Lambda Calculus

Aritmética

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

2020

Sumário

Contexto

- É esperado que uma linguagem de programação seja capaz de realizar operações aritméticas com números naturais
- Contudo, conforme dito anteriormente, o cálculo λ contém apenas dois termos primitivos: o símbolo λ e o ponto final
- Assim, como no caso dos valores lógicos, é preciso representar os números naturais por meio de expressões-λ
- Como os inteiros são infinitos, é preciso definir uma forma de deduzir todos eles a partir de algum valor inicial

Zero

Definição de zero

O número natural **zero** pode ser representado pelo termo-λ

$$0 \equiv \lambda sz.z$$

Observação: veja que, de acordo com a definição, acima $0 \equiv F$, onde F é o valor lógico falso.

Sucessor

Sucessor

O termo-λ

$$S \equiv \lambda wyx.y(wyx)$$

é denominado função sucessor, ou simplesmente, **sucessor**, de um número natural.

Observação: a função sucessor permite a definição de todos os números naturais a partir do zero: $1 \equiv S0, 2 \equiv S1, \ldots$.

Definição de 1

$$
\begin{aligned}
1 &\equiv S0 \\
&\equiv (\lambda wyx.y(wyx))(\lambda sz.z) \\
&\equiv (\lambda w.(\lambda yx.y(wyx)))(\lambda sz.z) \\
&\equiv (\lambda yx.y(wyx))[w := (\lambda sz.z)] \\
&\equiv \lambda yx.y((\lambda sz.z)yx) \\
&\equiv \lambda yx.y(x) \\
&\equiv \lambda sz.s(z)
\end{aligned}
$$

Observação: no último passo foi aplicada uma conversão-α para renomear as variáveis y e x, de modo a manter as variáveis s e z nas definições dos números naturais

Definição de 2

$$
\begin{aligned}
2 &\equiv S1 \\
&\equiv (\lambda wyx.y(wyx))(\lambda sz.s(z)) \\
&\equiv (\lambda w.(\lambda yx.y(wyx)))(\lambda sz.s(z)) \\
&\equiv (\lambda yx.y(wyx))[w := (\lambda sz.s(z))] \\
&\equiv \lambda yx.y((\lambda sz.s(z))yx) \\
&\equiv \lambda yx.y(y(x)) \\
&\equiv \lambda sz.s(s(z))
\end{aligned}
$$

Observação: a definição dos naturais pode interpretada como composições de funções. Se s é uma função, 0 significa simplesmente retornar o argumento z; 1 significa aplicar a função uma vez $s(z)$; 2 significa aplicar a função duas vezes: $s(s(z)) = s^2(z)$, e assim por diante.

Teste Condicional

Função Z

O termo-λ

$$Z \equiv \lambda x.xF\neg F$$

o qual chamaremos **função $\mathbf{Z}$**, retorna verdadeiro (T) quando aplicada em 0, e retorna falso (F) para qualquer outro número natural.

Observações sobre a função $\mathbf{Z}$

- Para entender o comportamento da função $\mathbf{Z}$, observe que

$$0yx \equiv (\lambda sz.z)yx \equiv x,$$

isto é, quando aplicada ao termo xy, 0 ignora a "função" y e retorna o argumento x

- O termo-λ F, quando aplicado em qualquer termo lambda z, retorna a identidade $\mathbf{I}$, pois

$$Fz \equiv (\lambda xy.y)z \equiv (\lambda x.(\lambda y.y))z \equiv (\lambda y.y)[x := z] \equiv \lambda y.y \equiv \mathbf{I}$$

- O natural N aplica N vezes o termo y ao argumento x:

$$Nyx \equiv (\lambda sz.s(s(\ldots s(z)))yx \equiv y(y(\ldots y(x)))$$

Observações sobre a função $\mathbf{Z}$

- Assim,

$$\begin{aligned} Z0 &\equiv (\lambda x.xF\neg F)0 \\ &\equiv 0F\neg F \equiv (0F\neg)F \\ &\equiv \neg F \equiv T \end{aligned}$$

- Para um natural N qualquer,

$$\begin{aligned} ZN &\equiv (\lambda x.xF\neg F)N \\ &\equiv NF\neg F \equiv (NF\neg)F \\ &\equiv \mathbf{I}F \equiv F, \end{aligned}$$

pois uma ou mais aplicações de F ao argumento $\neg$ resulta na identidade $\mathbf{I}$

Pares

Pares

No cálculo λ, o **par** (a, b) pode ser representado pela expressão-λ

$$(a, b) \equiv \lambda z.zab$$

O **primeiro elemento** do par pode ser extraído a partir da aplicação desta expressão ao termo T:

$$(\lambda z.zab)T \equiv Tab \equiv a$$

O **segundo elemento** é extraído por meio da aplicação da expressão ao termo F:

$$(\lambda z.zab)F \equiv Fab \equiv b$$

Par sucessor

Proposição

O termo-λ

$$\Phi \equiv (\lambda pz.z(S(pT))(pT))$$

transforma o par $(n, n-1)$ no par $(n+1, n)$.

