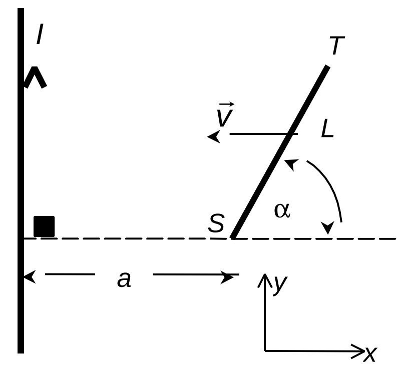
11. INDUCCIÓN MAGNÉTICA

PROBLEMA 69. Un conductor, de largo L, se acerca con velocidad $\vec{v}$ a un alambre recto y muy largo, por el cual circula una corriente I, como se indica en la figura adjunta. El conductor y el alambre recto están ubicados en un mismo plano.



Determinar la fuerza electromotriz inducida, entre los extremos S y T del alambre, cuando el extremo S está a un distancia a del alambre recto.

SOLUCIÓN

La fuerza electromotriz inducida en el conductor se debe al campo eléctrico que aparece en su interior, para lograr el equilibrio entre las fuerzas eléctrica y magnética sobre los portadores de carga.

Fuerza magnética sobre los portadores de carga del conductor : $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$,

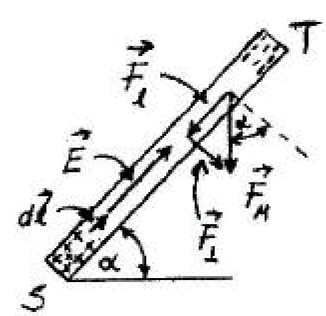
donde $\vec{v} = v\left(-\hat{i}\right)$ y $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(-\hat{k}\right)$, siendo r la distancia entre el alambre recto y el punto del conductor, donde esté ubicado el portador de carga q.

Luego :

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B} = qv\ B\left(-\hat{j}\right) .$$

La componente de $\vec{F}_M$ en la dirección del conductor producirá una separación de carga, de modo que la carga positiva va al extremo S y la negativa va a T.

Esta separación de carga producirá un campo eléctrico $\vec{E}$ en el interior del conductor, con la dirección indicada en la figura adjunta. La condición para equilibrio es $\vec{F}_\ell + q\vec{E} = 0$, donde $\vec{F}_\ell$ es la componente longitudinal de la fuerza magnética expresada como :



$$\vec{F}_M = \vec{F}_\ell + \vec{F}_\perp .$$

En equilibrio, un portador no experimenta fuerza neta, y en todo instante se cumple:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{F}_\ell}{q} \quad .$$

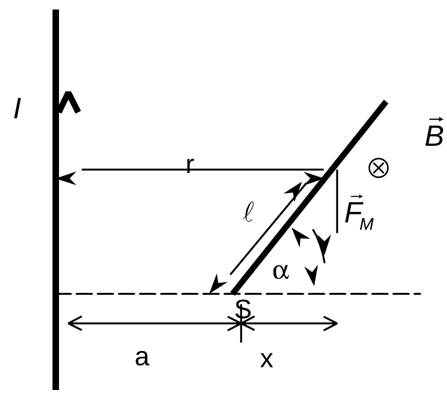
Puesto que $F_\ell = F_M\, sen\alpha = q v_0 B\, sen\alpha$, la magnitud del campo eléctrico queda $E = v_0 B\, sen\alpha$.

Dado que B es función de r , E tendrá distinto valor en los diferentes puntos del conductor, en un instante dado. En un mismo punto del conductor, E tendrá distintos valores a medida que el conductor se acerca al alambre.

La fuerza electromotriz inducida entre los extremos del conductor será :

$$\varepsilon = \int_S^T \vec{E} \bullet d\vec{\ell} \quad ,$$

puesto que $\vec{E} \bullet d\vec{\ell} = v_0 B \;\text{sen}\alpha\, d\ell > 0$; la fuerza electromotriz inducida ε será positiva, es decir, S será positivo respecto a T .



$x = \ell \cos\alpha \quad ; \quad r = a + x$

Entonces, $\varepsilon = \displaystyle\int_0^L v_0 B \;\text{sen}\alpha \; d\ell$.

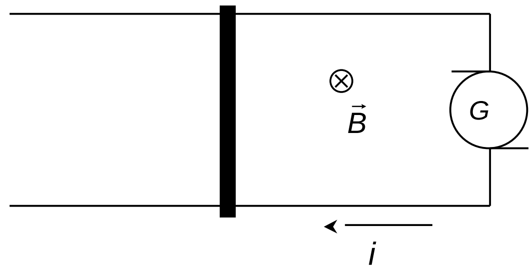
Puesto que $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(a + \ell\cos\alpha)}$; tenemos

$$= v_0 \bullet \frac{{}_0\, I}{2} \;\text{sen} \int_0^L \frac{d\ell}{a + \ell \cos} = \frac{v_0 \;\; {}_0\, I}{2} \;\text{sen} \;\; \bullet \frac{1}{\cos} \bullet \ln\left(\frac{a + L \cos}{a}\right)$$

Finalmente,

$$\varepsilon = \frac{v_0\, \mu_0 I \tan\alpha}{2\pi} \bullet \ln\left(1 + \frac{L}{a}\cos\alpha\right) .$$

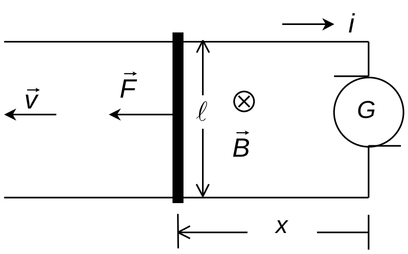
PROBLEMA 70. Un conductor de longitud ℓ y masa m puede deslizar entre dos rieles conductores paralelos, según el esquema adjunto. El generador G mantiene una corriente constante en el circuito, que está colocado en una región de campo magnético uniforme.



Determinar la velocidad instantánea del conductor y la fuerza electromotriz inducida en el circuito. Suponer que el conductor parte del reposo y que el roce es despreciable.

