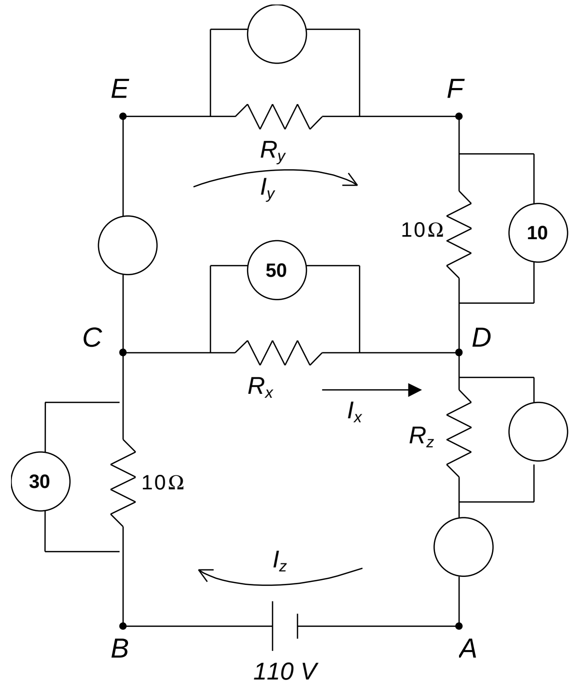
9. CIRCUITOS ELÉCTRICOS

PROBLEMA 56. En el circuito de la figura, calcular las resistencias R_x, R_y y R_z, y determinar las lecturas de los voltímetros y amperímetros en blanco. Todas las lecturas indicadas en instrumentos están en unidades del sistema MKSC.



SOLUCIÓN

- Este es un problema para resolver "mentalmente". Siga las instrucciones y vaya completando el diagrama. Tenga presente que:

(i) La caída de potencial en una resistencia es igual a IR.

(ii) Los amperímetros se conectan en serie y su resistencia interna es despreciable.

(iii) Los voltímetros se conectan en paralelo y su resistencia interna es infinita.

- **Observe** los voltímetros que marcan 30[V] y 10[V] respectivamente; como ambos miden la caída de potencial en una resistencia conocida, usted puede calcular la corriente que pasa a través de cada una: I_z e I_y respectivamente. **Calcúlelas**. Ahora puede usted aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff, a uno de los nodos C o D y obtener I_x, simplemente por diferencia. **Calcule I_x.** **Observe** el voltímetro que marca 50[V]. Como acaba de calcular I_x, puede determinar R_x. **Hágalo**.

- Conocidas las corrientes, ya puede dedicarse a las diferencias de potencial. **Recorra** el circuito $ABCDA$. El potencial sube 110[V] en la batería, cae 30[V] y 50[V] en las resistencias de $10[\Omega]$ y R_x respectivamente, y debe volver al valor inicial una vez que pasemos por R_z. **Obtenga** la lectura del voltímetro en paralelo con R_z, simplemente por diferencia. Con este último valor, obtenga R_z.

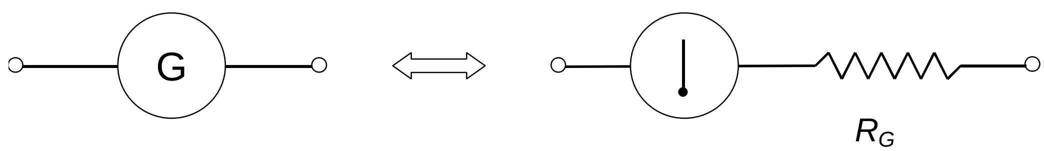
- Ahora **recorra** el circuito $CEFDC$ y **calcule** la diferencia de potencial en R_y por un procedimiento similar. **Tenga cuidado** al atravesar R_x, pues si lo hace en sentido opuesto a la corriente, el potencial aumenta. Finalmente **obtenga** R_y.

PROBLEMA 57. Cuando a un galvanómetro se conecta una resistencia en serie R_s , se puede usar como voltímetro en que la máxima deflexión de la aguja indicadora permite medir un voltaje V_m. Cuando al mismo galvanómetro se conecta una resistencia en paralelo R_p se puede usar como amperímetro para medir corrientes hasta una intensidad I_m.

