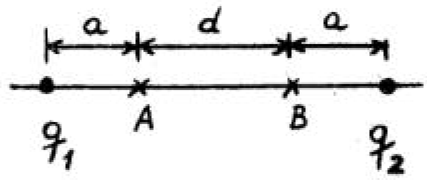
4. POTENCIAL ELÉCTRICO

PROBLEMA 29. Encontrar una expresión para la d-ferencia de potencial entre los puntos A y B de la figura, producida por la presencia de dos cargas de magnitudes q_1 y q_2.



SOLUCIÓN

El potencial producido por una carga puntual a una distancia a de ella es :

$$V = \frac{q}{4pe_0 a}$$

Puesto que tenemos dos cargas puntuales, necesitamos usar el principio de superposición para decir que el potencial en A es :

$$V_A = \frac{q_1}{4pe_0 a} + \frac{q_2}{4pe_0 (a+d)} .$$

Análogamente, en B el potencial será:

$$V_B = \frac{q_1}{4pe_0 (a+d)} + \frac{q_2}{4pe_0 a} .$$

Luego, la diferencia $V_A - V_B$ es:

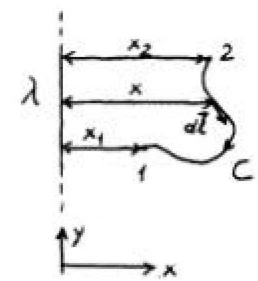
$$V_{BA} = V_A - V_B = \frac{q_1}{4pe_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}\right) + \frac{q_2}{4pe_0}\left(\frac{1}{a+d} - \frac{1}{a}\right),$$

o bien :

$$V_{BA} = \frac{(q_1 - q_2)}{4pe_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}\right).$$

¿Qué trabajo debe efectuar un agente externo para llevar una carga puntual q_0 desde A hasta B? Dicho trabajo es : $W_{AB} = q_0 \bullet V_{AB} = -q_0 \bullet V_{BA}$.

PROBLEMA 30. Calcular la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 ubicados a las distancias x_1 y x_2 de un alambre infinito cargado uniformemente con densidad lineal λ .



SOLUCIÓN

$$\Delta V = V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E} \bullet d\vec{\ell}$$

Si los puntos 1 y 2 , y la trayectoria C están en el plano del dibujo, resulta adecuado escoger el sistema de coordenadas xy mostrado en la figura. Entonces :

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j}$$

$$d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\,\hat{j}$$

El campo eléctrico producido por una línea infinita es radial y tiene simetría cilíndrica. De acuerdo a resultados anteriores:

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \qquad ; \qquad E_y = 0$$

luego :

$$\vec{E} \bullet d\vec{\ell} = E_x\, dx + E_y\, dy = \frac{\lambda\, dx}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

y

$$V_1 - V_2 = -\int_{x_2}^{x_1} \frac{\lambda\, dx}{2\pi\varepsilon_0 x} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln x_1 - \ln x_2\right)$$

$$V_1 - V_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x_1 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x_2$$

Observe que si $x_2 \to \infty$, entonces $\ln x_2 \to \infty$ y $(V_1 - V_2) \to \infty$, lo cual hace imposible escoger como referencia para el potencial, a un punto ubicado a distancia infinita del hilo.

Puesto que realmente sólo interesa saber las diferencias de potencial, entonces es posible escoger un punto y asignarle un potencial, para luego medir los potenciales de los restantes puntos del espacio, de acuerdo a la referencia escogida.

Si asignamos arbitrariamente el potencial V_0 a un punto ubicado a una distancia d de la línea, entonces el potencial V en un punto ubicado a distancia r de la línea será :

$$\begin{aligned} V - V_0 &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r + \ln d \\ V &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r + C \end{aligned} ,$$

donde C es una contante de valor : $C = V_0 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln d$.

Note que las superficies equipotenciales son cilindros cuyo eje es la línea cargada.

