Probabilità

Formule Generali e Concetti

Distribuzione

Probabilità che la Variabile Aleatoria valga K

Valore di Attesa

E(x)= $\sum_{x \in Im(X)} K \ P(X=k)$

Esso è lineare se:

E(aX) = aE(X)

E(X+Y)=E(X)+E(Y)

X e Y indipendenti

E(X*Y) = E(X) * E(Y)

Varianza

V(X) = $\sum_{x \in Im(X} (k - E(k))^2 \ P(X=k)$

V(X) = E(x^2)-(E(x))^2

X e Y indipendenti

V(X+Y) = V(X) + V(Y) e la Covarianza è 0

Variabili Aleatorie

Variabile Aleatoria Binomiale

Successioni di un esperimento binario ripetuti **n** volte.

X~Bin(n,p) $n \in \mathbb{N}$ $p \in [0,1]$

Distribuzione

P(X=k)= $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Valore di Attesa

E(X) = np

Varianza

V(X)= $np(1-p)$

Variabile Aleatoria Geometrica

Una macchina che opera su cicli, si rompe al k-esimo ciclo.

X~Geom(p)

Distribuzione

P(X=k)= $(1-p)^{k-1} p$

Valore di Attesa

E(x)= $\frac{1}{p}$

Variabile Aleatoria Binomiale Negativa

Dopo la prima rottura la macchina viene riparata, probabilità che si rompa la 2° volta al ciclo k.

Distribuzione

P(X=k)= $\binom{k-1}{1} p^2 (1-p)^{k-1}$

Valore di Attesa

E(x)= $\frac{2}{p}$

h-1 rotture nei primi k-1 cicli, al ciclo k nuova rottura

Distribuzione 2

P(X=k)= $\binom{k-1}{h-1}p^h(1-p)^{h-k}$

Valore di Attesa 2

E(x)= $\frac{h}{p}$

Variabile Aleatoria di Poisson

Numero di eventi rari che si verificano in un intervallo di tempo fisso o in uno spazio fisso.

(Numero di clienti che arrivano in coda in un istante unitario λ)

X~Poisson(λ)

Distribuzione

P(X=k)= $e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!}$

Valore di Attesa

E(X)= λ

Varianza

V(X)= λ

Se ho due variabili:

X_1= Poisson(λ_1)

X_2= Poisson(λ_2)

Vengono trattate come una sola:

X=Poisson($\lambda_1 + \lambda_2$)

Distribuzione

P(X=k)=$e^{-\lambda_1+\lambda_2}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$

Valore di Attesa

E(X)= $\lambda 1 + \lambda_2$

Variabile Aleatoria Multinomiale

Vi e un esperimento non binario, che ha k possibili esiti, ossia {1, 2, 3 . . . , k}, ogni esito i, ha probabilità p_i, dove ovviamente $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

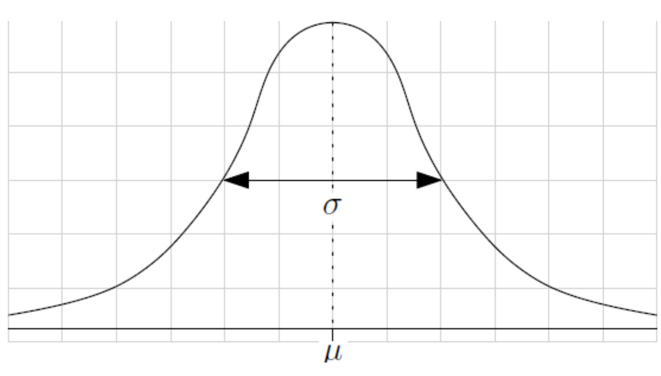
Tale esperimento, viene ripetuto n volte. Stabilisco adesso delle nuove variabili aleatorie, ∀i, ho che
Xi = numero di volte che l'esperimento da esito i. La congiunzione di queste variabili
aleatorie, sar`a appunto la nostra variabile multinomiale :

$(X1, X2..., Xk) \sim Mult(n, k, p1, p2..., pk)$

Distribuzione

P($X_1 = n_1, X_2 = n_2, .., X_k = n_k == \frac{n!}{n_1!n2!..n_k|}p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$

Variabile Aleatoria Gaussiana



Una qualsiasi variabile aleatoria Gaussiana può essere "standardizzata" in modo che i suoi parametri risultino 0 per il valore teorico, ed 1 per l'ampiezza, sia X ~ N(μ, σ^2), considero una nuova variabile aleatoria Z := X − μ σ , ossia, misuro X a partire dalla media in unita σ, si avrà che Z ~ N(0, 1).

Non è possibile trovare una sua primitiva, sia c una costante, ed X ~ N(μ, σ2), non è possibile calcolare P(X < c).

Esempio :

Sia X ~ N(−1, 4), si calcoli P(X > 0).

Definisco Z = $\frac{X-(-1)}{\sqrt{4}}$ = $\frac{X+1}{2}$ $\Rightarrow$X = 2Z-1

Ho che P(X > 0) = P(2Z + 1 > 0) = P(Z > − $\frac{1}{2}$)
che per simmetria della densità di probabilità è uguale a P(Z <
$\frac{1}{2}$)= 0.6915 consultando la
tavola.

Teorema del Limite Centrale

Siano n variabili aleatorie indipendenti : X1,X2 . . . ,Xn identicamente distribuite con E(X_i) = μ e V(X_i) = σ2, considero la loro somma, ossia Sn = $\sum_{i=1}^{2} X_i$
abbiamo già visto nel
teorema della legge dei grandi numeri che E(Sn) = nμ e V(Sn) =
$n\sigma^2$.

Considero ora una nuova variabile : $\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma}}$= $\frac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$, se n tende ad infinito, tale

variabile aleatoria
tenderà a diventare la variabile aleatoria Gaussiana normalizzata :

$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$ = Z~ N(0, 1)

$\lim_{n\to\infty} P(a < \frac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} < b)$ = P(a < Z < b) = ϕ(−a) · ϕ(b)

Tale teorema, estende ciò che diceva la legge dei grandi numeri, quando n tende ad infinito, la somma di tali variabili aleatorie, in un intorno del valore atteso, convergerà perfettamente alla funzione di densità della variabile aleatoria Gaussiana.