Determinar la resistencia interna del galvanómetro y la intensidad de la corriente que produce en él la máxima deflexión de su aguja.

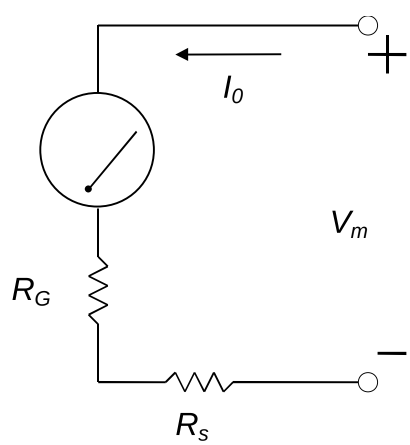
SOLUCIÓN

Se representará al galvanómetro como un instrumento ideal (sin resistencia interna) en serie con una resistencia R_G que corresponde a la resistencia interna del galvanómetro.



Si llamamos I_0 a la intensidad de la corriente que produce la máxima desviación de la aguja del galvanómetro; entonces al usarlo como voltímetro o como amperímetro respectivamente, tendremos :

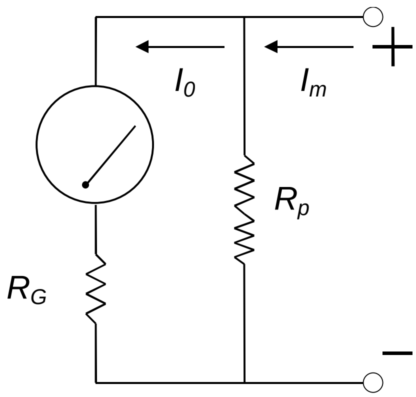
(a) El galvanómetro como voltímetro.



Usando la ley de voltaje de Kirchhoff:

$$V_m = I_0 R_G + I_0 R_s \qquad (1)$$

(b) El galvanómetro como amperímetro.



Usando las leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff :

$$I_0\,R_G = (I_m - I_0)\,R_p \qquad (2)$$

Las dos ecuaciones planteadas anteriormente :

(1) $V_m = I_0\,R_G + I_0\,R_s$

(2) $I_0\,R_G = (I_m - I_0)\,R_p$,

permiten obtener R_G e I_0 , que son las cantidades pedidas.

Despejando I_0 de (2) y reemplazando en (1) , tenemos :

$$V_m = \frac{I_m\,R_p}{R_G + R_p}\,(R_G + R_s)$$

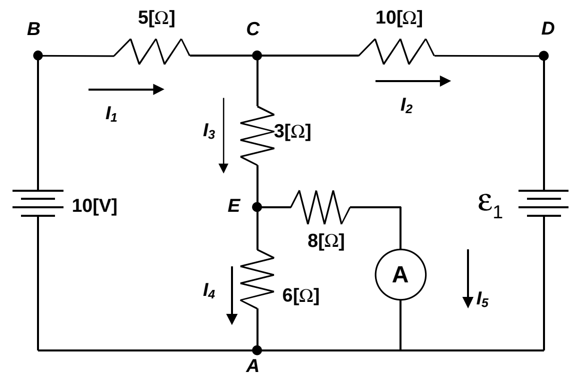
de donde se obtiene :

$$R_G = \frac{R_p\,(I_m\,R_s - V_m)}{V_m - I_m\,R_p} \ .$$

Despejando I_0 en (1) e introduciendo el valor recién encontrado para R_G , se obtiene :

$$I_0 = \frac{V_m - I_m\,R_p}{R_s - R_p}$$

PROBLEMA 58. En el circuito de la figura, determinar el valor de la *fem* ε_1 para que el amperímetro ideal (A) marque cero.



SOLUCIÓN

En la figura se indican los nodos A, B, C, D y E, y las corrientes I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5 a las cuales se hará referencia en la solución.

