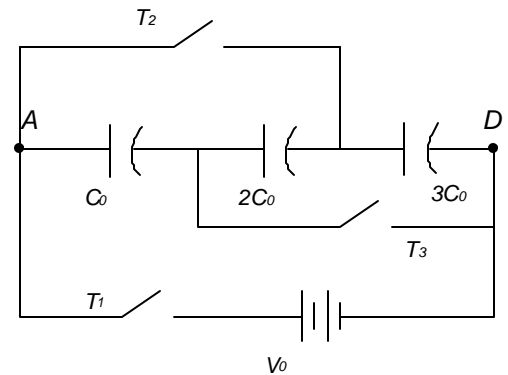


## 6. CAPACIDAD ELÉCTRICA

**PROBLEMA 41.** En el circuito de la figura, los condensadores están inicialmente descargados y los interruptores abiertos. Luego se cierra  $T_1$ , lo cual permite cargar los condensadores. Enseguida se vuelve a abrir  $T_1$ , después de lo cual se procede a cerrar  $T_2$  y  $T_3$ . ¿Cuál es la diferencia de potencial entre  $A$  y  $D$  después de la última operación?



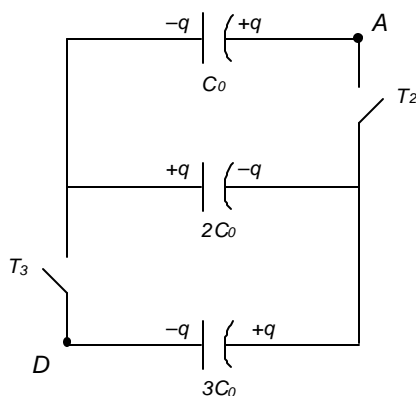
### SOLUCIÓN

Al conectar  $T_1$ , los tres condensadores se cargan en serie, es decir, todos adquieren la misma carga  $q$ . Luego:

$$V_0 = \frac{q}{C_0} + \frac{q}{2C_0} + \frac{q}{3C_0},$$

de lo que resulta :  $q = 6/11 C_0 V_0$ . Esta es la carga con la cual quedan cada uno de los condensadores al desconectar nuevamente  $T_1$ .

Justo antes de conectar  $T_2$  y  $T_3$ , la situación es la indicada en la figura siguiente:



Nótese que al conectar  $T_2$  y  $T_3$ , los tres condensadores quedan en paralelo. Las placas ubicadas al lado derecho en la figura quedarán conectadas entre sí, estarán finalmente al mismo potencial (ya que tanto ellas como los alambres que las unen son conductores) y tendrán una carga neta igual a  $+q$ , que deberá repartirse entre ellas. Un razonamiento análogo indica que las placas del lado izquierdo tendrán una carga  $-q$  a repartirse entre ellas.

Lo anterior es una aplicación de la conservación de la carga eléctrica.

Si  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  son las cargas finales en los condensadores (placas del lado derecho) de capacidades  $C_0$ ,  $2C_0$  y  $3C_0$  respectivamente; entonces :

$$q_1 + q_2 + q_3 = +q - q + q = q$$

Si  $V$  es la diferencia de potencial final entre  $A$  y  $D$ ; entonces lo anterior queda :

$$C_0 V + 2 C_0 V + 3 C_0 V = q$$

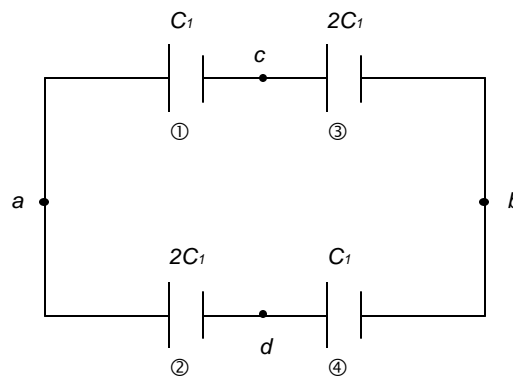
$$\text{luego : } V = \frac{q}{6 C_0},$$

reemplazando  $q$ , obtenido anteriormente, resulta:

$$V = \frac{6}{11} C_0 V_0 \cdot \frac{1}{6 C_0} = \frac{V_0}{11}$$

$$V = \frac{1}{11} V_0$$

**PROBLEMA 42.** Se conecta una batería a los bornes  $a$  y  $b$ , estableciéndose entre ellos cierta diferencia de potencial. Luego se desconecta la batería. ¿Qué fracción de la energía eléctrica del sistema se pierde al conectar  $c$  con  $d$ ?



