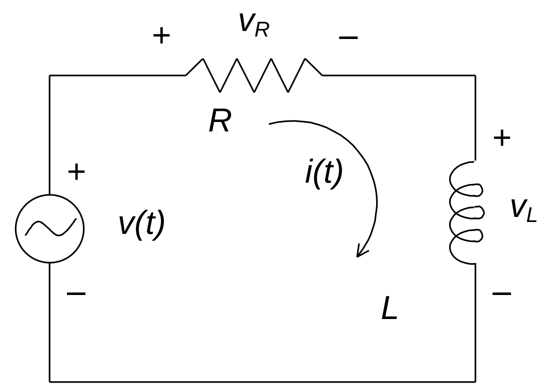
14. CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

PROBLEMA 91. Calcular la corriente $i(t)$ en el circuito mostrado en la figura, sometido al voltaje sinusoidal $v(t) = V_0 \bullet \text{sen}\, \omega t$.



SOLUCIÓN

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff se obtiene :

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) \ .$$

Para cada elemento, las relaciones entre voltaje y corriente son :

$$v_R(t) = i(t) \bullet R \qquad ; \qquad v_L(t) = L\,\frac{di}{dt} \ .$$

Las relaciones anteriores conducen a la ecuación diferencial :

$$L\,\frac{di}{dt} + iR = V_0 \,\text{sen}\,\omega t \ ,$$

cuya solución $i(t)$ debe ser una combinación lineal de $\text{sen}\,\omega t$ y $\cos\omega t$, es decir,

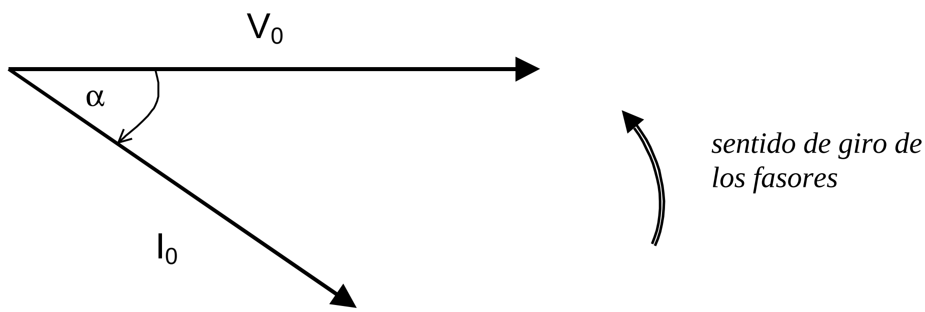
$$i(t) = A\,\text{sen}\,\omega t + B\cos\omega t \ .$$

Se acostumbra a escribir lo anterior en términos del ángulo de fase α , según :

$$i(t) = I_0\,\text{sen}(\omega t - \alpha) = \underbrace{(I_0\cos\alpha)}_{A} \bullet \text{sen}\,\omega t - \underbrace{(I_0\,\text{sen}\,\alpha)}_{-B} \bullet \cos\omega t \ .$$

Así, α representa la diferencia de fase entre voltaje aplicado y corriente. En este caso resulta $\alpha > 0$, como se verifica más adelante, y se dice que la corriente está atrasada respecto al voltaje aplicado.

Resulta conveniente representar mediante flechas, denominadas fasores, a las corrientes y voltajes sinusoidales. El voltaje $v(t)$ aplicado y la corriente $i(t)$ se representan mediante fasores de longitudes proporcionales a V_0 e I_0 respectivamente, formando entre sí el ángulo α correspondiente a su diferencia de fase. La corriente se ha representado por debajo del voltaje para indicar que está atrasada, pues se considera que los fasores giran en sentido antihorario al transcurrir el tiempo.



Sustituyendo $i(t)$ en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$L \bullet (A\omega \cos\omega t - B\omega \operatorname{sen}\omega t) + R\,(A\omega \operatorname{sen}\omega t + B\omega \cos\omega t) = V_0 \bullet \operatorname{sen}\omega t$$

Para resolver, separamos la ecuación anterior en dos, igualando los coeficientes de $\operatorname{sen}\omega t$ y $\cos\omega t$ a ambos lados, obteniendo :

$$R\,A - L\,\omega B = V_0$$

$$R\,B + L\,\omega A = 0\ .$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores, se encuentra para A y B :

$$A = \frac{V_0}{R\left(1+\left(\frac{L\,\omega}{R}\right)^2\right)} \qquad ; \qquad B = -\frac{L\,\omega}{R} \bullet A\ .$$

Notando que $A = I_0 \cos\alpha$ y $B = -I_0 \operatorname{sen}\alpha$, se resuelve para I_0 y α , y se obtiene:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{L\,\omega}{R}\right) \qquad ; \qquad I_0 = \frac{V_0}{R\sqrt{1+\left(\frac{L\,\omega}{R}\right)^2}}\ .$$

Ambos valores , α y I_0 , son positivos.

