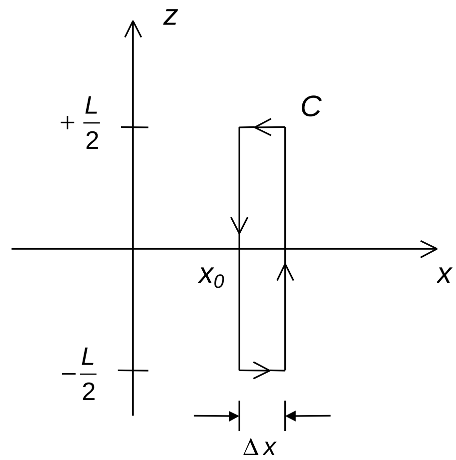
15. CAMPOS Y ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

PROBLEMA 97. En una región existen un campo eléctrico y un campo magnético dados por :

$$\vec{E} = E_0 \text{ sen } k\,(x - c\,t) \bullet \hat{y} \ ,$$

$$\vec{B} = B_0 \text{ sen } k\,(x - c\,t) \bullet \hat{z} \ ,$$

donde E_0 , B_0 , c y k son constantes.



En el plano *xz* de esa región se escoge el camino rectangular *C*, de lados L y Δx , como se indica en la figura, siendo $k \bullet \Delta x \ll 1$.

(a) Calcular la rapidez de cambio del flujo del campo eléctrico a través del área encerrada por el camino *C* .

(b) Calcular la circulación del campo magnético a lo largo del camino *C* .

SOLUCIÓN

(a)
$$\phi_E = \int_{A_C} \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \vec{E} \bullet (-L\,d\,x\,\hat{y}) = -\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} E\,(x,t)\ L\,d\,x \ .$$

Note que el signo – aparece porque el sentido en que se recorre el camino C y la regla de la mano derecha implican un vector $d\vec{A}$ en dirección $-\hat{y}$. Puesto que $k \bullet \Delta x$ es muy pequeño, una buena aproximación para la integral se obtiene considerando que el integrando es constante, resultando :

$$\phi_E = -E\,(x_0\,,t) \bullet L \bullet \Delta x \ .$$

Entonces,

$$\frac{d\,\phi_E}{d\,t} = k\,c\,L\,\Delta x\ E_0\ \cos k\,(x_0 - c\,t) \ .$$

(b) De acuerdo a una de las ecuaciones de Maxwell, en el vacío ,

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\,\vec{\ell} \;=\; \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{d}{dt}\,\phi_E \quad ,$$

la circulación de $\vec{B}$ se relaciona con la rapidez de cambio del flujo eléctrico; de modo que la solución se obtiene de inmediato usando el resultado de (a) ,

$$\oint \vec{B} \bullet d\,\vec{\ell} \;=\; \mu_0\,\varepsilon_0\,k\,c\,L\,\Delta x\,E_0\,\cos k\,(x_0 - c\,t) \;.$$

Lo anterior se puede escribir en forma más compacta, usando las relaciones :

$$\mu_0\,\varepsilon_0 = 1/c^2 \qquad \text{y} \qquad E_0 = c\,B_0 \;,$$

válidas para ondas electromagnéticas en el vacío.

Entonces,

$$\oint \vec{B} \bullet d\,\vec{\ell} \;=\; k\,L\,\Delta x\,B_0\,\cos k\,(x_0 - c\,t)$$

PROBLEMA 98. La intensidad del campo eléctrico de una onda electromagnética plana es :

$$\vec{E}\,(x,t) = 10^{-3}\,\hat{z} \bullet \mathrm{sen}\left(3{,}0\,x - 7{,}5 \bullet 10^{8}\,t\right) \;,$$

donde los valores numéricos están en unidades del sistema MKSC.

(a) Calcular la longitud de onda.

(b) Calcular la rapidez de propagación.

(c) Calcular la amplitud del campo magnético.

SOLUCIÓN

(a) El número de onda es $k = 3{,}0\ [m^{-1}]$.

Entonces, la longitud de onda es :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3{,}0} \simeq 2{,}1\,[m] \ .$$

(b) La frecuencia angular es $\omega = 7{,}5 \bullet 10^{8}\ [rad/s]$.

Entonces, la rapidez de propagación de la onda es :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{7{,}5 \bullet 10^{8}}{3{,}0} = 2{,}5 \bullet 10^{8}\ [m/s] \ .$$

(c) La amplitud del campo eléctrico es $E_0 = 10^{-3}\ [V/m]$.

Entonces, la amplitud del campo magnético es :

$$B_0 = \frac{E_0}{v} = \frac{10^{-3}}{2{,}5 \bullet 10^{8}} = 4{,}0 \bullet 10^{-12}\ [T] \ .$$

PROBLEMA 99. Un láser tiene una potencia de salida de 4,0 [mW] y emite un haz cuya sección transversal es de 4,0 [mm^2] .

