FIS120: FÍSICA GENERAL II

GUÍA #4: Condensadores, dieléctricos y energía.

Objetivos de aprendizaje

Esta guía es una herramienta que usted debe usar para lograr los siguientes objetivos:

- Comprender el funcionamiento de un condensador eléctrico.
- Definir y calcular la capacidad de un condensador.
- Comprender y aplicar conceptos de almacenamiento de energía en un campo eléctrico.

I. Preguntas conceptuales

Responda usando argumentos técnicos las siguientes preguntas. Apóyese en gráficos y ecuaciones según corresponda. Sea preciso y claro en sus respuestas. Ver capítulo 31 del libro[1]

a) ¿De qué factores depende la capacidad de un condensador?

b) Un condensador de placas paralelas conectado a una batería de potencial V_0. Si un agente externo separa las placas del condensador: ¿qué ocurre con la carga de cada placa? ¿que signo tiene el trabajo que debe realizar el agente externo?, ¿cómo cambian sus respuestas anteriores si el condensador no está conectado a la batería?

c) Si se introduce un material dieléctrico entre las placas de un condensador, llenando todo el espacio entre ellas ¿aumenta o disminuye la capacidad de condensador?. Si el material no llena completamente el espacio entre las placas ¿qué ocurre con la capacidad? compare con la situación anterior.

d) Se carga un condensador de placas paralelas contentándolo a una batería y se mantiene conectado a ella. En seguida se duplica la distancia entre las placas. ¿Cómo cambia el campo eléctrico?, ¿y la diferencia de potencial? ¿y la energía total acumulada?. Explique su razonamiento. ¿Cómo cambian sus respuestas anteriores si el condensador es desconectado de la batería antes de duplicar la distancia.

e) Describa el proceso mediante el cual un condensador acumula energía, ¿qué tipo de energía es?

f) ¿Por qué es peligroso tocar los terminales de un condensador, incluso después que se se haya desconectado la fuente que se utilizó para cargar el condensador?

[1] Haliday, Resnick and Krane, volumen 2 cuarta edición. Y/O los capítulos correspondientes de cualquiera de los otros libros de consulta.

II. Problemas propuestos

(1) La capacidad (o capacitancia) de un condensador está definida como $C \equiv \frac{Q}{V}$, a continuación se le pide obtenga la capacidad de los siguientes condensadores, como función de los parámetros de geometría y la permitividad eléctrica del vacío (todos tiene vacío entre sus conductores):

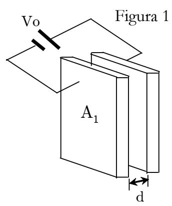
a) Condensador de placas conductoras paralelas de área $\mathbf{A}$ y separación $\mathbf{D}$.

b) Condensador cilíndrico de longitud $\mathbf{L}$, formado por dos cilindros conductores coaxiales de radio $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, donde $\mathbf{a} < \mathbf{b} \ll \mathbf{L}$

c) Condensador esférico, formado por dos cascarones esféricos conductores concéntricos de radios $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, donde $\mathbf{a} < \mathbf{b}$

(2) El condensador de placas paralelas mostrado en la $Figura$ 1, está conectado a una batería que mantiene las placas a una diferencia de potencial, V_0. la separación entre las placas es d y el área transversal en ambas placas es A.

Figura 1

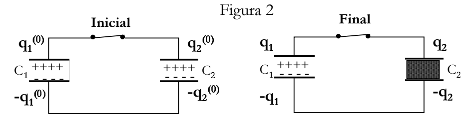


a) Si un agente externo logra separar las placas hasta que quedan a una distancia igual al doble de la separación inicial, es decir a una distancia $2d$. Entonces, ¿qué podemos decir respecto de la capacidad del condensador? ¿de la carga? ¿de la energía?.

b) ¿Cuál es el mínimo trabajo realizado por el agente externo para separar las placas?
Nota: tanto la batería, como el agente externo realizan trabajo.

