1. NTM=TM e MTM=TM (Pag 40) - F ✓
2. Decidibilità (Pag 43) - F ✓
3. Atm Riconoscibile (Pag 45) - F ✓
4. Esistono linguaggi non riconoscibili (Pag 48 marco) ✓
5. Atm NON decidibile (Pag 47) - F ✓
6. L è decidibile se e solo se L è sia riconoscibile che co-riconoscibile (Pag 48) - F ✓
7. HALTtm (Pag 50) ✓
8. EQtm non dec ✓
9. EQtm non rec (EQtmNEG non rec) ✓

1) MTM = TM e NTM = TM

NON SCRITTE POICHÉ BANALI

$(Q, \Sigma, \Gamma, q_{start}, q_{accept}, q_{reject}, \delta)$

3) $A_{TM} \in REC$

$A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \in TM \text{ e } M(w) \text{ accetta} \Rightarrow w \in L(M) \}$

Voglio dimostrare la riconoscibilità usando la macchina di Turing universale. Essa ha 2 nastri, sul primo ha la stringa di input e sul secondo la conf. attuale nella forma:

$\langle a, q, b \rangle$

A questo punto cerca una regola in δ del tipo $\langle (q, x), (z, y, r) \rangle$

Controlla che $x = A[1]$; se diverso cerca un'altra regola, se uguale scrive nel secondo nastro $\langle z, y, r \rangle$ e continua finché nel secondo nastro ci sarà q_{accept}.

È chiaro che U è un riconoscitore per A_{TM} □

④ $\exists$ linguaggi non riconoscibili

La dimostrazione si basa su due sotto dimostrazioni

1) L'insieme delle TM è numerabile
Questo poiché ogni TM può essere definita con un sottoinsieme di Σ^* ed essendo Σ^* numerabile
$\Rightarrow \{\langle M \rangle \mid M \in TM\}$ è numerabile

2) L'insieme dei linguaggi non è numerabile
Questo poiché: sia $\mathcal{L}$ l'insieme dei linguaggi le cui stringhe sono binarie, sia L sottoinsieme di $\Sigma = \{0,1\}^*$
creo una stringa infinita X_L t.c. i-esimo carattere di X_L è 1 se l'i-esimo elemento di Σ^* è in L
è chiaro quindi che stiamo definendo una $f: \mathcal{L} \rightarrow B$ biettiva ma poiché B è non numerabile $\Rightarrow \mathcal{L}$ non numerabile

Da questo due dim è chiaro che $\exists$ linguaggi non riconoscibili
$\square$

5 A_{TM} NON DECIDIBILE

Dimostriamo con la diagonalizzazione.

Assumiamo per assurdo che A_{TM} abbia un decisore H

$$H(\langle M, w\rangle) = \begin{cases} \text{accetta} & \text{se } M(w) \text{ accetta} \\ \text{rifiuta} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si definisce una TM D t.c. su input $\langle M\rangle$

- esegue $H\langle M \langle M\rangle\rangle$
- se H accetta D rifiuta e viceversa

Abbiamo che

$D\langle D\rangle$

rifiuta

$H\langle D\langle D\rangle\rangle$

accetta

D accetta $\langle D\rangle$

ASSURDO

⑥ $L \in DEC \iff L \in REC$ e $L \in coREC$

$coREC = \{ L \mid \bar{L} \in REC \}$

$\Rightarrow)$ $L \in DEC \Rightarrow \bar{L} \in DEC$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$L \in REC$ $\bar{L} \in REC \Rightarrow L \in coREC$

$\Leftarrow)$ $L \in REC$ e $\bar{L} \in REC$

SIANO M_1 e M_2 CHE RICONOSCONO L e $\bar{L}$

CREO UN TM M SU INPUT w

- ESEGUO PARALLELAMENTE M_1 e M_2
- SE M_1 ACCETTA M ACCETTA SE M_2 ACCETTA M RIFIUTA

È CHIARO CHE M SIA UN DECISORE PER L e $\bar{L}$

POICHÉ NON ANDRÀ MAI IN LOOP

$w \in L \vee \bar{L}$

5) $HALT_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \in TM \text{ e } M(w) \text{ termina} \} \notin DEC$

