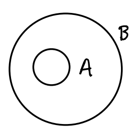
Introducción a la Teoría de Conjuntos :

Un conjunto es una agrupación de elementos que cumplen una propiedad en específico.

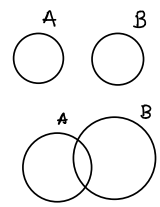
Definiciones :

1. Los objetos de un conjunto se llaman elementos. Si A es un conjunto y a un elemento de dicho conjunto escribiremos $a \in A$, de lo contrario escribiremos $a \notin A$.

2. Sean A y B conjuntos. El conjunto A es un subconjunto del conjunto B, denotado como $A \subseteq B$, sí para todo $x \in A$ implica que $x \in B$, de lo contrario $A \nsubseteq B$.



$A \subseteq B$



$A \nsubseteq B$

3. Sean A y B conjuntos. Tenemos que $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

4. Sea A un conjunto, el conjunto potencia de A, denotado como $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto definido como

$$\mathcal{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$$

Ejemplos :

Números que son potencia de otro

1. $S := \{ x \in \mathbb{Z} : \text{Exista } p \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = p^2 \}$

2. E^n = Espacio Euclideo de dimensión n. → Tabién se denota como $\mathbb{R}^n$.

   $= \{ x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in E^1$, cumple ser espacio vectorial y tiene una norma dada por $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \}$

3. Subconjunto de E^n :

   $I^n :=$ n-cubo unitario $:= \{ (x_1, \dots, x_n) \in E^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, \ i = 1, \dots, n \}$

4. S^n = n-esfera unidad $:= \{ x \in E^{n+1} \mid |x| = 1 \}$ $\quad (S^n \subseteq E^{n+1})$

* $S^1 \subseteq E^2$, $S^0 := \{ x \in E^1 \mid x = \pm 1 \} \subseteq E^1$.

5. $A := \{1, 2\}$, $B := \{1, 2, 3, 4\}$ y $C := \{ \{1\}, 2, 4, 8 \}$ donde $A \subseteq B$ pero $A \nsubseteq C$.

6 Sean $P := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 < 0 \}$ y $Q := \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3 \}$. Ellos cumplen que $P = Q$.

① $P \subseteq Q$

Sea $x \in P$ entonces $x^2 - 5x + 6 < 0$. Además $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. De ahí tenemos que :

* $(x-2) > 0$ y $(x-3) < 0 \Rightarrow 2 < x$ y $x < 3 \Rightarrow x \in Q$

* $(x-2) < 0$ y $(x-3) > 0 \Rightarrow x < 2$ y $3 < x$ (Contradicción)

② $Q \subseteq P$.

Sea $x \in Q$, entonces $2 < x < 3$ lo que es lo mismo $2 < x$ y $x < 3$ por lo tanto $(x-2) > 0$ y $(x-3) < 0$, en otras palabras

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) < 0$$

En conclusión $Q = P$ si y sólo si $(x-2) > 0$ y $(x-3) < 0$.

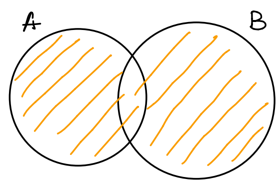
7. Conjunto potencia de $A = \{1, 2, 3\}$ es

$$\mathcal{P}(A) = \{ \phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

Definición : Sean A y B conjuntos.

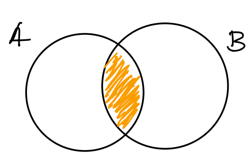
1. La unión de A y B denotada como $A \cup B$, es el conjunto definido por :

$$A \cup B := \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$



2. La intersección de A y B, denotada como $A \cap B$, es el conjunto definido por :

$$A \cap B := \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$



Si $A \cap B = \emptyset$ se dice que A y B son conjuntos disjuntos.

Teorema: Sean A, B y C conjuntos arbitrarios:

1. $\forall A: A \cup A = A = A \cap A$ HW
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ HW
3. $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$. HW
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $\underbrace{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}_{HW}$.

Demostración:

P.D $\rightarrow$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

① Sea $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ y $x \in B \cup C$

Distribución de $\vee$ y $\wedge$.