Según el enunciado debe cumplirse que : $I_5 = 0$

Puesto que el amperímetro es ideal, las resistencias de $6[\Omega]$ y $8[\Omega]$ están en paralelo; luego $6I_4 = 8I_5$. Entonces, $I_4 = 0$

Al aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff al nodo E, tenemos : $I_3 = I_4 + I_5$ y dado que $I_4 = I_5 = 0$; entonces : $I_3 = 0$.

Aplicando el teorema del nodo, al nodo C, tenemos $I_1 = I_2 + I_3$ y puesto que $I_3 = 0$, entonces $I_1 = I_2$.

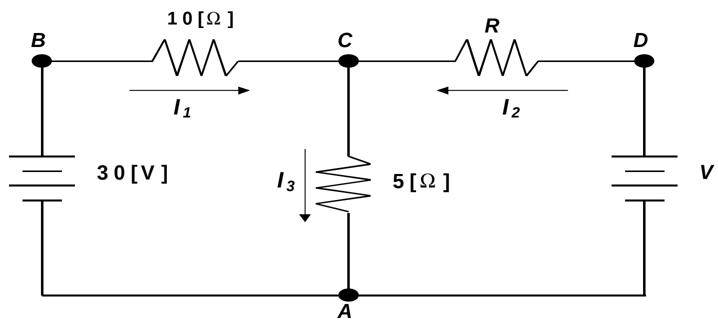
Aplicando el teorema de la trayectoria, al camino cerrado $ABCEA$: $10 - 5I_1 - 0 - 0 = 0$, se concluye que: $I_1 = \frac{10}{5} = 2[A]$.

Usando nuevamente la ley de voltajes de Kirchhoff, aplicada al camino cerrado $AECDA$, tenemos :

$$0 + 0 - 10 \bullet I_2 - \varepsilon_1 = 0,$$

puesto que $I_2 = I_1 = 2[A]$, entonces $\varepsilon_1 = -10 \bullet 2 = -20[V]$. El signo menos indica que la *fem* debe conectarse con polaridad opuesta a la de la figura (terminal negativo en D) para poder cumplir con la condición del problema.

PROBLEMA 59. Determinar el valor de V de modo que la potencia disipada en R sea mínima.



SOLUCIÓN

Usando las corrientes y los nodos identificados en la figura tenemos:

En el nodo C : $I_1 + I_2 = I_3$

Para el camino cerrado $ABCA$: $30 - 10I_1 - 5I_3 = 0$.

Para el camino cerrado $ADCA$: $V - I_2R - 5I_3 = 0$.

La potencia disipada en R es $P = I_2^2 \bullet R$.

Se despeja I_2 del sistema formado por las tres primeras ecuaciones.

(1) $I_1 + I_2 = I_3$

(2) $30 - 10I_1 - 5I_3 = 0$ De (2) : $I_1 = 3 - I_3/2$

(3) $V - I_2R - 5I_3 = 0$ y reemplazando I_1 en (1), se tiene : $3 - \frac{1}{2}I_3 + I_2 = I_3$

$$\Rightarrow \qquad I_3 = \frac{2}{3}(3 + I_2) = 2 + \frac{2}{3}I_2$$

Reemplazando I_3 en (3) , se tendrá:

$$V - I_2R - 5\left(2 + \frac{2}{3}I_2\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V - 10 = I_2\left(R + \frac{10}{3}\right),$$

luego :

$$I_2 = \frac{V-10}{R+\frac{10}{3}}$$

Por tanto : $P = I_2^2 \bullet R = \dfrac{R}{\left(R+\frac{10}{3}\right)^2}\left(V-10\right)^2$.

El valor de V para el cual P es mínima se encontrará haciendo $\dfrac{dP}{dV} = 0$.

$$\frac{dP}{dV} = \frac{R}{\left(R+\frac{10}{3}\right)^2} \bullet 2\left(V-10\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V = 10[V]$$

Hasta aquí no podemos asegurar que para $V = 10[V]$, la potencia sea mínima, porque al hacer $\dfrac{dP}{dV} = 0$ se obtienen soluciones para máximos y/o mínimos.