**SOLUCIÓN:**

En cada capacitor se cumple que

$$Q = CV \Rightarrow V = \frac{Q}{C}, \text{ luego :}$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_2}{2C_1}$$

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_3}{2C_1}$$

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{Q_4}{C_1}$$

Al aplicarse una diferencia de potencial entre los puntos a y b, los capacitores ① y ③ se cargan en serie. Esto mismo es válido para los capacitores ② y ④.

Por lo tanto se cumple que :

$$Q_1 = Q_3 \quad ; \quad Q_2 = Q_4$$

$$V_1 + V_3 = V_{ab} = V \quad ; \quad V_2 + V_4 = V_{ab} = V$$

reemplazando los valores de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  y  $V_4$  se tiene:

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{2C_1} = V \Rightarrow Q_1 = Q_3 = \frac{2}{3}C_1V$$

$$\frac{Q_2}{2C_1} + \frac{Q_4}{C_1} = V \Rightarrow Q_2 = Q_4 = \frac{2}{3}C_1V$$

$$\text{luego} \quad Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = \frac{2}{3}C_1V$$

Calculamos ahora la energía del sistema:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{2C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_3^2}{2C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_4^2}{C_1}$$

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3}C_1V \right)^2 \left[ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{2C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{2C_1} \right]$$

$$U = \frac{2}{9}C_1^2V^2 \cdot \frac{3}{C_1} = \frac{2}{3}C_1V^2$$

Otro método para determinar la energía del sistema es calculando la capacitancia equivalente. Para los capacitores ① y ③ en serie; se tiene :

$$\frac{1}{C_{eq.1}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{2C_1} = \frac{3}{2C_1} \Rightarrow C_{eq.1} = \frac{2C_1}{3}.$$

Análogamente para los capacitores ② y ④ se tiene:  $C_{eq.2} = \frac{2C_1}{3}.$

La capacitancia equivalente total corresponde a los capacitores equivalentes 1 y 2 en paralelo :

$$C_{eq.} = \frac{2C_1}{3} + \frac{2C_1}{3} = \frac{4C_1}{3}.$$

Entonces,

$$U = \frac{1}{2} C_{eq.} V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4C_1}{3} V^2 = \frac{2}{3} C_1 V^2.$$

Al conectar  $c$  con  $d$  que inicialmente están a distintos potenciales, se redistribuye la carga en los capacitores. En las placas conectadas al punto a debe conservarse la carga eléctrica :

$$q'_1 + q'_2 = Q_1 + Q_2.$$

Además los capacitores ① y ② quedan con la misma diferencia de potencial:

$$V'_1 = V'_2 \Rightarrow \frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_2}{2C_1}, \quad \text{es decir,} \quad 2q'_1 = q'_2.$$

Por lo tanto  $q'_1 + 2q'_1 = Q_1 + Q_2$

$$3q'_1 = \frac{2}{3}C_1V + \frac{2}{3}C_1V \quad \Rightarrow \quad q'_1 = \frac{4}{9}C_1V$$

$$q'_2 = \frac{8}{9}C_1V$$

Análogamente puesto que en las placas conectadas al punto b se conserva la carga eléctrica y los capacitores ③ y ④ quedan con la misma diferencia de potencial; se obtiene:

$$q'_4 = \frac{4}{9}C_1V \quad \text{y} \quad q'_3 = \frac{8}{9}C_1V.$$

La energía eléctrica final es :

$$U' = 2 \left\{ \frac{\left(\frac{4}{9}C_1V\right)^2}{2 \cdot C_1} + \frac{\left(\frac{8}{9}C_1V\right)^2}{2 \cdot 2C_1} \right\} = \frac{48}{81} C_1 V^2.$$

La fracción de la energía eléctrica que se pierde es :

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{U - U'}{U} = \frac{\frac{2}{3}C_1V^2 - \frac{48}{81}C_1V^2}{\frac{2}{3}C_1V^2} = \frac{1}{9}.$$

La energía que pierde el sistema de capacitores se transforma en radiación electromagnética y también se disipa por efecto Joule. Es un proceso complejo de naturaleza semejante al que da origen al trueno, al relámpago y el rayo en una descarga entre nubes.