SOLUCIÓN

La fuerza sobre el conductor móvil es : $\vec{F} = i\,\vec{\ell} \times \vec{B}$. Ella apunta hacia la izquierda, como se indica en la figura, y tiene magnitud $F = i\,\ell\,B$, que se mantiene constante.



La velocidad del conductor dada se obtiene de la relación dinámica :

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \quad ,$$

siendo $\vec{F}$ la fuerza magnética sobre él.

Entonces,

$$i\ell\,B = m\,\frac{dv}{dt}$$

Integrando la relación anterior se obtiene la velocidad instantánea :

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{i\ell\,B}{m}\,dt \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{i\,\ell\,B}{m}\,t \;\; .$$

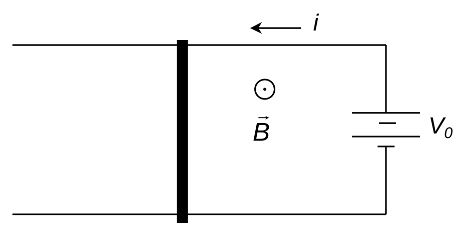
Este resultado muestra que la velocidad aumenta linealmente (mientras la fuerza de roce sea despreciable).

El flujo $\phi = B\ell\,x$ a través del circuito está aumentando con rapidez $\frac{d\phi}{dt} = B\ell\,\frac{dx}{dt} = B\ell\,v$. Luego la fuerza electromotriz inducida en el circuito es de valor $\varepsilon = B\ell\,v$. Podría decirse que ella aparece entre los extremos de la barra móvil, con la polaridad positiva en el extremo inferior, cumpliendo así con la ley de Lenz y "tendiendo" a impulsar una corriente de sentido opuesto a la que mantiene el generador.

Finalmente :

$$\varepsilon = B\ell v = B\ell \bullet \frac{i\ell B}{m} t = \frac{i\ell^2 B^2}{m} t \ .$$

PROBLEMA 71. Una batería de fuerza electromotriz V_0 se conecta entre dos rieles paralelos, por los cuales desliza una barra conductora de longitud ℓ y masa m. Considerar que la resistencia total del circuito es R (constante), el campo magnético es uniforme, el roce es despreciable y la barra parte del reposo.



Determinar la velocidad final de la barra y la corriente por el circuito cuando la barra alcanza la velocidad final.

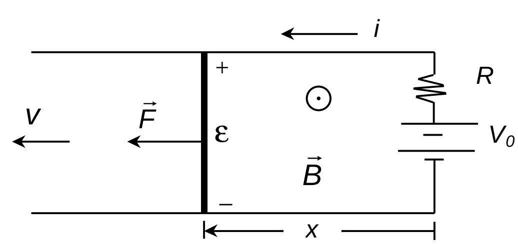
SOLUCIÓN

Cuando la barra está en reposo, la corriente es $i = V_0 / R$. La fuerza sobre la barra, en esas condiciones es $F = i\ell\, B$, dirigida hacia la izquierda . Debido a esa fuerza, la barra inicia su movimiento, cuya velocidad en todo instante cumplirá con :

$$F_{neta} = m \bullet \frac{dv}{dt} \quad , \qquad \text{con} \quad F_{neta} = F_{magnética} = i\,\ell B \ .$$

Entonces,

$$i = \frac{m}{\ell B} \bullet \frac{dv}{dt} \ .$$



Al estar la barra en movimiento habrá un cambio en el flujo magnético que atraviesa el circuito y aparecerá en él una fuerza electromotriz inducida.

El flujo magnético y su respectiva rapidez de cambio son :

$$\phi = B\ell\, x \qquad ; \qquad \frac{d\phi}{dt} = B\ell \bullet v$$

De acuerdo a la ley de Lenz, la corriente producida por la fuerza electromotriz inducida tenderá a contrarrestar el aumento de flujo. En este caso la fuerza electromotriz inducida impulsará una corriente en sentido opuesto a la corriente i indicada en el esquema. De ese modo la fuerza electromotriz inducida actúa disminuyendo la corriente por el circuito. Una corriente de sentido opuesto a i produce un campo magnético que está dirigido hacia abajo $\otimes$ en el área de la espira, cumpliendo así con contrarrestar el aumento de flujo debido al campo $\odot$ aplicado. Luego, aplicando la ley de voltajes al circuito obtenemos :

$$V_0 - i\,R - B\ell v = 0 \ .$$

Reemplazando i , encontrado anteriormente, se obtiene :

$$V_0 - \frac{m\,R}{\ell B} \bullet \frac{dv}{dt} - B\ell\, v = 0 \quad ;$$

o bien :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\ell^2 B^2 \bullet v}{m\,R} = \frac{V_0 \ell\, B}{m\,R}$$

La relación anterior es una ecuación diferencial para obtener la velocidad de la barra en función del tiempo. Si existe un único valor para la velocidad final de la barra, éste debe ser constante y cumplir que $\frac{dv}{dt} = 0$. Luego, la velocidad final v_f de la barra puede despejarse de la ecuación anterior. Entonces,

$$\frac{\ell^2 B^2 \bullet v_f}{m\,R} = \frac{V_0 \bullet \ell B}{m\,R} ; \qquad \Rightarrow \qquad v_f = \frac{V_0}{\ell B} \ .$$

La corriente final en el circuito será : $i_f = 0$.

Los resultados $i_f = 0$ y $v_f = \frac{V_0}{\ell B}$ para el estado final implican que la fuerza neta final sobre la barra es $F = i_f\, \ell B = 0$ y la fuerza electromotriz es $\varepsilon = B\ell v = B\ell \bullet \frac{V_0}{\ell B} = V_0$.

