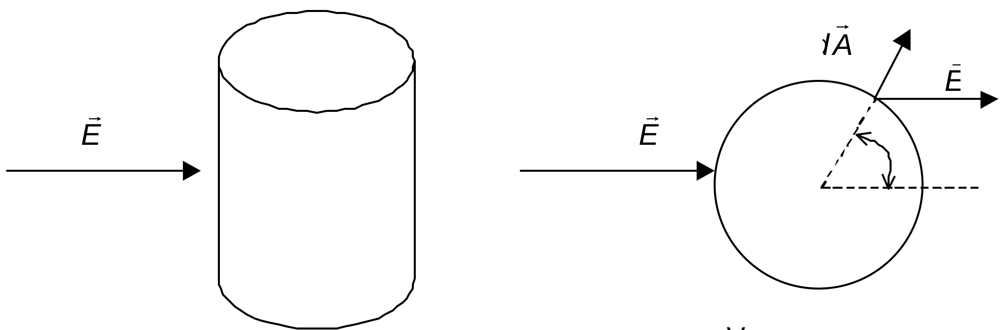
3. FLUJO ELÉCTRICO

PROBLEMA 18. Determinar el flujo que atraviesa una superficie cilíndrica de radio R y largo L, si el campo eléctrico es uniforme y su dirección es perpendicular al eje del cilindro.

SOLUCIÓN



VISTA SUPERIOR

La vista superior es representativa de lo que sucede en el manto de la superficie cilíndrica.

Las bases del cilindro son áreas planas representadas por un vector que es perpendicular al campo eléctrico y, en consecuencia, no contribuye a la integral $\oint \vec{E} \bullet d\vec{A}$; es decir, el flujo a través de las bases es cero.

Para el manto :

$$\phi = \int_M \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int_0^{2\pi} E \bullet R\, d\theta\, L \cos\theta$$

$$\phi = ERL\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta \quad = ERL\left(sen 2\pi - sen 0\right) = 0 \ .$$

Luego, ϕ a través del manto es 0; en consecuencia el flujo total a través de la superficie cilíndrica es cero.

Otra manera de hacer lo anterior, es aplicando la ley de Gauss :

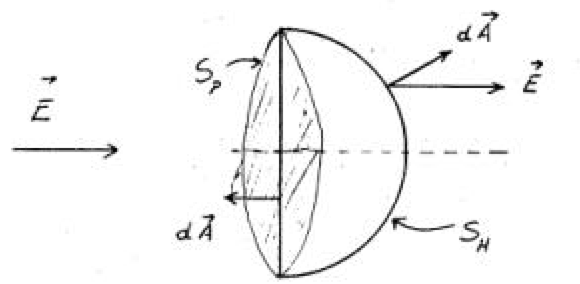
$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = \phi = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0},$$

y puesto que no hay carga en el interior de la superficie, entonces :

$$\phi_{total} = 0 \ .$$

PROBLEMA 19. Calcular el flujo eléctrico f_E que atraviesa la superficie de un hemisferio de radio R , en un campo eléctrico $\vec{E}$ uniforme y paralelo al eje del hemisferio.

SOLUCIÓN



El hemisferio es una superficie abierta (S_H); con el objeto de tener una superficie cerrada se agrega la superficie plana S_p .

La superficie cerrada no encierra carga; luego :

$$f = \oint_{S_p+S_H} \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int_{S_H} \vec{E} \bullet d\vec{A} + \int_{S_p} \vec{E} \bullet d\vec{A} = 0 \ ,$$

por lo tanto :

$$\int_{S_H} \vec{E} \bullet d\vec{A} = -\int_{S_p} \vec{E} \bullet d\vec{A} \ ,$$

y

$$\int_{S_p} \vec{E} \bullet d\vec{A} = -\int_{S_p} E\,dA = -E\int_{S_p} dA \ = -E\,A = -E p R^2 \ .$$

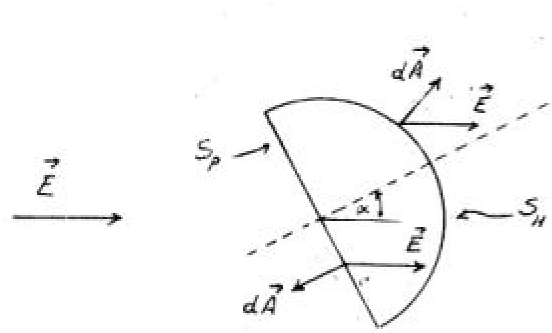
Entonces, el flujo a través del hemisferio es :

$$f_H = \int_{S_H} \vec{E} \bullet d\vec{A} = E p R^2 \ .$$

Nota: obtenga el resultado anterior integrando directamente sobre la superficie del hemisferio.