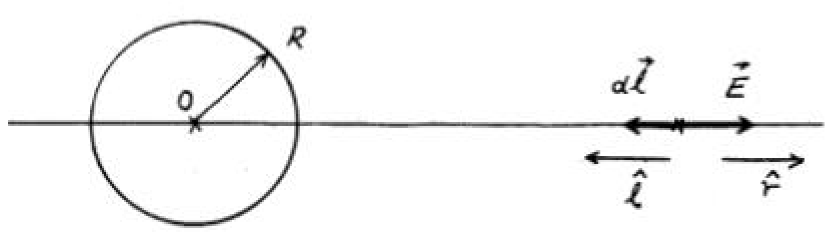
Otra manera de calcular potenciales es mediante la relación :

$$V = \int_v \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} ,$$

donde la integral debe efectuarse sobre toda la región que contiene cargas. Dicho método es aplicable sólo para configuraciones finitas de carga. En la expresión $V = \int_v \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$, se ha supuesto que el potencial es **cero** en puntos muy alejados de la configuración de cargas, lo cual en este caso no se cumple. Por ende, el potencial obtenido anteriormente no puede calcularse usando dicha expresión.

PROBLEMA 31. Determinar el potencial producido por un cascarón esférico conductor, cargado con una carga total q .

<u>SOLUCIÓN</u>



A partir de la definición, el potencial en un punto es :

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \bullet d\vec{\ell} \ .$$

Puesto que la integral tiene un resultado independiente de la trayectoria, se hará el desarrollo siguiendo una trayectoria radial.

Para puntos exteriores, es decir: $r \geq R$, el campo eléctrico es :

$$\vec{E} = \frac{q}{4pe_0 r^2}\hat{r} \ .$$

Luego,

$$V_P = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4pe_0 r^2}\hat{r} \bullet d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4pe_0 r^2}(-d\ell)$$

puesto que $d\ell = -dr$.

$$V_P = -\int_{\infty}^{r} \frac{q\,dr}{4pe_0 r^2} = -\frac{q}{4pe_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\infty}^{r} = \frac{q}{4pe_0 r} \ .$$

Es decir, que para $r \geq R$, la esfera produce el mismo potencial que una carga puntual q ubicada en el punto 0.

Para puntos interiores, $r < R$, el campo eléctrico es nulo. Usando la trayectoria radial para determinar el potencial en un punto interior, se tendrá:

$$V_P = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{R} \vec{E} \bullet d\vec{\ell} - \int_{R}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{R} \vec{E} \bullet d\vec{\ell} \ ,$$

puesto que $\vec{E} = 0$ para $r < R$.

Luego, en un punto interior de la esfera hueca, el potencial tiene un valor constante igual a:

$$V_P = -\int_{\infty}^{R} \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = \frac{q}{4pe_0 R} \ .$$

Es necesario que este resultado sea bien entendido en términos del trabajo requerido para traer una carga de prueba desde el infinito hasta un punto interior de la esfera. Al hacer lo anterior debe suponer que la carga de prueba no produce redistribución de la carga del conductor.

Note además, que si se tratase de una esfera maciza cargada, los resultados anteriores no cambian, siempre que la esfera sea conductora.

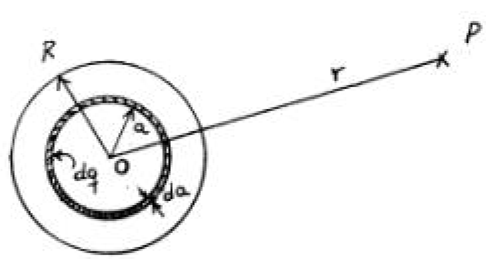
PROBLEMA 32. Determinar el potencial en todos los puntos del espacio, producido por una esfera aislante cargada uniformemente con densidad volumétrica r .

<u>SOLUCIÓN</u>

Puede calcularse $\vec{E}$ en todo el espacio y luego determinarse el potencial en un punto P a partir de la definición

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \bullet d\vec{\ell} \ ,$$

de manera análoga a lo realizado en el PROBLEMA 31. Se recomienda que usted lo haga, pues acá se usará un método distinto, basado en el resultado anterior.



