

Máquinas de Turing

Definição e Exemplos

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Sumário

1. Máquinas de Turing
2. Exemplos de Máquinas de Turing

Funções efetivamente computáveis

Definição

Uma função f de inteiros positivos em inteiros positivos é **efetivamente computável** se existe uma lista de instruções que, em princípio, permitam computar $f(n)$ para qualquer argumento n .

Observações: a noção de computabilidade efetiva é intuitiva, pois não é rigorosamente definida. Contudo, as instruções da lista citada devem ser definidas e explícitas, de tal modo que possam ser seguidas sem exigir informações externas ou engenhosidade para a sua execução.

Máquina de Turing

Definição

Uma **máquina de Turing** é uma máquina idealizada para realizar computação em números inteiros positivos usando notação monádica (onde o inteiro positivo n é representado por n traços). A computação acontece em uma fita linear, dividida em quadrados, infinita em ambas direções (esquerda e direita). Cada quadrado ou está **em branco** (representado pelos símbolos $S_0, 0$ ou B) ou tem **um traço** ($S_1, 1$ ou $|$). Exceto por um número finito de exceções, todos os demais quadrados estão em branco.

Observações: cada etapa da computação acontece em um quadrado da fita. O computador (agente humano, mecânico ou eletrônico) pode apagar o traço, caso o quadrado contenha um, ou escrever um traço, caso o quadrado esteja vazio. Além disso, ele pode mover o cabeçote para o quadrado à esquerda, ou para o quadrado à direita.

Resumo das instruções possíveis para uma máquina de Turing

As instruções tem forma condicional, dizendo o que fazer caso o quadrado esteja em branco (S_0) ou contenha um traço (S_1):

- (1) **Apagar:** escrever S_0 no quadrado, independente de seu estado
- (2) **Escrever:** escrever S_1 no quadrado, independente de seu estado
- (3) **Mover** para à esquerda (L)
- (4) **Mover** para à direita (R)
- (5) **Parar** a computação

A instrução (1) em um quadrado em branco, ou a instrução (2) em um quadrado com um traço, equivalem a não fazer nada.

Estados e programa

- ▶ Em cada etapa da computação, o computador avalia um quadrado em particular da fita
- ▶ O **estado** atual da máquina determina qual instrução (ação) a ser realizada e qual será o próximo estado que a máquina assumirá, a depender se há um traço ou não no quadrado em avaliação
- ▶ Assim, cada etapa da computação depende do estado atual e do símbolo contido no quadrado a ser avaliado
- ▶ Em cada etapa é realizada uma das cinco instruções listadas anteriormente, e é determinado o próximo estado que a máquina assumirá
- ▶ Um **programa** consiste na descrição de todos os estados possíveis da máquina, e de todas as ações a serem seguidas em cada estado, a depender dos símbolos encontrados no quadrado a ser avaliado

Tabela de Máquina

Definição

Uma **tabela de máquina** é uma tabela bidimensional cujas linhas representam os possíveis estados da máquina de Turing, e as duas colunas representam os símbolos que podem estar escritos no quadrado a ser avaliado (S_0 ou S_1). Cada célula descreve a ação a ser realizada, a depender do símbolo escrito, seguida do estado que sucederá o estado atual.

Em uma fita inicialmente como todos os quadrados em branco, o programa abaixo escreve três traços consecutivos, e para.

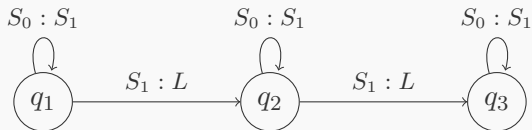
	S_0	S_1
q_1	$S_1 q_1$	$L q_2$
q_2	$S_1 q_2$	$L q_3$
q_3	$S_1 q_3$	

Fluxograma

Fluxograma

Em um programa escrito em **fluxograma** cada estado possível da máquina é representado por um círculo, e as transições possíveis são representadas por setas que partem do estado atual para o próximo estado, com rótulos na forma $S_i : I_k$, onde S_i é o símbolo presente no quadrado a ser avaliado e I_k é a instrução a ser seguida.

Mesmo programa apresentado na tabela de máquina. A menos que indicado de outra maneira, é assumido que a máquina inicia a computação no estado de menor número.