PROBLEMA 20. Determinar el flujo eléctrico que atraviesa un hemisferio de radio R si el eje de simetría del hemisferio forma un ángulo α con la dirección de un campo eléctrico uniforme.

SOLUCIÓN



Usando las ideas del problema anterior, y puesto que la superficie cerrada no encierra carga :

$$\int_{S_H} \vec{E} \bullet d\vec{A} = -\int_{S_p} \vec{E} \bullet d\vec{A}$$

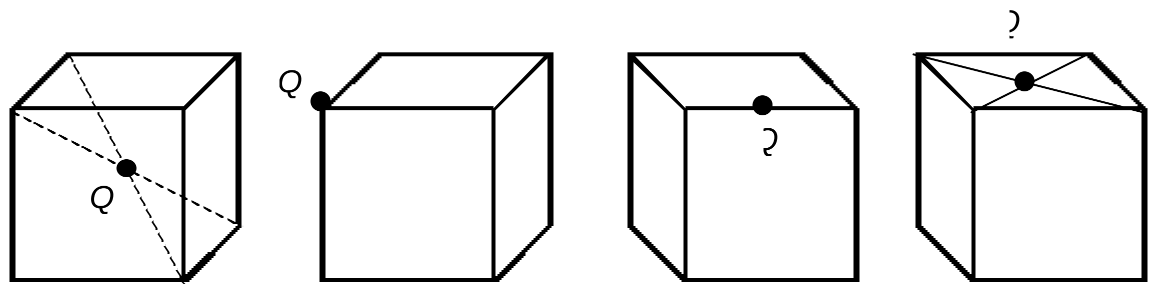
Aunque la integral sobre S_H puede ser difícil de calcular, su resultado se obtiene fácilmente usando la igualdad anterior cuyo segundo miembro es de fácil solución. En efecto :

$$\int_{S_p} \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int_{S_p} E\, dA \cos(\pi - \alpha) = -E\cos\alpha \int_{S_p} dA = -E\cos\alpha \bullet \pi R^2 ,$$

luego :

$$\phi_H = E\pi R^2 \cos\alpha \quad .$$

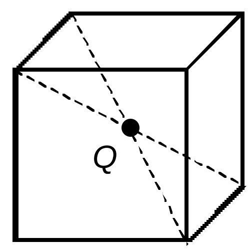
PROBLEMA 21. Determinar el flujo del campo eléctrico a través de las caras de un cubo de arista a , si se coloca una carga Q en las posiciones que se indica en la figura.



(a) (b) (c) (d)

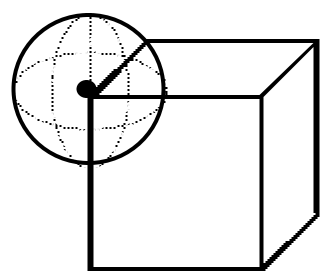
<u>SOLUCIÓN</u>

Caso (a): De acuerdo a la ley de Gauss, el flujo a través de una superficie cerrada, cualquiera que sea su forma, es igual a $\dfrac{q_n}{e_0}$, donde q_n es la carga neta encerrada por la superficie.



En este caso : $$f_a = \frac{Q}{e_0}.$$

Caso (b): En este caso Q es una carga puntual ubicada justo en el vértice del cubo. Considerando una superficie gaussiana esférica con centro en la carga, podemos apreciar que el cubo contiene a un octante de la esfera.



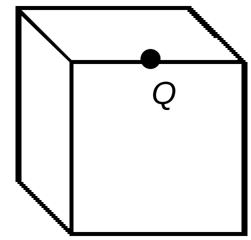
El flujo a través de la superficie esférica es $f_a = \dfrac{Q}{e_0}$; por lo tanto el flujo a través del octante de esfera, que es igual al flujo a través de las caras del cubo, es :

$$f_b = \frac{f_a}{8} = \frac{Q}{8e_0}.$$

Observe que este es un caso de mucha simetría. El flujo a través de las caras del cubo que convergen en el vértice en que se encuentra la carga es cero, y el flujo a través del octante se reparte en las 3 caras restantes en partes iguales, es decir, el flujo a través de cada una de las caras restantes es :

