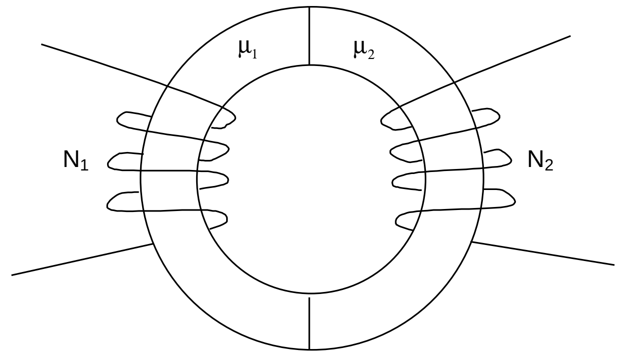
13. CIRCUITOS MAGNÉTICOS

PROBLEMA 85. El núcleo de un anillo toroidal, de radio medio R y sección transversal de área A, está hecho de dos piezas de igual forma, con permeabilidades magnéticas constantes μ_1 y μ_2 respectivamente, ambas mucho mayores que μ_0. Dos bobinas de N_1 y N_2 vueltas están enrolladas, una en cada una de las piezas del núcleo.



Considere que en la bobina de N_1 vueltas circula una corriente continua de intensidad I_1 y los datos siguientes : $\mu_1 = 500\mu_0$; $\mu_2 = 750\mu_0$; $N_1 = N$ y $N_2 = 4N$

(a) Calcular el flujo magnético sobre una sección transversal del anillo.

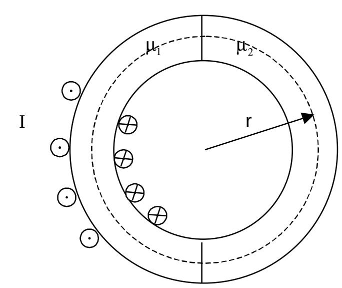
(b) Determinar el coeficiente de inducción mutua entre las bobinas.

(c) Determinar la energía magnética almacenada en el sistema.

SOLUCIÓN

(a) Aplicando la ley de Ampere a una trayectoria circular de radio r, por el interior del anillo, tenemos que :

$$H_1 \bullet \pi r + H_2 \bullet \pi r = N_1 I_1 \ .$$



Por continuidad de $\vec{B}$, que es perpendicular a la superficie que separa ambos medios, tenemos que:

$$B = \mu_1 H_1 = \mu_2 H_2 \ .$$

Entonces,

$$B\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) \bullet \pi r = N_1 I_1 \ .$$

Puesto que B depende de r, al calcular el flujo sobre una sección transversal se requiere hacer una integral; sin embargo, se acostumbra hacer un cálculo aproximado usando el radio medio mencionado en el enunciado. Luego;

$$\phi = \bar{B} \bullet A = \frac{N_1 A I_1}{\pi R\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)} = \frac{300\mu_0 N I_1 A}{\pi R} \quad .$$

(b) Para calcular el coeficiente de inducción mutua entre las bobinas, basta calcular el flujo ϕ_2 enlazado por las N_2 espiras de la bobina 2, cuando circula la corriente I_1 por la bobina 1. Puesto que $\phi_2 = N_2\,\phi$, el coeficiente de inducción mutua es :

$$M = \frac{\phi_2}{I_1} = \frac{N_1 N_2 A}{\pi R\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)} = \frac{1200\mu_0 N^2 A}{\pi R} \quad .$$

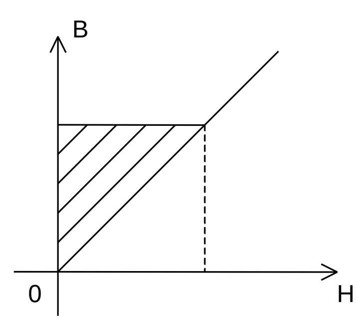
Este coeficiente relaciona la fem inducida en la espira 2 con la variación en el tiempo de la corriente en la espira 1, según la expresión :

$$\varepsilon_2 = -M\frac{dI_1}{dt} \quad .$$

(c) En materiales con permeabilidades mucho mayores que μ_0, el flujo magnético se mantiene en su interior, constituyendo un circuito magnético. La energía se concentra en el material magnetizable y su dispersión hacia el aire es despreciable. Calcularemos la energía en los materiales magnetizados y despreciaremos la energía contenida en el resto del espacio.