---

**PROBLEMA 43.** Una placa metálica de área  $A$  y espesor  $s/2$  se introduce entre las placas de un condensador plano de área  $A$  y separación entre placas igual a  $s$ .

Estudiar los cambios que ocurren en la capacidad, la carga, la diferencia de potencial y la energía almacenada en el condensador, en las dos situaciones siguientes:

- (a) La carga del condensador se mantiene constante.
- (b) La diferencia de potencial del condensador se mantiene constante.

### SOLUCIÓN

(a) **Carga constante.** Antes de introducir la placa metálica, las cantidades que nos interesan son:

Carga  $Q_0$

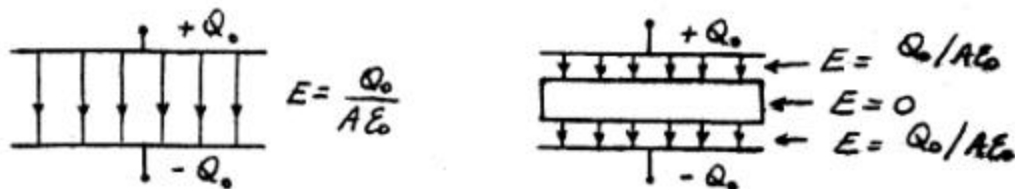
Capacidad  $(\epsilon_0 A/s) = C_0$

Diferencia de potencial  $(Q_0/C_0) = V_0$

Energía almacenada  $(Q_0^2/2C_0) = U_0$

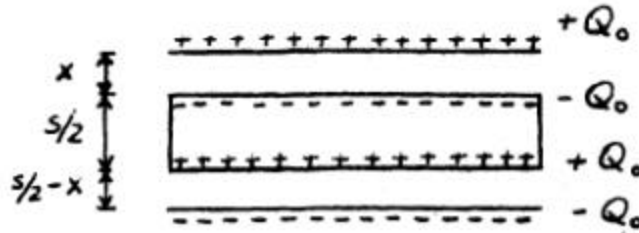
Campo eléctrico entre las placas  $s/\epsilon_0 = Q_0/A\epsilon_0$

Al introducir la placa metálica, el campo eléctrico entre las placas del condensador debe modificarse, ya que en todo el volumen de la placa éste debe ser cero (conductor en condiciones electrostáticas).



Para lograr que  $\vec{E} = 0$  en el interior de la placa metálica, en ella debe reordenarse su carga eléctrica de modo que cree un campo eléctrico de igual magnitud y sentido contrario al campo producido por las placas del condensador. Evidentemente, la carga inducida en la placa metáli-

ca residirá sobre sus superficies paralelas a las placas del condensador y tendrá las magnitudes indicadas en la figura :



De esta manera se logra que  $\vec{E} = 0$  en el interior de la placa metálica, y en el espacio comprendido entre las placas del condensador, fuera de la lámina metálica, el campo eléctrico no se altera respecto a su valor antes de introducir el conductor.

Luego, no hay energía eléctrica almacenada en la región ocupada por la placa metálica, ya que allí  $E = 0$  y la densidad de energía eléctrica es  $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ . En consecuencia, la energía final del condensador es:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot A \left( x + \frac{s}{2} - x \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q_0^2}{A^2 \epsilon_0^2} A \cdot \frac{s}{2} = \frac{Q_0^2 \cdot s}{2 \cdot A \cdot 2 \cdot \epsilon_0}$$

$$U = \frac{Q_0^2}{2 \cdot \left( \frac{\epsilon_0 A}{s} \right) \cdot 2}$$

Si  $C$  es la capacidad del condensador con la placa metálica introducida; entonces  $U$  también debe ser igual a  $Q_0^2 / 2C$ , luego :

$$\frac{Q_0^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2 \cdot \left( \frac{\epsilon_0 A}{s} \right) \cdot 2} \Rightarrow C = 2 \cdot \frac{\epsilon_0 A}{s} = 2C_0 \quad \text{y} \quad U = \frac{Q_0^2}{2 \cdot 2C_0} = \frac{1}{2} U_0.$$