$$\frac{1}{3} \bullet f_b = \frac{1}{24} \bullet \frac{Q}{e_0} .$$

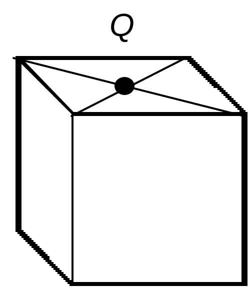
Caso (c): En este caso la carga Q está ubicada en el punto medio de una arista. Considerando nuevamente una superficie gaussiana esférica con centro en la carga Q, advertimos que el cubo contiene la cuarta parte de la superficie esférica, por lo tanto el flujo a través del cubo corresponde a 1/4 del flujo total, es decir :



$$f_c = \frac{1}{4} \bullet \frac{Q}{e_0} \ .$$

En este caso no existe simetría así que no es fácil determinar el flujo a través de cada cara. Sólo podemos asegurar que el flujo a través de las caras que tienen como arista común aquella que contiene la carga es cero.

Caso (d): En este caso la carga Q está ubicada en el punto de intersección de las diagonales de una cara. Haciendo las mismas consideraciones que en los casos anteriores, nos damos cuenta que el cubo contiene la mitad de una superficie gaussiana esférica, por lo tanto el flujo a través del cubo corresponde a la mitad del flujo a través de la superficie esférica, es decir :



$$f_d = \frac{1}{2} \bullet \frac{Q}{e_0} \ .$$

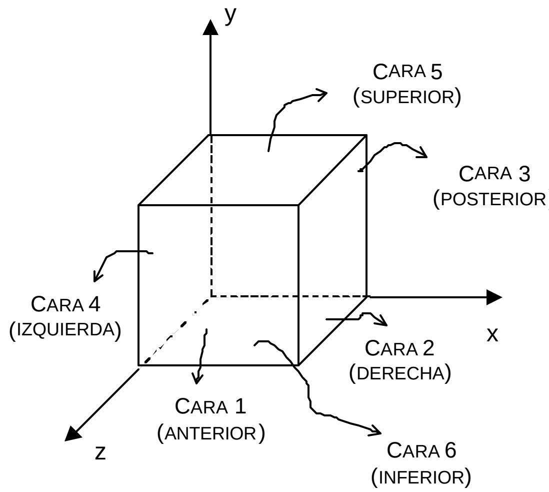
Observamos también aquí, que el flujo a través de la cara en que se encuentra la carga es cero. Tampoco existe en este caso, condiciones de simetría que permitan calcular fácilmente el flujo a través de cada una de las caras restantes del cubo.

PROBLEMA 22. La intensidad de un campo eléctrico está dada por $\vec{E} = e\,\hat{i}$, donde e es una constante.

(a) Calcular la carga neta encerrada por un cubo de arista a, ubicado como se muestra en la figura.

(b) Repetir el problema para $\vec{E} = b\,x\,\hat{i}$, si b es una constante y x es una de las coordenadas.

SOLUCIÓN



$$f_E = \oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q_{neta}}{e_0}$$

(a) Puesto que $\vec{E} \perp d\vec{A}$ en las caras 1, 3, 5 y 6, el flujo sobre cada una de ellas es nulo. Entonces;

$$f_E = \underbrace{\int_{cara\,2} \vec{E} \bullet d\vec{A}}_{e \bullet A} + \underbrace{\int_{cara\,4} \vec{E} \bullet d\vec{A}}_{-e \bullet A}$$

$f_E = e \bullet A - e \bullet A = 0$, siendo A el área de cada cara del cubo.

$$f_E = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_{neta} = 0 .$$

(b) La situación es similar al caso anterior. Puesto que $\vec{E} \perp d\vec{A}$ en las caras 1, 3, 5 y 6 ; en cada una de ellas :

$$\int \vec{E} \bullet d\vec{A} = 0 \ .$$

Además, en la cara 4 : $\int_{cara\ 4} \vec{E} \bullet d\vec{A} = 0$, ya que $E = 0$ para $x = 0$.

Entonces,

$$f_E = \int_{cara\ 2} \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int E\, dA = E \int dA = E a^2 = b a \bullet a^2 = b\, a^3 \ ,$$

siendo a el lado del cubo.

$$f_E = b\, a^3 \qquad \Rightarrow \qquad q_{neta} = e_0\, b\, a^3 .$$

PROBLEMA 23. Una esfera de radio R y carga Q tiene densidad cúbica de carga $r = Ar^2$, siendo r la distancia desde un punto de la esfera hasta el centro y A una constante. Determinar la intensidad del campo eléctrico en un punto interior de la esfera.