Antes de dar por terminada la solución, conviene obtener el voltaje en la inductancia y visualizar gráficamente lo obtenido.

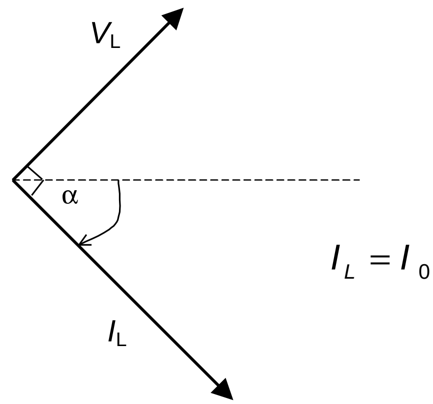
Derivando se encuentra,

$$v_L(t) = L\,\omega\, I_0 \bullet \cos\,(\omega t - \alpha)\ ,$$

lo cual también se puede escribir usando una función seno y agregando un ángulo de fase $\pi/2$, es decir :

$$v_L(t) = V_L\ \text{sen}\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \qquad V_L = L\,\omega\, I_0\ .$$

La representación gráfica del voltaje $v_L(t)$ mediante una fecha o fasor, forma el ángulo $\pi/2$, respecto al fasor corriente $i(t)$, como se indica a continuación.



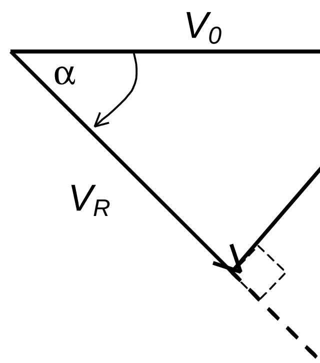
Esto es característico de la inductancia y se expresa diciendo que en ella, el voltaje adelanta a la corriente en $\pi/2$.

La ley de Kirchhoff puede aplicarse gráficamente usando los fasores correspondientes a $v(t)$, $v_R(t)$ y $v_L(t)$, cuyas expresiones se indican a continuación. Esta es una forma alternativa de resolver el problema, usando el diagrama fasorial.

$$v(t) = V_0\,\text{sen}\,\omega t$$

$$v_R(t) = V_R\,\text{sen}(\omega t - \alpha) \quad ; \qquad V_R = R\ I_0$$

$$v_L(t) = V_L\,\text{sen}\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right); \qquad V_L = L\omega \bullet I_0$$



Note que los fasores correspondientes a $v_R(t)$ y $v_L(t)$ son perpendiculares entre sí porque v_R es proporcional a $i(t)$, y como hemos explicado anteriormente, en la inductancia el voltaje adelanta a la corriente en $\pi/2$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al diagrama fasorial, encontramos :

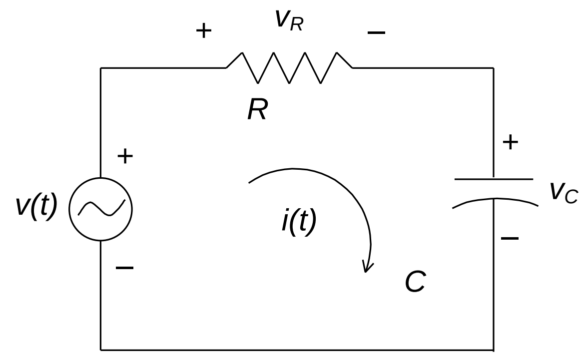
$$V_0^2 = (R\, I_0)^2 + (L\,\omega I_0)^2 \quad ,$$

de donde se obtiene el mismo valor de I_0 encontrado anteriormente. También a partir del diagrama fasorial, vemos que :

$$\tan\alpha = \frac{L\,\omega}{R} \quad ,$$

lo cual corresponde al resultado hallado anteriormente.

PROBLEMA 92. En el circuito mostrado en la figura adjunta, el voltaje aplicado es $v(t) = V_0 \cos \omega t$.



(a) Calcular la diferencia de fase entre la corriente y el voltaje en el condensador.

(b) Calcular la corriente $i(t)$, usando el método fasorial.

SOLUCIÓN

(a) En el condensador se cumple que $v_C = \dfrac{q}{C}$; luego

$$i = \frac{dq}{dt} = C\,\frac{dv_C}{dt} \ .$$

Considerando que $v_C(t)$ está dado por la expresión siguiente :

$$v_C(t) = V_C \bullet \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) \ ,$$

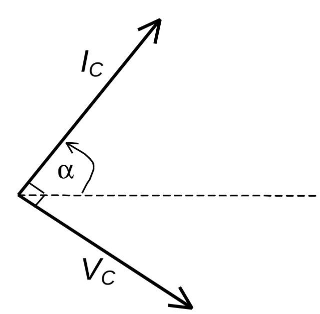
en que V_C y α son cantidades desconocidas, a determinar posteriormente; derivando se obtiene que :

$$i(t) = -C\,\omega V_C \ \mathrm{sen}\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

lo cual puede también escribirse como :

$$i(t) = I_0 \cos\,(\omega t + \alpha) \ , \qquad \text{con} \quad I_0 = C\,\omega\,V_C \ .$$

