Máquinas de Turing

Enumerabilidade

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

2020

Sumário

Funções parciais

Funções parciais

Sejam A e B conjuntos. A função $f : D \to B$ é uma função **parcial** de A em B se $D \subset A$ é um subconjunto próprio de A. Se $D = A$ a função f é dita uma função **total** de A em B.

Enumerabilidade

Conjuntos enumeráveis

Um conjunto A é enumerável se, e somente se, ele é imagem de ao menos uma função (total ou parcial) de $\mathbb{N}$ em A.

Observação: informalmente, um conjunto A é enumerável se seus elementos podem ser listados em ordem, isto é, um primeiro elemento, um segundo elemento, etc,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

de modo que, cedo ou tarde, todos os elementos de A sejam listados, ao menos, uma vez.

Exemplos de conjuntos enumeráveis

1. Os números naturais são enumeráveis: eles são enumerados pela função identidade $f(n) = n$
2. A união dos números naturais com o zero também é enumerável: a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$g(n) = n - 1$$

   enumera esta união
3. O conjunto dos números pares pode é enumerado pela função total $h(n) = 2n$, ou pela parcial

$$p(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ é par} \\ \text{indefinida}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplos de conjuntos enumeráveis

4. O conjunto vazio $\emptyset$ é enumerado pela a função $z(n) =$ indefinida, $\forall n \in \mathbb{N}$
5. Qualquer conjunto finito A é enumerável
6. Os números inteiros $\mathbb{Z}$ são enumeráveis: uma listagem possível dos seus elementos é

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$$

Uma função f que gera tal enumeração é

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\left(\dfrac{n+1}{2}\right), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Enumerabilidade dos números racionais

Teorema

O conjunto dos números racionais positivos $\mathbb{Q}^+$ é enumerável.

Para demonstrar este importante resultado, observe que

$$\mathbb{Q}^+ = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$$

Assim, basta demostrar o seguinte lema:

Lema

O conjunto os pares ordenados de números naturais é enumerável.

Demonstração por *zigue-zague* de Cantor

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & \cdots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & \cdots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & \cdots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & \cdots \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Demonstração por *zigue-zague* de Cantor

- A função G que enumera os pares é tal que

$$G(1) = (1,1), G(2) = (1,2), G(3) = (2,1), G(4) = (1,3), \ldots$$

  conforme padrão apresentado na figura anterior
- O padrão, de fato, é o seguinte: primeiro são enumerados todos os pares cujas coordenadas somam 2 (a saber, apenas o par $(1,1)$)
- Em seguida, são listados todos os pares cujas coordenadas somam 3, ordenados pela primeira coordenada: $(1,2),(2,1)$
- Após estes são enumerados os pares que somam $4, 5, \ldots$, e assim por diante
- É possível, mas não necessário, descrever a função G em termos de n

Enumerabilidade das sequências finitas de inteiros positivos

Proposição

O conjunto $\mathcal{S}$ de todas as sequências finitas de inteiros positivos é enumerável.

Demonstração

O Teorema Fundamental da Aritmética nos diz que qualquer inteiro $n \geq 2$ pode ser escrito, de forma única, como

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

onde os números p_i são primos e os expoentes α_i são inteiros não-negativos. A função $f(s)$ recebe uma sequência finita de inteiros positivos $s = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ e retorna o natural

$$f(s) = 2^{s_1} 3^{s_2} 5^{s_3} \ldots p_N^{s_N},$$

onde p_N é o N-ésimo número primo. Fazendo $f(e) = 1$, onde e é a sequência vazia, a inversa da função f pode ser usada para construir uma função parcial G que enumera $\mathcal{S}$.

Exemplos da enumeração de $\mathcal{S}$

1. A sequência de três termos $s = \{1, 2, 3\}$ é codificada pelo número 2250 pela função f, pois

$$f(s) = 2^1 3^2 5^3 = 2250$$

2. A sequência s tal que $f(s) = 30$ é $s = \{1, 1, 1\}$, pois

$$30 = 2^1 3^1 5^1$$

3. As cinco primeiras sequências da enumeração são

$$e, \{1\}, \{2\}, \{1, 1\}, \{3\}$$

4. Veja, na listagem acima, que a função $G(n) = f^{-1}(n)$ não está definida para n se n é um número primo ímpar

Enumerabilidade das cadeias finitas de alfabetos enumeráveis

Proposição

Seja $\mathcal{A}$ um alfabeto enumerável. O conjunto $\mathcal{C}$ de todas as cadeias finitas de símbolos de $\mathcal{A}$ é enumerável.

Demonstração

Como $\mathcal{A}$ é enumerável, seus elementos podem ser dispostos em ordem:

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Assim, qualquer cadeia finita $c = \{a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_N}\} \in \mathcal{C}$ corresponde uma sequência finita de inteiros positivos

$$s = \{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$$

Como $\mathcal{S}$ é enumerável, $\mathcal{C}$ também é enumerável.

Referências

1. **BOOLOS**, George S.; **BURGESS**, John P.; **JEFFREY**, Richard C. *Computabilidade e Lógica*, Editora Unesp, 2012.