10. CAMPO MAGNÉTICO

PROBLEMA 63. Un haz de electrones es acelerado por una tensión de 100[V], y luego se hace pasar por un agujero situado en el centro de un disco. El haz entra al agujero formando un ángulo de 30° con respecto al eje del disco, encontrando una región sin campo eléctrico y con un campo magnético perpendicular a la velocidad de entrada de los electrones. El haz vuelve al disco a una distancia de 1,5[cm] del agujero.

Suponiendo que el campo magnético es uniforme; determinar $\vec{B}$, el vector de inducción de campo magnético.

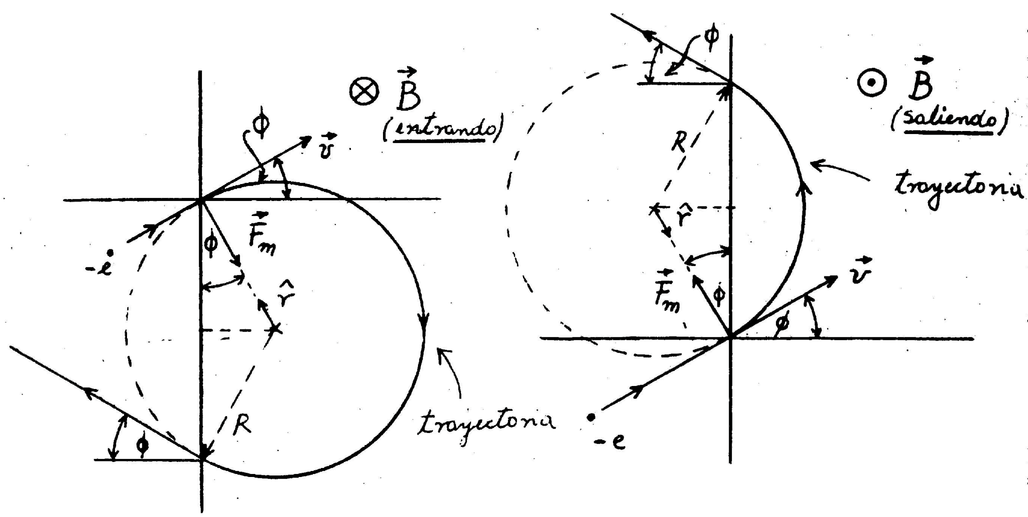
SOLUCIÓN

La magnitud de la velocidad que adquieren los electrones que parten del reposo $(K_i = 0)$, al ser acelerados por una diferencia de potencial V_0, está dada por:

$$\Delta K = W_e$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = V_0 \bullet e \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 V_0\, e}{m}} \; .$$

Los electrones en la región del campo magnético uniforme, describirán trayectorias que son arcos de circunferencia. Tenemos dos posibilidades, ilustradas por los esquemas siguientes; dependiendo de la dirección en que apunta el campo magnético :



Aún cuando la trayectoria del haz de electrones depende del sentido de $\vec{B}$ (entrando o saliendo de la página), su radio de curvatura sólo depende de la magnitud de $\vec{B}$, como se indica a continuación :

$$\vec{F}_{\text{magnética}} = m \bullet \vec{a}_r$$

$$-e\,\vec{v} \times \vec{B} = m \bullet \frac{v^2}{R}\left(-\hat{r}\right) ,$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario en la dirección radial. Puesto que $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares; entonces :

$$-e\,v\,B\left(\hat{r}\right) = \frac{m \bullet v^2}{R}\left(-\hat{r}\right)$$

lo cual da :

$$R = \frac{m\,v}{e\,B}$$

Si d es la distancia a la cual el haz de electrones vuelve al disco; entonces, de acuerdo a la figura anterior, para las dos posibilidades consideradas debe cumplirse una misma condición :

$$\frac{d}{2} = R \bullet \cos\phi$$

Luego ,

$$\frac{d}{2} = \frac{m\,v}{e\,B}\cos\phi = \frac{m}{e\,B} \bullet \sqrt{\frac{2\,V_0\,e}{m}} \bullet \cos\phi ,$$

lo cual permite despejar B como :