La esfera maciza puede "verse" como un sinnúmero de cascarones esféricos de radio a, espesor da y carga $dq = r\, dV = r\, 4pa^2\, da$, que producen en P (punto externo) un potencial dV , y de acuerdo al resultado anterior está dado por :

$$dV = \frac{dq}{4pe_0 r} = \frac{r \bullet 4p a^2\, da}{4pe_0\, r} \ .$$

Luego, para este tipo de distribución finita, el potencial en P será :

$$V_P = \int_0^{q_T} \frac{dq}{4pe_0 r} ,$$

donde r es una constante para efectos de la integración.

Posteriormente :

$$V_P = \frac{1}{4pe_0 r}\int_0^{q_T} dq = \frac{q_T}{4pe_0 r} = \frac{r \bullet \frac{4}{3} p R^3}{4pe_0 r}$$

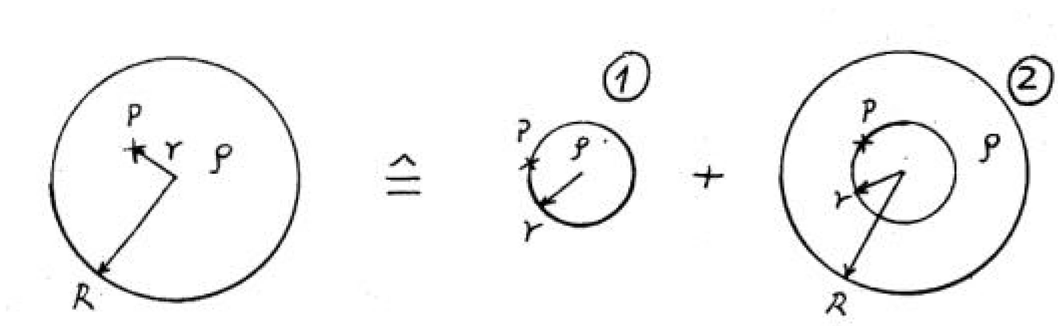
$$V_P = \frac{r R^3}{3e_0 r} \qquad ; \qquad (r \geq R).$$

Nótese que para puntos externos, la esfera produce el mismo potencial que produciría una carga puntual q_T ubicada en 0. En la superficie de la esfera, el potencial es :

$$r R^2 / 3e_0 .$$

Para puntos interiores, $r < R$, la situación puede estudiarse como sigue.

1° En un punto ubicado a una distancia $r < R$ del centro, el potencial es debido a la carga contenida dentro de la esfera de radio r, y a la carga contenida en el resto de la esfera de radio R (esfera hueca de radio interior r y radio exterior R).



Entonces,

$$V_P = V_{1P} + V_{2P} .$$

2° V_{1P} es el potencial en la superficie de una esfera cargada con r constante y de radio r . De acuerdo con el resultado obtenido anteriormente, para puntos externos, V_{1P} es :

$$V_{1P} = \frac{r r^2}{3 e_0}$$

3° El valor de V_{2P} corresponde al potencial en un punto interior de una esfera hueca de radio interior r y radio exterior R , cargada uniformemente con r . Esto no ha sido calculado anteriormente, pero hay un resultado que puede utilizarse para V_{2P} .

El potencial en un punto interior de un cascarón esférico de radio a, espesor da y carga dq , es constante y tiene magnitud de :

$$dV = \frac{dq}{4p e_0 a} \quad ,$$

puesto que la esfera hueca puede "verse" como un sinnúmero de cascarones como los descritos anteriormente; entonces :

$$V_{2P} = \int_0^{V_{2P}} dV = \int_0^{q_r} \frac{dq}{4p e_0 a} \quad ,$$

donde $dq = r \bullet 4p a^2 da$, $q_T = r \bullet \frac{4}{3} p \left(R^3 - r^3 \right)$ y a es la variable de integración.

