1 Parte Prima

10 Points

- Si consideri l'espressione regolare $1\Sigma^* = 1(0 \cup 1)^*$. Convertire tale espressione regolare in una grammatica acontestuale. Dimostrare la correttezza.
- Enunciare e dimostrare il *pumping lemma* per linguaggi regolari. Fornire un esempio di utilizzo.

$G = (V, \Sigma, R, S)$

$G:$ $S \to 1A$

$A \to 0A \mid 1A \mid$

$A \Rightarrow^* w \Rightarrow w \in \Sigma^*$

DIMOSTRIAMO PER INDUZIONE LA CORRETTEZZA

CASO BASE

$n = 0$

$w = \varepsilon \Rightarrow w \in \Sigma^*$ $A \to \varepsilon$

IPOTESI INDUTTIVA

$n = m$ $|w| = m$

$A \Rightarrow^* w$ con $|w|$

PASSO INDUTTIVO

$n = m+1$

- CASO $w[1] = 0$ poi HA A che riderivi $0A$ o $1A$ in $|w-1| = m$

- CASO $w[1] = 1$ poi HA A che riderivi $0A$ o $1A$ in $|w-1| = m$

$\Rightarrow w \in \Sigma^* \Rightarrow A \Rightarrow w^*$

2 Parte Seconda

10 Points

- Uno stato di una macchina di Turing è detto inutile se la macchina non entra mai in quello stato per ogni possibile input. Considerare il problema di determinare se una macchina di Turing ha uno stato inutile. Dimostrare che il linguaggio associato a questo problema non è decidibile.

$INUTILI = \{ \langle M \rangle \mid M \in TM$ e $\exists$ stato inutile $\in M \}$

Voglio dimostrare la non decidibilità

$A_{TM} \leq_m INUTILI$

$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$

$\forall \langle M, w \rangle \in A_{TM} \iff f(\langle M, w \rangle) \in INUTILI$

Poiché f deve essere calcolabile creo una TM

PRENDE IN INPUT $\langle M, w \rangle$

CREA UNA TM M' CON INPUT x CHE OPERA:

con 3 stati (q_{start}, q_{acc}, q_{rej})

- SE $x = w$ RIFIUTA

- SE $x \neq w$ SIMULA $M(w)$

SE M ACCETTA M' RIFIUTA ALTRIMENTI ACCETTA

OUTPUT $\langle M' \rangle$

TUTTI i 3 STATI SONO UTILI

$\Rightarrow \langle M, w \rangle \in A_{TM} \iff w \in L(M) \iff \exists$ stato inutile

$\iff \underbrace{f(\langle M, w \rangle)}_{= M'} \in INUTILI$ $\square$

2° DIM (ALTERNATIVA)

$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$

$\forall \langle M, w \rangle \in A_{TM} \iff f(\langle M, w \rangle) \in \text{INUTILI}$

POICHÉ f DEVE ESSERE CALCOLABILE CREIAMO UNA TM

PRENDE w INPUT $\langle M, w \rangle$

CREA UNA TM M' CON 3 STATI (q_{START}, q_{ACC}, q_{REJ})
CON INPUT x

- SE $x = w$ M' ACCETTA SE $M(w)$ ACCETTA

- SE $x \neq w$ M' ACCETTA

OUTPUT $\langle M' \rangle$

$\Rightarrow$)

$\langle M, w \rangle \in A_{TM} \iff w \in L(M) \Rightarrow M(w)$ ACCETTA

$\Rightarrow M'$ ACCETTA $\Rightarrow q_{REJ}$ INUTILE $\Rightarrow \langle M' \rangle \in \text{INUTILI}$

$\Leftarrow$) $\langle M, w \rangle \notin A_{TM} \iff w \notin L(M) \Rightarrow M(w)$ NON ACCETTA

SE $x = w$ USA q_{REJ}
SE $x \neq w$ ACCETTA
$\Rightarrow \langle M' \rangle \notin \text{INUTILI}$

3 Parte Terza

10 Points

- Una macchina di Turing fortemente non-deterministica ha tre possibili stati finali: *accept*, *reject*, e *notsure*. Tale macchina decide un linguaggio L come segue: Se $x \in L$, tutti i possibili rami di computazione con input x portano ad uno stato *accept* oppure *notsure*, con almeno un ramo che termina in *accept*. D'altra parte, se $x \notin L$, tutti i possibili rami di computazione con input x portano ad uno stato *reject* oppure *notsure*, con almeno un ramo che termina in *reject*. Dimostrare che L è decidibile in tempo polinomiale da una macchina di Turing fortemente non-deterministica se e solo se $L \in NP \cap coNP$.