

# Programação Vetorial

## Tipos primitivos de dados e funções

**Prof. Edson Alves**

Faculdade UnB Gama

# Sumário

1. **Tipos primitivos de dados**
2. *Arrays*
3. **Funções**

## Expressões em APL

- ▶ APL pode ser vista como uma notação matemática que também é executável por máquina

## Expressões em APL

- ▶ APL pode ser vista como uma notação matemática que também é executável por máquina
- ▶ A linguagem é composta por funções, operadores, *arrays* e atribuições

## Expressões em APL

- ▶ APL pode ser vista como uma notação matemática que também é executável por máquina
- ▶ A linguagem é composta por funções, operadores, *arrays* e atribuições
- ▶ Qualquer código que pode ser aplicado a dados é chamado função

## Expressões em APL

- ▶ APL pode ser vista como uma notação matemática que também é executável por máquina
- ▶ A linguagem é composta por funções, operadores, *arrays* e atribuições
- ▶ Qualquer código que pode ser aplicado a dados é chamado função
- ▶ Dois exemplos de funções seriam a adição (+) e subtração (-)

## Expressões em APL

- ▶ APL pode ser vista como uma notação matemática que também é executável por máquina
- ▶ A linguagem é composta por funções, operadores, *arrays* e atribuições
- ▶ Qualquer código que pode ser aplicado a dados é chamado função
- ▶ Dois exemplos de funções seriam a adição (+) e subtração (-)
- ▶ As funções de APL podem ser aplicadas monadicamente (prefixada, um operando) ou diadicamente (infixada, dois operando, um à esquerda e outro à direita)

## Expressões em APL

- ▶ APL pode ser vista como uma notação matemática que também é executável por máquina
- ▶ A linguagem é composta por funções, operadores, *arrays* e atribuições
- ▶ Qualquer código que pode ser aplicado a dados é chamado função
- ▶ Dois exemplos de funções seriam a adição (+) e subtração (-)
- ▶ As funções de APL podem ser aplicadas monadicamente (prefixada, um operando) ou diadicamente (infixada, dois operando, um à esquerda e outro à direita)
- ▶ O tipo de dados mais elementar é o escalar (*array* de dimensão zero)



## Inteiros

- ▶ Números são tratados internamente pela APL quanto ao tamanho e tipo e podem ser misturados sem problemas

## Inteiros

- ▶ Números são tratados internamente pela APL quanto ao tamanho e tipo e podem ser misturados sem problemas
- ▶ Em APL os números podem ser inteiros, reais (em ponto flutuante) e números complexos

## Inteiros

- ▶ Números são tratados internamente pela APL quanto ao tamanho e tipo e podem ser misturados sem problemas
- ▶ Em APL os números podem ser inteiros, reais (em ponto flutuante) e números complexos
- ▶ Um escalar inteiro pode ser grafado usando a notação decimal padrão:

2 + 3

5

2 × 3

6

A a multiplicação é realizada pela função ×

## Inteiros

- ▶ Números são tratados internamente pela APL quanto ao tamanho e tipo e podem ser misturados sem problemas
- ▶ Em APL os números podem ser inteiros, reais (em ponto flutuante) e números complexos
- ▶ Um escalar inteiro pode ser grafado usando a notação decimal padrão:

2 + 3

5

2 × 3

`Ⓐ` a multiplicação é realizada pela função `×`

6

- ▶ Comentários são precedidos pelo símbolo `Ⓐ`

## Inteiros

- ▶ Números são tratados internamente pela APL quanto ao tamanho e tipo e podem ser misturados sem problemas
- ▶ Em APL os números podem ser inteiros, reais (em ponto flutuante) e números complexos
- ▶ Um escalar inteiro pode ser grafado usando a notação decimal padrão:

2 + 3  
5

2 × 3      A a multiplicação é realizada pela função ×  
6

- ▶ Comentários são precedidos pelo símbolo A
- ▶ Números negativos são precedidos pelo símbolo  $\bar{\phantom{x}}$  (*macron*)

2 - 3  
 $\bar{1}$

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
<b>+</b> ( <i>plus</i> )	diádico	Adição escalar

Unicode	TAB	APL
U+002B	-	-

---

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$-$ ( <i>minus</i> )	diádico	Subtração escalar

Unicode	TAB	APL
U+002D	-	-

---

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\times$ ( <i>times</i> )	diádico	Multiplicação escalar

Unicode	TAB	APL
U+00D7	x x <tab>	APL + -

---



## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\bar{\phantom{x}}$ ( <i>macron</i> )	monádico	Antecede um número negativo

Unicode	TAB	APL
U+00AF	- - <tab>	APL + 2

---

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
<b>␣</b> (comment)	monádico	Inicia um comentário. Tudo que o sucede até o fim da linha será considerado comentário
Unicode	TAB	APL
U+235D	o n <tab>	APL + ,

---

## Números reais

- ▶ Em escalares reais, a parte inteira é separada das casas decimais por meio do ponto final

$0.2 \div 3.5$   
0.05714285714

## Números reais

- ▶ Em escalares reais, a parte inteira é separada das casas decimais por meio do ponto final

```
0.2 ÷ 3.5  
0.05714285714
```

- ▶ APL também trata problemas de precisão de forma transparente ao usuário

```
2÷3 ♦ 6 × (2 ÷ 3)  
0.6666666667  
4
```

## Números reais

- ▶ Em escalares reais, a parte inteira é separada das casas decimais por meio do ponto final

```
0.2 ÷ 3.5  
0.05714285714
```

- ▶ APL também trata problemas de precisão de forma transparente ao usuário

```
2÷3 ♦ 6 × (2 ÷ 3)  
0.6666666667  
4
```

