2018A

第一题

$$\text{参数估计：}\quad \left(\hat{h}_1, \hat{h}_2\right) = \underset{h_1,h_2}{\arg\min} \sum_{i=1}^{N} \left[T_{\text{拟合}}(\hat{h}_1, \hat{h}_2) - T_{\text{实测}})\right]^2$$

$$\begin{cases} \text{控制方程：}\quad \rho_k c_k \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(k=1,2,3,4) \\ \text{边界条件：} \begin{cases} -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}\big|_{x=0} = h_1\left(T(0,t) - T_{\text{环境}}\right) \\ -\lambda_4 \frac{\partial T}{\partial x}\big|_{x=L} = h_2\left(T(L,t) - T_{\text{人体}}\right) \end{cases} \\ \text{接触面：} \begin{cases} T(x_k^-, t) = T(x_k^+, t)(k=1,2,3) \\ -\lambda_k \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda_{k+1} \frac{\partial T}{\partial x}(k=1,2,3) \end{cases} \\ \text{初始条件：}\quad T(x,0) = T_{\text{人体}} \end{cases}$$

显式解法：

将$T(x,t)$离散为$u(i,j)$，$x = i \times \Delta x, t = j \times \Delta t$。显式的偏导替换在"热传导模型与有限元差分"中提到了，这里直接列出递推方程：

$$\text{参数估计：}\quad \left(\hat{h}_1, \hat{h}_2\right) = \underset{h_1,h_2}{\arg\min} \sum_{i=1}^{N} \left[T_{\text{拟合}}(\hat{h}_1, \hat{h}_2) - T_{\text{实测}})\right]^2$$

$$\begin{cases} \text{控制方程：}\quad \rho_k c_k \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \lambda_k \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x_k^2}(k=1,2,3,4) \\ \text{边界条件：} \begin{cases} -\lambda_1 \frac{u_{1,j} - u_{2,j}}{\Delta x_1} = h_1(u_{1,j} - T_{\text{环境}}) \\ -\lambda_4 \frac{u_{end,j} - u_{end-1,j}}{\Delta x_4} = h_2(u_{end,j} - T_{\text{人体}}) \end{cases} \\ \text{接触面：} -\lambda_k \frac{u_{x_k,j} - u_{x_k-1,j}}{\Delta x_k} = -\lambda_{k+1} \frac{u_{x_k+1,j} - u_{x_k,j}}{\Delta x_{k+1}}(k=1,2,3) \\ \text{初始条件：} u_{i,1} = T_{\text{人体}}(i=1,2,...,L/\Delta x) \end{cases}$$

参数解释

- x_k：材料接触面在网格中的坐标

注意事项

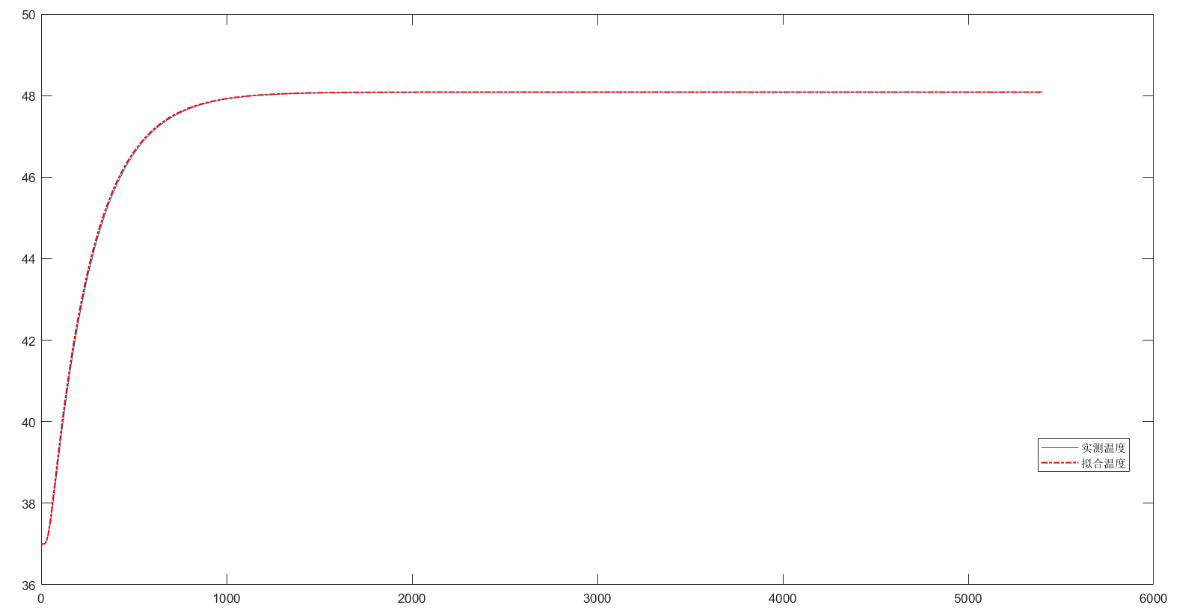
- 控制方程是一个简写，
- 左边界对空间求导使用了向后差分(前一项减后一项)，右边界则使用了向前差分(后一项减前一项)
- 两个材料的接触面视为一个点，而不是两个，这么做的目的是避免出现两个温度相同的微元，而且可以少个等式
- 注意单位换算，即将题目中的毫米换算成米即可，其他的不变

