

Programação Vetorial

Tipos primitivos de dados e funções

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Sumário

1. Tipos primitivos de dados

Expressões em APL

- ▶ APL pode ser vista como uma notação matemática que também é executável por máquina

Expressões em APL

- ▶ APL pode ser vista como uma notação matemática que também é executável por máquina
- ▶ A linguagem é composta por funções, operadores, *arrays* e atribuições

Expressões em APL

- ▶ APL pode ser vista como uma notação matemática que também é executável por máquina
- ▶ A linguagem é composta por funções, operadores, *arrays* e atribuições
- ▶ Qualquer código que pode ser aplicado a dados é chamado função

Expressões em APL

- ▶ APL pode ser vista como uma notação matemática que também é executável por máquina
- ▶ A linguagem é composta por funções, operadores, *arrays* e atribuições
- ▶ Qualquer código que pode ser aplicado a dados é chamado função
- ▶ Dois exemplos de funções seriam a adição (+) e subtração (-)

Expressões em APL

- ▶ APL pode ser vista como uma notação matemática que também é executável por máquina
- ▶ A linguagem é composta por funções, operadores, *arrays* e atribuições
- ▶ Qualquer código que pode ser aplicado a dados é chamado função
- ▶ Dois exemplos de funções seriam a adição (+) e subtração (-)
- ▶ As funções de APL podem ser aplicadas monadicamente (prefixada, um operando) ou diadicamente (infixada, dois operando, um à esquerda e outro à direita)

Expressões em APL

- ▶ APL pode ser vista como uma notação matemática que também é executável por máquina
- ▶ A linguagem é composta por funções, operadores, *arrays* e atribuições
- ▶ Qualquer código que pode ser aplicado a dados é chamado função
- ▶ Dois exemplos de funções seriam a adição (+) e subtração (-)
- ▶ As funções de APL podem ser aplicadas monadicamente (prefixada, um operando) ou diadicamente (infixada, dois operando, um à esquerda e outro à direita)
- ▶ O tipo de dados mais elementar é o escalar (*array* de dimensão zero)

Inteiros

- ▶ Números são tratados internamente pela APL quanto ao tamanho e tipo e podem ser misturados sem problemas

Inteiros

- ▶ Números são tratados internamente pela APL quanto ao tamanho e tipo e podem ser misturados sem problemas
- ▶ Em APL os números podem ser inteiros, reais (em ponto flutuante) e números complexos

Inteiros

- ▶ Números são tratados internamente pela APL quanto ao tamanho e tipo e podem ser misturados sem problemas
- ▶ Em APL os números podem ser inteiros, reais (em ponto flutuante) e números complexos
- ▶ Um escalar inteiro pode ser grafado usando a notação decimal padrão:

2 + 3
5

2 × 3 A a multiplicação é realizada pela função ×
6

Inteiros

- ▶ Números são tratados internamente pela APL quanto ao tamanho e tipo e podem ser misturados sem problemas
- ▶ Em APL os números podem ser inteiros, reais (em ponto flutuante) e números complexos
- ▶ Um escalar inteiro pode ser grafado usando a notação decimal padrão:

2 + 3
5

2 × 3 A a multiplicação é realizada pela função ×
6

- ▶ Comentários são precedidos pelo símbolo `A`

Inteiros

- ▶ Números são tratados internamente pela APL quanto ao tamanho e tipo e podem ser misturados sem problemas
- ▶ Em APL os números podem ser inteiros, reais (em ponto flutuante) e números complexos
- ▶ Um escalar inteiro pode ser grafado usando a notação decimal padrão:

```

      2 + 3
5
      2 × 3      A a multiplicação é realizada pela função ×
6

```

- ▶ Comentários são precedidos pelo símbolo `A`
- ▶ Números negativos são precedidos pelo símbolo `¯` (*macron*)

```

      2 ¯ 3
¯1

```

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$+$ (<i>plus</i>)	diádico	Adição escalar

Unicode	TAB	APL
U+002B	-	-

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$-$ (<i>minus</i>)	diádico	Subtração escalar


Unicode	TAB	APL
U+002D	-	-

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
\times (<i>times</i>)	diádico	Multiplicação escalar

Unicode	TAB	APL
U+00D7	x x <tab>	APL + -

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
 (<i>macron</i>)	monádico	Antecede um número negativo

Unicode	TAB	APL
U+00AF	- - <tab>	APL + 2

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
␣ (comment)	monádico	Inicia um comentário. Tudo que o sucede até o fim da linha será considerado comentário

Unicode	TAB	APL
U+235D	o n <tab>	APL + ,

Números reais

- ▶ Em escalares reais, a parte inteira é separada das casas decimais por meio do ponto final

```
0.2 ÷ 3.5  
0.05714285714
```

Números reais

- ▶ Em escalares reais, a parte inteira é separada das casas decimais por meio do ponto final

```
0.2 ÷ 3.5  
0.05714285714
```

- ▶ APL também trata problemas de precisão de forma transparente ao usuário

```
2 ÷ 3 ♦ 6 × (2 ÷ 3)  
0.6666666667  
4
```

Números reais

- ▶ Em escalares reais, a parte inteira é separada das casas decimais por meio do ponto final

```
0.2 ÷ 3.5  
0.05714285714
```

- ▶ APL também trata problemas de precisão de forma transparente ao usuário

```
2 ÷ 3 ♦ 6 × (2 ÷ 3)  
0.6666666667  
4
```

- ▶ O símbolo ♦ (*diamond*) separa duas expressões em uma mesma linha

Números reais

- ▶ Em escalares reais, a parte inteira é separada das casas decimais por meio do ponto final

```
0.2 ÷ 3.5
0.05714285714
```