- ▶ O símbolo ♦ (*diamond*) separa duas expressões em uma mesma linha

## Números reais

- ▶ Em escalares reais, a parte inteira é separada das casas decimais por meio do ponto final

```
0.2 ÷ 3.5  
0.05714285714
```

- ▶ APL também trata problemas de precisão de forma transparente ao usuário

```
2÷3 ♦ 6 × (2 ÷ 3)  
0.6666666667  
4
```

- ▶ O símbolo ♦ (*diamond*) separa duas expressões em uma mesma linha
- ▶ Notação científica pode representar números muito pequenos ou grandes

```
2E-3 ♦ 5e7      A O E pode ser maiúsculo ou minúsculo  
0.002  
50000000
```


## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\div$ ( <i>divide</i> )	diádico	Divisão escalar. Divisão por zero resulta em um erro

Unicode	TAB	APL
U+00F7	: - <tab>	APL + =

---

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
 ( <i>diamond</i> )	diádico	Separador de expressões

Unicode	TAB	APL
U+22C4	< > <tab>	APL + '

---



## Constantes booleanas

- ▶ Em APL: falso é igual a 0 (zero) e verdadeiro é igual a 1 (um)

2 = 3

0

5 = 5.0

1

## Constantes booleanas

- ▶ Em APL: falso é igual a 0 (zero) e verdadeiro é igual a 1 (um)

2 = 3

0

5 = 5.0

1

- ▶ Os operadores relacionais retornam valores booleanos

2 ≠ 3

0

5 < 7

1

11 > 13

0

17 ≤ 19 ♦ 23 ≥ 27

1

0

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
<b>=</b> ( <i>equal</i> )	diádico	Igual a

Unicode	TAB	APL
U+003D	-	APL + 5

---

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\neq$ ( <i>not equal</i> )	diádico	Diferente de
Unicode	TAB	APL
U+2260	= / <tab>	APL + 8

---

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$<$ ( <i>less than</i> )	diádico	Menor que

Unicode	TAB	APL
U+003C	-	APL + 3

---

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\gt$ ( <i>greater than</i> )	diádico	Maior que

Unicode	TAB	APL
U+003E	-	APL + 7

---

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\leq$ ( <i>less than or equal to</i> )	diádico	Menor ou igual a

Unicode	TAB	APL
U+2264	< = <tab>	APL + 4

---

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\geq$ ( <i>greater than or equal to</i> )	diádico	Maior ou igual a

Unicode	TAB	APL
U+2265	> = <tab>	APL + 6

---



# Números complexos

- ▶ O caractere 'J' separa a parte real da parte imaginária em números complexos

$2J3 \times 5j^{-7}$   
31J1

A O J também pode ser minúsculo

## Números complexos

- ▶ O caractere 'J' separa a parte real da parte imaginária em números complexos

```
2J3 * 5j^-7
31J1
```

¶ O J também pode ser minúsculo

- ▶ Lembre-se de que o argumento à direita de uma função diádica é o resultado de toda a expressão à direita do símbolo

```
2 * 3 + 5
16
```

¶ equivale a  $2 \times (3 + 5)$

```
2 - 3 - 5 - 7 - 11
8
```

¶  $2 - (3 - (5 - (7 - 11)))$

```
2 ÷ 3 ÷ 5
3.333333333
```

¶  $10 \div 3$

```
2 * 0J1 * 3
0J^-2
```

¶  $2 \times (j \text{ elevado a } 3)$

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$*$ ( <i>power</i> )	diádico	Eleva o argumento à esquerda a potência indicada no argumento à direita

Unicode	TAB	APL
U+002A	-	APL + p

---

## Caracteres e strings

- ▶ Em APL, strings são vetores de caracteres

## Caracteres e strings

- ▶ Em APL, strings são vetores de caracteres
- ▶ Tanto caracteres quanto strings são delimitadas por aspas simples

```
'c'                A um caractere
c
'uma string'
uma string
```

## Caracteres e strings


- ▶ Em APL, strings são vetores de caracteres
- ▶ Tanto caracteres quanto strings são delimitadas por aspas simples

```
'c'                A um caractere
c
'uma string'
uma string
```

- ▶ Atribuições podem ser feitas por meio do símbolo  $\leftarrow$

```
s ← 'abacate'
'a' = s                A compara 'a' a cada caractere de s
1 0 1 0 1 0 0
s ≠ 'abacaxi'          A compara caracteres em posições correspondentes
0 0 0 0 0 1 1
```

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
 ( <i>assign</i> )	diádico	Atribui o argumento à direita ao argumento à esquerda

Unicode	TAB	APL
U+2190	< - <tab>	APL + '

---

## Funções aritméticas monádicas

- ▶ As funções aritméticas apresentadas até o momento tem versões monádicas

$+2j3$	A conjugado complexo
$2j^{-3}$	
$-^2$	A simétrico aditivo
2	
$\times 2j3$	A vetor unitário na direção do complexo
0.5547001962j0.8320502943	
$\div 2$	A inverso multiplicativo
0.5	
$*2$	A função exponencial
7.389056099	



## Funções aritméticas monádicas

- ▶ As funções aritméticas apresentadas até o momento tem versões monádicas

$+2j3$	A conjugado complexo
$2j^{-3}$	
$-^2$	A simétrico aditivo
2	
$\times 2j3$	A vetor unitário na direção do complexo
0.5547001962j0.8320502943	
$\div 2$	A inverso multiplicativo
0.5	
$*2$	A função exponencial
7.389056099	

- ▶ Quando aplicada a números reais, a função monádica  $\times$  corresponde à função `signum()` de muitas linguagens

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$+$ ( <i>conjugate</i> )	monádico	Conjugado complexo