求解

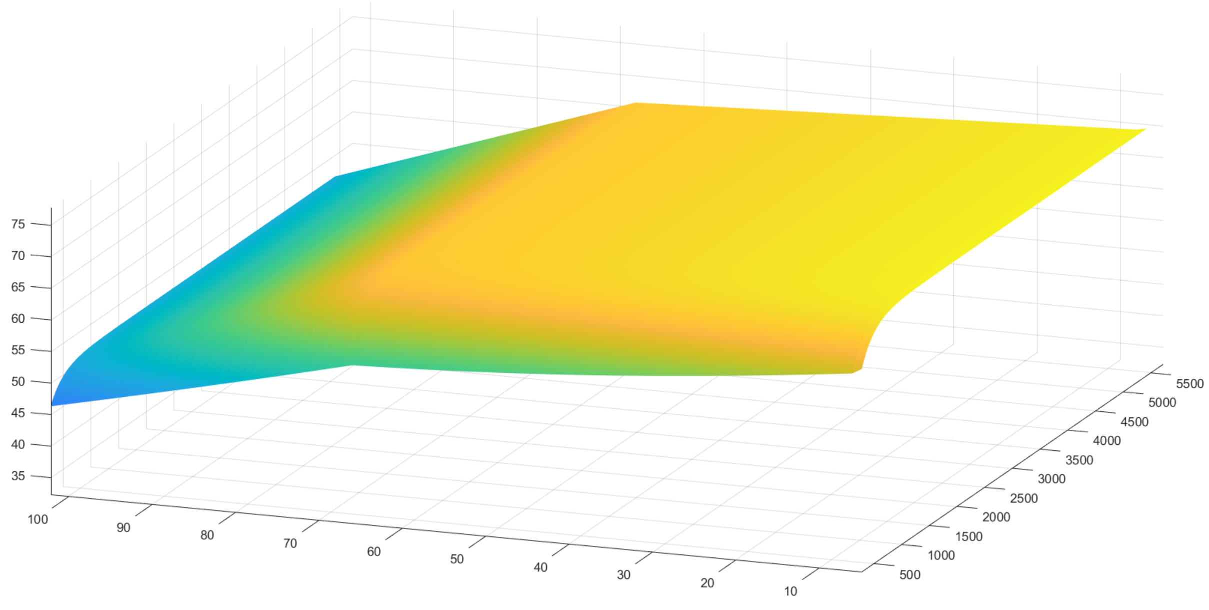
先人工随机试几个值，你会发现h_1影响到达最高温的时间，h_2影响最终温度，h_1**越大**，就越早到达最高温度，h_2**越大**，说明与人体的热交换越多，最终温度也就**越低**。
最后确认$h_1 \in [70, 90]$，$h_2 \in [1.75, 1.85]$。因为h1不敏感，h2敏感，所以对h1进行枚举，对h2进行三分。

