Esercizio 1. In un dipartimento di Psicostoria, le aule I e II possono accogliere 50 studenti ciascuna, mentre l'aula III può accoglierne 100. Per seguire il corso di probabilità in tali aule, 200 matricole vengono divise in tre gruppi (di 50, 50 e 100 studenti).

i) In quanti modi si possono creare i tre gruppi?

ii) In quanti modi si possono assegnare gli studenti nelle tre aule?

Alyona e Bogdana vorrebbero seguire il corso insieme per aiutarsi nello studio, ma vorrebbero evitare di ritrovarsi in classe con l'insopportabile Vadik.

iii) Calcolare la probabilità che tale desiderio si avveri.

1) $\binom{200}{100}\binom{100}{50}\binom{50}{50} = \frac{200!}{100!\,100!} \cdot \frac{100!}{50!\,50!} \cdot \frac{50!}{50!} = \frac{200!}{100!\,50!\,50!}$

3)

$A_1 = \{A,B \text{ in } I,\ V \text{ in } II\} = \binom{197}{48} \cdot \binom{149}{49}\binom{100}{100}$

$A_2 = \{A,B \text{ in } I,\ V \text{ in } III\} = \binom{197}{48}\binom{149}{50}\binom{99}{99}$

$A_3 = \{A,B \text{ in } II\ \ V \text{ in } I\} = \binom{197}{49}\binom{148}{48}\binom{100}{100}$

$A_4 = \{A,B \text{ in } II,\ V \text{ in } III\} = \binom{197}{50}\binom{147}{48}\binom{99}{99}$

$A_5 = \{A,B \text{ in } III,\ V \text{ in } I\} = \binom{197}{49}\binom{148}{50}\binom{98}{98}$

$A_6 = \{A,B \text{ in } III,\ V \text{ in } II\} = \binom{197}{50}\binom{147}{49}\binom{98}{98}$

$P(A) = \sum_{i=1}^{6} \frac{A_i}{\frac{200!}{100!\,50!\,50!}}$

Esercizio 2. Sia X la variabile aleatoria uniforme in $\{-2,-1,1,2\}$, ovvero $\mathbb{P}(X=-2)=\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=2)=1/4$. Sia inoltre Y la variabile aleatoria definita da $Y=X^2$.

i) Determinare la distribuzione congiunta di X e Y.

ii) Calcolare la covarianza tra X e Y.

iii) Dire, giustificando la risposta, se X e Y sono variabili aleatorie indipendenti.

iv) Calcolare la distribuzione di X condizionata a $Y=1$.

$Y \backslash X$	-2	-2	1	2	
1	0	$1/4$	$1/4$	0	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
4	$1/4$	0	0	$\frac{1}{4}$	

Sono indipendenti poiché ci sono degli ϕ

$$P(X=-2 \mid Y=1) = \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$$P(X=1 \mid Y=1) = \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Esercizio 3. Il Sig. B. è imputato ad un processo. La giuria è composta da tre giudici: il primo è ostile a B. e lo giudica colpevole con probabilità 3/4, il secondo è favorevole a B. e lo giudica colpevole con probabilità 1/4, il terzo giudice è infine neutrale e giudica B. colpevole con probabilità 1/2. Si tenga presente che i giudici emettono i loro giudizi l'uno indipendentemente dall'altro e la decisione finale è assunta a maggioranza.

i) Calcolare la probabilità che B. venga assolto.

ii) Sapendo che il primo giudice ha espresso giudizio di colpevolezza, calcolare la probabilità che B. venga assolto.

iii) Sapendo che B. è stato assolto, calcolare la probabilità che il terzo giudice lo abbia giudicato innocente.

Per aumentare la probabilità di assoluzione, B. decide di corrompere il terzo giudice. Costui si rifiuta di emettere direttamente un giudizio di assoluzione, ma concorda con B. di comportarsi come segue: con probabilità p emette lo stesso verdetto del primo giudice, mentre con probabilità $1-p$ lo stesso verdetto del secondo giudice (il parametro $p \in [0,1]$ viene fissato dal compenso che B. elargisce al giudice).

iv) Date le precedenti modalità, calcolare, in funzione del parametro p, la probabilità che B. venga assolto.

1) $P(B\ \text{Assolto}) = P(A_A B_A) + P(A_A C_A) + P(B_A C_A) + P(A_A B_A C_A)$

Se $A_A B_A \Rightarrow C_C$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{9}{16} + \frac{3}{16}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{16}\right] = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

2) $$P(\text{Assolto} \mid A_C) = \frac{P(\text{Assolto} \cap A_C)}{P(A_C)} = \frac{P(B_A C_A)}{P(A_C)} = \frac{\cancel{\frac{3}{4}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\cancel{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(C_A \mid \text{Assolto}) = \frac{P(C_A \cap \text{Assolto})}{P(\text{Assolto})} = \frac{P(A_A C_A) + P(B_A C_A) + P(A_A B_A C_A)}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

$$P(C_A) = \frac{1}{4}p + \frac{3}{4}(1-p) = \frac{1}{4}p + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}p = \frac{3}{4} - \frac{1-3}{4}p = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}p$$

$$P(C_C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p$$

$$P(B_{Asso}|f_0) = P(A_A B_A) + P(A_A C_A) + P(B_A C_A) + P(A_A B_A C_A)$$

$$P\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}p}\right) + P\left(\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}p}\cdot\frac{1}{4}\right) + P\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\underbrace{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}p}\right) +$$

$$+P\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}p}\right) = \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}p\right)\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}p\right)\left(\frac{3}{16}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}p\right)\left(\frac{13}{16}\right)+\left(\frac{3}{16}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}p\right)$$

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria gaussiana con valore di attesa 2 e varianza 25. Rispondere alle seguenti domande utilizzando le tavole dell'integrale gaussiano.

i) Calcolare $\mathbb{P}(|X-2| \geq 7)$.

ii) Calcolare $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 7)$.

iii) Determinare α tale che $\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq 0.1$.

1) $P(|X-2| \geq 7)$

$$Z = \frac{X-(2)}{\sqrt{25}} = \frac{X-2}{5} \qquad X = 5Z+2$$

$$P(|5Z+2-2| \geq 7) = P(5Z \geq 7) + P(5Z \leq 7)$$

$$2P\left(Z \leq \frac{7}{5}\right) = 0{,}16$$

2) $P(0 \leq 5Z+2 \leq 7) = P\left(-\frac{2}{5} \leq Z \leq 1\right)$

$$= P\left(Z \geq -\frac{2}{5}\right)\cdot P(Z \leq 1) = P\left(Z \leq \frac{2}{5}\right)\cdot P(Z \leq 1) = 0{,}48$$

3) $P(X \geq \partial) \leq 0{,}1$

$P(5Z+2 \geq \partial) \leq 0{,}1$

$P(5Z \geq \partial - 2) \leq 0{,}1$

$P\left(Z \geq \frac{\partial-2}{5}\right) \leq 0{,}1$

$\left[1 - P\left(Z \leq \frac{\partial-2}{5}\right)\right] \leq 0{,}1$

$-P\left(Z \leq \frac{\partial-2}{5}\right) \leq 0{,}9$

$P\left(Z < \frac{\partial-2}{5}\right) \geq 0{,}9$

$(Z < 1{,}29) \geq 0{,}9$

$\frac{\partial-2}{5} = 1{,}29 \qquad \partial = 8{,}45$