La densidad de energía magnética en un material lineal es :

$$w_m = \int_0^B H dB = \int_0^B \frac{BdB}{\mu} = \frac{B^2}{2\mu} \quad .$$

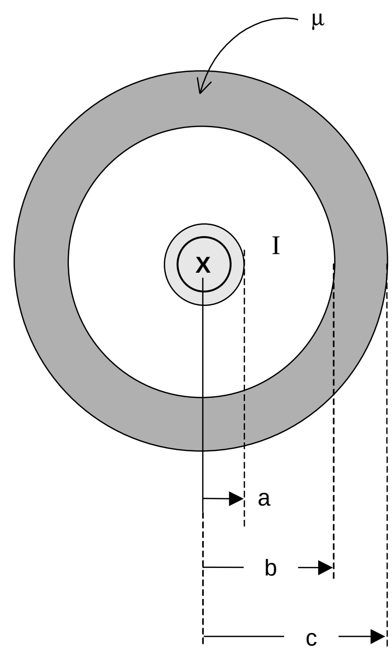


Este resultado corresponde al área indicada en el gráfico adjunto.

La energía magnética en el sistema se obtiene sumando las energías en ambos materiales. En cada material, debe multiplicarse la densidad de energía por el respectivo volumen. Ambos volúmenes son iguales y su valor aproximado, considerando que el anillo es delgado, es $\pi R\,A$. Luego;

$$W_m = \left(\frac{\bar{B}^2}{2\mu_1} + \frac{\bar{B}^2}{2\mu_2} \right) \pi R\,A = \frac{(N_1 I_1)^2\,A}{2\pi R\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)} = \frac{150\mu_0\,(N_1 I_1)^2\,A}{\pi R} \;.$$

PROBLEMA 86. Un alambre muy largo que lleva una corriente I, entrando al plano de la figura, está rodeado simétricamente por un cilindro muy largo de material magnetizable, con permeabilidad constante $\mu = 1000\mu_0$.



(a) Obtener los vectores $\vec{B}$, $\vec{H}$ y $\vec{M}$ en función de la distancia r hasta el eje de simetría.

(b) Graficar cualitativamente la magnitud de los campos $\vec{B}$, $\vec{H}$ y $\vec{M}$, en función de la distancia r hasta el eje de simetría.

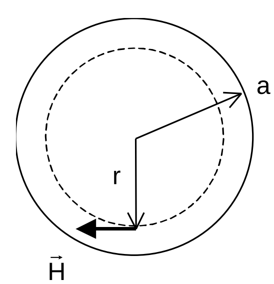
<u>SOLUCIÓN</u>

(a) A partir de la ley de Ampere :

$$\oint \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = i \;,$$

y considerando la simetría cilíndrica, se calcula $\vec{H}$ en todo el espacio.

i) Si $r < a$:



$$H \bullet 2\pi \cancel{r} = I \bullet \frac{\cancel{\pi}\, r^{\cancel{2}}}{\cancel{\pi}\, a^2} \qquad \Rightarrow \qquad H = \frac{I \bullet r}{2\pi a^2}$$

ii) Si $r > a$:

$$H \bullet 2\pi r = I \qquad \Rightarrow \qquad H = \frac{I}{2\pi r}$$

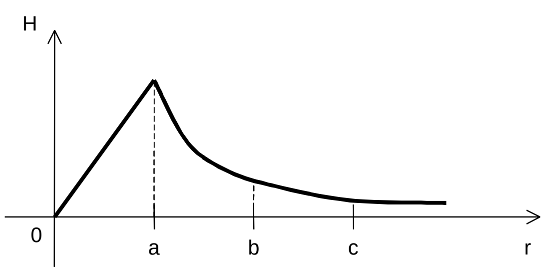
El vector $\vec{H}$ en un punto dado es perpendicular al eje de simetría y tangente a una circunferencia que pasa por dicho punto, como se indica en la figura. Puede escribirse, $\vec{H} = H \bullet \hat{t}$, siendo $\hat{t}$ un vector tangente a la circunferencia.