Unicode	TAB	APL
U+002B	-	-

---

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$-$ ( <i>negate</i> )	monádico	Simétrico aditivo

Unicode	TAB	APL
U+002D	-	-

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\times$ ( <i>direction</i> )	monádico	Vetor unitário na direção do número

Unicode	TAB	APL
U+00D7	x x <tab>	APL + -

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\div$ ( <i>reciprocal</i> )	monádico	Inverso multiplicativo

Unicode	TAB	APL
U+00F7	: - <tab>	APL + =

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$*$ ( <i>exponential</i> )	monádico	$e$ elevado ao argumento à direita

Unicode	TAB	APL
U+002A	-	APL + p

# Arrays

- ▶ Em APL, a estrutura de dados fundamental é o *array*, e todos os dados estão contidos em *arrays*

# Arrays

- ▶ Em APL, a estrutura de dados fundamental é o *array*, e todos os dados estão contidos em *arrays*
- ▶ Um *array* é uma coleção retangular de números, caracteres e *arrays*, arranjados ao longo de um ou mais eixos



# Arrays

- ▶ Em APL, a estrutura de dados fundamental é o *array*, e todos os dados estão contidos em *arrays*
- ▶ Um *array* é uma coleção retangular de números, caracteres e *arrays*, arranjados ao longo de um ou mais eixos
- ▶ Os elementos de um *array* podem ter tipos distintos

# Arrays

- ▶ Em APL, a estrutura de dados fundamental é o *array*, e todos os dados estão contidos em *arrays*
- ▶ Um *array* é uma coleção retangular de números, caracteres e *arrays*, arranjados ao longo de um ou mais eixos
- ▶ Os elementos de um *array* podem ter tipos distintos
- ▶ *Arrays* especiais:
  - (a) **escalar**: um único número, dimensão zero
  - (b) **vetor**: um *array* unidimensional
  - (c) **matriz**: um *array* bidimensional

## Declaração de *arrays*

- *Arrays* são declarados separando seus elementos por espaços

```
2 3 5 7 11
2 3 5 7 11
'string' 2.0 3J-5 'c' 7
string 2.0 3J-5 c 7
```

## Declaração de *arrays*

- ▶ *Arrays* são declarados separando seus elementos por espaços

```

2 3 5 7 11
2 3 5 7 11
'string' 2.0 3J-5 'c' 7
string 2.0 3J-5 c 7

```

- ▶ Parêntesis podem ser utilizados para agrupar vetores

```

(2 3 5) (7 11) (13) (17 19 23)
2 3 5 7 11 13 17 19 23
((2 3 5) (7 11)) ((13))
2 3 5 7 11 13
10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

```

A gera os 10 primeiros naturais

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\iota$ ( <i>iota</i> )	monádico	Gera os primeiros $n$ naturais

Unicode	TAB	APL
U+2373	i i <tab>	APL + i

# Profundidade

- ▶ A profundidade (*depth*) de um *array* corresponde a o seu nível de profundidade/recursão

# Profundidade

- ▶ A profundidade (*depth*) de um *array* corresponde a o seu nível de profundidade/recursão
- ▶ um vetor de escalares tem profundidade igual a 1

# Profundidade

- ▶ A profundidade (*depth*) de um *array* corresponde a o seu nível de profundidade/recursão
- ▶ um vetor de escalares tem profundidade igual a 1
- ▶ um vetor cujos elementos são vetores de profundidade 1 tem profundidade igual a 2



# Profundidade

- ▶ A profundidade (*depth*) de um *array* corresponde a o seu nível de profundidade/recursão
- ▶ um vetor de escalares tem profundidade igual a 1
- ▶ um vetor cujos elementos são vetores de profundidade 1 tem profundidade igual a 2
- ▶ um escalar tem profundidade zero

# Profundidade

- ▶ A profundidade (*depth*) de um *array* corresponde a o seu nível de profundidade/recursão
- ▶ um vetor de escalares tem profundidade igual a 1
- ▶ um vetor cujos elementos são vetores de profundidade 1 tem profundidade igual a 2
- ▶ um escalar tem profundidade zero
- ▶ APL atribuí a um vetor que mistura escalares e vetores uma profundidade negativa

# Profundidade

- A profundidade de um *array* pode ser obtida por meio da função  $\equiv$

```

≡ 2
0
≡ 'string'          a 'string' = 's' 't' 'r' 'i' 'n' 'g'
1
≡ ((2 3) (5 7 11)) ('um' 'dois' 'três')
3
≡ 2 'três'
-2

```

# Profundidade

- ▶ A profundidade de um *array* pode ser obtida por meio da função `≡`

```

≡ 2
0
≡ 'string'          A 'string' = 's' 't' 'r' 'i' 'n' 'g'
1
≡ ((2 3) (5 7 11)) ('um' 'dois' 'três')
3
≡ 2 'três'
-2

```


- ▶ Strings vazias são representadas por `''`

```

≡ ''
1

```

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
 ( <i>depth</i> )	monádico	Retorna a profundidade do <i>array</i>

Unicode	TAB	APL
U+2261	= = <tab>	APL + Shift + ç

## Rank

- ▶ O *rank* é definido como o número de dimensões de um *array*

## Rank

- ▶ O *rank* é definido como o número de dimensões de um *array*
- ▶ Escalares tem *rank* igual a zero

## Rank

- ▶ O *rank* é definido como o número de dimensões de um *array*
- ▶ Escalares tem *rank* igual a zero
- ▶ Vetores tem *rank* igual a 1



## Rank

- ▶ O *rank* é definido como o número de dimensões de um *array*
- ▶ Escalares tem *rank* igual a zero
- ▶ Vetores tem *rank* igual a 1
- ▶ Matrizes tem *rank* igual a 2