FACCIO UNA RIDUZIONE CON A_{TM}

$A_{TM} \leq_m HALT_{TM}$

$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$

$\forall \langle M, w \rangle \quad \langle M, w \rangle \in A_{TM} \iff f(\langle M, w \rangle) \in HALT_{TM}$

POICHÉ f DEVE ESSERE CALC USO UNA TM CON INPUT $\langle M, w \rangle$

- COSTRUISCE UNA TM M' AO SIMULA SU INPUT x
- SE $M(x)$ ACCETTA M' ACCETTA ALTRIMENTI ENTRA IN LOOP

OUTPUT $\langle M', w \rangle$

$\Rightarrow$

$\langle M, w \rangle \in A_{TM} \iff w \in L(M) \Rightarrow M(w) \text{ ACCETTA} \Rightarrow f(\langle M, w \rangle) = \langle M', w \rangle \in HALT_{TM}$

$\Leftarrow$

$\langle M, w \rangle \notin A_{TM} \iff w \notin L(M) \Rightarrow M(w) \text{ RIFIUTA} \Rightarrow M' \text{ ENTRA IN LOOP}$

$\Rightarrow \langle M', w \rangle \notin HALT_{TM}$

8 EQ_{TM} INDECIDIBILE

$$EQ_{TM} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1 \text{ e } M_2 \in TM \text{ e } L(M_1) = L(M_2) \}$$

$f : \Sigma^* \to \Sigma^*$

$\forall \langle M \rangle \in \Sigma^*$ $\quad \langle M \rangle \in E_{TM} \iff f(\langle M \rangle) \in EQ_{TM}$

Dove f calcolabile cioè una TMF che esegue i seguenti:

Prende in input $\langle M \rangle$ crea una TM M' assumendo M' rifiuta sempre

output $= \langle M, M' \rangle$

$\Rightarrow$ $\langle M \rangle \in E_{TM} \Rightarrow L(M) = \emptyset \Rightarrow L(M') = \emptyset$

$\Rightarrow \langle M, M' \rangle \in EQ_{TM}$ Δ

$\Leftarrow$ $\langle M \rangle \notin E_{TM} \Rightarrow L(M) \neq \emptyset \Rightarrow L(M') = \emptyset$

$\Rightarrow \langle M, M' \rangle \notin EQ_{TM}$ $\square$

3) EQ_{TM} INDECIDIBILE

So che $A_{TM} \notin DEC \Rightarrow \overline{A_{TM}} \notin REC$

so che $A \leq_m B \Leftrightarrow \overline{A} \leq_m \overline{B}$

voglio quindi ridurre $\overline{A_{TM}} \leq_m EQ_{TM}$

Negando $=$ $A_{TM} \leq_m \overline{EQ_{TM}}$

$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$

$\forall \langle M, w \rangle \in \Sigma^*$ $\quad \langle M, w \rangle \in A_{TM} \Leftrightarrow f(\langle M, w \rangle) \notin \overline{EQ_{TM}}$

Poiché f calcolabile creo una TM F che la calcola

TM F = "su input $\langle M, w \rangle$
- crea 2 TM di supporto M_1 e M_2 su input x
- M_1 rifiuta sempre
- M_2 accetta se $M(w)$ accetta altrimenti rifiuta
output $\langle M_1, M_2 \rangle$"

$\Rightarrow$ $\langle M, w \rangle \in A_{TM} \Leftrightarrow w \in L(M) \Leftrightarrow M$ accetta w

$\Rightarrow L(M_1) = \emptyset \neq L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \in \overline{EQ_{TM}}$

Δ

$\Leftarrow$ $\langle M, w \rangle \notin A_{TM} \Leftrightarrow w \notin L(M) \Leftrightarrow M$ rifiuta w

$\Rightarrow L(M_1) = \emptyset = L(M_2) \Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \notin \overline{EQ_{TM}}$