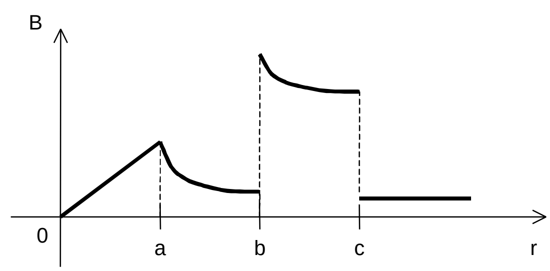
El vector $\vec{B}$ se obtiene usando la relación $\vec{B} = \mu \vec{H}$ correspondiente a cada material. Puesto que en el medio magnetizable $\mu = 1000 \mu_0$ y en el resto del espacio es μ_0, la magnitud de $\vec{B}$ es muy grande en el medio magnetizable. Esto se debe a la contribución del vector magnetización $\vec{M}$, que obedece a la relación $\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right)$.

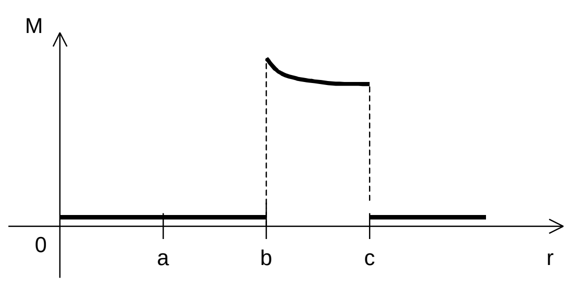
Entonces, $$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \ .$$

De acuerdo a la relación anterior, en el medio no magnetizable, donde $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, resulta $\vec{M} = 0$. En cambio en el medio magnetizable, $\vec{M} = (\mu_r - 1) \bullet \vec{H}$, donde se ha definido $\mu_r = \mu / \mu_0 = 1000$.

(b) El gráfico de $H(r)$ no presenta discontinuidades pues su componente paralela a la superficie de un material, es continua (excepto cuando hay corriente superficial).

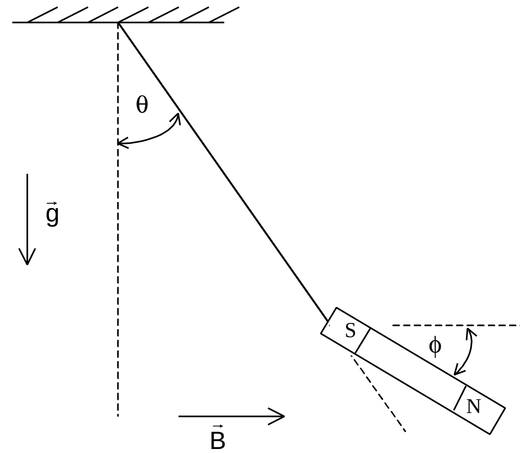






PROBLEMA 87. Un pequeño imán de largo *d* y masa *m*, se cuelga sujetando uno de sus extremos mediante una cuerda, quedando sometido al campo gravitacional de la tierra, y a un campo magnético uniforme aplicado en dirección horizontal. Considerar que el momento dipolar magnético $\vec{p}$ del imán es constante.

Calcular los ángulos θ y ϕ indicados en la figura, para la condición de equilibrio del imán.