SOLUCIÓN

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{e_0} \quad ,$$

siendo S una superficie gaussiana esférica de radio $r < R$ y q_{neta} la carga encerrada por esa superficie.

$$\int_S E_r \, dS = \frac{1}{e_0} \int_0^r r(r) dV$$

$$\int_S E_r \, dS = \frac{1}{e_0} \int_0^r A r^2 \, 4p \, r^2 \, dr$$

$$E_r \int dS = \frac{4p A}{e_0} \int_0^r r^4 \, dr$$

$$E_r \, 4p \, r^2 = \frac{4p A}{e_0} \frac{r^5}{5}$$

Notar que evaluando el lado derecho de la ecuación anterior, en $r = R$, se obtiene la carga Q de la esfera dividida por e_0. Entonces ;

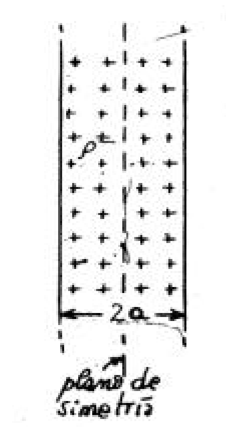
$$E_r = \frac{A}{5e_0} r^3 \quad , \qquad \text{para } r < R \, .$$

$$Q = \frac{4p A R^5}{5} \, .$$

Finalmente, expresando E_r en términos de Q, se obtiene :

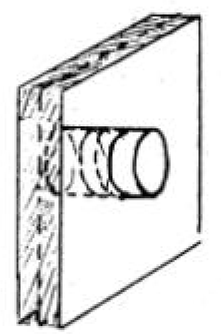
$$E_r = \frac{Q}{4p \, e_0 R^5} \bullet r^3 \, , \quad \text{para } r < R \, .$$

PROBLEMA 24. Calcular el campo eléctrico producido por una placa infinita de espesor $2a$, con densidad uniforme $+r$.



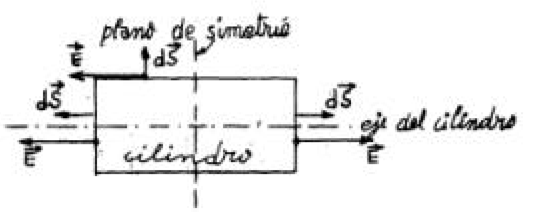
SOLUCIÓN

Observe la simetría del problema con respecto al plano que pasa por el centro de la placa. Se puede deducir, en primer lugar, que el campo eléctrico deberá ser perpendicular al plano de simetría (ya que la placa es infinita) y, además, alejándose de dicho plano (puesto que la carga es positiva).



También, la magnitud del campo eléctrico deberá ser la misma para todos los puntos equidistantes del plano de simetría.

En consecuencia, podemos aplicar la ley de Gauss a alguna superficie cerrada conveniente; por ejemplo, un cilindro recto cuyo eje sea perpendicular al plano de simetría y cuyas bases equidisten de tal plano.



Entonces, el flujo del campo eléctrico, a través del cilindro, es :

$$\Phi_E = \oint_{\text{cilindro}} \vec{E}\bullet d\vec{S} = \int_{\substack{\text{manto}\\ \text{cilíndrico}}} \vec{E}\bullet d\vec{S} + \int_{\substack{\text{tapa}\\ \text{izquierda}}} \vec{E}\bullet d\vec{S} + \int_{\substack{\text{tapa}\\ \text{derecha}}} \vec{E}\bullet d\vec{S}$$

El flujo a través del manto cilíndrico es cero, porque $\vec{E}$ es perpendicular a $d\vec{S}$. Por otra parte, en las tapas, $\vec{E}$ es paralelo a $d\vec{S}$, por tanto :

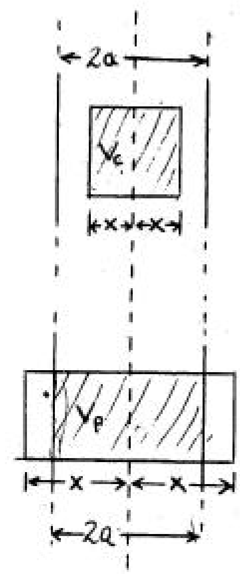
$$\Phi_E = \int_{tizq.} EdS\cos 0^0 + \int_{tder.} EdS\cos 0^0$$

Ambos flujos son positivos pues el vector $\vec{E}$ sale por las dos tapas. Como $\|\vec{E}\|$ es constante para todos los puntos de cada tapa :

$$\Phi_E = E \bullet S + ES = 2E \bullet S\ ,$$

donde S es el área de cada tapa y E es la magnitud del campo eléctrico en cualquier punto de cada tapa.

