Máquinas de Turing

Computabilidade

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Sumário

Especificação para uma função de k argumentos

(a) Os argumentos $m_1, m_2, \ldots, m_k$ são apresentados em notação monádica por k blocos com m_i traços cada; os blocos são separados por um único espaço em branco e a fita, de resto, está em branco

(b) O computador começa examinando o traço mais à esquerda do bloco m_1; **(a)** e **(b)** caracterizam a **configuração inicial** da máquina

(c) Se $f(m_1, m_2, \ldots, m_k) = n$, a máquina para no traço mais à esquerda de um bloco contendo n traços; de resto, a fita está em branco. Esta é a **configuração (posição) final padrão**

(d) Se a função f não está definida para os argumentos dados, ou a máquina não irá parar, ou irá parar em uma configuração final que não é a padrão

Exemplo de máquina que segue a especificação

- Considere a máquina
$$q_1 S_1 S_1 q_2,$$
que representa uma função de um único argumento m
- Ela examina o primeiro traço do bloco de m traços, escreve 1 (o que equivale a não fazer nada) e segue para o estado 2
- A máquina para no estado 2: neste momento, ela está sobre o quadrado mais à esquerda de um bloco de m traços; de resto, a fita está vazia
- Logo a máquina para na configuração final padrão, e $f(m) = m$ para todo inteiro positivo m
- Assim, $f(x) = \mathrm{id}(x)$

Computabilidade por Máquina de Turing

Definição

Uma função numérica de k argumentos é **computável por Máquina de Turing**, ou **Turing computável** se existe uma máquina que atenda as especificações apresentadas e que compute $f(x)$ para todos os elementos x no domínio de f.

A Tese de Turing

Tese de Turing

Toda função efetivamente computável é Turing computável.

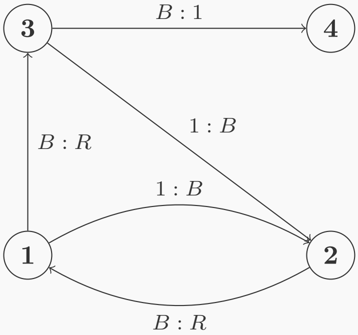
Observações: naturalmente, toda função Turing computável é efetivamente computável. Note também que, uma vez que a noção de computabilidade não é rigorosamente definida, não é possível demonstrar formalmente a Tese de Turing.

Existência de funções incomputáveis

- É possível demonstrar que o conjunto de todas as funções de inteiros positivos em inteiros positivos não é enumerável
- Por outro lado, o conjunto de todas as máquinas de Turing é enumerável: cada máquina pode ser especificada por uma sequência de quádruplas, que equivale a uma cadeira finita de símbolos de um alfabeto finito, e o conjunto de tais cadeias é enumerável
- Deste modo, existem funções que não são Turing computáveis
- Especificar exemplos de tais funções, contudo, não é tarefa trivial

Enumeração das máquinas de Turing

Para ilustrar o processo de enumeração das máquinas de Turing, considere a máquina abaixo, que atribui o valor 1 para qualquer k-upla:



Enumeração das máquinas de Turing

- A máquina apresentada pode ser representada pela seguinte lista de quádruplas

$$q_1 S_0 R q_3, \quad q_1 S_1 S_0 q_2, \quad q_2 S_0 R q_1, \quad q_3 S_0 S_1 q_4, \quad q_3 S_1 S_0 q_2$$

- Tal especificação, embora correta, não permite a enumeração de todas as máquinas de Turing
- Para tal fim, da mesma forma que foi feito para as máquina de Turing, é preciso especificar precisamente a representação de uma máquina por meio de uma lista de quádruplas

Especificação para a lista de quádruplas

(a) O estado de menor número $(\mathbf{1})$ é o **estado inicial**

(b) O estado de maior número $(\mathbf{n+1})$ será o **estado de parada**: para este estado, não há instruções nem quádruplas

(c) Para cada estado, exceto para o estado de parada, existe uma quádrupla iniciando com q_iS_j, com $i = 1, 2, \ldots, n, j = 0, 1$

(d) De acordo com **(c)**, se as quádruplas forem listadas em ordem crescente de i e de j, os dois primeiros símbolos de cada quádrupla são previsíveis, e poderão ser omitidos

(e) Os estados q_i devem ser representados pelo inteiro i, os símbolos S_j por $j + 1$ (para evitar o zero) e as instruções L e R pelos inteiros 3 e 4, respectivamente

Observação: uma máquina de Turing descrita por uma lista de quádruplas que atende a especificação acima corresponde a um inteiro positivo, de acordo com a codificação baseada no Teorema Fundamental da Aritmética.