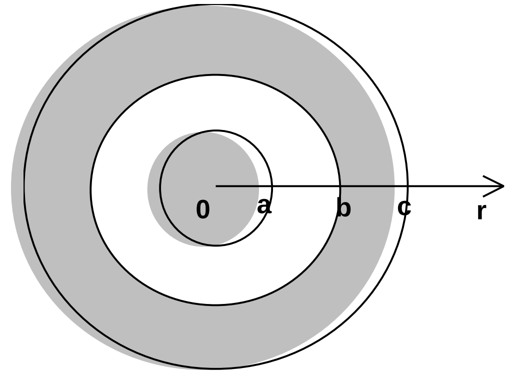
$$B = \frac{2}{d} \bullet \frac{m}{e} \bullet \sqrt{\frac{2V_0 \bullet e}{m}}\cos\phi = \frac{2}{d} \bullet \sqrt{\frac{2V_0 \bullet m}{e}}\cos\phi .$$

Con $d = 1{,}5\ [cm]$, $\phi = 30°$, $V_0 = 100\ [\mathrm{V}]$ y $\left(\frac{e}{m}\right) = 1{,}76 \bullet 10^{11}\ [C/kg]$, tenemos :

$$B = \frac{\cancel{2}}{1{,}5 \bullet 10^{-2}} \bullet \sqrt{\frac{2 \bullet 10^2}{1{,}76 \bullet 10^{11}}} \bullet \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \simeq 3{,}9 \bullet 10^{-3}\ [T] .$$

Analice cuidadosamente las figuras, en ellas está la clave de la solución y ahorran mucha explicación.

PROBLEMA 64. Por un "CABLE COAXIAL" muy largo circula una corriente *I*, con densidad constante en cada conductor. La corriente entra por el conductor interno y regresa por el externo; ambos están separados por un material aislante, tubular, de permeabilidad μ_0.



Determinar $\vec{B}$ en un punto cualquiera del eje r indicado en la figura.

SOLUCIÓN

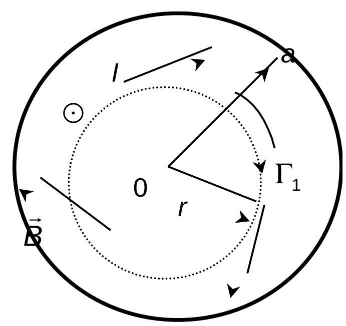
Debemos distinguir cuatro regiones donde es necesario determinar B :

(i) $r < a$; **(ii)** $a < r < b$; **(iii)** $b < r < c$ y **(iv)** $r > c$.

Se resolverá ordenadamente, a partir de la región **(i)**.

Región (i) : $r > a$. La corriente total por el conductor interior es *I* y fluye entrando perpendicularmente a la página con densidad constante dada por : $j_i = \dfrac{I}{A} = \dfrac{I}{\pi a^2}$.

Debido a la simetría cilíndrica de la situación, las líneas de inducción magnética serán circunferencias con centro en 0 y la magnitud de $\vec{B}$ será la misma en todos los puntos de una circunferencia de radio r. Al aplicar la ley de Ampere a la trayectoria circular Γ_1 de la figura, tenemos:



$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 \, i$$

$$B \bullet 2\pi r = \mu_0 \bullet \int_S \vec{J}_i \bullet d\vec{A} \qquad S: \text{superficie encerrada por } \Gamma_1$$

$$B \bullet 2\pi r = \mu_0 \bullet \int_0^r \frac{I}{\pi a^2} \bullet 2\pi r \, dr = \frac{\mu_0 I \bullet 2\pi}{\pi a^2} \frac{1}{2} r^2 \; .$$