$\Rightarrow$ Si $x \in B \rightarrow x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in A \cap B$

Si $x \in C \rightarrow x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in A \cap C$

Ahora como $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$ entonces $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

② Sea $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in A$

Pero también se tiene que $x \in B$ en el primer caso o pertenece a C en el segundo, por lo tanto $x \in B \cup C$, y obligatoriamente está ahí. Entonces $x \in A \cap (B \cup C)$

Definiciones: Sean A y B conjuntos arbitrarios:

1. La diferencia de dos conjuntos es: $A - B := \{x \in A : x \notin B\}$
2. El complemento de un conjunto o $\overline{A} := \{x \notin A\}$.

Grupo 1.

Nota: Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n conjuntos arbitrarios. La unión de estos conjuntos se escribe como:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

y la intersección se escribe como:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

HW. Sea A, B y E conjuntos tq $A \cup B \subseteq E$, entonces:

① $A \cap \overline{A} = \phi$, $A \cup \overline{A} = E$ ③ $\overline{\phi} = E$, $\overline{E} = \phi$

② $\overline{(\overline{A})} = A$ ④ $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$

Teorema (Leyes de De Morgan): Sean A, B y E conjuntos arbitrarios. Si $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son tomados respecto a un conjunto E tq $A \cup B \subseteq E$, entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ 2. & \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{array}\right\} \text{Paredón.}$$

$\longrightarrow$ Grupo 2.

Ejemplo:

1. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

Sea $x \in (A-B) \cup (B-A) \iff x \in A - B \lor x \in B - A$

$$\iff (x \in A \land \underbrace{x \notin B}_{x \in \overline{B}}) \lor (x \in B \land \underbrace{x \notin A}_{x \in \overline{A}})$$

$$\iff x \in (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

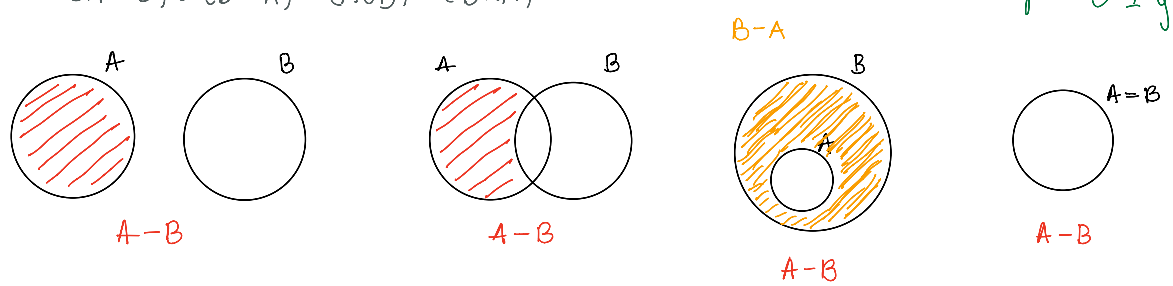
Ahora $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B)}_{} \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$

$$= [(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})] \cap E$$

$$= (A \cup B) \cap \overline{(B \cap A)}$$

Entonces $x \in A \cup B$ y $x \in \overline{(B \cap A)}$ que es lo mismo que $x \notin B \cap A$, por lo tanto $x \in (A \cup B) - (B \cap A)$. Finalmente

$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (B \cap A)$ $\longrightarrow$ Grupo 51 y 52.



• $A - B \subseteq A$

• $(A-B) \cap B = \phi$

• $A - B = \phi$

Teorema: Sean A, B y C conjuntos.

1. $A - B \subseteq A$ HW
2. $(A - B) \cap B = \phi$ HW

3. $A - B = \phi$ sii $A \subseteq B$ HW
4. $B - (B - A) = A$ sii $A \subseteq B$ HW
5. Si $A \subseteq B$ entonces $A - C = A \cap (B - C)$
6. Si $A \subseteq B$ entonces $C - A \supseteq C - B$
7. Leyes de DeMorgan: HW
   a. $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$
   b. $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$

Demostración:

5 I. $A - C \subseteq A \cap (B - C)$
II. $A \cap (B - C) \subseteq A - C$

I. Sea $x \in A - C$, es decir, $x \in A$ y $x \notin C$. Como $A \subseteq B$ entonces $x \in B$ y también $x \notin C$, en otras palabras $x \in B - C$.

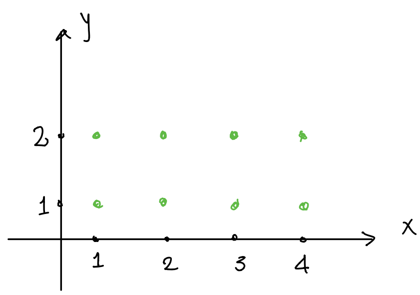
Finalmente, $x \in A \cap (B - C)$.

