

Lambda Calculus

Aritmética

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

2020

Sumário

1. Números Naturais
2. Relações entre números naturais
3. Adição e Multiplicação

Contexto

- ▶ É esperado que uma linguagem de programação seja capaz de realizar operações aritméticas com números naturais
- ▶ Contudo, conforme dito anteriormente, o cálculo λ contém apenas dois termos primitivos: o símbolo λ e o ponto final
- ▶ Assim, como no caso dos valores lógicos, é preciso representar os números naturais por meio de expressões- λ
- ▶ Como os inteiros são infinitos, é preciso definir uma forma de deduzir todos eles a partir de algum valor inicial

Zero

Definição de zero

O número natural **zero** pode ser representado pelo termo- λ

$$0 \equiv \lambda sz.z$$

Observação: veja que, de acordo com a definição, acima $0 \equiv F$, onde F é o valor lógico falso.

Sucessor

Sucessor

O termo- λ

$$S \equiv \lambda w y x. y(w y x)$$

é denominado função sucessor, ou simplesmente, **sucessor**, de um número natural.

Observação: a função sucessor permite a definição de todos os números naturais a partir do zero: $1 \equiv S0, 2 \equiv S1, \dots$

Definição de 1

$$\begin{aligned}1 &\equiv S0 \\&\equiv (\lambda w y x. y(w y x))(\lambda s z. z) \\&\equiv (\lambda w. (\lambda y x. y(w y x)))(\lambda s z. z) \\&\equiv (\lambda y x. y(w y x))[w := (\lambda s z. z)] \\&\equiv \lambda y x. y((\lambda s z. z) y x) \\&\equiv \lambda y x. y(x) \\&\equiv \lambda s z. s(z)\end{aligned}$$

Observação: no último passo foi aplicada uma conversão- α para renomear as variáveis y e x , de modo a manter as variáveis s e z nas definições dos números naturais

Definição de 2

$$\begin{aligned}2 &\equiv S1 \\&\equiv (\lambda w y x. y(w y x))(\lambda s z. s(z)) \\&\equiv (\lambda w. (\lambda y x. y(w y x)))(\lambda s z. s(z)) \\&\equiv (\lambda y x. y(w y x))[w := (\lambda s z. s(z))] \\&\equiv \lambda y x. y((\lambda s z. s(z)) y x) \\&\equiv \lambda y x. y(y(x)) \\&\equiv \lambda s z. s(s(z))\end{aligned}$$

Observação: a definição dos naturais pode interpretada como composições de funções. Se s é uma função, 0 significa simplesmente retornar o argumento z ; 1 significa aplicar a função uma vez $s(z)$; 2 significa aplicar a função duas vezes: $s(s(z)) = s^2(z)$, e assim por diante.

Teste Condicional

Função Z

O termo- λ

$$Z \equiv \lambda x.xF\neg F$$

o qual chamaremos **função Z**, retorna verdadeiro (T) quando aplicada em 0, e retorna falso (F) para qualquer outro número natural.

Observações sobre a função **Z**

- ▶ Para entender o comportamento da função **Z**, observe que

$$0yx \equiv (\lambda sz.z)yx \equiv x,$$

isto é, quando aplicada ao termo xy , 0 ignora a “função” y e retorna o argumento x

- ▶ O termo- λ F , quando aplicado em qualquer termo lambda z , retorna a identidade **I**, pois

$$Fz \equiv (\lambda xy.y)z \equiv (\lambda x.(\lambda y.y))z \equiv (\lambda y.y)[x := z] \equiv \lambda y.y \equiv \mathbf{I}$$

- ▶ O natural N aplica N vezes o termo y ao argumento x :

$$Nyx \equiv (\lambda sz.s(s(\dots s(z))))yx \equiv y(y(\dots y(x)))$$

Observações sobre a função Z

- ▶ Assim,

$$\begin{aligned}Z0 &\equiv (\lambda x.xF\neg F)0 \\&\equiv 0F\neg F \equiv (0F\neg)F \\&\equiv \neg F \equiv T\end{aligned}$$

- ▶ Para um natural N qualquer,

$$\begin{aligned}ZN &\equiv (\lambda x.xF\neg F)N \\&\equiv NF\neg F \equiv (NF\neg)F \\&\equiv \mathbf{I}F \equiv F,\end{aligned}$$

pois uma ou mais aplicações de F ao argumento \neg resulta na identidade \mathbf{I}

Pares

Pares

No cálculo λ , o **par** (a, b) pode ser representado pela expressão- λ

$$(a, b) \equiv \lambda z. zab$$

O **primeiro elemento** do par pode ser extraído a partir da aplicação desta expressão ao termo T :

$$(\lambda z. zab)T \equiv Tab \equiv a$$

O **segundo elemento** é extraído por meio da aplicação da expressão ao termo F :

$$(\lambda z. zab)F \equiv Fab \equiv b$$

Par sucessor

Proposição

O termo- λ

$$\Phi \equiv (\lambda pz.z(S(pT))(pT))$$

transforma o par $(n, n - 1)$ no par $(n + 1, n)$.