- ▶ APL também trata problemas de precisão de forma transparente ao usuário

```
2 ÷ 3 ♦ 6 × (2 ÷ 3)
0.6666666667
4
```

- ▶ O símbolo ♦ (*diamond*) separa duas expressões em uma mesma linha
- ▶ Notação científica pode representar números muito pequenos ou grandes


```
2E-3 ♦ 5e7      A O E pode ser maiúsculo ou minúsculo
0.002
50000000
```

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
\div (<i>divide</i>)	diádico	Divisão escalar. Divisão por zero resulta em um erro

Unicode	TAB	APL
U+00F7	: - <tab>	APL + =

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
 (diamond)	diádico	Separador de expressões
Unicode	TAB	APL
U+22C4	< > <tab>	APL + '

Constantes booleanas

- ▶ Em APL: falso é igual a 0 (zero) e verdadeiro é igual a 1 (um)

2 = 3

0

5 = 5.0

1

Constantes booleanas

- ▶ Em APL: falso é igual a 0 (zero) e verdadeiro é igual a 1 (um)

```
2 = 3
0
5 = 5.0
1
```

- ▶ Os operadores relacionais retornam valores booleanos

```
2 ≠ 3
0
5 < 7
1
11 > 13
0
17 ≤ 19 ♦ 23 ≥ 27
1
0
```

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
= (<i>equal</i>)	diádico	Igual a

Unicode	TAB	APL
U+003D	-	APL + 5

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
\neq (<i>not equal</i>)	diádico	Diferente de

Unicode	TAB	APL
U+2260	= / <tab>	APL + 8

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$<$ (<i>less than</i>)	diádico	Menor que

Unicode	TAB	APL
U+003C	-	APL + 3

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
\gt (<i>greater than</i>)	diádico	Maior que

Unicode	TAB	APL
U+003E	-	APL + 7

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
\leq <i>(less than or equal to)</i>	diádico	Menor ou igual a
Unicode	TAB	APL
U+2264	< = <tab>	APL + 4

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
\geq (<i>greater than or equal to</i>)	diádico	Maior ou igual a

Unicode	TAB	APL
U+2265	> = <tab>	APL + 6

Números complexos

- ▶ O caractere 'J' separa a parte real da parte imaginária em números complexos

$2J3 \times 5j^{-7}$
31J1

A O J também pode ser minúsculo

Números complexos

- ▶ O caractere '**J**' separa a parte real da parte imaginária em números complexos

```
2J3 * 5j^-7
31J1
```

A O J também pode ser minúsculo

- ▶ Lembre-se de que o argumento à direita de uma função diádica é o resultado de toda a expressão à direita do símbolo

```
2 * 3 + 5
16
```

A equivale a $2 \times (3 + 5)$

```
2 - 3 - 5 - 7 - 11
8
```

A $2 - (3 - (5 - (7 - 11)))$

```
2 ÷ 3 ÷ 5
3.333333333
```

A $10 \div 3$

```
2 * 0J1 * 3
0J^-2
```

A $2 \times (j \text{ elevado a } 3)$

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$*$ (<i>power</i>)	diádico	Eleva o argumento à esquerda a potência indicada no argumento à direita

Unicode	TAB	APL
U+002A	-	APL + p

Caracteres e strings

- ▶ Em APL, strings são vetores de caracteres

Caracteres e strings

- ▶ Em APL, strings são vetores de caracteres
- ▶ Tanto caracteres quanto strings são delimitadas por aspas simples

```
'c'           A um caractere
c
'uma string'
uma string
```

Caracteres e strings

- ▶ Em APL, strings são vetores de caracteres
- ▶ Tanto caracteres quanto strings são delimitadas por aspas simples

```
'c'           A um caractere
c
'uma string'
uma string
```

- ▶ Atribuições podem ser feitas por meio do símbolo ←

```
s ← 'abacate'
'a' = s           A compara 'a' a cada caractere de s
1 0 1 0 1 0 0
s ≠ 'abacaxi'     A compara caracteres em posições correspondentes
0 0 0 0 0 1 1
```

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
← (<i>assign</i>)	diádico	Atribui o argumento à direita ao argumento à esquerda

Unicode	TAB	APL
U+2190	< - <tab>	APL + ' '

Funções aritméticas monádicas

- As funções aritméticas apresentadas até o momento tem versões monádicas

$+2J3$	A conjugado complexo
$2J^{-3}$	
$-^{-2}$	A simétrico aditivo
2	
$\times 2J3$	A vetor unitário na direção do complexo
0.5547001962J0.8320502943	
$\div 2$	A inverso multiplicativo
0.5	
$*2$	A função exponencial
7.389056099	

Funções aritméticas monádicas

- ▶ As funções aritméticas apresentadas até o momento tem versões monádicas

$+2J3$	A conjugado complexo
$2J^{-3}$	
$-^{-2}$	A simétrico aditivo
2	
$\times 2J3$	A vetor unitário na direção do complexo
0.5547001962J0.8320502943	
$\div 2$	A inverso multiplicativo
0.5	
$*2$	A função exponencial
7.389056099	

- ▶ Quando aplicada a números reais, a função monádica \times corresponde à função `signum()` de muitas linguagens

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$+$ (<i>conjugate</i>)	monádico	Conjugado complexo

Unicode	TAB	APL
U+002B	-	-

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$-$ (<i>negate</i>)	monádico	Simétrico aditivo

