

# Trabajo práctico 3

## Localización mediante triangulación

### 1. Introducción

En el presente trabajo práctico nos enfocaremos en encontrar una solución para resolver un problema de localización, es decir, determinar la posición de un objetivo a partir de los datos disponibles. Para lograrlo, apelaremos a las técnicas de regresión lineal, más específicamente el método de *cuadrados mínimo*.

#### 1.1. Contexto histórico

Desde tiempos inmemoriales, la humanidad ha ingeniado distintas formas determinar la ubicación de personas u otros objetos en espacio y tiempo. Las primeras soluciones para resolver esta problemática tuvieron su origen cuando las civilizaciones comenzaron a realizar travesías debido al comercio. Los fenicios, por ejemplo, entre los primeros navegantes de la antigüedad, utilizaban como referencias espaciales y temporales a los astros (sol y estrella polar) mediante técnicas que luego heredaron los griegos y otras culturas [1]. Es así que luego surgirían las primeras herramientas que facilitaron enormemente la tarea de la navegación, como por ejemplo el *astrolabio* y la *brújula* [2].

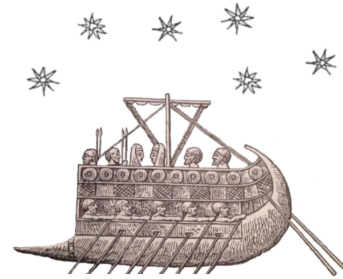


Figura 1: Fenicios.

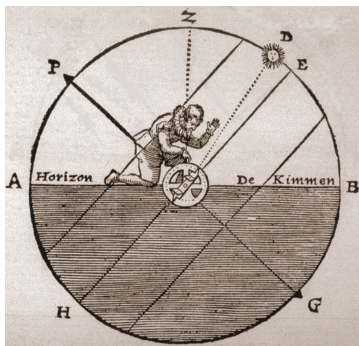


Figura 2: Astrolabio.

Con el tiempo, estas técnicas fueron mejorando e incorporando nuevos instrumentos como el cuadrante, sextante, artefactos para medir el tiempo (como el reloj de arena), etc. Mediante estos artefactos se obtenían datos que, junto a cartas de navegación y cálculos geométricos, permitían determinar la posición, siendo el principal método de posicionamiento hasta comienzos del siglo XX [2]. Más tarde, las nuevas y modernas tecnologías produjeron un salto descomunal en el desarrollo de sistemas de localización y teledetección, entre los que se pueden mencionar el radar, sistemas LORAN y Transit (predecesores de GPS a fines de la década del 50), entre otros métodos de radiofrecuencia. El avance de mayor trascendencia se dio con la creación del Sistema de Posicionamiento Global (GPS, Global Positioning System) durante los años 70 con propósitos militares, extendiéndose luego a uso civil en los 90. Posteriormente, con el auge de las telecomunicaciones y en particular la telefonía celular, surgieron diversas soluciones que mejoraron este sistema, como por ejemplo A-GPS (GPS asistido por telefonía móvil).

## 1.2. Técnicas de posicionamiento

Un sistema de posicionamiento requiere en general de dos etapas principales: la medición de variables (distancia, tiempo, ángulos, conectividad, etc.) y el cálculo de la posición (que se infiere a partir de las mediciones). Existen diferentes métodos para esto. Lo que se busca es observar variables que relacionen la posición del objetivo a localizar con las posiciones de los puntos de referencia (con posiciones conocidas) normalmente denominados como *anclas*. Por ejemplo, GPS mide los tiempos de propagación de las ondas para determinar las distancias entre las anclas (satélites) y el receptor a localizar, y con esto resolver la posición utilizando el método de trilateración [3] Otro método de posicionamiento conocido es el de triangulación, que a diferencia de trilateración, utiliza la medición de ángulos, que mediante trigonometría permite hallar la posición del objetivo. En particular, es éste último método el que utilizaremos para el presente trabajo.

## 1.3. Planteo geométrico del problema

Se desea estimar la posición de un punto en el plano de coordenadas cartesianas, a partir de dos o más mediciones angulares entre distintas anclas y el objetivo (que será nuestra posición), ver Figura 3. Se asume que existe una dirección de referencia (por ejemplo, la vertical) desde la cual se miden los ángulos respecto de cada uno de los anclas. A partir de estas mediciones, se puede establecer una relación trigonométrica entre la posición desconocida y cada referencia. En el esquema propuesto, se indican: las posiciones conocidas de las referencias  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$  (con  $i = 1, \dots, M$ ); la posición desconocida  $\mathbf{p} = (x, y)$ ; los ángulos medidos  $\theta_i$  entre la dirección de referencia y la línea que une  $\mathbf{p}$  con cada  $\mathbf{p}_i$ .

