8. CORRIENTE ELÉCTRICA

PROBLEMA 51. Una esfera de 0,60[m] de diámetro se descarga por un alambre conductor de tal forma que su carga instantánea es $q = 2 \bullet 10^{-7} e^{-2t}$ $[C]$.

Calcular el potencial de la esfera y la intensidad de la corriente, *0,20[s]* después de conectar el interruptor.

SOLUCIÓN

La capacidad de una esfera aislada es $C = 4\pi \varepsilon_0 R$, siendo R su radio. Luego el potencial de una esfera que tiene una carga q es :

$$V = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R} \quad .$$

En $t = 0,20[s]$ el potencial será :

$$V(0,20) = \frac{q(0,20)}{4\pi \varepsilon_0 R} \quad ,$$

con $q(0,20) = 2 \bullet 10^{-7}\ e^{-2 \bullet 0,20} = 1,34 \bullet 10^{-7} [C]$.

Luego,

$$V(0,20) = \frac{1,34 \bullet 10^{-7}}{4\pi \varepsilon_0 0,60} = \frac{1,34 \bullet 10^{-7} \bullet 9 \bullet 10^{9}}{0,60} = 2010[V]$$

$$V(0,20) = 2010[V]$$

La intensidad de la corriente está relacionada con la rapidez de cambio $\frac{dq}{dt}$ de la carga de la esfera:

$$\frac{dq}{dt} = 2 \bullet 10^{-7} e^{-2t} (-2) = -4 \bullet 10^{-7} e^{-2t} [A].$$

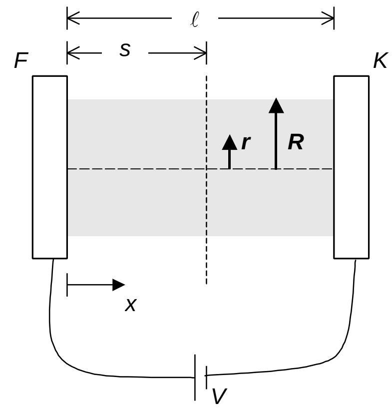
En $t = 0,20[s]$:

$$\frac{dq}{dt} = -2,68 \bullet 10^{-7} [A] = -0,268[\mu A] \quad .$$

El signo menos (–) indica que la carga de la esfera disminuye, es decir, la corriente fluye desde la esfera, con una intensidad $i = 0,268[\mu A]$ en $t = 0,20[s]$.

PROBLEMA 52. Mediante un dispositivo de voltaje V se aceleran partículas de carga positiva, que se producen en una fuente F con velocidades prácticamente nulas, formando un haz aproximadamente cilíndrico, de radio R. La concentración de partículas en el haz es proporcional a la distancia al eje del haz; $n = \beta\, r\ [1/m^3]$.

Determinar la intensidad de la corriente a través de una superficie perpendicular al haz, a distancia s de F.



SOLUCIÓN

Usando un sistema de referencia fijo a la fuente *F*, la densidad de corriente $\vec{J}$ en un punto del haz es :

$$\vec{J} = n q \vec{v} \quad ,$$

siendo n, q y $\vec{v}$ la concentración, carga y velocidad de las partículas respectivamente.

La intensidad de la corriente se obtiene a partir de :

$$I = \int \vec{J} \bullet d\vec{A} \quad ;$$

integral que debe efectuarse sobre toda la superficie perpendicular al haz, ubicada a una distancia s de F.

Antes de efectuar la integración, se procede a determinar $\vec{v}$, la velocidad de las partículas al atravesar la superficie antes indicada. Para ello usamos :

$$\Delta K = W_{neto}, \qquad \text{es decir:} \qquad \frac{1}{2} m v^2 - 0 = E \bullet s q \quad ;$$

siendo E la magnitud de la intensidad del campo eléctrico uniforme que acelera las partículas, dada por :

$$E = V / \ell$$

Luego ; $$v = \sqrt{\frac{2Vsq}{m\ell}} \quad .$$

Además, $\vec{v} = v\,\hat{i}$ y $\vec{J} = nq\vec{v} = \beta\, r\, q\sqrt{\dfrac{2Vsq}{m\ell}}\;\hat{i}$.