Unicode	TAB	APL
U+002D	-	-

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
\times <i>(direction)</i>	monádico	Vetor unitário na direção do número

Unicode	TAB	APL
U+00D7	x x <tab>	APL + -

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
\div (<i>reciprocal</i>)	monádico	Inverso multiplicativo

Unicode	TAB	APL
U+00F7	: - <tab>	APL + =

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$*$ (<i>exponential</i>)	monádico	e elevado ao argumento à direita

Unicode	TAB	APL
U+002A	-	APL + p

Arrays

- ▶ Em APL, a estrutura de dados fundamental é o *array*, e todos os dados estão contidos em *arrays*

Arrays

- ▶ Em APL, a estrutura de dados fundamental é o *array*, e todos os dados estão contidos em *arrays*
- ▶ Um *array* é uma coleção retangular de números, caracteres e *arrays*, arranjados ao longo de um ou mais eixos

Arrays

- ▶ Em APL, a estrutura de dados fundamental é o *array*, e todos os dados estão contidos em *arrays*
- ▶ Um *array* é uma coleção retangular de números, caracteres e *arrays*, arranjados ao longo de um ou mais eixos
- ▶ Os elementos de um *array* podem ter tipos distintos

Arrays

- ▶ Em APL, a estrutura de dados fundamental é o *array*, e todos os dados estão contidos em *arrays*
- ▶ Um *array* é uma coleção retangular de números, caracteres e *arrays*, arranjados ao longo de um ou mais eixos
- ▶ Os elementos de um *array* podem ter tipos distintos
- ▶ *Arrays* especiais:
 - (a) **escalar**: um único número, dimensão zero
 - (b) **vetor**: um *array* unidimensional
 - (c) **matriz**: um *array* bidimensional

Declaração de *arrays*

- ▶ *Arrays* são declarados separando seus elementos por espaços

```
2 3 5 7 11
2 3 5 7 11
'string' 2.0 3J-5 'c' 7
string 2.0 3J-5 c 7
```

Declaração de *arrays*

- ▶ *Arrays* são declarados separando seus elementos por espaços

```

2 3 5 7 11
2 3 5 7 11
'string' 2.0 3J-5 'c' 7
string 2.0 3J-5 c 7

```

- ▶ Parêntesis podem ser utilizados para agrupar vetores

```

(2 3 5) (7 11) (13) (17 19 23)
2 3 5 7 11 13 17 19 23
((2 3 5) (7 11)) ((13))
2 3 5 7 11 13
10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

```

A gera os 10 primeiros naturais

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
ι (iota)	monádico	Gera os primeiros n naturais

Unicode	TAB	APL
U+2373	i i <tab>	APL + i

Profundidade

- ▶ A profundidade (*depth*) de um *array* corresponde a o seu nível de profundidade/recursão

Profundidade

- ▶ A profundidade (*depth*) de um *array* corresponde a o seu nível de profundidade/recursão
- ▶ um vetor de escalares tem profundidade igual a 1

Profundidade

- ▶ A profundidade (*depth*) de um *array* corresponde a o seu nível de profundidade/recursão
- ▶ um vetor de escalares tem profundidade igual a 1
- ▶ um vetor cujos elementos são vetores de profundidade 1 tem profundidade igual a 2

Profundidade

- ▶ A profundidade (*depth*) de um *array* corresponde a o seu nível de profundidade/recursão
- ▶ um vetor de escalares tem profundidade igual a 1
- ▶ um vetor cujos elementos são vetores de profundidade 1 tem profundidade igual a 2
- ▶ um escalar tem profundidade zero

Profundidade

- ▶ A profundidade (*depth*) de um *array* corresponde a o seu nível de profundidade/recursão
- ▶ um vetor de escalares tem profundidade igual a 1
- ▶ um vetor cujos elementos são vetores de profundidade 1 tem profundidade igual a 2
- ▶ um escalar tem profundidade zero
- ▶ APL atribuí a um vetor que mistura escalares e vetores uma profundidade negativa

Profundidade

- A profundidade de um *array* pode ser obtida por meio da função \equiv

```

       $\equiv$  2
0
       $\equiv$  'string'           A 'string' = 's' 't' 'r' 'i' 'n' 'g'
1
       $\equiv$  ((2 3) (5 7 11)) ('um' 'dois' 'três')
3
       $\equiv$  2 'três'
-2

```

Profundidade

- ▶ A profundidade de um *array* pode ser obtida por meio da função \equiv

```

       $\equiv$  2
0
       $\equiv$  'string'      A 'string' = 's' 't' 'r' 'i' 'n' 'g'
1
       $\equiv$  ((2 3) (5 7 11)) ('um' 'dois' 'três')
3
       $\equiv$  2 'três'
-2

```

- ▶ Strings vazias são representadas por ''

```

       $\equiv$  ''
1

```

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
≡ (<i>depth</i>)	monádico	Retorna a profundidade do <i>array</i>
Unicode	TAB	APL
U+2261	= = <tab>	APL + Shift + ç

Rank

- ▶ O *rank* é definido como o número de dimensões de um *array*

Rank

- ▶ O *rank* é definido como o número de dimensões de um *array*
- ▶ Escalares tem *rank* igual a zero

Rank

- ▶ O *rank* é definido como o número de dimensões de um *array*
- ▶ Escalares tem *rank* igual a zero
- ▶ Vetores tem *rank* igual a 1

Rank

- ▶ O *rank* é definido como o número de dimensões de um *array*
- ▶ Escalares tem *rank* igual a zero
- ▶ Vetores tem *rank* igual a 1
- ▶ Matrizes tem *rank* igual a 2