比如$h = [80, 1.83]$ 就很好，然后使用随机搜索或者模拟退火等方法进一步求解。

拟合效果如下：



温度分布图如下：



这个其实是一个错解，因为网格更加细分后，h_1, h_2就变了

隐式解法：

直接给出方程的化简形式

$$\text{参数估计：}\quad \left(\hat{h}_1, \hat{h}_2\right) = \arg\min_{h_1,h_2} \sum_{i=1}^{N} \left[T_{\text{拟合}}(\hat{h}_1, \hat{h}_2) - T_{\text{实测}})\right]^2$$

$$\begin{cases} \text{控制方程}: -s_k u_{i-1,j} + (1+2s_k)u_{i,j} - s_k u_{i+1,j} = u_{i,j-1} (k=1,2,3,4) \\ \text{边界条件:} \begin{cases} (\Delta x_1 h_1 + \lambda_1)u_{1,j} - \lambda_1 u_{2,j} = \Delta x_1 h_1 T_{\text{环境}} \\ -\lambda_4 u_{end-1,j} + (\Delta x_4 h_2 + \lambda_4) u_{end,j} = \Delta x_4 h_2 T_{\text{人体}} \end{cases} \\ \text{接触面:} -\lambda_k \Delta x_{k+1} u_{x_k-1,j} + (\lambda_k \Delta x_{k+1} + \lambda_{k+1}\Delta x_k) u_{x_k,j} - \lambda_{k+1}\Delta x_k u_{x_k+1,j} = 0 (k=1,2,3) \\ \text{初始条件}: u_{i,1} = T_{\text{人体}} (i=1,2,...,L/\Delta x) \end{cases}$$