La ecuación diferencial para la velocidad de la barra en función del tiempo puede resolverse por separación de variables, como se indica a continuación :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V_0 \ell B}{m R} - \frac{\ell^2 B^2 v}{m R} \quad .$$

Separando las variables v y t e integrando se obtiene :

$$\int_0^v \frac{m R\, d v}{\ell B (V_0 - \ell B v)} = \int_0^t dt \quad ,$$

o bien :

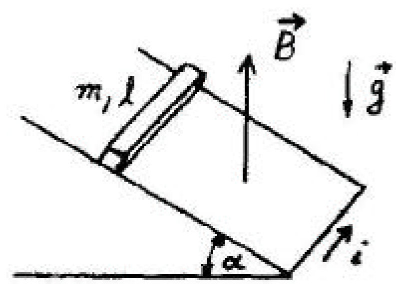
$$-\frac{m R}{\ell^2 B^2} \ln\left(1 - \frac{\ell B v}{V_0}\right) = t \quad .$$

Despejando v se obtiene :

$$v(t) = \frac{V_0}{\ell B}\left(1 - e^{-\frac{\ell^2 B^2 t}{m R}}\right)$$

Se deja como ejercicio encontrar $i(t)$.

PROBLEMA 72. Una barra conductora de largo ℓ y masa m, puede deslizar sobre dos rieles paralelos que forman un ángulo α con la horizontal como se indica en la figura. El circuito está en un campo magnético uniforme que apunta verticalmente hacia arriba.



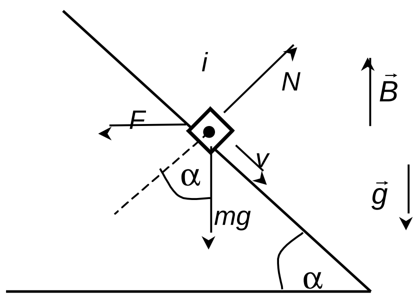
Considerar que la resistencia total del circuito es constante y de valor R, el roce es despreciable y la barra parte del reposo.

Determinar la velocidad final de la barra y la corriente final en el circuito.

SOLUCIÓN

La barra tenderá a deslizar hacia abajo; esto hará disminuir el flujo magnético a través del circuito, lo cual producirá una fuerza electromotriz que tratará de contrarrestar esa disminución de flujo magnético haciendo circular una corriente que tienda a reforzar el campo magnético aplicado. Para cumplir con lo anterior, la corriente inducida debe circular en el sentido indicado en la figura superior (dado por la regla de la mano derecha).

Al circular la corriente i por la barra, ésta experimentará un fuerza horizontal $F = i\,\ell B$, como se indica en la figura siguiente :



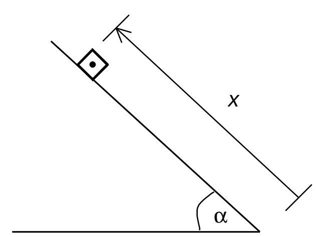
Efectuando la sumatoria de fuerzas en la dirección de movimiento de la barra para aplicar la 2° ley de Newton, se obtiene :

$$mg\,\operatorname{sen}\alpha - F\cos\alpha = m \bullet \frac{dv}{dt} \ .$$

Suponiendo que la velocidad final de la barra es constante; entonces la corriente final se puede calcular haciendo $\dfrac{dv}{dt} = 0$ en la ecuación anterior. Luego,

$$mg\,\operatorname{sen}\alpha - i\,\ell B\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{mg}{\ell B}\tan\alpha \ .$$

El flujo magnético a través de la espira y su respectiva rapidez de cambio son $\phi = B\,\ell\,x\cos\alpha$ y $\dfrac{d\phi}{dt} = B\,\ell\cos\alpha \bullet \dfrac{dx}{dt}$, siendo x la longitud de los lados inclinados del circuito, y $\dfrac{dx}{dt} = -v$.



Luego la fuerza electromotriz es $\varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt} = B\,\ell\,v\cos\alpha$, y la corriente, en cualquier instante, es $i = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{B\,\ell v\cos\alpha}{R}$.

La relación anterior muestra que la corriente i y la velocidad v son proporcionales. Con ella y la corriente final obtenida anteriormente, se encuentra la velocidad final :

$$v_f = \frac{mg\ R\ \tan\alpha}{\ell^2 B^2 \cos\alpha} = \frac{mg\ R\ \text{sen}\alpha}{\ell^2 B^2 \cos^2\alpha} \ .$$

El problema también puede resolverse en general, determinando $v(t)$ e $i(t)$ a partir de las ecuaciones planteadas anteriormente :

$$mg\ \text{sen}\alpha - i\,\ell B\cos\alpha = m\,\frac{dv}{dt} \qquad \text{e} \qquad i = \frac{B\ell v\ \cos\alpha}{R} \ .$$

Reemplazando i en la primera ecuación, obtenemos una ecuación diferencial que se resuelve por separación de variables :

$$g\ \text{sen}\,\alpha - \frac{v B^2\ \ell^2 \cos^2\alpha}{m R} = \frac{dv}{dt} \ .$$

Separando variables e integrando :

$$\int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{g\ \text{sen}\alpha - \dfrac{v B^2\ \ell^2 \cos^2\alpha}{m R}}$$

Con la sustitución : $u = g\ \text{sen}\alpha - \dfrac{v B^2\ \ell^2\cos^2\alpha}{m R}$; $du = -\dfrac{B^2\ \ell^2 \cos^2\alpha}{mR}\,dv$,

se simplifica el integrando del lado derecho quedando:

$$\int_0^t dt = -\int_{u_0}^u \frac{mR}{B^2\ell^2\cos^2\alpha}\,\frac{du}{u} \ .$$

Integrando, se obtiene :

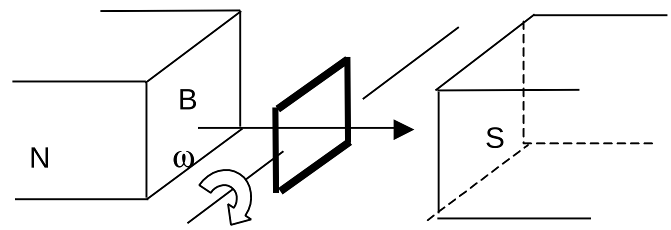
$$t = -\frac{mR}{B^2\ell^2\cos^2\alpha}\ln\left(1 - \frac{v B^2 \ell^2 \cos^2\alpha}{mg R\,\text{sen}\alpha}\right) .$$

Despejando $v(t)$, se encuentra :

$$v(t) = \frac{mg R\,\text{sen}\alpha}{B^2\ell^2\cos^2\alpha}\left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2\cos^2\alpha \cdot t}{mR}}\right) .$$

Como ejercicio, usted mismo encuentre $i(t)$.

