## 7. CONDENSADORES CON DIELÉCTRICO

**PROBLEMA 46.** Dos condensadores de capacidades iguales se cargan en paralelo a una diferencia de potencial $V_0$ mediante una batería. A continuación se desconecta la batería y se introduce en uno de los condensadores un dieléctrico de constante $K$ que llena totalmente el espacio entre sus placas.

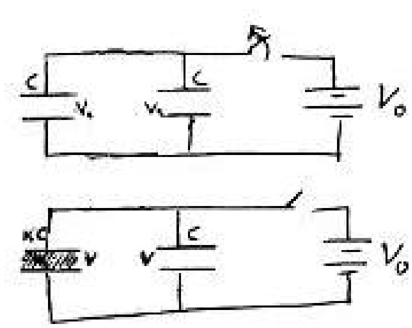
(a) Calcular la diferencia de potencial final en los condensadores.

(b) Calcular la carga transferida de un condensador a otro.

**SOLUCIÓN**

(a) Inicialmente ambos condensadores tienen igual capacitancia $C$ e igual diferencia de potencial entre sus placas, por lo tanto ambos condensadores tienen la misma carga $q = CV_0$.

La carga total de ambos condensadores es $2q$ y se mantiene constante durante todo el proceso.



- Antes de introducir el dieléctrico :

$$C_{eq.} = C + C = \frac{2q}{V_0}$$

- Después de introducir el dieléctrico :

$$C_{eq.} = KC + C = \frac{2q}{V}$$

La diferencia de potencial final $V$ en los condensadores se obtiene de la expresión anterior, introduciendo en ella el valor de la carga $q = CV_0$. El resultado es :

$$V = \frac{2V_0}{K+1}$$

(b) Sean : $q^{I}$ la carga en el condensador con dieléctrico, y

$q^{II}$ la carga en el condensador sin dieléctrico .

Por conservación de la carga eléctrica en las placas superiores (e inferiores) conectadas entre sí, se cumple que :

$$q' + q'' = 2q$$

Puesto que los condensadores están conectados en paralelo, se cumple que :

$$\frac{q'}{KC} = \frac{q''}{C} \quad \Rightarrow \quad q' = K\,q'' .$$

Entonces : $K\,q'' + q'' = 2q \quad \Rightarrow \quad q'' = \dfrac{2q}{K+1}$

Además, $\quad q' = 2q - q'' = \dfrac{2Kq}{K+1}$

Puesto que $K > 1$ , se cumple que $q' > q''$ , es decir, pasa carga del condensador sin dieléctrico al condensador con dieléctrico.

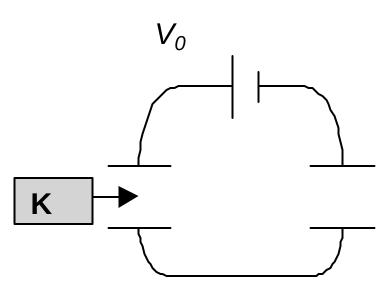
Carga que pasa al condensador con dieléctrico $\Delta q = q' - q$ :

$$\Delta q = q' - q = \frac{2Kq}{K+1} - q = \frac{2Kq - q - Kq}{K+1}$$

$$\Delta q = \frac{q(K-1)}{K+1} = \frac{CV_0(K-1)}{K+1} \quad .$$

---

**PROBLEMA 47.** Dos condensadores de capacidades iguales están conectados en serie a una batería de voltaje $V_0$ . En uno de ellos se introduce un material de coeficiente dieléctrico relativo $K$ .




(a) Determinar la carga que circula por la batería al introducir el dieléctrico.

(b) Calcular la energía acumulada antes y después de introducir el dieléctrico.

(c) Determinar el trabajo realizado por la batería al introducir el dieléctrico.

(d) Calcular el trabajo que tendría que efectuar un agente externo para sacar al dieléctrico.

**SOLUCIÓN**

(a) Sea $C$ la capacidad de cada condensador. La capacitancia equivalente antes de introducir el dieléctrico es :

$$\frac{1}{C_{eq.}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} \qquad \Rightarrow \quad C_{eq.} = \frac{C}{2} \; .$$

Por lo tanto, la carga de cada condensador antes de introducir el dieléctrico es :

$$Q = \frac{C}{2} V_0 \; .$$

Al introducir el dieléctrico en uno de los condensadores su nueva capacitancia será $KC$ y la capacitancia equivalente después de introducir el dieléctrico es :

$$\frac{1}{C_{eq.}} = \frac{1}{KC} + \frac{1}{C} = \frac{K+1}{KC} \qquad \Rightarrow \qquad C_{eq.} = \frac{KC}{K+1}$$

La nueva carga en cada condensador es :

$$q = \frac{KC}{K+1} V_0 \geq Q \; .$$

Al introducir el dieléctrico, la carga en los condensadores aumenta.

