Máquinas de Turing

Enumerabilidade

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Sumário

Funções parciais

Funções parciais

Sejam A e B conjuntos. A função $f : D \to B$ é uma função **parcial** de A em B se $D \subset A$ é um subconjunto próprio de A. Se $D = A$ a função f é dita uma função **total** de A em B.

Enumerabilidade

Conjuntos enumeráveis

Um conjunto A é enumerável se, e somente se, ele é imagem de ao menos uma função (total ou parcial) de $\mathbb{N}$ em A.

Observação: informalmente, um conjunto A é enumerável se seus elementos podem ser listados em ordem, isto é, um primeiro elemento, um segundo elemento, etc,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

de modo que, cedo ou tarde, todos os elementos de A sejam listados, ao menos, uma vez.

Exemplos de conjuntos enumeráveis

1. Os números naturais são enumeráveis: eles são enumerados pela função identidade $f(n) = n$
2. A união dos números naturais com o zero também é enumerável: a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que
$$g(n) = n - 1$$
enumera esta união
3. O conjunto dos naturais pares pode é enumerado pela função total $h(n) = 2n$, ou pela parcial
$$p(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ é par} \\ \text{indefinida}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplos de conjuntos enumeráveis

4. O conjunto vazio $\emptyset$ é enumerado pela a função $z(n) =$ indefinida, $\forall n \in \mathbb{N}$
5. Qualquer conjunto finito A é enumerável
6. Os números inteiros $\mathbb{Z}$ são enumeráveis: uma listagem possível dos seus elementos é

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$$

Uma função f que gera tal enumeração é

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -\frac{n}{2}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Enumerabilidade dos números racionais

Teorema

O conjunto dos números racionais positivos $\mathbb{Q}^+$ é enumerável.

Para demonstrar este importante resultado, observe que

$$\mathbb{Q}^+ = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$$

Assim, basta demostrar o seguinte lema:

Lema

O conjunto os pares ordenados de números naturais é enumerável.

Demonstração por *zigue-zague* de Cantor

$$
\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \arrow[dl] & (1,4) \arrow[dl] & (1,5) & \cdots \\
(2,1) \arrow[urr] & (2,2) \arrow[dl] & (2,3) \arrow[dl] & (2,4) & (2,5) & \cdots \\
(3,1) \arrow[uurrr] & (3,2) \arrow[dl] & (3,3) & (3,4) & (3,5) & \cdots \\
(4,1) \arrow[uuurrrr] & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & \cdots \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Demonstração por *zigue-zague* de Cantor

- A função G que enumera os pares é tal que

$$G(1) = (1,1), G(2) = (1,2), G(3) = (2,1), G(4) = (1,3), \ldots$$

  conforme padrão apresentado na figura anterior
- O padrão, de fato, é o seguinte: primeiro são enumerados todos os pares cujas coordenadas somam 2 (a saber, apenas o par $(1,1)$)
- Em seguida, são listados todos os pares cujas coordenadas somam 3, ordenados pela primeira coordenada: $(1,2), (2,1)$
- Após estes são enumerados os pares que somam $4, 5, \ldots$, e assim por diante
- É possível, mas não necessário, descrever a função G em termos de n

Enumerabilidade das sequências finitas de inteiros positivos

Proposição

O conjunto $\mathcal{S}$ de todas as sequências finitas de inteiros positivos é enumerável.

Enumerabilidade das sequências finitas de inteiros positivos

Demonstração

O Teorema Fundamental da Aritmética nos diz que qualquer inteiro $n \geq 2$ pode ser escrito, de forma única, como

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

onde os números p_i são primos e os expoentes α_i são inteiros não-negativos. A função $f(s)$ recebe uma sequência finita de inteiros positivos $s = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ e retorna o natural

$$f(s) = 2^{s_1} 3^{s_2} 5^{s_3} \ldots p_N^{s_N},$$

onde p_N é o N-ésimo número primo. Fazendo $f(e) = 1$, onde e é a sequência vazia, a inversa da função f pode ser usada para construir uma função parcial G que enumera $\mathcal{S}$.