Despejando;

$$B = \frac{\mu_0 I \bullet r}{2\pi a^2} \qquad ; \qquad r < a$$

Nótese que i se determinó siguiendo un método general: $i = \int_S \vec{J} \bullet d\vec{A}$; sin embargo, en este caso el cálculo puede hacerse más fácilmente, ya que $\vec{J}_i$ es constante. Entonces, las corrientes son proporcionales a las áreas de sección transversal, es decir :

$$J_i = \frac{I}{\pi a^2} = \frac{i}{\pi r^2} \qquad ; \qquad \text{luego : } i = I \bullet \frac{r^2}{a^2} \quad ,$$

lo que conduce al mismo resultado anterior, pues:

$$B \bullet 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2} \quad \longrightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

Región (ii) : $a < r < b$. Utilizando los mismos argumentos de simetría que en el caso anterior, ahora al aplicar la ley de Ampere a un trayectoria cerrada circular Γ_2, tendremos que la corriente "ENCERRADA" es I, para todo r en esta región.

Entonces:

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

$$B \bullet 2\pi r = \mu_0 I$$

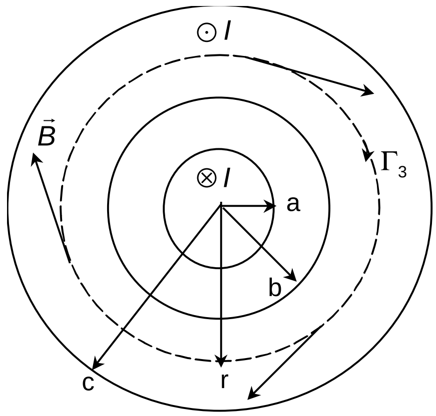
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad ; \qquad a < r < b$$

Nótese que para esta región, el conductor interior se comporta como un alambre filamentario (de radio muy pequeño) ubicado en el eje del conductor, transportando una corriente I .

Región (iii) : $b < r < c$. La corriente total por el conductor exterior es I , y fluye saliendo perpendicularmente de la página, con densidad constante :

$$J_e = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi c^2 - \pi b^2} = \frac{I}{\pi\left(c^2 - b^2\right)} \quad .$$

Utilizando la simetría para aplicar la ley de Ampere a la trayectoria Γ_3 de la figura tenemos:



$$\oint_{\Gamma_3} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 i'$$

donde : $i' = I - i_e$,

con $i_e = J_e A_e = J_e \left(\pi r^2 - \pi b^2 \right)$

Luego: $$B \bullet 2\pi r = \mu_0 \left(I - I \frac{\pi\left(r^2 - b^2\right)}{\pi\left(c^2 - b^2\right)} \right)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) \quad ; \quad b < r < c$$

Región (iv) : $r > c$. Puesto que la corriente fluye, entrando por el conductor interior y saliendo por conductor exterior, al aplicar la ley de Ampere utilizando los argumentos de simetría vistos anteriormente, tendremos :

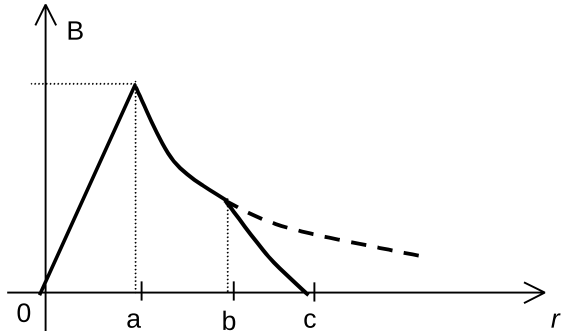
$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 \left(I - I \right) = 0$$

$$B \bullet 2\pi r = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = 0$$

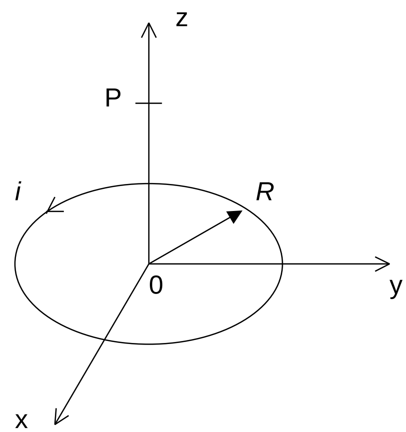
En resumen :