Rank

- ▶ O *rank* é definido como o número de dimensões de um *array*
- ▶ Escalares tem *rank* igual a zero
- ▶ Vetores tem *rank* igual a 1
- ▶ Matrizes tem *rank* igual a 2
- ▶ Em APL os *arrays* são retangulares: cada linha de uma matriz deve ter o mesmo número de colunas

Rank

- ▶ O *rank* é definido como o número de dimensões de um *array*
- ▶ Escalares tem *rank* igual a zero
- ▶ Vetores tem *rank* igual a 1
- ▶ Matrizes tem *rank* igual a 2
- ▶ Em APL os *arrays* são retangulares: cada linha de uma matriz deve ter o mesmo número de colunas
- ▶ Para criar *arrays* com rank maior do que 1 é preciso usar a função ρ (*reshape*), que recebe como argumento à esquerda um vetor dos comprimentos das dimensões e os dados como argumento à direita

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
ρ (<i>reshape</i>)	diádico	Retorna um <i>array</i> com as dimensões e dados indicados
Unicode	TAB	APL
U+2374	<code>r r <tab></code>	<code>APL + r</code>

Declarando *arrays* multidimensionais

- ▶ A função `p` retorna *arrays* multidimensionais

```
      2 2 p 1 0 0 1  
1 0  
0 1
```

Declarando *arrays* multidimensionais

- ▶ A função `p` retorna *arrays* multidimensionais

```

      2 2 p 1 0 0 1
1 0
0 1

```

- ▶ Se há dados em excesso o que sobra é ignorado

```

      2 3 p 'ABCDEFGHJIJ'
ABC
DEF

```

Declarando *arrays* multidimensionais

- ▶ A função `p` retorna *arrays* multidimensionais

```

      2 2 p 1 0 0 1
1 0
0 1

```

- ▶ Se há dados em excesso o que sobra é ignorado

```

      2 3 p 'ABCDEFGHJIJ'
ABC
DEF

```

- ▶ Se faltam dados a função `p` retorna ciclicamente ao início dos dados indicados

```

      2 3 p 5 7
5 7 5
7 5 7
A Arrays também podem ser aninhados, contendo outros arrays
      2 3 p 'string' (5.7 11) ((13 17) (19)) 'a'

```

Forma de um *array*

- ▶ Em sua versão monádica, a função `p` retorna os comprimentos das dimensões (forma) do *array*

```
p 'string'  
6  
p 0  
0  
p 2
```

`0` é o vetor numérico vazio

`0` Escalares não tem forma

Forma de um *array*

- ▶ Em sua versão monádica, a função `ρ` retorna os comprimentos das dimensões (forma) do *array*

```
ρ 'string'
```

```
6
```

```
ρ 0
```

```
0
```

```
ρ 2
```

```
A 0 é o vetor numérico vazio
```

```
A Escalares não tem forma
```

- ▶ Matrizes com uma única linha e vetores são distintos

```
ρ 2 3 5 7 11
```

```
5
```

```
ρ (1 5 ρ 2 3 5 7 11)
```

```
1 5
```

```
A Vetor
```

```
A Matriz com uma única linha
```

Forma de um *array*

- ▶ Em sua versão monádica, a função ρ retorna os comprimentos das dimensões (forma) do *array*

ρ 'string'

6

ρ \emptyset

0

ρ 2

$\mathbf{A} \emptyset$ é o vetor numérico vazio

\mathbf{A} Escalares não tem forma

- ▶ Matrizes com uma única linha e vetores são distintos

ρ 2 3 5 7 11

5

ρ (1 5 ρ 2 3 5 7 11)

1 5

\mathbf{A} Vetor

\mathbf{A} Matriz com uma única linha

- ▶ Vale a identidade $\mathbf{v} \equiv \rho (\mathbf{v} \rho \mathbf{A})$, onde \mathbf{v} é um vetor e \mathbf{A} um *array* qualquer

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
ρ (<i>shape</i>)	monádico	Retorna a forma (comprimento das dimensões) de um <i>array</i>
Unicode	TAB	APL
U+2374	r r <tab>	APL + r

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
\emptyset <i>(empty numeric vector)</i>	-	Vetor numérico vazio

Unicode	TAB	APL
U+236C	0 - <tab>	APL + Shift + [

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
---------	---------	-----------

≡

(*match*)

diádico

Retorna verdadeiro se ambos argumentos são idênticos (conteúdo e forma)

Unicode	TAB	APL
---------	-----	-----

U+2361

= = <tab>

APL + Shift + ç

Cálculo do *rank*

- ▶ O *rank* de um vetor é igual ao comprimento da sua forma

Cálculo do *rank*

- ▶ O *rank* de um vetor é igual ao comprimento da sua forma
- ▶ Assim, o *rank* de um *array* pode ser computado por meio da dupla aplicação da função ρ

```

      ρ ρ 2
0      ρ ρ 2 3 5 7 11
1      ρ ρ 2 3 ρ 15
2

```

A Escalares tem rank zero

Cálculo do *rank*

- ▶ O *rank* de um vetor é igual ao comprimento da sua forma
- ▶ Assim, o *rank* de um *array* pode ser computado por meio da dupla aplicação da função ρ

```

0      ρ ρ 2                                A Escalares tem rank zero
      ρ ρ 2 3 5 7 11
1
      ρ ρ 2 3 ρ 15
2

```

- ▶ A função ρ pode ser usada para conversões entre um escalar s e um vetor v com um único componente igual a x :

```

1      ρ ρ 1 ρ x                            A de x para v
      ρ ρ 0 ρ 1 ρ x
0