(a) Calcular la energía electromagnética contenida en 1,0 [m] de longitud del haz.

(b) Estimar la amplitud del vector $\vec{E}$ correspondiente a la onda de luz láser.

SOLUCIÓN

(a) La energía asociada a una onda electromagnética monocromática que se propaga en el vacío (o en el aire), se propaga a la misma velocidad de la onda. Luego, la energía ε contenida en una longitud ℓ de un haz proveniente de un láser, corresponde a la energía emitida por el láser en un lapso $\Delta t = \ell / c$. En términos de la potencia p de salida, dicha energía es :

$$\varepsilon = p \bullet \Delta t = \frac{p\ell}{c} = \frac{4{,}0 \bullet 10^{-3} \bullet 1{,}0}{3{,}0 \bullet 10^{8}} = 1{,}3 \bullet 10^{-11}\ [W]\ .$$

Una manera alternativa de obtener el resultado anterior, un poco más laboriosa, hace uso de la densidad de energía electromagnética w en el haz. Entonces,

$$\varepsilon = w\ A\ \ell = w\ A\ c \bullet \Delta t\ \ ,$$

donde $A \bullet \ell$ es el volumen del haz que contiene la energía ε.

Usando relaciones entre intensidad, potencia y densidad de energía de una onda :

$$p = I\ A \qquad , \qquad I = w\,c\ \ ,$$

la energía ε puede expresarse como había resultado en la explicación inicial, es decir :

$$\varepsilon = w\,c\,A\ \Delta t = I\ A\,\Delta t = p \bullet \Delta t\ .$$

(b) La densidad de energía electromagnética w se expresa en términos de la amplitud E_0 del campo eléctrico, según :

$$w = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\ E_0^2\ .$$

Por otra parte, de acuerdo a lo expuesto en la parte (a), la potencia de salida del láser puede expresarse en términos de w mediante la relación :

$$p = w\,c\,A\ .$$

Combinando las dos expresiones se obtiene la relación :

$$p = \frac{1}{2}\,c\ \varepsilon_0\ A\ E_0^2\ ,$$

de la cual se despeja la amplitud E_0 ,

$$E_0 = \sqrt{\frac{2p}{c\,\varepsilon_0\,A}} = \sqrt{\frac{8\pi p}{4\pi\varepsilon_0 c\,A}} = \sqrt{\frac{8\pi \bullet 9 \bullet 10^{9} \bullet 4 \bullet 10^{-3}}{3 \bullet 10^{8} \bullet 4 \bullet 10^{-6}}} \simeq 8{,}7 \bullet 10^{2}\,[V/m]\ .$$

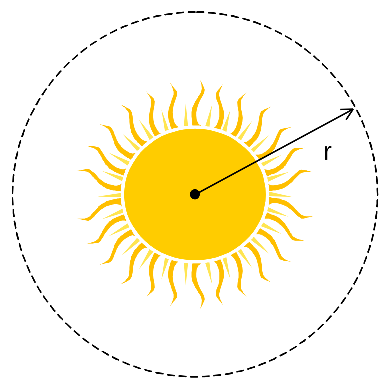
PROBLEMA 100. La intensidad de la radiación solar que llega a las capas superiores de la atmósfera terrestre es de $1{,}4[kW/m^2]$. Considere que la distancia Tierra – Sol es de $1{,}0[UA]$, la distancia Júpiter – Sol es de $5{,}2[UA]$, y el radio de Júpiter es 11,2 veces el radio terrestre.

(a) Calcular la intensidad de la radiación solar que llega al planeta Júpiter.

(b) Calcular el cuociente entre la energía solar que recibe la Tierra y la que recibe Júpiter en el mismo lapso.

SOLUCIÓN

(a) Podemos considerar que el Sol emite energía en todas direcciones con igual intensidad, y que la absorción de energía solar en lugares como la atmósfera terrestre es despreciable. Entonces, la energía E que fluye a través de la superficie de una esfera de radio r cuyo centro está en el Sol, se relaciona con la intensidad $I(r)$ a esa distancia, según :



$$E = I(r) \cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta t \ ,$$

siendo Δt el intervalo de tiempo y $4\pi r^2$ el área de la superficie esférica.

