# Programação Vetorial

Modificação de rank, ordenação e reduções

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

# Sumário

- 1. Modificação do rank e da profundidade
- 2. Ordenação
- 3. Reduções e varreduras

► A função monádica ↑ (*mix*, mistura) permite a criação de *arrays* de *rank* maior

- A função monádica † (*mix*, mistura) permite a criação de *arrays* de *rank* maior
- ► Ela rearranja os elementos de um *array* em um novo *array* de *rank* uma unidade maior, com um nível a menos de aninhamento

```
1(2 3 5) (7 9 11)
2 3 5
7 9 11
```

- A função monádica † (*mix*, mistura) permite a criação de *arrays* de *rank* maior
- ► Ela rearranja os elementos de um *array* em um novo *array* de *rank* uma unidade maior, com um nível a menos de aninhamento

```
1(2 3 5) (7 9 11)
2 3 5
7 9 11
```

➤ Se os elementos tem formas distintas, serão utilizados elementos para preencher os espaços em branco, de acordo com o tipo do primeiro componente do elemento

- A função monádica † (mix, mistura) permite a criação de arrays de rank maior
- ► Ela rearranja os elementos de um *array* em um novo *array* de *rank* uma unidade maior, com um nível a menos de aninhamento

```
†(2 3 5) (7 9 11)
2 3 5
7 9 11
```

- ➤ Se os elementos tem formas distintas, serão utilizados elementos para preencher os espaços em branco, de acordo com o tipo do primeiro componente do elemento
- Em geral, inteiros são preenchidos com zero e caracteres com o espaço em branco

```
†(2 3) 5 (7 9 11) ♦ †'string' 'abc'
2 3 0
5 0 0
7 9 11
string
abc
```

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
<b>†</b> ( <i>mix</i> )	monádico	Rearranja os elementos do <i>array</i> em um novo <i>array</i> com <i>rank</i> uma unidade maior
Unicode	TAB	APL
U+2191	^   <tab></tab>	APL + y

#### Cisão

► A função monádica ↓ (*split*, cisão) gera, a partir do argumento, um novo *array* aninhado, com *rank* uma unidade menor do que o argumento

#### Cisão

- ► A função monádica ↓ (split, cisão) gera, a partir do argumento, um novo array aninhado, com rank uma unidade menor do que o argumento
- Caso o argumento seja escalar, o retorno terá rank zero

#### Cisão

- ► A função monádica ↓ (split, cisão) gera, a partir do argumento, um novo array aninhado, com rank uma unidade menor do que o argumento
- Caso o argumento seja escalar, o retorno terá rank zero
- Se o argumento tem forma  $d_1 \ d_2 \ \dots \ d_N$ , então o retorno terá forma  $d_1 \ d_2 \ \dots \ d_{N-1}$ , cujos elemento de profundidade 1 tem forma  $d_N$

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
↓ (split)	monádico	Rearranja os elementos do <i>array</i> em um novo <i>array</i> com <i>rank</i> uma unidade menor
Unicode	TAB	APL
U+2193	v   <tab></tab>	APL + u

# Vetores inclusos

 Aplicar a cisão em um vetor v (array de dimensão 1) resultará em um array de dimensão zero cujo conteúdo é próprio v

# Vetores inclusos

 Aplicar a cisão em um vetor v (array de dimensão 1) resultará em um array de dimensão zero cujo conteúdo é próprio v

```
+ 2 3 5 7 11
2 3 5 7 11
p + 2 3 5 7 11
pp + 2 3 5 7 11
```

Neste caso, o retorno de ↓v tem a mesma forma do vetor ⊕

# **Vetores inclusos**

▶ Aplicar a cisão em um vetor v (array de dimensão 1) resultará em um array de dimensão zero cujo conteúdo é próprio v

```
+ 2 3 5 7 11
2 3 5 7 11
p + 2 3 5 7 11
pp + 2 3 5 7 11
```

- Neste caso, o retorno de ↓v tem a mesma forma do vetor ⊕
- Este retorno é denominado vetor incluso (*enclosed vector*) ou escalar aninhado (*nested scalar*)

### **Escalares aninhados**

► Aplicar uma cisão em um escalar simples (profundidade zero) produz o próprio escalar