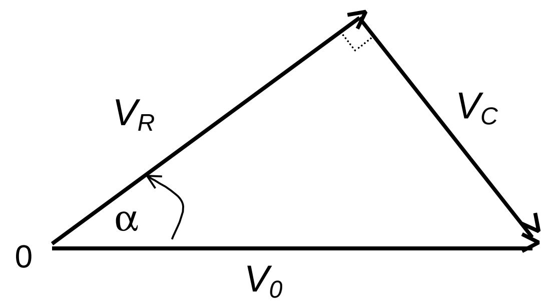
En las expresiones para la corriente y el voltaje en el condensador, se observa que la corriente adelanta al voltaje en $\pi/2$ (sin importar el valor de α). En un diagrama fasorial esto se representa como se indica en la figura adjunta.



(b) El ángulo α empleado en la parte (a) de la solución fue innecesario, pero en esta parte es imprescindible. Sólo con $\alpha > 0$ es posible dibujar un diagrama fasorial para este circuito. La ley de voltajes de Kirchhoff requiere que :

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t) \quad ,$$

y el diagrama fasorial respectivo es



En este diagrama, los fasores correspondientes a $v_R(t)$ y $v_C(t)$ son perpendiculares entre sí, porque la corriente en el circuito es proporcional a $v_R(t)$, y va adelantada en $\pi/2$ respecto al voltaje en el condensador. Note que al dibujar V_C e el punto 0 queda detrás de V_R en $\pi/2$.

Usando los resultados obtenidos en (a) y la notación $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$, tenemos :

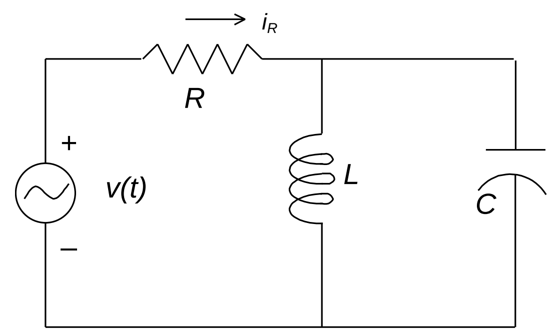
$$V_R = R\, I_0 \qquad \text{y} \qquad V_C = I_0 / C\omega \ .$$

A partir de la geometría del diagrama fasorial, se obtienen :

$$I_0 = \frac{V_0}{R\sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{RC\omega}\right)^2}} \qquad ; \qquad \tan\alpha = \frac{1}{RC\omega} \, .$$

Se recomienda resolver este problema a partir de la ecuación diferencial que resulta de aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff, y comprobar que el método fasorial resulta más simple.

PROBLEMA 93. En el circuito indicado en la figura, el voltaje aplicado es $v(t) = V_0 \text{ sen }(\omega t)$.



(a) Obtener la corriente $i_R(t)$ por la resistencia.

(b) Identificar el rango de frecuencia $(\Delta\omega)$ en el cual el circuito se comporta como circuito *RL*.

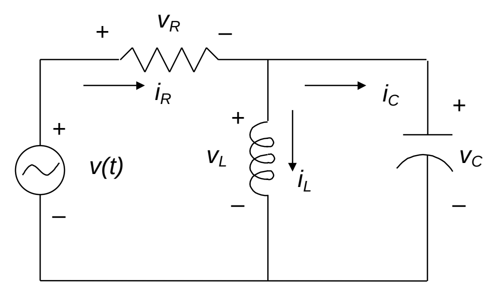
SOLUCIÓN

(a) Aplicando las leyes de Kirchhoff, obtenemos :

$$i_R = i_L + i_C$$

$$v = v_R + v_L$$

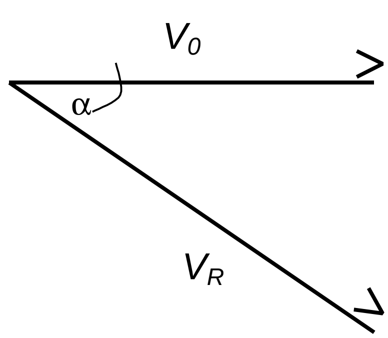
$$v_L = v_C$$



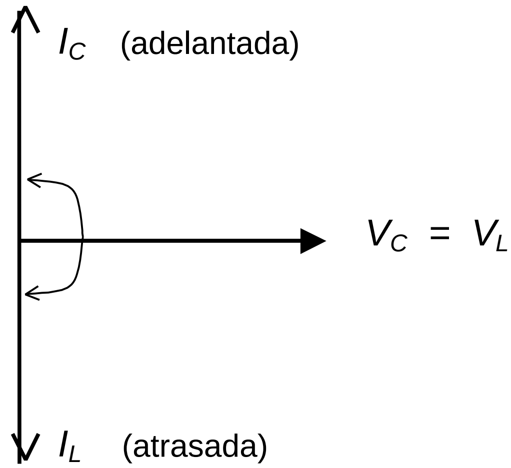
Supongamos que la corriente $i_R(t)$ está atrasada respecto al voltaje aplicado, es decir,