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \bullet r & ; \ r < a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & ; \ a < r < b \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \dfrac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) & ; \ b < r < c \\ 0 & ; \ r > c \end{cases}$$

Gráficamente :

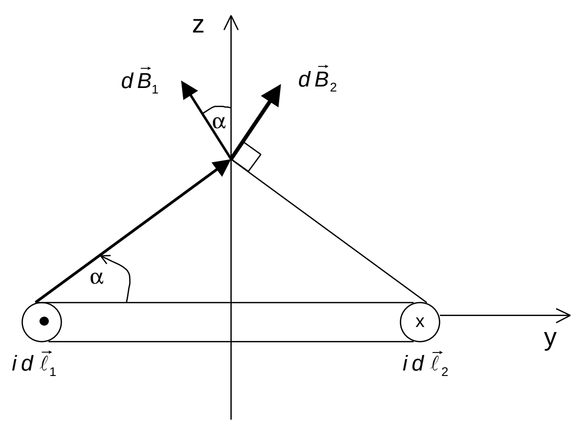


PROBLEMA 65. Una espira con forma de circunferencia de radio R lleva corriente i. Calcular la densidad de flujo magnético $\vec{B}$ en un punto del eje de la espira, de coordenadas (0 , 0 , z) en la figura adjunta.



SOLUCIÓN

En este caso conviene usar la ley de Biot-Savat para expresar la densidad de flujo magnético producida por un elemento de corriente. Con el objeto de visualizar la situación se considera los dos elementos de corriente que son perpendiculares al plano yz, como se indica en la figura.



El campo $d\vec{B}_1$ producido por el elemento 1 es :

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,d\,\vec{\ell}_1\,x\,\vec{r}}{r^3} \quad .$$

Este vector forma el ángulo α con el eje z, es perpendicular al vector $\vec{r}$ contenido en el plano del dibujo, y es perpendicular al elemento de corriente $i\,d\,\vec{\ell}_1$ que apunta en dirección $\hat{x}$, saliendo del plano del dibujo. Un análisis similar corresponde al elemento $i\,d\vec{\ell}_2$. Sumando vectorialmente las contribuciones de ambos elementos resulta un vector en dirección z. Así, sumando contribuciones de pares de elementos situado en los extremos opuestos de una línea diametral, se concluye que se anulan las contribuciones perpendiculares al eje z , mientras que las contribuciones en dirección z se deben sumar para incluir todos los elementos.

Entonces ,

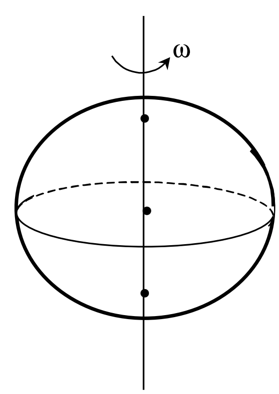
$$B_z = \int dB_1 \bullet \cos\alpha = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,d\ell_1\,\cancel{r}\bullet R}{r^3\bullet\cancel{r}} = \frac{\mu_0\, i\, R^2}{2r^3}\ .$$

Note que para realizar la integral sólo se ha integrado $d\ell_1$ pues las demás magnitudes son iguales para todos los elementos diferenciales del anillo.

