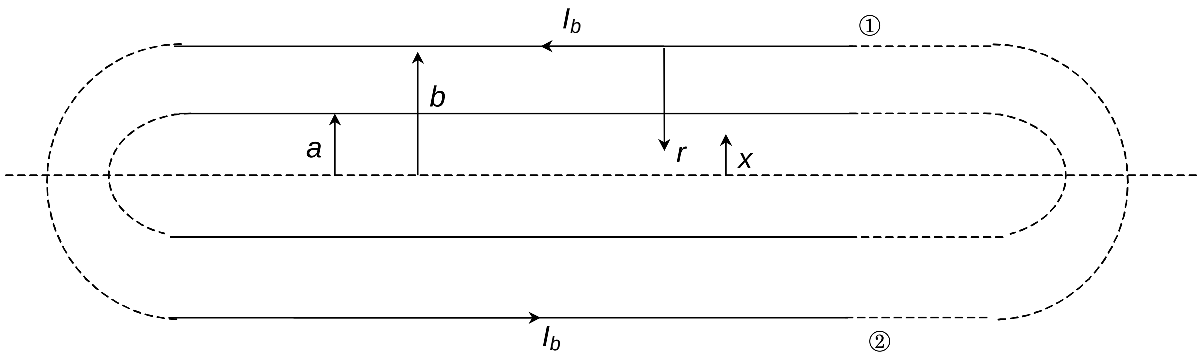
12. INDUCTANCIAS

PROBLEMA 79. Dos espiras coplanares están formadas por alambres rectos muy largos, como se muestra en la figura. Determinar la inductancia mutua por unidad de longitud entre ellas.



SOLUCIÓN

Calcularemos $M = \dfrac{\phi_{ab}}{I_b}$, donde ϕ_{ab} es el flujo a través de la espira más pequeña, debido a la corriente I_b en la espira más grande.

Se calculará ϕ_{ab} como la suma del flujo debido a la corriente en el alambre superior ① más el flujo debido a la corriente en el alambre inferior ②. Por razones de simetría, ambos son iguales; por tanto :

$$\phi_{ab} = 2\int_{S_A} B \bullet d S_A$$

donde $B = \dfrac{\mu_0 \bullet I_b}{2\pi r}$ es el campo magnético producido por un alambre rectilíneo a distancia r del alambre, y S_A es la superficie de la espira más pequeña, de largo L .

Luego :

$$\phi_{ab} = \int_{b-a}^{b+a} \cancel{2} \bullet \frac{\mu_0 I_b}{\cancel{2}\pi r} \bullet L\, dr$$

$$\phi_{ab} = \frac{\mu_0 I_b L}{\pi} \bullet \ln\left(\frac{b+a}{b-a}\right)$$

Finalmente, $$M_{ab} = \frac{\mu_0 L}{\pi} \bullet \ln\left(\frac{b+a}{b-a}\right) .$$

Otro método para calcular ϕ_{ab} consiste en escribir el campo magnético en un punto del plano de la espira más pequeña, y luego integrar sobre el área de la espira.

Entonces,

$$B_T = \frac{\mu_0 I_b}{2\pi(b-x)} + \frac{\mu_0 I_b}{2\pi(b+x)} .$$

Luego : $$\phi_{ab} = \int_{-a}^{a} \frac{\mu_0 I_b}{2\pi} \left(\frac{1}{b-x} + \frac{1}{b+x}\right) L\, dx .$$

Puesto que el integrando es función par de x, puede integrarse entre los límites 0 y a, y multiplicarse el resultado por dos para obtener ϕ_{ab} .

