1 Automi

10 Points

- Dimostrare che il linguaggio $L = \{w : w \text{ termina con 0 oppure ha lunghezza pari}\}$ è regolare.
- Definire le grammatiche acontestuali e dimostrare che ogni grammatica acontestuale ne ammette una equivalente in forma normale di Chomsky. Mostrare che in una grammatica in forma normale di Chomsky ogni derivazione di una stringa w tale che $|w| = n$ richiede al più $2n - 1$ passi (per ogni $n \geq 1$).

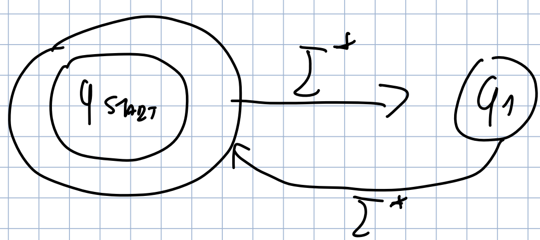
1) $L = \{ w$ termina con 0 o ha lunghezza pari$\}$ dim $\in REG$

Notiamo che è l'unione di due linguaggi

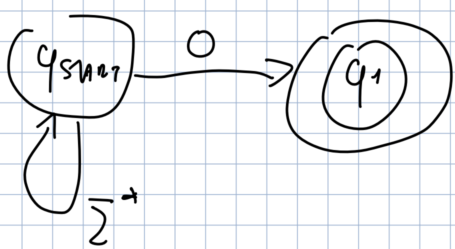
① $L_1 = \{ w$ che termina con $0\} \cup$ ② $L_2 = \{ w$ lunghezza pari$\}$

Creiamo un DFA e NFA per i due linguaggi

1) DFA



2) NFA



Avendo costruito un DFA (che sappiamo $\in REG$) e un NFA (che sappiamo $\in REG$)

$$\Rightarrow L = L_1 \cup L_2 \in REG$$

2) 1° CFG HA CFN EQUIVALENTE

una CFN segue delle regole:

- $A \to BC$ $\quad B, C \in V$ e $B, C \neq S$
- $A \to a$ $\quad a \in \Sigma$
- $S \to \varepsilon$ può esistere

La dimostrazione è una procedura che mostriamo con un esempio per semplicità

$$
\begin{aligned}
S &\to ASA \mid aB \\
A &\to B \mid S \\
B &\to b \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

1° Aggiungo S_0 per non avere mai S_0 a dx

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid aB \\
A &\to B \mid S \\
B &\to b \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

2° Rimuovo le ε-regole

1)
$$
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid aB \mid a \\
A &\to B \mid S \mid \varepsilon \\
B &\to b
\end{aligned}
$$

2)
$$
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid aB \mid a \mid AS \mid SA \mid S \\
A &\to B \mid S \\
B &\to b
\end{aligned}
$$

3ª Rimuovo le regole singole

$$S_0 \to ASA \mid aB \mid a \mid AS \mid SA \mid S$$
$$A \to b \mid ASA \mid aB \mid a \mid AS \mid SA \mid S$$
$$B \to b$$

4ª Rimuovo le regole con più di 2 variabili

$$S_0 \to AA_1 \mid aB \mid a \mid AS \mid SA \mid S$$
$$A \to b \mid AA_1 \mid aB \mid a \mid AS \mid SA \mid S$$
$$B \to b$$
$$A_1 \to SA$$

5ª Rimuovo le regole con un terminale e una variabile e aggiungo un altra regola

$$S_0 \to AA_1 \mid U_1B \mid a \mid AS \mid SA \mid S$$
$$A \to b \mid AA_1 \mid U_1B \mid a \mid AS \mid SA \mid S$$
$$B \to b$$
$$A_1 \to SA$$
$$U_1 \to a$$

$\square$

2ª Dimostro per induzione che una derivazione di G abbia lunghezza $2\cdot|w|-1$ con $w \in L(G)$

Caso base $n=1$

$w = a$ con $a \in \Sigma \Rightarrow$ la sua derivazione è composta da una sola regola $S \to a$ ossia $2\cdot 1-1=1$ ✓

Ipotesi induttiva $\forall\, w \in L(G)$ la sua derivazione è lunga $2\cdot|w|-1$

PASSO INDUTTIVO

Sia $w \in L(G)$ t.c. $|w| = n+1$

Essendo G in CNF la derivazione di w

è del tipo $S \Rightarrow AB \stackrel{*}{\Rightarrow} w$

Siano quindi $x, y \in \Sigma^*$ t.c. $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ e $B \stackrel{*}{\Rightarrow} y$