Por otra parte, usando la ley de Gauss, el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada debe ser igual a la carga encerrada en dicha superficie. La carga encerrada por nuestro cilindro dependerá de su tamaño, y de si sus tapas caen dentro o fuera de la placa. En consecuencia, debemos distinguir dos casos:



(a) cilindro dentro de la placa

$$q_{enc.} = r \bullet V_c\ ,$$

donde V_c es el volumen del cilindro

$$q_{enc.} = r \bullet S \bullet 2x$$

(b) cilindro sobresale de la placa

$$q_{enc.} = r \bullet V_p\ ,$$

donde V_p es el volumen del cilindro que cae en el interior de la placa, pues sólo en esa región hay carga.

$$q_{enc.} = r \bullet S \bullet 2a\ .$$

Igualando el flujo a la carga encerrada, en cada caso obtendremos la magnitud del campo eléctrico en puntos dentro y fuera de la placa.

(a) campo eléctrico dentro de la placa :

$$\Phi_E = \frac{q_{enc.}}{e_0}$$

$$2E \bullet S = \frac{1}{e_0} r\, S \bullet 2x$$

$$E = \frac{r}{e_0} \bullet x$$

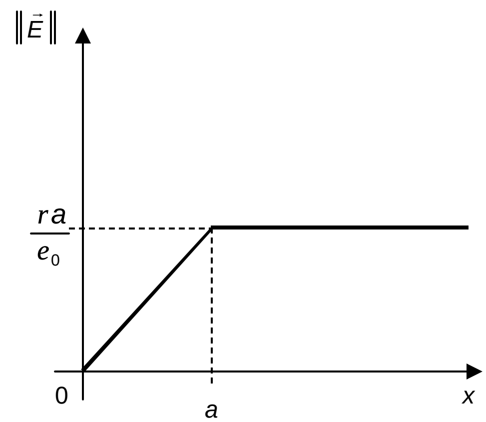
(b) campo eléctrico fuera de la placa :

$$\Phi_E = \frac{q'_{enc.}}{e_0}$$

$$2E \bullet S = \frac{1}{e_0} r\, S \bullet 2a$$

$$E = \frac{r\, a}{e_0} = \text{constante}$$

En el gráfico adjunto se representa la magnitud del campo eléctrico en función de la distancia al plano de simetría. Observe que fuera de la placa el campo eléctrico es idéntico al de un plano infinito con densidad superficial $2a\, r$.

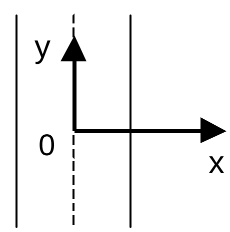


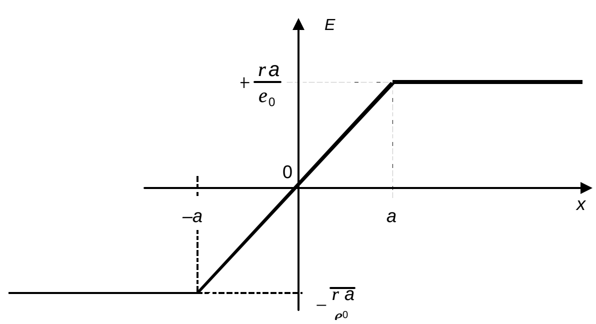
Podemos escribir una expresión vectorial para $\vec{E}$, utilizando un sistema de referencia con el origen en el plano de simetría, y el eje x perpendicular a tal plano. En tal sistema :

$$\vec{E} = E_x \bullet \hat{i}$$

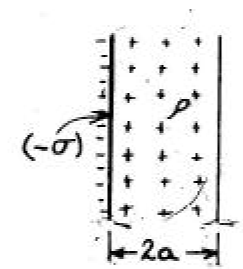
con

$$E_x = \begin{cases} +r \bullet a/e_0 & ; \quad x \geq +a \\ (r/e_0)\, x & ; \quad -a \leq x \leq +a \\ -r \bullet a/e_0 & ; \quad x \leq -a \end{cases}$$



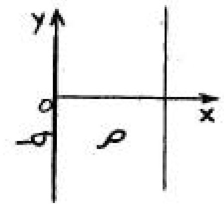


PROBLEMA 25. Calcular el campo eléctrico producido por una placa infinita de espesor $2a$ con densidad uniforme de carga $+r$, adosada a un plano infinito con densidad superficial $(-s)$ uniforme.