Para verificar, se calcula I_2 cuando $V = 10[V]$. Resulta $I_2 = 0$ y $P = I_2^2 R = 0$, de lo cual concluimos que efectivamente la solución encontrada es la solución deseada.

Pensemos en una manera más simple de resolver el problema, partiendo del hecho que la mínima potencia que puede disipar R es $P = 0$ (ó $I_2 = 0$).

En esas condiciones $I_1 = I_3$; $30 - 10I_1 - 5I_3 = 0$, de lo cual se deduce :

$$I_1 = I_3 = \frac{30}{15} = 2[A],$$

luego, $V_C - V_A = I_3 \bullet 5 = 10[V]$.

Además: $V_D - V_A = V$, y puesto que $I_2 = 0$, entonces $V_C = V_D$; luego :

$$\underbrace{V_C - V_A}_{10[V]} = \underbrace{V_D - V_A}_{V} \quad ,$$

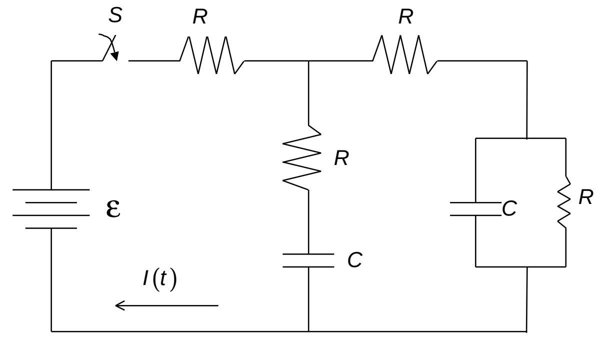
lo cual conduce a la misma solución anterior, por un camino mucho más simple.

PROBLEMA 60. El interruptor S se conecta en $t = 0$, estando inicialmente los condensadores descargados.

(a) Determinar I en $t = 0^+$: $I(0^+)$.

(b) Determinar I en $t \to \infty$: $I(\infty)$.

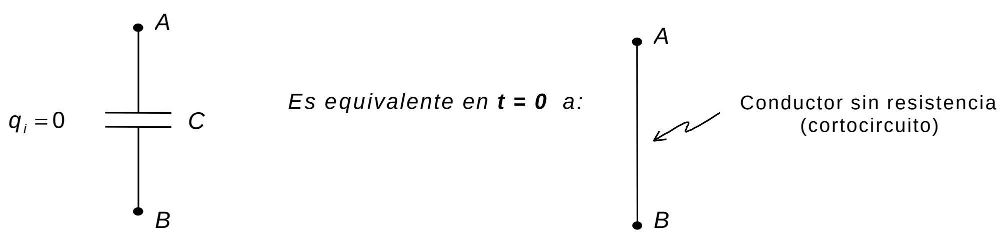
(c) Determinar la carga final en cada condensador.