Luego,
$$V_{2P} = \int_r^R \frac{r \bullet \cancel{4p}\, a^{\cancel{2}}\, da}{\cancel{4p}\, e_0\, \cancel{a}} = \frac{r}{e_0} \int_r^R a\,da = \frac{r}{2e_0}\left(R^2 - r^2\right)$$

$$V_{2P} = \frac{r}{2e_0}\left(R^2 - r^2\right).$$

Este es el potencial en un punto interior de una esfera hueca de radio interior r y radio exterior R , cargada uniformemente con r .

Evidentemente el punto P que nos interesa está en el interior de la esfera hueca y obedece a esta relación; luego :

$$V_P = \frac{r r^2}{3e_0} + \frac{r}{2e_0}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{r}{e_0}\left(\frac{r^2}{3} + \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)$$

$$V_P = \frac{r}{6e_0}\left(3R^2 - r^2\right) \quad .$$

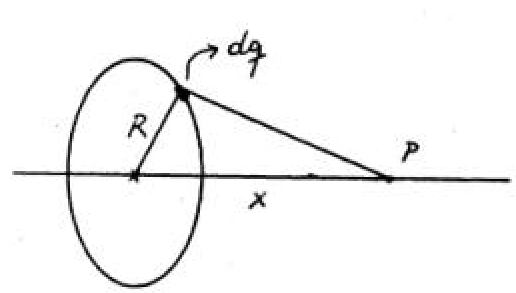
PROBLEMA 33.

(a) Determinar el potencial en cada punto del eje de un anillo de radio R que tiene una carga neta q distribuida uniformemente con densidad lineal λ .

(b) Obtener el potencial producido por un disco de densidad de carga uniforme σ y radio R , en un punto de su eje.

<u>SOLUCIÓN</u>

(a) En P el potencial producido por un elemento de carga dq es :



$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{1/2}} \ ,$$

donde $\left(x^2+R^2\right)^{1/2}$ es la distancia entre el elemento dq y el punto P. Puesto que todos los puntos del anillo son equidistantes de P; entonces :

$$V = \int_{anillo} dV = \int_0^q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}\int_0^q dq$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{1/2}} \ .$$

(b) A partir del resultado anterior, la contribución al potencial, debido a un anillo diferencial de radio r que forma parte del disco es:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{1/2}} \ .$$

Haciendo $dq = \sigma \bullet 2\pi r dr$ e integrando en la variable R , se obtiene el potencial producido por el disco, en un punto de su eje ubicado a distancia x .

Luego;

$$V=\int_0^R \frac{\sigma \bullet 2\cancel{\pi}\, r\,dr}{4\cancel{\pi}\,\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{1/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{\left(x^2+r^2\right)^{1/2}} \ .$$

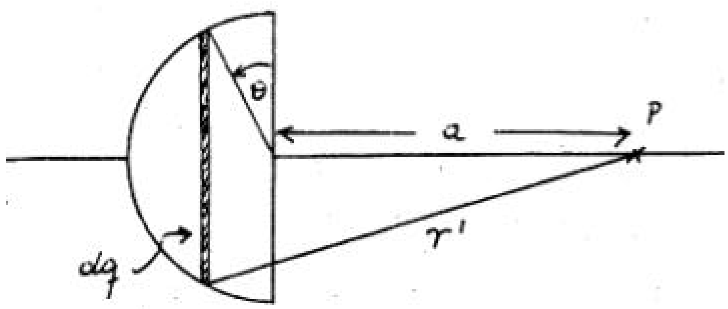
Sustituyendo $x^2+r^2=u$ y $du=2r\,dr$, se obtiene:

$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\bullet\frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{u^{1/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\bullet\frac{1}{\cancel{2}}\bullet\cancel{2}\left(x^2+r^2\right)^{1/2}\Big|_0^R$$

$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\left(x^2+R^2\right)^{1/2}-x\right].$$

PROBLEMA 34. A partir del potencial producido por un anillo en un punto de su eje, determinar el potencial en un punto del eje de simetría de un hemisferio de radio R y carga Q distribuida uniformemente sobre su superficie.