SOLUCIÓN

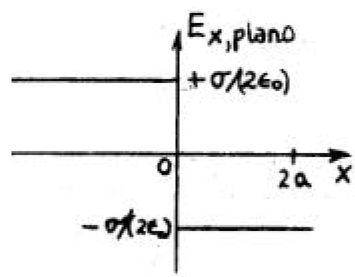
El campo que se desea calcular es igual a la superposición de los campos producidos por una placa y un plano respectivamente. Supondremos conocidos los resultados para el campo de una placa y de un plano (ver PROBLEMA 24), para concentrarnos en la superposición.



Usaremos un sistema de referencia con origen en el plano $(-s)$ y con el eje x perpendicular al plano. El vector campo eléctrico para cada distribución aislada, puede escribirse, en este sistema, como :

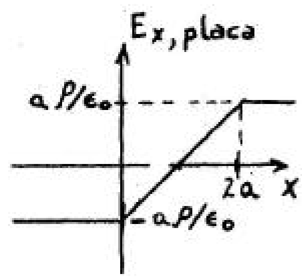
$$\vec{E}_{plano} = E_{xplano} \bullet \hat{i} \quad ,$$

donde
$$E_{xplano} = \begin{cases} -\dfrac{s}{2e_0} & ; \quad x \geq 0 \\ +\dfrac{s}{2e_0} & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$



$$\vec{E}_{placa} = E_{x,placa} \bullet \hat{i} \, ,$$

donde
$$E_{xplaca} = \begin{cases} +\dfrac{a\,r}{e_0} & ; \quad x \geq 2a \\ \dfrac{r}{e_0}(x-a) & ; \quad 0 \leq x \leq 2a \\ -\dfrac{a\,r}{e_0} & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

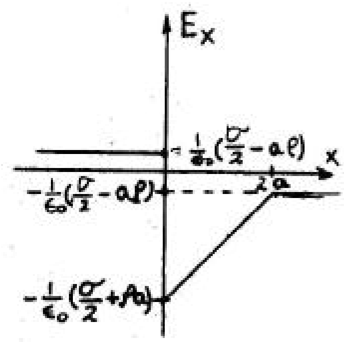


Entonces, el campo resultante, producido por ambas distribuciones:

$$\vec{E} = \vec{E}_{plano} + \vec{E}_{placa} = \left(E_{xplano} + E_{xplaca} \right) \bullet \hat{i}$$

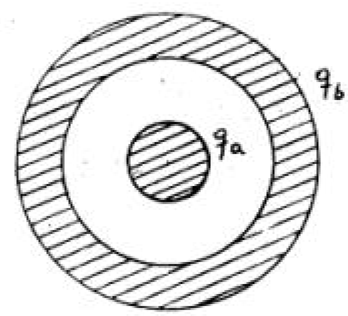
$$\vec{E} = E_x \hat{i}$$

con $$E_x = \begin{cases} -\dfrac{s}{2e_0} + \dfrac{a\,r}{e_0} & ; \quad x \geq 2a \\ -\dfrac{s}{2e_0} + \dfrac{r}{e_0}(x-a) & ; \quad 0 \leq x \leq 2a \\ +\dfrac{s}{2e_0} - \dfrac{a\,r}{e_0} & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$



Repita el problema con r y s de igual signo. Discuta todas las alternativas.

PROBLEMA 26. La configuración mostrada en la figura consta de dos esferas. La esfera maciza es conductora, tiene radio R y una carga en exceso q_a. La esfera hueca tiene radio interior $2R$, radio exterior $3R$, también es conductora y tiene una carga en exceso q_b. Determinar cómo se distribuye q_b entre las superficies interna y externa de la esfera hueca.



SOLUCIÓN

Tratándose de conductores, las cargas deben estar en las superficies, luego toda la carga q_a debe estar en la superficie de la esfera maciza, con una densidad superficial de valor q_a / pR^2.

Puesto que $\vec{E} = 0$ en el interior de un conductor, entonces el flujo eléctrico a través de una superficie gaussiana que sea esférica de radio r, con $2R < r < 3R$, debe valer cero. Si r es sólo ligeramente mayor que $2R$, la superficie gaussiana servirá para determinar la carga en la superficie interna de la esfera hueca, de la siguiente manera :

$$f = \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = 0 \quad ,$$

ya que $\vec{E} = 0$ en todos los puntos de la superficie gaussiana S de radio r es un poco mayor que $2R$.

Puesto que :

$$f = \frac{q_{neta}}{e_0} \ ,$$

entonces $q_{neta} = 0$, pero $q_{neta} = q_a + q_i$, donde q_i es la carga en la superficie interior de la esfera hueca; en consecuencia $q_i = -q_a$.