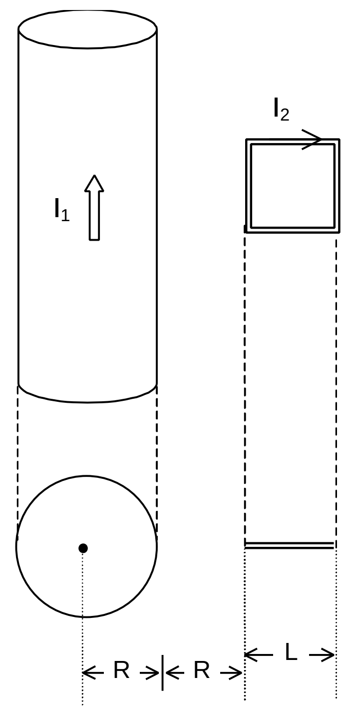
$$\phi_{ab} = \frac{\mu_0 I_b L}{\pi} \int_{0}^{a} \left(\frac{1}{b-x} + \frac{1}{b+x}\right) dx$$

$$\phi_{ab} = \frac{\mu_0 I_b L}{\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b-a}\right) .$$

Finalmente,

$$M_{ab} = \frac{\mu_0 L}{\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b-a}\right) .$$

PROBLEMA 80. Un conductor cilíndrico muy largo y de radio R, lleva una corriente I_1 distribuida uniformemente en su sección transversal. Cerca del cilindro se encuentra una espira cuadrada de lado L, hecha de alambre muy delgado, colocada en un plano radial a distancia 2R del eje, como se indica en la figura adjunta.



(a) Calcular la inductancia mutua entre el cilindro y la espira.

(b) Calcular la fuerza electromotriz inducida en la espira cuando I_1 depende del tiempo según: $I_1(t) = I \operatorname{sen} \omega t$.

SOLUCIÓN

(a) Se debe calcular el flujo magnético sobre la espira, debido a la corriente que circula por el cilindro. El campo magnético producido por el cilindro se obtiene a partir de la ley de Ampere, y su magnitud en la región que se encuentra la espira es :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \ .$$

Puesto que el campo magnético producido por el cilindro es perpendicular al plano de la espira, el flujo magnético sobre ella es :

$$\phi_2 = \int B\, dA = \int_{2R}^{2R+L} B(r) \bullet L dr = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln\left(\frac{2R+L}{2R} \right) \ .$$

La inductancia mutua entre el cilindro y la espira puede calcularse como :

$$M = \frac{\phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{L}{2R} \right) \ .$$

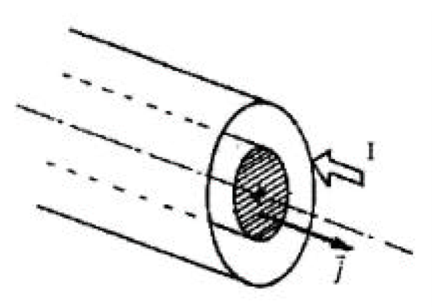
(b) La fuerza electromotriz ε inducida en la espira está dada por :

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_2}{dt} = -\frac{d\phi_2}{dI_1} \bullet \frac{dI_1}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} = -MI\omega\cos\omega t$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 L I \omega}{2\pi}\ln\left(1+\frac{L}{2R}\right)\cos\omega t \quad .$$

Note que el concepto de inductancia mutua está presente en la mayoría de los problemas de inducción magnética, aunque no se emplea explícitamente con su nombre en el capítulo respectivo.

PROBLEMA 81. Un cable coaxial muy largo formado por un conductor interior cilíndrico macizo de radio R_1 y un cilindro hueco, de pared muy delgada y radio R_2, lleva corriente como se muestra en la figura. La corriente I circula por el conductor interior con densidad $\vec{j}$ constante en la dirección indicada, y regresa distribuida uniformemente por el conductor externo.

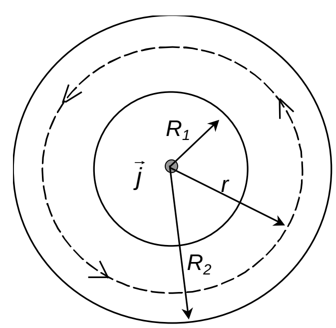


(a) Determinar la razón entre la energía magnética almacenada en el conductor macizo y la energía magnética almacenada en el resto del espacio, para $R_2 = e\,R_1$ con $e = 2{,}718\ldots$

(b) Determinar la inductancia por unidad de longitud del cable coaxial.

