Screenshot 2025-01-13 at 18.44.10

1 Automi — 10 Points

- Considerare la grammatica G così definita:

$$S \to WbT$$
$$T \to aWbT \mid bVaT \mid \varepsilon$$
$$W \to aWbW \mid \varepsilon$$
$$V \to bVaV \mid \varepsilon.$$

Mostrare che *aabbbbaab* appartiene ad $L(G)$. Descrivere un PDA equivalente alla grammatica G.

- Enunciare e dimostrare il *pumping lemma* per linguaggi regolari. Fornire un esempio di utilizzo.

1)

$aa\,bbbb\,aab$

$S \to W\,bT$

$a\,W\,b\,W\;bT$

$aa\,\cancel{W}\,b\,\cancel{W}\;b\,\cancel{W}\;bT$

$aa\;b\;b\;b\;b\cancel{V}a\cancel{T}a\cancel{W}b\cancel{T}$

$aa\;bb\,bb\;a\,a\,b$

2)

2 Calcolabilità — 10 Points

- Sia $NONREGULAR_{TM}$ il linguaggio contenente le stringhe $\langle M\rangle$ che costituiscono codifiche valide di macchine di Turing tali che $L(M)$ non è regolare. Mostrare che $A_{TM} \leq_m NONREGULAR_{TM}$.
- Dimostrare che esistono linguaggi che non sono decidibile e neppure Turing-riconoscibili.

$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$

$\forall \langle M,w\rangle \in \Sigma^*$ $\quad \langle M,w\rangle \in A_{TM} \iff f(\langle M,w\rangle) \in NONREG$

Dove f calcolata con F TM:

input $\langle M,w\rangle$

crea un altra TM $M2$ con input x

se $x \in \{0^n1^n\}$ se falso rifiuta

esegui $M(w)$ se accetta M_2 accetta altrimenti rifiuta

output $\langle M_2\rangle$

$\Rightarrow$ $\langle M,w\rangle \in A_{TM} \Rightarrow L(M_2) = 0^n1^n \Rightarrow \langle M_2\rangle \in NONREG$

$\Leftarrow$ $\langle M,w\rangle \notin A_{TM} \Rightarrow L(M_2) = \emptyset \in Reg$

$\Rightarrow \langle M_2\rangle \notin NONREG$

3 Complessità **10 Points**

- Un cammino in un grafo non orientato è detto semplice se non contiene vertici ripetuti. Sia $LONGEST\text{-}PATH = \{\langle G, s, t, k\rangle : G = (V, E)$ grafo non orientato, $s, t \in V$, esiste un cammino semplice $s \rightsquigarrow t$ di lunghezza $\geq k\}$. Mostrare che $LONGEST\text{-}PATH \in NP$.
- Enunciare e dimostrare il teorema di gerarchia di spazio.

Sia M una TM che opera come segue:

input: $\langle\langle G, s, t, k\rangle, P\rangle$

interpreta $P = v_1 \dots v_h$ con $v_i, \dots, v_h \in V(G)$

verifica che $h = k$ altrimenti rifiuta

verifica che $i = 1..k$,

$(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$; altrimenti rifiuta

verifica che $\forall i, j \; v_i \neq v_j$ altrimenti rifiuta

verifica che $v_1 = s$ $v_h = t$

altrimenti accetta

Per costruzione è chiaro che

$\langle G, s, t, k\rangle \in LONGEST\text{-}PATH$

$\iff \exists P \in \Sigma^*$ con P path t.c.

$\langle\langle G, s, t, k\rangle, P\rangle \in L(M)$

$\blacksquare$