PROBLEMA 73. Una espira cuadrada de lado a, se hace girar con rapidez angular constante ω, entre los polos de un imán que produce un campo magnético aproximadamente uniforme de magnitud B.

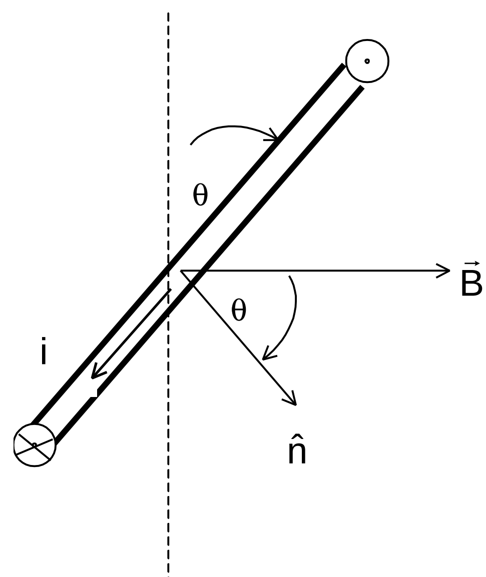


La espira tiene resistencia R, autoinductancia despreciable, y el instante t = 0 se escoge cuándo el plano de la espira es perpendicular al campo magnético.

(a) Determinar la corriente en la espira en función del tiempo.

(b) Determinar el torque suministrado por el agente externo en función del tiempo.

<u>SOLUCIÓN</u>



(a) El flujo magnético ϕ sobre la espira depende del tiempo, y puede describirse en términos del ángulo θ, que forman el vector campo magnético $\vec{B}$ y el vector $\hat{n}$ perpendicular al plano de la espira. Entonces :

$$\phi = B \bullet a^2 \cos\theta \ ,$$

y la fuerza electromatriz inducida en la espira es:

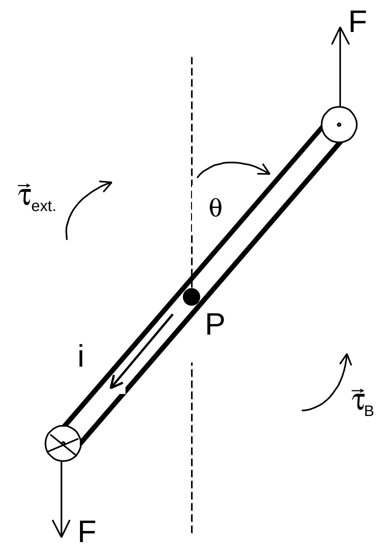
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = +Ba^2 \operatorname{sen}\theta \bullet \frac{d\theta}{dt} \ .$$

Despreciando la autoinductancia, la corriente en la espira es $i = \varepsilon / R$. Usando además que $\theta = \omega t$, se obtiene el resultado :

$$i(t) = +\frac{Ba^2\omega}{R} \operatorname{sen}\omega t$$

La corriente $i(t)$ es alterna, adopta valores positivos y negativos, es decir, circula en un sentido y en el sentido contrario. El sentido que se denomina positivo corresponde a la curvatura de los dedos de la mano derecha cuando el pulgar apunta en la dirección del vector $\hat{n}$, que define el signo del flujo ϕ.

(b) Sobre la espira debe actuar un torque externo con el objeto de contrarrestar el torque debido al campo magnético. Así el torque neto es cero y la rapidez angular de la espira es constante. En la figura se ha indicado el torque $\vec{\tau}_B$ respecto al punto P, debido al campo magnético. Puesto que la fuerza magnética sobre dos de los lados es de magnitud $F = iaB$, entonces la magnitud del torque magnético respecto a P es :



$$\tau_B = 2\frac{a}{2}F\,\mathrm{sen}\,\theta = ia^2 B\,\mathrm{sen}\,\omega t \ .$$

Sustituyendo el valor de $i(t)$ encontrado en la parte (a), se obtiene :

$$\tau_B = \frac{\omega}{R}\left(Ba^2\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)^2 \ .$$

La dirección del torque externo se ha indicado en la figura anterior, y corresponde a un vector que entra al plano de la página.

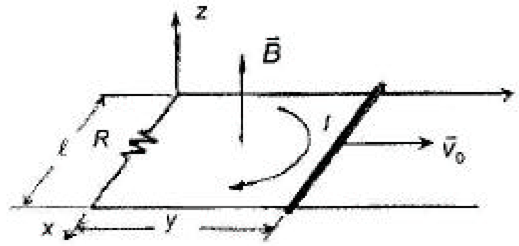
PROBLEMA 74. Una barra conductora de masa M se apoya sobre dos rieles conductores paralelos horizontales muy largos, cuyos extremos están conectados a través de una resistencia R. Inicialmente, el sistema se encuentra en reposo en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, perpendicular el plano de los rieles. En cierto instante se aplica a la barra una velocidad $\vec{v}_0$, paralela a los rieles.

(a) Calcular, en función del tiempo, la corriente en el circuito, la velocidad y la posición de la barra.

(b) Calcular la distancia total recorrida por la barra hasta el momento en que se detiene.

SOLUCIÓN

Al tener la varilla una velocidad $\vec{v}_0$ se genera en el circuito una corriente :



$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} \ .$$

Por otra parte $\varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt}$, donde $\displaystyle \phi = \int_{\substack{\text{área}\\ \text{circuito}}} \vec{B} \bullet d\vec{A} = \int B\hat{z} \bullet \ell\, dy\, \hat{z} = B\ell y$,

luego :

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell \frac{dy}{dt} = -B\ell v_y \ .$$

El signo menos expresa el hecho de que la fuerza electromotriz se induce, de modo tal que se opone a la variación del flujo; en este caso el flujo aumenta, debido al aumento del área del circuito. Entonces la corriente es :

$$I = \frac{B\ell v_y}{R} \ ,$$

y circula en el sentido indicado en la figura. Así dicha corriente produce un campo magnético de sentido opuesto al de $\vec{B}$ aplicado, contrarrestando la variación de flujo.