Demonstração

De fato, o termo (pT) extrai o primeiro elemento do par, e o termo $S(pT)$ é o sucessor deste elemento. Assim,

$$\begin{aligned}
\Phi((n, n-1)) &\equiv (\lambda pz.z(S(pT))(pT))(\lambda z.z(n)(n-1)) \\
&\equiv (\lambda z.z(S((\lambda z.z(n)(n-1))T))((\lambda z.z(n)(n-1))T)) \\
&\equiv (\lambda z.z(S(Tn(n-1)))(Tn(n-1))) \\
&\equiv (\lambda z.z(Sn)n) \\
&\equiv (\lambda z.z(n+1)n) \equiv (n+1, n)
\end{aligned}$$

Antecessor

Proposição

A expressão-λ

$$P \equiv (\lambda n.n\Phi(\lambda z.z00))F$$

computa o **antecessor** de qualquer natural N maior que zero, e $P0 = 0$.

Demonstração

Temos que

$$P0 \equiv ((\lambda n.n\Phi(\lambda z.z00))F)0 \equiv 0\Phi(\lambda z.z00)F \equiv (\lambda z.z00)F \equiv 0$$

Seja N um natural maior do que zero. Daí

$$\begin{aligned} PN &\equiv ((\lambda n.n\Phi(\lambda z.z00))F)N \equiv N\Phi(\lambda z.z00)F \\ &\equiv (\lambda z.zN(N-1))F \equiv N-1, \end{aligned}$$

pois $N\Phi(\lambda z.z00)$ corresponde a N aplicações do termo Φ ao par $(0,0)$.

Exemplo de antecessor

$$
\begin{aligned}
P3 &\equiv ((\lambda n.n\Phi(\lambda z.z00))F)3 \\
&\equiv 3\Phi(\lambda z.z00)F \\
&\equiv (\Phi(\Phi(\Phi(\lambda z.z00))))F \\
&\equiv (\Phi(\Phi(\lambda z.z10)))F \\
&\equiv (\Phi(\lambda z.z21))F \\
&\equiv (\lambda z.z32)F \\
&\equiv 2
\end{aligned}
$$

Desigualdade

Relação maior ou igual que

Sejam x e y dois números naturais. O termo-λ

$$G \equiv (\lambda xy.Z(xPy))$$

retorna verdadeiro (T) se x é **maior ou igual que** y, ou falso (F), caso contrário.

Observação: o termo G pode ser interpretado da seguinte maneira: se o resultado de se aplicar x vezes o antecessor P no natural y é zero, então $x \geq y$. Este procedimento remete à subtração $y - x$, exceto pelo fato de que o resultado será zero caso x seja maior do que y, e não o número negativo correspondente nos inteiros.

Igualdade

Relação igual a

O termo-λ

$$E \equiv (\lambda xy. \wedge (Z(xPy))(Z(yPx)))$$

retorna verdadeiro (T) se x e y são números naturais iguais, e falso (F), caso contrário.

Observação: $x = y$ se $x \geq y$ e $y \geq x$. Esta propriedade pode ser observada na definição da expressão E, na qual aparecem o termo-λ correspondente à operação lógica **e** $(\wedge)$ e termos oriundos da definição da desigualdade maior ou igual que (G).

Adição

Adição de números naturais

Seja S a expressão-λ que computa o sucessor de um número natural. O termo-λ

$$+ \equiv (\lambda xy.xSy)$$

corresponde à **adição** de números naturais.

Observação: de acordo com a definição acima, a adição $(+)$ é uma operação pré-fixada.

Exemplo de adição

$$
\begin{aligned}
+23 &\equiv (\lambda xy.xSy)23 \\
&\equiv 2S3 \\
&\equiv S(S(3)) \\
&\equiv S(4) \\
&\equiv 5
\end{aligned}
$$

Multiplicação

Multiplicação de números naturais

A expressão-λ

$$\times \equiv (\lambda xyz.x(yz))$$

corresponde à **multiplicação** de números naturais.

Observações:

(a) Do mesmo modo que foi observado na adição, a multiplicação ($\times$) é uma operação pré-fixada

(b) A interpretação desta expressão é a seguinte: x marca o número de vezes que será aplicada a função (yz), a qual aplica y vezes a função z

Exemplo de multiplicação

$$
\begin{aligned}
\times 2 3 &\equiv (\lambda xys.x(ys)) 2 3 \\
&\equiv \lambda s.2(3s) \\
&\equiv \lambda s.(\lambda yz.y(y(z))(3s) \\
&\equiv \lambda s.(\lambda z.3s(3sz)) \\
&\equiv \lambda s.(\lambda z.3s(s(s(s(z))))) \\
&\equiv \lambda s.(\lambda z.s(s(s(s(s(s(z))))))) \\
&\equiv \lambda sz.s(s(s(s(s(s(z)))))) \\
&\equiv 6
\end{aligned}
$$

Referências

1. **BARENDREGT**, Henk; **BARENDSEN**, Erik. *Introduction to Lambda Calculus*, March 2000.
2. **ROJAS**, Raúl. *A Tutorial Introduction to the Lambda Calculus*, FU Berlin, WS-97/98.
3. Wikipédia. Combinatory logic, acesso em 07/01/2020.
4. Wikipédia. Lambda calculus, acesso em 03/01/2020.