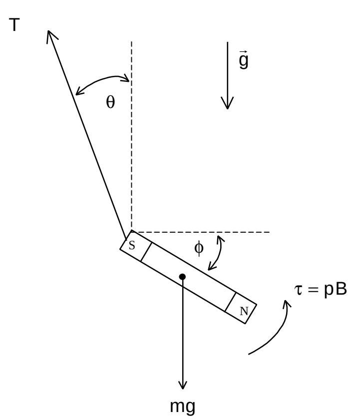
SOLUCIÓN

Consideraremos al imán como un dipolo magnético y veremos el efecto que ejerce un campo magnético uniforme sobre él. Dicho efecto es similar al que experimenta un dipolo magnético constituido por una espira con corriente, caso del cual le recordamos los siguientes resultados :

I. La fuerza magnética sobre un dipolo magnético colocado en un campo magnético **uniforme** es cero.

II. Un dipolo magnético en un campo magnético experimenta un torque $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{B}$, que tiende a alinear el dipolo en la dirección del campo magnético.

Usamos estos resultados para dibujar un diagrama de cuerpo aislado del imán y luego escribir las respectivas ecuaciones de equilibrio.



1) Equilibrio de las componentes verticales de las fuerzas :

$$T \cos\theta = mg$$

2) Equilibrio de las componentes horizontales de las fuerzas :

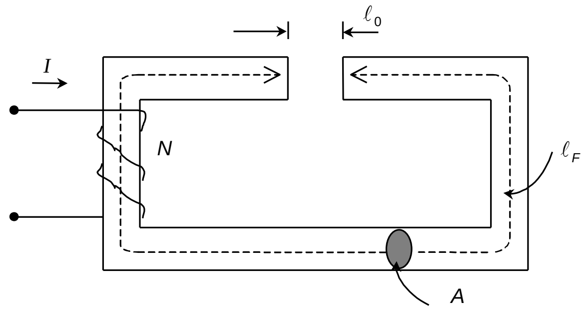
$$T \operatorname{sen}\theta = 0$$

3) Equilibrio de torques respecto al polo S del imán :

$$\frac{1}{2} mgd \cos\phi = pB$$

De las ecuaciones de equilibrio se concluye que : $\theta = 0$; $\cos\phi = \dfrac{2pB}{mgd}$.

PROBLEMA 88. El circuito magnético, mostrado en la figura, está formado por un material ferromagnético cuya curva de magnetización se indica en el gráfico, y consta de los siguientes parámetros geométricos :

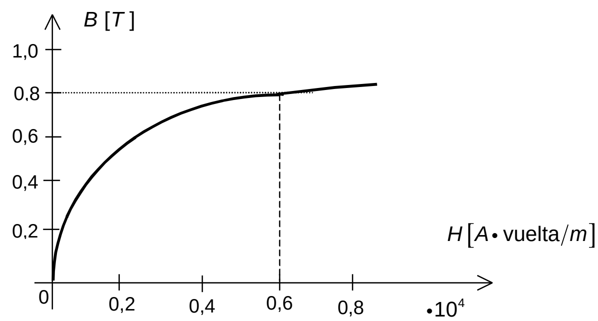


$$\ell_F = 1{,}0\,[m] \;\; ; \;\; \ell_0 = 3{,}1 \bullet 10^{-3}\;[m] \;\; ;$$

$$A = 4{,}0 \bullet 10^{-4}\;[m^2] \;\; ; \;\; N = 2000 \text{ vueltas} \; .$$

(a) Determinar I de modo que el flujo magnético a través de la sección transversal A sea $\phi = 3{,}2 \bullet 10^{-4}\;[T \bullet m^2]$.

(b) Determinar la razón entre las energías magnéticas en el aire (entrehierro) y en el material ferromagnético.



