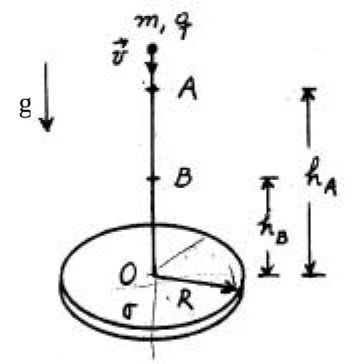
5. ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

PROBLEMA 37. Una partícula cargada se mueve a lo largo del eje de un disco uniformemente cargado. La magnitud de la velocidad de la partícula en el punto A es $10[m/s]$ y en el punto B es $2[m/s]$, ¿cuál es la densidad superficial de carga del disco?



Considerar el efecto de la gravedad y que la cantidades m, q, R, h_A, h_B y g son datos.

SOLUCIÓN

La presencia del campo gravitacional haría aumentar la velocidad de la partícula al pasar de $A \rightarrow B$; sin embargo, de acuerdo al enunciado la velocidad disminuye en ese tramo, de ahí se concluye que q y s deben tener igual signo de modo que haya repulsión entre ellas (partícula y disco).

El campo gravitacional y el campo electrostático son conservativos, lo que ha permitido definir las energías potenciales respectivas.

Recordando que cuando un sistema es conservativo podemos aplicar la conservación de la energía mecánica, entonces diremos que en nuestro sistema dicha cantidad se conserva, es decir :

$$\Delta E = 0 \qquad \text{o bien} \qquad E_A = E_B .$$

Las formas de energía asociadas con nuestro sistema son: cinética, potencial gravitacional y potencial electrostática.

Considerando que la energía potencial gravitacional del sistema es cero (nivel de referencia) cuando m está sobre el disco (en contacto con él), y que la energía potencial eléctrica es cero cuando el disco cargado y la carga se encuentran muy separados (a distancia infinita), entonces tendremos:

$$E_A = \frac{1}{2} m v_A^2 + m g h_A + q V_A$$

$$E_B = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g h_B + q V_B ,$$

igualando E_A y E_B , resulta :

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B + qV_B,$$

donde v_A y v_B son velocidades y V_A y V_B son potenciales.

Ahora hay que relacionar V_A y V_B con s , lo cual ha sido desarrollado anteriormente, por lo que se ocupará el resultado (ver PROBLEMA 33 b).

Potencial producido por un disco cargado con densidad superficial de carga s , en un punto de su eje ubicado a una distancia h del centro (tomando como referencia para potencial cero, el infinito) :

$$V = \frac{s}{2e_0}\left(\sqrt{R^2 + h^2} - h\right).$$

Usando este resultado, tenemos :

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_A - mgh_B = q\frac{s}{2e_0}\left[\sqrt{R^2 + h_B^2} - \sqrt{R^2 + h_A^2} - h_B + h_A\right]$$

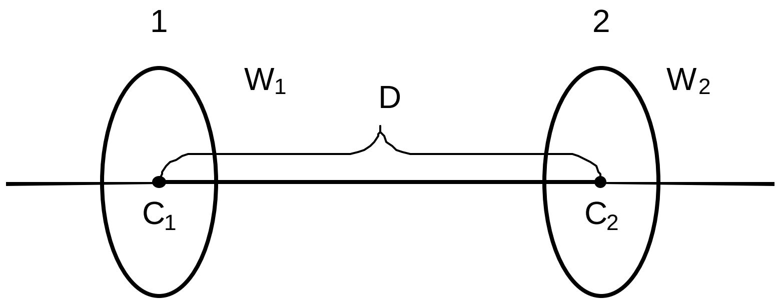
de donde se despeja s :

$$s = \frac{2e_0}{q}\left[\frac{\frac{1}{2}m\left(v_A^2 - v_B^2\right) + mg\left(h_A - h_B\right)}{\sqrt{R^2 + h_B^2} - \sqrt{R^2 + h_A^2} + h_A - h_B}\right]$$

Hay otras maneras de enfocar el problema. Encuentre una y compárela con el procedimiento anterior.