Finalmente, el resultado deseado escrito como vector es :

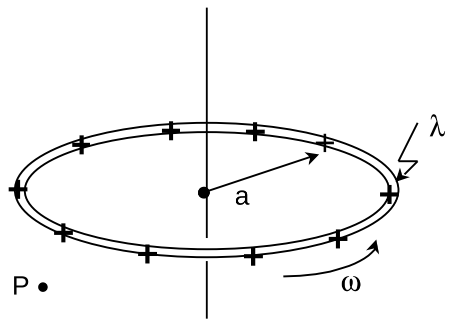
$$\vec{B} = \frac{\mu_0\ i\ R^2\,\hat{z}}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\ .$$

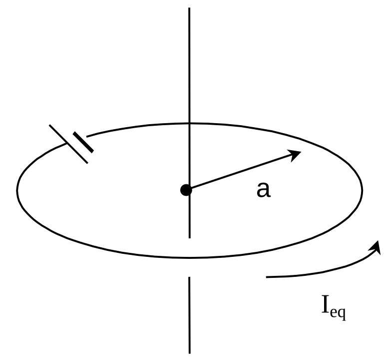
PROBLEMA 66. Una esfera metálica, de radio $R = 20\ [cm]$, que está cargada hasta el potencial $V = 10^5\ [\mathrm{V}]$ gira alrededor de uno de sus diámetros con frecuencia $f = 10^4\ [rev/\mathrm{min}]$. Calcular el vector de inducción del campo magnético producido en su centro.



<u>**SOLUCIÓN**</u>

El problema puede resolverse mediante la superposición de anillos cargados. Un anillo, cargado con densidad lineal de carga uniforme λ, que gira con rapidez angular ω constante es equivalente a una corriente en un espira circular, como se ilustra a continuación :



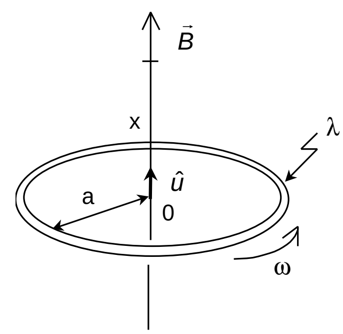


El valor de la corriente equivalente puede obtenerse calculando cuánta carga pasa, en un cierto tiempo, frente a un punto fijo de observación P. Por ejemplo, en un período de revolución del anillo :

$$I_{\text{equivalente}} = \frac{q}{T} = \frac{2\pi\, a\, \lambda}{\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)} = \omega a \lambda$$

Compruebe la consistencia dimensional de la ecuación anterior.

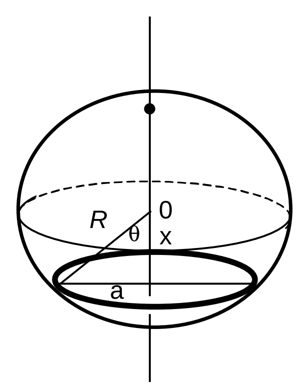
Por lo tanto, el campo magnético producido por un anillo cargado que gira, en un punto de su eje, y a una distancia x del centro es : (ver PROBLEMA 65).

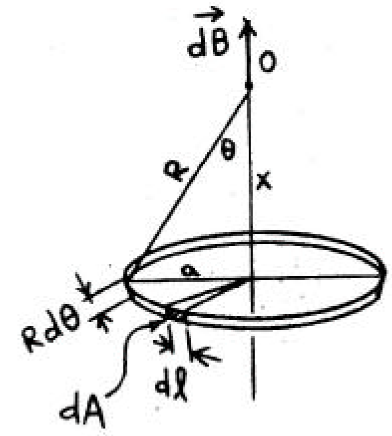


$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, I_{eq} \bullet a^2}{2\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} \bullet \hat{u} = \frac{\mu_0\, \omega \lambda a^3}{2\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} \bullet \hat{u}$$

siendo $\hat{u}$ un vector unitario dirigido a lo largo del eje, en el sentido determinado por la rotación del anillo, según la regla de la mano derecha. Compruebe que $\vec{B}$ tiene el mismo sentido a ambos lados del anillo y que $B \neq 0$ en el centro.

Puesto que la carga en una esfera metálica está uniformemente distribuida en su superficie externa, para calcular $\vec{B}$ en el centro de una esfera metálica cargada y giratoria consideramos su superficie subdividida en anillos diferenciales.