II. Sea $z \in A \cap (B - C)$, es decir, $z \in A$ y $z \in B - C$. Como $z \in A$ y $z \in B$, entonces $z \in A \cap B$, y dado que $A \subseteq B$ entonces $A \cap B = A$. Por lo tanto, $z \in A$. Ahora, recordemos que $z \notin C$ entonces $z \in (A - C)$.

Finalmente, podemos concluir que $A - C = A \cap (B - C)$

6. P.D $\rightarrow C - B \subseteq C - A$

Sea $x \in C - B$, es decir, $x \in C$ y $x \notin B$. Como $A \subseteq B$ entonces $x \notin A$. Por lo tanto $x \in C - A$.



$\mathbb{R}^2$

1 Enumerarlo:

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), \ldots$

2 Escribir cada eje como conjuntos:

$A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Definición: Sean A y B dos conjuntos distintos o no. Su producto cartesiano $A \times B$ es el conjunto de todas las parejas ordenadas $\{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$

Ejemplo:

1. Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Calcular:

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$

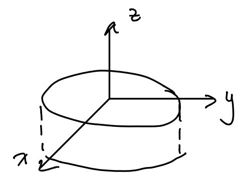
2. Cosideremos 2 dados y todas las posibilidades de tiros:

(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6) .... (5, 6).

3. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^n$.

1. Sean $A = S^1$ y $B = [0, 1]$.

$A \times B$ es un cilindro de altura 1.



2. Sean $A = B = S^1$. $A \times B = S^1 \times S^1 = \mathbb{T}$ (Toro)

$\longrightarrow$ Tarea Teo 3.3.12

Teorema: Sean A, B y C conjuntos arbitrarios:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ HW.
3. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

Demostración:

1. P.D $\rightarrow$ I. $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$
II. $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$

I. Sea $(x, y) \in A \times (B \cup C)$, es decir, $x \in A$ y $y \in B \cup C$, además $y \in B$ o $y \in C$. Consideremos que $x \in A$ y $y \in B$, en otras palabras, $(x, y) \in A \times B$ o consideremos $x \in A$ y $y \in C$, en otras palabras, $(x, y) \in A \times C$. Entonces podemos decir que $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

II. Sea $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$, es decir, $x \in A$ y $y \in B$ o $x \in A$ y $y \in C$. De lo anterior podemos decir que $y \in B \cup C$. Por lo tanto, $(x, y) \in A \times (B \cup C)$.

Finalmente podemos concluir que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

3. P.D $\rightarrow$ I. $A \times (B - C) \subseteq (A \times B) - (A \times C)$
II. $(A \times B) - (A \times C) \subseteq A \times (B - C)$

I. Sea $(x, y) \in A \times (B - C)$, es decir, $x \in A$ y $y \in B$ pero $y \notin C$. Por lo anterior podemos decir que $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \notin (A \times C)$, entonces $(x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$.

II. Sea $(x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$, es decir, $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \notin A \times C$. En palabras más simples $x \in A$ y $y \in B$ pero $y \notin C$. Por lo tanto, $y \in B - C$ y $(x, y) \in A \times (B - C)$.

Finalmente podemos concluir que $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{A} \neq \phi$ y $\alpha \in \mathcal{A}$. Además establezcamos la correspondencia que para cada α le corresponda un conjunto A_α.

Definición: Llamaremos familia de conjuntos a la colección de conjuntos $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$, y $\mathcal{A}$ se conoce como el conjunto de índices de la familia

Definición: Sea Γ un conjunto dado, y $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia de conjuntos de Γ. La unión

$$\bigcup_\alpha A_\alpha := \{x \in \Gamma \mid \exists \alpha \in \mathcal{A} : x \in A_\alpha\}.$$

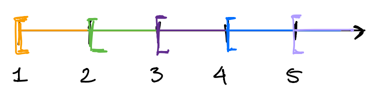
Y la intersección

$$\bigcap_\alpha A_\alpha := \{x \in \Gamma \mid \forall \alpha \in \mathcal{A} : x \in A_\alpha\}$$

Ejemplo:

1. Sea $A_k = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\}$ con $k = 1, 2, \ldots$. Notemos que que

$\ldots A_5 \subset A_4 \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1.$



Además $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A_n = \phi$

2. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ sea $A_n = \left[0, 1 - \frac{1}{2^n}\right]$ y $B_n = \left[0, 1 - \frac{1}{3^n}\right]$. Notemos que :

$n = 1$, $\quad A_1 = \left[0, 1 - \frac{1}{2}\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $B_1 = \left[0, 1 - \frac{1}{3}\right] = \left[0, \frac{2}{3}\right]$

por lo tanto $A_1 \subset B_1$, entonces $A_n \neq B_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Pero si tenemos que $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n = [0, 1]$

* $x \in \bigcup_n A_n \rightarrow x \in A_n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow x \in \left[0, 1 - \frac{1}{2^n}\right]$

$\rightarrow x \leq 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1$ por lo tanto $x \in [0, 1]$.