(3) Dos capacitores están inicialmente conectados por un circuito, con las cargas $q_1^{(0)} = 4 \cdot 10^{-4}$ $[\mathcal{C}]$ y $q_2^{(0)} = 5 \cdot 10^{-4}$ $[\mathcal{C}]$ (ver $Figura$ 2). Además, sabemos que $C_2 = 10[\mu F]$.

Figura 2



a) El valor de La capacitancia C_1 es:

b) Los capacitores se desconectan y se introduce un material dieléctrico de constante $k = 1,2$ que llena el capacitor C_2. Luego los condensadores se vuelven a conectar, como muestra la figura. ¿Cuál es ahora la diferencia de potencial entre las placas del condensador C_1?

c) La energía $Q_{em.}$ emitida en forma de calor y/o radiación durante la redistribución de la carga [transición desde la situación inicial a la situación final] es más cercana a:

(4) Un condensador de placas paralelas de área transversal $\mathbf{A}$ y separación de placas $\mathbf{d}$, tiene una carga $\mathbf{Q}$. El condensador no está conectado a ningún otro elemento. Si un agente externo introduce un dieléctrico de constante $k = 2$ entre las placas del condensador, el trabajo que debe realizar es:

(5) Se construye un capacitor con dos placas conductoras cuadradas de $10[cm]$ de lado, dispuestas paralelamente separadas una distancia de $9[mm]$. El condensador se conecta a una batería de $20[V]$.
Use $\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{Nm^2}\right]$

a) Suponga que a continuación, sin desconectar la batería, las placas son separadas lentamente hasta que la distancia entre ellas alcanza a $18[mm]$. Con esto la variación porcentual de la energía en el condensador, referida a su energía inicial, es:

b) El trabajo realizado por un agente externo para separar las placas es:

(6) Un capacitor como el mostrado en la $Figura\ 3a$ está formado por dos placas paralelas de área A_1 separadas por una distancia d. El capacitor se encuentra conectado a una batería que entrega una diferencia de potencial constante V_0.

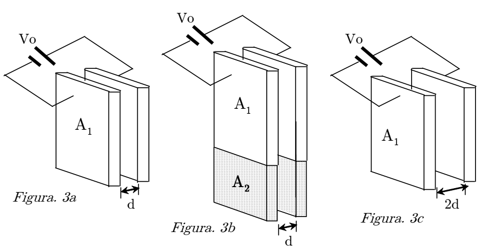


Figura. 3a Figura. 3b Figura. 3c

a) Se forma un nuevo capacitor al conectar a las placas originales, de la manera mostrada en la $Figura\ 3b$, dos placas metálicas descargadas cada una de área A_2 . La batería permanece conectada. Describa que ocurre luego de modificar el condensador con: la diferencia de potencial entre las placas de área A_1, la capacidad del condensador, la carga del condensador y la energía acumulada.

b) Ahora, a partir del capacitor original se forma uno nuevo separando las placas al doble de la distancia original, de la manera mostrada en la $Figura\ 3c$. La batería permanece conectada. Describa que ocurre luego de modificar el condensador con: la diferencia de potencial entre las placas de área A_1, la capacidad del condensador, la carga del condensador y la energía acumulada.

(7) En el espacio tenemos el siguiente campo eléctrico:

$$\vec{E}(x,y,z) = \left\{ \begin{array}{ll} E_0\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot \widehat{x}, & (-a \leq x \leq a) \\ 0, & (|x| > a) \end{array} \right\}$$

Donde $E_0 = (1/9) \cdot 10^{10}[N/C]$ y $a = 2[m]$. Este campo es producido por cargas "fuentes" que están en el espacio. Determine la cantidad de energía eléctrica en la caja $\Omega = \{(x,y,z); 0 \leq x,y,z \leq a\}$, $a = 2[m]$.