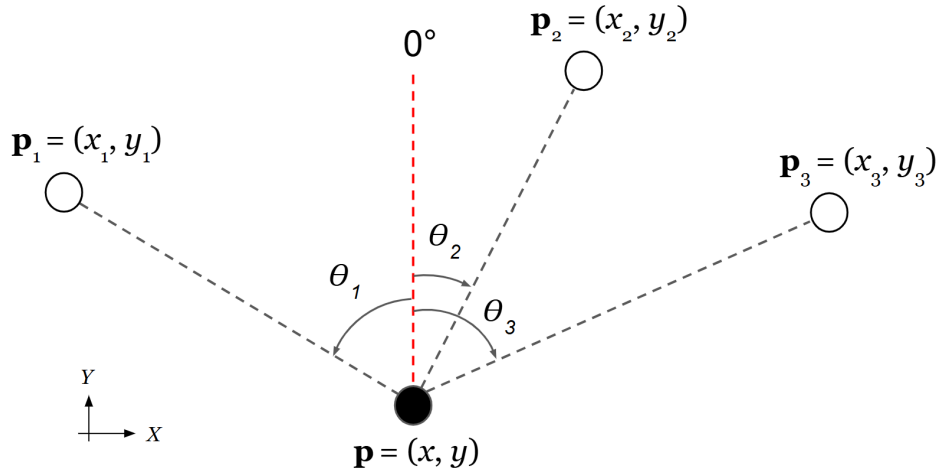


Figura 3: Esquema para el problema de triangulación. Se asume la vertical como ángulo  $0^\circ$  (aunque puede ser cualquier dirección que se fije como ángulo nulo) y la referencia de coordenadas (que marca el origen  $(0, 0)$ ) que puede ser también cualquier punto arbitrario.

## 2. Ejercicios

### Ejercicio 1 (Modelado)

En este primer ejercicio vamos a desarrollar un modelo matemático adecuado para convertirlo en un problema que pueda resolverse mediante *cuadrados mínimos*.

- En base a relaciones trigonométricas, plantee un modelo que relacione las distintas variables que intervienen en el problema (coordenadas de las anclas, coordenadas del objetivo y ángulos). **Ayuda:** las expresiones deben depender de la tangente de los ángulos.
- En base a las relaciones halladas, cuáles serían las variables observadas y cuales las incógnitas? ¿Se trata de un problema directo o inverso? Justifique su respuesta.
- Para una cantidad de anclas arbitraria, por ejemplo  $M$ , defina la expresión general de la matriz de diseño y el vector de observaciones que permiten resolver el problema por cuadrados mínimos.

### Ejercicio 2 (Simulación)

Una vez definido el modelo apropiado para determinar las posiciones mediante la regresión de LS, vamos a simular diferentes configuraciones y analizar aspectos relevantes del problema.

- Suponiendo que la verdadera posición a localizar es  $\mathbf{p} = (100, 50)$ . Ahora asuma que solo se conocen las posiciones de las referencias  $\mathbf{p}_i$  con sus respectivos ángulos  $\theta_i$ . Estos datos están contenidos en el diccionario `config_1` dentro del archivo `tp3.py`. Implemente la solución de LS para validar que el modelo esté funcionando correctamente y estime la posición  $\mathbf{p}$ . Haga un gráfico indicando con puntos ("o") las posiciones de las referencias (en azul), la verdadera posición  $\mathbf{p}$  (en negro) y una cruz ("x") indicando la estimación  $\hat{\mathbf{p}}$ .
- Con los mismos datos del punto anterior, grafique los resultados de la estimación, pero esta vez incorporando incertidumbres en las posiciones de las referencias. Para ello, añada ruido gaussiano a cada referencia, siendo  $\tilde{\mathbf{p}}_i = (x_i + \Delta x, y_i + \Delta y)$  la  $i$ -ésima observación que tenemos sobre las referencias, donde  $\Delta x, \Delta y \sim N(0, \sigma^2)$  (con  $\Delta x$  y  $\Delta y$  independientes). Suponiendo distintas varianzas para el ruido agregado  $\sigma^2 = \{4, 25, 100\}$ , genere para cada caso 50 realizaciones de  $\hat{\mathbf{p}}$  y gráfíquelas todas superpuestas en el plano de coordenadas. **Nota:** tenga en cuenta que en el gráfico deben ir las referencias reales, no las observaciones ruidosas.
- Asumiendo que la varianza de ruido de las referencias observadas es  $\sigma^2 = 4$ . Estime la posición para las configuraciones contenidas en `config_2`, `config_3` y `config_4` definidas en el archivo `tp3.py`. En cada caso, determine el número de condición  $\kappa$  de la matriz de diseño y grafique los resultados para 50 realizaciones ¿En qué configuraciones considera que el sistema está mal condicionado y cómo lo relaciona con la geometría de problema? Explique cómo afecta el mal condicionamiento de la matriz a la propagación y amplificación de los errores en la estimación.