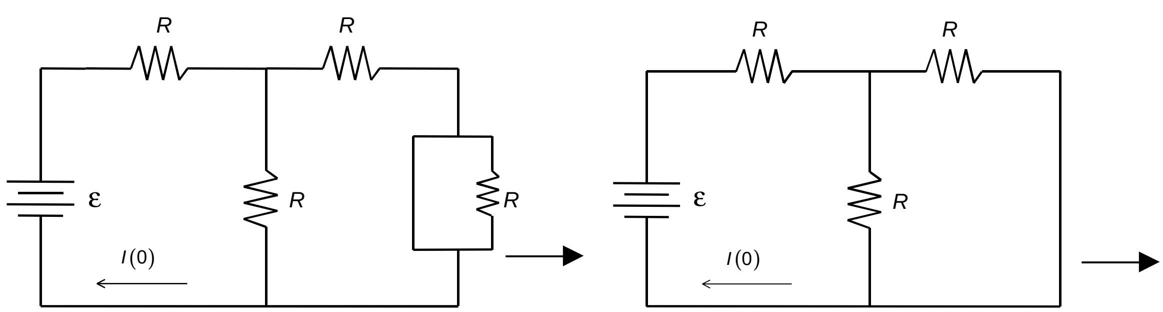
SOLUCIÓN

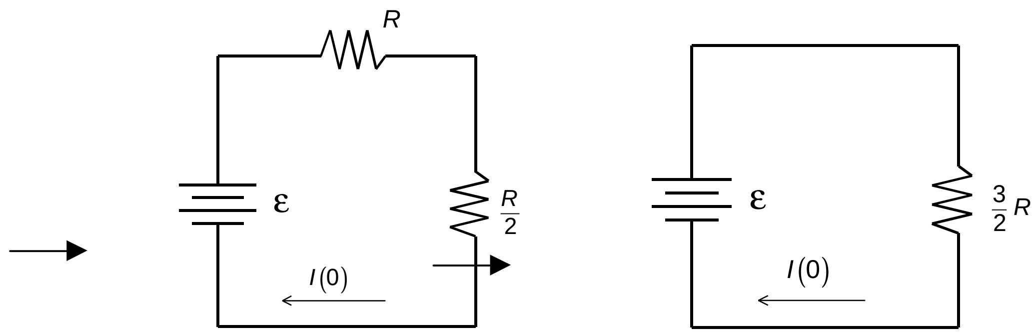
(a) En $t = 0$ la carga en cada uno de los condensadores es $q_i = 0$, luego $V_i = q_i / C = 0$ en cada condensador. La corriente inicial ($t = 0$) por los condensadores no tiene restricción, salvo las que imponen el resto de los elementos del circuito.

En $t = 0$, un condensador descargado puede ser representado por un elemento equivalente que es simplemente un conductor conectado entre los terminales del condensador.



Entonces, el circuito para $t = 0$ es :





Luego : $I(0) = \dfrac{\varepsilon}{3/2\,R} = \dfrac{2\varepsilon}{3R}$.

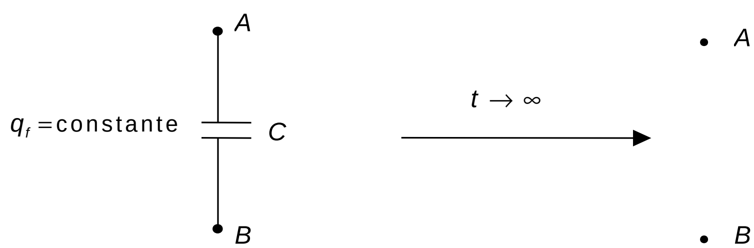
(b) Cuando $t \to \infty$, los condensadores del circuito estarán cargados y, tanto la corriente como el voltaje a través de cada condensador, tendrán un valor fijo (su valor final). Si V_f es el voltaje final en un condensador, entonces : $q_f = C V_f$ es la carga final en ese condensador. Puesto que la corriente a través de un condensador es $i = \dfrac{dq}{dt}$, entonces cuando adquiere su carga final $(t \to \infty)$, $i = 0$ a través del condensador.

En resumen, cuando $t \to \infty$ los condensadores imponen dos restricciones:

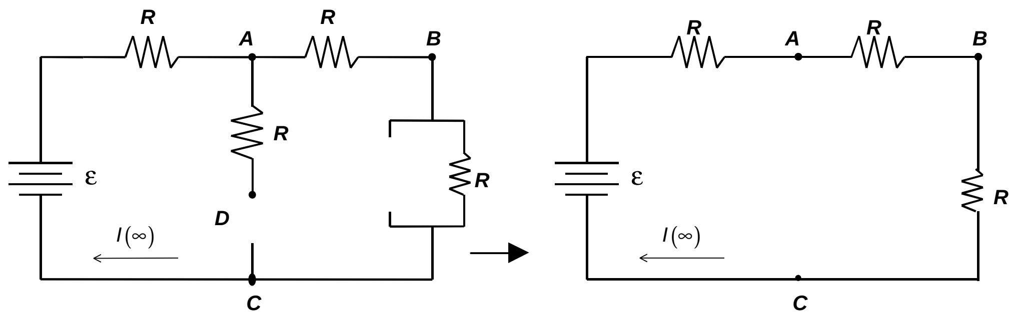
(1) $i_f = 0$ entre sus terminales.