SOLUCIÓN

(a) Aplicando la ley de Ampere en su forma general (válida también cuando hay materiales ferromagnéticos) :

$$\oint \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = N\,I$$

se obtiene :

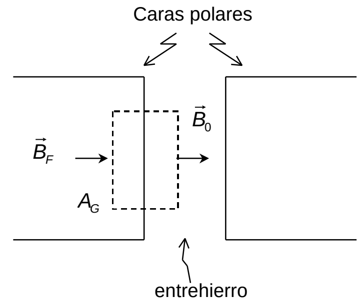
$$H_F \bullet \ell_F + H_0 \bullet \ell_0 = N\,I$$

donde H_F y H_0 son las intensidades de campo magnético en el material ferromagnético y el entrehierro respectivamente.

La ecuación anterior indica que I puede conocerse siempre que H_F y H_0 estén determinados. Con los datos disponibles: curva de magnetización y flujo magnético a través del circuito, podemos determinar ambas cantidades. Considerando que el entrehierro es pequeño, usando la ecuación de Maxwell :

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{A} = 0 \, ,$$

con la superficie cerrada, mostrada en la figura, se obtiene : $-B_F \bullet A_G + B_0 \bullet A_G = 0$.



De la relación anterior se concluye que $B_0 = B_F$, es decir, la inducción magnética tiene el mismo valor en el fierro y en el entrehierro.

El valor de H_0 puede obtenerse utilizando la relación lineal :

$$B_0 = \mu_0 H_0 \ ,$$

sin embargo, el valor de H_F debe obtenerse de otra manera, puesto que en el material ferromagnético la relación entre B_F y H_F es no lineal. Entonces, debe usarse la curva de magnetización.

Para obtener B_0 usamos la relación $\phi = B_0 A$, de donde se obtiene :

$$B_0 = \frac{\phi}{A} = \frac{3{,}2 \bullet 10^{-4}}{4{,}0 \bullet 10^{-4}} = \frac{4}{5} = 0{,}80 \ [T] \ .$$

Para el valor $B_0 = B_F = 0{,}80 \ [T]$; la curva de magnetización dada en el enunciado indica que $H_F = 0{,}6 \bullet 10^4 \left[A \bullet \text{vuelta}/m\right]$.

Reemplazando estos valores en la ecuación para I se obtiene que :

$$0{,}6 \bullet 10^4 \bullet 1{,}0 + \frac{0{,}8}{4\cancel{\pi} \bullet 10^{-7}} \bullet \cancel{3{,}1} \bullet 10^{-3} = 2 \bullet 10^3 I$$

$$0{,}8 \bullet 10^4 = 2 \bullet 10^3 I$$

$$I = 4{,}0 \left[A\right]$$

(b) La energía magnética almacenada en el entrehierro se obtiene como :

$$U_0 = u_0 \bullet V_0 \quad ,$$

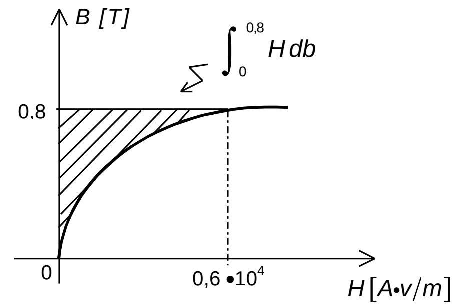
siendo $V_0 = A \bullet \ell_0$ el volumen del entrehierro y $u_0 = \dfrac{B_0^2}{2\mu_0}$, la densidad de energía magnética en el entrehierro. Usando los valores numéricos correspondientes se obtiene :

$$U_0 = \frac{0{,}8^2 \bullet \cancel{4} \bullet 10^{-4} \bullet \cancel{3{,}1} \bullet 10^{-3}}{2 \bullet \cancel{4}\,\cancel{\pi} \bullet 10^{-7}} = 0{,}32 \left[J\right].$$

La energía magnética almacenada en el material ferromagnético debe obtenerse de una manera distinta a la recién indicada para el entrehierro, debido a la no linealidad de la curva de magnetización del material. En este caso la energía es :

$$U_F = V_F \int_0^{0,8} H\,dB \quad ; \qquad \text{siendo } V_F = A \bullet \ell_F \ .$$

La integral anterior representa el área indicada cualitativamente en la figura.



