

Lambda Calculus

Recursão

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

2020

Sumário

1. Recursão
2. Combinador Y

Recursão

- ▶ A recursão diz respeito a definição de uma função em termos de si mesma
- ▶ Ao contrário de outras notações, o cálculo λ não permite esta definição diretamente, uma vez que os termos- λ são anônimos
- ▶ Uma maneira de contornar isso é utilizar uma expressão- λ que receba a si mesma como argumento
- ▶ Além disso, é preciso lidar com os dois aspectos fundamentais de uma função recursiva: o(s) caso(s) base(s) e a chamada recursiva

Estrutura básica da recursão

$$\gamma(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } P(x), \\ h(x, \gamma), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- ▶ $P(x)$ é um predicado que retorna verdadeiro se x é o valor que caracteriza um caso base
- ▶ Se $P(x)$ for verdadeiro, o valor de γ em x será dado pela função g
- ▶ Caso contrário, $\gamma(x)$ será dado por $h(x, \gamma)$, onde h é uma função que depende de x e de γ

Representação da estrutura básica da recursão no cálculo- λ

$$\Gamma \equiv (\lambda \gamma x. (Px)(gx)(\lambda \gamma x. H))$$

- ▶ Observe que na definição da função recursiva Γ é utilizado o termo- λ I_F
- ▶ Se o predicado (Px) retornar verdadeiro, o retorno será o primeiro parâmetro (gx) , que corresponde ao valor de Γ para o caso base
- ▶ Se falso, será avaliada a função $H = H(x, \gamma)$, que tem como parâmetros x e γ
- ▶ Não há garantias, contudo, que $\Gamma \equiv \gamma$, pois no cálculo λ os termos são anônimos
- ▶ É preciso, portanto, definir um termo que garanta esta equivalência

Teorema do Ponto Fixo

Teorema do Ponto Fixo

Para qualquer termo- λ G existe um termo X tal que $GX \equiv X$.

Demonstração

Seja G um termo- λ qualquer. Defina $W \equiv (\lambda x. G(xx))$ e $X = WW$.
Deste modo,

$$X \equiv WW \equiv (\lambda x. G(xx))W \equiv G(WW) \equiv GX$$

Combinador Y

Proposição (Combinador Y)

O combinador Y

$$Y \equiv \lambda f. (\lambda x. f(xx)) (\lambda x. f(xx))$$

é um termo- λ tal que, para qualquer termo G ,

$$YG \equiv G(YG)$$

Demonstração

Seja G um termo- λ qualquer. Daí

$$\begin{aligned} YG &\equiv (\lambda f. (\lambda x. f(xx)) (\lambda x. f(xx))) G \\ &\equiv (\lambda x. G(xx)) (\lambda x. G(xx)) \\ &\equiv G((\lambda x. G(xx)) (\lambda x. G(xx))) \\ &\equiv G(\lambda f. (\lambda x. f(xx)) (\lambda x. f(xx))) G \equiv G(YG) \end{aligned}$$

Observações sobre o combinador Y

- ▶ Veja que, para qualquer termo- λ G , YG é um ponto fixo de G
- ▶ Esta propriedade é o que faltava para a definição completa da recursão, pois ao aplicar (YG) ao parâmetro x da recursão, o resultado é

$$(YG)x \equiv G(YG)x,$$

ou seja, o termo G é aplicado aos parâmetros YG e x , o que permite invocar G novamente quantas vezes forem necessárias

- ▶ Assim, para definir uma função recursiva $Y\Gamma$ no cálculo- λ , basta determinar o predicado P e as funções g e H que compõem a função Γ

Exemplo de recursão: fatorial

$$!n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ n \times !(n - 1), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- ▶ A notação está “invertida” para ficar consistente com a notação prefixada do cálculo lambda
- ▶ Na notação de recursão do cálculo lambda, $P \equiv Z, g \equiv 1$ e $H \equiv \lambda f x. \times x(f(Px))$, onde $\times ab$ é a multiplicação dos naturais a e b e Pn é o antecessor do natural n .
- ▶ Deste modo, $! = \mathbf{Y}\Gamma$, onde

$$\Gamma \equiv \lambda f x. (Zx)1(\times x(f(Px)))$$

Exemplo de aplicação do fatorial

$$\begin{aligned}
 !3 &\equiv (\mathbf{Y}\Gamma)3 \equiv \Gamma(\mathbf{Y}\Gamma)3 \\
 &\equiv (\lambda f x. (Zx)1(\times n(f(Pn))))(\mathbf{Y}\Gamma)3 \\
 &\equiv (Z3)1(\times 3((\mathbf{Y}\Gamma)(P3))) \\
 &\equiv F1(\times 3((\mathbf{Y}\Gamma)(P3))) \\
 &\equiv \times 3((\mathbf{Y}\Gamma)2) \equiv \times 3(\Gamma(\mathbf{Y}\Gamma)2) \\
 &\equiv \times 3((Z2)1(\times 2((\mathbf{Y}\Gamma)(P2)))) \\
 &\equiv \times 3(\times 2((\mathbf{Y}\Gamma)1)) \equiv \times 3(\times 2(\Gamma(\mathbf{Y}\Gamma)1)) \\
 &\equiv \times 3(\times 2((Z1)1(\times 1((\mathbf{Y}\Gamma)(P1)))) \\
 &\equiv \times 3(\times 2(\times 1((\mathbf{Y}\Gamma)0))) \\
 &\equiv \times 3(\times 2(\times 1((Z0)1(\times 0((\mathbf{Y}\Gamma)(P0)))))) \\
 &\equiv \times 3(\times 2(\times 1(1))) \\
 &\equiv \times 3(\times 2(1)) \\
 &\equiv \times 3(2) \equiv 6
 \end{aligned}$$

Referências

1. **BARENDREGT**, Henk; **BARENDSSEN**, Erik. *Introduction to Lambda Calculus*, March 2000.
2. **ROJAS**, Raúl. *A Tutorial Introduction to the Lambda Calculus*, FU Berlin, WS-97/98.
3. Wikipédia. [Combinatory logic](#), acesso em 07/01/2020.
4. Wikipédia. [Lambda calculus](#), acesso em 03/01/2020.