SOLUCIÓN

La simetría axial del problema indica que las líneas de campo magnético $\vec{B}$ son círculos concéntricos con el eje del cilindro. Elegiremos como trayectorias de integración círculos concéntricos, de modo que :



$$\Lambda = \oint_{circunferencia} \vec{B}\bullet d\vec{\ell} = B \bullet 2\pi r$$

Por otra parte, de acuerdo a la ley de Ampere :

$$\Lambda = \mu_0 \, I_{\text{neta}} \; .$$

Luego,

$$B = \frac{\mu_0 \, I_{\text{neta}}}{2\pi r}$$

Distinguimos tres regiones :

(i) $r \le R_1$; $I_{\text{neta}} = j\,A = \dfrac{I}{\pi R_1^2} \bullet \pi r^2 = I \left(\dfrac{r}{R_1} \right)^2$

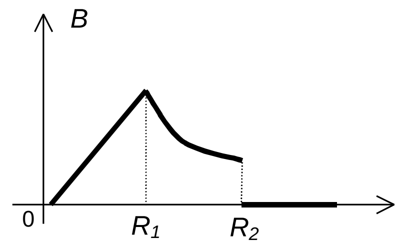
$$B = \frac{\mu_0 \, I}{2\pi R_1^2} \, r$$

(ii) $R_1 \le r < R_2$; $I_{\text{neta}} = I$

$$B = \frac{\mu_0 \, I}{2\pi r}$$

(iii) $r > R_2$; $I_{\text{neta}} = 0$

$$B = 0$$



En el gráfico se muestra B en función de r; observe la discontinuidad en $r = R_2$, debido a la presencia del cascarón de espesor cero que lleva corriente superficial. Además, note que el campo magnético está confinado a la región interior del cable coaxial $(r < R_2)$. La energía acumulada en el campo magnético está dada por :

$$U = \int_{\substack{\text{todo el} \\ \text{espacio}}} u_B \, dV \quad ; \quad \text{con } u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

La energía acumulada en un trozo de largo ℓ del conductor interior $(r \le R_1)$ es :

$$U_1 = \int_0^{R_1} \frac{B^2}{2\mu_0} \bullet \ell \bullet 2\pi r \, dr = \int_0^{R_1} \frac{\mu_0{}^2 I^2}{(2\pi)^2 R_1^4} r^2 \bullet \frac{\ell \, 2\pi r \, dr}{2\mu_0}$$

$$= \frac{\mu_0 \, I^2 \ell}{4\pi R_1^4} \, \frac{R_1^4}{4} = \frac{\mu_0 \, I^2 \ell}{16\pi}$$

La energía acumulada en el resto del espacio, corresponde a la energía acumulada entre R_1 y R_2 (ya que $B = 0$, para $r > R_2$).

$$U_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{B^2}{2\mu_0} \, dV$$

$$U_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\mu_0} \; \frac{\mu_0^2 \, I^2}{(2\pi)^2 r^2} \bullet 2\pi r \, dr = \frac{\mu_0 \, I^2 \, \ell}{4\pi} \; \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Puesto que $R_2 = e R_1$,

$$U_2 = \frac{\mu_0 \, I^2 \ell}{4\pi} \; \ln e = \frac{\mu_0 \, I^2 \, \ell}{4\pi} \; .$$

Luego la razón entre las energías almacenadas en el cilindro macizo y en el resto del espacio es :

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{4}}$$

La energía almacenada en un trozo de largo unitario se expresa como $\frac{1}{2} L \; I^2$, siendo L la inductancia por unidad de longitud.