```


Funções escalares monádicas

- ▶ Em APL uma função pode ser aplicada monadicamente (um argumento) ou diadicamente (dois argumentos)

Funções escalares monádicas

- ▶ Em APL uma função pode ser aplicada monadicamente (um argumento) ou diadicamente (dois argumentos)
- ▶ Há dois tipos de funções: escalares e mistas

Funções escalares monádicas

- ▶ Em APL uma função pode ser aplicada monadicamente (um argumento) ou diadicamente (dois argumentos)
- ▶ Há dois tipos de funções: escalares e mistas
- ▶ Funções escalares monádicas navegam nos diferentes níveis dos *arrays* até localizar e operar nos escalares

Funções escalares monádicas

- ▶ Em APL uma função pode ser aplicada monadicamente (um argumento) ou diadicamente (dois argumentos)
- ▶ Há dois tipos de funções: escalares e mistas
- ▶ Funções escalares monádicas navegam nos diferentes níveis dos *arrays* até localizar e operar nos escalares
- ▶ A estrutura se mantém e apenas o conteúdo é alterado:

```

      ! 2 3 5 7.11          A fatorial
2 6 120 5040 6296.086347
      | 2 -3 5J-7 -11.13    A valor absoluto (norma)
2 3 8.602325267 11.13
      ÷ (2 3) 5 (7 (11.13 17))
0.5 0.3333333333 0.2 0.1428571429 0.08984725966 0.05882352941

```

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
<div>!</div> <div>(factorial)</div>	monádico	computa o fatorial (função gama) de x
Unicode	TAB	APL
U+0021	-	APL + Shift + -

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$ $ <i>(magnitude)</i>	monádico	computa o valor absoluto (norma) de x
Unicode	TAB	APL
U+007C	-	APL + m

Funções escalares diádicas

- ▶ Funções escalares diádicas obtém seus operandos das localizações correspondentes de seus argumentos

```
    2 3 5 + 7 11 13
9 14 18
```

Funções escalares diádicas

- ▶ Funções escalares diádicas obtém seus operandos das localizações correspondentes de seus argumentos

```
    2 3 5 + 7 11 13
9 14 18
```

- ▶ Se as formas dos argumentos diferem ocorre um erro

```
    2 3 ÷ 5 7 11
LENGTH ERROR: Mismatched left and right argument shapes
```


Funções escalares diádicas

- ▶ Funções escalares diádicas obtém seus operandos das localizações correspondentes de seus argumentos

```
    2 3 5 + 7 11 13
9 14 18
```

- ▶ Se as formas dos argumentos diferem ocorre um erro

```
    2 3 ÷ 5 7 11
LENGTH ERROR: Mismatched left and right argument shapes
```

- ▶ Se um dos argumentos é escalar, ele é replicado para todos os escalares do outro argumento

Funções escalares diádicas

- ▶ Funções escalares diádicas obtém seus operandos das localizações correspondentes de seus argumentos

```

      2 3 5 + 7 11 13
9 14 18

```

- ▶ Se as formas dos argumentos diferem ocorre um erro

```

      2 3 ÷ 5 7 11
LENGTH ERROR: Mismatched left and right argument shapes

```

- ▶ Se um dos argumentos é escalar, ele é replicado para todos os escalares do outro argumento
- ▶ O mesmo vale para escalares dentro do argumento, após o pareamento

```

      2 × 3 5 7
6 10 14
      (1 1) 2 (3 5 8) + 13 (21 34) 55
14 14    23 26    58 60 63

```

Funções mistas e definidas pelo programador

- ▶ Funções mistas consideram seus argumentos na íntegra, ou suas subestruturas

Funções mistas e definidas pelo programador

- ▶ Funções mistas consideram seus argumentos na íntegra, ou suas subestruturas
- ▶ Por exemplo, a função ρ monádica considera todo seu argumento

$\rho \ ((2\ 3\ 5)\ 7\ ((11\ 13)\ 17))\ 19$
2

Funções mistas e definidas pelo programador

- ▶ Funções mistas consideram seus argumentos na íntegra, ou suas subestruturas
- ▶ Por exemplo, a função ρ monádica considera todo seu argumento

$$\rho \ ((2\ 3\ 5)\ 7\ ((11\ 13)\ 17))\ 19$$

2

- ▶ Há três tipos de funções definidas pelo programador: *dfns*, *tradfns* e funções tácitas (implícitas)

Funções mistas e definidas pelo programador

- ▶ Funções mistas consideram seus argumentos na íntegra, ou suas subestruturas
- ▶ Por exemplo, a função ρ monádica considera todo seu argumento

```
 $\rho$  ((2 3 5) 7 ((11 13) 17)) 19
2
```

- ▶ Há três tipos de funções definidas pelo programador: *dfns*, *tradfns* e funções tácitas (implícitas)
- ▶ Desde 2010 os dialetos da APL baseados no Dyalog removeram as *tradfns* em favor das *dfns*

Funções mistas e definidas pelo programador

- ▶ Funções mistas consideram seus argumentos na íntegra, ou suas subestruturas
- ▶ Por exemplo, a função ρ monádica considera todo seu argumento

```
 $\rho \ ((2\ 3\ 5)\ 7\ ((11\ 13)\ 17))\ 19$ 
2
```