3

### **Escalares aninhados**

Aplicar uma cisão em um escalar simples (profundidade zero) produz o próprio escalar

 Aplicar uma cisão em um escalar aninhado aumenta sua profundidade em uma unidade

```
≡ 2 3 5 7 11 ♦ ≡ ↓↓ 2 3 5 7 11
```

### **Escalares aninhados**

► Aplicar uma cisão em um escalar simples (profundidade zero) produz o próprio escalar

 Aplicar uma cisão em um escalar aninhado aumenta sua profundidade em uma unidade

```
≡ 2 3 5 7 11 ◆ ≡ ↓↓ 2 3 5 7 11
```

 Aplicar uma mistura em um escalar aninhado reduz sua profundidade em uma unidade

```
≡ ↑↓↓ 2 3 5 7 11
```

3

2

### Inclusão

➤ A função monádica < (enclose) gera um escalar a partir de qualquer array, incluindo-o em um vetor aninhado (escalar incluso)</p>

```
c 2 2 p 2 3 5 7
2 3
5 7
pp c 2 2 p 2 3 5 7
```

# Inclusão

► A função monádica < (enclose) gera um escalar a partir de qualquer array, incluindo-o em um vetor aninhado (escalar incluso)

```
c 2 2 p 2 3 5 7
2 3
5 7
pp c 2 2 p 2 3 5 7
```

A inclusão é usada principalmente em funções escalares, ou que tratam os escalares de forma diferenciada

```
2 3 5 + 7 11 13
9 14 18
2 3 5 + 6 7 11 13
9 13 15 10 14 16 12 16 18
```

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
c (enclose)	monádico	Retorna um escalar incluso que contém o <i>array</i> passado como parâmetro
Unicode	TAB	APL
U+2282	c c <tab></tab>	APL + z

# Extração

A função monádica - (disclose, first) faz o trabalho inverso da inclusão

### Extração

- A função monádica > (disclose, first) faz o trabalho inverso da inclusão
- Quando aplicada em um vetor aninhado, ela desfaz a inclusão e retorna o vetor

```
>= 2 3 5 7
2 3 5 7
ρρ >= 2 3 5 7
1
```

### Extração

- A função monádica (disclose, first) faz o trabalho inverso da inclusão
- Quando aplicada em um vetor aninhado, ela desfaz a inclusão e retorna o vetor

▶ Se for aplicada em um array, ela extrai o primeiro elemento do nível de profundidade 1

```
- 2 3 5 7
2
- ((2 3 5) 7 ((11 13) (17 19 23)))
2 3 5
```

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
(disclose, first)	monádico	Retorna o primeiro elemento no nível de profundidade 1
Unicode	TAB	APL
U+2283	) ) <tab></tab>	APL + x

► APL não disponibiliza uma primitiva para a ordenação dos elementos de um array

- ▶ APL não disponibiliza uma primitiva para a ordenação dos elementos de um *array*
- Para ordenar um vetor é preciso recorrer as funções de ranqueamento

- ► APL não disponibiliza uma primitiva para a ordenação dos elementos de um *array*
- Para ordenar um vetor é preciso recorrer as funções de ranqueamento
- ► A função monádica 🌢 (grade up) ranqueia um vetor ascendentemente

- ► APL não disponibiliza uma primitiva para a ordenação dos elementos de um *array*
- Para ordenar um vetor é preciso recorrer as funções de ranqueamento
- ► A função monádica 🌢 (grade up) ranqueia um vetor ascendentemente
- ightharpoonup Ela retorna um vetor de índices, cujo i-ésimo elemento indica o índice do i-ésimo menor elemento do argumento

- APL não disponibiliza uma primitiva para a ordenação dos elementos de um array
- Para ordenar um vetor é preciso recorrer as funções de ranqueamento
- ► A função monádica 🌢 (grade up) ranqueia um vetor ascendentemente
- ightharpoonup Ela retorna um vetor de índices, cujo i-ésimo elemento indica o índice do i-ésimo menor elemento do argumento

▶ A ordenação de um vetor pode ser obtida por meio da expressão a[₄a]

```
a[Aa]
0 1 1 3 4 6 7 8 9
```