(8) Dos condensadores de placas paralelas se conectan en serie entre sí y los extremos libres se conectan a una batería de $10[V]$. Los condensadores tiene vacío entre sus placas y sus capacidades son $C_1 = 10[nF]$ y $C_2 = 20[nF]$. Determinar:

a) La carga almacenada en cada condensador y en el circuito total.

b) La caída de tensión en cada uno de ellos y el campo eléctrico en su interior si su espesor es $0{,}2[mm]$

c) Si se desconecta la batería y se introduce en cada condensador un dieléctrico de constante $k_d = 5$ perfectamente ajustado. Calcular:

i. La carga almacenada en cada uno de ellos y la carga total.

ii. La caída de tensión en cada uno de ellos y el campo eléctrico en su interior.

d) Sí se vuelve a conectar la batería (con el material dieléctrico entre ellos). Calcular:

i. La carga almacenada en cada uno de ellos y la carga total.

ii. La caída de tensión en cada uno de ellos y el campo eléctrico en su interior.

Respuestas a ejercicios propuestos:

(1) $a)$ $C = \varepsilon_0 \frac{A}{D}$; $b)$ $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln(b/a)}$;
$c)$ $C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$

(2) $a)$ Tanto la capacidad, como la carga y la energía disminuyen a la mitad.
$b)$ $W_{A.E} = \frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{4d}$

(3) $a)$ $C_1 = 8[\mu F]$; $b)$ $\Delta V_1 = 45[V]$;
$c)$ $Q_{em} = 2,25 \cdot 10^{-3}[Nm]$

(4) $W_{A.E} = -\frac{Q^2 d}{4\varepsilon_0 A}$

(5) $a)$ $\Delta U\,\% = -50\,\%$;
$b)$ $W_{A.E} = 10^9[Nm]$

(6) $a)$ La diferencia de potencial permanece constante, y tanto la capacidad

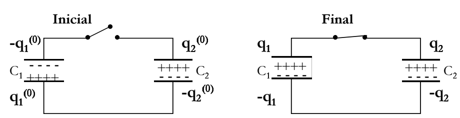
del condensador, como la carga y la energía aumentan. *b*) La diferencia de potencial permanece constante, y tanto la capacidad del condensador, como la carga y la energía disminuyen.

(7) $U_E = \frac{\varepsilon_0 E_0 a^3}{10}$

(8) *a*) 66,7$[nC]$ en cada condensador y 66,7$[nC]$ en total.
b) $V_{C_1} = 6{,}67[V]$, $V_{C_2} = 3{,}33[V]$, $E_1 = 6{,}67 \cdot 10^4[V/m]$ y $E_2 = 3{,}33 \cdot 10^4[V/m]$
c.i. Los mismos valores que en pregunta *a*)
c.ii. $V_{C_1} = 1{,}33[V]$, $V_{C_2} = 0{,}67[V]$, $E_1 = 1{,}33 \cdot 10^4[V/m]$ y $E_2 = 6{,}67 \cdot 10^4[V/m]$
d.i. 333$[mC]$ en cada condensador y 333$[nC]$ en total.
d.ii. Los mismos valores que en pregunta *b*)

III. Problemas resueltos

(1) Inicialmente los capacitores de la figura se encuentran desconectados y tienen diferencias de potencial $\mid \Delta V_{C1}^{Ini} \mid = \mid \Delta V_{C2}^{Ini} \mid = \mid \Delta V^0 \mid = 30[V]$, donde las capacitancias son: $C_1 = 1[\mu F]$ y $C_2 = 4[\mu F]$. Después se conectan los condensadores.



a) Calcule las cargas iniciales de los condensadores.

Respuesta

De la definición de capacitancia tenemos que:

$$q_1^0 = C_1 \Delta V_1^0 = 10^{-6} * 30 = 3 \cdot 10^{-5}[C]$$
$$q_2^0 = C_2 \Delta V_2^0 = 4 \cdot 10^{-6} * 30 = 12 \cdot 10^{-5}[C]$$

b) Calcule las cargas finales de los condensadores.