Si q_e es la carga en la superficie externa de la esfera hueca, entonces por conservación de la carga y considerando el resultado anterior debe cumplirse que :

$$q_b = q_i + q_e = -q_a + q_e \ ,$$

luego :

$$q_e = q_a + q_b .$$

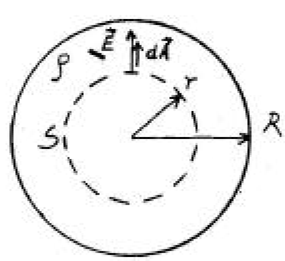
PROBLEMA 27. Una esfera aisladora sólida tiene una densidad de carga (por unidad de volumen) constante r .

(a) Determinar el campo eléctrico en un punto interior de la esfera.

(b) Si la esfera tiene una cavidad esférica excéntrica, encontrar el campo eléctrico en un punto cualquiera de la cavidad.

SOLUCIÓN

(a)



Tomando una superficie gaussiana de radio r , según la figura, y aplicando la ley de Gauss, basándonos en la simetría esférica de la situación, se tendrá :

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q_{neta}}{e_0} \ ,$$

donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico en los puntos de la superficie S y q_{neta} es la carga neta encerrada por dicha superficie. Evidentemente (por simetría) $\vec{E}$ es radial y tendrá la misma magnitud en todos los puntos de S.

Entonces :

$$\oint_S E \bullet dA = \frac{1}{e_0} \int r \, dV$$

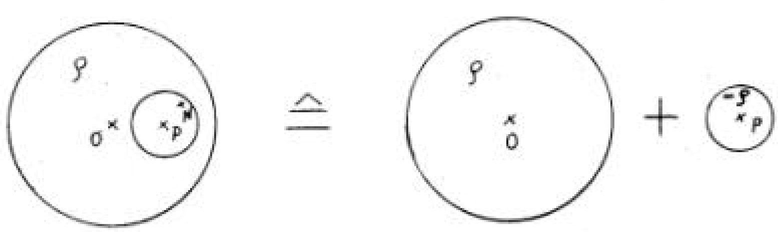
$$E \oint_S dA = \frac{r}{e_0} \int_V dV$$

$$E \bullet \cancel{4p} \; \cancel{r^2} = \frac{r}{e_0} \bullet \frac{\cancel{4p} \, r^{\cancel{3}}}{3}$$

Luego, $E = \dfrac{r\,r}{3e_0}$, y puesto que $\vec{E}$ es radial ; entonces :

$$\vec{E} = \frac{r\,\vec{r}}{3e_0} \qquad ; \qquad \text{con} \qquad r \leq R \,.$$

(b) Usando superposición puede hacerse la siguiente equivalencia para la esfera con su cavidad:



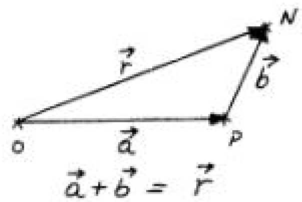
Si N es un punto cualquiera en la cavidad, entonces el campo eléctrico en N, de acuerdo a la superposición anterior es :

$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_{-r} \,.$$

De acuerdo a la parte (a) las expresiones de $\vec{E}_r$ y $\vec{E}_{-r}$ son :

$$\vec{E}_r = \frac{r\,\vec{r}}{3e_0} \qquad \text{y}$$

$$\vec{E}_{-r} = \frac{(-r)\,\vec{b}}{3e_0}$$

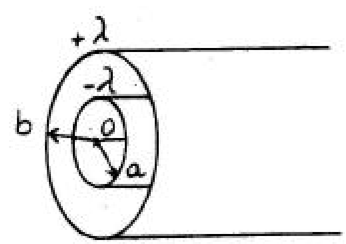


Usando la igualdad vectorial $\vec{a}+\vec{b}=\vec{r}$; tenemos :

$$\vec{E} = \frac{r\,\vec{r}}{3e_0} - \frac{r\left(\vec{r}-\vec{a}\right)}{3e_0} = \frac{r\,\vec{a}}{3e_0} \ .$$

Nótese que en el interior de la cavidad $\vec{E}$ es uniforme, independientemente del radio de la cavidad. Dibuje las líneas de fuerza en el interior de la cavidad.

PROBLEMA 28. Dos cilindros coaxiales largos, tienen cargas de igual magnitud y diferente signo. Ambos son conductores y poseen densidades lineales de carga $+l$ y $-l$, según se muestra en la figura.