Exemplos da enumeração de $\mathcal{S}$

1. A sequência de três termos $s = \{1, 2, 3\}$ é codificada pelo número 2250 pela função f, pois
$$f(s) = 2^1 3^2 5^3 = 2250$$
2. A sequência s tal que $f(s) = 30$ é $s = \{1, 1, 1\}$, pois
$$30 = 2^1 3^1 5^1$$
3. As cinco primeiras sequências da enumeração são
$$e, \{1\}, \{2\}, \{1, 1\}, \{3\}$$
4. Veja, na listagem acima, que a função $G(n) = f^{-1}(n)$ não está definida para todos os n naturais

Enumerabilidade das cadeias finitas de alfabetos enumeráveis

Proposição

Seja $\mathcal{A}$ um alfabeto enumerável. O conjunto $\mathcal{C}$ de todas as cadeias finitas de símbolos de $\mathcal{A}$ é enumerável.

Demonstração

Como $\mathcal{A}$ é enumerável, seus elementos podem ser dispostos em ordem:

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Assim, qualquer cadeia finita $c = \{a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_N}\} \in \mathcal{C}$ corresponde uma sequência finita de inteiros positivos

$$s = \{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$$

Como $\mathcal{S}$ é enumerável, $\mathcal{C}$ também é enumerável.

Exemplo de conjunto não-enumerável

Teorema de Cantor

O conjunto de todos os conjuntos de inteiros positivos não é enumerável.

Demonstração do Teorema de Cantor

- Uma forma de demonstrar o Teorema de Cantor é utilizar uma técnica chamada diagonalização
- A ideia é, a partir de uma lista L de conjuntos de inteiros positivos, construir um conjunto $\Delta(L)$ de inteiros positivos que não pertence à lista L
- Caso este conjunto seja acrescido à lista L, é possível aplicar a mesma técnica para construir um novo conjunto $\Delta(L^*)$ que não pertence à lista $L^* = L \cup \Delta(L)$
- Assim, não existe nenhuma lista que enumera o conjunto de todos os conjuntos de inteiros positivos

Construção do conjunto $\Delta(L)$

- Seja $L = S_1, S_2, S_3, \ldots$ uma lista de conjuntos de inteiros positivos S_i, $i \in \mathbb{Z}^+$
- Defina
$$\Delta(L) = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \notin S_n\}$$
- Da definição acima, $\Delta(L) \subset \mathbb{Z}^+$
- Como sugerido pela própria notação, o conjunto $\Delta(L)$ depende da lista L: cada lista L_j de conjuntos de inteiros positivos gera um conjunto $\Delta(L_j)$ em particular
- Por exemplo, se $L = S_1, S_2, S_3, \ldots$ é tal que S_i é o conjunto dos i primeiros números primos, temos que
$$\Delta(L) = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$$

Demonstração por contradição

- Suponha, por contradição, que $\Delta(L) \in L$, isto é, que o conjunto $\Delta(L)$ seja listado, em algum momento, por L
- Assim, existe um $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\Delta(L) = S_k$
- Em relação ao inteiro positivo k há dois cenários possíveis
- Se $k \in S_k$, então $\Delta(L) \neq S_k$, pois por definição, se $k \in \Delta(L)$ então $k \notin S_k$
- Logo, deveríamos ter $k \notin S_k$ mas, neste caso, teríamos que ter $k \in \Delta(L)$, de modo que $S_k \neq \Delta(L)$
- Portanto, a hipótese de que $\Delta(L) \in L$ leva a contradição $(\Delta(L) = S_k) \wedge (\Delta(L) \neq S_k)$
- Assim, $\Delta(L) \notin L$, completando a demonstração do Teorema de Cantor

Corolário do Teorema de Cantor

Corolário

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.

Demonstração

Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < x < 1$. Então x tem uma expansão decimal da forma

$$0, x_1 x_2 x_3 \ldots$$

Seja S_x o conjunto de inteiros positivos tal que $n \in S_x$ se, e somente se, $x_n = 1$. Deste modo, qualquer conjunto $S \subset \mathbb{Z}^+$ está associado a, pelo menos, um número real $y \in (0, 1)$. Assim, se os reais fossem enumeráveis, o conjunto de todos os conjuntos de inteiros positivos seria enumerável, contradizendo o Teorema de Cantor.

Referências

1. **BOOLOS**, George S.; **BURGESS**, John P.; **JEFFREY**, Richard C. *Computabilidade e Lógica*, Editora Unesp, 2012.