(2) $V_f = \text{constante}$ entre sus terminales, estando restringido su valor sólo por el resto de los elementos del circuito.

En estas condiciones el elemento equivalente al condensador es un circuito abierto con un voltaje V_f entre los terminales.



Luego, para $t \to \infty$, el circuito queda :



$$\Rightarrow \; I(\infty) = \frac{\varepsilon}{3R}$$

Nótese que la resistencia que "cuelga" del nodo A, no conduce corriente y no interviene en el análisis de $I(\infty)$. El condensador conectado entre D y C quedará finalmente con un voltaje de valor $(V_D - V_C) = (V_A - V_C)$, ya que la corriente por la resistencia colgante es nula.

El voltaje en el condensador conectado entre B y C será: $(V_B - V_C)$. Aplicando el teorema de la trayectoria a los caminos abiertos CB y CBA tenemos:

$$V_C + R \bullet I(\infty) = V_B \qquad \text{y} \qquad V_C + R \bullet I(\infty) + R \bullet I(\infty) = V_A$$

Luego; $$V_B - V_C = R \bullet I(\infty) = R \bullet \frac{\varepsilon}{3R} = \frac{\varepsilon}{3}$$

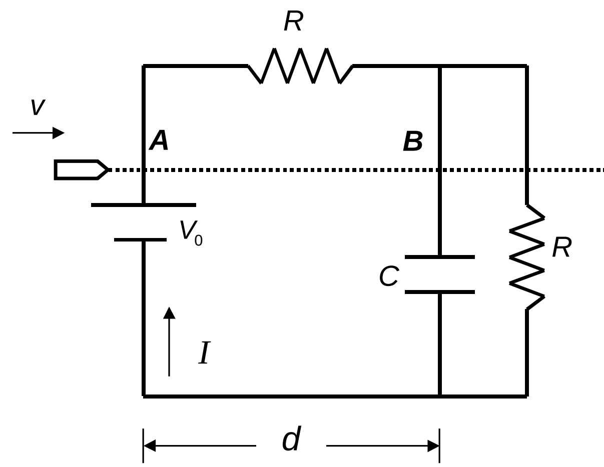
$$V_A - V_C = 2R \bullet I(\infty) = 2R \bullet \frac{\varepsilon}{3R} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

Finalmente ; $$q_{BC} = C(V_B - V_C) = C\varepsilon/3$$

$$q_{DC} = C(V_A - V_C) = \frac{2C\varepsilon}{3}$$

PROBLEMA 61. El circuito mostrado en la figura es utilizado para medir la velocidad de una bala con elementos de los siguientes valores :

$$V_0 = 100[V] \quad , \quad R = 25[\Omega] \quad , \quad C = 100[\mu F] \quad , \quad d = 10[cm]$$



Inicialmente, el condensador está cargado, luego la bala corta el alambre A desconectando la batería, y posteriormente corta el alambre B, dejando aislado el condensador, cuya diferencia de potencial, una vez cortados ambos alambres, es $V_0/4$.

(a) Calcular la diferencia de potencial en el condensador antes que la bala corte los alambres, suponiendo que la batería ha estado conectada durante largo tiempo.

(b) Determinar la velocidad de la bala.

(c) Graficar la corriente en el condensador, en función del tiempo.

<u>SOLUCIÓN</u>

(a) Después que la batería ha estado conectada durante largo tiempo, el condensador está cargado y sólo circula corriente por las resistencias. Se cumple que :

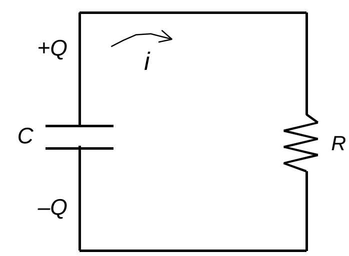
$$V_0 - IR - IR = 0 \qquad \Rightarrow \quad I = \frac{V_0}{2R} \ .$$

La diferencia de potencial en el condensador, antes de cortar el alambre A, es igual a la diferencia de potencial en la resistencia que está en paralelo con él.

$$\Delta V_{\text{condensador}} = IR = \frac{V_0}{2\cancel{R}}\cancel{R} = \frac{V_0}{2}$$

(b) La carga inicial del condensador es $Q_0 = C\,\Delta V = \dfrac{CV_0}{2} = 5 \bullet 10^{-3}\,[C]$.