SOLUCIÓN



El anillo de carga dq indicado en la figura tiene un radio igual a $R\cos\theta$ y, por lo tanto, dq es igual a $\sigma\, dA=\sigma \bullet 2\pi R\cos\theta \bullet R d\theta$. Luego, la contribución de ese anillo al potencial en P será :

$$dV=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r'}=\frac{\sigma\ \cancel{2\pi}\ R^2\cos\theta\, d\theta}{\underset{2}{\cancel{4\pi}}\ \varepsilon_0\left[\left(R\cos\theta\right)^2+\left(a+R\,\mathrm{sen}\theta\right)^2\right]^{1/2}} \ .$$

Luego :

$$V = \frac{s\,R^2}{2e_0}\int_0^{p/2}\frac{\cos q\,dq}{\left(R^2\cos^2 q + a^2 + R^2 sen^2 q + 2aR\,sen q\right)^{1/2}}$$

$$V = \frac{s\,R^2}{2e_0}\int_0^{p/2}\frac{\cos q\,dq}{\left(R^2 + a^2 + 2aR\,sen q\right)^{1/2}}\,.$$

Sustituyendo : $u = R^2 + a^2 + 2aR\,sen q$; $du = 2aR\cos q\,dq$. Entonces,

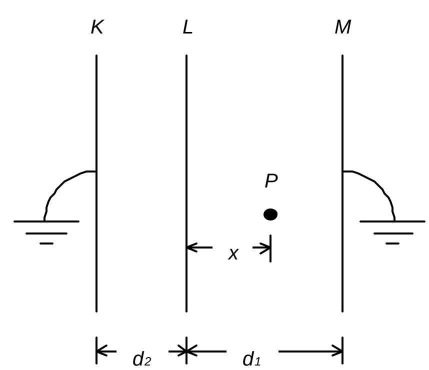
$$V = \frac{s\,R^2}{2e_0}\bullet\frac{1}{2aR}\int_{u_i}^{u_S}\frac{du}{u^{1/2}} = \frac{s\,R}{2e_0 a}\bullet u^{1/2}\Big|_{u_i}^{u_S} = \frac{s\,R}{2e_0 a}\left(R^2 + a^2 + 2aR\,sen q\right)^{1/2}\Big|_0^{p/2}\,.$$

Finalmente:

$$V = \frac{s\,R}{2e_0}\left(1 + \frac{R}{a} - \sqrt{1+\left(\frac{R}{a}\right)^2}\right).$$

¿ Qué sucede si $a = 0$?

PROBLEMA 36. Tres placas paralelas están dispuestas como se indica en la figura. La superficie de las placas tiene área $A = 300[cm^2]$. En la placa L se deposita una carga de 20*[nC]*. Calcular el potencial en ***P***, si $d_1 = 2[cm]$, $d_2 = 1[cm]$ y $x = 0{,}5[cm]$.



<u>SOLUCIÓN</u>

- El símbolo indica que un conductor está "conectado a tierra". Consideraremos como "la tierra" a una región muy especial del espacio, que cumple con dos condiciones:
  (1) Siempre está a un **potencial constante**, no importa que haya cargas cerca ni flujo de cargas hacia o desde ella. Cualquier conductor conectado a tierra, por lo tanto, tiene siempre el mismo potencial que ella. Normalmente definiremos al potencial de la tierra como cero.

(2) Es una fuente infinita de carga, ya sea positiva o negativa. Esto es, siempre proveerá la cantidad de carga necesaria para hacer que el potencial de un conductor sea el mismo que el de ella.

En resumen, todo conductor conectado a tierra tiene potencial cero. (¿Implica esto, que la carga neta del conductor sea cero? Analice distintos casos).