Luego, la carga $\Delta Q$ que circula por la batería al introducir el dieléctrico es :

$$\Delta Q = q - Q = \frac{KC}{K+1} V_0 - \frac{C}{2} V_0 = C V_0 \left[ \frac{2K - 1 - K}{2(K+1)} \right]$$

$$q - Q = \frac{CV_0}{2} \left[ \frac{K-1}{K+1} \right] \; .$$

(b) La energía acumulada en el sistema de los dos condensadores antes de introducir el dieléctrico es :

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{C} \; .$$

Entonces; $$U = \frac{CV_0^2}{4}$$

La energía acumulada después de introducir el dieléctrico es :

$$U' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{KC} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$U' = \frac{1}{2}\left\{\frac{KC}{K+1}V_0\right\}^2\left(\frac{1}{KC} + \frac{1}{C}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{KC}{K+1}V_0^2$$

(c) El trabajo realizado por la batería al introducir el dieléctrico es :

$$W_{bat\,i} = \text{Voltaje de la batería} \bullet \text{ carga transferida}$$

$$W_{bat\,i} = V_0 \bullet \frac{CV_0}{2}\left[\frac{K-1}{K+1}\right] = \frac{CV_0^2}{2}\left[\frac{K-1}{K+1}\right] > 0$$

El trabajo realizado por los agentes externos para sacar el dieléctrico será igual a la variación de energía del sistema formado por los condensadores :

$$\Delta U = U - U' = W_{ag.ext.} + W_{bat\,s}$$

Nótese que la batería es un elemento externo para el sistema de los dos condensadores. Al sacar el dieléctrico, por la batería circula la misma carga eléctrica que al introducir el dieléctrico, pero en sentido contrario. Luego, el trabajo realizado por la batería al sacar el dieléctrico es el negativo del trabajo realizado por la batería al introducir el dieléctrico:

$$W_{bat\,s} = -W_{bat\,i}\,.$$

Luego : $W_{ag.ext.} = U - U' + W_{bat\,i}$

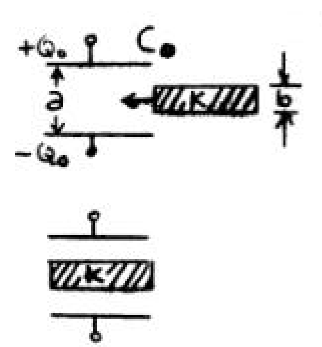
$$W_{ag.ext.} = \frac{CV_0^2}{4} - \frac{1}{2}\,\frac{KC}{K+1}V_0^2 + \frac{CV_0^2}{2}\,\frac{K-1}{K+1}$$

$$W_{ag.ext.} = \frac{CV_0^2}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{K+1}\right]$$

$$W_{ag.ext.} = \frac{CV_0^2}{4}\left[\frac{K-1}{K+1}\right]$$

El resultado anterior es positivo y significa que el agente externo saca el dieléctrico aplicando una fuerza en la dirección del movimiento. Esto ocurre porque el dieléctrico es atraído hacia el interior del condensador.

**PROBLEMA 48.** Un condensador de placas paralelas de capacidad $C_0$, cuyo espacio entre placas está vacío, tiene una carga inicial $Q_0$. Se introduce una placa de dieléctrico de constante $K$, que no llena totalmente el espacio entre las placas, como se indica en la figura adjunta.




Considerando que el proceso ocurre a carga constante, determinar antes y después de introducir el dieléctrico :

(a) La intensidad del campo eléctrico en todo el espacio entre las placas.

(b) La carga de polarización.

(c) La carga libre.

(d) La diferencia de potencial entre las placas conductoras.

(e) La diferencia de potencial entre las caras opuestas del dieléctrico.

(f) La capacidad del condensador.

(g) La energía potencial eléctrica.

