1. NTM=TM e MTM=TM (Pag 40) - F ✓
2. Decidibilità (Pag 43) - F ✓
3. Atm Riconoscibile (Pag 45) - F ✓
4. Esistono linguaggi non riconoscibili (Pag 48 marco) ✓
5. Atm NON decidibile (Pag 47) - F ✓
6. L è decidibile se e solo se L è sia riconoscibile che co-riconoscibile (Pag 48) - F ✓
7. HALTtm (Pag 50) ✓
8. EQtm non dec ✓
9. EQtm non rec (EQtmNEG non rec) ✓

1) MTM = TM e NTM = TM

$(Q, \Sigma, \Gamma, q_{start}, q_{accept}, q_{reject}, \delta)$

NON SCRITTE POICHÉ BANALI

2) $A_{TM} \in REC$

$$A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ è } TM \text{ e } M(w) \text{ ACCETTA} \Rightarrow w \in L(M) \}$$

VOGLIO DIMOSTRARE LA RICONOSCIBILITÀ USANDO LA MACCHINA DI TURING GENERALE

ESSA HA 2 NASTRI, SUL PRIMO HA LA STRINGA DI INPUT E SUL SECONDO LA CONF. ATTUALE NELLA FORMA:

$$\langle c, q, b \rangle$$

A QUESTO PUNTO CERCA UNA REGOLA IN δ DEL TIPO

$$\langle (q, x), (z, y, r) \rangle$$

CONTROLLA CHE $x = A[1]$ SE DIVERSO CERCA UN'ALTRA REGOLA, SE UGUALE SCRIVE NEL SECONDO NASTRO $\langle z, y, r \rangle$ E CONTINUA FINCHÉ NEL SECONDO NASTRO CI SARÀ q_{accept}

È CHIARO CHE U È UN RICONOSCITORE PER A_{TM} $\square$

④ ∃ linguaggi non riconoscibili

La dimostrazione si basa su due sotto dimostrazioni

1) L' insieme delle TM è numerabile

Questo poiché ogni TM può essere definita con un sottoinsieme di Σ^* ed essendo Σ^* numerabile
$\Rightarrow \{\langle M \rangle \mid M \in TM\}$ è numerabile

2) L' insieme dei linguaggi non è numerabile

Questo poiché: sia $\mathcal{L}$ l'insieme dei linguaggi le cui stringhe sono binarie, sia L sottoinsieme di $\Sigma = \{0,1\}^*$
creo una stringa infinita X_L t.c. i-esimo carattere di X_L è 1 se l'i-esimo elemento di Σ^* è in L
è chiaro quindi che stiamo definendo una $f : \mathcal{L} \to B$ biettiva ma poiché B è non numerabile $\Rightarrow \mathcal{L}$ non numerabile

Da questo due dim è chiaro che ∃ linguaggi non riconoscibili
$\square$

5 A_{TM} NON DECIDIBILE

DIMOSTRIAMO CON LA DIAGONALIZZAZIONE.

ASSUMIAMO PER ASSURDO CHE A_{TM} ABBIA UN DECISORE H

$$H(\langle M, w\rangle) = \begin{cases} \text{ACCETTA} & \text{SE } M(w) \text{ ACCETTA} \\ \text{RIFIUTA} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SI DEFINISCE UNA TM D t.c. SU INPUT $\langle M\rangle$

- ESEGUO $H\langle M \langle M\rangle\rangle$
- SE H ACCETTA D RIFIUTA E VICEVERSA

ABBIAMO CHE

$D\langle D\rangle$

RIFIUTA

$H\langle D\langle D\rangle\rangle$

ACCETTA

D ACCETTA $\langle D\rangle$

ASSURDO

⑥ $L \in DEC \iff L \in REC$ e $L \in coREC$

$coREC = \{L \mid \bar{L} \in REC\}$

$\Rightarrow)$ $L \in DEC \Rightarrow \bar{L} \in DEC$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$L \in REC$ $\bar{L} \in REC \Rightarrow L \in coREC$

$\Leftarrow)$ $L \in REC$ e $\bar{L} \in REC$

SIANO M_1 e M_2 CHE RICONOSCONO L e $\bar{L}$

CREO UNA TM M SU INPUT w

- ESEGUO PARALLELAMENTE M_1 e M_2
- SE M_1 ACCETTA M ACCETTA SE M_2 ACCETTA M RIFIUTA

È CHIARO CHE M SIA UN DECISORE PER L e $\bar{L}$

POICHÉ NON ANDRÀ MAI IN LOOP

$w \in L \vee \bar{L}$

5) $HALT_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \in TM \ e \ M(w) \text{ term} \} \notin DEC$

FACCIO UNA RIDUZIONE CON A_{TM}

$A_{TM} \leq_m HALT_{TM}$

$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$

$\forall \langle M, w \rangle \quad \langle M, w \rangle \in A_{TM} \iff f(\langle M, w \rangle) \in HALT_{TM}$

POICHE f DEVE ESSERE CALC USO UNA TM CON INPUT $\langle M, w \rangle$

- COSTRUISCE UNA TM M' AO SIMULA SU INPUT x
- SE $M(x)$ ACCETTA M' ACCETTA ALTRIMENTI ENTRA IN LOOP

OUTPUT $\langle M', w \rangle$

$\Rightarrow$

$\langle M, w \rangle \in A_{TM} \iff w \in L(M) \Rightarrow M(w)$ ACCETTA $\Rightarrow f(\langle M, w \rangle) = \langle M', w \rangle \in HALT_{TM}$