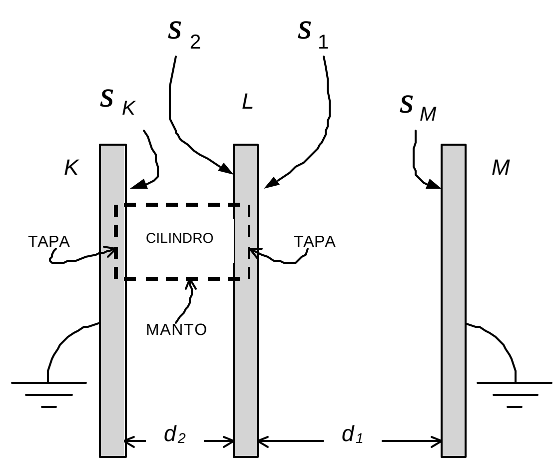
- Al depositar carga positiva en la placa L, el potencial eléctrico en las placas laterales tiende a aumentar (¿porqué?). Sin embargo, como están conectadas a tierra, el potencial debe mantenerse en cero. Para que esto sea posible debe fluir carga negativa desde tierra a las placas laterales (analice). En consecuencia, las placas laterales se cargan debido a la presencia de carga en la placa L, con cargas del signo opuesto a la de L.

  ¿Cuánta carga fluye a cada placa lateral y cómo se distribuye la carga de 20*[nC]* en la placa L?

Para responder a esta pregunta usaremos la ley de Gauss y consideraremos el campo entre las placas, uniforme, dado que d_1 y d_2 son pequeñas comparadas con las dimensiones de las placas.

- Sean s_1 y s_2 las densidades superficiales de carga en cada cara de la placa L. Como la carga total en L es $Q = 20[nC]$, se cumple que

$$\left(s_1 + s_2 \right) A = Q \qquad (1)$$



Aplicando la ley de Gauss a un cilindro recto cuyas bases están dentro del material de las placas K y L, tenemos que :

El flujo del campo eléctrico a través del cilindro es cero, ya que $\vec{E}$ es cero dentro de los conductores y tangente a la superficie en el manto cilíndrico. En consecuencia la carga neta encerrada es cero y

$$s_K = -s_2 \ .$$

De manera análoga se puede demostrar que :

$$s_M = -s_1$$

Por lo tanto, las cargas inducidas en las placas K y M son de igual valor absoluto y signo opuesto a las de las respectivas caras de la placa L. (Demuestre que fuera de las placas K y M no hay carga).

- Por otra parte, sabemos que las placas K y M están al mismo potencial que la tierra :

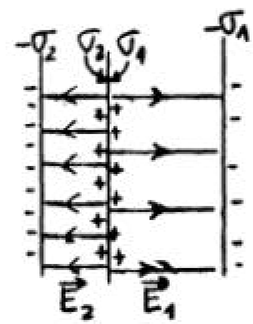
$$V_K = V_M = 0$$

y toda la placa L está a un potencial dado V_L ; por lo tanto, las diferencias de potencial entre las placas K y L , y entre las placas M y L son las mismas :

$$\Delta V_{KL} = \Delta V_{ML}$$

$$V_L - V_K = V_L - V_M$$

Expresando los ΔV en función del campo eléctrico :



$$\Delta V_{KL} = V_L - V_K = -\int_K^L \vec{E}_2 \bullet \overrightarrow{d\ell} = E_2 d_2$$

$$\Delta V_{ML} = V_L - V_M = -\int_M^L \vec{E}_1 \bullet \overrightarrow{d\ell} = E_1 d_1$$

siendo E_1 y E_2 las magnitudes de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ respectivamente.

Luego , $E_1 d_1 = E_2 d_2$.

El campo eléctrico entre las placas puede calcularse por superposición, a partir del campo eléctrico producido por una placa (vea PROBLEMAS 5 Y 12) :

$E_2 = \dfrac{s_2}{e_0}$, entre las placas K y L

$E_1 = \dfrac{s_1}{e_0}$, entre las placas L y M

$E = 0$, fuera de las placas.

