

Combinadores

Introdução

Prof. Edson Alves

Campus UnB Gama: Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia

Moses Schönfinkel



* 1889 † 1942

Moses Schönfinkel



On the building blocks of mathematical logic



* 1889 † 1942

Moses Schönfinkel



* 1889 † 1942

On the building blocks of mathematical logic

★ As ideias foram apresentadas em 1920

Moses Schönfinkel



* 1889 † 1942

On the building blocks of mathematical logic

- ★ As ideias foram apresentadas em 1920
- ★ O artigo foi publicado em 1924

Moses Schönfinkel



* 1889 † 1942

On the building blocks of mathematical logic

- ★ As ideias foram apresentadas em 1920
- ★ O artigo foi publicado em 1924
- ★ Introduziu os combinadores

Moses Schönfinkel



* 1889 † 1942

On the building blocks of mathematical logic

- ★ As ideias foram apresentadas em 1920
- ★ O artigo foi publicado em 1924
- ★ Introduziu os combinadores
- ★ Resgatou a ideia de Frege (1893) de tratar todas as funções como unárias (*currying*)

Conectivos da lógica proposicional booleana

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação ¹	Leitura	Definição
-----------------------	---------	-----------

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação ¹	Leitura	Definição
\bar{a}	não a	Inverte o valor lógico de a

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação ¹	Leitura	Definição
\bar{a}	não a	Inverte o valor lógico de a
$a \vee b$	a ou b	Falso apenas se a e b são ambos falsos

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação ¹	Leitura	Definição
\bar{a}	não a	Inverte o valor lógico de a
$a \vee b$	a ou b	Falso apenas se a e b são ambos falsos
$a \& b$	a e b	Verdadeiro apenas se a e b são ambos verdadeiros

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação ¹	Leitura	Definição
\bar{a}	não a	Inverte o valor lógico de a
$a \vee b$	a ou b	Falso apenas se a e b são ambos falsos
$a \& b$	a e b	Verdadeiro apenas se a e b são ambos verdadeiros
$a \rightarrow b$	se a , então b	Falso apenas se a é verdadeiro e b é falso

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação ¹	Leitura	Definição
\bar{a}	não a	Inverte o valor lógico de a
$a \vee b$	a ou b	Falso apenas se a e b são ambos falsos
$a \& b$	a e b	Verdadeiro apenas se a e b são ambos verdadeiros
$a \rightarrow b$	se a , então b	Falso apenas se a é verdadeiro e b é falso
$a \sim b$	a é equivalente a b	Verdadeiro se ambos tem mesmo valor lógico

Conectivos da lógica proposicional booleana

Operação ¹	Leitura	Definição
\bar{a}	não a	Inverte o valor lógico de a
$a \vee b$	a ou b	Falso apenas se a e b são ambos falsos
$a \& b$	a e b	Verdadeiro apenas se a e b são ambos verdadeiros
$a \rightarrow b$	se a , então b	Falso apenas se a é verdadeiro e b é falso
$a \sim b$	a é equivalente a b	Verdadeiro se ambos tem mesmo valor lógico

¹ Notação de Hilbert

Redução tradicional (linguagens de programação)

Redução tradicional (linguagens de programação)

Primitivos: \neg , $\&$, \vee

Redução tradicional (linguagens de programação)

Primitivos: \neg , $\&$, \vee

Reduções:

Redução tradicional (linguagens de programação)

Primitivos: \neg , $\&$, \vee

Reduções:

$$p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$$

Redução tradicional (linguagens de programação)

Primitivos: $\bar{}$, $\&$, \vee

Reduções:

$$p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$$

$$p \sim q \equiv (p \& q) \vee (\bar{p} \& \bar{q})$$

Redução de Whitehead e Russell

Redução de Whitehead e Russell

Primitivos: \neg, \vee

Redução de Whitehead e Russell

Primitivos: \neg, \vee

Reduções:

Redução de Whitehead e Russell

Primitivos: \neg, \vee

Reduções:

$$p \ \& \ q \equiv \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})}$$

Redução de Whitehead e Russell

Primitivos: \neg, \vee

Reduções:

$$p \& q \equiv \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})}$$

$$p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$$

Redução de Whitehead e Russell

Primitivos: \neg, \vee

Reduções:

$$p \& q \equiv \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})}$$

$$p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$$

$$p \sim q \equiv (p \rightarrow q) \& (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$$

Conectivos de Scheffer

Conectivos de Scheffer

Conectivo	Nome	Definição
-----------	------	-----------

Conectivos de Scheffer

Conectivo	Nome	Definição
\downarrow	negação conjunta	Verdadeira somente quando ambas proposições são falsas $(p \downarrow q \equiv \bar{p} \& \bar{q})$