- ▶ Há três tipos de funções definidas pelo programador: *dfns*, *tradfns* e funções tácitas (implícitas)
- ▶ Desde 2010 os dialetos da APL baseados no Dyalog removeram as *tradfns* em favor das *dfns*
- ▶ Uma função definida pelo usuário se comporta como as funções primitivas: no máximo dois argumentos e são chamadas monadicamente (prefixadas) ou diadicamente (pós-fixadas)

dfns

- Uma *dfn* (*dynamic-function*) é delimitada por chaves e seus argumentos à esquerda e à direita são representados pelas letras gregas alpha (α) e omega (ω), respectivamente

```
plus ← { $\alpha$ + $\omega$ }  
      2 plus 3  
5
```


dfns

- Uma *dfn* (*dynamic-function*) é delimitada por chaves e seus argumentos à esquerda e à direita são representados pelas letras gregas alpha (α) e omega (ω), respectivamente

```
plus ← { $\alpha$ + $\omega$ }
  2 plus 3
5
```

- Na versão monádica, apenas o ω é utilizado

```
cube ← { $\omega$ *3}
cube 2
8
```

dfns

- Uma *dfn* (*dynamic-function*) é delimitada por chaves e seus argumentos à esquerda e à direita são representados pelas letras gregas alpha (α) e omega (ω), respectivamente

```
plus ← { $\alpha$ + $\omega$ }
      2 plus 3
5
```

- Na versão monádica, apenas o ω é utilizado

```
cube ← { $\omega$ *3}
cube 2
8
```

- *Dfns* são funções anônimas (lambdas)

```
2 { $\alpha$ * $\omega$ } 3
6
```

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
α (<i>alpha</i>)	-	Argumento à esquerda de uma <i>dfns</i>
Unicode	TAB	APL
U+237A	a a <tab>	APL + a

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
ω (<i>omega</i>)	-	Argumento à direita de uma <i>dfns</i>
Unicode	TAB	APL
U+2375	w w <tab>	APL + w

`if-then-else`

- ▶ É possível replicar o construto `if-then-else` de outras linguagens por meio de uma *dfn*

if-then-else

- ▶ É possível replicar o construto `if-then-else` de outras linguagens por meio de uma *dfn*
- ▶ A sintaxe é

```
{ a : b ◊ c }
```

if-then-else

- ▶ É possível replicar o construto `if-then-else` de outras linguagens por meio de uma *dfn*
- ▶ A sintaxe é

```
{ a : b ◊ c }
```

- ▶ Esta *dfn* equivale a

```
if a then b else c
```

onde `a` tem que ser uma expressão booleana

if-then-else

- ▶ É possível replicar o construto `if-then-else` de outras linguagens por meio de uma *dfn*
- ▶ A sintaxe é

```
{ a : b ◊ c }
```

- ▶ Esta *dfn* equivale a

```
if a then b else c
```

onde `a` tem que ser uma expressão booleana

- ▶ Exemplo de uso:

```
max ← { α > ω : α ◊ ω }
      2 max 3
3
```


Recursão

- ▶ Mesmo sendo anônimas, é possível implementar funções recursivas usando *dfns*

Recursão

- ▶ Mesmo sendo anônimas, é possível implementar funções recursivas usando *dfns*
- ▶ Uma maneira é nomeando a *dfns* por meio de uma atribuição

```
gcd ← {ω > 0 : ω gcd (ω|α) ♦ α}
20 gcd 12
```

4

Recursão

- ▶ Mesmo sendo anônimas, é possível implementar funções recursivas usando *dfns*
- ▶ Uma maneira é nomeando a *dfns* por meio de uma atribuição

```
gcd ← {ω > 0 : ω gcd (ω|α) ♦ α}
20 gcd 12
```

4

- ▶ A segunda maneira é utilizar o símbolo ∇ , que identifica a função anônima e permite a chamada recursiva


```
{ω = 1 : 1 ♦ ω + ∇ ω - 1} 10      A soma dos n primeiros positivos
```

55

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\overline{}$ <i>(residue)</i>	diádico	Computa o resto da divisão euclidiana do argumento à direita pelo argumento à esquerda
Unicode	TAB	APL
U+007C	-	APL + m

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
 (recursion)	-	Representa uma <i>dfns</i> em uma chamada recursiva
Unicode	TAB	APL
U+2207	V V <tab>	APL + g

Funções tácitas

- ▶ Funções tácitas (*tacit*, implícitas) são expressões sem referências aos argumentos

Funções tácitas

- ▶ Funções tácitas (*tacit*, implícitas) são expressões sem referências aos argumentos
- ▶ Códigos que usam apenas funções tácitas são ditos livre de pontos

Funções tácitas

- ▶ Funções tácitas (*tacit*, implícitas) são expressões sem referências aos argumentos
- ▶ Códigos que usam apenas funções tácitas são ditos livre de pontos
- ▶ A omissão dos parâmetros remete à conversão η do cálculo lambda

Funções tácitas

- ▶ Funções tácitas (*tacit*, implícitas) são expressões sem referências aos argumentos
- ▶ Códigos que usam apenas funções tácitas são ditos livre de pontos
- ▶ A omissão dos parâmetros remete à conversão η do cálculo lambda
- ▶ Uma única função é sempre uma função tácita

÷

`f ← ×`

A Atribuições podem nomear funções tácitas

Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor

Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor
- ▶ Trens podem ser monádicos ou diádicos

Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor
- ▶ Trens podem ser monádicos ou diádicos
- ▶ Um trem com dois carros monádicos é chamado *atop* (sobre, em cima)

Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor
- ▶ Trens podem ser monádicos ou diádicos
- ▶ Um trem com dois carros monádicos é chamado *atop* (sobre, em cima)
- ▶ $(f\ g)\ X$ é equivalente a $f\ (g\ X)$, onde f e g são funções monádicas