Calcular, usando la ley de Gauss, la intensidad del campo eléctrico en las regiones caracterizadas por $r < a$; $a < r < b$ y $r > b$, siendo r la distancia al eje.

<u>SOLUCIÓN</u>

Se considerará que los cilindros son muy largos (infinitos) para evitar los efectos en los extremos. La situación tiene simetría en torno al eje de los cilindros, argumento que se usará al aplicar la ley de Gauss.

(a) Si $r < a$; la ley de Gauss : $\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q_{neta}}{e_0}$ aplicada usando una superficie de radio menor que a, permite concluir que :

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = 0 \quad ,$$

ya que q_{neta} encerrada por la superficie S es cero. Lo anterior es válido tanto si el cilindro interior es hueco, como si él es conductor, ya que en este último caso toda la carga estará en su superficie $(r = a)$.

La simetría de la situación permite afirmar que $\vec{E}$ es radial y de igual magnitud en todos los puntos que estén a una misma distancia del eje de simetría (eje de los cilindros); por lo tanto :

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int_{tapas} \vec{E} \bullet d\vec{A} + \int_{manto} \vec{E} \bullet d\vec{A} = 0 + \int_{manto} E \bullet dA = E \int_{manto} dA$$
$$= E \bullet 2p r \bullet L$$

donde $\int_{tapas} \vec{E} \bullet d\vec{A} = 0$ ya que $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ son perpendiculares

y $\int_{manto} \vec{E} \bullet d\vec{A} = E \bullet 2p\, r\, L$, siendo E la magnitud del campo eléctrico en los puntos del manto de la superficie gaussiana cilíndrica de radio $r\,(r < a)$ y largo L.

En consecuencia tenemos :

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = 0 \qquad \text{(al aplicar la ley de Gauss)}$$

y

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = E \bullet 2p\, r\, L \qquad \text{(al hacer el cálculo directamente)}$$

De modo que debe cumplirse:

$$E \bullet 2p\, r\, L = 0 \quad ,$$

lo que implica finalmente :

$$\vec{E} = 0 \qquad \text{si } r < a .$$

(b) Si $a < r < b$, entonces aplicando la ley de Gauss y las consideraciones de simetría, tenemos :

$$\oint_{S'} \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{tapas} \vec{E} \bullet d\vec{A} + \int_{manto} \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

$$0 + \int_{manto} \vec{E}\, dA = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

$$0 + E \int_{manto} dA = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

$$E \bullet 2\pi\, r\, L = -\frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

o $E = \dfrac{-\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0\, r}$ o $\vec{E} = \dfrac{-\lambda\, \hat{r}}{2\pi\,\varepsilon_0\, r}$.

Evidentemente, en todo lo anterior se usó nuevamente una superficie gaussiana cilíndrica, llamada ahora S' y de radio r con $a < r < b$.

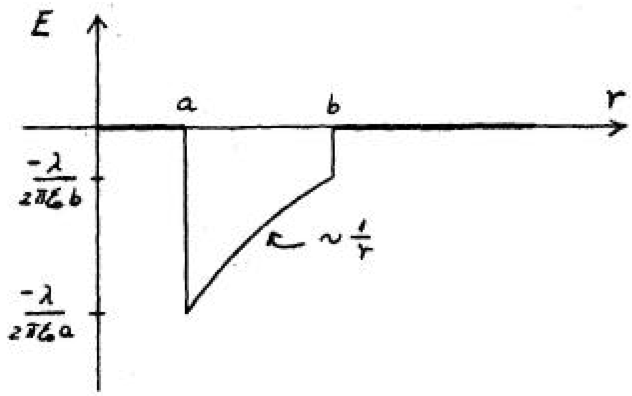
(c) Si $r > b$, no habrá carga neta encerrada en una superficie gaussiana cilíndrica de radio r, con $r > b$, ya que las densidades lineales de carga en los cilindros son de igual valor absoluto y distinto signo.

Repitiendo el razonamiento empleado para $r < a$, se llegará finalmente a la conclusión que $\vec{E} = 0$ para $r > b$.

En resumen:

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & ; \quad r < a \\ -\dfrac{\lambda\, \hat{r}}{2\pi\,\varepsilon_0\, r} & ; \quad a \le r \le b \\ \vec{0} & ; \quad r > b \end{cases}$$

Gráficamente, usando : $\vec{E} = E \bullet \hat{r}$.



Nótese que $\vec{E}$ tiene discontinuidades en $r = a$ y $r = b$.