Esercizio 1. Si consideri una classe con 9 studenti. Il docente prepara 3 compiti diversi ed ogni compito viene assegnato a 3 studenti.

i) In quanti modi si possono abbinare i 9 studenti ai 3 compiti?

ii) Se il docente avesse invece preparato 9 compiti diversi, in quanti modi si sarebbero potuti abbinare i 9 studenti ai 9 compiti?

Si consideri ora la medisima classe di 9 studenti.

iii) In quanti modi si possono partizionare i 9 studenti in 3 gruppi, ognuno dei quali con 3 studenti?

iv) In quanti modi si possono partizionare i 9 studenti in 3 gruppi, uno dei quali con 5 studenti e i rimanenti due con 2 studenti ognuno?

v) In quanti modi si possono partizionare i 9 studenti in 9 gruppi, ognuno dei quali con un singolo studente?

---

i) $\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = \frac{9!}{\cancel{6!}\,3!} \cdot \frac{\cancel{6!}}{\cancel{3!}\,3!} \cdot \frac{\cancel{3!}}{3!} = \frac{9!}{3!\,3!}$

ii) $9!$

iii) $\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{\underbrace{3!}_{3 \text{ GRUPPI UGUALI}}} = \frac{9!}{3!\,3!\,3!}$

iv) $\frac{\binom{9}{5}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{\underbrace{2!}_{2 \text{ GRUPPI UGUALI}}}$

v) $\frac{\binom{9}{1}\binom{8}{1}\dots\binom{1}{1}}{9!} = \frac{9!}{9!} = 1$

Esercizio 2. Un'urna contiene 10 monete: 5 hanno testa su entrambe le facce, 3 hanno croce su entrambe le facce e 2 sono monete normali (testa su una faccia, croce sull'altra). Si estrae a caso una moneta e la si lancia (senza guardare che tipo di moneta sia).

i) Calcolare la probabilità di ottenere testa.

ii) Sapendo che la moneta ha reso testa, calcolare la probabilità che sia una moneta con due teste.

1) $P(T) = P(TT) \cdot P(T|TT) + P(TC) \cdot P(T|TC) =$

$= \frac{5}{10} \cdot 1 + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{\cancel{6}\,3}{\cancel{10}\,5}$

2) $P(TT|T) = \dfrac{P(TT) \cdot P(T|TT)}{P(T)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$

Esercizio 3. Si consideri un esame a risposta multipla organizzato al modo seguente. In totale ci sono 10 domande e per ogni domanda ci sono 4 possibili risposte, di cui una sola è corretta. L'algoritmo di valutazione è il seguente: ogni risposta giusta vale 3 e ogni risposta sbagliata (o non risposta) vale -1. Alice risponde a caso a tutte le 10 domande.

i) Calcolare la probabilità che Alice ottenga la sufficenza (18/30).

ii) Calcolare il valore di attesa del voto di Alice.

iii) Calcolare la varianza del voto di Alice.

1) p giusta $= \frac{1}{4}$ $\qquad$ p sbagliata $= (1-p) = \frac{3}{4}$

Per passare l'esame almeno 7 giuste

$P(\text{Giuste} = x) = \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x}$

$P(\text{Passa esame}) = \sum_{i=7}^{10} \binom{10}{i} p^i (1-p)^{10-i} \simeq 0{,}0035 = 0{,}35\%$

2) $E(X_G) = np = 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$E(X) = 4 \cdot E(X) - 10 = \phi$

3) $V(X) = 30$

Esercizio 4. Un'indagine statistica ha concluso che il 5% della popolazione è omosessuale. In una sala da ballo vi è un numero aleatorio di persone dato da una variabile di Poisson di parametro 1000.

i) Determinare il valore di attesa delle persone omosessuali nella sala.

ii) Determinare la distribuzione del numero delle persone omosessuali nella sala.

iii) Alex entra nella sala da ballo e invita uno dei presenti (scelto a caso senza distinzione di sesso) a ballare. Calcolare la probabilità che il/la prescelto/a sia omosessuale.

$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \qquad \lambda = 1000$

1) $E(X) = 0{,}05 \cdot 1000 = 50$

2) $P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{(\lambda)^k}{k!} = e^{-50} \dfrac{(-50)^k}{k!}$

3) $P(\text{invitato è } O) = 5\%$