## Rank

- ▶ O *rank* é definido como o número de dimensões de um *array*
- ▶ Escalares tem *rank* igual a zero
- ▶ Vetores tem *rank* igual a 1
- ▶ Matrizes tem *rank* igual a 2
- ▶ Em APL os *arrays* são retangulares: cada linha de uma matriz deve ter o mesmo número de colunas

## Rank

- ▶ O *rank* é definido como o número de dimensões de um *array*
- ▶ Escalares tem *rank* igual a zero
- ▶ Vetores tem *rank* igual a 1
- ▶ Matrizes tem *rank* igual a 2
- ▶ Em APL os *arrays* são retangulares: cada linha de uma matriz deve ter o mesmo número de colunas
- ▶ Para criar *arrays* com rank maior do que 1 é preciso usar a função  $\rho$  (*reshape*), que recebe como argumento à esquerda um vetor dos comprimentos das dimensões e os dados como argumento à direita

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\rho$ ( <i>reshape</i> )	diádico	Retorna um <i>array</i> com as dimensões e dados indicados
Unicode	TAB	APL
U+2374	<code>r r &lt;tab&gt;</code>	<code>APL + r</code>

## Declarando *arrays* multidimensionais

- ▶ A função `p` retorna *arrays* multidimensionais

```
      2 2 p 1 0 0 1  
1 0  
0 1
```

## Declarando *arrays* multidimensionais

- ▶ A função `p` retorna *arrays* multidimensionais

```
2 2 p 1 0 0 1
1 0
0 1
```

- ▶ Se há dados em excesso o que sobra é ignorado

```
2 3 p 'ABCDEFGHIJ'
ABC
DEF
```

## Declarando *arrays* multidimensionais

- ▶ A função `p` retorna *arrays* multidimensionais

```
2 2 p 1 0 0 1
1 0
0 1
```

- ▶ Se há dados em excesso o que sobra é ignorado

```
2 3 p 'ABCDEFGHIJ'
ABC
DEF
```

- ▶ Se faltam dados a função `p` retorna ciclicamente ao início dos dados indicados

```
2 3 p 5 7
5 7 5
7 5 7
```

⚠ Arrays também podem ser aninhados, contendo outros arrays

```
2 3 p 'string' (5.7 11) ((13 17) (19)) 'a'
```

## Forma de um *array*

- ▶ Em sua versão monádica, a função `ρ` os comprimentos das dimensões (forma) do *array*

`ρ 'string'`

6

`ρ 0`

0

`ρ 2`

A `0` é o vetor numérico vazio

A Escalares não tem forma



## Forma de um *array*

- ▶ Em sua versão monádica, a função `ρ` os comprimentos das dimensões (forma) do *array*

```
ρ 'string'
```

```
6
```

```
ρ θ
```

A `θ` é o vetor numérico vazio

```
0
```

```
ρ 2
```

A Escalares não tem forma

- ▶ Matrizes com uma única linha e vetores são distintos

```
ρ 2 3 5 7 11
```

A Vetor

```
5
```

```
ρ (1 5 ρ 2 3 5 7 11)
```

A Matriz com uma única linha

```
1 5
```

## Forma de um *array*

- ▶ Em sua versão monádica, a função `ρ` os comprimentos das dimensões (forma) do *array*

```
ρ 'string'
```

```
6
```

```
ρ 0
```

A `0` é o vetor numérico vazio

```
0
```

```
ρ 2
```

A Escalares não tem forma

- ▶ Matrizes com uma única linha e vetores são distintos

```
ρ 2 3 5 7 11
```

A Vetor

```
5
```

```
ρ (1 5 ρ 2 3 5 7 11)
```

A Matriz com uma única linha

```
1 5
```

- ▶ Vale a identidade  $\mathbf{v} \equiv \rho(\mathbf{v} \rho \mathbf{A})$ , onde  $\mathbf{v}$  é um vetor e  $\mathbf{A}$  um *array* qualquer

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\rho$ ( <i>shape</i> )	monádico	Retorna a forma (comprimento das dimensões) de um <i>array</i>

Unicode	TAB	APL
U+2374	r r <tab>	APL + r


# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\emptyset$ ( <i>empty numeric vector</i> )	-	Vetor numérico vazio

Unicode	TAB	APL
U+236C	0 - <tab>	APL + Shift + [

---

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
 ( <i>match</i> )	diádico	Retorna verdadeiro se ambos argumentos são idênticos (conteúdo e forma)
Unicode	TAB	APL
U+2361	= = <tab>	APL + Shift + ç

## Cálculo do *rank*

- ▶ O *rank* de um vetor é igual ao comprimento da sua forma

## Cálculo do *rank*

- ▶ O *rank* de um vetor é igual ao comprimento da sua forma
- ▶ Assim, o *rank* de um *array* pode ser computado por meio da dupla aplicação da função  $\rho$

```

0      ρρ 2
      ρρ 2 3 5 7 11
1
      ρρ 2 3 ρ 15
2
```

A Escalares tem rank zero

## Cálculo do *rank*

- ▶ O *rank* de um vetor é igual ao comprimento da sua forma
- ▶ Assim, o *rank* de um *array* pode ser computado por meio da dupla aplicação da função  $\rho$

```

0      ρ ρ 2                                A Escalares tem rank zero
      ρ ρ 2 3 5 7 11
1
      ρ ρ 2 3 ρ 15
2

```

- ▶ A função  $\rho$  pode ser usada para conversões entre um escalar  $s$  e um vetor  $v$  com um único componente igual a  $x$ :

```

1      ρ ρ 1 ρ x                            A de x para v
      ρ ρ 0 ρ 1 ρ x
0