Para evaluar la integral, debe procederse primero a cuadricular el área correspondiente y luego a contar los cuadros. Empleando esta técnica en la curva de magnetización dada, contamos 7,5 cuadros de lados $0{,}1\bullet 10^4\left[A\bullet \text{vuelta}/m\right]$ y $0{,}2[T]$.

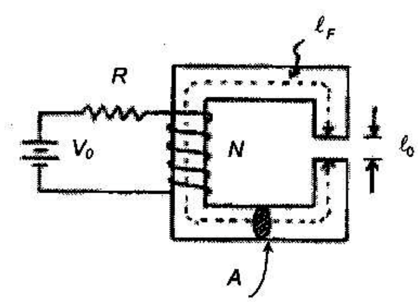
Luego; la energía magnética almacenada en el material ferromagnético es :

$$U_F = 4{,}0\bullet \cancel{10^{-4}} \bullet 1{,}0 \bullet 7{,}5 \bullet 0{,}1\bullet \cancel{10^4} \bullet 0{,}2 = 0{,}6\left[J\right] \ .$$

Finalmente : $U_0/U_F = 8/15$.

Nótese que, a pesar de que el entrehierro es muy pequeño, la energía almacenada en él es comparable a la energía almacenada en el material ferromagnético.

PROBLEMA 89. En el circuito magnético indicado en la figura, el material ferromagnético es acero fundido y el entrehierro es de aire. La curva de magnetización de acero fundido y otros materiales se encuentra al final de esta sección.



Se dispone de los siguientes datos del circuito magnético :

$A = 8\bullet 10^{-4}\left[m^2\right]$, $\ell_0 = 4{,}8\bullet 10^{-3}\left[m\right]$, $R = 10\left[\Omega\right]$

$N = 2500\left[\text{vuelta}\right]$, $\ell_F = 0{,}5\left[m\right]$

(a) Determinar V_0 de modo que en estado estacionario la densidad de energía magnética en el entrehierro sea aproximadamente $u_0 = 1{,}15 \bullet 10^6\ [J/m^3]$.

(b) En las condiciones anteriores, determinar la densidad de energía magnética en el acero fundido.

(c) Calcular la razón entre las reluctancias del aire y del acero fundido : R_0/R_F .

SOLUCIÓN

(a) La expresión para la densidad de energía magnética en el entrehierro :

$$u_0 = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad ,$$

permite calcular B en el entrehierro. Usando los valores respectivos se obtiene :

$$B = \sqrt{2\,\mu_0\,u_0} = \sqrt{2 \bullet 4\pi \bullet 10^{-7} \bullet 1{,}15 \bullet 10^6} = 1{,}70\,[T] \ .$$

Puesto que, las componentes normales de $\vec{B}$ en la superficie que separa dos medios, son iguales, en el entrehierro y en el material ferromagnético, $\vec{B}$ tiene el mismo valor.

Usando la curva de magnetización de acero fundido, vemos que a $B_F = 1{,}70\,[T]$ le corresponden $H_F = 0{,}7 \bullet 10^4 \left[A \bullet \text{vuelta}/m\right]$.

Por otra parte, la relación $B = \mu_0\,H_0$ permite calcular el valor $H_0 = 1{,}35 \bullet 10^6 \left[A \bullet \text{vuelta}/m\right]$.