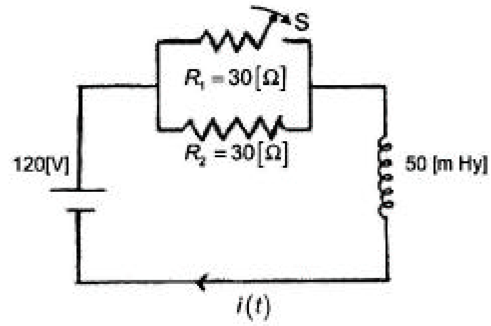
Puesto que la energía magnética almacenada en una longitud ℓ del cable coaxial es :

$$U = U_1 + U_2 = \frac{5}{16} \; \frac{\mu_0 \, I^2 \, \ell}{\pi}$$

Igualando, se obtiene : $$\left(\frac{1}{2} \, L \; I^2 \right) \ell = \frac{5}{16} \; \frac{\mu_0 \, I^2 \, \ell}{\pi}$$

$$\boxed{L = \frac{5}{8} \; \frac{\mu_0}{\pi}}$$

PROBLEMA 82. En el circuito de la figura, inicialmente el interruptor S está desconectado, y en el instante $t = 0$ se conecta.



(a) Determinar la corriente i en los instantes $t = 0$, justo antes de conectar S, y $t = \infty$, mucho después de haber conectado S.

(b) Obtener la expresión analítica para $i(t)$, con $0 \leq t < \infty$.

<u>**SOLUCIÓN**</u>

(a) Cuando el interruptor ha estado desconectado por largo tiempo, en el circuito *RL* existe una corriente dada por :

$$i(t \leq 0) = \frac{V}{R_2} = \frac{120}{30} = 4[A]$$

Al conectar *S*, quedan dos resistencias en paralelo, cuya resistencia equivalente es :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Longrightarrow \quad R_{eq} = 15[\Omega].$$

Mucho tiempo después de conectar el interruptor, la corriente en el circuito adquiere el valor constante :

$$i(t = \infty) = \frac{V}{R_{eq}} = 8[A] \ .$$

(b) En el circuito *RL* se cumple que :

$$V = i(t)R + L\ \frac{dI}{dt} \quad ,$$

y la solución de esta ecuación es de la forma $i(t) = i_0 + i_1\ e^{-t/_{L/R}}$, como usted puede verificarlo por sustitución. Dicha solución debe cumplir con los valores iniciales y finales de i, encontrados anteriormente .

Así, para $t = 0$, $i(0) = i_0 + i_1 = 4$ y para $t = \infty$, $i(\infty) = i_0 = 8$.

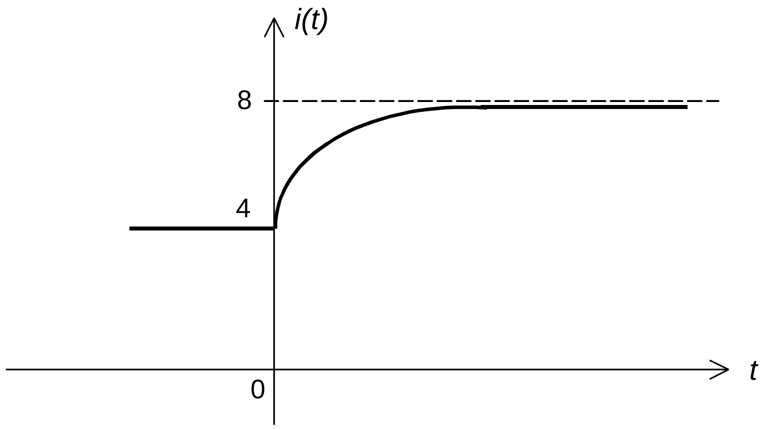
Entonces, $i_0 = 8[A]$ e $i_1 = -4[N]$.

Además,

$$\frac{L}{R} = \frac{50 \bullet 10^{-3}}{15} = \frac{1}{300}\ [s] \quad ,$$

Finalmente, $i(t) = 8 - 4 \bullet e^{-300t}\ [A]$.

El gráfico correspondiente a la expresión anterior es el siguiente :



Existe una manera alternativa de obtener la expresión encontrada anteriormente, sin resolver la ecuación diferencial, sabiendo solamente que el comportamiento es exponencial, con constante de tiempo $\tau = L/R$.