## <u>SOLUCIÓN</u>

**ANTES** de introducir el dieléctrico :

$$V_0 = \frac{Q_0}{C_0}$$

$$C_0 = \frac{e_0 A}{a}$$

$Q_L = Q_0$ ( carga libre )

$Q_P = 0$ ( no hay carga de polarización )

$E_0 = \dfrac{Q_0}{e_0 A}$ ( campo entre dos placas planas )

$E_F = 0$ ( fuera de las placas )

$U_0 = \dfrac{Q_0^2}{2C_0}$ ( energía potencial eléctrica )

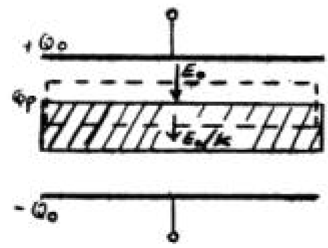
**DESPUÉS** de introducir el dieléctrico :

(a) El campo **dentro** del dieléctrico se **debilitará** en una factor $K$ respecto del valor en el vacío. El campo en el espacio vacío no se modifica (¿por qué?) .

$$E = \begin{cases} E_0 & \text{en el vacío} \\ E_0/K & \text{dentro del dieléctrico} \end{cases}$$

(b) La carga de polarización puede calcularse aplicando la ley de Gauss a una "caja de fósforos" , cuyas bases sean paralelas a las placas.

El flujo a través de las paredes laterales es cero pues $\vec{E}$ es perpendicular a $\overrightarrow{dS}$ . Luego :




$$\Phi_E = \int_{bases} \vec{E} \bullet \overrightarrow{dS} = -E_0 \bullet A + \frac{E_0}{K} \bullet A \ ,$$

pero el flujo debe ser igual a la carga neta encerrada, dividida por $e_0$ :

$$\Phi_E = \frac{Q_P}{e_0} \ .$$

En consecuencia, igualando :

$$Q_P = E_0 A \ e_0 \left( \frac{1}{K} - 1 \right),$$

pero $E_0 = Q_0 / e_0 A$ , de donde :

$$Q_P = -\left( \frac{K-1}{K} \right) Q_0 \ ,$$

Puesto que $K \geq 1$, la expresión anterior indica que la carga de polarización es siempre de signo contrario al de la carga libre y de valor absoluto menor que el de la carga libre. Observe que la carga inducida por polarización es la misma cuando el dieléctrico llena el espacio entre las placas.

(c) La carga libre, por otra parte, no varía durante el proceso pues las placas conductoras permanecen aisladas :

$$(Q_L)_{antes} = (Q_L)_{después} = Q_0 .$$

(d) La diferencia de potencial entre las placas conductoras pueden calcularse mediante :

$$\Delta V = V_{(+)} - V_{(-)} = -\int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \bullet \overrightarrow{d\ell} \quad ,$$

donde hay que considerar que el campo dentro del dieléctrico es $E_0/K$ .

$$\Delta V = E_0\,(a-b) + \frac{E_0}{K} \bullet b = E_0 \left( a + b\left( \frac{1}{K} - 1 \right) \right)$$

$$\Delta V = \frac{Q_0}{e_0\,A} \left( a + b\left( \frac{1}{K} - 1 \right) \right)$$

$$\Delta V = V_0 \left( \frac{a + b\left( \frac{1}{K} - 1 \right)}{a} \right)$$

$$\Delta V = V_0 \left( 1 - \frac{b}{a} \bullet \frac{(K-1)}{K} \right) .$$

Esta diferencia de potencial es menor que la del condensador vacío, pero mayor que la del mismo condensador lleno con el dieléctrico. (Justifique esta afirmación).

(e) La diferencia de potencial entre las caras opuestas del dieléctrico corresponde al término $\frac{E_0}{K} \bullet b$ en la relación encontrada para $\Delta V$ total al hacer la integral. Puede expresarse como :

$$\Delta V_{dieléctrico} = \frac{V_0}{K} \bullet \frac{b}{a} .$$

(f) La capacidad del condensador, por definición, es el valor absoluto de la carga libre en cada placa, dividido por la diferencia de potencial :

$$C = \frac{Q_L}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\frac{Q_0}{e_0 A}\left(a + b\left(\frac{1}{k} - 1\right)\right)} = \frac{e_0 A}{a + b\left(\frac{1}{k} - 1\right)}$$

$$C = \frac{C_0}{1 - \frac{b}{a} \bullet \frac{(K-1)}{K}} \quad .$$

Puede apreciarse que el nuevo valor de la capacidad está comprendido entre la capacidad del condensador vacío $\left(C_0\right)$ y la del condensador lleno con dieléctrico $\left(K C_0\right)$.