Conectivos de Scheffer

Conectivo	Nome	Definição
\downarrow	negação conjunta	Verdadeira somente quando ambas proposições são falsas $(p \downarrow q \equiv \bar{p} \& \bar{q})$
\uparrow	negação disjunta	Falsa somente quando ambas proposições são verdadeiras $(p \uparrow q \equiv \bar{p} \vee \bar{q})$

Redução de Scheffer (1913)

Redução de Scheffer (1913)

Primitivo: \uparrow (notação de Schönfinkel: $p \mid q$)

Redução de Scheffer (1913)

Primitivo: \uparrow (notação de Schönfinkel: $p \mid q$)

Reduções:

Redução de Scheffer (1913)

Primitivo: \uparrow (notação de Schönfinkel: $p \mid q$)

Reduções:

$$p \& q \equiv (p \mid q) \mid (p \mid q)$$

Redução de Scheffer (1913)

Primitivo: \uparrow (notação de Schönfinkel: $p \mid q$)

Reduções:

$$p \& q \equiv (p \mid q) \mid (p \mid q)$$

$$p \vee q \equiv (p \mid p) \mid (q \mid q)$$

Redução de Scheffer (1913)

Primitivo: \uparrow (notação de Schönfinkel: $p \mid q$)

Reduções:

$$p \ \& \ q \equiv (p \mid q) \mid (p \mid q)$$

$$p \ \vee \ q \equiv (p \mid p) \mid (q \mid q)$$

$$\bar{p} \equiv (p \mid p)$$

Quantificadores

Quantificadores

Notação	Nome	Definição
---------	------	-----------

Quantificadores

Notação	Nome	Definição
$(Ex)f(x)$ $\exists x.f(x)$	quantificador existencial	Existe ao menos um x que tem a propriedade f

Quantificadores

Notação	Nome	Definição
$(\exists x)f(x)$ $\exists x.f(x)$	quantificador existencial	Existe ao menos um x que tem a propriedade f
$(\forall x)f(x)$ $\forall x.f(x)$	quantificador universal	Todo x tem a propriedade f

Quantificadores

Notação	Nome	Definição
$(\exists x)f(x)$ $\exists x.f(x)$	quantificador existencial	Existe ao menos um x que tem a propriedade f
$(\forall x)f(x)$ $\forall x.f(x)$	quantificador universal	Todo x tem a propriedade f

Conectivo fundamental de Schönfinkel: $f(x) \mid^x g(x) \equiv (x)[\overline{f(x)} \vee \overline{g(x)}] \equiv (x)\overline{f(x) \& g(x)}$

Reduções de Schönfinkel

Reduções de Schönfinkel

Primitivo: $f(x) \mid^x g(x)$

Reduções de Schönfinkel

Primitivo: $f(x) \mid^x g(x)$

Reduções:

Reduções de Schönfinkel

Primitivo: $f(x) \mid^x g(x)$

Reduções:

$$\bar{a} = a \mid^x a$$

Reduções de Schönfinkel

Primitivo: $f(x) \mid^x g(x)$

Reduções:

$$\bar{a} = a \mid^x a$$

$$a \vee b = (x)(a \vee b) = \bar{a} \mid^x \bar{b} = (a \mid^y a) \mid^x (b \mid^y b)$$

Reduções de Schönfinkel

Primitivo: $f(x) \mid^x g(x)$

Reduções:

$$\bar{a} = a \mid^x a$$

$$a \vee b = (x)(a \vee b) = \bar{a} \mid^x \bar{b} = (a \mid^y a) \mid^x (b \mid^y b)$$

$$(x)f(x) = (x)(\overline{\overline{f(x)}} \vee \overline{\overline{f(x)}}) = \overline{\overline{f(x)}} \mid^x \overline{\overline{f(x)}} = (f(x) \mid^y f(x)) \mid^x (f(x) \mid^y f(x))$$

Reduções de Schönfinkel

Primitivo: $f(x) \mid^x g(x)$

Reduções:

$$\bar{a} = a \mid^x a$$

$$a \vee b = (x)(a \vee b) = \bar{a} \mid^x \bar{b} = (a \mid^y a) \mid^x (b \mid^y b)$$

$$(x)f(x) = (x)(\overline{\overline{f(x)}} \vee \overline{\overline{f(x)}}) = \overline{\overline{f(x)}} \mid^x \overline{\overline{f(x)}} = (f(x) \mid^y f(x)) \mid^x (f(x) \mid^y f(x))$$

$$(Ex)f(x) = \overline{\overline{(x)f(x)}}$$

Cálculo funcional

Funções de um argumento

Uma função f de um argumento x pode ser representada pela justaposição dos símbolos da função e de seu argumento. Em notação matemática,