$$i_R(t) = I_0 \text{ sen}(\omega t - \alpha) \ .$$

Entonces, el voltaje $v_R(t)$ también está atrasado en α, respecto al voltaje aplicado, como se indica en el diagrama fasorial de voltajes, de manera preliminar :

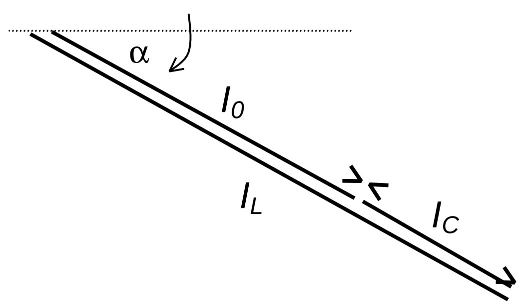


Para los elementos que están en paralelo, el voltaje es el mismo, y las corrientes respectivas están desfasadas en $\pi/2$ respecto al voltaje, con $i_C(t)$ adelantada e $i_L(t)$ atrasada, como se indica en el siguiente diagrama preliminar :



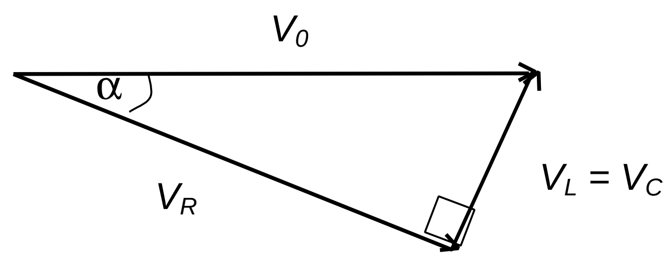
NOTA : Para recordar qué cantidad (voltaje E o corriente I) está atrasada o adelantada en cada elemento (inductancia L o condensador C), se usa la palabra $ELICE$. La letra que se escribe primero corresponde a la cantidad que se adelanta; así, en la inductancia el voltaje está adelantado respecto a la corriente, mientras que en el condensador es al revés.

Puesto que los fasores correspondientes a i_C e i_L están en una misma recta, el diagrama fasorial para la ley de corrientes de Kirchhoff es una línea recta.



De acuerdo al diagrama : $I_0 = I_L - I_C$.

Puesto que el voltaje $v_L(t)$ va adelantado respecto de $i_L(t)$, el diagrama fasorial completo correspondiente a la ley de voltajes de Kirchhoff es un triángulo rectángulo con v_R y v_L como catetos.



De acuerdo al diagrama ,

$$\tan\alpha = \frac{V_L}{V_R} \quad ; \quad V_R = V_0 \cos\alpha \quad \text{y} \quad V_L = V_0\, sen\,\alpha$$

Para los elementos del circuito se cumplen las relaciones :

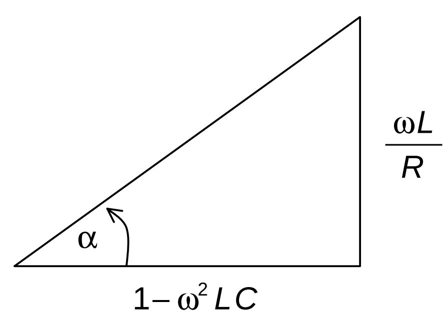
$$V_R = I_0 \bullet R \quad ; \quad V_L = \omega L\, I_L \quad \text{y} \quad V_C = \frac{I_C}{\omega C} \ .$$

Resolviendo para I_0 en términos de V_L (a partir de la ecuación de corrientes) tenemos :

$$I_0 = \frac{V_L}{\omega L} - \omega C V_L = \frac{V_L}{\omega L}\left(1-\omega^2 LC\right) \ ,$$

y sustituimos para obtener $\tan\alpha$:

$$\tan\alpha = \frac{\omega L}{R\left(1-\omega^2 LC\right)}$$



Reemplazando V_L en la expresión para I_0 se obtiene :

$$I_0 = \frac{V_0\,\text{sen}\,\alpha}{\omega L}\left(1-\omega^2 LC\right).$$

Sustituyendo el valor correspondiente a $\text{sen}\ \alpha$; se obtiene :

$$I_0 = \frac{V_0}{R}\ \frac{\left(1-\omega^2 LC\right)}{\sqrt{\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega L/R\right)^2}} \ .$$