$f \leftarrow ++ \diamond f\ 2J3$ A Conjugado do simétrico
 $^{-2J3}$

Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor
- ▶ Trens podem ser monádicos ou diádicos
- ▶ Um trem com dois carros monádicos é chamado *atop* (sobre, em cima)
- ▶ $(f\ g)\ X$ é equivalente a $f\ (g\ X)$, onde f e g são funções monádicas

$f \leftarrow ++ \diamond f\ 2J3$ A Conjugado do simétrico
 $\sim 2J3$

- ▶ Isto quer dizer que f é avaliada “*atop*” (sobre) o resultado de g

Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor
- ▶ Trens podem ser monádicos ou diádicos
- ▶ Um trem com dois carros monádicos é chamado *atop* (sobre, em cima)
- ▶ $(f\ g)\ X$ é equivalente a $f\ (g\ X)$, onde f e g são funções monádicas

$f \leftarrow ++ \diamond f\ 2J3$ A Conjugado do simétrico
 $\neg 2J3$

- ▶ Isto quer dizer que f é avaliada “*atop*” (sobre) o resultado de g
- ▶ Este trem corresponde a composição de funções em outras linguagens

Trens

- ▶ Funções tácitas com dois ou mais símbolos são chamadas **trens**, onde cada vagão é uma função ou vetor
- ▶ Trens podem ser monádicos ou diádicos
- ▶ Um trem com dois carros monádicos é chamado *atop* (sobre, em cima)
- ▶ $(f\ g)\ X$ é equivalente a $f\ (g\ X)$, onde f e g são funções monádicas

$f \leftarrow ++ \diamond f\ 2J3$ A Conjugado do simétrico
 $\neg 2J3$

- ▶ Isto quer dizer que f é avaliada “*atop*” (sobre) o resultado de g
- ▶ Este trem corresponde a composição de funções em outras linguagens
- ▶ Um trem não nomeado deve ser delimitado entre parêntesis

$(*\div)\ 2$ A e elevado ao inverso de x
 1.648721271

forks

- ▶ Um trem com três carros monádico é um *fork* (garfo, bifurcação)

forks

- ▶ Um trem com três carros monádico é um *fork* (garfo, bifurcação)
- ▶ Há duas variantes de *forks*:
 - (a) $(f \ g \ h) \ X$ equivale a $(f \ X) \ g \ (h \ X)$

$pm \leftarrow +, -$
 $pm \ 2$
 $2 \ -2$

forks

- ▶ Um trem com três carros monádico é um *fork* (garfo, bifurcação)
- ▶ Há duas variantes de *forks*:

(a) $(f \ g \ h) \ X$ equivale a $(f \ X) \ g \ (h \ X)$

```
pm ← +, -
pm 2
2 -2
```

(b) $(A \ g \ h) \ X$ equivale a $A \ g \ (h \ X)$ onde A é um *array*

```
areaCircle ← (01) × {ω*2}      π 01 é igual a π
areaCircle 2
12.56637061
```

forks

- ▶ Um trem com três carros monádico é um *fork* (garfo, bifurcação)
- ▶ Há duas variantes de *forks*:

(a) $(f \ g \ h) \ X$ equivale a $(f \ X) \ g \ (h \ X)$

```
pm ← +, -
pm 2
2 -2
```

(b) $(A \ g \ h) \ X$ equivale a $A \ g \ (h \ X)$ onde A é um *array*

```
areaCircle ← (o1) × {ω*2}      A o1 é igual a π
areaCircle 2
12.56637061
```

- ▶ Em ambos casos, g deve ser diádica e f e h monádicas

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
$\overset{\text{'}}{\text{,}}$ <i>(catenate, laminate)</i>	diádico	Concatena ambos argumentos
Unicode	TAB	APL
U+002C	-	-

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
---------	---------	-----------

 <i>(pi times)</i>	monádico	Multiplica o argumento por π
--	----------	----------------------------------

Unicode	TAB	APL
---------	-----	-----

U+25CB	o o <tab>	APL + o
--------	-----------	---------

Trens diádicos

- ▶ Os trens diádicos estão relacionados aos monádicos

Trens diádicos

- ▶ Os trens diádicos estão relacionados aos monádicos
 - (a) $X (f\ g) Y$ equivale a $f (X\ g\ Y)$, com f monádica, g diádica

Trens diádicos

- Os trens diádicos estão relacionados aos monádicos
 - (a) $X (f\ g) Y$ equivale a $f (X\ g\ Y)$, com f monádica, g diádica
 - (b) $X (f\ g\ h) Y$ equivale a $(X\ f\ Y)\ g\ (X\ h\ Y)$, todas diádicas

Trens diádicos

- Os trens diádicos estão relacionados aos monádicos
 - (a) $X (f\ g) Y$ equivale a $f (X\ g\ Y)$, com f monádica, g diádica
 - (b) $X (f\ g\ h) Y$ equivale a $(X\ f\ Y)\ g\ (X\ h\ Y)$, todas diádicas
 - (c) $X (A\ g\ h) Y$ equivale a $A\ g\ (X\ h\ Y)$, g , ambas diádicas

Trens diádicos

- ▶ Os trens diádicos estão relacionados aos monádicos
 - (a) $X (f\ g) Y$ equivale a $f (X\ g\ Y)$, com f monádica, g diádica
 - (b) $X (f\ g\ h) Y$ equivale a $(X\ f\ Y)\ g\ (X\ h\ Y)$, todas diádicas
 - (c) $X (A\ g\ h) Y$ equivale a $A\ g\ (X\ h\ Y)$, g , ambas diádicas
- ▶ Dentro de um trem diádicos os símbolos \dashv e \vdash retornam os argumentos à esquerda e a direita, respectivamente

```

3 (*-) 5          A (a), sinal da diferença
-1
imc ← -÷{ω*2}     A (b), IMC
75 imc 1.79
23.40750913
2 (0.5×+) 3       A (c), média aritmética
2.5