Usando la ley de Ampere $\oint \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = N\,I$, y sabiendo que en el estado estacionario se cumple que $I = V/R$, se obtiene una ecuación para calcular V.

$$H_F \bullet \ell_F + H_0 \bullet \ell_0 = N \bullet \left(\frac{V}{R}\right) \ .$$

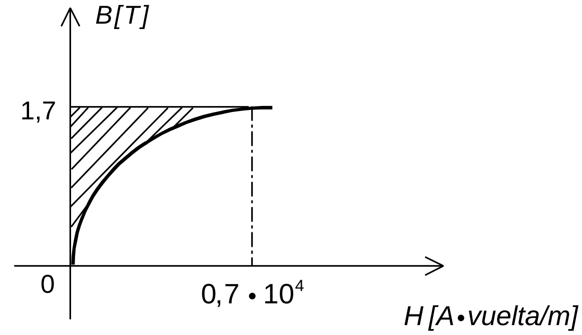
Luego :

$$V = \frac{10}{2500}\left\{\underbrace{0{,}7 \bullet 10^4 \bullet 0{,}5}_{3500} + \underbrace{1{,}35 \bullet 10^6 \bullet 4{,}8 \bullet 10^{-3}}_{\approx\,6500}\right\}$$

$$V = 40\,[V]$$

(b) La densidad de energía magnética en acero fundido está representada por el área indicada en la figura, que corresponde a la expresión :

$$u_F = \int_0^{1,7} H\,dB$$



Esta integral se evalúa usando la curva de magnetización correspondiente, dada al final de esta sección, simplemente contando los cuadros de lados $0{,}1\,[T]$ y $0{,}1 \bullet 10^4\,[A \bullet \text{vuelta}/m]$; resultando aproximadamente 19 cuadros; es decir, una densidad de energía de :

$$u_F = 19 \bullet 0{,}1[T] \bullet 0{,}1 \bullet 10^4\,[A \bullet \text{vuelta}/m] = 1900\left[J/m^3\right] \ .$$

(c) Las reluctancias son : $R_0 = \ell_0/\mu_0 A$ y $R_F = \ell_F/\mu_F A$

La cantidad μ_F se denomina permeabilidad estática del material ferromagnético y se calcula haciendo el cuociente :

$$\mu_F = \frac{B}{H_F} \ .$$

Luego, la razón entre las reluctancias es :

$$\frac{R_0}{R_F} = \frac{\ell_0}{\mu_0 A} \bullet \frac{\mu_F A}{\ell_F} = \frac{\ell_0}{\ell_F} \bullet \frac{\mu_F}{\mu_0} = \frac{\ell_0}{\ell_F} \bullet \left(\frac{\overset{1}{\cancel{B}}\, H_0}{H_F\, \underset{1}{\cancel{B}}} \right) = \frac{\ell_0 \bullet H_0}{\ell_F \bullet H_F}$$

Nótese que nuevamente aparecen los productos $H_0\,\ell_0$ y $H_F\,\ell_F$ que fueron calculados al obtener V. Luego :

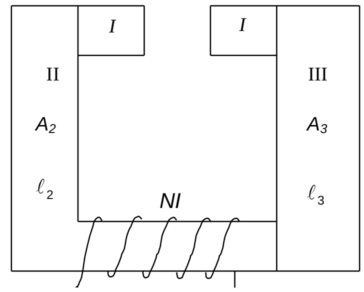
$$\frac{R_0}{R_F} = \frac{6500}{3500} \simeq 1{,}86 \ .$$

PROBLEMA 90. El circuito magnético de la figura consta de tres tipos de materiales ferromagnéticos, con las siguientes especificaciones :

I : chapa silicosa $A_1 = 7{,}5\ [cm^2]$ $\ell_1 = 10\ [cm]$

II : acero fundido $A_2 = 10\ [cm^2]$ $\ell_2 = 20\ [cm]$

III : fierro fundido $A_3 = 20\ [cm^2]$ $\ell_3 = 10\ [cm]$



El circuito funciona en condiciones tales que al magnetizar la chapa silicosa se requiere $1800\ [A\bullet\text{vuelta}]$ y al magnetizar el entrehierro se necesita una excitación equivalente al 40% de la excitación magnética total.

Determinar la longitud del entrehierro, usando las curvas de magnetización dadas al final de esta sección.

