Funciones o Mapeos: Definición como relación de la función.

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x) = x^2$ $\quad (x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $g(x) = \sin(x) + 1.$ $\quad (x, g(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \infty) \\ -1 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ $\quad (x, h(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Gráficas.

- $\ell: \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ tq $\ell(x) = x^2 + 1.$

Definición: Sean X y Y dos conjuntos. Un mapeo o función $f: X \longrightarrow Y$ es un subconjunto $F \subseteq X \times Y$ tal que para todo $x \in X$ existe uno y solo un par en F de la forma (x, y) con $y \in Y$. El conjunto X es llamado dominio de f y el conjunto Y es llamado el codominio de f.

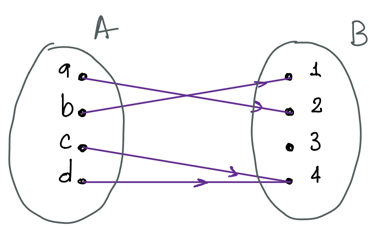
Notación: (x, y) también puede ser escrito como $y = f(x)$. Y se entiende como que y es la imagen de x bajo f, o que f envía x a y.

Ejemplo:

1. Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

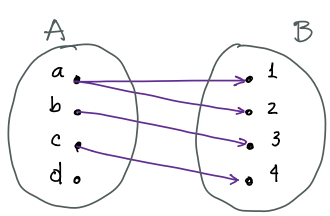
$$A \times B = \{(a,1); (a,2); (a,3); (a,4); (b,1); (b,2); (b,3); (b,4); (c,1); (c,2); (c,3); (c,4); (d,1), (d,2); (d,3); (d,4)\}$$

Diagrama de columna



$R_1 = \{(a,2); (b,1); (c,4); (d,4)\} \subseteq A \times B$

función



$R_2 = \{(a,1); (a,2); (b,3); (c,4)\} \subseteq A \times B$

No función

Nota: Una función se dice que está bien definida si para todo elemento del dominio tiene exactamente una imagen y dicha imagen es un elemento del codominio.

Ejemplo:

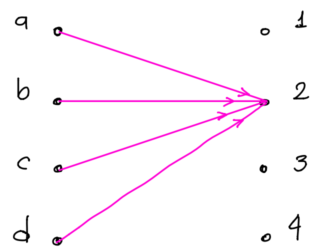
1. Sea $X = \{$ finite non-empty string of bits $\}$ y $Y = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Determine cual de las siguientes funciones esta bien definida:

a. $f : X \to Y$ tq $f(s) =$ número de unos en s. Si

b. $g : X \to Y$ tq $g(s) =$ first bit of s. Si

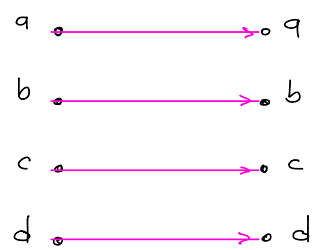
c. $h : X \to Y$ tq $h(s) =$ posición en el arreglo del cero que esté más a la izquierda de s. No

Ejemplo: Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$.



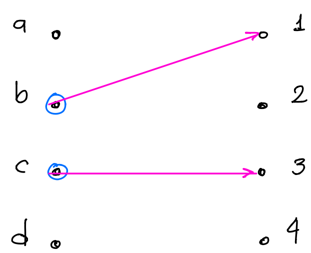
función constante

$f : X \to Y$ tq $f(x) = b \ \forall x \in X$ y $b \in Y$ (elemento fijo).



función identidad

$1_X : X \to X$ tq $1_X(x) = x$ $\forall x \in X$.



$S = \{b, c\} \subseteq X$

función restricción de f a S.

$f|_S : S \to Y$ tq $f|_S(x) = f(x)$ $\forall x \in S$

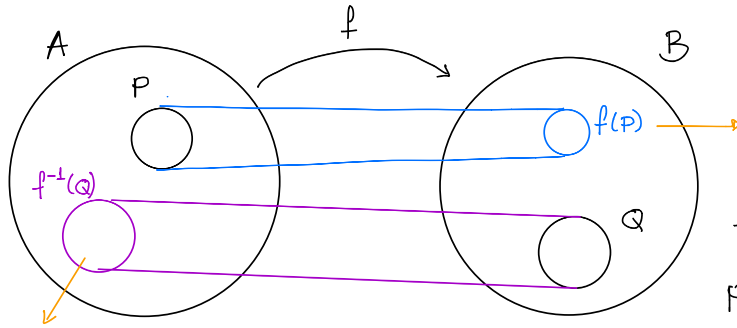


Imagen directa

$f(B) = \{ b \in B \mid b = f(p)$ para algún $p \in P \}$

Imagen Inversa

$f^{-1}(Q) = \{ a \in A \mid f(a) \in Q \}$

Ejemplo :

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x) = x^2 - 6x$

Consideremos el intervalo $[6,7]$. ¿Cuál es la imágen directa del intervalo ?