* $[0, 1] \subset \bigcup_n A_n$ o $[0, 1] \subset \bigcup_n B_n$ ya se tiene

Teorema: La intersección indexada y las partes de un conjunto conmutan

$$\bigcap_\alpha \mathcal{P}(A_n) = \mathcal{P}\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right).$$

Demostración:

Sea $x \in \bigcap_{\alpha} \mathcal{P}(A_n) \longleftrightarrow x \in \mathcal{P}(A_n)$ para todo $n = 1, 2, \ldots \longleftrightarrow x \subseteq A_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots \longleftrightarrow x \subseteq \bigcap_{\alpha} A_\alpha$. Por la definición del conjunto de partes $x \in \mathcal{P}(\bigcap_{\alpha} A_\alpha)$.

Hw: Mostrar que $\bigcup_{\alpha}$ y el conjunto de partes no conmuta. Además

$$\bigcup_{\alpha} \mathcal{P}(A_\alpha) \subset \mathcal{P}(\bigcup_{\alpha} A_\alpha)$$

Relaciones

$R \subseteq A \times B$ para A, B conjuntos arbitrarios.

Ejemplos:

- $A = \{$ Conjunto de las expresiones lógicas $\}$

Definamos $B \subseteq A \times A$ tq $B = \{$ Expresiones lógicas equivalentes $\}$.

$$B = \{(\ell_i, \ell_j) \mid \ell_i \equiv \ell_j \text{ para } i \neq j\}$$

- $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

- Sea $A = \{x, y\}$ y $\mathcal{P}(A) = \{\phi, A, \{x\}, \{y\}\}$. Sea B el conjunto de las parejas de conjuntos tales que uno está contenido en el otro.

$$B = \{(X, Y) \mid X \subseteq Y\} \subseteq A \times A.$$

$$= \{(\phi, A), (\phi, \{x\}), (\phi, \{y\}), (\{x\}, A), (\{y\}, A)\}$$

- Consideremos el conjunto de los reales $(\mathbb{R})$ y tomemos el suconjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$$ Relaciones Binarias.

- Sean $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Definamos

$$C = \{(x, y) \in A \times B \mid x \% y = 0\}$$

$= \{(6,1),(7,1),(8,1),(9,1),(10,1),(6,2),(6,3),(8,2),(8,4),$
$(9,3),(10,2),(10,5)\}$

Definición: Sea A y B conjuntos arbitrarios. Una relación R de A a B es un subconjunto $R \subseteq A \times B$. Si $a \in A$ y $b \in B$, escribiremos aRb si $(a,b) \in R$, y $a \not R b$ si $(a,b) \notin R$.

Ejemplo:

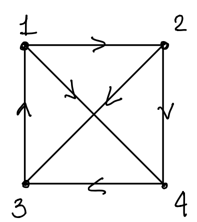
1. Sea A un conjunto arbitrario. La diagonal

$$\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A \quad \text{o equación de igualdad}$$

y $R = (A \times A) - \Delta$ se conoce como relación de desigualdad.

2. Consideremos cualquier subconjunto de $X \times Y$. Dicho subconjunto es una relación binaria entre los elementos de X y algunos elementos de Y, representada como $f: X \to Y$. ¿Condición especial?

3. Sea $A = \{1,2,3,4\}$. Definamos la relación $R \subseteq A \times A$ tq $x < y$.



Representación gráfica.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \leftarrow y \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \uparrow \\ x \end{matrix} & \begin{bmatrix} F & T & T & T \\ F & F & T & T \\ F & F & F & T \\ F & F & F & F \end{bmatrix} \end{array}$$

Representación matricial.

Tipos de relaciones: Sea R una relación definida sobre un conjunto A:

1. R es reflexiva si xRx for all $x \in A$.
2. R es simétrica si xRy implica que yRx, para todo $x,y \in A$
3. R es antisimétrica si xRy y yRx implica que $x=y$ para todo $x,y \in A$.
4. R es transitiva si xRy y yRz implica que xRz para todo $x,y,z \in A$.