Respuesta

Para calcular las cargas finales, sabemos que:

- Al estar el circuito cerrado y los condensadores en paralelo, la diferencia de potencial entre sus placas tendrá el mismo valor, luego:

$$V_1^1 = V_2^1 \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow q_1 = \frac{C_1 q_2}{C_2} = \frac{q_2}{4}$$

- Conservación de carga: Las placas de los condensadores ubicadas en la parte superior (así como las inferiores) quedan conectadas entre sí, como la carga no puede pasar de una placa a la otra de un condensador "saltando" por el vacío y sólo puede redistribuirse entre las placas conectadas por los alambres conductores, la carga se conserva tanto en las placas superiores, como inferiores:

$$-q_1^0 + q_2^0 = q_1 + q_2 = 9 \cdot 10^{-5}[C]$$

Reemplazando la primera ecuación en la segunda tenemos que:

$$\frac{q_2}{4} + q_2 = 9 \cdot 10^{-5}[C]$$

$$\Rightarrow q_2 = 7,2 \cdot 10^{-5}[C]$$

$$\Rightarrow q_1 = 1,8 \cdot 10^{-5}[C]$$

c) Calcule la energía inicial y final de la configuración.

Respuesta

La energía potencial eléctrica en el condensador es: $U = \frac{q^2}{2C}$, entonces:

$$U_{Ini} = \frac{(3 \cdot 10^{-5})^2}{2 * 10^{-6}} + \frac{(12 \cdot 10^{-5})^2}{2 * 4 \cdot 10^{-6}} \approx 0,0022[J]$$

$$U_{Fin} = \frac{(1,8 \cdot 10^{-5})^2}{2 * 10^{-6}} + \frac{(7,2 \cdot 10^{-5})^2}{2 * 4 \cdot 10^{-6}} \approx 0,0008[J]$$

d) Determine la diferencia de energía entre ambas situaciones, ¿porqué hay diferencia de energía?

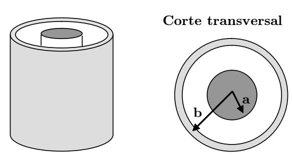
Respuesta

El cambio de energía en el sistema es:

$$\Delta U = U_{Fin} - U_{Ini} \approx -0,0014[J]$$

La perdida de energía en el sistema de capacitores se transforma en radiación electromagnética y también se disipa por efecto Joule.

(2) Tenemos un cilindro de material conductor de radio a, altura H y carga Q uniformemente distribuida, alrededor de él hay un cascarón cilíndrico conductor de radio interno b y altura H (y un radio exterior $c > b$).



a) Calcule la energía almacenada entre el cilindro y el cascaron, usando el concepto de la densidad u_E de la energía eléctrica.

Respuesta

$$u_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{dU}{dVol}$$

Entre el cilindro y el cascarón esférico el campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \hat{r}$$

(Lo anterior asumiendo que la distancia entre los cilindros es muy pequeña respecto a la altura de dichos cilindros, podemos considerar el cilindro como una línea infinita de cara uniformemente distribudia, donde $\lambda = Q/H$)

Si tomamos un cascaron cilíndrico como elemento diferencial de volumen (radio r y ancho dr, altura H) en donde podemos considerar que el campo eléctrico tiene magnitud constante, tendríamos:

$$\begin{aligned}
dVol &= 2\pi r H dr \\
U &= \int u_E * dVol \\
U &= \int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 * 2\pi r H dr \\
U &= \frac{\lambda^2 H}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} \\
U &= \frac{\lambda^2 H}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}$$

Como: $\lambda = Q/H$,entonces:

$$U = \frac{Q^2}{4\pi H\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) Calcule esta energía como la energía del condensador cilíndrico. Use: $C_{\text{cilíndrico}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 H}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

Respuesta

El cilindro y el cascarón conductor forman un condensador. Si calculamos la energía como la energía acumulada en el condensador, tenemos:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2 * \frac{2\pi\varepsilon_0 H}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}} = \frac{Q^2}{4\pi H\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$