Cuando la bala corta el alambre A, se inicia la descarga del condensador. El circuito se reduce al condensador y la resistencia, que inicialmente estaban en paralelo. Durante la descarga se cumple que :



$$\frac{Q}{C} = i\,R \qquad , \qquad i = -\,\frac{dQ}{dt} \quad .$$

Entonces, debe resolverse la ecuación :

$$\frac{dQ}{d\,t} + \frac{Q}{R\,C} = 0 \quad ,$$

con la condición inicial $Q(0) = Q_0$.

La solución es : $Q(t) = Q_0 \bullet e^{-t/RC}$; como usted puede verificar por sustitución.

Luego, la diferencia de potencial en el condensador está dada por : $V(t) = \dfrac{V_0}{2}\, e^{-t/RC}$.

El condensador se descarga mientras la bala recorre la distancia d , es decir, durante el tiempo $T = \dfrac{d}{v}$, siendo v la velocidad de la bala. Al cabo del tiempo T, la diferencia de potencial en el condensador debe disminuir a : $\dfrac{V_0}{4}$.

Entonces,

$$\frac{V_0}{4} = \frac{V_0}{2}\, e^{-T/RC}$$

Luego , $\qquad \ln 2 = T/RC = \dfrac{d}{v\,R\,C}$

$$v = \frac{d}{R\,C\ln 2} = 58\,[m/s] \quad .$$

Además, $T = 1{,}7\,[ms]$

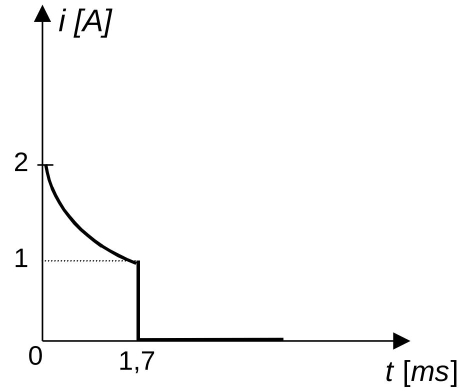
(c) Gráfico de i

$$Q(t) = Q_0 \bullet e^{-t/\tau} \quad , \quad \tau = RC = 2{,}5\,[ms]$$

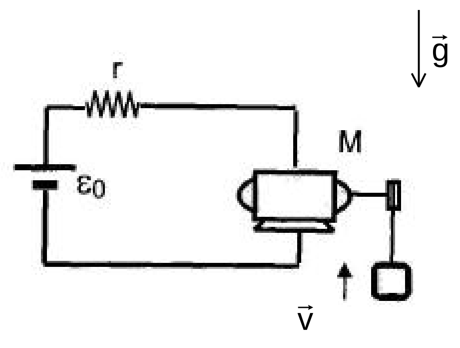
$$i = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} \bullet e^{-t/\tau} = 2e^{-t/\tau} \ .$$

En el instante T, la corriente i es :

$$i = 2 \bullet e^{-\ln 2} = 1\,[A]$$



PROBLEMA 62. Un motor de corriente continua levanta con velocidad constante, un objeto cuyo peso es de 480[N], empleando como fuente de energía una batería de fuerza electromotriz $\varepsilon_0 = 60[\mathrm{V}]$ y resistencia interna $\mathrm{r} = 1{,}25[\Omega]$. Suponer que el motor puede representarse como una resistencia R cuyo valor depende de la velocidad del objeto.



(a) Calcular el valor máximo de la velocidad que podría alcanzar el objeto.

