R ñ é raiz de $P(R)$ então $K=0$
se R é raiz simples então $K=1$
...

• $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios de grau m cujos coeficientes têm de ser determinados.

Vejamos como...

Exemplo:

$$y' - 3y = e^{3x}$$

$$e^{3x} = \underbrace{1}_{\substack{P_m(x) \\ \text{grau } 0}} \, e^{\overbrace{3}^{\alpha} x} \cos(\overbrace{0}^{\beta} x)$$

Então $y_p = x^K e^{3x} \left(P(x)\cos(0x) + Q(x)\,\mathrm{sen}(0x) \right)$ — grau 0

K: multiplicidade de R como raiz de $P(R)$

$R = 3 \pm 0i = \underbrace{3}_{\text{Raiz simples de } P(R)}$ $\quad P(R) = R - 3$

Então $K = 1$ //

$\therefore\ y_p = x e^{3x} P(x) \longrightarrow P(x) = A$ (grau 0)

$A \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

mesmo grau que $P_m(x)$

Para determinar o coeficiente A

$\downarrow$

Como y_p é solução da EDO então verifica a condição da mesma (isto é, podemos substituir y na EDO por y_p)

$$y_p' = Ae^{3x} + 3Axe^{3x} \quad \text{e} \quad y_p = Axe^{3x}$$

Substituindo,

$$y_p' - 3y_p = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow Ae^{3x} + \cancel{3Axe^{3x}} - 3(Axe^{3x}) = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow A = 1$$

$$\therefore\ y_p = 1xe^{3x}$$

Outra forma de calcular uma solução particular, é pelo método da variação das constantes.

Método da variação das constantes

Método que permite encontrar uma solução particular de uma qualquer EDO Linear completa.

- pressupõe o conhecimento da solução geral da equação homogénea associada:

$$y_h = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)\,, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

onde $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é um sistema fundamental de soluções desta equação.

- procura obter uma solução particular da equação completa da forma

$$y_p = C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x)\,,$$

admitindo que as constantes são funções (de x) diferenciáveis,

As funções $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ determinam-se calculando as suas derivadas que constituem a solução do seguinte sistema de equações:

$C_i'(x)$

$$\begin{cases} C_1'\,\varphi_1 + \cdots + C_n'\,\varphi_n = 0 \\ C_1'\,\varphi_1' + \cdots + C_n'\,\varphi_n' = 0 \\ \quad\vdots \\ C_1'\,\varphi_1^{(n-2)} + \cdots + C_n'\,\varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'\,\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'\,\varphi_n^{(n-1)} = \frac{b}{a_0} \end{cases} \tag{3}$$

Na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{c|c} W(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b}{a_0} \end{matrix} \end{array}\right]$$

Wronskiano

Podemos resolver por substituição ou na forma matricial, usando a Regra de Cramer aprendida em ALGA.

Regra de Cramer

Quando temos o sistema $AX = B$, com $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, cada x_i e' dado por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Resulta de substituir a coluna i de A pela coluna dos termos independentes.

Exemplo 1

$$y'' + y = \operatorname{cosec} x \qquad x \in \,]0, \pi[$$

Solução da homogénea associada:

$$y'' + y = 0 \qquad P(R) = R^2 + 1$$

$$P(R) = 0 \Leftrightarrow R^2 = -1 \Leftrightarrow R = \pm i$$

$$\text{SFS}: \left\{ e^{0x} \cos(1x), e^{0x} \operatorname{sen}(1x) \right\}$$

$$= \left\{ \cos(x), \operatorname{sen}(x) \right\}$$

Então,

$$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x) \;, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Solução particular: $y_p = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\operatorname{sen}(x)$

$$\begin{bmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\operatorname{cosec}(x)}{1} \end{bmatrix}$$

Podemos agora aplicar a Regra de Cramer

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{cosec} x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x}{1} = -1$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & \operatorname{cosec} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{\cos(x)\operatorname{cosec}(x)}{1} = \operatorname{cotan}(x)$$

Calculando primitivas $G_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, das funções que se obtêm da resolução do sistema anterior, podemos escrever a seguinte solução particular da equação completa:

$$y_p = G_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + G_n(x)\varphi_n(x).$$
$$= C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x)$$

Então,

$$C_1(x) = \int -1 \, dx = -x$$

e $$C_2(x) = \int \operatorname{cotan}(x) \, dx = \ln|\operatorname{sen}(x)|$$

Assim, a solução geral é

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x) + (-x)\cos(x) + \ln|\operatorname{sen}(x)| \operatorname{sen}(x)$$

$$= (C_1 - x)\cos(x) + (C_2 + \ln|\operatorname{sen}(x)|)\operatorname{sen}(x)$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Embora por vezes possa ser de resolução mais longa, também é possível resolver o sistema por substituição.

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)\,\mathrm{sen}(x) = 0 \\ -C_1'(x)\,\mathrm{sen}(x) + C_2'(x)\cos(x) = \mathrm{cosec}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)\dfrac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} \\ C_2'(x)\dfrac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{sen}(x) + C_2'(x)\cos(x) = \mathrm{cosec}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{———} \\ C_2'(x)\left[\dfrac{\mathrm{sen}^2(x)}{\cos(x)} + \cos(x)\right] = \mathrm{cosec}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{———} \\ C_2'(x) \times \dfrac{1}{\cos(x)} = \underbrace{\mathrm{cosec}(x)}_{\frac{1}{\mathrm{sen}(x)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\mathrm{cotan}(x)\tan(x) = -1 \\ C_2'(x) = \mathrm{cosec}(x)\cos(x) = \mathrm{cotan}(x) \end{cases}$$

Então,

$$C_1(x) = \int -1\,dx = -x$$

$$C_2(x) = \int \mathrm{cotan}(x)\,dx = \ln|\mathrm{sen}(x)| \quad //$$

Curiosidade:

O resultado seguinte é muito útil no cálculo de uma solução particular de uma EDO linear completa, quando $b(x)$ resulta da soma de funções.

Princípio da Sobreposição

Suponha-se que y_k $(k = 1, 2)$ *é uma solução particular da equação*

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b_k(x).$$

Então $y_p = y_1 + y_2$ *é uma solução particular da equação*

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b_1(x) + b_2(x).$$

Exemplo

$$y'' + 9y = \operatorname{sen}(x) - e^{-x}$$

Se considerarmos:

① $y'' + 9y = \operatorname{sen}(x)$

e

② $y'' + 9y = -e^{-x}$

A solução particular da EDO linear completa dada inicialmente pode ser determinada à custa das soluções particulares de ① e ②.

$$y_p = y_{p①} + y_{p②}$$

Agora podemos voltar ao ex 19 e completar a resolução com as respetivas soluções particulares.

Bom trabalho!

Filipa Santana.