El elemento diferencial de carga de un anillo diferencial es :

$$dq = \sigma\, dA = \left(\frac{Q}{4\pi R^2}\right) \bullet R\, d\theta\, d\ell \quad ,$$

siendo Q la carga total de la esfera.

La densidad lineal de uno de estos anillos es :

$$\frac{d\,q}{d\,\ell} = \frac{Q}{4\,\pi R^2}\, R\, d\,\theta = \frac{Q\, d\theta}{4\pi\, R} \quad ,$$

y corresponde a lo que hemos denominado λ al escribir el campo magnético producido por un anillo cargado que gira.

Reemplazando lo anterior para obtener el campo del anillo en el centro de la esfera, resulta :

$$d\,\vec{B} = \frac{\mu_0 \omega \left(\dfrac{Q\, d\,\theta}{4\,\pi\, R}\right) (R\, sen\theta)^3}{2\left((R\, sen\,\theta)^2 + (R\cos\theta)^2\right)^{3/2}} \bullet \hat{u}$$

$$d\,\vec{B} = \frac{\mu_0\, \omega Q\, \hat{u}}{8\pi R} \bullet sen^3\theta\, d\,\theta$$

El campo resultante se obtiene integrando la relación anterior.

$$\vec{B} = \int\limits_{\substack{sup.de\\ la\, esfera}} d\vec{B} = \frac{\mu_0\, \omega Q}{8\pi\, R}\, \hat{u} \quad \int_0^{\pi} sen^3\theta\; d\theta \;\; = \frac{\mu_0\, \omega Q}{8\pi\, R} \hat{u} \bullet 2 \int_0^{\pi/2} sen^3\theta\; d\theta$$

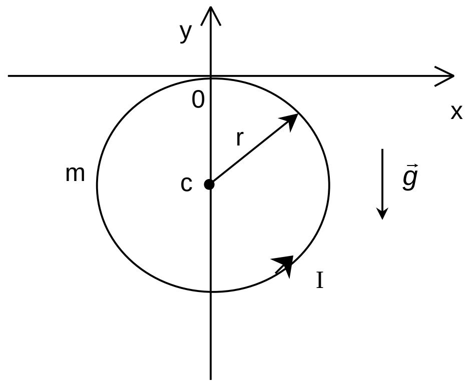
$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, \omega Q}{4\pi\, R} \hat{u} \left[-\frac{1}{3} \cos\theta \left(sen^2\theta + 2\right) \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}\, \frac{\mu_0\, \omega Q\, \hat{u}}{4\pi\, R} \; [0-2]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, \omega Q}{6\pi\, R}\, \hat{u}$$

Compruebe la consistencia dimensional de la relación obtenida.

Con $Q = 4\pi\, \varepsilon_0\, RV$, resulta $\vec{B} = 3{,}90 \bullet 10^{-9}\, \hat{u}\;\; [Tesla]$.

PROBLEMA 67. Una corriente de intensidad $I = 40\ [A]$ recorre un anillo de masa $m = 25\ [g]$ y de radio $r = 4\,[m]$. El anillo se suspende verticalmente, de tal manera que puede girar alrededor de un eje horizontal que es tangente al anillo.



Usando el sistema de coordenadas indicado en la figura, ¿qué posición tomará el anillo en un campo magnético $\vec{B}$ cuyas componentes son $B_x = 1\ [T]$ y $B_y = 1\,[T]$?

SOLUCIÓN

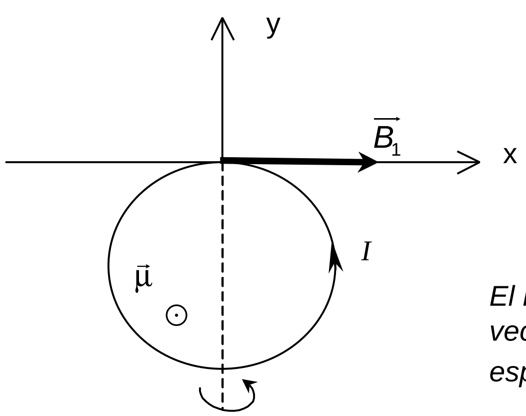
Consideremos la espira sometida sucesivamente a la acción de los campos magnéticos :