$$C_0 < C < K C_0$$

(g) La energía potencial eléctrica puede calcularse directamente de :

$$U = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C_0}\left(1 - \frac{b}{a} \bullet \frac{(K-1)}{K}\right)$$

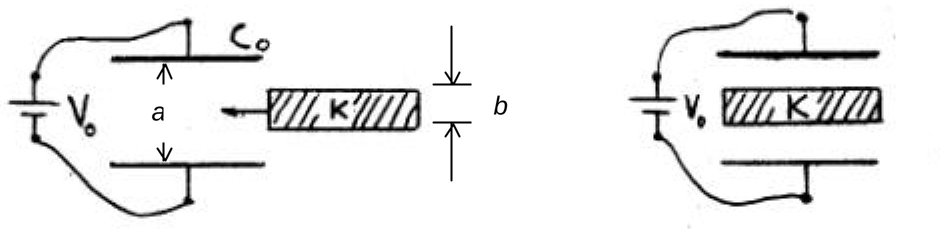
La diferencia entre la energía final e inicial es:

$$\Delta U = U - U_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0}\left(1 - \frac{b}{a} \bullet \frac{(K-1)}{K} - 1\right)$$

$$\Delta U = -U_0 \, \frac{b}{a} \bullet \frac{(K-1)}{K} \quad .$$

La energía eléctrica disminuye, en otras palabras, el condensador debe hacer trabajo positivo para introducir el dieléctrico. Esto significa que el dieléctrico es **atraído** hacia el interior del condensador, y el agente externo debe sujetarlo para que se introduzca muy lentamente, haciendo trabajo negativo sobre el condensador.

**PROBLEMA 49.** Examinar el proceso de introducir un dieléctrico que llena parcialmente el espacio entre las placas de un condensador, manteniendo la batería conectada durante todo el proceso.




( a potencial constante )

**SOLUCIÓN**

**ANTES** de introducir el dieléctrico tenemos:

$$C_0 = \frac{e_0 A}{a}$$

$$Q_L = Q_0 = C_0 V_0$$

$$Q_P = 0$$

$$E_0 = \frac{V_0}{a}$$

$$U_0 = \frac{C_0 V_0^2}{2}$$

**DESPUÉS** de introducir el dieléctrico , $V = V_0$ , ya que la batería permanece conectada.

Supongamos que el campo eléctrico en el espacio vacío tienen ahora magnitud $E$, luego el campo dentro del dieléctrico será $E/K$ , y debe cumplirse :

$$V_0 = E\,(a-b) + \frac{E}{K}b = E\left(a + b\left(\frac{1}{K} - 1\right)\right),$$

es decir,

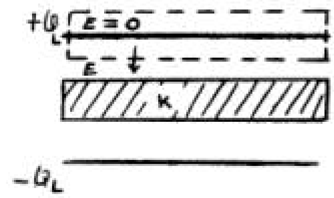
$$E = \frac{V_0}{a + b\left(\frac{1}{K} - 1\right)} = \frac{E_0}{1 - \frac{b}{a} \bullet \frac{(K-1)}{K}} \quad .$$

Puesto que $K \geq 1$ y $b < a$, se cumple que $E > E_0$.

Por lo tanto el campo en el vacío debe aumentar en magnitud para compensar el debilitamiento producido por el dieléctrico y mantener constante la diferencia de potencial.

La nueva carga libre puede calcularse aplicando las ley de Gauss a una "caja de fósforos" que encierre una de las placas, como se indica :

$$\Phi_E = \frac{q_{enc.}}{e_0}$$



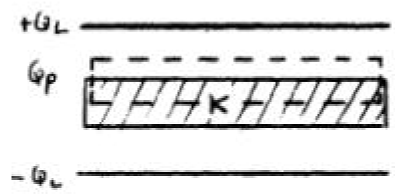

$$E\,A = \frac{Q_L}{e_0}$$

$$Q_L = E \bullet A \bullet e_0 = \frac{E_0\,A e_0}{1 - \frac{b}{a} \bullet \frac{(K-1)}{K}}$$

$$= \frac{Q_0}{1 - \frac{b}{a} \bullet \frac{(K-1)}{K}}$$

Se ha encontrado que el valor absoluto de la carga libre aumenta en la misma proporción que el campo en el vacío; la batería transfiere carga de una placa a la otra para mantener constante la diferencia de potencial.