Entonces,

$$I = \int \vec{J} \bullet d\vec{A} = \int_0^R \beta\, q\sqrt{\frac{2Vsq}{m\ell}}\, r\,\hat{i} \bullet 2\pi\, r\, dr\,\hat{i} \ .$$

Note que se ha escogido como elemento de área un anillo de radio r en el cual $J(r)$ tiene un mismo valor.

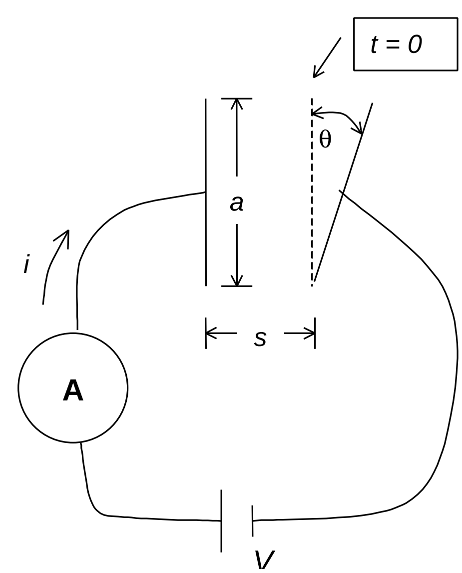
Finalmente :

$$I = 2\pi\,\beta\, q\,\sqrt{\frac{2Vsq}{m\ell}}\ \int_0^R r^2\, dr$$

$$I = \frac{2\pi\,\beta\, q R^3}{3}\,\sqrt{\frac{2Vsq}{m\ell}}$$

El resultado obtenido depende del cuociente q/m de las partículas. También depende de s, lo cual indica que la corriente I es mayor en una sección más alejada de la fuente.

PROBLEMA 53. Con dos placas metálicas rectangulares de lados a y b, enfrentándose a distancia s, se forma un condensador. A las placas se conecta una batería de voltaje V constante.



A partir de cierto instante $t = 0$, una de las placas se hace oscilar armónicamente con período T y pequeña amplitud, alrededor de un eje que coincide con uno de los lados de largo b, de modo que el ángulo θ de la figura varía según $\theta(t) = \dfrac{\pi}{60}\, sen\dfrac{2\pi}{T}t$, con t en segundos.

Determinar la intensidad de la corriente que mide el amperímetro A.

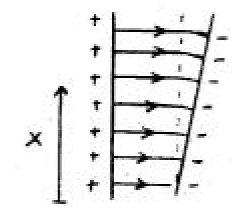
SOLUCIÓN

La carga Q en las placas del condensador está dada por $Q = C \bullet V$

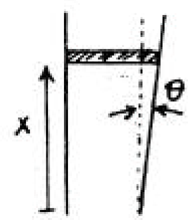
La corriente i que mide el amperímetro es:

$$i = \frac{dQ}{dt} = V \bullet \frac{dC}{dt} = V \bullet \frac{dC}{d\theta} \bullet \frac{d\theta}{dt}, \quad \text{es decir,} \quad i = \frac{\pi^2 V}{30T}\left(\cos\frac{2\pi}{T}t\right) \bullet \frac{dC}{d\theta} \ .$$

Para encontrar la capacidad del condensador en función del ángulo θ, supondremos que los efectos de borde son despreciables y que entre las placas, las líneas de campo tienen la forma indicada en la figura adjunta. En ella debe notarse que las líneas de campo eléctrico forman pequeños arcos de circunferencia, en el espacio entre las placas.