Demonstração

De fato, o termo (pT) extrai o primeiro elemento do par, e o termo $S(pT)$ é o sucessor deste elemento. Assim,

$$\begin{aligned}\Phi((n, n - 1)) &\equiv (\lambda pz.z(S(pT))(pT))(\lambda z.z(n)(n - 1)) \\ &\equiv (\lambda z.z(S((\lambda z.z(n)(n - 1))T))((\lambda z.z(n)(n - 1))T)) \\ &\equiv (\lambda z.z(S(Tn(n - 1)))(Tn(n - 1))) \\ &\equiv (\lambda z.z(Sn)n) \\ &\equiv (\lambda z.z(n + 1)n) \equiv (n + 1, n)\end{aligned}$$

Antecessor

Proposição

A expressão- λ

$$P \equiv (\lambda n. n\Phi(\lambda z. z00)F)$$

computa o **antecessor** de qualquer natural N maior que zero, e $P0 = 0$.

Demonstração

Temos que

$$P0 \equiv ((\lambda n. n\Phi(\lambda z. z00))F)0 \equiv 0\Phi(\lambda z. z00)F \equiv (\lambda z. z00)F \equiv 0$$

Seja N um natural maior do que zero. Daí

$$\begin{aligned} PN &\equiv ((\lambda n. n\Phi(\lambda z. z00))F)N \equiv N\Phi(\lambda z. z00)F \\ &\equiv (\lambda z. zN(N-1))F \equiv N-1, \end{aligned}$$

pois $N\Phi(\lambda z. z00)$ corresponde a N aplicações do termo Φ ao par $(0, 0)$.

Exemplo de antecessor

$$\begin{aligned}P3 &\equiv ((\lambda n.n\Phi(\lambda z.z00))F)3 \\&\equiv 3\Phi(\lambda z.z00)F \\&\equiv (\Phi(\Phi(\Phi(\lambda z.z00))))F \\&\equiv (\Phi(\Phi(\lambda z.z10)))F \\&\equiv (\Phi(\lambda z.z21))F \\&\equiv (\lambda z.z32)F \\&\equiv 2\end{aligned}$$

Desigualdade

Relação maior ou igual que

Sejam x e y dois números naturais. O termo- λ

$$G \equiv (\lambda xy. Z(xPy))$$

retorna verdadeiro (T) se x é **maior ou igual que** y , ou falso (F), caso contrário.

Observação: o termo G pode ser interpretado da seguinte maneira: se o resultado de se aplicar x vezes o antecessor P no natural y é zero, então $x \geq y$. Este procedimento remete à subtração $y - x$, exceto pelo fato de que o resultado será zero caso x seja maior do que y , e não o número negativo correspondente nos inteiros.

Igualdade

Relação igual a

O termo- λ

$$E \equiv (\lambda xy. \wedge (Z(xPy))(Z(yPx)))$$

retorna verdadeiro (T) se x e y são números naturais iguais, e falso (F), caso contrário.

Observação: $x = y$ se $x \geq y$ e $y \geq x$. Esta propriedade pode ser observada na definição da expressão E , na qual aparecem o termo- λ correspondente à operação lógica **e** (\wedge) e termos oriundos da definição da desigualdade maior ou igual que (G).

Adição

Adição de números naturais

Seja S a expressão- λ que computa o sucessor de um número natural.
O termo- λ

$$+ \equiv (\lambda xy.xSy)$$

corresponde à **adição** de números naturais.

Observação: de acordo com a definição acima, a adição (+) é uma operação pré-fixada.

Exemplo de adição

$$\begin{aligned} +23 &\equiv (\lambda xy.xSy)23 \\ &\equiv 2S3 \\ &\equiv S(S(3)) \\ &\equiv S(4) \\ &\equiv 5 \end{aligned}$$

Multiplicação

Multiplicação de números naturais

A expressão- λ

$$\times \equiv (\lambda xyz.x(yz))$$

corresponde à **multiplicação** de números naturais.

Observações:

- (a) Do mesmo modo que foi observado na adição, a multiplicação (\times) é uma operação pré-fixada
- (b) A interpretação desta expressão é a seguinte: x marca o número de vezes que será aplicada a função (yz) , a qual aplica y vezes a função z

Exemplo de multiplicação

$$\begin{aligned}\times 23 &\equiv (\lambda x y s. x(y s)) 23 \\ &\equiv \lambda s. 2(3s) \\ &\equiv \lambda s. (\lambda y z. y(y(z)))(3s) \\ &\equiv \lambda s. (\lambda z. 3s(3sz)) \\ &\equiv \lambda s. (\lambda z. 3s(s(s(s(z))))) \\ &\equiv \lambda s. (\lambda z. s(s(s(s(s(s(z))))))) \\ &\equiv \lambda s z. s(s(s(s(s(s(z)))))) \\ &\equiv 6\end{aligned}$$

Referências

1. **BARENDREGT**, Henk; **BARENDSSEN**, Erik. *Introduction to Lambda Calculus*, March 2000.
2. **ROJAS**, Raúl. *A Tutorial Introduction to the Lambda Calculus*, FU Berlin, WS-97/98.
3. Wikipédia. [Combinatory logic](#), acesso em 07/01/2020.
4. Wikipédia. [Lambda calculus](#), acesso em 03/01/2020.