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
<b>Å</b> (grade up)	monádico	Ranqueia o argumento de forma ascendente
Unicode	TAB	APL
U+234B	A   <tab></tab>	APL + Shift + 4

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
[ ] (square brackets)	-	v[u] retorna os elementos do vetor v que ocupam os índices indicado pelo vetor u
Unicode	TAB	APL
U+005[BD]	-	-

# Ordenação lexicográfica

▶ A ordenação apresentada ordena os elementos de um array segundo a ordem lexicográfica

```
A + 5 3 p a
A
6 9 3
1 4 7
1 8 0
6 9 3
1 4 7
4 A
2 5 3 1 4
A Ordem Lexicográfica das Linhas
```

▶ A ordenação apresentada ordena os elementos de um array segundo a ordem lexicográfica

Ordenação

A função diádica [] (index) permite, em conjunto com uma inclusão, ordenar um array de forma arbitrária

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
[] (index)	diádico	Retorna os índices do argumento à direita indicados pelo escalar à esquerda
Unicode	TAB	APL
U+2337	[   <tab></tab>	APL + Shift + l

► A função monádica † (grade down) retorna o ranqueamento descendente de seu argumento

▶ A função monádica † (grade down) retorna o ranqueamento descendente de seu argumento

▶ Strings são ordenadas de acordo com os valores dos caracteres na tabela Unicode

```
sortDesc ← (<♥)[]⊢
sortDesc 'abacaxi' 'abobora' 'abacate'
abobora abacaxi abacate
```

Símbolo	Aridade	Descrição
<b>♥</b> (grade down)	monádico	Ranqueia o argumento de forma descendente
Unicode	TAB	APL
U+2352	V   <tab></tab>	APL + Shift + 3

► É possível obter o índice do menor ou do maior elemento de um *array* usando os *atops* ¬♠ e ¬♥, respectivamente

```
a ← 6 9 3 1 4 7 1 8 0
> 4 a
```

### Aplicações do ranqueamento

9

► É possível obter o índice do menor ou do maior elemento de um *array* usando os *atops* ¬♠ e ¬♥, respectivamente

```
a ← 6 9 3 1 4 7 1 8 0
> 4 a
```

 O duplo ranqueamento permite obter as posições que cada elemento do array ocupará após a ordenação

```
4a

9 4 7 3 5 1 6 8 2

44a

6 9 4 2 5 7 3 8 1
```

As funções de ranqueamento também tem formas diádicas

- As funções de ranqueamento também tem formas diádicas
- O parâmetro à esquerda indicará o alfabeto α que será utilzado como critério de ordenação

- As funções de ranqueamento também tem formas diádicas
- O parâmetro à esquerda indicará o alfabeto α que será utilzado como critério de ordenação
- No exemplo a seguir os caracteres ímpares devem anteceder os caracteres pares na ordenação

```
n ← '693147180'

o ← '1357902468' Å n

o

4 7 3 6 2 9 5 1 8

n[o]

113790468
```

- As funções de ranqueamento também tem formas diádicas
- O parâmetro à esquerda indicará o alfabeto α que será utilzado como critério de ordenação
- No exemplo a seguir os caracteres ímpares devem anteceder os caracteres pares na ordenação

```
n ← '693147180'

o ← '1357902468' Å n

o

4 7 3 6 2 9 5 1 8

n[o]

113790468
```

► Caracteres que não forem indicado no alfabeto serão considerados equivalentes, ocupando a posição logo após o último caractere indicado

Símbolo	Aridade	Descrição
<b>Å</b> (grade up)	diádico	Ranqueia o argumento de forma ascendente, de acordo com o alfabeto indicado
Unicode	TAB	APL
U+2352	V   <tab></tab>	APL + Shift + 4

Símbolo	Aridade	Descrição
<b>♥</b> (grade down)	diádico	Ranqueia o argumento descendentemente, de acordo com o alfabeto indicado
Unicode	TAB	APL
U+2352	V   <tab></tab>	APL + Shift + 3

► Em APL, um operador recebe um ou dois operandos (geralmente funções) como argumentos e retorna uma função (monádica ou diádica)