$\Leftarrow$

$\langle M, w \rangle \notin A_{TM} \iff w \notin L(M) \Rightarrow M(w)$ RIFIUTA $\Rightarrow M'$ ENTRA IN LOOP $\Rightarrow \langle M', w \rangle \notin HALT_{TM}$

8) EQ_{TM} INDECIDIBILE

$$EQ_{TM} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1 \text{ e } M_2 \in TM \text{ e } L(M_1) = L(M_2) \}$$

$$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$$

$$\forall \langle M \rangle \in \Sigma^* \qquad \langle M, w \rangle \in E_{TM} \iff f(\langle M, w \rangle) \in EQ_{TM}$$

Dove f calcolabile crea un TMF che esegue i seguenti:

Prende in input $\langle M \rangle$, crea una TM M' ausiliaria

M' rifiuta sempre

output $= \langle M, M' \rangle$

$\Rightarrow \quad \langle M \rangle \in E_{TM} \Rightarrow \quad L(M) = \emptyset \Rightarrow L(M') = \emptyset$

$\Rightarrow \langle M, M' \rangle \in EQ_{TM} \quad \square$

$\Leftarrow \quad \langle M \rangle \notin E_{TM} \to \quad L(M) \neq \emptyset \Rightarrow L(M') = \emptyset$

$\Rightarrow \langle M, M' \rangle \notin EQ_{TM} \quad \square$

3) EQ_{TM} indecidibile

So che $A_{TM} \notin DEC \Rightarrow \overline{A_{TM}} \notin REC$

so che $A \le_m B \iff \overline{A} \le_m \overline{B}$

voglio quindi ridurre $\overline{A_{TM}} \le_m EQ_{TM}$

Negando $=$ $A_{TM} \le_m \overline{EQ_{TM}}$

$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$

$\forall \langle M,w\rangle \in \Sigma^* \qquad \langle M,w\rangle \in A_{TM} \iff f(\langle M,w\rangle) \notin \overline{EQ_{TM}}$

Poiché f calcolabile creo una TM F che la calcola

Input $\langle M,w\rangle$

- crea 2 TM di supporto M_1 e M_2 su input x
- M_1 rifiuta sempre
- M_2 accetta se $M(w)$ accetta altrimenti rifiuta

output $\langle M_1, M_2\rangle$

$\Rightarrow$ $\langle M,w\rangle \in A_{TM} \iff w \in L(M) \iff M$ accetta w

$\Rightarrow L(M_1) = \emptyset \neq L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2\rangle \in \overline{EQ_{TM}}$

Δ

$\Leftarrow$ $\langle M,w\rangle \notin A_{TM} \iff w \notin L(M) \iff M$ rifiuta w

$\Rightarrow L(M_1) = \emptyset = L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2\rangle \notin \overline{EQ_{TM}}$

1a) Dimostro per induzione che una derivazione di G abbia lunghezza $2\cdot|w|-1$ con $w \in L(G)$

Caso base $n=1$

$w = a$ con $a \in \Sigma \Rightarrow$ la sua derivazione è quando si applica solo regola $S \to a$ ossia $2\cdot 1-1=1$ ✓

Ipotesi induttiva $\forall\, w \in L(G)$ la sua derivazione è lg. $2\cdot|w|-1$

Passo induttivo

Sia $w \in L(G)$ t.c. $|w| = n+1$

Essendo G in CNF la derivazione di w è del tipo $S \Rightarrow AB \Rightarrow^* w$

Siano quindi $x, y \in \Sigma^*$ t.c. $A \Rightarrow^* x$ e $B \Rightarrow^* y$

Poiché G in CNF $\Rightarrow x, y \neq \varepsilon \Rightarrow 1 \leq |x| \leq n$ e $1 \leq |y| \leq n$

Siano quindi $|x| = k$ e $|y| = n+1-k$

Per ipotesi x e y derivano in $2k-1$ produzioni e $2(n+1-k)-1$

$\Rightarrow S \Rightarrow AB \Rightarrow^* xy = w$

$$1 + 2k - 1 + 2(n-1-k) - 1 = 1 + 2k - 1 + 2n - 2 - 2k - 1$$
$$= 2|w| - 1 \quad \square$$

11) A_{CFG} Decidibile

$$A_{CFG} = \{ \langle G, w \rangle \mid G \in CFG \text{ e } w \in L(G) \}$$

Sia M una TM definita come segue

- input $\langle G, w \rangle$ con $G \in CFG$ e w stringa
- se codifica errata rifiuta
- converte G in $G' \in CNF$ t.c. $L(G) = L(G')$
- se $|w| \neq 0$ lista tutte le possibili derivazioni composte da $2 \cdot |w| - 1$ produzioni
  altrimenti lista tutte le derivazioni con 1 sola produzione
- se almeno una derivazione genera w accetta altrimenti rifiuta

Per costruzione di M

$\langle G, w \rangle \in L(M) \iff \exists$ una derivazione di G che produce w $\iff w \in L(G)$

$\iff \langle G, w \rangle \in A_{CFG}$

$\square$