De la observación del gráfico, podemos advertir que :

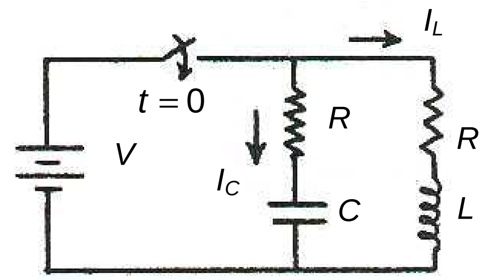
$i(t) = i(t=0) +$ una función que crece exponencialmente desde $i(t=0)$ hasta $i(t=\infty)$.

$$i(t) = i(0) + \left[i(\infty) - i(0)\right]\left(1 - e^{-t/_{L/R}}\right) = 4 + (8-4)\left(1 - e^{-300\,t}\right)$$

Finalmente ;

$$i(t) = 8 - 4e^{-300\,t}\,[A] \ .$$

PROBLEMA 83. En el circuito de la figura, los elementos tienen valores tales que $RC = L/R$. Considerar que el interruptor se cierra en el instante $t = 0$.



(a) Determinar el instante en que ambas resistencias disipan la misma potencia.

(b) Determinar la razón $(I_C + I_L)/I_C$ en el instante $t_1 = L/R$.

(c) Determinar la energía total disipada en las resistencias hasta $t_2 = 10RC$.

__SOLUCIÓN__

(a) Puesto que la potencia disipada en una resistencia está dada por el producto I^2R; siendo ambas resistencias iguales, el problema se reduce a determinar el instante en que $I_L = I_C$. Para ello se aplica la ley de voltajes de Kirchhoff a los dos caminos cerrados de los cuales forma parte la batería; obteniéndose :

$$V = I_C \bullet R + q_c / C \quad ; \qquad \text{con} \quad I_C = \frac{dq_c}{dt}$$

$$V = I_L \bullet R + L\,\frac{dI_L}{dt} \ .$$

Usando la variable q_C, en la primera ecuación, usted debe notar que ésta adquiere la misma forma algebraica de la segunda ecuación; es decir, basta resolver sólo una de las dos ecuaciones planteadas para conocer tanto I_L como I_C. Puede usar cualquier método matemático que conozca para resolver dicha ecuación. Sin embargo, es útil que sea capaz de escribir su solución sin necesidad de resolverla cada vez que la encuentre. En todo caso sus resultados deben ser :

$$I_C = \frac{V}{R} \bullet e^{-t/RC} \qquad \text{e} \qquad I_L = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/(L/R)}\right) .$$

Es necesario agregar que tanto al escribir las soluciones anteriores como al verificar que son efectivamente correctas, basta recordar que los circuitos RL y RC tienen un comportamiento exponencial al ser sometidos a una excitación continua y que, tanto una inductancia como un condensador, tienen comportamiento iniciales $(t=0)$ y finales $(t\to\infty)$ bien definidos en un circuito de corriente continua. Use estas ideas para verificar las soluciones dadas.

Para encontrar el instante en que $I_C = I_L$, tenemos :

$$\frac{V}{R}\bullet e^{-t/RC} = \frac{V}{R}\left(1-e^{-t/(L/R)}\right)$$

$$e^{-t/RC} + e^{-t/(L/R)} = 1$$

Dado que $RC = L/R$, lo anterior se reduce a :

$$2e^{-t/RC} = 1$$

Luego ; $t = RC\ln 2 = \dfrac{L}{R}\ln 2$.

(b) $I_C + I_L = \dfrac{V}{R}\left(e^{-t/RC} + 1 - e^{-t/(L/R)}\right) = \dfrac{V}{R}$

$$\frac{I_C + I_L}{I_C} = \frac{\frac{V}{R}}{\frac{V}{R}e^{-t/RC}} = e^{t/RC}$$

Al evaluar en el instante $t_1 = L/R$ y usando la igualdad $RC = L/R$ tenemos :

$$\frac{I_C + I_L}{I_C} = e$$

(c) La energía total disipada en las resistencias hasta $t_2 = 10\,RC$ es :

$$W = \int_0^{t_2} I_L^2\, R\, dt + \int_0^{t_2} I_C^2\, R\, dt$$

$$W = \frac{V^2}{R}\int_0^{t_2}\left(1 + e^{-2t/(L/R)} - 2e^{-t/(L/R)} + e^{-2t/RC}\right)dt$$