PROBLEMA 38. Dos anillos coaxiales, de radio R, se colocan con sus centros a distancia D. El trabajo requerido para traer una carga puntual q hasta el centro de uno u otro anillo es W_1 o W_2 respectivamente. Determinar la carga total de cada uno de los anillos.

SOLUCIÓN



De acuerdo a la definición de potencial en un punto, pueden plantearse las igualdades :

$$W_1 = V_{c_1} \bullet q \qquad \text{y} \qquad W_2 = V_{c_2} \bullet q \ ,$$

donde V_{c_1} y V_{c_2} son los potenciales en los centros c_1 y c_2 de los anillos 1 y 2 respectivamente.

El potencial en c_1 es debido a los anillos 1 y 2 y, por lo tanto, puede expresarse como :

$$V_{c_1} = V_{c_1}(1) + V_{c_1}(2) \ ,$$

donde $V_{c_1}(1)$ y $V_{c_1}(2)$ son los potenciales producidos por los anillos 1 y 2 en c_1.

El potencial en un punto del eje de un anillo de radio R y carga q_1, a una distancia x de su centro es (ver PROBLEMA 33 (a)) :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

Luego,

$$V_{c_1}(1) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \text{y} \qquad V_{c_1}(2) = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\left(D^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

Análogamente:

$$V_{c_2}(1) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\left(D^2 + R^2\right)^{1/2}} \qquad \text{y} \qquad V_{c_2}(2) = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}\,,$$

donde q_1 y q_2 son las cargas en los anillos 1 y 2. Evidentemente se ha supuesto que las cargas q_1 y q_2 están distribuidas uniformemente en cada uno de los anillos. (Examine si esa suposición es necesaria).

Reemplazando V_{c_1} y V_{c_2} en las igualdades planteadas al comienzo, se obtiene:

$$W_1 = q\bullet\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} + q\bullet\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\left(D^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

$$W_2 = q\bullet\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} + q\bullet\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\left(D^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

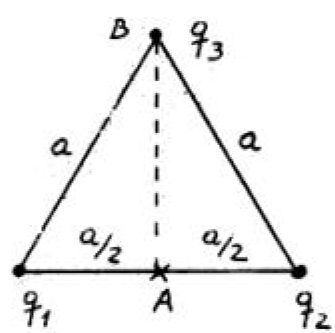
Tenemos ahora dos ecuaciones y dos incógnitas: q_1 y q_2.

Se deja como ejercicio la resolución del sistema de ecuaciones, cuyas soluciones son:

$$q_1 = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\,R\left(D^2 + R^2\right)}{q\,D^2}\left[W_1 - W_2\bullet\frac{R}{\left(D^2 + R^2\right)^{1/2}}\right]$$

$$q_2 = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\,R}{q}\left(1 + \frac{R^2}{D}\right)\left[W_2 - W_1\bullet\frac{R}{\left(D^2 + R^2\right)^{1/2}}\right]$$

PROBLEMA 39. Tres cargas puntuales están ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado a, como se muestra en la figura adjunta.



(a) Determinar la energía electrostática de la configuración.

(b) Determinar el trabajo requerido para llevar la carga q_3 de su posición inicial al punto A.

(c) Determinar la energía electrostática de la nueva configuración formada (cuando q_3 está en A).

(d) Comparar la diferencia de energía electrostática de las configuraciones, con el trabajo realizado para llevar q_3 desde su posición inicial hasta A.

<u>SOLUCIÓN</u>

(a) $$U_i = \frac{q_1 q_3}{4pe_0 a} + \frac{q_1 q_2}{4pe_0 a} + \frac{q_2 q_3}{4pe_0 a} \, .$$

(b) $W = (V_A - V_B) q_3$, donde V_A y V_B son los potenciales producidos por q_1 y q_2 en los puntos A y B ; es decir,

$$V_A = \frac{q_1}{4pe_0\left(\dfrac{a}{2}\right)} + \frac{q_2}{4pe_0\left(\dfrac{a}{2}\right)} \qquad \text{y} \qquad V_B = \frac{q_1}{4pe_0 a} + \frac{q_2}{4pe_0 a} \, ,$$

luego :

$$W = \frac{q_1 q_3}{4pe_0 a} + \frac{q_2 q_3}{4pe_0 a} \, .$$

(c) $$U_f = \frac{q_1 q_3}{4pe_0\left(\dfrac{a}{2}\right)} + \frac{q_1 q_2}{4pe_0 a} + \frac{q_2 q_3}{4pe_0\left(\dfrac{a}{2}\right)} \, .$$

Observe que el término asociado con la pareja de cargas que no se ha movido, aparece tanto en la expresión de U_i como en la de U_f . Esto ocurrirá para cualquier configuración.