```



## Funções escalares monádicas

- ▶ Em APL uma função pode ser aplicada monadicamente (um argumento) ou diadicamente (dois argumentos)

## Funções escalares monádicas

- ▶ Em APL uma função pode ser aplicada monadicamente (um argumento) ou diadicamente (dois argumentos)
- ▶ Há dois tipos de funções: escalares e mistas

## Funções escalares monádicas

- ▶ Em APL uma função pode ser aplicada monadicamente (um argumento) ou diadicamente (dois argumentos)
- ▶ Há dois tipos de funções: escalares e mistas
- ▶ Funções escalares monádicas navegam nos diferentes níveis dos *arrays* até localizar e operar nos escalares

## Funções escalares monádicas

- ▶ Em APL uma função pode ser aplicada monadicamente (um argumento) ou diadicamente (dois argumentos)
- ▶ Há dois tipos de funções: escalares e mistas
- ▶ Funções escalares monádicas navegam nos diferentes níveis dos *arrays* até localizar e operar nos escalares
- ▶ A estrutura se mantém e apenas o conteúdo é alterado:

```

! 2 3 5 7.11          a fatorial
2 6 120 5040 6296.086347
| 2 -3 5J-7 -11.13    a valor absoluto (norma)
2 3 8.602325267 11.13
÷ (2 3) 5 (7 (11.13 17))
0.5 0.333333333333 0.2 0.1428571429 0.08984725966 0.05882352941

```

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\text{!}$ (factorial)	monádico	computa o fatorial (função gama) de $x$
Unicode	TAB	APL
U+0021	-	APL + Shift + -

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$ $ ( <i>magnitude</i> )	monádico	computa o valor absoluto (norma) de $x$

Unicode	TAB	APL
U+007C	-	APL + m

## Funções escalares diádicas

- ▶ Funções escalares diádicas obtém seus operandos das localizações correspondentes de seus argumentos

```
    2 3 5 + 7 11 13
9 14 18
```

## Funções escalares diádicas

- ▶ Funções escalares diádicas obtém seus operandos das localizações correspondentes de seus argumentos

```
    2 3 5 + 7 11 13
9 14 18
```

- ▶ Se as formas dos argumentos diferem ocorre um erro

```
    2 3 ÷ 5 7 11
LENGTH ERROR: Mismatched left and right argument shapes
```



## Funções escalares diádicas

- ▶ Funções escalares diádicas obtém seus operandos das localizações correspondentes de seus argumentos

```
    2 3 5 + 7 11 13
9 14 18
```

- ▶ Se as formas dos argumentos diferem ocorre um erro

```
    2 3 ÷ 5 7 11
LENGTH ERROR: Mismatched left and right argument shapes
```

- ▶ Se um dos argumentos é escalar, ele é replicado para todos os escalares do outro argumento

## Funções escalares diádicas

- ▶ Funções escalares diádicas obtém seus operandos das localizações correspondentes de seus argumentos

```

      2 3 5 + 7 11 13
9 14 18

```

- ▶ Se as formas dos argumentos diferem ocorre um erro

```

      2 3 ÷ 5 7 11
LENGTH ERROR: Mismatched left and right argument shapes

```

- ▶ Se um dos argumentos é escalar, ele é replicado para todos os escalares do outro argumento
- ▶ O mesmo vale para escalares dentro do argumento, após o pareamento

```

      2 × 3 5 7
6 10 14
      (1 1) 2 (3 5 8) + 13 (21 34) 55
14 14    23 26    58 60 63

```

## Funções mistas e definidas pelo programador

- ▶ Funções mistas consideram seus argumentos na íntegra, ou suas subestruturas

## Funções mistas e definidas pelo programador

- ▶ Funções mistas consideram seus argumentos na íntegra, ou suas subestruturas
- ▶ Por exemplo, a função  $\rho$  monádica considera todo seu argumento

$\rho \ ((2\ 3\ 5)\ 7\ ((11\ 13)\ 17))\ 19$   
2

## Funções mistas e definidas pelo programador

- ▶ Funções mistas consideram seus argumentos na íntegra, ou suas subestruturas
- ▶ Por exemplo, a função  $\rho$  monádica considera todo seu argumento

```
 $\rho$  ((2 3 5) 7 ((11 13) 17)) 19  
2
```

- ▶ Há três tipos de funções definidas pelo programador: *dfns*, *tradfns* e funções tácitas (implícitas)

## Funções mistas e definidas pelo programador

- ▶ Funções mistas consideram seus argumentos na íntegra, ou suas subestruturas
- ▶ Por exemplo, a função  $\rho$  monádica considera todo seu argumento

```
 $\rho$  ((2 3 5) 7 ((11 13) 17)) 19  
2
```

- ▶ Há três tipos de funções definidas pelo programador: *dfns*, *tradfns* e funções tácitas (implícitas)
- ▶ Desde 2010 os dialetos da APL baseados no Dyalog removeram as *tradfns* em favor das *dfns*

## Funções mistas e definidas pelo programador

- ▶ Funções mistas consideram seus argumentos na íntegra, ou suas subestruturas
- ▶ Por exemplo, a função  $\rho$  monádica considera todo seu argumento

```
 $\rho$  ((2 3 5) 7 ((11 13) 17)) 19  
2
```

- ▶ Há três tipos de funções definidas pelo programador: *dfns*, *tradfns* e funções tácitas (implícitas)
- ▶ Desde 2010 os dialetos da APL baseados no Dyalog removeram as *tradfns* em favor das *dfns*
- ▶ Uma função definida pelo usuário se comporta como as funções primitivas: no máximo dois argumentos e são chamadas monadicamente (prefixadas) ou diadicamente (pós-fixadas)