La diferencia de potencial final es :  $V = \frac{Q_0}{C} = \frac{Q_0}{2C_0}.$

En resumen :

$$C = 2C_0 \quad ; \quad U = \frac{1}{2} U_0 \quad ; \quad V = \frac{1}{2} V_0.$$

(b) **Diferencia de potencial constante.** La capacidad del condensador formado al introducir la placa metálica es  $C = 2 C_0$ , resultado que es aplicable también en este caso, ya que no depende de la diferencia de potencial entre las placas ni de la carga en las placas (recuerde que la capacidad depende de la geometría y del medio dieléctrico).

Si  $V_0$  es la diferencia de potencial constante entre las placas, entonces antes de introducir la placa conductora tenemos:

Diferencia de potencial :  $V_0$

Capacidad :  $C_0 = \epsilon_0 A/s$

Carga :  $Q_0 = C_0 V_0$

Energía almacenada :  $U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$

Campo eléctrico entre las placas :  $E_0 = \frac{V_0}{s}$

Una vez introducida la placa tenemos :

Diferencia de potencial :  $V_0$

Capacidad :  $C = 2 C_0$

Carga :  $Q = C V_0 = 2 C_0 V_0 = 2 Q_0$

Energía almacenada :  $U = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \cdot 2 = 2 U_0$

Campo eléctrico entre las placas :  $E = 0$  (en la región ocupada por la placa metálica) y

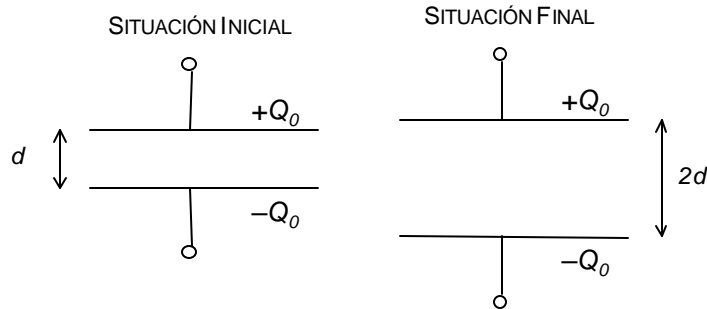
$E = \frac{V_0}{(s/2)} = 2 E_0$  (en la región no ocupada por la placa metálica).

En resumen:

$$C = 2 C_0 \quad ; \quad Q = 2 Q_0 \quad ; \quad U = 2 U_0$$


---

**PROBLEMA 44.** Las placas de un conductor plano se separan, desde una distancia inicial  $d$  hasta una distancia final  $2d$ , manteniendo constante la carga en las placas. Estudiar los cambios de capacidad, diferencia de potencial, energía almacenada y el trabajo realizado por el agente externo que separa las placas.



### SOLUCIÓN

Suponiendo que la separación entre las placas es pequeña, entonces el campo eléctrico entre las placas puede considerarse uniforme y los efectos de dispersión pueden despreciarse. Luego:

(a) Situación inicial :

$$E_0 = \frac{S}{e_0}$$

$$V_0 = E_0 d$$

$$C_0 = \frac{e_0 A}{d}$$

$$U_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0}$$

(b) Situación final :

$$E = \frac{S}{e_0}$$

$$V = E \cdot 2d$$

$$C = \frac{e_0 A}{2d}$$

$$U = \frac{Q_0^2}{2C}$$

En consecuencia tenemos que :

(a) El campo eléctrico no cambia:  $E = E_0$

(b) La diferencia de potencial se duplica :  $V = 2V_0$

(c) La capacidad disminuye a la mitad :  $C = \frac{1}{2}C_0$

(d) La energía almacenada aumenta al doble :  $U = 2U_0$



Todos los cambios anteriores son el resultado de separar las placas al doble, manteniendo constante la carga  $Q_0$  en las placas (lo que implica mantener  $\mathcal{E}$  constante).