Ejemplos:

1. Consideremos el conjunto de los $\mathbb{Z}$:

a. $\leq$
- Reflexiva
- Antisimétrica
- Transitiva

Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

1. Reflexiva: Ya que $x = x$.
2. ¿Simétrica? ¿Por qué no?
3. Antisimétrica: Sea $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$ para cualquier $x, y \in \mathbb{Z}$.
4. Transitiva: Sean $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq y \leq z \rightarrow x \leq z$.

b. Divisibilidad: Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ $x | y$ si y solo si existe $d \in \mathbb{Z}$ tq $y = xd$.

¿Reflexiva? Sea x tq $x | x$, es decir, $x = 1x$. ✓

¿Simétrica? Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tq $x | y \rightarrow \exists p \in \mathbb{Z}$ tq $y = px$. Para que se cumpla $y | x$ entonces $p = 1$ y $x = y$. Por lo tanto no es simétrica sino antisimétrica

¿transitiva? Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tq $x | y$ y $y | z$, es decir, existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tq $y = px$ y $z = qy$. Remplacemos y en z, entonces $z = q(px) = (qp)x$ y $qp \in \mathbb{Z}$ entonces $x | z$.

Definición: Una relación binaria R en A se llama de equivalencia si:

1. $\forall a \in A$: aRa (Reflexiva)
2. $aRb \rightarrow bRa$ (Simétrica)
3. $aRb \wedge bRc \longrightarrow aRc$ (Transitiva)

Si aRb, diremos que a y b son equivalentes. (Igualdad)

Ejemplo:

1. Sea A un conjunto arbitrario. La diagonal

$\Delta = \{(a, a) | a \in A\} \subseteq A \times A$, es una relación de equivalencia.

Δ es reflexiva $\rightarrow$ Por definición del conjunto

Δ es simétrica $\rightarrow$ Sea $a \Delta b$ y $\underline{a=b} \rightarrow b \Delta a$.
hipótesis.

Δ es transitiva $\rightarrow$ Sean $a\Delta b$ y $b \Delta c$, además $a=b$ y $b=c \rightarrow a=c$ por lo tanto $a \Delta c$.

— Grupos 51 y 52 —

Definición: Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $a,b \in \mathbb{Z}$. El número 'a' es equivalente al número 'b' módulo n, denotado como $a \equiv b \pmod{n}$, si $a-b = kn$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, en otras palabras $n \mid (a-b)$.

Ejemplo: Hacer el ejemplo para $x-y=3n$

$$R = \{(x,y) \mid x-y = 2n\}$$ ¿Es una relación de equivalencia?

① Reflexiva: Sea (x,x) entonces $x-x=0$. Y en general 2 divide a 0 entonces $(x,x) \in R$.

② Simétrica: Sea (x,y) entonces $x-y = 2n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
Ahora
$$-(x-y) = -2n$$
$$y-x = 2(-n)$$
$$= 2p \quad \text{con } p = -n.$$

por lo tanto $(y,x) \in R$.

③ Transitiva: Sean $(x,y), (y,z) \in R$, entonces:

$$\underbrace{(x-y) = 2n \quad y \quad (y-z) = 2p}_{} \quad \text{con } n,p \in \mathbb{Z}$$
$$x-y+y-z = 2n+2p$$
$$x-z = 2(n+p) \quad \text{con } n+p \in \mathbb{Z}$$

por lo tanto $(x,z) \in R$.

Finalmente R es una relación de equivalencia.

Ahora, formemos subconjuntos $E_a \subseteq R$ tales que $E_a \cap E_b = \phi$ para $a \neq b$, y $\bigcup_a E_a = R$.

Como $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ tomemos:

- $n=0$, entonces veamos todos los x tq $(x,0) \in R$, es decir, $x = 2n$:
$$R_0 = \{\ldots, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$
- $n=1$, entonces veamos todos los x tq $(x,1) \in R$, es decir, $x-1 = 2n \rightarrow$ $x = 2n-1$

$$R_1 = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

¿ $n = 2, 3, 4, \ldots$? $R_0 = R_2 = R_4 = \ldots$ y $R_1 = R_3 = R_5 = \ldots$

Por lo tanto $\mathbb{Z} = R_0 \cup R_1$ y $R_0 \cap R_1 = \phi$.

Corolario: Sea $a \in \mathbb{Z}$. Entonces a es par o impar, pero no ambas.