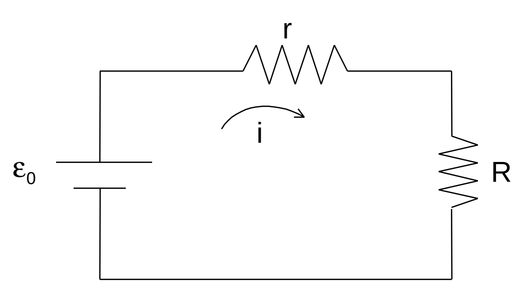
(b) Calcular la potencia que se disipa como calor cuando el objeto es levantado a la velocidad máxima.

(c) Con el propósito de reducir las pérdidas en la resistencia r, la velocidad se ajusta en $\mathrm{v} = 0{,}50[\mathrm{m/s}]$, valor menor que el máximo. Calcular la corriente que entrega la batería en las nuevas condiciones.

SOLUCIÓN

(a) El circuito equivalente, de corriente continua, para el sistema en pleno funcionamiento es una fuente en serie con dos resistencias. La aplicación de la ley de voltajes de Kirchhoff indica que :

$$\varepsilon_0 = \mathrm{i}\,(\mathrm{r} + \mathrm{R})\,.$$



La potencia disipada en la resistencia R, equivalente al motor, corresponde realmente a la potencia mecánica desarrollada por el motor, es decir, debe cumplirse que :

$$i^2 R = mgv \; .$$

La condición de que v sea máxima permite obtener un valor para R. Para ello, se despeja v en términos de R y luego se resuelve la ecuación $\dfrac{dv}{dR} = 0$.

Entonces,

$$v = \frac{i^2 R}{mg} = \frac{\varepsilon_0^2 R}{mg(r+R)^2} \quad ,$$

$$\frac{dv}{dR} = \frac{\varepsilon_0^2}{mg}\left[\frac{1}{(r+R)^2} - \frac{2R}{(r+R)^3}\right] = 0 \quad .$$

Al resolver la ecuación anterior se obtiene el resultado $R = r$, que da como velocidad máxima el valor :

$$v = \frac{\varepsilon_0^2}{4mgr} = 1{,}50\,[\mathrm{m/s}] \; .$$

(b) La potencia que se disipa como calor es la que se desarrolla en la resistencia interna de la batería:

$$\mathcal{P}_{\text{calor}} = i^2 r = \left(\frac{\varepsilon_0}{2r}\right)^2 \bullet r = \frac{\varepsilon_0^2}{4r} = 720\,[\mathrm{W}] \; .$$

Este valor es igual a la potencia mecánica que desarrolla el motor :

$$\mathcal{P}_{\text{motor}} = mgv = 480 \bullet 1{,}50 = 720\,[\mathrm{W}] \; .$$

(c) En las nuevas condiciones, es necesario calcular el valor de la nueva resistencia equivalente R, a partir de la expresión para v encontrada al resolver la parte (a), y luego se iguala la potencia mecánica con el valor $i^2 R$. A partir de la relación,

$$v = \frac{\varepsilon_0^2 R}{mg(r+R)^2} \quad ,$$

se obtiene una ecuación de segundo grado para R,

$$mgv\left(r+R\right)^2 = \varepsilon_0^2 R \quad ,$$

$$R^2 - \left(\frac{\varepsilon_0^2}{mgv} - 2r\right)R + r^2 = 0 \quad .$$

Usando los valores numéricos, la ecuación anterior queda :

$$R^2 - \frac{25}{2}R + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 0 \quad ,$$

y sus soluciones son :

$$R = \frac{25}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\left(25 \pm \sqrt{600}\right) = \frac{1}{4}\left(25 \pm 24{,}5\right).$$

El valor $R = 12{,}4\left[\Omega\right]$ es el resultado buscado, el otro no cumple el objetivo de reducir las pérdidas en r. Finalmente ;

$$i^2 R = mgv \;\Rightarrow i = \sqrt{\frac{mgv}{R}} = \sqrt{\frac{480}{2 \bullet 12{,}4}} \approx 4{,}4[A] \quad .$$

Note que esta corriente es aproximadamente 1/5 de la corriente correspondiente al caso en que el objeto sube a máxima velocidad.