Finalmente :

$$i_R(t) = I_0\ \text{sen}(\omega t - \alpha) \ .$$

(b) Para $\alpha > 0$ la corriente por la fuente de voltaje está atrasada respecto al voltaje aplicado. Esto es lo que ocurre en un circuito *RL* . Por lo tanto, la condición pedida se cumple mientras α sea positivo, es decir, cuando :

$$1 - \omega^2 LC > 0 \ .$$

Esto se cumple en el rango de frecuencias

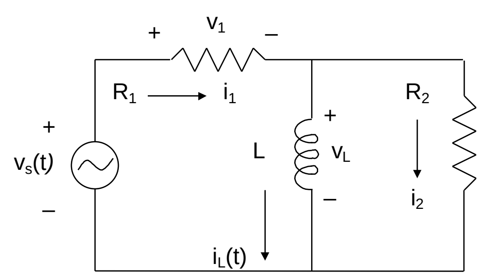
$$0 < \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \ .$$

Para frecuencias mayores que ω_0 el circuito se comportará como circuito *RC*, es decir, con la corriente por la fuente adelantada respecto al voltaje aplicado.

PROBLEMA 94. En el circuito de corriente alterna mostrado en la figura, $v_s(t) = V_0 \cos(\omega t)$.

(a) Calcular la amplitud I_L de la corriente $i_L(t)$.

(b) Calcular la diferencia de fase entre $i_L(t)$ y $v_s(t)$.



SOLUCIÓN

(a) Las ecuaciones de Kirchhoff para el circuito son :

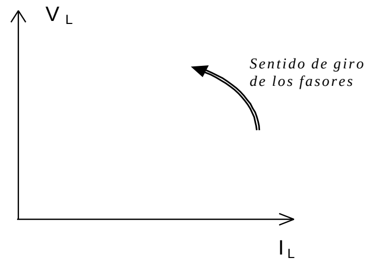
I. $i_1 = i_2 + i_L$

II. $v_s = v_1 + v_2$

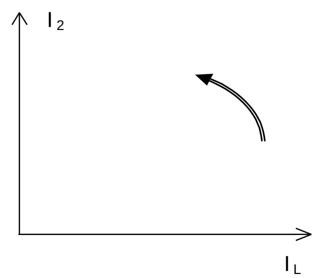
III. $v_2 = v_L$

Construiremos paso a paso el diagrama fasorial; usaremos letras mayúsculas para las amplitudes de voltajes y corrientes que van asociadas a los fasores.

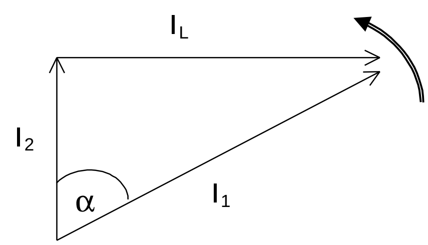
1° En la inductancia, el voltaje v_L adelanta a la corriente i_L en $\pi/2$.



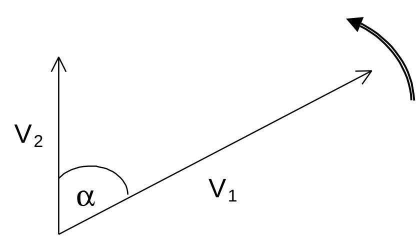
2° En la resistencia R_2 la corriente i_2 y el voltaje v_2 están en fase con el voltaje v_L.



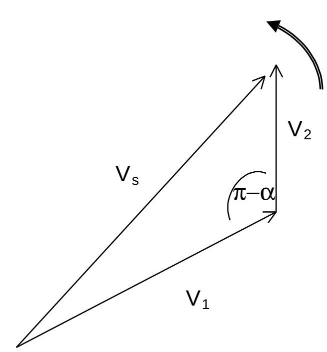
3° La corriente i_1 se obtiene sumando fasorialmente $i_2 + i_L$.



4° El voltaje v_1 está en fase con i_1 .



5° El voltaje v_S debe ser igual a la suma de $v_1 + v_2$.



Recordar que se usa letras minúsculas para identificar cantidades que dependen del tiempo, y letras mayúsculas para indicar amplitudes independientes del tiempo.

Del diagrama fasorial de corrientes se observa que :

$$I_2 = I_1 \cos\alpha$$

$$I_L = I_1 \operatorname{sen}\alpha$$

Haciendo el cuociente I_L / I_2 y usando las relaciones $V_L = \omega L\, I_L$, $V_2 = I_2 R_2$ y $V_L = V_2$, se obtiene :

$$\tan\alpha = \frac{I_L}{I_2} = \frac{(V_L/\omega L)}{(V_2/R_2)} = \frac{R_2}{\omega L} \ .$$

Del diagrama fasorial de voltajes, aplicando el teorema del coseno, se obtiene :