```

Trens diádicos

- ▶ Os trens diádicos estão relacionados aos monádicos
 - (a) $X (f\ g) Y$ equivale a $f (X\ g\ Y)$, com f monádica, g diádica
 - (b) $X (f\ g\ h) Y$ equivale a $(X\ f\ Y)\ g\ (X\ h\ Y)$, todas diádicas
 - (c) $X (A\ g\ h) Y$ equivale a $A\ g\ (X\ h\ Y)$, g , ambas diádicas
- ▶ Dentro de um trem diádicos os símbolos \dashv e \vdash retornam os argumentos à esquerda e a direita, respectivamente

<code>3 (*-) 5</code>	<code>A (a), sinal da diferença</code>
<code>-1</code>	
<code>imc ← -÷{ω*2}</code>	<code>A (b), IMC</code>
<code>75 imc 1.79</code>	
<code>23.40750913</code>	
<code>2 (0.5×+) 3</code>	<code>A (c), média aritmética</code>
<code>2.5</code>	

- ▶ Em trens monádicos ambos retornam sempre o argumento à direita

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
\leftarrow <i>(left)</i>	monádico/diádico	Em um trem, retorna o argumento à esquerda (ou a direita, no caso monádico)

Unicode	TAB	APL
U+22A3	- <tab>	APL + Shift +

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
---------	---------	-----------

└

(*right*)

monádico/diádico

Em um trem, retorna o argumento à direita

Unicode	TAB	APL
---------	-----	-----

U+22A2

| - <tab>

APL + |

Trens de tamanho 4 ou maior

- ▶ Para trens de tamanho quatro ou maior, a regra é simples: os últimos 3 símbolos se tornam um trem de tamanho 3 e são tratados como uma única função

Trens de tamanho 4 ou maior

- ▶ Para trens de tamanho quatro ou maior, a regra é simples: os últimos 3 símbolos se tornam um trem de tamanho 3 e são tratados como uma única função
- ▶ O que resta será um *atop*, um *fork* ou é preciso repetir a operação

Trens de tamanho 4 ou maior

- ▶ Para trens de tamanho quatro ou maior, a regra é simples: os últimos 3 símbolos se tornam um trem de tamanho 3 e são tratados como uma única função
- ▶ O que resta será um *atop*, um *fork* ou é preciso repetir a operação
- ▶ Por exemplo, $(p\ q\ r\ s)\ X$ equivale a

$$(p\ (q\ r\ s))\ X = p\ ((q\ r\ s)\ X) = p\ ((q\ X)\ r\ (s\ X))$$

Trens de tamanho 4 ou maior

- ▶ Para trens de tamanho quatro ou maior, a regra é simples: os últimos 3 símbolos se tornam um trem de tamanho 3 e são tratados como uma única função
- ▶ O que resta será um *atop*, um *fork* ou é preciso repetir a operação
- ▶ Por exemplo, $(p\ q\ r\ s)\ X$ equivale a

$$(p\ (q\ r\ s))\ X = p\ ((q\ r\ s)\ X) = p\ ((q\ X)\ r\ (s\ X))$$

- ▶ Outro exemplo:

$$X\ (p\ q\ r\ s\ t)\ Y = (X\ p\ Y)\ q\ ((X\ r\ Y)\ s\ (X\ t\ Y))$$

Trens de tamanho 4 ou maior

- ▶ Para trens de tamanho quatro ou maior, a regra é simples: os últimos 3 símbolos se tornam um trem de tamanho 3 e são tratados como uma única função
- ▶ O que resta será um *atop*, um *fork* ou é preciso repetir a operação
- ▶ Por exemplo, $(p\ q\ r\ s)\ X$ equivale a

$$(p\ (q\ r\ s))\ X = p\ ((q\ r\ s)\ X) = p\ ((q\ X)\ r\ (s\ X))$$

- ▶ Outro exemplo:

$$X\ (p\ q\ r\ s\ t)\ Y = (X\ p\ Y)\ q\ ((X\ r\ Y)\ s\ (X\ t\ Y))$$

- ▶ Trens podem ser usados para simplificar expressões do tipo $((\text{cond1}\ x)\ \text{and}\ (\text{cond2}\ x)\ \text{and}\ \dots\ \text{and}\ (\text{condN}\ x))$ para $\text{cond1} \wedge \text{cond2} \wedge \dots \wedge \text{condN}$

Novo símbolo

Símbolo	Aridade	Descrição
---------	---------	-----------

\wedge (<i>and</i>)	diádico	Conjunção (e) lógica escalar
----------------------------	---------	------------------------------

Unicode	TAB	APL
---------	-----	-----

U+2227	$\wedge\wedge$ <tab>	APL + 0
--------	----------------------	---------

Referências

1. APL Wiki. [Defined function \(traditional\)](#), acesso em 27/09/2021.
2. Dyalog. [Try APL – Interactive lessons](#), acesso em 23/09/2021.
3. **IVERSON**, Kenneth E. *A Programming Language*, John Wiley and Sons, 1962.
4. Unicode Character Table. [Página principal](#), acesso em 27/09/2021.
5. Xah Lee. [Unicode APL Symbols](#), acesso em 23/09/2021.