$f(6) = 6^2 - 6(6) = 0$ y $f(7) = 7^2 - 6(7)$
$= 49 - 42$
$= 7$

$\Rightarrow f([6,7]) = [0,7]$

Consideremos el intervalo $[0,4] \subseteq [0,7]$ ¿Cual es la imágen inversa del intervalo ?

$f^{-1}([0,4]) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y$ para algun $y \in [0,4] \}$

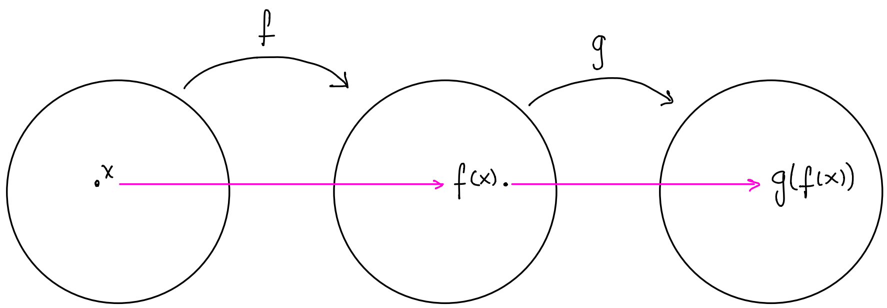
$x^2 - 6x = 0 \longrightarrow x(x-6) = 0 \longrightarrow$ $x = 0$
$x = 6$

$x^2 - 6x = 4 \longrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0 \longrightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(-4)}}{2}$

$$x = \frac{6}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{36+16}$$
$$= 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{52}$$
$$= 3 \pm \sqrt{13}$$

52	2
26	2
13	

finalmente $f^{-1}([0,4]) = [3 - \sqrt{13}, 0] \cup [6, 3 + \sqrt{13}]$



Composición de funciones

Definición: Sean A, B y C conjuntos, y sea $f: A \to B$ y $g: B \to C$ funciones. La función composición de f y g es la función $g \circ f : A \to C$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para todo $x \in A$.

Ejemplo:

(1) Sean $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } f(x) = x^2 & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } g(x) = x+3 \end{cases}$

¿$f \circ g$? $\longrightarrow$ $f(g(x)) = (x+3)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

¿$g \circ f$? $\longrightarrow$ $g(f(x)) = (x^2)+3$

(2). Sean $h, K: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones:

$$h(x) = \begin{cases} 4x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \geq 0 \\ x+8 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Encontrar: $(f \circ h)$ y $(h \circ f)$.

(3) Sea $X = \{ s \mid s$ es una cadena de caracteres no vacía.$\}$. Sean las funciones
$f: X \to \mathbb{N}$ tq $f(s) = \#$ de caracteres en s

$g: X \to X$ tq $g(s) = s + "a"$.

Digamos primero cuáles funciones existen. Y para ellas describa la siguientes funciones

a. $f \circ f$
b. $f \circ g$
c. $g \circ f$
d. $g \circ g$

a. $f: X \to \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{N} \neq X \to f$ no existe

b. existe...

c. No existe...

d existe...

4 Sea B un conjunto y sean $A_1, \dots, A_n$ conjuntos para algún $n \in \mathbb{N}$
Sea $f: B \to A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ una funcion. Por cada $i \in \{1, \dots, n\}$
la i-ésima función coordenada se define como:

$$f_i = \pi_i \circ f : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \longrightarrow A_i$$

donde $\pi_i : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \longrightarrow A_i$ es el mapeo proyección.

* $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tq $f((x,y)) = (xy, \sin x^2, x+y^3)$

¿ f_1, f_2, f_3 ?

- $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto x$
- $\pi_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto y$
- $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto z$.