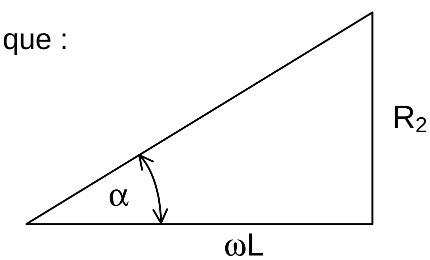
$$V_S^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos(\pi - \alpha)$$

Expresando cada una de las cantidades del segundo miembro en términos de I_L se obtiene :

$$V_s^2 = \frac{(I_L R_1)^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{(I_L R_2)^2}{\tan^2\alpha} + 2\frac{I_L^2 R_1 R_2}{\operatorname{sen}\alpha \bullet \tan\alpha}\cos\alpha$$

A partir de un triángulo rectángulo con un ángulo α se obtiene que :

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} \ .$$



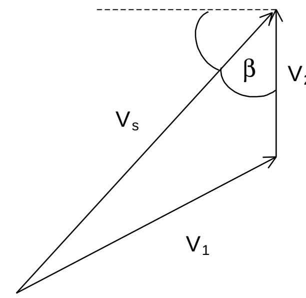
Entonces,

$$V_s^2 = I_L^2\left[\frac{R_1^2\left(R_2^2 + (\omega L)^2\right)}{R_2^2} + \frac{\cancel{R_2^2}\,(\omega L)^2}{\cancel{R_2^2}} + \frac{2R_1 \cancel{R_2}\,(\omega L)^2}{R_2^{\cancel{2}}}\right] .$$

Despejando I_L se obtiene:

$$I_L = \frac{V_s}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2\left[1 + 2(R_1/R_2) + (R_1/R_2)^2\right]}} \ .$$

(b) La diferencia de fase ϕ entre $i_L(t)$ y $v_S(t)$ puede expresarse en términos del ángulo β indicado en el diagrama fasorial de voltajes, según :



$$\phi = \frac{\pi}{2} - \beta .$$

Usando el teorema del coseno puede obtenerse β como sigue :

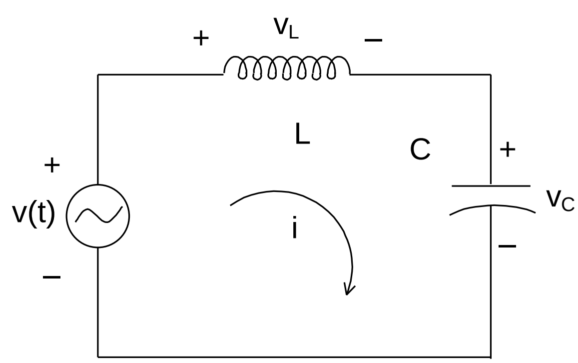
$$V_1^2 = V_2^2 + V_S^2 - 2V_2 V_S \cos\beta \quad ,$$

despejando $\cos\beta$ queda :

$$\cos\beta = \frac{I_L}{V_S} \bullet \left(\frac{R_2}{2\tan\alpha} \right) + \frac{V_S}{I_L} \bullet \left(\frac{\tan\alpha}{2R_2} \right) - \frac{I_L}{V_S} \bullet \left(\frac{R_1^2}{R_2 \operatorname{sen} 2\alpha} \right) .$$

Se deja como ejercicio simplificar la expresión anterior.

PROBLEMA 95. El circuito LC indicado en la figura es excitado por un voltaje sinusoidal $v(t) = V_0 \operatorname{sen}\omega t$.



(a) Calcular la corriente $i(t)$.

(b) Calcular la potencia media que entrega la fuente de voltaje.

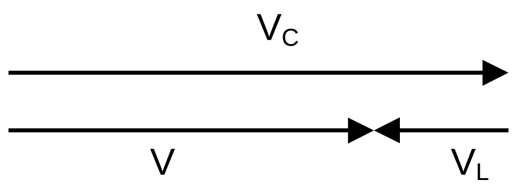
SOLUCIÓN

(a) Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al circuito se obtiene la ecuación :

$$v(t) = v_L + v_C \quad ,$$

cuya solución se estudiará mediante un diagrama fasorial. La corriente $i(t)$ en el circuito debe estar atrasada respecto a $v_L(t)$ y adelantada respecto a $v_C(t)$; luego los fasores correspondientes se dibujan muy fácilmente.