Como la varilla está en presencia de un campo magnético externo $\vec{B}$, éste ejerce sobre ella una fuerza $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \int I\, d\vec{\ell} \times \vec{B} = I\,\ell\,\hat{x} \times B\hat{z} \qquad ; \qquad \vec{F} = -I\ell B\hat{y} \ .$$

Note que la fuerza tiene dirección opuesta a la velocidad inicial. Puesto que $\vec{F}$ es la fuerza neta, se cumple que :

$$F_y = -I\ell B = m a_y \ ,$$

siendo a_y la componente y de la aceleración de la barra.

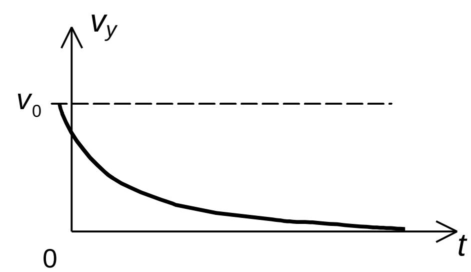
Reemplazando la corriente y usando la igualdad $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$, se obtiene la ecuación diferencial :

$$-\frac{B^2\,\ell^2}{mR}\,v_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Resolviendo por separación de variables, tenemos :

$$\frac{dv_y}{v_y} = -\frac{B^2\,\ell^2}{mR}\,dt\ .$$

Definiendo $\tau = \dfrac{mR}{B^2\,\ell^2}$ e integrando, se obtiene :

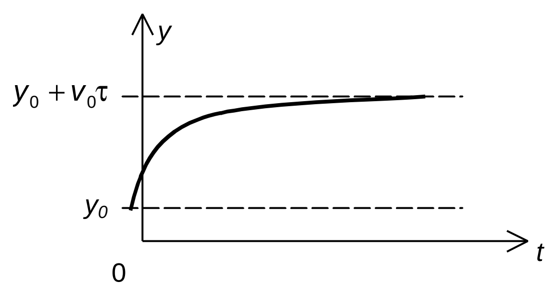


$$\ln v_y\Big|_{v_0}^{v_y} = -\frac{t}{\tau}\Big|_0^t$$

$$\ln\frac{v_y}{v_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\boxed{v_y(t) = v_0\,e^{-t/\tau}}$$

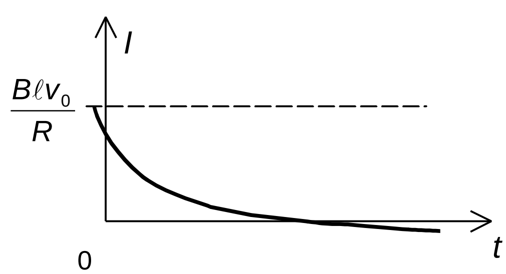
Puesto que $v_y = \dfrac{dy}{dt}$, y se encuentra integrando la expresión para $v_y(t)$:



$$y - y_0 = v_0(-\tau)\,e^{-t/\tau}\Big|_0^t$$

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_0\tau - v_0\tau\,e^{-t/\tau}}$$

Obsérvese que la varilla se mueve entre una posición inicial y_0 y una posición final $y_0 + v_0\,\tau$ que se alcanza en $t \to \infty$. La distancia total recorrida es $v_0\,\tau$.

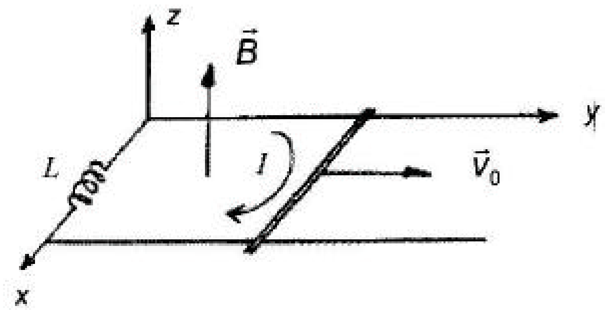


Finalmente,

$$I(t) = \frac{B\,\ell}{R}\,v_y(t)$$

$$\boxed{I(t) = \frac{B\ell}{R}v_0\,e^{-t/\tau}}$$

PROBLEMA 75.. Una barra conductora de masa m se apoya sobre dos rieles conductores, paralelos, horizontales, muy largos, cuyos extremos están conectados a través de una inductancia L , como se indica en la figura.



El circuito se encuentra en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, perpendicular al plano de los rieles.

Determinar la corriente en el circuito, la velocidad y posición de la barra en función del tiempo.

SOLUCIÓN

En este caso, además de la fuerza electromotriz inducida por el movimiento de la barra, se inducirá otra fuerza electromotriz en la inductancia L, de modo que :

$$\varepsilon_A + \varepsilon_L = 0 \ ,$$

siendo :

ε_L : la fuerza electromotriz debida a la variación de flujo $\phi_L = L\, I$ en la inductancia.

ε_A : la fuerza electromotriz debida a la variación del flujo $\phi_A = B\,\ell\, y$ a través del circuito.