- ► Em APL, um operador recebe um ou dois operandos (geralmente funções) como argumentos e retorna uma função (monádica ou diádica)
- O operador / (reduce) é monádico e retorna uma função ambivalente (que pode ser usada de forma monádica ou diádica)

- ► Em APL, um operador recebe um ou dois operandos (geralmente funções) como argumentos e retorna uma função (monádica ou diádica)
- O operador / (reduce) é monádico e retorna uma função ambivalente (que pode ser usada de forma monádica ou diádica)
- O nome diz respeito ao fato de que a função resultante reduz o rank do argumento em 1 unidade

- ► Em APL, um operador recebe um ou dois operandos (geralmente funções) como argumentos e retorna uma função (monádica ou diádica)
- O operador / (reduce) é monádico e retorna uma função ambivalente (que pode ser usada de forma monádica ou diádica)
- O nome diz respeito ao fato de que a função resultante reduz o rank do argumento em 1 unidade
- A redução de um vetor é direta: F/a b c d e ... equivale a
   a F b F c F d F e F ..., onde o resultado tem a mesma forma do argumento, exceto o último eixo

```
+/ 2 3 5 7 11
28
+/(2 3 5)(7 11 13)
9 14 18
```



# Características da redução

► A ordem de precedência das funções em APL (associativa à direita) afeta o comportamento da redução:

Reducões e varreduras

# Características da redução

▶ A ordem de precedência das funções em APL (associativa à direita) afeta o comportamento da redução:

 Em arrays com rank maior do que um, a redução se aplica sempre na última dimensão

Símbolo	Aridade	Descrição
<b>⊗</b> (logarithm)	diádico	Computa $\log_{lpha}\omega$
Unicode	TAB	APL
U+235F	* 0 <tab></tab>	APL + Shift + *

Símbolo	Aridade	Descrição
<b>⊗</b> (logarithm)	monádico	Computa $\ln \omega$
Unicode	TAB	APL
U+235F	* O <tab></tab>	APL + Shift + *

### Redução nas demais dimensões

O operador + (reduce first) produz uma redução em relação à primeira dimensão

×**/A** 4 10 18

## Redução nas demais dimensões

O operador + (reduce first) produz uma redução em relação à primeira dimensão

```
×/A
4 10 18
```

Para produzir uma redução em relação a k-ésima dimensão, use a notação f/[k]

## Redução nas demais dimensões

O operador + (reduce first) produz uma reducão em relação à primeira dimensão

```
\times \neq A
4 10 18
```

Para produzir uma redução em relação a k-ésima dimensão, use a notação f/[k]

```
A ← 2 3 5 o 19 ♦ A
                           A tem duas matrizes com 5 linhas e 3 colunas cada
1 2 3 4 5
6 7 8 9 1
2 3 4 5 6
7 8 9 1 2
3 4 5 6 7
8 9 1 2 3
     +/[2] A
                           A A redução tem 2 linhas com colunas, cada elemento
9 12 15 18 12
                           A correponde a soma das linhas das matrizes de A
18 21 15 9 12
```

A notação f/[1] equivale a f/

Símbolo	Aridade	Descrição
/ (reduce first)	operador	Produz um redução em relação a primeira dimensão
Unicode	TAB	APL
U+233F	/ - <tab></tab>	APL + ;

# Reduções diádicas

▶ Na forma diádica, L f/ R é uma redução que usa uma janela de tamanho L em R

## Reduções diádicas

- ▶ Na forma diádica, L f/ R é uma redução que usa uma janela de tamanho L em R
- Esta redução por janela não altera o rank do argumento

```
2 +/ 2 3 5 7 11
5 8 12 18
3 +/ 2 3 5 7 11
10 15 23
```

## Reduções diádicas

- ▶ Na forma diádica, L f/ R é uma redução que usa uma janela de tamanho L em R
- Esta redução por janela não altera o rank do argumento

```
2 +/ 2 3 5 7 11
5 8 12 18
3 +/ 2 3 5 7 11
10 15 23
```

Se L é negativo, a janela é invertida

```
2 -/ 2 3 5 7 11

-1 -2 -2 -4

-2 -/ 2 3 5 7 11

1 2 2 4
```

## Funções lógicas e reduções

A função all retorna 1 se todos os booleanos do argumento são iguais a 1

```
all + ^/
all 1 0 0 1 0 1
```

