

Temas: Fórmula de Taylor/MacLaurin com resto integral e de Lagrange.

Vamos rever aula passada :

Exemplo 1

$$T_0^5(\operatorname{sen} x)$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x = f^{(4)}(x) \rightsquigarrow f(0) = f^{(4)}(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x = f^{(5)}(x) \rightsquigarrow f'(0) = f^{(5)}(0) = 1$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \rightsquigarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \rightsquigarrow f'''(0) = -1$$

$$\begin{aligned} T_0^5(\operatorname{sen} x) &= 0 + 1x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$T_1^n(\ln(x))$$

$$f(1) = 0$$

$$n=1 \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad f'(1) = 1$$

$$n=2 \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(1) = -1$$

$$n=3 \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f'''(1) = 2$$

$$n=4 \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad \rightsquigarrow \quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} (n-1)!$$

$$\begin{aligned} T_1^n(\ln(x)) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{k!} (x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\overline{T}_1^3(xe^x)$$

$$f(1) = 1e^1 = e$$

$$f'(x) = e^x + xe^x \quad f'(1) = e + e = 2e$$

$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x \quad f''(1) = e + e + e = 3e$$

$$f'''(x) = e^x + e^x + e^x + xe^x \quad f'''(1) = e + e + e + e = 4e$$

$$\overline{T}_1^3(xe^x) = e + \frac{2e}{1!}(x-1) + \frac{3e}{2!}(x-1)^2 + \frac{4e}{3!}(x-1)^3$$

Fórmula de Taylor c/ Resto de Lagrange

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função com derivadas contínuas até a ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$. Então $\forall x \in I \setminus \{c\}$ existe um θ entre x e c , tal que:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k}_{\text{Polinómio de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}}_{\text{Resto de Lagrange}}$$
$$T_c^n f(x) \qquad R_c^n f(x)$$

→ Podemos usar a fórmula de Taylor para obter uma estimativa para $f(a)$ e também uma estimativa para o erro que se comete ao fazer essa estimativa.

Se $f^{(n+1)}$ é contínua em $[a, b]$ então é limitada e por isso :

$$\left| R_c^n f(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1} \right| \leq \underbrace{\frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}}$$

$$M = \sup_{\theta \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\theta)|$$

Majorante do erro cometido

Supremo: menor dos majorantes

Exemplo 4

4. Considere $f(x) = e^x$.

(a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f .

Vimos na aula passada que :

$$T_0^n(e^x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Resto de Lagrange : $R_0^n(e^x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1}$ θ entre x e 0

$$R_0^n(e^x) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Fórmula de MacLaurin de f :

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &= \overline{T_0^n(e^x)} + \overline{R_0^n(e^x)} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}}_{\text{Parte polinomial}} + \underbrace{\frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\text{Parte exponencial}} \end{aligned}$$

(b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $]-1, 0[$, com erro inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.

$$x \in]-1, 0[\quad R_0^n(e^x) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \underbrace{\theta \text{ entre } 0 \text{ e } x}_{\brace{a, b}}$$

$$\left| R_0^n(e^x) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \quad \theta \in]-1, 0[$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} (0 - (-1))^{n+1} \quad M = \sup_{\theta \in]-1, 0[} |e^\theta| = e^0 = 1$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} 1^{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}$$

(c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

$T_0^n(e^x) \rightarrow$ Aproximação de $f(a)$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} \rightsquigarrow f(-\frac{1}{2}) \rightsquigarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$T_0^n(e^x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \approx f(x)$$

$$R_0^n(e^x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \rightsquigarrow \text{estimativa do erro}$$

$$n=1 \quad f(-\frac{1}{2}) \approx 1 + \frac{(-\frac{1}{2})^1}{1!} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ERRO} \leq \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$n=2 \quad f(-\frac{1}{2}) \approx 1 + \frac{(-\frac{1}{2})^1}{1!} + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\text{erro} \leq \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$n=3 \quad f(-\frac{1}{2}) \approx \frac{3}{8} + \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3!} = \frac{5}{8} - \frac{1}{6} = \frac{5}{8} - \frac{1}{48} = \frac{29}{48}$$

$$\text{erro} \leq \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

Exemplo 5

5. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de $\sin(3)$ quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

$n=5$

centro

$$f(x) = \sin x \quad f(\pi) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = f'(x) = \cos x \quad f'(\pi) = -1 = f^{(5)}(\pi)$$

$$f^{(6)}(x) = f''(x) = -\sin x \quad f''(\pi) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad f'''(\pi) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad f^{(4)}(\pi) = 0$$

$$R_{\pi}^5(\sin x) = \frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} (x-\pi)^6 \quad \theta \text{ entre } x \text{ e } \pi$$

$$\left| R_{\pi}^5(\sin x) \right| \leq \frac{M}{6!} (b-a)^6$$

Como estamos a aproximar $\sin(3)$:

$$x=3$$

$$M = \sup_{\theta \in [3, \pi]} |\sin \theta| = \sin(3)$$



$$\theta \in [3; \pi]$$

$$a \quad b$$

$$2^\circ \theta$$

$$\rightarrow = \frac{\sin(3)}{6!} (\pi-3)^6 \leq \frac{(\pi-3)^6}{6!}, \text{ pois } \sin(3) \in [0,1]$$

Exemplo 6

Usando o polinómio de Taylor de ordem 4 centrado em 0 de $f(x) = \ln(1+x)$, calcula uma aproximação de $\ln(1,5)$ e calcula uma estimativa para o erro cometido na aproximação.

$$f(x) = \ln(1+x) \quad f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \quad f^{(4)}(0) = -6$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$\ln(1,5) = \ln(1+0,5) \underset{x}{\approx} 0 + \frac{1}{1!}(0,5)^1 + \frac{(-1)}{2!}(0,5)^2 + \frac{2}{3!}(0,5)^3 + \frac{(-6)}{4!}(0,5)^4$$

$$=$$

$$\left| R_0^4(\ln(1+x)) \right| = \left| \frac{\frac{24}{(1+\theta)^5}}{5!} x^5 \right| \leq \frac{M}{5!} (0,5-0)^5 = \frac{24}{5!} \times 0,5^5 //$$

$$\Theta \text{ entre } \underset{a}{0} \text{ e } \underset{b}{0,5} \quad M = \sup_{\theta \in [0;0,5]} \left| \frac{24}{(1+\theta)^5} \right| = 24$$

Fórmula de Taylor c/ Resto Integral

Também existe

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função com derivadas contínuas até a ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$. Então $\forall x \in I$ existe um θ entre x e c , tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \frac{1}{n!} \int_c^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

$T_c^n(f(x))$
 $R_c^n(f(x))$

Polinómio de Taylor de f

Resto Integral

$$\left| R_c^n f(x) \right| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \int_a^b |f^{(n+1)}(t)| dt \leq \underbrace{\frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{Majorante do erro cometido}}$$

Voltando ao exemplo 6 e usando o resto integral

$$R_0^4(\ln(1+x)) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(5)}(t) (x-t)^4 dt$$

$x = 0,5$

$$\leq \frac{(0,5-0)^n}{n!} \int_0^{0,5} |f^{(5)}(t)| dt \leq M \frac{(0,5-0)^n}{n!}$$