SOLUCIÓN

La ley de Ampere : $\oint \vec{H}\bullet d\vec{\ell} = N\,I$ permite escribir la ecuación :

$$H_1\,\ell_1 + H_2\,\ell_2 + H_3\,\ell_3 + H_0\,\ell_0 = N\,I$$

donde los subíndices 1, 2 y 3 se refieren a los medios I, II y III, y el subíndice 0 está asociado al entrehierro. Puesto que al magnetizar la chapa silicosa se requiere $1800\ [A\bullet\text{vuelta}]$, entonces :

$$H_1\,\ell_1 = 1800\ [A\bullet\text{vuelta}]\ \text{, luego}\ H_1 = \frac{1800}{0{,}10} = 1{,}8\bullet 10^4 [A\bullet\text{vuelta}/m]\,.$$

Usando H_1 y la curva de magnetización correspondiente a la chapa silicosa, se obtiene $B_1 = 2{,}0\,[T]$.

Luego, el flujo magnético a través del circuito es :

$$\phi = B_1 \bullet A_1 = 2{,}0\bullet 7{,}5\bullet 10^{-4} = 1{,}5\bullet 10^{-3}\left[T\bullet m^2\right]\ .$$

Puesto que el flujo debe ser el mismo en la chapa silicosa, en el acero y en el fierro; usamos este valor de ϕ para calcular B_2 y B_3 :

$$B_2 = \frac{\phi}{A_2} = \frac{1{,}5 \bullet 10^{-3}}{10 \bullet 10^{-4}} = 1{,}5\,[T]$$

$$B_3 = \frac{\phi}{A_3} = \frac{1{,}5 \bullet 10^{-3}}{20 \bullet 10^{-4}} = 0{,}75\,[T]$$

Con los valores anteriores y las curvas de magnetización correspondientes se obtienen :

$$H_2 = 0{,}32 \bullet 10^4 \left[A \bullet \text{vuelta}/m\right] \qquad ; \qquad H_3 = 0{,}53 \bullet 10^4 \left[A \bullet \text{vuelta}/m\right]$$

Puesto que al magnetizar el entrehierro se requiere el 40% de la excitación magnética total; tenemos que :

$$H_0\,\ell_0 = 0{,}40\,NI \quad ,$$

donde $H_0 = B_0/\mu_0$ y $B_0 = B_1$. Esta última igualdad ha sido discutida en un problema anterior, y constituye una condición de contorno que puede usarse cuando el entrehierro es pequeño.

Reemplazando los valores encontrados en la ecuación :

$$H_1\,\ell_1 + H_2\,\ell_2 + H_3\,\ell_3 + H_0\,\ell_0 = NI \quad ,$$

se obtiene :

$$H_1\,\ell_1 + H_2\,\ell_2 + H_3\,\ell_3 + \frac{B_1\,\ell_0}{\mu_0} = \frac{B_1\,\ell_0}{0{,}40\,\mu_0}$$

$$1800 + 0{,}32 \bullet 10^4 \bullet 0{,}20 + 0{,}53 \bullet 10^4 \bullet 0{,}10 + \frac{2{,}0}{4\pi \bullet 10^{-7}} \bullet \ell_0 = \frac{2{,}0}{4\pi \bullet 10^{-7}} \bullet \frac{\ell_0}{0{,}40}$$

Luego : $$\ell_0 = \frac{4\pi \bullet 10^{-7}}{2{,}0} \bullet \frac{2}{3}\left(1800 + 640 + 530\right)$$

$$\ell_0 = 1{,}2 \bullet 10^{-3}\,[m] \;\hat{=}\; 1{,}2\,[mm] \ .$$

Puesto que ℓ_0 resulta pequeño $\left(\ell_0 \ll \ell_1\right)$ la consideración hecha anteriormente que el entrehierro sea pequeño, se cumple y el resultado obtenido es válido.

CURVA DE MAGNETIZACIÓN DE DIFERENTES MATERIALES FERROMAGNÉTICOS