Además, el cambio en la energía del sistema es debido al trabajo efectuado por el agente externo que separa las placas. Puesto que la única forma de energía asociada con el sistema es la energía potencial eléctrica almacenada entre las placas; entonces,

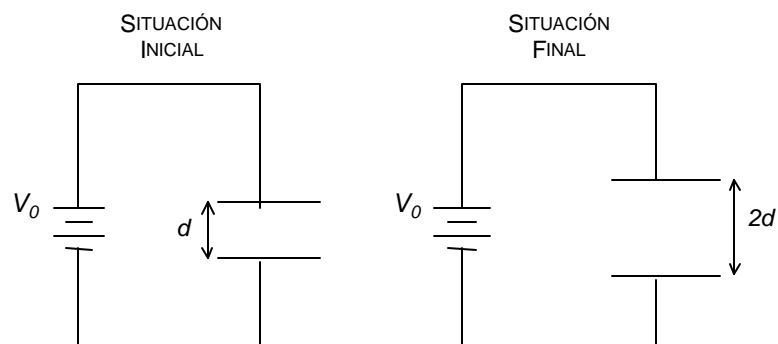
$$\Delta U = U - U_0 = W$$

luego :

$$W = 2U_0 - U_0 = U_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0} ,$$

es el trabajo efectuado por el agente externo.

**PROBLEMA 45.** Las placas de un condensador plano se separan, desde una distancia inicial  $d$  hasta una distancia final  $2d$ , manteniendo constante la diferencia de potencial entre las placas. Estudiar las mismas cantidades del problema anterior, es decir, los cambios de capacidad, diferencia de potencial, energía almacenada y el trabajo efectuado por el agente externo que separa las placas.



### SOLUCIÓN

Haciendo las mismas consideraciones que en el problema anterior, es decir, considerando que  $d$  es pequeño y los efectos de dispersión en los bordes son despreciables, tenemos :

(a) Situación inicial :

$$E_0 = \frac{V_0}{d}$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$q_0 = C_0 V_0$$

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

(b) Situación final :

$$E = \frac{V_0}{2d}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{2d}$$

$$q = C V_0$$

$$U = \frac{1}{2} C V_0^2$$

En consecuencia tenemos que :

(a) El campo eléctrico disminuye a la mitad :  $E = \frac{1}{2} E_0$

(b) La capacidad disminuye a la mitad :  $C = \frac{1}{2} C_0$

(c) La carga disminuye a la mitad :  $q = \frac{1}{2} q_0$

(d) La energía almacenada disminuye a la mitad :  $U = \frac{1}{2} U_0$

En esta situación los resultados son muy diferentes a los del problema anterior, donde la separación se hacía a carga constante.

La consecuencia de mantener constante la diferencia de potencial entre las placas es, en este caso, que la capacidad, la carga, la energía almacenada y la magnitud del campo eléctrico, disminuyen a la mitad.

En cuanto al cambio en la energía electrostática del condensador, éste debe ser igual al trabajo total efectuado sobre él por agentes externos. Esta vez, además del agente encargado de separar las placas, hay otro agente que es la batería encargada de mantener constante la diferencia de potencial entre las placas. Entonces :

$$\Delta U = W_F + W_b$$

donde

$$\Delta U = U - U_0 = \frac{1}{2} U_0 - U_0 = -\frac{1}{2} U_0 ,$$

$W_F$  es el trabajo que efectúa el agente que separa las placas y

$W_b$  es el trabajo efectuado por la batería.

La batería mueve una carga  $\Delta q$  a través de una diferencia de potencial  $V_0$ , efectuando un trabajo  $W_b$  igual a :

$$W_b = V_0 \cdot \Delta q = V_0 (q - q_0) = V_0 \left( \frac{1}{2} q_0 - q_0 \right)$$

$$W_b = -\frac{1}{2} q_0 V_0 = -\frac{1}{2} C_0 V_0^2 = -U_0 \quad .$$

$W_b$  es negativo puesto que la batería traslada una carga  $\frac{1}{2} q_0$  desde un potencial mayor a otro menor. Al reemplazar los valores de  $\Delta U$  y  $W_b$  en la ecuación  $\Delta U = W_F + W_b$ ; encontramos :

$$W_F = \frac{1}{2} U_0 = \frac{1}{4} C_0 V_0^2$$

Note que el trabajo efectuado por el agente externo que separa las placas es **positivo**, sin importar si es la carga o la diferencia de potencial la que se mantiene constante. Esto es así pues las placas tienen cargas de signos opuestos y se atraen entre sí.

---