Puesto que la energía fluye radialmente alejándose del Sol con velocidad constante, prácticamente sin absorción en el espacio que atraviesa, debe tener el mismo valor a cualquier distancia r, es decir, debe cumplirse que :

$$I(r_1) \cdot 4\pi\, r_1^2 \cdot \Delta t = I(r_2) \cdot 4\pi\, r_2^2 \cdot \Delta t \ .$$

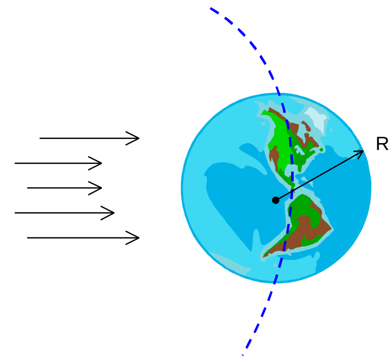
Luego;

$$I(r_2) = I(r_1) \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \ .$$

Considerando que $r_2 = 5{,}2[UA]$ y $r_1 = 1{,}0[UA]$, se obtiene la intensidad de la radiación solar que llega a Júpiter a partir de la que llega a las capas superiores de la atmósfera terrestre.

$$I_{\text{Júpiter}} = 1{,}4 \cdot \left(\frac{1}{5{,}2}\right)^2 = 0{,}052\ [kW/m^2] \ .$$

(b) La energía solar ε que recibe la Tierra es una pequeña fracción de la energía E que emite el Sol. Considerando que r es el radio de la órbita terrestre; entonces,



$$\varepsilon = \mathrm{I}(r) \bullet \pi R^2 \, \Delta t \ ,$$

siendo πR^2 el área efectiva de la cara terrestre que recibe la radiación solar. Puesto que la relación anterior se cumple para cualquier planeta, se obtiene :

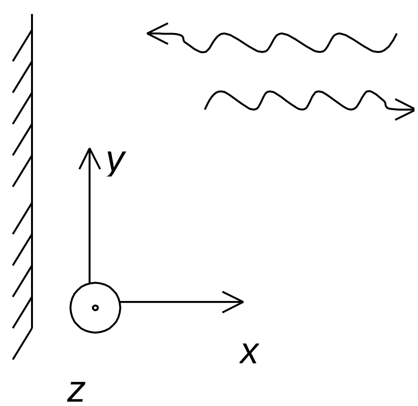
$$\frac{\varepsilon_{\text{Tierra}}}{\varepsilon_{\text{Júpiter}}} = \frac{\mathrm{I}_{\text{Tierra}} \bullet R_T^2}{\mathrm{I}_{\text{Júpiter}} \bullet R_J^2} \ .$$

Usando la relación obtenida en la parte (a) y los datos del enunciado, tenemos :

$$\frac{\varepsilon_{\text{Tierra}}}{\varepsilon_{\text{Júpiter}}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \bullet \left(\frac{R_T}{R_J}\right)^2 = 5{,}2^2 \bullet \frac{1}{11{,}2^2} = 0{,}22 \ .$$

A pesar que Júpiter está más lejos del Sol, recibe cerca de 5 veces más energía solar que la Tierra debido a su mayor tamaño.

PROBLEMA 101. Un haz de microondas es reflejado en una superficie metálica, produciéndose una onda electromagnética estacionaria, cuyo campo eléctrico es :



$$E_y(x,t) = E_0 \ \text{sen}(2\pi x / \lambda) \bullet \cos(\omega t) \quad ,$$

$$E_x = E_z = 0 \, .$$

Obtener el campo magnético correspondiente a la onda estacionaria.

SOLUCIÓN

La onda estacionaria dada se forma por superposición de dos ondas que se propagan en dirección opuesta, con la mitad de la amplitud E_0. Usando identidades trigonométricas, verifique que $E_y(x,t)$ también puede escribirse como :

$$E_y(x,t) = \frac{1}{2} E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t \right) + \frac{1}{2} E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \omega t \right) .$$

A cada onda propagatoria le corresponde un campo eléctrico y un campo magnético. Para la onda que viaja en dirección x :

$$E_{y1}(x,t) = \frac{1}{2} E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t \right) ,$$

$$B_{z1}(x,t) = \frac{1}{2} B_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t \right) \quad ; \quad \text{con} \quad B_0 = E_0 / c .$$

Análogamente, para la onda que viaja en dirección –x :

$$E_{y2}(x,t) = \frac{1}{2} E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \omega t \right) ,$$

$$B_{z2}(x,t) = -\frac{1}{2} B_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \omega t \right) .$$

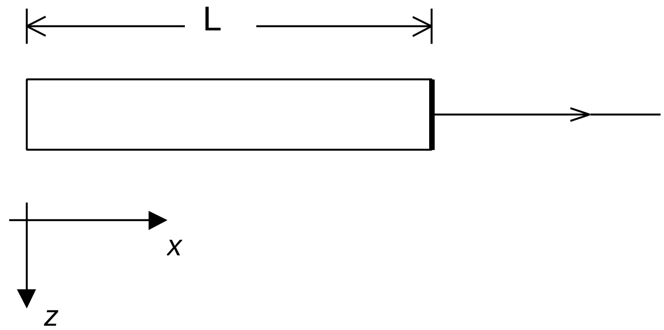
El campo magnético correspondiente a la onda estacionaria se obtiene por superposición de los campos pertenecientes a las dos ondas propagatorias.