$$f(x) \equiv fx$$

Cálculo funcional

Funções de vários argumentos

Uma função $F(x, y)$ de dois argumentos pode ser reduzida a duas funções de um único argumento. Defina, para um x fixo, a função $G_x(y)$ tal que $G_x(y) = F(x, y)$. Ou seja, uma vez fixado x , G_x coincide com F em todos os pares (x, y) . Como G é uma função de um único argumento, podemos escrever $G = fx$ e

$$F(x, y) = G_x(y) = (G_x)y = (fx)y = fxy$$

Esta redução pode ser aplicada para uma função H com N argumentos x_1, x_2, \dots, x_N :

$$H(x_1, x_2, \dots, x_N) = Hx_1x_2 \dots x_N$$

Combinadores

Combinadores

- ★ No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*

Combinadores

- ★ No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*
- ★ Foram propostos cinco combinadores:

Combinadores

- ★ No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*
- ★ Foram propostos cinco combinadores:
 - Função identidade *I* (*Identitätsfunktion*)

Combinadores

- ★ No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*
- ★ Foram propostos cinco combinadores:
 - Função identidade I (*Identitätsfunktion*)
 - Função constância C (*Konstanzfunktion*)

Combinadores

- ★ No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*
- ★ Foram propostos cinco combinadores:
 - Função identidade I (*Identitätsfunktion*)
 - Função constância C (*Konstanzfunktion*)
 - Função de intercâmbio T (*Vertauschungsfunktion*)

Combinadores

- ★ No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*
- ★ Foram propostos cinco combinadores:
 - Função identidade I (*Identitätsfunktion*)
 - Função constância C (*Konstanzfunktion*)
 - Função de intercâmbio T (*Vertauschungsfunktion*)
 - Função de composição Z (*Zusammensetzungsfunktion*)

Combinadores

- ★ No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*
- ★ Foram propostos cinco combinadores:
 - Função identidade I (*Identitätsfunktion*)
 - Função constância C (*Konstanzfunktion*)
 - Função de intercâmbio T (*Vertauschungsfunktion*)
 - Função de composição Z (*Zusammensetzungsfunktion*)
 - Função de fusão S (*Verschmelzungsfunktion*)

Combinadores

- ★ No artigo, Schönfinkel os denominou *funções particulares*
- ★ Foram propostos cinco combinadores:
 - Função identidade I (*Identitätsfunktion*)
 - Função constância C (*Konstanzfunktion*)
 - Função de intercâmbio T (*Vertauschungsfunktion*)
 - Função de composição Z (*Zusammensetzungsfunktion*)
 - Função de fusão S (*Verschmelzungsfunktion*)
- ★ Posteriormente, o combinador C passou a usar a notação K , remetendo ao termo original em alemão

Combinador I

Função identidade

A função identidade I é uma função cujo argumento não tem nenhuma restrição (pode ser, inclusive, uma função) e cujo valor sempre coincide com seu argumento. Assim,

$$Ix = x$$

onde o sinal de igualdade não representa equivalência lógica, e sim que ambos lados da expressão tem mesmo significado (por exemplo, $II = I$).

Combinador K

Função constância

Assuma que, para um argumento x arbitrário, o valor da função seja sempre igual a um valor fixo a . Esta função depende de a , logo tem a forma Ka . Podemos escrever

$$(Ka)y = a$$

Permitindo que a também seja variável, obtemos

$$(Kx)y = x, \text{ ou } Kxy = x,$$

a equação que define a função constância K .

Combinador T

Função de intercâmbio

A função de intercâmbio T recebe como argumento uma função da função φxy e retorna uma função

$$\psi = T\varphi$$

tal que o valor ψxy coincide com φyx para todos os argumentos x e y para os quais φ tem significado. Assim,

$$(T\varphi)xy = \varphi yx,$$

onde os parêntesis podem ser omitidos.

Combinador Z

Função de composição

Se uma função f de um argumento recebe, como argumento, o valor de uma função g de um argumento, a função $F = f(gx)$ é a função composta de f e g . A função F é o valor de uma certa função Z' de f e g . Assim

$$[Z'(\varphi, \chi)]x = \varphi(\chi x)$$

Usando a convenção de trocar Z' por uma função de um argumento, obtemos

$$Z\varphi\chi x = \varphi(\chi x),$$

a função de composição Z , onde os parêntesis não podem ser eliminados.

Combinador S

Função de fusão

Se na expressão fxy substituirmos y pelo valor de uma função g em x , obtemos

$$fx(gx) = Fx$$

Esta função $F = S'(f, g)$ depende das funções f e g , de modo que $[S'(\varphi, \chi)]x = \varphi x(\chi x)$. A substituição por funções de um argumento leva a

$$S\varphi\chi x = \varphi x(\chi x),$$

a função de fusão S .