1 Parte Prima 10 Points

- Dimostrare che il seguente linguaggio su alfabeto $\{\#, 1\}$ non è regolare:

$$\{1^i\#1^j\#1^{i+j} : i, j \geq 1\}.$$

- Dimostrare che se un linguaggio è regolare allora esiste una espressione regolare che lo descrive.

• USEREMO IL PUMPING LEMMA

SIA w UNA STRINGA con $|w| \geq p$

$w = xyz = x^p y^p z^{2p}$

per $|xy| \leq p$ so che $xy = 1^m$ con $m \in [1,p]$

z quindi sarà $= 1^1$

Z = 1^p-m#1^p#1^p, poichè |y| >0 per il secondo punto del pumpling lemma dirò

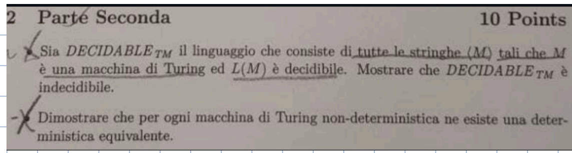
y=1^k con k in [1,..,m]

avrò quindi x= 1^m-k y=1^k z= 1^p-m#1^p#1^p

provo l'ultima regola del pumpling lemma (xy^iz in L) con i=0

=> 1^m-k (1^k)^0 1^p-m#1^p#1^p

ne segue chiaramente che non appartiene a L => l'alfabeto non è REG



2 Parte Seconda 10 Points

Sia $DECIDABLE_{TM}$ il linguaggio che consiste di tutte le stringhe $\langle M \rangle$ tali che M è una macchina di Turing ed $L(M)$ è decidibile. Mostrare che $DECIDABLE_{TM}$ è indecidibile.

Dimostrare che per ogni macchina di Turing non-deterministica ne esiste una deterministica equivalente.

1) DECIDABLE = { <M> | M è TM e è DEC}

Per dimostrare l'indecidibilità posso mostrare che Atm<DECIDABLE

sia f : Sigma* -> Sigma* tale che

PerOgni <M,w> in Atm <=> f(<M,w>)in DECIDABLE

Poichè f deve essere calcolabile userò una TM F che la decide

F prende in input <M,w> e simula una TM M' che prende in input una stringa w

simula M(w) se M accetta allora M' accetta ogni input altrimenti va in loop

output: <M'>

=>) <M,w> in Atm <=> win L(M) <=> M(w) accetta => <M'> in DECIDIBLE

<=) <M,w> not in Atm <=> w not in L(M) <=> M(w) non accetta => M' va in loop => <M'> not in DECIDIBLE

2) E' possibile simulare una NTM (macchina di turing non deterministica) con una semplice TM, l'idea è quella di eseguire una ricerca in ampiezza (in profondità ci sarebbe il rischio di un ramo in loop e quindi non finirebbe mai) in particolare la TM avrà 3 nastri:

1- Nastro con scritto l'input

2- Nastro con scritta l'attuale derivazione

3- Nastro con scritta la posizione nell'albero

Risulta chiaro in questo modo che avendo una MTM (Che so essere uguale ad una TM) che opera in questo modo posso simulare una generica NTM

3 Parte Terza **10 Points**

- Dimostrare che la classe *NL* è chiusa rispetto alle operazioni di unione, intersezione, e star di Kleene.
- Definire la classe di complessità *coNP* ed il problema *UNSAT*. Dimostrare che *UNSAT* è *coNP*-completo.

1) Dimostrerò le 3 propietà con 3 TM

siano A e B due linguaggi in NL e Va e Vb i rispettivi verificatori

M1 per unione, M2 per intersezione M3 per star

M1) . Sia M1 una TM definita come segue;

    prende in input <w,c>

    simula Va su <w,c> se accetta accetta

    simula Vb su <w,c> se accetta accetta

    Rifiuta

Per costruzione è chiaro che w in L(M1) <=> Va U Vb accetta <=> Va OR Vb accetta <=> Esiste c in Sigma* tale che Va(<w,c>) accetta OR Vb(<w,c>) accetta

M2) Sia M2 una TM definita come segue:

    prende in input <w,c>

    simula Va su <w,c> se rifiuta rifiuta

    simula Vb su <w,c> se rifiuta rifiuta

    accetta

Per costruzione è chiaro che w in L(M2) <=> Va INT Vb accetta <=> Va AND Vb accetta <=> Esiste c in Sigma* tale che Va(<w,c>) accetta AND Vb(<w,c>) accetta

M3) Per dimostrare lo STAR prendiamo N la NTN che decide A in tempo logaritmico

Sia M3 una TM definita come segue

prende in input <w,c>

calcola |w| =n

sceglie non deterministicamente un valore k tra [1,..,n]

sceglie non deterministicamente una partizione di w di lunghezza k con w=w1,..,wk

ripeti le seguenti istruzioni per i che va da 1 a k:

- Esegui N su input wi se N rifiuta rifiuta
- altrimenti pulisci lo spazio e passa alla prossima istruzione

Accetta

per costruzione è chiaro che w in L(M3) <=> Esiste un ramo che accetta w <=> Esiste una partizione di w che viene accettata da N

2)

UNSAT = $\overline{SAT}$

POICHE SAT $\in$ NP $\iff$ $\overline{SAT}$ $\in$ CONP

ORA VOGLIO DIM CHE $\forall A \in$ CONP $A \leq_m^p \overline{SAT}$

PER COOK LEVIN SO CHE SAT $\in$ NP-COMPLETO

POICHE $L \in NP$ $L \leq_m^p SAT \Rightarrow \overline{L} \leq_m^p \overline{SAT}$

$\overline{L} \in$ CONP poiche $L \in NP$

$\Rightarrow \overline{SAT}$ = UNSAT $\in$ CONP-COMPLETO