## dfns

- Uma *dfn* (*dynamic-function*) é delimitada por chaves e seus argumentos à esquerda e à direita são representados pelas letras gregas alpha ( $\alpha$ ) e omega ( $\omega$ ), respectivamente

```
plus ← { $\alpha$ + $\omega$ }  
  2 plus 3  
5
```



## dfns

- Uma *dfn* (*dynamic-function*) é delimitada por chaves e seus argumentos à esquerda e à direita são representados pelas letras gregas alpha ( $\alpha$ ) e omega ( $\omega$ ), respectivamente

```
plus ← { $\alpha$ + $\omega$ }  
2 plus 3  
5
```

- Na versão monádica, apenas o  $\omega$  é utilizado

```
cube ← { $\omega$ *3}  
cube 2  
8
```

## dfns

- ▶ Uma *dfn* (*dynamic-function*) é delimitada por chaves e seus argumentos à esquerda e à direita são representados pelas letras gregas alpha ( $\alpha$ ) e omega ( $\omega$ ), respectivamente

```
plus ← { $\alpha$ + $\omega$ }  
2 plus 3  
5
```

- ▶ Na versão monádica, apenas o  $\omega$  é utilizado

```
cube ← { $\omega$ *3}  
cube 2  
8
```

- ▶ *Dfns* são funções anônimas (lambdas)

```
2 { $\alpha$ × $\omega$ } 3  
6
```

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\alpha$ ( <i>alpha</i> )	-	Argumento à esquerda de uma <i>dfns</i>

Unicode	TAB	APL
U+237A	a a <tab>	APL + a

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\omega$ ( <i>omega</i> )	-	Argumento à direita de uma <i>dfns</i>

Unicode	TAB	APL
U+2375	w w <tab>	APL + w

## `if-then-else`

- ▶ É possível replicar o construto `if-then-else` de outras linguagens por meio de uma *dfn*

## if-then-else

- ▶ É possível replicar o construto `if-then-else` de outras linguagens por meio de uma *dfn*
- ▶ A sintaxe é

```
{ a : b ◊ c }
```

## if-then-else

- ▶ É possível replicar o construto `if-then-else` de outras linguagens por meio de uma *dfn*
- ▶ A sintaxe é

```
{ a : b ◊ c }
```

- ▶ Esta *dfn* equivale a

```
if a then b else c
```

onde `a` tem que ser uma expressão booleana

## if-then-else

- ▶ É possível replicar o construto `if-then-else` de outras linguagens por meio de uma *dfn*
- ▶ A sintaxe é

```
{ a : b  $\diamond$  c }
```

- ▶ Esta *dfn* equivale a

```
if a then b else c
```

onde `a` tem que ser uma expressão booleana

- ▶ Exemplo de uso:

```
max  $\leftarrow$  {  $\alpha > \omega$  :  $\alpha \diamond \omega$  }  
2 max 3  
3
```



# Recursão

- ▶ Mesmo sendo anônimas, é possível implementar funções recursivas usando *dfns*

# Recursão

- ▶ Mesmo sendo anônimas, é possível implementar funções recursivas usando *dfns*
- ▶ Uma maneira é nomeando a *dfns* por meio de uma atribuição

```
gcd ← {ω > 0 : ω gcd (ω|α) ◇ α}  
20 gcd 12
```

4

# Recursão

- ▶ Mesmo sendo anônimas, é possível implementar funções recursivas usando *dfns*
- ▶ Uma maneira é nomeando a *dfns* por meio de uma atribuição

```
gcd ← {ω > 0 : ω gcd (ω|α) ◇ α}
20 gcd 12
```

4

- ▶ A segunda maneira é utilizar o símbolo  $\nabla$ , que identifica a função anônima e permite a chamada recursiva

```
{ω = 1 : 1 ◇ ω + ∇ ω - 1} 10
```


55

A soma dos n primeiros positivos

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
<div>⌈</div> <div>(<i>residue</i>)</div>	diádico	Computa o resto da divisão euclidiana do argumento à direita pelo argumento à esquerda
Unicode	TAB	APL
U+007C	-	APL + m

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
 ( <i>recursion</i> )	-	Representa uma <i>dfns</i> em uma chamada recursiva

Unicode	TAB	APL
U+2207	V V <tab>	APL + g

# Funções tácitas

- ▶ Funções tácitas (*tacit*, implícitas) são expressões sem referências aos argumentos

## Funções tácitas

- ▶ Funções tácitas (*tacit*, implícitas) são expressões sem referências aos argumentos
- ▶ Códigos que usam apenas funções tácitas são ditos livre de pontos

## Funções tácitas

- ▶ Funções tácitas (*tacit*, implícitas) são expressões sem referências aos argumentos
- ▶ Códigos que usam apenas funções tácitas são ditos livre de pontos
- ▶ A omissão dos parâmetros remete à conversão  $\eta$  do cálculo lambda



# Funções tácitas

- ▶ Funções tácitas (*tacit*, implícitas) são expressões sem referências aos argumentos
- ▶ Códigos que usam apenas funções tácitas são ditos livre de pontos
- ▶ A omissão dos parâmetros remete à conversão  $\eta$  do cálculo lambda
- ▶ Uma única função é sempre uma função tácita

÷

f ← ×

▮ Atribuições podem nomear funções tácitas

## Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor

# Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor
- ▶ Trens podem ser monádicos ou diádicos

## Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor
- ▶ Trens podem ser monádicos ou diádicos
- ▶ Um trem com dois carros monádicos é chamado *atop* (sobre, em cima)

# Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor
- ▶ Trens podem ser monádicos ou diádicos
- ▶ Um trem com dois carros monádicos é chamado *atop* (sobre, em cima)
- ▶  $(f\ g)\ X$  é equivalente a  $f\ (g\ X)$ , onde  $f$  e  $g$  são funções monádicas

$f \leftarrow +- \diamond f\ 2J3$       A Conjugado do simétrico

$^{-2J3}$

# Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor
- ▶ Trens podem ser monádicos ou diádicos
- ▶ Um trem com dois carros monádicos é chamado *atop* (sobre, em cima)
- ▶  $(f\ g)\ X$  é equivalente a  $f\ (g\ X)$ , onde  $f$  e  $g$  são funções monádicas

$f \leftarrow +- \diamond f\ 2J3$       A Conjugado do simétrico  
 $\sim 2J3$

- ▶ Isto quer dizer que  $f$  é avaliada “*atop*” (sobre) o resultado de  $g$

# Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor
- ▶ Trens podem ser monádicos ou diádicos
- ▶ Um trem com dois carros monádicos é chamado *atop* (sobre, em cima)
- ▶  $(f\ g)\ X$  é equivalente a  $f\ (g\ X)$ , onde  $f$  e  $g$  são funções monádicas

$f \leftarrow +- \diamond f\ 2J3$       A Conjugado do simétrico  
 $\neg 2J3$

- ▶ Isto quer dizer que  $f$  é avaliada “*atop*” (sobre) o resultado de  $g$
- ▶ Este trem corresponde a composição de funções em outras linguagens

# Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor
- ▶ Trens podem ser monádicos ou diádicos
- ▶ Um trem com dois carros monádicos é chamado *atop* (sobre, em cima)
- ▶  $(f\ g)\ X$  é equivalente a  $f\ (g\ X)$ , onde  $f$  e  $g$  são funções monádicas

$f \leftarrow +- \diamond f\ 2J3$       A Conjugado do simétrico  
 $\sim 2J3$

- ▶ Isto quer dizer que  $f$  é avaliada “*atop*” (sobre) o resultado de  $g$
- ▶ Este trem corresponde a composição de funções em outras linguagens
- ▶ Um trem não nomeado deve ser delimitado entre parêntesis

$(*\div)\ 2$       A e elevado ao inverso de x  
 1.648721271



## *forks*

- ▶ Um trem com três carros monádico é um *fork* (garfo, bifurcação)

## *forks*

- ▶ Um trem com três carros monádico é um *fork* (garfo, bifurcação)
- ▶ Há duas variantes de *forks*:

(a)  $(f \ g \ h) \ X$  equivale a  $(f \ X) \ g \ (h \ X)$

pm  $\leftarrow +, -$   
 pm 2  
 2  $-2$

## forks

- ▶ Um trem com três carros monádico é um *fork* (garfo, bifurcação)
- ▶ Há duas variantes de *forks*:

(a)  $(f \ g \ h) \ X$  equivale a  $(f \ X) \ g \ (h \ X)$

```
pm ← +, -
pm 2
2 -2
```

(b)  $(A \ g \ h) \ X$  equivale a  $A \ g \ (h \ X)$  onde  $A$  é um *array*

```
areaCircle ← (o1) × {ω*2}      A o1 é igual a 2π
areaCircle 2
12.56637061
```

## forks

- ▶ Um trem com três carros monádico é um *fork* (garfo, bifurcação)
- ▶ Há duas variantes de *forks*:

(a)  $(f\ g\ h)\ X$  equivale a  $(f\ X)\ g\ (h\ X)$

```
pm ← +, -
pm 2
2 -2
```

(b)  $(A\ g\ h)\ X$  equivale a  $A\ g\ (h\ X)$  onde  $A$  é um *array*

```
areaCircle ← (o1) × {w*2}      A o1 é igual a 2π
areaCircle 2
12.56637061
```

- ▶ Em ambos casos,  $g$  deve ser diádica e  $f$  e  $h$  monádicas

# Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\text{'}}$ ( <i>catenate, laminate</i> )	diádico	Concatena ambos argumentos

Unicode	TAB	APL
U+002C	-	-

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
---------	---------	-----------

$\circ$ ( <i>pi times</i> )	monádico	Multiplica o argumento por $\pi$
--------------------------------	----------	----------------------------------

Unicode	TAB	APL
---------	-----	-----

U+25CB	o o <tab>	APL + o
--------	-----------	---------

# Trens diádicos

- ▶ Os trens diádicos estão relacionados aos monádicos

## Trens diádicos

- ▶ Os trens diádicos estão relacionados aos monádicos
  - (a)  $X (f\ g) Y$  equivale a  $f (X\ g\ Y)$ , com  $f$  monádica,  $g$  diádica



## Trens diádicos

- ▶ Os trens diádicos estão relacionados aos monádicos
  - (a)  $X (f\ g) Y$  equivale a  $f (X\ g\ Y)$ , com  $f$  monádica,  $g$  diádica
  - (b)  $X (f\ g\ h) Y$  equivale a  $(X\ f\ Y)\ g\ (X\ h\ Y)$ , todas diádicas

## Trens diádicos

- Os trens diádicos estão relacionados aos monádicos
  - (a)  $X (f\ g) Y$  equivale a  $f (X\ g\ Y)$ , com  $f$  monádica,  $g$  diádica
  - (b)  $X (f\ g\ h) Y$  equivale a  $(X\ f\ Y)\ g\ (X\ h\ Y)$ , todas diádicas
  - (c)  $X (A\ g\ h) Y$  equivale a  $A\ g\ (X\ h\ Y)$ ,  $g$ , ambas diádicas