El diagrama fasorial correspondiente a la ecuación de voltaje para el circuito es el siguiente :



Este diagrama permite escribir la relación entre las amplitudes de los voltajes involucrados :

$$V_0 = V_C - V_L \quad .$$

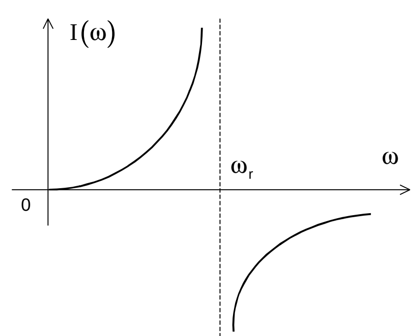
Las amplitudes de los voltajes en cada elemento se relacionan con la amplitud de la corriente, según :

$$V_L = \omega L\ I \qquad \text{y} \qquad V_C = \frac{I}{\omega C} \quad .$$

Sustituyendo, se obtiene la relación entre las amplitudes del voltaje aplicado y de la corriente:

$$V_0 = \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) I \quad .$$

Entonces, la corriente $i(t)$ que debe estar adelantada en $\pi / 2$ respecto al voltaje aplicado es :



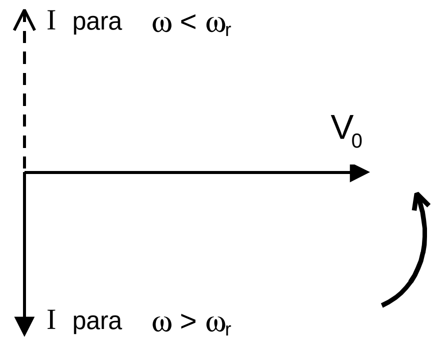
$$i(t) = I \bullet \mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I \cos \omega t \ ,$$

donde

$$I = \frac{V_0}{\dfrac{1}{\omega C} - \omega L} \quad .$$

La expresión y el gráfico anteriores muestran que la corriente diverge sin límite a la frecuencia $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, donde además $I(\omega)$ cambia de signo. Este cambio de signo significa que para $\omega > \omega_r$ la corriente cambia de fase en π respecto al voltaje aplicado, es decir, pasa a estar atrasada en $\pi/2$ respecto al voltaje aplicado. Para $\omega > \omega_r$, la expresión de la corriente $i(t)$ es:

$$i(t) = -|I| \bullet \cos\omega t = |I| \bullet \cos(\omega t - \pi)$$



Note que el cambio de signo en $i(t)$ no puede interpretarse como un cambio de sentido de la corriente, pues dicha corriente es alterna y está cambiando de sentido cada medio ciclo ($T/2$, con $\omega T = 2\pi$).

(b) La potencia instantánea que entrega la fuente de voltaje es :

$$p(t) = v(t) \bullet i(t) = V_0 I \operatorname{sen} \omega t \bullet \cos\omega t = \frac{1}{2} V_0 I \operatorname{sen} 2\omega t\,.$$

El valor medio de la potencia se obtiene según la definición :

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)\,dt \quad ,$$

y en este caso resulta el valor cero a cualquier frecuencia. Esto significa que la energía está oscilando, yendo de la fuente a los elementos del circuito y viceversa, completando un ciclo completo en el lapso $T/2$.

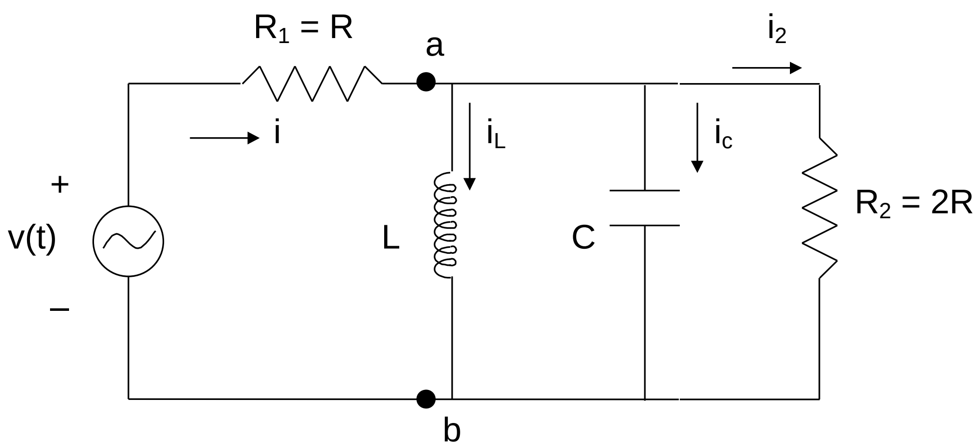
La divergencia que ocurre en la corriente, a la frecuencia ω_r, se explica porque a esa frecuencia se cumple exactamente que $V_C = V_L$, o bien $v_C + v_L = 0$, y por lo tanto no es posible satisfacer la ley de voltajes de Kirchhoff a esa frecuencia. En la práctica, una pequeña resistencia en el circuito limita la corriente a un valor finito. El sistema completo se comporta como una única resistencia excitada por la fuente de voltaje, de modo que la corriente y el voltaje aplicado están en fase.

PROBLEMA 96. El circuito RLC de la figura es excitado por una fuente de tensión alterna, $v(t) = V_0 \cos \omega t$.

(a) Determinar el valor de ω para el cual la corriente i_2 está en fase con la corriente i.

(b) Determinar la tensión $v_{ab}(t)$, para la frecuencia obtenida en (a).

