Esercizio 1. Si estraggono a caso (senza reinserimento) tre carte da un mazzo di 40 carte divise in 4 semi (denari, coppe, spade e bastoni) e numerate da 1 a 10.

1) Descrivere il corrispondente spazio di probabilità.

2) Calcolare la probabilità di avere una napoletana (1, 2 e 3 dello stesso seme).

3) Calcolare la probabilità che le tre carte estratte siano di semi diversi.

4) Sapendo che tra le tre carte estratte vi è l'asso di denari, calcolare la probabilità che questo sia stato il primo estratto.

1) $\Omega = \{ (\omega_i, \omega_j, \omega_k) / i \neq j \neq k \mid 1 \leq \dots \leq \omega_i \leq \dots \leq \omega_j \dots \leq \omega_k \leq 40 \}$

$|\Omega| = \binom{40}{3}$

2) $P(1D, 2D, 3D) = \frac{1}{\binom{40}{3}}$

$P(\text{NAPOLI}) = P(1D, 2D, 3D) \cdot 4 = \frac{4}{\binom{40}{3}}$

3) $\frac{\binom{4}{3} \cdot 10^3}{\binom{40}{3}}$

$P(1D \mid 1° \text{ est.})$

$\parallel$

P. che estragga subito 1D

4) $P(1° \text{ est} \mid 1D) = \frac{P(1° \text{ est}) \cap P(1D)}{P(\omega_i = 1D)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{3}{40}} = \frac{1}{3}$

Prob. che estragga 1D in 3 turni

Esercizio 2. Se i tre cavalli a, b, c competono tra loro le rispettive probabiltà di vittoria sono 30%, 50%, 20%. Si sfidano in tre gare consecutive. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

1) Lo stesso cavallo vince tutte e tre le gare.

2) Ogni cavallo vince una gara.

1) $P(A_1, A_2, A_3) + P(B_1, B_2, B_3) + P(C_1, C_2, C_3)$

$= 0{,}3^3 + 0{,}5^3 + 0{,}2^3$

2) $P(A_1, B_2, C_3) \cdot 3! = (0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2) \cdot 3!$

Esercizio 3. Siano Z_1 e Z_2 variabili aleatorie di Poisson indipendenti rispettivamente di parametro $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$. Sia inoltre $Z = Z_1 + Z_2$.

1) Trovare la distribuzione di Z.
2) Trovare la distribuzione di Z_1 condizionata a Z.
3) Calcolare il valore di attesa condizionato $E(Z_1|Z)$.
4) Calcolare il valore di attesa condizionato $E(Z|Z_1)$.

$$Z_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1) \qquad Z_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$$

$$Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$P(Z=k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

Dcils ds $\sum_{i=0}^{k} P(Z_1 = j, Z_2 = k-j)$

2) $P(Z_1|Z) \Rightarrow \dfrac{P(Z_1 = k \mid Z_1+Z_2 = x)}{P(Z=x)}$

$$= \frac{P(Z_1 = k \mid Z_2 = x-k)}{P(Z=x)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda_1}} \cdot \frac{(\lambda_1)^k}{k!} \cdot \cancel{e^{-\lambda_2}} \frac{(\lambda_2)^{x-k}}{(x-k)!}}{\cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} \cdot \frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{x!}} = \binom{x}{k} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

3) $\mathbb{E}(Z_1 \mid Z) = \sum_{k=0}^{x} k \cdot P(Z_1 = k \mid Z = x) = \sum_{k=0}^{x} k \cdot \binom{x}{k} \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)}_{a}^{k} \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)}_{b}^{x-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} k \binom{x}{k} a^k b^{x-k}$

a) $\mathbb{E}(Z \mid Z_1) = \mathbb{E}(Z = x \mid Z_1 = k)$