Nótese que la dirección de I y $\vec{B}$ cumplen con la regla de la mano derecha; entonces,

$$\varepsilon_A = -\frac{d\,\phi_A}{d\,t} = -B\,\ell v_y \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_L = -\frac{d\,\phi_L}{d\,t} = -L\,\frac{d\,I}{d\,t} \ .$$

Luego ,

$$L\,\frac{dI}{dt} + B\,\ell\,\frac{dy}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L\,d\,I = -B\,\ell\,dy$$

Integrando, se obtiene :

$$L\left(I - I_0\right) = -B\ell\left(y - y_0\right) \ .$$

Suponiendo que $I=0$ cuando $y=y_0$, entonces $I_0=0$. Luego :

$$I(y)=-\frac{B\ell}{L}(y-y_0)\ .$$

Entonces, la fuerza sobre la barra es :

$$F_y=I\,\ell B=-\frac{B^2\,\ell^2}{L}\,(y-y_0)\ .$$

Si hacemos $\varepsilon_s=y-y_0$, la expresión para la fuerza queda de la forma :

$$F_y=-k\ \varepsilon_s\,,\qquad \text{siendo}\qquad k=\frac{B^2\,\ell^2}{L}\ ,$$

es decir, es una fuerza restauradora proporcional a ε_s. Obviamente $F_y=0$ para $\varepsilon_s=0$. Por tanto, el punto de equilibrio es : $y_{eq}=y_0$.

En torno a este punto la barra realiza un movimiento armónico simple de frecuencia angular:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{B^2\,\ell^2}{Lm}}=\frac{B\,\ell}{\sqrt{Lm}}\ ,$$

y de período :

$$T=2\pi\,\frac{\sqrt{L\,m}}{B\,\ell}\ .$$

La amplitud A del movimiento puede obtenerse aplicando la conservación de la energía, considerando que la barra se mueve entre el punto de equilibrio y el punto de amplitud máxima. En el punto de equilibrio toda la energía es energía cinética y en el punto de amplitud máxima toda es energía "potencial elástica" .

Entonces,

$$\frac{1}{2}mv_0^2\ =\ \frac{1}{2}k\,A^2\ ,$$

de donde se obtiene :

$$A=\sqrt{\frac{m}{k}}\,v_0=\sqrt{\frac{m\,L}{B^2\,\ell^2}}\,v_0=\sqrt{m\,L}\ \frac{v_0}{B\,\ell}$$

Por lo tanto, la posición de la barra puede escribirse como :

$$\varepsilon_s(t) = A\cos(\omega t + \delta) \ .$$

Para determinar δ asumimos que en $t = 0$, la barra pasa por el punto de equilibrio, en dirección *y*. Entonces, $\varepsilon_s(0) = 0$ y $v_y(0) = v_0$. Estas condiciones implican que $\cos\delta = 0$ y $\operatorname{sen}\delta = -1$. Entonces ;

$$\delta = \frac{3\pi}{2} \ .$$

Finalmente, la posición de la barra queda :

$$y(t) = y_0 + A\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = y_0 + A\operatorname{sen}(\omega t) \ .$$

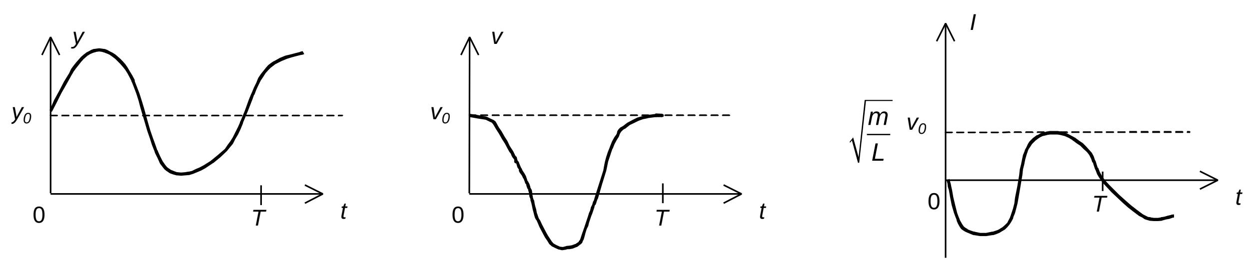
Dividiendo $y(t)$ se obtiene la velocidad :

$$v_y(t) = -\omega A\operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = -v_0\operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = v_0\cos(\omega t) \ ,$$

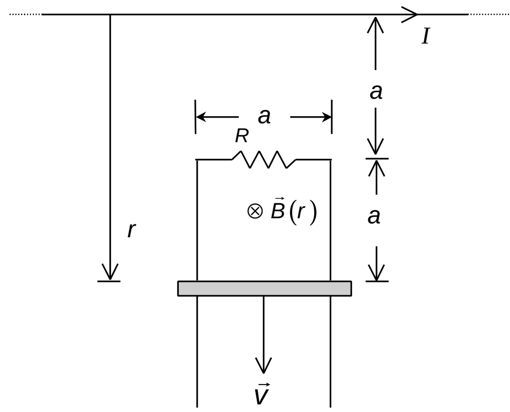
donde $v_0 = \omega A$ es la máxima velocidad de la barra.

La corriente se encuentra usando una relación obtenida anteriormente :

$$I(t) = -\frac{B\ell A}{L}\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{\frac{m}{L}}\, v_0\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{\frac{m}{L}}\, v_0\operatorname{sen}(\omega t) .$$



PROBLEMA 76. Un alambre infinito que conduce la corriente constante I , y una espira plana provista de una parte móvil, se encuentran en un plano horizontal. La parte móvil de la espira se mueve con velocidad constante y en el instante $t = 0$ se encuentra en la posición indicada en la figura. Determinar el trabajo realizado por el agente externo que mueve la barra, en el intervalo $0 \le t \le \infty$.



SOLUCIÓN

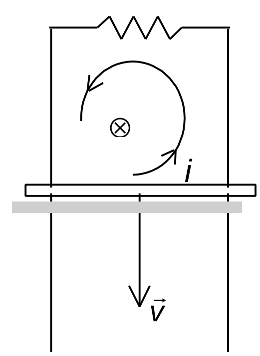
El campo magnético producido por el alambre, en el plano de la espira es :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{u} \;\;,$$

siendo $\hat{u}$ un vector unitario que entra perpendicularmente al plano de la espira. Así, $\vec{B}$ e I se relacionan según la regla de la mano derecha.

La posición de la barra en función del tiempo respecto al alambre recto es $r\left(t\right) = 2a + v\,t$.