(c) Determinar $i_L(t)$ e $i_C(t)$ en el límite de muy alta frecuencia, $(\omega \to \infty)$.



SOLUCIÓN

(a) En estado estacionario, entre los puntos a y b del circuito habrá una diferencia de potencial $v_{ab}(t)$, de la forma :

$$v_{ab}(t) = V_{ab} \cos(\omega t + \varphi) \quad , \tag{1}$$

en que φ es el desfase con respecto a la tensión $v(t)$ de la fuente alterna.

La amplitudes I_C e I_L correspondientes a las corrientes por el capacitor e inductor respectivamente, se relacionan con V_{ab} en la siguiente forma :

$$I_L = V_{ab} / \omega L \tag{2}$$

$$I_C = V_{ab}\ \omega\ C \tag{3}$$

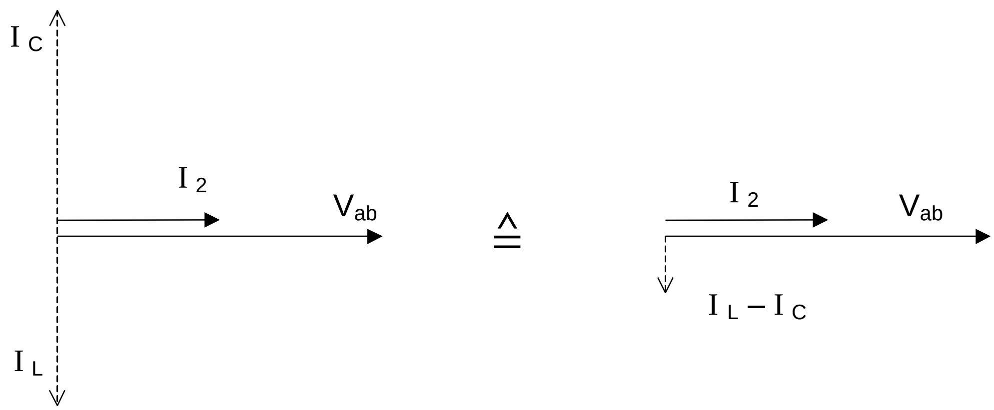
Las relaciones anteriores se deducen de las ecuaciones que relacionan los voltajes con las corrientes a través de un inductor o un condensador.

$$v_{ab}(t) = L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt} \tag{4}$$

$$i_C(t) = C\,\frac{dv_{ab}}{dt} \tag{5}$$

Considerando que estas cantidades varían armónicamente con frecuencia angular ω, la operación de derivar respecto al tiempo equivale a multiplicar por ω en la representación fasorial.

Por lo tanto, se tiene el siguiente diagrama fasorial :



Las corrientes en el circuito satisfacen : $i(t) = i_L(t) + i_C(t) + i_2(t)$, de modo que $i(t)$ e $i_2(t)$ están en fase cuando $i_L(t) + i_C(t) = 0$. Esto sucede cuando $I_L = I_C$, y por ende cuando la frecuencia es de valor $\omega_r = 1\big/\sqrt{LC}$.

Entonces, para $\omega = \omega_r = 1\big/\sqrt{LC}$ las corrientes $i_2(t)$ e $i(t)$ están en fase y son iguales.

(b) Como se verificó en la respuesta anterior, para $\omega = \omega_r$ se obtiene que $i(t) = i_2(t)$. Esto equivale a considerar que las resistencias R_1 y R_2 están en serie. Entonces,

$$i(t) = I\cos\omega t \quad , \qquad \text{con} \quad I = \frac{V_0}{R_1 + R_2} = \frac{V_0}{3R} \ .$$

Por lo tanto :

$$v_{ab}(t) \;=\; V_{ab}\cos\ t = i(t)\bullet R_2 = \mathrm{I}\bullet R_2\cos\ t = {}^2\!/_3\, V_0\cos\ t\ .$$

(c) En el límite de muy alta frecuencia $(\omega \to \infty)$, y considerando que v_{ab} se mantiene en un valor finito, de las ecuaciones (2) y (3) se deduce que $\mathrm{I}_L = 0$ y $V_{ab} = 0$. Por lo tanto, la resistencia R_2 queda *cortocircuitada* por el condensador, con lo cual $\mathrm{I}_2 = 0$.

Luego : $\mathrm{I}_C = \mathrm{I} = V_0 / R$. Entonces, $i_L(t) = 0$ e $i_C(t) = \dfrac{V_0}{R}\cos\omega t$.

Note que a medida que ω aumenta, el cuociente entre las magnitudes de los fasores I_C e I_L va aumentando cuadráticamente :

$$\frac{|\mathrm{I}_C|}{|\mathrm{I}_L|} = \omega^2 L\, C\ .$$

Para $\omega \to \infty$ este cuociente tiende a infinito, pero I_C se mantiene finito e igual a $\mathrm{I} = V_0 / R$.