- $f_1 = \pi_1 \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_1((x,y)) = xy$
- $f_2 = \pi_2 \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2((x,y)) = \sin(x^2)$
- $f_3 = \pi_1 \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_3((x,y)) = x+y^3$

Hw: Lemma 4.3.5

Definición: Sean A y B conjuntos, y sean $f: A \to B$ y $g: B \to A$ funciones:

1. La función g se llama inversa por izquierda si $f \circ g = 1_B$
   $f \circ g : B \to B \;=\; 1_B : B \to B$. " $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y$ ".

2. La función g se llama inversa por derecha si $g \circ f = 1_A$
   $g \circ f : A \to A \;=\; 1_A : A \to A$. " $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ "

3. La función g es inversa de f si $f \circ g = g \circ f$, es decir $1_A = 1_B$.

Hw: $f = g$
R equivalence.

- $\mathrm{Dom}(1_A) = \mathrm{Dom}(1_B)$ y $\mathrm{Cod}(1_A) = \mathrm{Cod}(1_B)$.

Definición: Sean A y B conjuntos y sea $f: A \to B$ funcionciones. Si f tiene inversa, la inversa es denotada como $f^{-1}: B \to A$. En otras palabras

- $f(f^{-1}(x)) = x, \quad \forall x \in B$
- $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A.$

Nota: Otra forma de relacionar f y f^{-1} es:

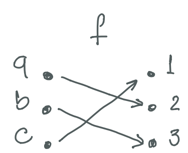
- $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y) \quad \forall\, x \in A$ y $y \in B.$

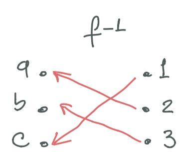
Hw: Relación gráfica entre f y f^{-1}

Ejemplo:

1. Sea $f: \{a, b, c\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ tq
   - $f(a) = 2$
   - $f(b) = 3$
   - $f(c) = 1$

   encontrar f^{-1}.





Math: Ex 4311

¿$f(f^{-1})$? ¿$f^{-1}(f)$?

$\Rightarrow \quad f^{-1}(2) = a, \quad f^{-1}(3) = b \quad y \quad f^{-1}(1) = c.$

2. Sea $f: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tq. $f(x) = x^3 + 4 \quad \forall x \in [0, \infty)$

- $f(x) = y \longrightarrow f^{-1}(y) = x \quad \Rightarrow \quad x^3 + 4 = y$

$$x^3 = y - 4 \longrightarrow x = \sqrt[3]{y-4}$$

$y - 4 \geq 0 \longrightarrow y \geq 4 \longrightarrow y \in [4, \infty).$ Redefinir el codominio de f.

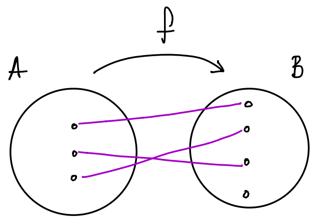
$f^{-1}: [4, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ y $f = [0, \infty) \longrightarrow [4, \infty).$

3. Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada por $g(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

- $g(x) = y \longrightarrow g^{-1}(y) = x \quad \Rightarrow \quad e^x = y \longrightarrow \ln e^x = \ln y$

$$x = \ln y.$$

Propiedades Sobre f.



Inyectiva

$\downarrow$

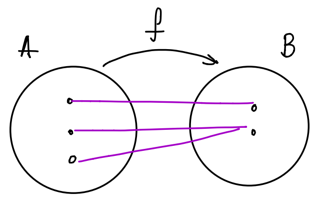
Uno a Uno

$x \neq y \longrightarrow f(x) \neq f(y)$

$\forall x, y \in A$

¿ $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$?

$f(x) = f(y) \longrightarrow x = y$

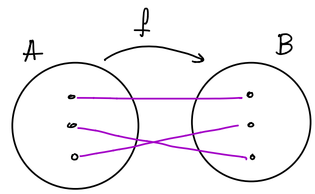


Sobreyectiva

$\forall\, y \in B\ \exists\, x \in A$ (algún)

tq $f(x) = y$.

$\boxed{f(A) = B}$



Biyectiva

Inyectiva y

Sobreyectiva.

Ejemplo :

1. $f_i(x) = x^2$

a). $f_1 : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$

- $f_1(x) = f_1(y) \longrightarrow x^2 = y^2 \longrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \longrightarrow x = y$

$\longrightarrow$ Encontrar dicho x.