Conjunto de Quádruplas

Definição

Um programa pode ser descrito por um conjunto de **quádruplas** (q_a, S_i, I_k, q_b) , onde q_a é o estado atual, S_i o símbolo escrito no quadrado a ser avaliado, I_k é a instrução (ação) a ser seguida e q_b é o próximo estado. Se não houver ambiguidade, a quádrupla pode ser notada sem parêntesis e vírgulas, isto é, $q_a S_i I_k q_b$.

O programa ilustrado anteriormente por meio de tabela de máquina e de fluxograma, em lista de quádruplas:

$$q_1 S_0 S_1 q_1, q_1 S_1 L q_2, q_2 S_0 S_1 q_2, q_2 S_1 L q_3, q_3 S_0 S_1 q_3$$

Configurações

- ▶ O funcionamento de uma máquina de Turing pode ser descrito por meio de uma sequência de **configurações**
- ▶ Cada configuração lista todos os símbolos escritos na fita, o estado atual e o quadrado a ser examinado
- ▶ Por exemplo, a configuração

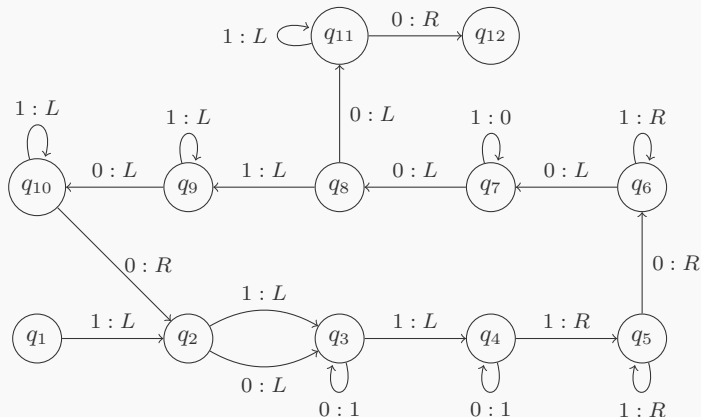
$$11010_3101$$

representa uma fita com dois traços, um espaço em branco, um novo traço, um quadrado em branco, que está sendo examinado pelo estado 3, um traço, um espaço em branco e um traço

- ▶ Assume-se que os quadrados não listados contém, todos, espaços em branco
- ▶ Assim, o estado descrito acima seria idêntico as estados 011010_3101 e 11010_310100 , por exemplo

Exemplo: Duplicando o número de traços

Assuma que a máquina abaixo começa no traço mais à esquerda de um bloco de n traços de uma fita que, de resto, está em branco. Esta máquina para no traço mais à esquerda de um bloco de $2n$ traços de uma fita que, de resto, está em branco.



Configurações para uma máquina com $n = 2$

- ▶ A configuração inicial da máquina é

$$1_11$$

- ▶ O estado 1 move o computador para à esquerda, levando à configuração

$$0_211$$

- ▶ Como o computador está avaliando um quadrado vazio, as próximas configurações são

$$0_3011, \quad 1_3011, \quad 0_41011, \quad 1_41011$$

- ▶ Esta sequência de instruções criou um par de traços à esquerda do bloco original, separado deste por um espaço em branco

Configurações para uma máquina com $n = 2$

- ▶ Os dois próximos estados (5 e 6) movimentam o computador para o último traço do segundo bloco (bloco original):

$$11_5011, 110_511, 1101_61, 11011_6, 110110_6, 11011_7$$

- ▶ O estado 7 apaga o último traço do bloco (se existir), e em seguida segue para à esquerda

$$11010_7, 1101_8$$

- ▶ Como há ainda um traço no bloco original, o estado 8 segue para o 9, que salta o bloco original, e em seguida para o 10, que posiciona a máquina no último traço do bloco à esquerda:

$$110_91, 11_{10}01, 1_{10}101, 0_{10}1101$$

Configurações para uma máquina com $n = 2$

- ▶ De volta ao estado 2, a máquina segue para escrever mais um par de traços à esquerda do bloco à esquerda:

$1_2101, 0_31101, 1_31101, 0_411101, 1_411101$

- ▶ Novamente os estados 5 e 6 posicionarão o computador no último traço do bloco original:

$11_51101, 111_5101, 1111_501, 11110_51, 111101_6, 1111010_6$

- ▶ O estado 7 apaga o último traço restante, e segue para o estado 8:

$111101_7, 111100_7, 11110_8$

- ▶ Como não há mais traços no bloco original, o estado 8 vai para o estado 11, o qual irá posicionar o computador no traço mais à esquerda do bloco restante:

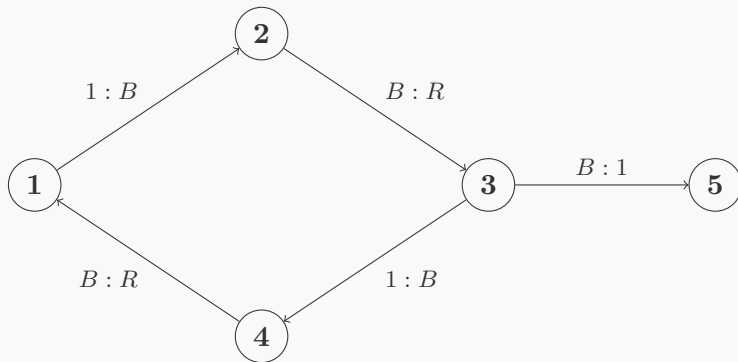
$1111_{11}, 111_{11}1, 11_{11}11, 1_{11}111, 0_{11}1111, 1_{12}111$

Exemplo: Paridade

A máquina abaixo inicia no traço mais à esquerda de um bloco de n traços de uma fita que, de resto, está em branco, e termina em um quadrado de uma fita, que de resto está em branco, que contém um traço, se n é ímpar, ou está em branco, se n é par.

Exemplo: Paridade

A máquina abaixo inicia no traço mais à esquerda de um bloco de n traços de uma fita que, de resto, está em branco, e termina em um quadrado de uma fita, que de resto está em branco, que contém um traço, se n é ímpar, ou está em branco, se n é par.



Configurações em uma máquina com $n = 3$

- ▶ A configuração inicial da máquina é

$$1_1 11$$

- ▶ Como o quadrado a ser avaliado tem um traço, o computador apaga o traço, seguindo para os estados 2 e 3:

$$0_2 11, \quad 1_3 1$$

- ▶ Encontrando um traço no quadrado, o estado 3 também o apaga, e retorna para o estado inicial, passando pelo estado 4:

$$0_4 1, \quad 1_1$$

Configurações em uma máquina com $n = 3$

- ▶ Novamente no estado 1, o computador torna a apagar o traço, seguindo para o estado 3:

$$0_2, \quad 0_3$$

- ▶ Agora o estado 3 encontra um quadrado em branco (de fato, a fita está toda em branco neste momento)
- ▶ Neste caso, ele escreve um traço no quadrado e vai para estado 5, onde a computação é encerrada:

$$1_5$$

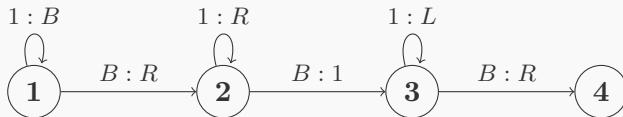
- ▶ Se n fosse par, a computação se encerraria no estado 1, em um quadrado em branco

Exemplo: Adição de números positivos

A máquina abaixo inicia no traço mais à esquerda de um bloco de n traços, o qual é seguido de um quadrado com um espaço em branco, e mais um bloco de m traços: de resto, a fita está em branco. Ela termina a computação no traço mais à esquerda de um bloco de $m + n$ traços, e o restante da fita está em branco.

Exemplo: Adição de números positivos

A máquina abaixo inicia no traço mais à esquerda de um bloco de n traços, o qual é seguido de um quadrado com um espaço em branco, e mais um bloco de m traços: de resto, a fita está em branco. Ela termina a computação no traço mais à esquerda de um bloco de $m + n$ traços, e o restante da fita está em branco.



Configurações em uma máquina com $n = 2, m = 3$

- ▶ A configuração inicial da máquina é

$$1_1 10111$$

- ▶ O estado 1 apaga o primeiro traço e segue para o estado 2:

$$0_1 10111, \quad 1_2 0111$$

- ▶ O estado 2 localiza o espaço em branco que separa os dois blocos, escreve um traço no quadrado correspondente e segue para o estado 3:

$$10_2 111, \quad 11_3 111$$

- ▶ Por fim, o estado 3 posiciona o computador no traço mais à esquerda do bloco recém-formado:

$$1_3 1111, \quad 0_3 11111, \quad 1_4 1111$$

Referências

1. **BOOLOS**, George S.; **BURGESS**, John P.; **JEFFREY**, Richard C.
Computabilidade e Lógica, Editora Unesp, 2012.