Poiché G in CNF $\Rightarrow$ $x, y \neq \varepsilon \Rightarrow 1 \leq |x| \leq n$ e

$1 \leq |y| \leq n$

Siano quindi $|x| = k$ e $|y| = n+1-k$

Per ipotesi x e y derivabili in $2k-1$ derivazioni

e $2(n+1-k)-1$

$\Rightarrow S \Rightarrow AB \stackrel{*}{\Rightarrow} xy = w$

$$1 + 2k - 1 + 2(n-1-k) - 1 = 1 + 2k - 1 + 2n - 2 - 2k - 1$$

$$= 2|w| - 1 \quad \square$$

2 Calcolabilità — 10 Points

- Si consideri una definizione alternativa di macchina di Turing in cui il nastro di lavoro è infinito in entrambe le direzioni. Mostrare formalmente che tale definizione è equivalente a quella data in classe (ovvero, nastro di lavoro infinito in una sola direzione).
- Dimostrare che il linguaggio $A_{TM} = \{\langle M, w\rangle : M$ è una TM che accetta $w\}$ è indecidibile. Dimostrare che il linguaggio $\overline{A_{TM}}$ non è Turing-riconoscibile.

1) 1° PARTO DA TM E DIMOSTRO CHE
È EQUIVALENTE A Bi-TM

È OVVIO POICHÉ BASTA NON USARE IL NASTRO SINISTRO INFINITO

2° PARTO DA Bi-TM E VOGLIO SIMULARE TM SU M di Bi-TM
SIA M' UNA TM CLASSICA SU INPUT w:
- MARCO CON # IL PRIMO NASTRO
- SIMULO M(w) E OGNI VOLTA CHE RAGGIUNGO #
  SCIVOLO TUTTO IL NASTRO DI UNO A DX E INSERISCO IL [illegible]
  A DX DI #

È OVVIO CHE POSSO SIMULARE Bi-TM CON UNA TM CLASSICA

2) DIMOSTRO A_{TM} INDECIDIBILE
PER ASSURDO DICO CHE A_{TM} ABBIA DECISORE H
CON INPUT $H\langle M, w\rangle = \begin{cases} \text{ACCETTA SE } M \text{ ACCETTA } w \\ \text{RIFIUTA ALTRIMENTI} \end{cases}$

M È UNA TM T.C. $L(M) \in A_{TM}$

ORA PRENDO UNA SECONDA TM D CON INPUT $\langle M\rangle$
- SIMULA $H\langle M, \langle M\rangle\rangle$
- SE H ACCETTA D RIFIUTA E VICEVERSA

$\Rightarrow$

$D\langle D\rangle$

RIFIUTA | ACCETTA

$H\langle D, \langle D\rangle\rangle$ ACCETTA | $H\langle D, \langle D\rangle\rangle$ RIFIUTA

D ACCETTA D | D RIFIUTA D

SI NOTA SUBITO L'ASSURDO

PERCHÉ SO CHE A_{TM} È INDECIDIBILE MA SO CHE A_{TM} È RICONOSCIBILE (DIMOSTRABILE CON TM UNIVERSALE) $\Rightarrow$ $\overline{A_{TM}}$ NON RICONOSCIBILE

PERCHÉ SO CHE $A \in DEC \Leftrightarrow A \in REC$ e $\bar{A} \in REC$

$\cdot\ (A \in REC$ e $coREC)$

3 Complessità — 10 Points

- Si consideri il linguaggio $4COL = \{G : G$ è un grafo 4-colorabile$\}$. Mostrare che $4COL \le^p_m SAT$.
- Enunciare e dimostrare il teorema di gerarchia di spazio. Utilizzare il teorema per mostrare che $PSPACE \subsetneq EXPSPACE$.

1) Per Cook-Levin so che SAT è NP-completo.

Quindi basta dimostrare che $4Col \in NP$

Creo un verificatore V (una TM) per 4Col

- Input $\langle\langle G\rangle, C\rangle$ con G grafo
- interpreto $C = \{C_1 \dots C_n\}$ con $n = |V(G)|$ assegnamento di colori
  con $C_i = \{R, G, B, Y\}$
- $\forall (v_i, v_j) \in E(G)$:
  - se $C_i = C_j$ rifiuto
- Accetto

È chiaro che $\langle G\rangle \in 4Col \iff \exists\, C \in \{\}^4$ assegnamento valido di colori $\iff \langle\langle G\rangle, C\rangle \in V$

È chiaro che l'algoritmo di V abbia costo polinomiale

$\Rightarrow 4Col \in NP \Rightarrow 4Col \le^p_m SAT$

$\square$