## Funções lógicas e reduções

A função all retorna 1 se todos os booleanos do argumento são iguais a 1

```
all + ^/
all 1 0 0 1 0 1
```

A função any retorna 1 se ao menos um booleano do argumento é igual a 1

```
any + v/
any 1 0 0 1 0 1
```

## Funções lógicas e reduções

A função all retorna 1 se todos os booleanos do argumento são iguais a 1

```
all + ^/
all 1 0 0 1 0 1
```

A função any retorna 1 se ao menos um booleano do argumento é igual a 1

```
any + v/
any 1 0 0 1 0 1
```

▶ De fato, a função diádica ^ computa o mínimo múltiplo comum de seus argumentos e equivale a conjunção lógica para valores booleanos

# Funções lógicas e reduções

A função all retorna 1 se todos os booleanos do argumento são iguais a 1

```
all + \( \struct / \)
all 1 0 0 1 0 1
```

A função any retorna 1 se ao menos um booleano do argumento é igual a 1

```
any + v/
any 1 0 0 1 0 1
```

- ▶ De fato, a função diádica ^ computa o mínimo múltiplo comum de seus argumentos e equivale a conjunção lógica para valores booleanos
- A função diádica v computa o maior divisor comum de seus argumentos, assumindo que  $\gcd(0,0)=0$ , de forma que equivale a disjunção lógica para valores booleanos

Símbolo	Aridade	Descrição
<b>∧</b> ( <i>lcm</i> )	diádico	Computa o mínimo múltiplo comum entre α e ω
Unicode	TAB	APL
U+2227	^ ^ <tab></tab>	APL + O

Símbolo	Aridade	Descrição
<b>V</b> (gcd)	diádico	Computa o maior divisor comum entre $\alpha$ e $\omega$
Unicode	TAB	APL
U+2228	v v <tab></tab>	APL + 9

### **Fatorial**

ightharpoonup É possível computar o fatorial de um inteiro positivo n de, no mínimo, três formas distintas em APL

#### **Fatorial**

- ightharpoonup É possível computar o fatorial de um inteiro positivo n de, no mínimo, três formas distintas em APL
- A primeira delas é recorrer a função monádica !, a segunda é implementar uma dfn recursiva e a terceira é usar uma redução

#### **Fatorial**

- ullet É possível computar o fatorial de um inteiro positivo n de, no mínimo, três formas distintas em APL
- A primeira delas é recorrer a função monádica !, a segunda é implementar uma dfn recursiva e a terceira é usar uma redução
- ► A função cmpx do workspace dfns pode ser usada para comparar a performance destas três implementações

#### Varredura

O operador \ (scan) gera uma função monádica que age nos prefixos das últimas dimensões de seu parâmetro

#### Varredura

- O operador \ (scan) gera uma função monádica que age nos prefixos das últimas dimensões de seu parâmetro
- ► A expressão f\a b c d ... equivale a (f/a) (f/a b) (f/a b c) ...

#### Varredura

- O operador \ (scan) gera uma função monádica que age nos prefixos das últimas dimensões de seu parâmetro
- ► A expressão f\a b c d ... equivale a (f/a) (f/a b) (f/a b c) ...

▶ O operador † gera uma varredura na primeira dimensão

Símbolo	Aridade	Descrição
\ (scan)	operador	Gera uma varredura na última dimensão
Unicode	TAB	APL
U+005C	-	-

Símbolo	Aridade	Descrição
(scan first)	operador	Gera uma varredura na primeira dimensão
Unicode	TAB	APL
U+2340	\ - <tab></tab>	APL + .

Reducões e varredura:

#### Referências

- 1. APL Wiki. Defined function (traditional), acesso em 27/09/2021.
- 2. APL Wiki. Dfns workspace, acesso em 01/10/2021.
- 3. Dyalog. Try APL Interactive lessons, acesso em 23/09/2021.
- 4. IVERSON, Kenneth E. A Programming Language, John Wiley and Sons, 1962.
- 5. Unicode Character Table. Página principal, acesso em 27/09/2021.
- 6. Xah Lee. Unicode APL Symbols, acesso em 23/09/2021.