Para la carga de polarización aplicaremos la ley de Gauss a una "caja de fósforos" que encierra una de las caras del dieléctrico.




$$\Phi_E = \frac{q_{enc.}}{e_0}$$

$$-E\,A + \frac{E}{K} A = \frac{Q_P}{e_0}$$

$$Q_P = e_0 \bullet A \bullet E \left(\frac{1}{K} - 1\right) .$$

Puesto que hemos encontrado $Q_L = E\,A e_0$ ; lo anterior se escribe como:

$$Q_P = -\frac{(K-1)}{K} Q_L$$

La capacidad de este condensador es :

$$C = \frac{Q_L}{V_0} = \frac{Q_0}{V_0\left(1 - \frac{b}{a} \bullet \frac{(K-1)}{K}\right)}$$

$$C = \frac{C_0}{1 - \frac{b}{a} \bullet \frac{(K-1)}{K}} \ .$$

Evidentemente resulta el mismo valor obtenido a carga constante, porque la capacidad de un condensador con dieléctrico no depende del proceso mediante el cual se introduce el dieléctrico.

La energía puede calcularse mediante :

$$U = \frac{CV_0^2}{2} = \frac{U_0}{1 - \frac{b}{a} \bullet \frac{(K-1)}{K}}$$

Notar que $U > U_0$, de modo que el cambio de energía almacenada entre las placas es positiva :

$$\Delta U = U - U_0 = U_0\left(\frac{1}{1 - \frac{b}{a} \bullet \frac{(K-1)}{K}} - 1\right)$$

$$\Delta U = \frac{(K-1)U_0}{1 + K\left(\frac{a}{b} - 1\right)} > 0 \, .$$

El aumento en la energía potencial se debe al trabajo neto hecho por el agente externo y por la batería que mantiene constante el potencial. El trabajo realizado por la batería es :

$$W_{batería} = \int_{Q_0}^{Q_L} V dq = V_0 \left(Q_L - Q_0\right)$$

$$W_{batería} = V_0 Q_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{b}{a} \frac{(K-1)}{K}} - 1\right)$$

$$W_{batería} = 2U_0 \left(\frac{K-1}{1 + K\left(\frac{a}{b} - 1\right)}\right) = 2\Delta U$$

El trabajo efectuado por el agente externo para introducir el dieléctrico, se puede obtener a partir de

$$\Delta U = W_{batería} + W_{\substack{agente\\externo}}$$

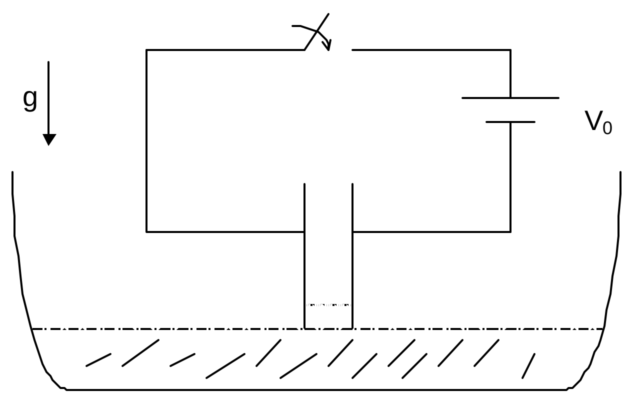
$$W_{\substack{agente\\externo}} = \Delta U - W_{batería} \qquad = \Delta U - 2\,\Delta U = -\,\Delta U$$

$$W_{\substack{agente\\externo}} = -\frac{(K-1)U_0}{1+K\left(\dfrac{a}{b}-1\right)} < 0\,.$$

El signo negativo del resultado anterior indica que el dieléctrico es atraído hacia el interior del condensador.

---

**PROBLEMA 50.** Las placas paralelas de un condensador plano se acercan a la superficie de un líquido dieléctrico hasta quedar justo sobre ella, como se muestra en la figura. Al cerrar el interruptor, se conecta una batería a las placas, y el nivel del líquido que está entre ellas sube por efecto de la fuerza eléctrica. Suponer que no hay efectos de tensión superficial y que la variación de nivel del líquido en el recipiente es despreciable (excepto entre las placas). Considerar placas cuadradas de lado a y separación d entre ellas, y líquido de densidad $r$ y constante dieléctrica K .