Integrando y usando las condiciones $RC = L/R$ y $t_2 = 10\,RC$, se obtiene :

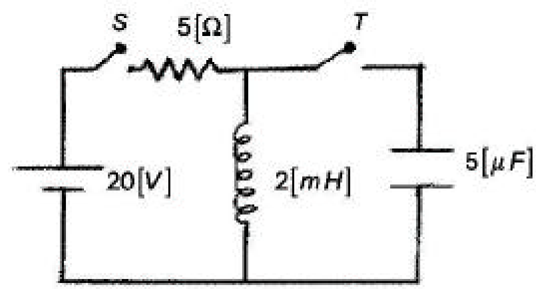
$$W = \frac{V^2}{R}\left[10\,RC + 2\bullet \left.\frac{e^{-2t/RC}}{(-2/RC)}\right|_0^{10RC} - 2\bullet \left.\frac{e^{-t/RC}}{(-1/RC)}\right|_0^{10RC}\right]$$

$$W = \frac{V^2}{R}\left[10RC - RC\,e^{-20} + RC + 2RC\,e^{-10} - 2RC\right] = CV^2\left[9 + 2e^{-10} - e^{-20}\right]$$

Considerando que $e^{-10} \ll 1$; se obtiene el resultado aproximado:

$$W = 9CV^2 \ .$$

PROBLEMA 84. En el circuito de la figura los interruptores S y T están inicialmente desconectados y el condensador está descargado. Luego, en $t = 0[s]$, se conecta S. A continuación, en $t = t_0\ [s]$, simultáneamente se desconecta S y se conecta T .



Determinar el valor de t_0, de modo que la carga en el capacitador tenga como valor máximo $Q = 0{,}20\,[mC]$.

SOLUCIÓN

Al conectar S, circula corriente en el circuito RL , y al cabo de $t_0\,[s]$ se ha disipado cierta cantidad de energía en la resistencia y se ha almacenado energía en la inductancia.

La inductancia adquiere su energía máxima en el instante t_0 , y su valor es :

$$U_{\text{máx}} = \frac{1}{2} L\, I_0^2$$

siendo I_0 la corriente que circula por la inductancia en ese instante.

Al desconectar S y conectar T simultáneamente en el instante t_0 , se activa el circuito LC que comenzará a oscilar. La energía almacenada en la inductancia se habrá transferido totalmente al capacitor cuando éste tenga su carga máxima, dada por la expresión :

$$U_{\text{máx}} = \frac{Q_{\text{máx}}^2}{2C} \quad .$$

El valor numérico de I_0 se obtiene igualando las ecuaciones anteriores, como se indica a continuación :

$$\frac{1}{2} L\, I_0^2 = \frac{Q_{\text{máx}}^2}{2C} \qquad \Rightarrow \qquad I_0^2 = \frac{Q_{\text{máx}}^2}{LC} \qquad \Rightarrow \qquad I_0 = \frac{Q_{\text{máx}}}{\sqrt{LC}}$$

$$I_0 = \frac{0{,}2 \bullet 10^{-3}}{\sqrt{2 \bullet 10^{-3} \bullet 5 \bullet 10^{-6}}} = 2{,}0\ [A]$$

Mientras S está conectado se activa el circuito RL , para el cual la ley de voltaje de Kirchhoff conduce a la ecuación :

$$V = R\,I + L\,\frac{dI}{dt} \quad .$$

La solución correspondiente es :

$$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/_{L/R}}\right) .$$

Para calcular el instante t_0 , en que la corriente es de valor I_0, introducimos $I_0 = 2{,}0[A]$ y $L/R = 1/2500\ [s]$ en la expresión para $I(t)$. Por lo tanto,

$$2 = \frac{20}{5}\left(1 - e^{-2500\,t_0}\right)$$

$$e^{-2500\,t_0} = \frac{1}{2}$$

$$2500\,t_0 = \ln 2$$

$$t_0 = 2{,}8 \bullet 10^{-4}\,[s] \ .$$