En consecuencia, $\dfrac{s_2}{e_0} d_2 = \dfrac{s_1}{e_0} d_1$ y

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad , \qquad (2)$$

es decir, la carga en la placa L se distribuye en razón inversa a las distancias a las placas K y M. Esto justifica que hayamos dibujado más líneas de campo eléctrico entre las placas K y L que entre las placas L y M.

De (1) y (2) :

$$s_1 = \frac{Q}{A\left(1+\dfrac{d_1}{d_2}\right)} = \frac{20 \bullet 10^{-9}[C]}{300 \bullet 10^{-4}[m^2] \bullet \left(1+\dfrac{2 \bullet 10^{-2}[m]}{1 \bullet 10^{-2}[m]}\right)} =$$

$$s_1 = 2{,}2 \bullet 10^{-7}\,[C/m^2] \quad ; \quad E_1 = \frac{s_1}{e_0} = 2{,}5 \bullet 10^{4}\,[N/C]$$

$$s_2 = 4{,}4 \bullet 10^{-7}\,[C/m^2] \quad ; \quad E_2 = \frac{s_2}{e_0} = 5{,}0 \bullet 10^{4}\,[N/C]$$

y el potencial en el punto $\boldsymbol{P}$ es :

$$V_P = -\int_M^P \vec{E}_1 \bullet \vec{d\ell} = E_1 \bullet (d_1 - x) = 3{,}8 \bullet 10^{2}\left[\frac{Nm}{C}\right]$$

$$V_P = 3{,}8 \bullet 10^{2}\ [V]$$

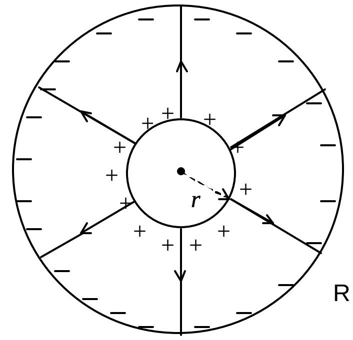
PROBLEMA 36. Una chimenea consta de un tubo exterior cilíndrico de altura H y radio R, y de un tubo coaxial interior de radio ρ. Ambos tubos se usan como electrodos y entre ellos se aplica una diferencia de potencial V, de modo que las partículas de humo adquieren un momento dipolar inducido p y experimentan una fuerza eléctrica hacia uno de los electrodos, donde quedan adheridos. Considere que las partículas son de masa m, que la fuerza neta sobre ellas es debida al campo eléctrico de los electrodos y que la velocidad de ascenso del humo es de v_0.

(a) Indicar a cuál de los electrodos se adhieren las partículas.

(b) Calcular V de modo que todas las partículas queden adheridas al electrodo.

SOLUCIÓN

(a) Entre los cilindros interior y exterior sometidos a una diferencia de potencial, el campo eléctrico es radial e inversamente proporcional a r , la distancia al eje, como lo indica la expresión :



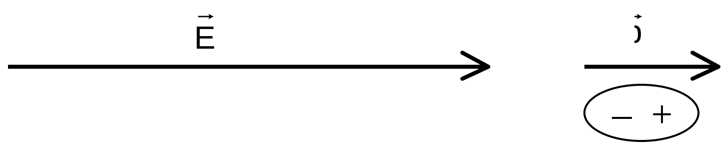
$$\vec{E} = \frac{\lambda \bullet \hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r} ,$$

donde λ es la carga por unidad de longitud del cilindro interior.

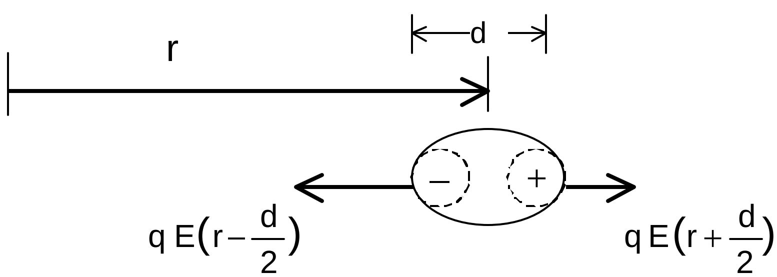
La correspondiente diferencia de potencial entre los electrodos es :

$$V = -\int_R^\rho \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = -\int_R^\rho \frac{\lambda dr}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{R}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R}{\rho}\right).$$

La posición de mínima energía de un dipolo corresponde a estar alineado con el campo eléctrico externo, es decir, con su carga negativa más cercana a la carga positiva que produce el campo. Esto se ilustra en la figura.