# Trens diádicos

- Os trens diádicos estão relacionados aos monádicos
  - (a)  $X (f\ g) Y$  equivale a  $f (X\ g\ Y)$ , com  $f$  monádica,  $g$  diádica
  - (b)  $X (f\ g\ h) Y$  equivale a  $(X\ f\ Y)\ g\ (X\ h\ Y)$ , todas diádicas
  - (c)  $X (A\ g\ h) Y$  equivale a  $A\ g\ (X\ h\ Y)$ ,  $g$ , ambas diádicas
- Dentro de um trem diádicos os símbolos  $\rightarrow$  e  $\leftarrow$  retornam os argumentos à esquerda e a direita, respectivamente

3 (×-) 5	A (a), sinal da diferença
$\leftarrow$	
imc $\leftarrow$ $\rightarrow \div \{\omega * 2\}$	A (b), IMC
75 imc 1.79	
23.40750913	
2 (0.5×+) 3	A (c), média aritmética
2.5	


## Trens diádicos

- Os trens diádicos estão relacionados aos monádicos
  - (a)  $X (f\ g) Y$  equivale a  $f (X\ g\ Y)$ , com  $f$  monádica,  $g$  diádica
  - (b)  $X (f\ g\ h) Y$  equivale a  $(X\ f\ Y)\ g\ (X\ h\ Y)$ , todas diádicas
  - (c)  $X (A\ g\ h) Y$  equivale a  $A\ g\ (X\ h\ Y)$ ,  $g$ , ambas diádicas
- Dentro de um trem diádicos os símbolos  $\rightarrow$  e  $\leftarrow$  retornam os argumentos à esquerda e a direita, respectivamente

3 (×-) 5	A (a), sinal da diferença
$\rightarrow$	
imc $\leftarrow$ $\rightarrow \div \{\omega * 2\}$	A (b), IMC
75 imc 1.79	
23.40750913	
2 (0.5×+) 3	A (c), média aritmética
2.5	

- Em trens monádicos ambos retornam sempre o argumento à direita

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
 (left)	monádico/diádico	Em um trem, retorna o argumento à esquerda (ou a direita, no caso monádico)

Unicode	TAB	APL
U+22A3	-   <tab>	APL + Shift +

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\vdash$ ( <i>right</i> )	monádico/diádico	Em um trem, retorna o argumento à direita

Unicode	TAB	APL
U+22A2	- <tab>	APL +

## Trens de tamanho 4 ou maior

- ▶ Para trens de tamanho quatro ou maior, a regra é simples: os últimos 3 símbolos se tornam um trem de tamanho 3 e são tratados como uma única função

## Trens de tamanho 4 ou maior

- ▶ Para trens de tamanho quatro ou maior, a regra é simples: os últimos 3 símbolos se tornam um trem de tamanho 3 e são tratados como uma única função
- ▶ O que resta será um *atop*, um *fork* ou é preciso repetir a operação



## Trens de tamanho 4 ou maior

- ▶ Para trens de tamanho quatro ou maior, a regra é simples: os últimos 3 símbolos se tornam um trem de tamanho 3 e são tratados como uma única função
- ▶ O que resta será um *atop*, um *fork* ou é preciso repetir a operação
- ▶ Por exemplo, (p q r s) X equivale a

$$(p (q r s)) X = p ((q r s) X) = p ((q X) r (s X))$$

## Trens de tamanho 4 ou maior

- ▶ Para trens de tamanho quatro ou maior, a regra é simples: os últimos 3 símbolos se tornam um trem de tamanho 3 e são tratados como uma única função
- ▶ O que resta será um *atop*, um *fork* ou é preciso repetir a operação
- ▶ Por exemplo,  $(p\ q\ r\ s)\ X$  equivale a

$$(p\ (q\ r\ s))\ X = p\ ((q\ r\ s)\ X) = p\ ((q\ X)\ r\ (s\ X))$$

- ▶ Outro exemplo:

$$X\ (p\ q\ r\ s\ t)\ Y = (X\ p\ Y)\ q\ ((X\ r\ Y)\ s\ (X\ t\ Y))$$

## Trens de tamanho 4 ou maior

- ▶ Para trens de tamanho quatro ou maior, a regra é simples: os últimos 3 símbolos se tornam um trem de tamanho 3 e são tratados como uma única função
- ▶ O que resta será um *atop*, um *fork* ou é preciso repetir a operação
- ▶ Por exemplo,  $(p\ q\ r\ s)\ X$  equivale a

$$(p\ (q\ r\ s))\ X = p\ ((q\ r\ s)\ X) = p\ ((q\ X)\ r\ (s\ X))$$

- ▶ Outro exemplo:

$$X\ (p\ q\ r\ s\ t)\ Y = (X\ p\ Y)\ q\ ((X\ r\ Y)\ s\ (X\ t\ Y))$$

- ▶ Trens podem ser usados para simplificar expressões do tipo  $((\text{cond1}\ x)\ \text{and}\ (\text{cond2}\ x)\ \text{and}\ \dots\ \text{and}\ (\text{condN}\ x))$  para  $\text{cond1} \wedge \text{cond2} \wedge \dots \wedge \text{condN}$

## Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\wedge$ ( <i>and</i> )	diádico	Conjunção (e) lógica escalar

Unicode	TAB	APL
U+2227	$\wedge\wedge$ <tab>	APL + 0

# Referências

1. APL Wiki. [Defined function \(traditional\)](#), acesso em 27/09/2021.
2. Dyalog. [Try APL – Interactive lessons](#), acesso em 23/09/2021.
3. **IVERSON**, Kenneth E. *A Programming Language*, John Wiley and Sons, 1962.
4. Unicode Character Table. [Página principal](#), acesso em 27/09/2021.
5. Xah Lee. [Unicode APL Symbols](#), acesso em 23/09/2021.