### Ejercicio 3 (Experimento)

El objetivo de este ejercicio es probar el método desarrollado para identificar la posición real con mediciones de campo. Esta actividad podrá ser realizada en el campus de la Universidad, aunque cualquier otro lugar abierto y suficientemente extenso será válido.

- (a) Necesitamos medir visualmente el ángulo entre nuestra posición y cada punto lejano que tomemos como referencia. Para ello debemos fijar un punto arbitrario como dirección de ángulo 0 (se sugiere que sea una dirección intermedia entre las referencias). Luego anotar los siguientes datos:

1. Coordenadas de Google maps de nuestra posición (para validar).
2. Coordenadas de Google maps de cada referencia.
3. Ángulos de cada referencia medidos visualmente desde nuestra ubicación.

**Nota:** para medir los ángulos, se pueden utilizar distintos métodos. Una posibilidad consiste en alinear dos mirillas (pueden ser palillos o cualquier otro elemento delgado), o bien usar un pequeño tubo, de modo tal que la referencia quede alineada con las dos mirillas. Puede improvisarse algo similar a la *Alidada* (instrumento para medir ángulos de forma óptica). En cada medición, debe registrarse el ángulo (o marcar en papel la orientación del instrumento y luego medir los ángulos). De todas formas el método es de libre elección.

- (b) Con los datos obtenidos (se sugiere utilizar más de dos puntos de referencia), determine su posición y compárela con la verdadera. Tenga en cuenta que deberá convertir las coordenadas del sistema WGS84 (Latitud y Longitud que nos da Google maps) a coordenadas cartesianas UTM (vea las funciones `utm.from_latlon()` y `utm.to_latlon()` el archivo `tp3.py`). Extraiga conclusiones y comente brevemente cómo realizó la experiencia.

## 3. Conclusiones

Como conclusiones generales, elabore un resumen breve y conciso comentando características que considere relevantes del método propuesto en este trabajo y los resultados obtenidos, así como dificultades encontradas y cómo fueron abordadas.

## 4. Normas y condiciones de entrega

- El informe con la resolución de los Ejercicios 1 y 2, más las conclusiones, tienen una calificación máxima de **8 puntos**. La realización del Ejercicio 3 no es obligatoria y tiene una calificación máxima de **2 puntos**.
- **Informe:** El informe debe entregarse en formato PDF (**no se aceptarán otros formatos**) y con nombre: **TP3\_GXX.PDF** (donde **XX** es el número de grupo). Es condición necesaria para la aprobación cumplir con las [pautas](#) para la presentación de informes estipuladas en el campus.
- **Código:** El código debe incluirse junto al informe en un archivo ZIP (con mismo nombre que el informe) que deberá subirse al campus.
- Se recuerda a los estudiantes que las entregas deben ser un producto original de cada estudiante, por lo que se les pide revisar la sección 6 del programa de la materia y el Código de Honor y Ética de la Universidad.

## Referencias

- [1] Sara Pereira i Mestre, “Mitología marítima, los fenicios, los griegos y los nórdicos”, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona (2013).
- [2] Ibáñez Fernández, Itsaso, “Evolución de la Navegación Astronómica en el siglo XIX”, ISBN: 84-8419-229-9, Donostia-San Sebastián, (2011).
- [3] García, J. A., & García, M. A. (2014). Algoritmos de radiolocalización para sistemas de posicionamiento en interiores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 11(1), 3–13.