Fundamentos

Funções

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

2021

Sumário

Produto Cartesiano

Produto Cartesiano

Sejam A e B dois conjuntos. O produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro componente é um elemento de A e o segundo componente é um elemento de B, isto é,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Exemplos de produtos cartesianos

1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$. Então

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

e

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

2. Seja C o conjunto dos times que participam de um campeonato de futebol. A tabela T dos jogos da primeira fase do campeonato, onde cada time enfrenta todos os outros em jogos de ida e volta é o conjunto

$$T = \{(a, b) \in C \times C \mid a \neq b\}$$

3. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Relações e Funções

Relação de A em B

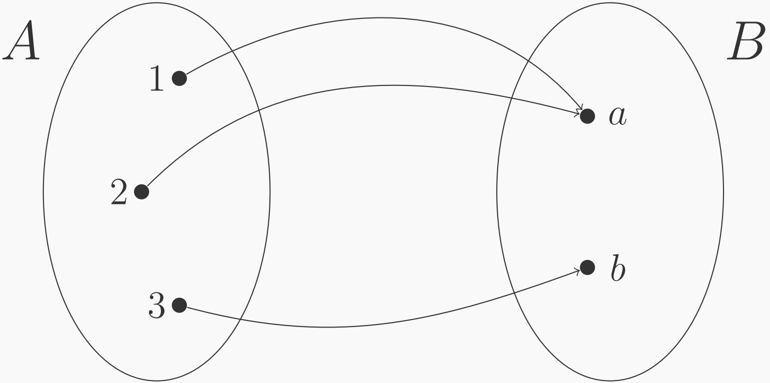
Sejam A e B dois conjuntos. Uma **relação** R de A em B é um subconjunto $R \subset A \times B$.

Função de A em B

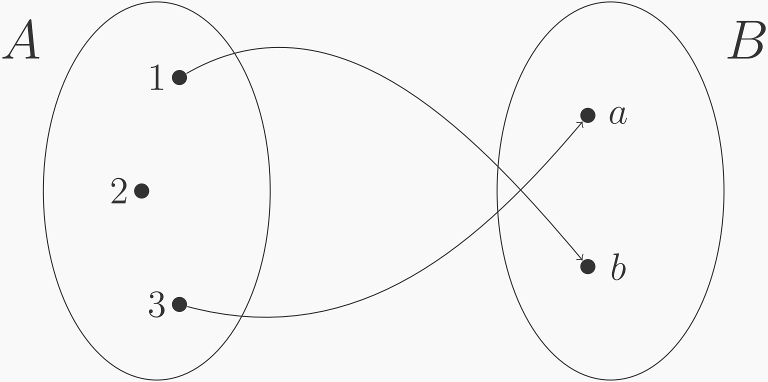
Uma relação f de A em B é uma **função** de A em B se, para qualquer $a \in A$, existe um único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.
Notação: $f : A \to B$

Observação: se f é uma função de A em B, então $(a, b) \in f$ pode ser escrito como $f(a) = b$.

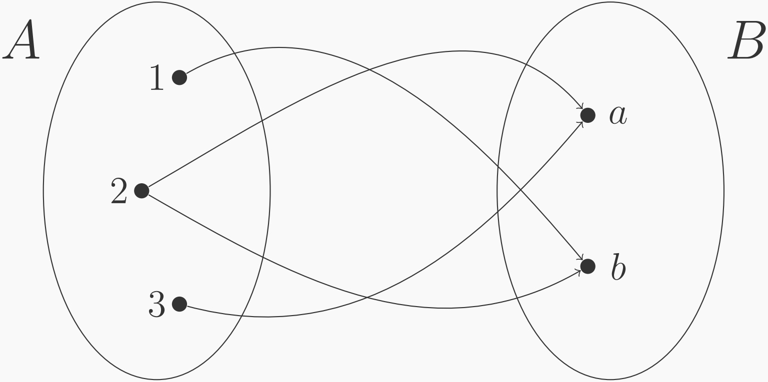
Exemplo de função



Exemplo de relação que não é função



Exemplo de relação que não é função



Funções notáveis

1. A função **identidade** $\mathrm{id} : A \to A$, tal que $\mathrm{id}(x) = x$.
2. A **adição** $a : B \times B \to B$, onde $a(x, y) = x + y$.
3. A função **delta de Kronecker** $\delta : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$, dada por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

4. A função de **decisão** $d_X : Y \to \{\texttt{True}, \texttt{False}\}$, onde $d_X(y) = \texttt{True}$ se $y \in X$; caso contrário, $d_X(y) = \texttt{False}$.
5. A função **logaritmo natural** $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida abaixo

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Domínio, imagem e gráfico

Domínio e imagem de uma função f de A em B

Seja f uma função de A em B. O conjunto A é denominado **domínio** da função f, e o conjunto B o **contradomínio** de f. Além disso, o conjunto

$$Img(f) = \{b \in B \mid \exists\, a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$$

é a **imagem** da função f. Outra notação comum para o conjunto imagem de f é $f(A)$.

Gráfico de uma função

Seja f uma função de A em B. O **gráfico** de f é o conjunto

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

Composição de funções

Função composta

Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ duas funções. Se $f(A) \subset C$, então a **função composta** $h : A \to D$ é definida como

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Observação: Em geral, $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ (pode ser que $(f \circ g)(x)$ nem esteja, de fato, definida).

Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

(a) f é **injetora** se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$, para todos $x, y \in A$

(b) f é **sobrejetora** se $Img(f) = f(A) = B$

(c) f é dita **bijetora** se é injetora e sobrejetora

Observações: em uma função injetora, cada elemento do contradomínio B pode estar relacionado a, no máximo, um elemento do domínio A; em uma função sobrejetora, todos os elementos de B devem estar associados a, no mínimo, um elemento de A.

Função inversa

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora de A em B. A **função inversa** $f^{-1} : B \to A$ de f é uma função tal que $f^{-1}(b) = a$ se, e somente se, $f(a) = b$.

Observação: para qualquer função bijetora $f : X \to Y$, temos que

$$(f \circ f^{-1})(y) = y$$

e que

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x,$$

ou seja, a composição de uma função com sua inversa resulta na função identidade $\mathrm{id}(x) = x$.

Referências

1. **HALE**, M. *Essentials of Mathematics: Introduction to Theory, Proof, and the Professional Culture*, Mathematical Association of America, 2003. (**eBrary**)
2. **Wikipédia**. Kronecker delta, acesso em 02/01/2020.
3. **Wolfram MathWorld**. Function, acesso em 01/01/2020.