- $y \in B$ tq $y = x^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{y}$ pero $x \geq 0 \longrightarrow x = \sqrt{y}$

$\longrightarrow f(x) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$

$\therefore$ f_1 es biyectiva.

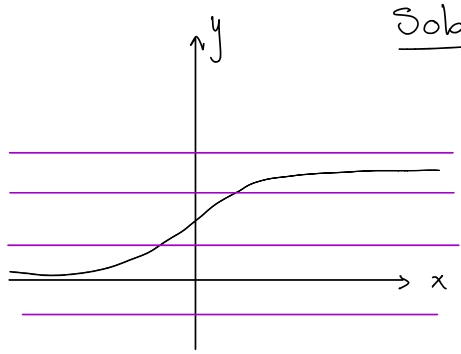
b) $f_2 : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

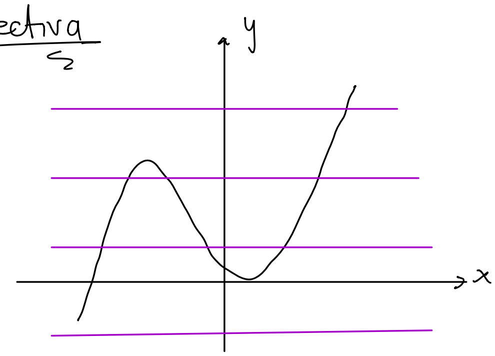
- La misma que f_1.
- Tomemos $y = -2 \longrightarrow f_2(x) = -2 \longrightarrow x^2 = -2 \longrightarrow x = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$

- Sea $x = -3$ y $y = 3$, entonces $f(x) \neq f(y) \longrightarrow (-3)^3 = 9 = (3)^3$
- La misma que f_1.

Sobreyectiva





Tarea Math 4.4.4

Teorema: Sean A y B conjuntos no vacíos y sea $f: A \to B$ funciones

1. La función f tiene inversa por derecha si y solo si f es sobreyectiva
2. La función f tiene inversa por izquierda si y solo si f es inyectiva.
3. La función f tiene una inversa si y solo si f es biyectiva.

Demostración:

1 $(\to)$

Hip: Supondremos que f tiene inversa por derecha

Concluir: f es sobreyectiva.

Sea $g: B \to A$ y $f \circ g = 1_B$. Sea $b \in B$ (P.D $\to \exists\, a \in A$ tq $f(a) = b$)

then let $a = g(b)$, que es verdad bajo la definición de g.

Entonces $f(g(b)) = (f \circ g)(b) = 1_B(b) = b$.

$f(a) = b$.

$(\leftarrow)$

Hip: f es sobreyectiva

Concluir: $\exists\, h: B \to A$ tq $f \circ h = 1_B$.

Como f es sobreyectiva sabemos que para cada $b \in B$, existe al menos un $a \in A$ tq $f(a) = b$.

Entonces definamos $h: B \to A$ tq $h(b) = a$. Por lo tanto si hacemos $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(y) = x$ mostramos que h es la inversa por derecha de f.

② . $(\longrightarrow)$

Hip: f tiene inversa por izquierda, i.e, $\exists\, g: B \to A$ tq $g \circ f = 1_A$.

Concluir: f es inyectiva.

Sean $f(x) = f(y) \longrightarrow g(f(x)) = g(f(y))$

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$$

$$1_A(x) = 1_A(y) \longrightarrow x = y.$$

$(\longleftarrow)$

Hip: f es inyectiva

Conclusión: f tiene inversa por izquierda.

Definamos $x_0 \in A$ y $g: B \to A$ tq $\forall\, y \in B$

① Si $y \in f(A) \longrightarrow \exists\, x \in A$ tq $f(x) = y$ y se define como $g(y) = x$. Por f ser inyectiva x es único.

② Si $y \notin f(A) \longrightarrow g(y) = x_0$ con x_0 fijo.

como f es inyectiva para cada $x \in A$ $f(x) = y$ entonces $y \in f(A)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(y) = x$$, es decir $(g \circ f)(x) = 1_A(x) = x$

③ Hw. Math. (Lema 437)

Sean A y B conjuntos. ¿Cómo pruebo que $|A| = |B|$?

① Contando $\longrightarrow$ y si $A = \mathbb{R}$ ¿cómo los cuento?

Definición: Sean A y B conjuntos. El conjunto A y B tienen la misma cardinalidad si existe $f: A \longrightarrow B$ una función biyectiva. Y se denota como $A \sim B$.