El campo producido por los electrodos cilíndricos es más intenso cerca del electrodo interior, por lo tanto, la fuerza eléctrica sobre el dipolo es hacia el electrodo interior, como se indica a continuación.



La figura muestra que la fuerza eléctrica sobre el dipolo depende de la diferencia del campo eléctrico en $\left(r-\frac{d}{2}\right)$ y en $\left(r+\frac{d}{2}\right)$, siendo r la posición del centro de la partícula.

La magnitud de la fuerza eléctrica sobre el dipolo es :

$$F = q\,E\left(r-\frac{d}{2}\right) - qE\left(r+\frac{d}{2}\right) = q\,d\,\frac{E\left(r-\frac{d}{2}\right) - E\left(r+\frac{d}{2}\right)}{d} \quad ,$$

y puede escribirse en forma abreviada como :

$$F_r = p\frac{dE_r}{dr} = -\frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \quad ,$$

donde $p = qd$ es la magnitud del momento dipolar eléctrico de una partícula.

(b) La ecuación de movimiento radial de un dipolo es $F_r = m \bullet \dfrac{dv_r}{dt}$, y su solución debe cumplir la condición de que todas las partículas lleguen hasta el electrodo central mientras ascienden verticalmente. Entonces,

$$-\frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2} = m\frac{dv_r}{dt} = m\frac{dv_r}{dr}\bullet\underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v_r} = mv_r\bullet\frac{dv_r}{dr}$$

$$-\frac{p\,\lambda\,dr}{2\pi\varepsilon_0 r^2} = m\,v_r d\,v_r \; .$$

Integrando en ambos miembros y considerando las condiciones iniciales de movimiento: $r(0)=R$ y $v_r(0)=0$, se obtiene :

$$\frac{m}{2}v_r^2 = +\frac{p\bullet\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right) .$$

El tiempo que demoraría una partícula en ascender la altura H debe ser mayor o igual que el tiempo empleado en recorrer la distancia entre los electrodos; en esas condiciones todas las partículas quedarían adheridas al electrodo central. Para obtener el tiempo en recorrer la distancia entre los electrodos, despejamos v_r en la relación anterior.

$$\frac{dr}{dt} = v_r = -\sqrt{\frac{p\bullet\lambda}{\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)} \quad .$$

Entonces,

$$dt = -\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 m}{p\lambda}} \bullet \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}}$$

$$dt = -\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mR}{p\lambda}} \bullet \sqrt{\frac{r}{R - r}}\, dr \ .$$

Con la ayuda de una tabla de integrales, se integra la relación anterior con r variando desde R hasta ρ . Denominando τ al tiempo en recorrer la distancia $(R-\rho)$ se obtiene :

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mR}{p\lambda}} \left[\sqrt{\rho(R-\rho)} - R\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{\rho(R-\rho)}}{\rho} \right) \right]$$

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mR}{p\lambda}} \left[\sqrt{\rho(R-\rho)} + R\tan^{-1}\sqrt{\frac{R-\rho}{\rho}} \right]$$

Puesto que debe cumplirse $\tau \leq H/v_0$; la diferencia de potencial V pedida resulta de sustituir λ en términos de V en esa desigualdad.

Finalmente :

$$V \geq \frac{mv_0^2 R}{2pH^2} \ln\left(\frac{R}{\rho}\right) \bullet \left[\sqrt{\rho(R-\rho)} + R\tan^{-1}\sqrt{\frac{R-\rho}{\rho}} \right]^2 \ .$$