1 Automi

10 Points

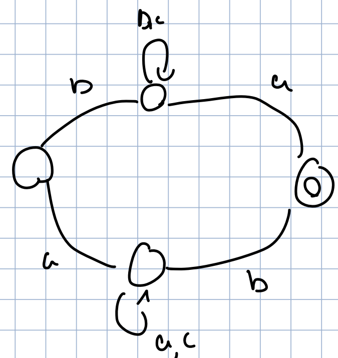
- Si scriva un'espressione regolare per il linguaggio costituito dall'insieme di stringhe su alfabeto $\{a, b, c\}$ contenenti almeno una a ed almeno una b. Si determini un DFA che riconosca lo stesso linguaggio.
- Definire la forma normale di Chomsky per grammatiche acontestuali. Dimostrare che ogni linguaggio acontestuale è generato da una grammatica acontestuale in forma normale di Chomsky.

b)

1) $L = \{ w \in \{a,b,c\}^* \mid \exists i,j \text{ con } i \neq j \wedge w[i]=a \wedge w[j]=b \}$

$re = (\Sigma^* a \Sigma^* b \Sigma^*) \cup (\Sigma^* b \Sigma^* a \Sigma^*)$

DFA:



2) CNF: è una grammatica che segue determinate regole

I) S variabile iniziale mai a dx

II) ogni regola nella forma $A \to BC$ con $B, C \in V$

$A \to a$ con $a \in$ Terminali

va dimostrato che se G grammatica $\exists$ G_N (CNF) t.c. $L(G) = L(G_N)$

La dimostrazione sarà un procedimento

Sia la seguente grammatica

$$\begin{cases} S \to ASA \mid aB \\ A \to B \mid S \\ B \to b \mid \varepsilon \end{cases}$$

Prima di tutto si inserisce una nuova variabile S_0 e la regola $S_0 \to S$ come nuova variabile iniziale

$$\begin{cases} S_0 \to S \\ S \to ASA \mid aB \\ A \to B \mid S \\ B \to b \mid \varepsilon \end{cases}$$

Da lato poi elimino tutte le regole del tipo $A \to \varepsilon$

Tolgo $B \to \varepsilon$

1°

$$\begin{aligned} &S_0 \to S \\ &S \to ASA \mid ab \\ &A \to B \mid S \mid \varepsilon \\ &B \to b \end{aligned} \longrightarrow$$

II°

Tolgo $A \to \varepsilon$

$$\begin{aligned} &S_0 \to S \\ &S \to ASA \mid ab \mid SA \mid S \mid A \\ &A \to B \mid S \\ &B \to B \end{aligned}$$

Poi tolgo le regole unitarie

$$\begin{aligned} &S_0 \to ASA \mid aB \mid SA \mid AS \mid \\ &S \to ASA \mid aB \mid SA \mid AS \mid \\ &A \to b \mid ASA \mid ab \mid SA \mid AS \mid \\ &B \to b \end{aligned}$$

Se sono regole con più di 2 variabili

$S_0 \to AA_1 \mid aB \mid SA \mid AS$

$S \to AA_1 \mid aB \mid SA \mid AS$

$A_1 \to SA$

$A \to b \mid AA_1 \mid aB \mid SA \mid AS$

$B \to b$

Tolgo e converto regole con ADX variabile e termin.

$S_0 \to AA_1 \mid UB \mid SA \mid AS$

$S \to AA_1 \mid UB \mid SA \mid AS$

$A_1 \to SA$

$A \to b \mid AA_1 \mid UB \mid SA \mid AS$

$B \to b$

$U \to a$

$\square$

2 Calcolabilità — 10 Points

10

- Per $k \in \mathbb{N}$, siano $L_1, \dots, L_k$ linguaggi arbitrari su un alfabeto Σ. Si assuma che: (i) $L_i \cap L_j = \emptyset$, per ogni $i \neq j$; (ii) $L_1 \cup \dots \cup L_k = \Sigma^*$; (iii) L_i è Turing-riconoscibile, per ogni $i \in [k]$. Dimostrare che i linguaggi $L_1, \dots, L_k$ sono decidibili.
- Dimostrare che il linguaggio $E_{TM} = \{\langle M \rangle : M \text{ è una TM ed } L(M) = \emptyset\}$ è indecidibile.

•

Dai primi 2 punti si evince che

$L_1 .. L_k$ siano partizioni di Σ^*

$\overline{L_i} = \bigcup_{i \neq j} L_j \Rightarrow \overline{L_i} \in REC$

Poiché L_i e $\overline{L_i}$ $\in REC \Rightarrow L_i \in DEC$

• $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$

$\forall \langle M,w \rangle \in \Sigma^* \quad \langle M,w \rangle \in A_{TM} \iff f(\langle M,w \rangle) \in E_{TM}$

Sia D la TM che calcola f

D prende in input $\langle M,w \rangle$

crea una TM M' con input x

- se $x \neq w$ rifiuta
- se $x = w$ simula $M(w)$ se accetta rifiuta altrimenti accetta

$\langle M' \rangle$

Per costruzione

$\Rightarrow)$ $\langle M,w \rangle \in A_{TM}$ → $x \neq w \Rightarrow \langle M' \rangle \in E_{TM}$; $x = w \Rightarrow \langle M' \rangle \in E_{TM}$

$\Leftarrow)$ $\langle M,w \rangle \notin A_{TM} \Rightarrow A_{TM}$ rifiuta $\Rightarrow \langle M' \rangle \notin E_{TM}$

3 Complessità

10 Points

S

- Si consideri la classe di linguaggi decidibili in tempo quasi polinomiale, ovvero

$$\mathsf{QP} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathsf{DTIME}(n^{(\log n)^k}).$$

Siano L_1 ed L_2 due linguaggi. Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa: Se $L_1 \leq_p^m L_2$ ed $L_2 \in \mathsf{QP}$, allora $L_1 \in \mathsf{QP}$. Motivare la risposta.

- Definire le classi di complessità PSPACE ed NPSPACE. Dimostrare che PSPACE = NPSPACE.

VOGLIO DIMOSTRARE $\mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{NPSPACE}$ E
$\mathsf{NPSPACE} \subseteq \mathsf{PSPACE}$

1ª LA PRIMA E' BANALE

2ª PER SAVITCH SO CHE

POLINOMIALE

$$L \in \mathsf{NPSPACE} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \mid L \in \mathsf{NSPACE}(n^k) \subseteq \mathsf{DSPACE}(n^{2k})$$

$\shortparallel$

PSPACE

$\square$