$$B_z(x,t) = \frac{1}{2} B_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t \right) - \frac{1}{2} B_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \omega t \right)$$

Usando relaciones trigonométricas, se obtiene el resultado final :

$$B_z(x,t) = -B_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \bullet \operatorname{sen}(\omega t) \quad ; \quad B_x = B_y = 0 .$$

PROBLEMA 102. Un láser de He-Ne consta de una cavidad de longitud *L* en que existe una onda electromagnética estacionaria que resulta de la reflexión en espejos situados en los extremos. Por un extremo emerge radiación visible que se describe como una onda propagatoria de frecuencia *f* y polarización en dirección z.



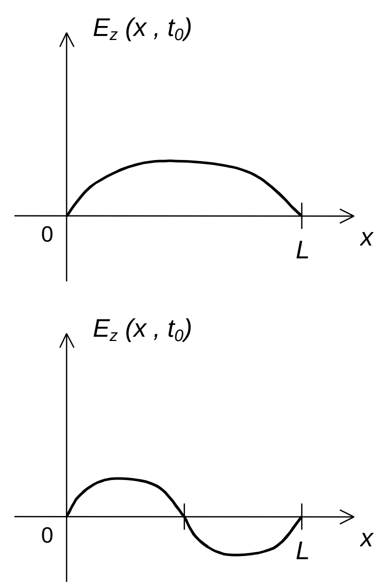
(a) Obtener el conjunto de valores posibles de *f*, en términos de la longitud *L*.

(b) Describir cualitativamente el campo eléctrico dentro y fuera de la cavidad.

(c) Describir cualitativamente el campo magnético dentro y fuera de la cavidad.

SOLUCIÓN

(a) Consideremos que la onda estacionaria en el interior de la cavidad posee una única frecuencia, y su campo eléctrica en los extremos es, en todo momento, nulo. Estas condiciones se cumplen en ondas estacionarias cuyo campo eléctrico posee un número entero $(n = 1, 2, 3, ...)$ de cototos dentro de la cavidad, como se indica en la figura.



Algebraicamente, esto se expresa con la igualdad

$$k_n L = n\pi \quad ,$$

siendo n un entero $(n = 1, 2, 3, ...)$ que indica el número de cototos de la sinusoide, y k_n es el número de onda, relacionado con la frecuencia ω_n, mediante la igualdad :

$$\omega = k_n \bullet v \quad ,$$

donde v es la velocidad de propagación de ondas en el interior de la cavidad.

Usando la igualdad $\omega = 2\pi f$, se obtiene el resultado pedido :

$$f = \frac{nv}{2L} \ ,$$

que consta de la frecuencia fundamental $f_1 = v / 2L$ y sus múltiplos.

(b) Usando el sistema de coordenadas indicado en la figura, y sabiendo que la dirección de polarización corresponde a la dirección del campo eléctrico, la onda estacionaria más simple dentro de la cavidad, se describe como :

$$\vec{E}_i\,(x,t) = E_{0i}\,\hat{z} \bullet \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \bullet \cos\left(\frac{n\pi v t}{L}\right) .$$

Se advierte que esta descripción es sólo aproximada, pues en el interior de la cavidad de un láser que está emitiendo radiación por un extremo, el campo eléctrico no es exactamente nulo en ese extremo para permitir la existencia de una onda que se propaga hacia afuera.

Fuera de la cavidad la onda propagatoria correspondiente es :

$$\vec{E}_e\,(x,t) = E_{0e}\,\hat{z} \bullet \text{sen}\frac{n\pi}{L}\ (x - c\,t) \ ,$$

donde c es la rapidez de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío.

(c) Dentro de la cavidad, el campo magnético para la onda estacionaria es (ver PROBLEMA101):

$$\vec{B}_i\,(x,t) = B_{0i}\,\hat{y} \bullet \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \bullet \text{sen}\left(\frac{n\pi v t}{L}\right) \ ,$$

donde $B_{0i} = E_{0i} / v$.

Fuera de la cavidad el campo magnético correspondiente a la onda se describe como :

$$\vec{B}_e\,(x,t) = -\,B_{0e}\,\hat{y} \bullet \text{sen}\,\frac{n\pi}{L}\,(x - c\,t) \ ,$$

donde $B_{0e} = E_{0e} / c$.