(i) $\overrightarrow{B_1} = B_x\,\hat{x}$

y

(ii) $\overrightarrow{B_2} = B_y\,\hat{y}$

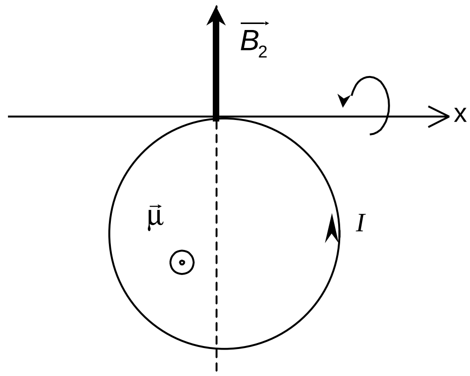
Primero se analiza el efecto que produce el campo $\overrightarrow{B_1}$ sobre la espira.



El momento magnético de la espira es el vector $\vec{\mu}$ perpendicular al plano de la espira, saliendo de él.

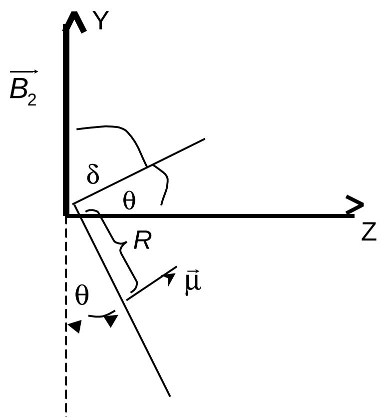
El torque debido a $\overrightarrow{B_1}$ es $\overrightarrow{\tau_1} = \vec{\mu} \times \overrightarrow{B_1}$ y haría girar la espira en torno al eje *y*, lo que no es posible por las condiciones dadas en el enunciado del problema. Por lo tanto, la componente del campo en la dirección del eje *x*, no tiene efecto de cambio de posición del anillo.

El campo $\overrightarrow{B_2}$ ejerce un torque $\overrightarrow{\tau_2} = \vec{\mu} \times \overrightarrow{B_2}$ que hace girar la espira en torno al eje *x*.



La magnitud del torque es : $\tau_2 = \mu B_2 \,\text{sen}\,\delta$, donde δ es el ángulo entre $\vec{\mu}$ y $\overrightarrow{B_2}$.

La posición de equilibrio de la espira se logra cuando la magnitud del torque debido al campo magnético sea igual a la magnitud del torque debido al peso de la espira.



Puesto que $\mu = I\,A$, siendo A el área de la espira, las magnitudes de los torques sobre la espira son :

$$\left\| \vec{\tau}_{magnético} \right\| = \left\| \vec{\mu} \times \vec{B}_2 \right\| = I\,A\,B_y\ sen(\delta) = I\,\pi R^2 \bullet B_y \cos\theta$$

$$\left\| \vec{\tau}_{peso} \right\| = \left\| \vec{r} \times M\,\vec{g} \right\| = Mg\,R\ sen\theta$$

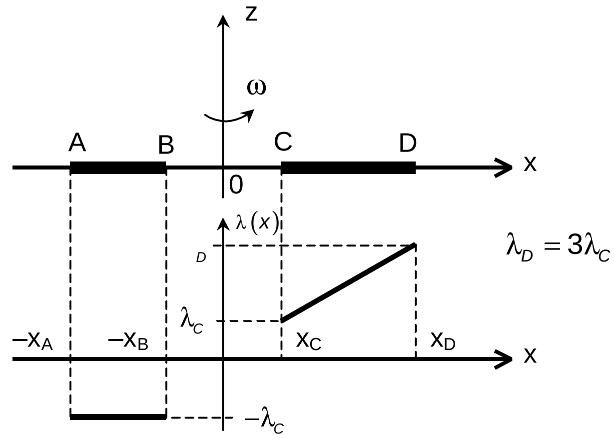
Para equilibrio :

$$I\,\pi\,R^2\,B_y \cos\theta = Mg\,R\ \text{sen}\,\theta$$

Entonces,

$$\tan\theta = \frac{I\,\pi\,R\,B_y}{Mg} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\left(\frac{40\bullet 4\bullet 10^{-2}\bullet 1}{25\bullet 10^{-3}\bullet 9{,}8}\right) = 87{,}2^\circ$$