El flujo magnético enlazado por el circuito es:



$$\phi\left(r\right) = \int_{\substack{\text{área}\\ \text{espira}}} \vec{B} \bullet d\vec{A} = \int_{2a}^{r} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{u} \bullet a\,dr\,\hat{u}$$

$$\phi\left(r\right) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\,\ln\!\left(\frac{r}{2a}\right) .$$

En la espira se induce la fuerza electromotriz :

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dr}\,\frac{dr}{dt} = -\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left(\frac{2a}{r}\right)\frac{1}{2a}\,v \;\;,$$

donde el signo menos indica que la fuerza electromotriz se genera de forma tal, que se opone al aumento del flujo.

La corriente inducida es :

$$i(r) = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\mu_0 I a v}{2\pi R r} \quad .$$

La fuerza que actúa sobre la varilla, debido al campo magnético $\vec{B}$, es :

$$\vec{F}_m = \int i\, d\,\vec{\ell} \times \vec{B} = -\frac{i a \mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{r} \quad ,$$

siendo $\hat{r}$ un vector unitario en dirección de r. Note que la fuerza magnética es de sentido contrario a la velocidad de la barra. En consecuencia el agente externo deberá ejercer una fuerza:

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_m \quad ,$$

para mantener la varilla en movimiento uniforme.

El trabajo realizado por este agente externo está dado por :

$$W = \int_{2a}^{\infty} \vec{F}_{ext} \bullet d\vec{r} = \int \frac{I a \mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}\, d r = \frac{I a \mu_0}{2\pi} \int_{2a}^{\infty} \frac{\mu_0 I a v}{2\pi R r^2}\, dr$$

$$W = \underbrace{\frac{\mu_0^2 I^2 a^2 v}{4\pi^2 R}}_{A} \underbrace{\int_{2a}^{\infty} \frac{d r}{r^2}}_{\frac{1}{2a}} = \frac{A}{2a}$$

Finalmente, el trabajo total realizado por el agente externo es $\boxed{W = \dfrac{\mu_0^2 I^2 v a}{8\pi^2 R}}$.

PROBLEMA 77. Un alambre infinito conduce la corriente I dependiente del tiempo mostrada en la figura 2, y se encuentra en el mismo plano horizontal que una espira provista de una parte en movimiento con velocidad constante $\vec{v}$. La figura 1 muestra la situación en $t = 0$.

Determinar la corriente $i(t)$, calcular su valor en $t = 0.5\,[\text{min}]$ y representar $i(t)$ gráficamente. Considerar que la autoinductancia de la espira es despreciable y los datos :

$$I_0 = \frac{2\pi R}{\mu_0 \ln 2}[A] \quad ; \quad a = 10\,[\text{m}] \quad ; \quad v = 10[\text{m/min}]$$

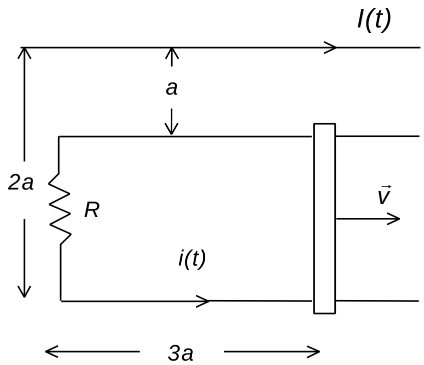


Figura 1

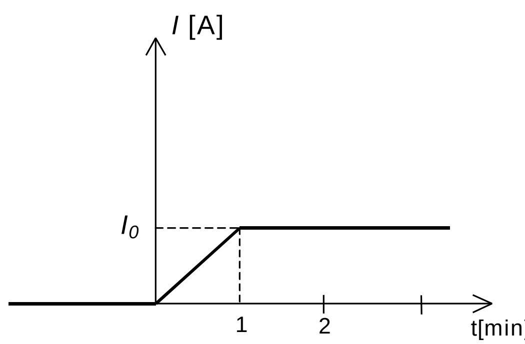


Figura 2

SOLUCIÓN

De acuerdo a la figura, $I(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ I_0 t & 0 \le t \le 1[\text{min}] \\ I_0 & t \ge 1\,[\text{min}] \end{cases}$

La posición de la barra en función del tiempo, respecto al lado en que está la resistencia R es :

$$b(t) = 3a + vt \ .$$

El flujo magnético que entra en la espira es :

$$\phi(t) = \int \vec{B} \bullet d\vec{A} = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} b(t)\,dr = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} b(t) \int_a^{2a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I(t) b(t)}{2\pi} \ln 2$$

Entonces :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 \ln 2}{2\pi} \frac{d}{dt}\left[I(t)\bullet b(t)\right] = \frac{\mu_0 \ln 2}{2\pi}\left[\frac{dI}{dt}b + \frac{db}{dt}I\right] .$$

Puesto que $\frac{db}{dt} = v$, entonces $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 \ln 2}{2\pi}\left[(3a + vt)\frac{dI}{dt} + Iv\right]$.

La corriente $i(t)$ inducida en la espira tiene la dirección indicada en la figura, de acuerdo a la ley de Lenz, y su valor es :

$$i(t) = \frac{|\varepsilon|}{R} \quad , \quad \text{donde} \quad \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} .$$

Luego; $i(t) = \frac{\mu_0 \ln 2}{2\pi R}\left[(3a + vt)\frac{dI}{dt} + Iv\right]$.