El condensador puede considerarse como un conjunto de pequeños condensadores en paralelo, cuya capacidad dC está dada según :



$$dC = \frac{\varepsilon_0\, b\, dx}{s + \theta x} \ .$$

Luego, la capacidad total del condensador será :

$$C = \int dC = \varepsilon_0 b \int_0^a \frac{dx}{s + \theta x} = \frac{\varepsilon_0 b}{\theta} \ln\left(\frac{s + \theta a}{s}\right) = \frac{\varepsilon_0 b}{\theta} \ln\left(1 + \frac{a}{s}\theta\right) \ .$$

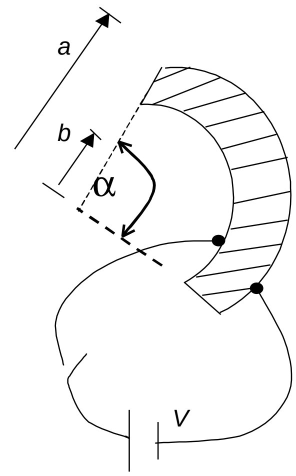
Por lo tanto:

$$\frac{dC}{d\theta} = -\frac{\varepsilon_0 b}{\theta^2}\ln\left(1 + \frac{a}{s}\theta\right) + \frac{\varepsilon_0 b}{\theta}\,\frac{a/s}{1 + \theta\, a/s}$$

y finalmente, para $t > 0$:

$$i(t) = \frac{2\pi V \varepsilon_0 b}{T}\left(\cot\frac{2\pi}{T}t\right) \bullet \left[\frac{a}{s + a\theta(t)} - \frac{1}{\theta(t)} \bullet \ln\left(1 + \frac{a}{s}\theta(t)\right)\right]$$

donde $\quad \theta(t) = \frac{\pi}{60}\, sen\frac{2\pi}{T}t \ .$



PROBLEMA 54. De un disco metálico de radio a con un agujero de radio b y espesor constante c, se corta un trozo de la forma indicada en la figura adjunta. Una batería de voltaje V se aplica entre sus dos superficies curvas. A partir del instante de conexión de la batería $(t=0)$, la resistividad del material cambia con el tiempo t según $\rho(t)=\rho_0\left(1+\beta t^2\right)$. Para aumentar la temperatura del trozo desde T_0 hasta T_d, se requiere que la batería suministre una energía $\mathcal{E}_\alpha$ durante el lapso t_d.

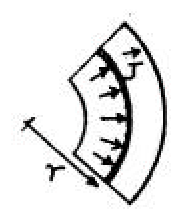
Determinar una expresión para el tiempo t_d en función de los datos.

SOLUCIÓN

La energía $\mathcal{E}_\alpha$ debe ser igual a:

$$\mathcal{E}_\alpha = \int_0^{t_d} p(t)dt = \int_0^{t_d} \frac{V^2}{R(t)}dt \ .$$

En consecuencia, es necesario determinar la resistencia total del conductor, en función del tiempo.



Puesto que la corriente fluye radialmente, la resistencia total puede obtenerse sumando las resistencias de todos los elementos similares al que se indica en la figura, cuya resistencia dR es :

$$dR = \frac{\rho\, dr}{A} = \frac{\rho\, dr}{c\bullet\alpha\bullet r} \ .$$

Nótese que en un instante determinado todos los elementos que estamos considerando conducen la misma intensidad de corriente, es decir, están conectados en serie, lo cual justifica que la resistencia total se obtenga "sumando" las resistencias de cada uno de ellos. Por lo tanto :

$$R = \int_0^R dR = \int_b^a \frac{\rho\, dr}{c\alpha r} = \frac{\rho}{c\alpha}\int_b^a \frac{dr}{r}$$

$$R = \frac{\rho}{c\alpha}\ln\left(\frac{a}{b}\right) .$$

Puesto que ρ depende del tiempo, R es una resistencia variable.

Entonces, la energía $\mathcal{E}_\alpha$ es:

$$\mathcal{E}_\alpha = \int_0^{t_d} \frac{c\alpha V^2\, dt}{\rho(t)\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{c\alpha V^2}{\rho_0 \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \int_0^{t_d} \frac{dt}{1+\beta t^2} \,.$$

Así, el problema ha quedado reducida a calcular una integral.

