Combinadores

Introdução

Prof. Edson Alves

Campus UnB Gama: Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia

Moses Schönfinkel

* 1889 † 1942

Moses Schönfinkel

* 1889 † 1942

On the building blocks of mathematical logic

Moses Schönfinkel

 * 1889 † 1942

On the building blocks of mathematical logic

- As ideias foram apresentadas em 1920

Moses Schönfinkel

 * 1889 † 1942

On the building blocks of mathematical logic

- ⋆ As ideias foram apresentadas em 1920
- ⋆ O artigo foi publicado em 1924

Moses Schönfinkel

 * 1889 † 1942

On the building blocks of mathematical logic

- As ideias foram apresentadas em 1920
- O artigo foi publicado em 1924
- Introduziu os combinadores

Moses Schönfinkel

 * 1889 † 1942

On the building blocks of mathematical logic

- ⋆ As ideias foram apresentadas em 1920
- ⋆ O artigo foi publicado em 1924
- ⋆ Introduziu os combinadores
- ⋆ Resgatou a ideia de Frege (1893) de tratar todas as funções como unárias (*currying*)

Conectivos da lógica proposicional booleana

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação[1]	Leitura	Definição

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação[1]	Leitura	Definição
$\bar{a}$	não a	Inverte o valor lógico de a

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação[1]	Leitura	Definição
$\bar{a}$	não a	Inverte o valor lógico de a
$a \vee b$	a ou b	Falso apenas se a e b são ambos falsos

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação[1]	Leitura	Definição
$\bar{a}$	não a	Inverte o valor lógico de a
$a \vee b$	a ou b	Falso apenas se a e b são ambos falsos
$a \mathbin{\&} b$	a e b	Verdadeiro apenas se a e b são ambos verdadeiros

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação[1]	Leitura	Definição
$\bar{a}$	não a	Inverte o valor lógico de a
$a \vee b$	a ou b	Falso apenas se a e b são ambos falsos
$a \mathbin{\&} b$	a e b	Verdadeiro apenas se a e b são ambos verdadeiros
$a \to b$	se a, então b	Falso apenas se a é verdadeiro e b é falso

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação[1]	Leitura	Definição
$\bar{a}$	não a	Inverte o valor lógico de a
$a \vee b$	a ou b	Falso apenas se a e b são ambos falsos
$a \,\&\, b$	a e b	Verdadeiro apenas se a e b são ambos verdadeiros
$a \to b$	se a, então b	Falso apenas se a é verdadeiro e b é falso
$a \sim b$	a é equivalente a b	Verdadeiro se ambos tem mesmo valor lógico

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação[1]	Leitura	Definição
$\bar{a}$	não a	Inverte o valor lógico de a
$a \vee b$	a ou b	Falso apenas se a e b são ambos falsos
$a \mathbin{\&} b$	a e b	Verdadeiro apenas se a e b são ambos verdadeiros
$a \rightarrow b$	se a, então b	Falso apenas se a é verdadeiro e b é falso
$a \sim b$	a é equivalente a b	Verdadeiro se ambos tem mesmo valor lógico

[1] Notação de Hilbert

Redução tradicional (linguagens de programação)

Redução tradicional (linguagens de programação)

Primitivos: $\overline{}$, $\&$, $\vee$

Redução tradicional (linguagens de programação)

Primitivos: $\overline{}, \&, \vee$

Reduções:

Redução tradicional (linguagens de programação)

Primitivos: $\bar{\ }, \&, \vee$

Reduções:

$$p \to q \;\equiv\; \bar{p} \vee q$$

Redução tradicional (linguagens de programação)

Primitivos: $\bar{\ }, \&, \vee$

Reduções:

$$p \to q \;\equiv\; \bar{p} \vee q$$

$$p \sim q \;\equiv\; (p \;\&\; q) \vee (\bar{p} \;\&\; \bar{q})$$

Redução de Whitehead e Russell

Redução de Whitehead e Russell

Primitivos: $\overline{\ }, \vee$

Redução de Whitehead e Russell

Primitivos: $\overline{\ }, \vee$

Reduções:

Redução de Whitehead e Russell

Primitivos: $\bar{\ }, \vee$

Reduções:

$$p \;\&\; q \;\equiv \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})}$$

Redução de Whitehead e Russell

Primitivos: $\bar{\ }, \vee$

Reduções:

$$p \,\&\, q \equiv \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})}$$

$$p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$$

Redução de Whitehead e Russell

Primitivos: $\bar{\ }, \vee$

Reduções:

$$p \,\&\, q \equiv \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})}$$

$$p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$$

$$p \sim q \equiv (p \rightarrow q) \,\&\, (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$$

Conectivos de Scheffer

Conectivos de Scheffer

Conectivo	Nome	Definição

Conectivos de Scheffer

Conectivo	Nome	Definição
$\downarrow$	negação conjunta	Verdadeira somente quando ambas proposições são falsas $(p \downarrow q \equiv \bar{p}$ & $\bar{q})$