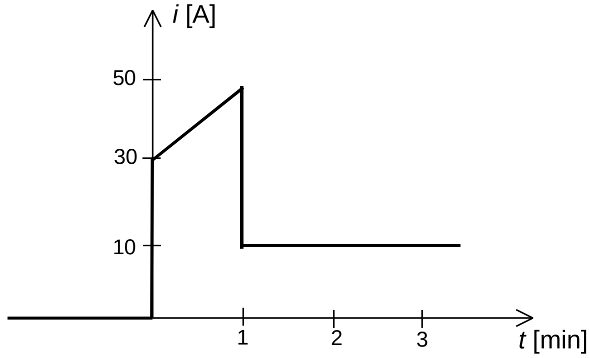
Usando $\frac{dI}{dt} = \begin{cases} I_0 = \dfrac{2\pi R}{\mu_0 \ln 2} & 0 \le t \le 1\,[\text{min}] \\ 0 & \text{en otro intervalo,} \end{cases}$

se obtiene $i(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ en } t < 0 \\ \text{3a+2vt} & , \text{ en } 0 \le t \le 1[\text{min}] \\ v & , \text{ en } t \ge 1[\text{min}] \end{cases}$

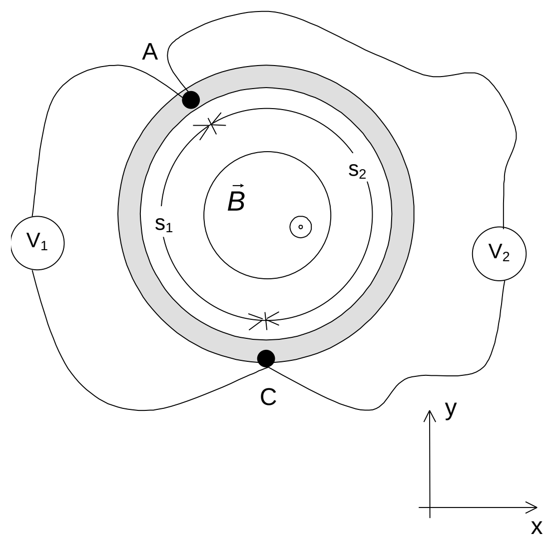
Evaluando en $t = 0{,}5[\text{min}]$; $i(0{,}5) = 30 + 10\,[A] = 40\,[A]$. Evaluando en un instante t arbitrario, tenemos :

$$i(t) = \begin{cases} 0[A] & , \text{ en } t < 0 \\ 30 + 20t\,[A] & , \text{ en } 0 \le t \le 1[\text{min}] \\ 10[A] & , \text{ en } t > 1[\text{min}] \end{cases}$$

El gráfico correspondiente es :



PROBLEMA 78. Un anillo conductor de radio $\rho = 10$ [cm], rodea una superficie de área $A = 20[\text{cm}^2]$ en que existe un campo magnético perpendicular al plano del anillo. El anillo tiene una resistencia $R = 10[\Omega]$ uniformemente distribuida en su perímetro, y el campo magnético depende del tiempo, según la expresión :



$$\vec{B} = B_0\,\hat{z}\ \text{sen}(2\pi f\, t) \ ,$$

con $B_0 = 1{,}0[\text{T}]$ y $f = 50[\text{Hz}]$.

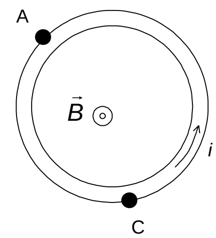
Entre los puntos A y C se conectan dos voltímetros ideales, como se indica en la figura.

Obtener el valor que marca cada voltímetro, en términos de la longitud s_1.

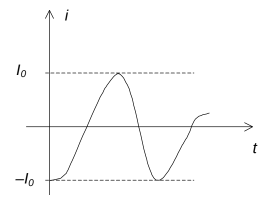
SOLUCIÓN

La variación del flujo magnético ϕ produce una fuerza electromotriz inducida ε en el perímetro del anillo, de acuerdo a la ley de Faraday expresada mediante las relaciones :

$$\phi = B_z \bullet A = B_0\, A\,\text{sen}(2\pi f\, t) \quad , \quad \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -2\pi f\, B_0\, A\, \cos(2\pi f\, t).$$



La corriente inducida en el anillo es $i = \varepsilon / R$, definida en el sentido antihorario como se indica en la figura; es una corriente alterna con el valor máximo $I_0 = 2\pi f\, B_0\, A / R$, de acuerdo al gráfico adjunto. Al recorrer el anillo en la dirección de la corriente, la suma de las caídas de potencial en la resistencia distribuida del anillo es igual a $|\varepsilon|$.



No se cumple la ley de voltaje de Kirchhoff, debido al flujo magnético variable enlazado por el anillo. Los circuitos formados por un voltímetro y la porción de anillo de su mismo lado, no enlazan flujo magnético, y cumplen con la ley de voltaje de Kirchhoff. Así, el voltímetro V_1 indica el voltaje ε_1 en el lado izquierdo del anillo, mientras que el voltímetro V_2 indica el voltaje ε_2 en el lado derecho.

De acuerdo a la ley de Ohm, $\varepsilon_1 = i\, R_1$ y $\varepsilon_2 = i\, R_2$, siendo R_1 y R_2 las resistencias de las posiciones izquierda y derecha del anillo. Además, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$. Puesto que la resistencia está distribuida uniformemente en el perímetro del anillo, entonces :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{s_1}{s_2} \quad , \qquad \text{con} \qquad R_1 + R_2 = R \quad \text{y} \quad s_1 + s_2 = 2\pi\rho \ .$$

Finalmente,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \bullet \frac{R_1}{R} = \varepsilon \bullet \frac{s_1}{2\pi\rho} \qquad ; \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon \bullet \frac{R_2}{R} = \varepsilon \bullet \frac{2\pi\rho - s_1}{2\pi\rho}$$

Teóricamente, al conectar la polaridad positiva de ambos voltímetros en el mismo punto del anillo, uno marcaría un valor positivo cuando el otro marque uno negativo. En la práctica es necesario medir usando instrumentos para corriente alterna, que indican valores efectivos, siempre positivos sin importar la polaridad de la conexión. Puesto que el valor efectivo $\bar{\varepsilon}$ correspondiente a ε es :

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{efectivo} = \sqrt{2}\ \varepsilon_{máximo} = 2\sqrt{2}\,\pi f\, B_0\, A = 889\ [\text{mV}] \ ,$$

los valores efectivos de ε_1 y ε_2 (usando $s_1 \simeq 21\,[\text{cm}]$ como ejemplo) son :

$$\varepsilon_1 \simeq 296\ [\text{mV}] \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_2 \simeq 593\ [\text{mV}] \ .$$