(d) $$\Delta U = U_f - U_i = \frac{q_1 q_3}{4pe_0 a} + \frac{q_2 q_3}{4pe_0 a} \, .$$

Al comparar ΔU con W se observa que son iguales :

$$\Delta U = W \, ,$$

esto es así pues, el cambio en la energía potencial de una configuración es igual al trabajo efectuado sobre ella (se supone que en ambas configuraciones las cargas están en reposo, es decir, la energía cinética es nula al principio y al final).

PROBLEMA 40. Calcular la energía electrostática de una distribución esférica de carga de densidad r constante y radio R.

SOLUCIÓN

Para una distribución continua de carga, la energía electrostática (trabajo efectuado al formar la configuración) es:

$$U = \frac{1}{2}\int V\,dq\,,$$

donde la integral debe efectuarse sobre el volumen que contiene la carga, en este caso una esfera de radio R.

De acuerdo a un resultado anterior (ver PROBLEMA 32), el potencial en un punto interior de la esfera está dado por :

$$V = \frac{r}{6e_0}\left(3R^2 - r^2\right), \qquad \text{con} \qquad r < R\,.$$

Luego, la energía asociada a un cascarón esférico de radio r, ancho dr y carga $dq = r \bullet 4p\,r^2\,dr$, es :

$$dU = \frac{1}{2}V\,dq = \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \bullet \frac{r}{\underset{3}{\cancel{6}}\,e_0}\left(3R^2 - r^2\right) r \bullet \overset{1}{\cancel{4}}\,p\,r^2 dr\,.$$

Entonces, la energía de la configuración completa es :

$$U = \frac{1}{2}\int V dq = \frac{\rho^2\pi}{3\epsilon_0}\int_0^R \left(3R^2 r^2 - r^4\right) dr$$

$$U = \frac{\rho^2\pi}{3\epsilon_0}\left[3R^2\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{5}R^5\right] = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0} \ .$$

Si Q es la carga total de la esfera; entonces :

$$Q = \frac{4\pi\rho R^3}{3} \ ,$$

y el resultado para U se puede expresar en términos de Q como :

$$U = \frac{\cancel{4\pi} R^{\cancel{5}}}{\cancel{15}\,\epsilon_0} \bullet \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\,Q^2}{(4\pi)^{\cancel{2}} R^{\cancel{6}}} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \ .$$

Una manera alternativa de obtener el resultado anterior, consiste en usar la relación :

$$U = \int \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 dV \quad ,$$

donde dV es un elemento de volumen, y la integral debe efectuarse sobre todo el espacio, ya sea que éste contenga o no carga. Note la diferencia entre las dos expresiones dadas para U, especialmente en cuanto a la región de integración.

Usando ahora las expresiones obtenidas para el campo eléctrico en el interior (ver PROBLEMA 27) y en el exterior de la esfera (ver PROBLEMA 10), tendremos :

$$\vec{E} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{si } r > R \ , \qquad \text{y} \qquad \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\bullet\hat{r} \quad \text{si } r < R \ .$$

Entonces:

$$U = \int_0^R \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\cancel{\epsilon_0}\,\frac{\rho^2 r^2}{9\epsilon_0^{\cancel{2}}}\bullet\overset{2}{\cancel{4}}\,\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{2}\cancel{\epsilon_0}\,\frac{Q^2\,\cancel{4\pi}\,\cancel{r^2}\,dr}{(4\pi)^{\cancel{2}}\,\epsilon_0^{\cancel{2}}\,r^{\cancel{4}\,2}}$$

$$U = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0}\int_0^R r^4 dr + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\bullet 5\bullet\epsilon_0} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \ ,$$

y reemplazando r , obtenemos:

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R} \ ,$$

lo cual coincide con el resultado obtenido usando el primer procedimiento.