Conectivos de Scheffer

Conectivo	Nome	Definição
$\downarrow$	negação conjunta	Verdadeira somente quando ambas proposições são falsas $(p \downarrow q \equiv \bar{p}\ \&\ \bar{q})$
$\uparrow$	negação disjunta	Falsa somente quando ambas proposições são verdadeiras $(p \uparrow q \equiv \bar{p} \vee \bar{q})$

Redução de Scheffer (1913)

Redução de Scheffer (1913)

Primitivo: $\uparrow$ (notação de Schönfinkel: $p \mid q$)

Redução de Scheffer (1913)

Primitivo: $\uparrow$ (notação de Schönfinkel: $p \mid q$)

Reduções:

Redução de Scheffer (1913)

Primitivo: $\uparrow$ (notação de Schönfinkel: $p \mid q$)

Reduções:

$$p \,\&\, q \;\equiv\; (p \mid q) \mid (p \mid q)$$

Redução de Scheffer (1913)

Primitivo: $\uparrow$ (notação de Schönfinkel: $p \mid q$)

Reduções:

$$p \mathbin{\&} q \;\equiv\; (p \mid q) \mid (p \mid q)$$

$$p \vee q \;\equiv\; (p \mid p) \mid (q \mid q)$$

Redução de Scheffer (1913)

Primitivo: $\uparrow$ (notação de Schönfinkel: $p \mid q$)

Reduções:

$$p \,\&\, q \;\equiv\; (p \mid q) \mid (p \mid q)$$

$$p \vee q \;\equiv\; (p \mid p) \mid (q \mid q)$$

$$\bar{p} \equiv\; (p \mid p)$$

Quantificadores

Quantificadores

Notação	Nome	Definição

Quantificadores

Notação	Nome	Definição
$(Ex)f(x)$ $\exists x.f(x)$	quantificador existencial	Existe ao menos um x que tem a propriedade f

Quantificadores

Notação	Nome	Definição
$(Ex)f(x)$ $\exists x.f(x)$	quantificador existencial	Existe ao menos um x que tem a propriedade f
$(x)f(x)$ $\forall x.f(x)$	quantificador universal	Todo x tem a propriedade f

Quantificadores

Notação	Nome	Definição
$(Ex)f(x)$ $\exists x . f(x)$	quantificador existencial	Existe ao menos um x que tem a propriedade f
$(x)f(x)$ $\forall x . f(x)$	quantificador universal	Todo x tem a propriedade f

Conectivo fundamental de Schönfinkel: $f(x) \mid^{x} g(x) \;\equiv\; (x)[\overline{f(x)} \vee \overline{g(x)}] \;\equiv\; (x)\overline{f(x) \mathbin{\&} g(x)}$

Reduções de Schönfinkel

Reduções de Schönfinkel

Primitivo: $f(x) \,|^{x}\, g(x)$

Reduções de Schönfinkel

Primitivo: $f(x) \,|^{x}\, g(x)$

Reduções:

Reduções de Schönfinkel

Primitivo: $f(x) \,|^{x}\, g(x)$

Reduções:

$$\bar{a} = a \,|^{x}\, a$$

Reduções de Schönfinkel

Primitivo: $f(x) \,|^x\, g(x)$

Reduções:

$$\bar{a} = a \,|^x\, a$$

$$a \vee b = (x)(a \vee b) = \bar{a} \,|^x\, \bar{b} = (a \,|^y\, a) \,|^x\, (b \,|^y\, b)$$

Reduções de Schönfinkel

Primitivo: $f(x) \,|^x\, g(x)$

Reduções:

$$\bar{a} = a \,|^x\, a$$

$$a \vee b = (x)(a \vee b) = \bar{a} \,|^x\, \bar{b} = (a \,|^y\, a) \,|^x\, (b \,|^y\, b)$$

$$(x) f(x) = (x)(\overline{\overline{f(x)}} \vee \overline{\overline{f(x)}}) = \overline{f(x)} \,|^x\, \overline{f(x)} = (f(x) \,|^y\, f(x)) \,|^x\, (f(x) \,|^y\, f(x))$$

Reduções de Schönfinkel

Primitivo: $f(x) \mid^x g(x)$

Reduções:

$$\bar{a} = a \mid^x a$$

$$a \vee b = (x)(a \vee b) = \bar{a} \mid^x \bar{b} = (a \mid^y a) \mid^x (b \mid^y b)$$

$$(x)f(x) = (x)(\overline{\overline{f(x)}} \vee \overline{\overline{f(x)}}) = \overline{f(x)} \mid^x \overline{f(x)} = (f(x) \mid^y f(x)) \mid^x (f(x) \mid^y f(x))$$

$$(Ex)f(x) = \overline{(x)\overline{f(x)}}$$

Cálculo funcional

Funções de um argumento

Uma função f de um argumento x pode ser representada pela justaposição dos símbolos da função e de seu argumento. Em notação matemática,

$$f(x) \equiv fx$$

Cálculo funcional

Funções de vários argumentos

Uma função $F(x, y)$ de dois argumentos pode ser reduzida a duas funções de um único argumento. Defina, para um x fixo, a função $G_x(y)$ tal que $G_x(y) = F(x, y)$. Ou seja, uma vez fixado x, G_x coincide com F em todos os pares (x, y). Como G é uma função de um único argumento, podemos escrever $G = fx$ e

$$F(x, y) = G_x(y) = (G_x)y = (fx)y = fxy$$

Esta redução pode ser aplicada para uma função H com N argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_N$:

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_N) = Hx_1x_2 \ldots x_N$$

Combinadores

Combinadores

- ⋆ No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*

Combinadores

- No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*
- Foram propostos cinco combinadores:

Combinadores

- No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*

- Foram propostos cinco combinadores:
  - Função identidade I (*Identitätsfunktion*)

Combinadores

- No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*

- Foram propostos cinco combinadores:
  - Função identidade I (*Identitätsfunktion*)
  - Função constância C (*Konstanzfunktion*)

Combinadores

- No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*

- Foram propostos cinco combinadores:
  - Função identidade I (*Identitätsfunktion*)
  - Função constância C (*Konstanzfuncktion*)
  - Função de intercâmbio T (*Vertauschungsfunktion*)

Combinadores

- No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*

- Foram propostos cinco combinadores:
  - Função identidade I (*Identitätsfunktion*)
  - Função constância C (*Konstanzfuncktion*)
  - Função de intercâmbio T (*Vertauschungsfunktion*)
  - Função de composição Z (*Zusammeensetzungsfunktion*)

Combinadores

- ⋆ No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*

- ⋆ Foram propostos cinco combinadores:
  - Função identidade I (*Identitätsfunktion*)
  - Função constância C (*Konstanzfuncktion*)
  - Função de intercâmbio T (*Vertauschungsfunktion*)
  - Função de composição Z (*Zusammeensetzungsfunktion*)
  - Função de fusão S (*Verschmelzungsfunktion*)

Combinadores

- ⋆ No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*

- ⋆ Foram propostos cinco combinadores:
  - Função identidade I (*Identitätsfunktion*)
  - Função constância C (*Konstanzfuncktion*)
  - Função de intercâmbio T (*Vertauschungsfunktion*)
  - Função de composição Z (*Zusammeensetzungsfunktion*)
  - Função de fusão S (*Verschmelzungsfunktion*)

- ⋆ Posteriormente, o combinador C passou a usar a notação K, remetendo ao termo original em alemão

Combinador I

Função identidade

A função identidade I é uma função cujo argumento não tem nenhuma restrição (pode ser, inclusive, uma função) e cujo valor sempre coincide com seu argumento. Assim,

$$Ix = x$$

onde o sinal de igualdade não representa equivalência lógica, e sim que ambos lados da expressão tem mesmo significado (por exemplo, $II = I$).

Combinador K

Função constância

Assuma que, para um argumento x arbitrário, o valor da função seja sempre igual a um valor fixo a. Esta função depende de a, logo tem a forma Ka. Podemos escrever

$$(Ka)y = a$$

Permitindo que a também seja variável, obtemos

$$(Kx)y = x, \quad \text{ou} \quad Kxy = x,$$

a equação que define a função constância K.

Combinador T

Função de intercâmbio

A função de intercâmbio T recebe como argumento uma função da função φxy e retorna uma função

$$\psi = T\varphi$$

tal que o valor ψxy coincide com φyx para todos os argumentos x e y para os quais φ tem significado. Assim,

$$(T\varphi)xy = \varphi yx,$$

onde os parêntesis podem ser omitidos.

Combinador Z

Função de composição

Se uma função f de um argumento recebe, como argumento, o valor de uma função g de um argumento, a função $F = f(gx)$ é a função composta de f e g. A função F é o valor de uma certa função Z' de f e g. Assim

$$[Z'(\varphi, \chi)]x = \varphi(\chi x)$$

Usando a convenção de trocar Z' por uma função de um argumento, obtemos

$$Z\varphi\chi x = \varphi(\chi x),$$

a função de composição Z, onde os parêntesis não podem ser eliminados.

Combinador S

Função de fusão

Se na expressão fxy substituirmos y pelo valor de uma função g em x, obtemos

$$fx(gx) = Fx$$

Esta função $F = S'(f, g)$ depende das funções f e g, de modo que $[S'(\varphi, \chi)]x = \varphi x(\chi x)$. A substuição por funções de um argumento leva a

$$S\varphi\chi x = \varphi x(\chi x),$$

a função de fusão S.

Referências

- **SCHÖNFINKEL**, Moses. *On the building blocks of the mathematical logic.* Mathematische Annalen (in German). 92 (3–4): 305–316, 1924.
- **O'LEARY**, Daniel J. *The Propositional Logic of Principia Mathematica and Some of Its Forerunners*· Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies 8 (1) (1988).
- **FILHO**, Edgard de Alencar. *Introdução à Lógica Matemática.* Nobel, 2009.