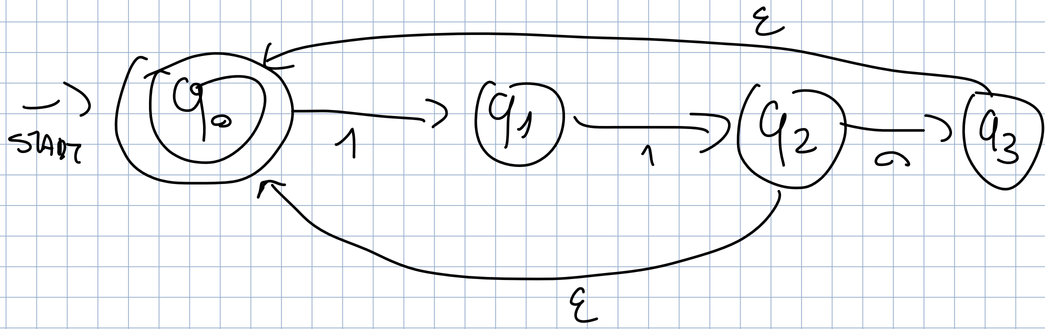
1 Automi **10 Points**

- Sia $L = \{11, 110\}^*$. Costruire un NFA N con 4 stati che riconosca L. Convertire l'NFA N in un DFA M equivalente.
- Enunciare e dimostrare il *pumping lemma* per linguaggi regolari. Fornire un esempio di utilizzo.

1)



2) Darò una definizione del DFA

- $q_{0D} = \{q_{0N}\}$

- $Q_D = P(Q_N) = P(q_0, q_1, q_2, q_3)$

$E(R) = \{q \in Q_N \mid \exists p \in R$ che raggiungo q con ε archi$\}$

$F_D = \{R \in Q_D \mid R \cap F_N \neq \emptyset\}$

Dati $a \in \Sigma$ e $R \in Q_D$

$$\delta(R,a) = \bigcup E(\delta_N(R,a))$$

è ovvio per costruzione l'equivalenza tra $L(D)$ e $L(N)$

2) IL PUMPING LEMMA AFFERMA CHE SIA $L \in REG$

$\exists\, p$ con $p \le |w|$ t.c. è possibile dividere $w = xyz$

con $|xy| \le p$ $\quad |y| \neq 0 \quad xy^iz \in L$

Dim:

Sia $p = |Q|$ di un DFA che accetta L

Sia $w = w_1 \dots w_n$ e sia $R = \{r_1 \dots r_n\}$ successione

t.c. $\delta(w_i, r_i) = r_{i+1}$

Poiché $n+1 \geq p$ c'è almeno uno stato che si ripete. Chiamiamo w_l la prima apparizione dello stato in R

e w_j la seconda, dividiamo $w = xyz$

con $x = w_1 \dots w_{l-1}$

$y = w_l \dots w_{j-1}$

$z = w_j \dots w_n$

è ovvio che $|xy| \le p$ e $j \neq l \Rightarrow |y| \neq 0$

Poiché y porta la comp. sullo stesso stato $xy^iz \in L$

Esempio

$$L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Sia $p = n$ e $w = xyz$

$$\left.\begin{aligned} x &= 0^n \\ y &= 1^{n-q} \\ z &= 1^q \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0^n 1^{(n-q)} 1^q$$

ma si evince subito che

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad 0^n 1^{(n-q)^i} 1^q \notin L$$

3 Complessità — 10 Points

- Si considerino i linguaggi $3COL = \{G : G$ è un grafo 3-colorabile$\}$ e $4COL = \{G : G$ è un grafo 4-colorabile$\}$. Mostrare che $3COL \leq_m^p 4COL$.
- Definire le classi di complessità $PSPACE$ ed $NPSPACE$. Dimostrare che $PSPACE = NPSPACE$.

1) $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$

$\forall \langle G \rangle \quad \langle G \rangle \in 3Col \iff f(\langle G \rangle) \in 4Col$

Poiché f deve essere calcolabile uso una TM F che la calcola

F prende in input $\langle G \rangle$ grafo

- Aggiungo un nodo v a G
- Per ogni $u \in V(G)$ con $u \neq v$ aggiungo $(u,v) \in f(G)$

Output $= \langle G' \rangle$ (G modificato)

$\Rightarrow$) $\langle G \rangle \in 3col \Rightarrow \forall u_1, u_2, u_3 \in V \; (u_1, u_2, u_3)$ è 3col

(hanno 3 colori diversi) $\Rightarrow G' \in 4col$ (dando ad v un colore diverso)

$\Rightarrow \langle G \rangle \in 3Col \iff f(G) \in 4col$
G'

$\Leftarrow$) $\langle G \rangle \notin 3col \Rightarrow \forall u_1, u_2, u_3 \in V(G) \; (u_1, u_2, u_3) \notin 3col$

$\Rightarrow$ non hanno colori diversi

Poiché $3Col \subset 4Col$ è ovvio che $\langle G' \rangle \notin 4col$

2) PSPACE = NPSPACE

$\Rightarrow$ PSPACE $\subset$ NPSPACE è banale

$\Leftarrow$ NPSPACE $\subset$ PSPACE

uso T. di Savitch

$$L \in NPSPACE \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \mid L \in NSPACE(n^k) \subseteq DSPACE(n^{2k})$$

polinomiale

$$\Rightarrow L \in PSPACE$$