PROBLEMA 68. Dos varillas cargadas con densidad lineal de carga $\lambda(x)$, tal como se indica en la figura, giran alrededor del eje *z* con rapidez angular ω. Calcular el vector inducción de campo magnético $\vec{B}_0$ que se produce en el punto 0.



<u>SOLUCIÓN</u>

Cada varilla giratoria describe un anillo. El campo en el punto 0, lo obtendremos como superposición de los campos producidos por dos anillos concéntricos cargados.

Calculemos el campo en el centro de un anillo, con carga λ, producido por el giro de una varilla con densidad lineal de carga $\lambda(x)$.

A partir del campo magnético producido por un anillo de corriente I y radio r : $B = \dfrac{\mu_0\, I}{2r}$, se describe la contribución al campo magnético debida a una porción de longitud dx de la varilla giratoria : $dB = \dfrac{\mu_0\, dI}{2x}$, donde $dI = \dfrac{\lambda\, dx}{T}$, siendo T el período $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Luego,

$$dB = \frac{\mu_0 \lambda dx}{2T\, x} = \frac{\pi_0 \lambda dx}{2x \dfrac{2\pi}{\omega}} = \frac{\mu_0 \omega \lambda dx}{4\pi x} \quad .$$

Entonces,

$$B = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} \int \frac{\lambda(x) dx}{x} \quad .$$

Sea B_1 la magnitud del campo magnético producido por el anillo que se genera mediante el giro de la varilla *AB* cargada con densidad lineal $\lambda(x) = -\lambda_C$.

$$B_1 = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} \lambda_C \int_{x_B}^{x_A} \frac{dx}{x}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} \lambda_C \ln\left(\frac{x_A}{x_B}\right) .$$

Teniendo en cuenta que la densidad de carga es negativa, concluimos que el campo $\overrightarrow{B_1}$ apunta en dirección $-\hat{z}$; luego :

$$\overrightarrow{B_1} = B_1 \,(-\hat{z}) \; .$$

Sea B_2 la magnitud del campo magnético producido por el anillo que se genera mediante el giro de la varilla *CD* cargada con densidad lineal dependiente de x dada por :

$$\lambda(x) = \lambda_C + \frac{(\lambda_D - \lambda_C)(x - x_C)}{(x_D - x_C)}$$

Entonces ,

$$B_2 = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} \int \frac{\lambda(x)\, dx}{x}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} \left[\int_{x_C}^{x_D} \frac{\lambda_C\, dx}{x} + \int_{x_C}^{x_D} 2\lambda_C \, \frac{(x - x_C)}{x(x_D - x_C)}\, dx \right]$$

$$B_2 = \frac{\mu_0\, \omega \lambda_C}{4\pi} \left[\ln\left(\frac{x_D}{x_C}\right) + \frac{2\,\cancel{(x_D - x_C)}}{\cancel{(x_D - x_C)}} - \frac{2\,x_C}{(x_D - x_C)} \ln\left(\frac{x_D}{x_C}\right) \right]$$

$$B_2 = \frac{\mu_0\, \omega \lambda_C}{4\pi} \left[2 + \left(1 - \frac{2\,x_C}{(x_D - x_C)}\right) \ln\left(\frac{x_D}{x_C}\right) \right].$$

$$\overrightarrow{B_2} = B_2\,(\hat{z})$$

Finalmente,

$$\vec{B} = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2} = \left(B_2 - B_1\right)\hat{z}$$