Exemplo de codificação de uma máquina de Turing

- A lista de quádruplas da máquina que retorna um para qualquer k-upla dada abaixo

$$q_1 S_0 R q_3, \quad q_1 S_1 S_0 q_2, \quad q_2 S_0 R q_1, \quad q_3 S_0 S_1 q_4, \quad q_3 S_1 S_0 q_2$$

  não atende à especificação
- Observe que as duas primeiras especificações são atendidas: $(\mathbf{1})$ é o estado final e $(\mathbf{n+1=4})$ é o estado final
- Contudo, não existe uma quádrupla iniciando com $q_2 S_1$, violando **(c)**: para corrigir isto, basta adicionar uma nova quádrupla, que mantém o símbolo e vai para o estado final:

$$q_1 S_0 R q_3, \quad q_1 S_1 S_0 q_2, \quad q_2 S_0 R q_1, \quad q_2 S_1 S_1 q_4, \quad q_3 S_0 S_1 q_4, \quad q_3 S_1 S_0 q_2$$

Exemplo de codificação de uma máquina de Turing

- Aplicando o critério **(d)**, a lista se reduz à

$$Rq_3, \quad S_0q_2, \quad Rq_1, \quad S_1q_4, \quad S_1q_4, \quad S_0q_2$$

- Usando o critério **(e)** obtêm-se:

$$4, 3, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 2, 4, 1, 2$$

- Codificando esta máquina o resultado é o inteiro positivo:

$$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^4 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19^4 \cdot 23^2 \cdot 29^4 \cdot 31 \cdot 37^2$$

- Em notação decimal, a máquina seria representada pelo inteiro

$$120472792249125444328648833318480$$

Enumerabilidade das máquinas de Turing

- A codificação acima permite enumerar as máquinas de Turing $M_1, M_2, M_3, \ldots$
- Observe que nem todo inteiro positivo corresponde à uma máquina de Turing: isto depende de sua decomposição em fatores primos
- Além disso, nem toda sequência a_k formada pelos números de 1 a 4 corresponde a uma máquina de Turing
- Para que tal sequência represente uma máquina de Turing, ela precisa atender três critérios:
  i. $|a_k| = 4n$, para algum inteiro positivo n
  ii. $a_i \in [1, 4]$, se i é ímpar (uma das quatro instruções possíveis)
  iii. $a_j \in [1, n+1]$, se j é par (um dos $n+1$ estados possíveis)
- Assim, a codificação apresentada é uma função parcial dos inteiros positivos que enumera as máquinas de Turing

Exemplos de máquinas de Turing

- Considere a máquina

$$(1,1,1,1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

- O fluxograma correspondente seria

- A partir da configuração inicial, esta máquina apaga o traço que está no bloco e retorna para o estado $(\mathbf{1})$
- A partir daí ela não faz mais nada, jamais atingindo a configuração final $(\mathbf{2})$

Exemplos de máquinas de Turing

- Considere a máquina

$$(2, 1, 1, 1) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$$

- O fluxograma correspondente seria

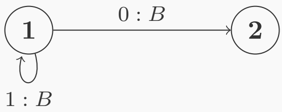
- A partir da configuração inicial, esta máquina apaga o traço que está no bloco e retorna para o estado $(\mathbf{1})$
- Em seguida, ele reescreve o traço e permanece em $(\mathbf{1})$, reiniciando o ciclo, sem jamais parar

Exemplos de máquinas de Turing

- Seja a máquina

$$(1,2,1,1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 630$$

- O fluxograma correspondente seria



- A partir da configuração inicial, esta máquina apaga o traço que está no bloco e, ao o reexaminar, segue para o estado $(\mathbf{2})$
- Como $(\mathbf{2})$ é o estado final, e o quadrado está em branco, então se o argumento é maior do que 1, a máquina para em um configuração final que não é a padrão
- As três máquinas exemplificadas correspondem aos menores inteiros positivos associados à uma máquina de Turing (isto é, M_1, M_2, M_3)

Função diagonal

Definição

Seja f_i a função computada pela i-ésima máquina de Turing. A **função diagonal** d é definida por

$$d(n) = \begin{cases} 2, & \text{se } f_n(n) \text{ é definida e } f_n(n) = 1, \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Incomputabilidade da função diagonal

Teorema

A função diagonal não é Turing computável.

Demonstração

Suponha, por contradição, que a função diagonal seja Turing computável. Assim, para algum m positivo, $d(n) = f_m(n)$, para qualquer n positivo.

No caso em que $n = m$, porém, surge uma contradição: se $f_m(m) = 1$ então, por definição, $d(m) = 2$; caso contrário, se $f_m(m) \neq 1$ ou se $f_m(m)$ não for definida, $d(m) = 1$. Em todos os casos, $d(m) \neq f_m(m)$, o que contradiz a hipótese de d ser Turing computável.

Portanto, a função diagonal d não é Turing computável.

Problema da parada

- Se a Tese de Turing estiver correta, a função diagonal não seria efetivamente computável
- Porém, a princípio, parece ser possível computar a função d para qualquer argumento n
- Por exemplo, para as três primeiras máquinas de Turing, apresentadas anteriormente, $d(1) = d(2) = d(3) = 1$
- Se $f_n(m)$ está definida para m, o valor de $d(m)$ será 1, se $f_n(m) \neq 1$, ou $d(m) = 2$, se $f_n(m) = 1$
- Se $f_n(m)$ parar em uma configuração final diferente da padrão, $d(m) = 1$
- A situação difícil de identificar e computar acontece quando $f_n(m)$ não para
- Não existe, até o presente momento, um procedimento mecânico uniforme que permita, para qualquer Máquina M_i, decidir se a função f_i para ou não para o argumento m
- Este é o problema da parada

Função de parada

Definição

A **função de parada** de dois argumentos $h(m, n)$ é definida por

$$h(m,n) = \begin{cases} 1, & \text{se } f_m(n) \text{ para em alguma configuração,} \\ 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Teorema

A função de parada não é Turing computável.

Referências

1. **BOOLOS**, George S.; **BURGESS**, John P.; **JEFFREY**, Richard C. *Computabilidade e Lógica*, Editora Unesp, 2012.