Usando la sustitución $\sqrt{\beta}\, t = \tan\theta \;\Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sec^2\theta\, d\theta$, la integral se resuelve fácilmente :

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{c\alpha V^2}{\rho_0 \ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \int_{\theta_i}^{\theta_s} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\beta}\,\underbrace{(1+\tan^2\theta)}_{\sec^2\theta}} = \frac{c\alpha V^2}{\rho_0 \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \bullet \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{\theta_i}^{\theta_s} d\theta$$

Entonces :

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{c\alpha V^2}{\rho_0 \sqrt{\beta} \ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \left[\arctan\sqrt{\beta}\, t_d - 0\right] .$$

En esta igualdad se despeja t_d

$$\arctan\left(\sqrt{\beta}\, t_d\right) = \frac{\mathcal{E}_\alpha\, \rho_0 \sqrt{\beta} \ln\left(\frac{a}{b}\right)}{c\alpha V^2}$$

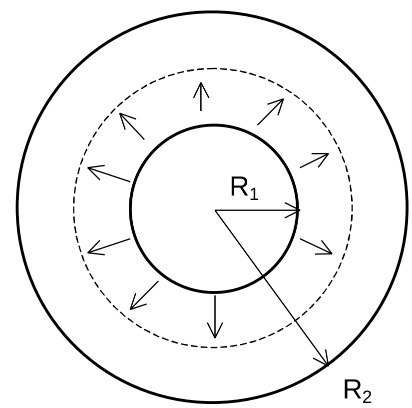
$$t_d = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \bullet \tan\left[\frac{\mathcal{E}_\alpha \rho_0 \sqrt{\beta} \ln\left(\frac{a}{b}\right)}{c\alpha V^2}\right] .$$

PROBLEMA 55. Un material de conductividad eléctrica σ llena el espacio comprendido entre dos cilindros conductores coaxiales muy largos, de radios R_1 y R_2 y espesor despreciable. ($R_1 < R_2$) .

(a) Calcular la corriente (por unidad de longitud) entre los cilindros, cuando se aplica entre ellos una diferencia de potencial V.

(b) Calcular la resistencia eléctrica, por unidad de longitud, del cable coaxial.

SOLUCIÓN



(a) Considerando que el cilindro interior está a mayor potencial, la corriente fluye radialmente hacia afuera, de modo que en cada punto del espacio entre los cilindros, se cumple la relación $\vec{J} = \sigma\vec{E}$.

La simetría cilíndrica permite asegurar que la magnitud de $\vec{E}$ entre los cilindros es función sólo de r . $\left(R_1 < r < R_2\right)$. Por lo tanto, la corriente I puede calcularse como el producto $J(r) \bullet A$, siendo $A = 2\pi r L$ el área de una superficie cilíndrica de radio r que es perpendicular a esa corriente. Es decir, $I = J(r) \bullet 2\pi r \bullet L$, cuyo resultado debería ser independiente de r una vez calculada $J(r) = \sigma E(r)$.

Para calcular $E(r)$ en términos de r y V , es necesario aplicar primero la ley de Gauss, de modo que :

$$E(r) \bullet 2\pi r L = \lambda L/\varepsilon_0 \;\Rightarrow\; E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0\, r} \quad ,$$

y a continuación calcular la diferencia de potencial entre los cilindros. Usando una trayectoria radial hacia fuera, tenemos que :

$$0 - V = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Despejando λ en la relación anterior y sustituyendo en la expresión para el campo eléctrico, tenemos que :

$$E(r) = \frac{V}{r \bullet \ln\left(R_2/R_1\right)} \ .$$

Finalmente,

$$I = \frac{\sigma V \bullet 2\pi L}{\ln\left(R_2/R_1\right)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{I}{L} = \frac{2\pi\sigma V}{\ln\left(R_2/R_1\right)} \ .$$

Note que este resultado no depende de r como se había señalado anteriormente.

(b) La resistencia eléctrica del cable coaxial es :

$$\mathbb{R}_e = \frac{V}{I} \ ,$$

y su valor por unidad de longitud es :

$$\frac{\mathbb{R}_e}{L} = \frac{\ln\left(R_2/R_1\right)}{2\pi\sigma} \ .$$