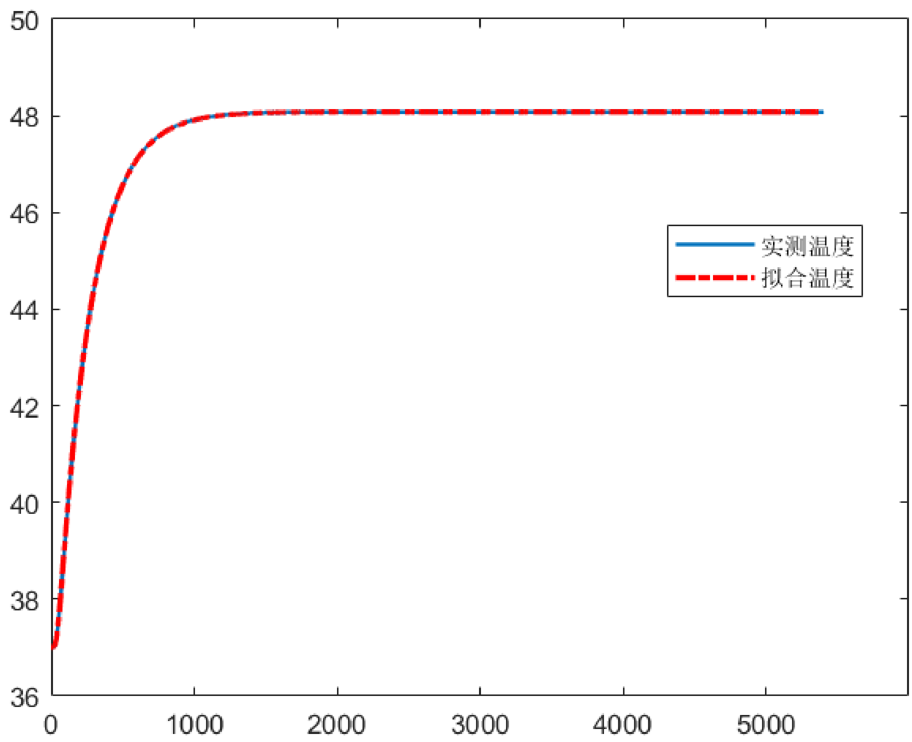
隐式解法又快又好，最后求解得到

$$h = [115.92, 8.35867]$$

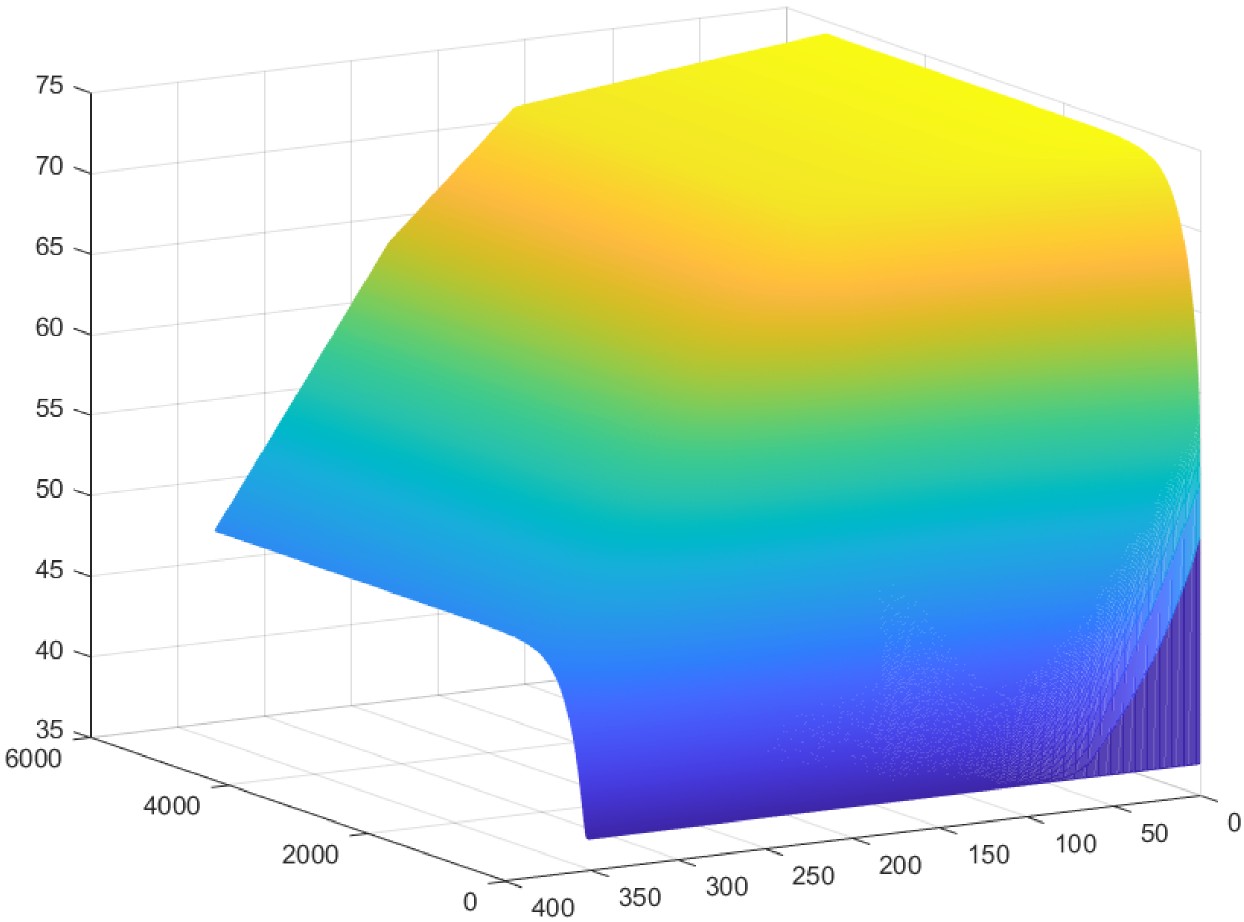
均方误差

$$loss = 1.211 \times 10^{-5}$$

拟合效果如下:



温度分布:



总结

- 数据量越大，越不能用显式求解，对比两个温度分布图：显式由于限制，空间的分割数不能太大，这是导致求解不精确的主要原因。
- 热传导模型最需要注意的是边界条件，这里最容易出错