Esercizio 1. Da un mazzo di carte napoletane (40 carte divise in 4 semi) si estraggono consecutivamente (senza rimpiazzo) quattro carte.

(1) Calcolare la probabilità che la seconda carta estratta sia di denari.

(2) Sapendo che la seconda carta estratta è di denari, calcolare la probabilità che anche la prima estratta sia di denari.

(3) Calcolare la probabilità di estrarre, nell'ordine, un asso, un due, un tre e un quattro.

(4) Calcolare la probabilità di estrarre un asso, un due, un tre e un quattro (indipendentemente dall'ordine in cui sono stati estratti).

1) $P(2° \text{ denari}) = P(2° \text{ denari e } 1° \text{ non denari}) + P(2° \text{ denari e } 1° \text{ denari})$

$= \frac{10}{39} \cdot \frac{30}{40} + \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{10}{39} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} = 0,25$

2) $P(1°D \mid 2°D) = \frac{P(1D \cap 2D)}{P(2D)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39}}{\cancel{\frac{1}{4}}} = \frac{9}{39}$

3) $P(1,2,3,4) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{4}{37} = \frac{4^4}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37} = \frac{256}{}$ $0,000116$

4) $= 4! \, P(1,2,3,4)$

Esercizio 3. Il Sig. B. è imputato ad un processo. La giuria è composta da tre giudici: il primo è ostile a B. e lo giudica colpevole con probabilità 3/4, il secondo è favorevole a B. e lo giudica colpevole con probabilità 1/4, il terzo giudice è infine neutrale e giudica B. colpevole con probabilità 1/2. Si tenga presente che i giudici emettono i loro giudizi l'uno indipendentemente dall'altro e la decisione finale è assunta a maggioranza.

i) Calcolare la probabilità che B. venga assolto.

ii) Sapendo che il primo giudice ha espresso giudizio di colpevolezza, calcolare la probabilità che B. venga assolto.

iii) Sapendo che B. è stato assolto, calcolare la probabilità che il terzo giudice lo abbia giudicato innocente.

Per aumentare la probabilità di assoluzione, B. decide di corrompere il terzo giudice. Costui si rifiuta di emettere direttamente un giudizio di assoluzione, ma concorda con B. di comportarsi come segue: con probabilità p emette lo stesso verdetto del primo giudice, mentre con probabilità $1-p$ lo stesso verdetto del secondo giudice (il parametro $p \in [0,1]$ viene fissato dal compenso che B. elargisce al giudice).

iv) Date le precedenti modalità, calcolare, in funzione del parametro p, la probabilità che B. venga assolto.

1) $P(B\ \text{Assolto}) = P(A_A B_A) + P(A_A C_A) + P(B_A C_A) + P(A_A B_A C_A)$

Se $A_A B_A \Rightarrow C_C$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{9}{16} + \frac{3}{16}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{16}\right] = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

2) $$P(\text{Assolto} \mid A_C) = \frac{P(\text{Assolto} \cap A_C)}{P(A_C)} = \frac{P(B_A C_A)}{P(A_C)} = \frac{\cancel{\frac{3}{4}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\cancel{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

)

$$P(C_A \mid \text{Assolto}) = \frac{P(C_A \cap \text{Assolto})}{P(\text{Assolto})} = \frac{P(A_A C_A) + P(B_A C_A) + P(A_A B_A C_A)}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

$$P(C_A) = \frac{1}{4}p + \frac{3}{4}(1-p) = \frac{1}{4}p + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}p = \frac{3}{4} - \frac{1-3}{4}p = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}p$$

$$P(C_C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p$$

$$P(B_{A\,\text{salvo}}) = P(A_A B_A) + P(A_A C_A) + P(B_A C_A) + P(A_A B_A C_A)$$

$$P\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p}_{}\right) + P\left(\frac{1}{4} \cdot \underbrace{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}p}_{} \cdot \frac{1}{4}\right) + P\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \underbrace{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}p}_{}\right) +$$

$$+ P\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \underbrace{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}p}_{}\right) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}p\right)\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p\right)\left(\frac{3}{16}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}p\right)\left(\frac{13}{16}\right) + \left(\frac{3}{16}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p\right)$$

Esercizio 7. I componenti elettronici prodotti in una fabbrica sono difettosi, l'uno indipendentemente dall'altro, con probabilità p e funzionanti con probabilità $1-p$, $p \in (0,1)$. Vengono sottoposti ad un controllo di qualità con la seguente modalità: ogni componente, l'uno indipendentemente dall'altro, viene ispezionato con probabilità α e non ispezionato con probabilità $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Un componente trovato difettoso viene scartato, mentre gli altri vengono messi in commercio. Si supponga di avere n componenti prodotti dalla fabbrica.

1) Calcolare la distribuzione del numero di componenti che vengono scartati dopo il controllo di qualità.

2) Sapendo che il numero di componenti scartati dopo il controllo di qualità è pari a k, $k = 0, 1, \dots, n$, calcolare la distribuzione dei componenti difettosi tra gli $n-k$ messi in commercio.

$$(F_C, F_N, R_C, R_N) \sim \mathrm{Multi}\left(n, (1-p)\alpha, (1-p)(1-\alpha), p\alpha, p(1-\alpha)\right)$$

1) $$P(R_C = k) = \binom{n}{k} \alpha p^k (1-\alpha p)^{n-k}$$

$$P(F_C = f_c, F_n = f_n, R_C = r_c, R_N = r_n) = \frac{n!}{f_c!\, f_n!\, r_c!\, r_n!} \cdot ((1-p)\alpha)^{f_c} \cdot ((1-p)(1-\alpha))^{f_n} \alpha p^{r_c} p(1-\alpha)^{r_n}$$

2)
$$P(R_N = r_n \mid R_C = k) = \frac{P(F = n-k-r_n, R_C = k, R_N = r_n)}{P(R_C = k)}$$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-k-r_n)!\, k!\, r_n!} \cdot (1-p)^{n-k-r_n} \cdot \alpha p^k \cdot p(1-\alpha)^{r_n}}{\binom{n}{k} \alpha p^k (1-\alpha p)^{n-k}} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{n!}}{(n-k-r_n)!\, \cancel{k!}\, r_n!} \cdot (1-p)^{n-k-r_n} \cdot \cancel{\alpha p^k} \cdot p(1-\alpha)^{r_n}}{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{k!}(n-k)!} \cdot \cancel{\alpha p^k} \cdot (1-\alpha p)^{n-k}} = \frac{(1-p)^{n-k-r_n} \cdot p(1-\alpha)^{r_n}}{(n-k-r_n)!\, r_n!}$$

$$\frac{(1-p)^{n-k-2m} \cdot p(1-\partial)^{2m}}{(n-k-2m)!\,2m!} \cdot \frac{(n-k)!}{(1-\partial p)^{n-k}}$$