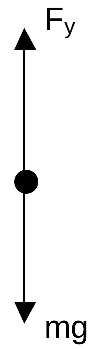

Determinar la altura que sube el líquido entre las placas.

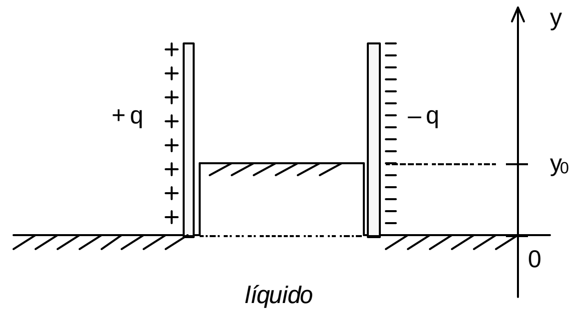
**SOLUCIÓN**

En el estado de equilibrio que se alcanza con la batería aplicada a las placas, la porción de líquido que asciende entre ellas alcanza cierta altura $y_0$ , de modo que son iguales el peso del líquido y la fuerza eléctrica.

Luego ,

$$F_y = mg$$




El peso del líquido que asciende entre las placas se puede expresar en términos de los datos, según :

$$mg = \rho g a d y_0 \ .$$

La fuerza eléctrica puede obtenerse a partir de la energía potencial eléctrica, usando la relación:

$$F_y = -\frac{dU}{dy} \ .$$

Para escribir la energía potencial eléctrica $U$ en términos de la variable $y$ , consideramos el condensador plano como dos condensadores más pequeños, uno con el dieléctrico ($C_1$) y otro sin dieléctrico ($C_2$), ambos sometidos a la misma diferencia de potencial. Inicialmente toda la energía potencial está en la batería; finalmente hay energía potencial entre las placas planas y la energía de la batería ha disminuido en el valor $V_0 q$ , siendo $q$ la magnitud de la carga que la batería ha proporcionado a cada placa. Entonces, la energía potencial eléctrica es :

$$U = U_0 + \frac{1}{2} C_1 V_0^2 + \frac{1}{2} C_2 V_0^2 - V_0 q \quad ,$$

donde $U_0$ es la energía potencial inicial en la batería ,

$$C_1 = \frac{K \varepsilon_0 a y}{d} \quad , \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 a (a - y)}{d} \qquad y \qquad q = (C_1 + C_2)\, V_0 \quad .$$

Al sustituir las relaciones anteriores en la expresión para $U$ se obtiene :

$$U = U_0 - \frac{1}{2} (C_1 + C_2)\, V_0^2$$

$$U(y) = U_0 - \frac{e_0 a}{2d} \left(a + (K - 1)\, y\right) V_0^2 \quad .$$

Derivando $U(y)$ se obtiene la fuerza eléctrica :

$$F_y = \frac{\varepsilon_0 a}{2d}(K-1)\,V_0^2 \quad .$$

Puesto que $F_y$ ha resultado positivo, hemos encontrado que la fuerza eléctrica es en dirección y , es decir, hacia arriba, como corresponde al efecto descrito en el enunciado. Además, ha resultado independiente de y. Usando este resultado en la ecuación de equilibrio de fuerzas descrita al comienzo, se obtiene la igualdad :

$$\rho g a d y_0 = \frac{\varepsilon_0 a}{2d}(K-1)\,V_0^2 \quad ,$$

de donde resulta la altura $y_0$ que sube el líquido. Finalmente,

$$y_0 = \frac{(K-1)\varepsilon_0 V_0^2}{2\rho g d^2} \quad .$$

El efecto considerado en este ejercicio es pequeño, como puede verificarse usando los valores numéricos siguientes :

$$K = 2 \quad ; \quad \rho = 10^3\,[\mathrm{kg/m^3}] \quad ; \quad \varepsilon_0^{-1} = 4\pi\bullet 9\bullet 10^9\,[\mathrm{N\bullet m^2/C^2}]$$

$$g = 10\,[\mathrm{m/s^2}] \quad ; \quad d = 10^{-3}\,[\mathrm{m}] \quad ; \quad V_0 = 10^3\,[\mathrm{V}] \quad .$$

En tales condiciones, resulta :

$$y_0 \simeq 0{,}5\ [\mathrm{mm}]$$