Definición: Sea R una relación de equivalencia en A. Por cada $a \in A$, el subconjunto $R_a = \{b \in A : bRa\}$ es llamado clase de equivalencia de a.

Lema: Se R una relación de equivalencia en A. Entonces:

1. $\bigcup_{a \in A} R_a = A$
2. Si aRb, entonces $R_a = R_b$
3. Si $a \not R b$, entonces $R_a \cap R_b = \phi$.

Partición del conjunto A

Demostración:

1. P.D $\rightarrow \bigcup_{a \in A} R_a \subseteq A$ ✓

P.D $\rightarrow A \subseteq \bigcup_{a \in A} R_a$. Sea $a \in A$, como R es reflexiva aRa por lo tanto $a \in R_a$

y $a \in \bigcup_{a \in A} R_a$.

2. P.D $\rightarrow R_a \subseteq R_b$ y $R_b \subseteq R_a$.

Sea $x \in R_a$ por lo tanto xRa. Además aRb por lo tanto xRb, es decir, $x \in R_b$
Del mismo modo si tomamos $x \in R_b$ concluiremos xRa, por lo tanto $x \in R_a$.

3. P.D $\longrightarrow R_a \cap R_b \neq \phi$.

Supongamos que existe $x \in R_a \cap R_b \longrightarrow xRa \wedge xRb \longrightarrow aRx \wedge xRb \longrightarrow aRb$
lo que es una contradicción.

Corolario: Sea A un conjunto no vacío $(A \neq \phi)$. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en A. Sean $x, y \in A$, entonces $R_x = R_y$ si y solo si $x \sim y$.

Definición: Sea $A \neq \phi$ un conjunto y sea $\sim$ una relación de equivalencia en A. El conjunto cociente de A con respecto a $\sim$, denotado como $A/\sim$, es el conjunto definido como

$$A/\sim \;:= \{R_x \mid x \in A\}$$

Ejemplo:

$R = \{(x,y) \mid x \equiv y \pmod 4\}$ ¿Cuál es $\mathbb{Z}/\sim$?

$\mathbb{Z}/\sim = \{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ Definamos cada R_i con $i = 0, 1, 2, 3$.

Nota: Pasos hasta el momento:

1. Sea A un conjunto
2. Defino una relación $R \subseteq A \times A$
3. verifico que R es de equivalencia en A
4. A/R.

Nota: Si $E \subseteq \mathcal{P}(A)$. E es una partición de A si para todo $x \in A$ existe uno y solo un $P \in E$ tq $x \in P$.

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y sean $\mathcal{T}_A = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$ el conjunto de todas las posibles particiones de A.

$D_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $D_2 = \{\{1,2\}, \{3\}\}$, $D_3 = \{\{1,3\}, \{2\}\}$,

$D_4 = \{\{2,3\}, \{1\}\}$, $D_5 = \{\{1,2,3\}\}$.

Además, consideremos el conjunto $E(A) = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ de relaciones de equivalencia en A.

$$R_1 = \{(1,1); (2,2); (3,3)\}$$

$$R_2 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (1,2); (2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (1,3); (3,1)\}$$

$$R_4 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (2,3); (3,2)\}$$

$$R_5 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (1,2); (2,1); (1,3); (3,1); (2,3); (3,2)\}$$

* Particiones ordenadas y no ordenadas : * Pregunta de Quiz.

Definición : Sea S un conjunto con n elementos distintos y sea $t \in \mathbb{Z}^+$. Una t-partición de S es el conjunto $\{A_1, \ldots, A_t\}$ de subconjuntos de S tales que

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t \quad \text{y}$$

$$A_i \cap A_j = \phi \text{ para todo } i \neq j$$

Nota : Dado un conjunto A y una relación R, la familia $\{Ra\}_{a \in A}$ es una $|A|$-partición de A.

Definición : Una partición ordenada es una t-partición de S con un orden específico en dicho conjunto, es decir, una t-tupla de conjuntos $(A_1, A_2, \ldots, A_t)$ es una t-partición ordenada del conjunto S, si los conjuntos $A_1, \ldots, A_t$ forman una partición de S.

Ejemplo :

1. Consideremos el conjunto $S = \{a, b, c, d\}$ y tres subconjuntos de S :

$A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c\}$ y $A_3 = \{d\}$ quienes bajo la definición anterior forman una partición del conjunto S. ¿Cuáles son las posibles 3-particiones ordenadas ?

$$(A_1, A_2, A_3) \qquad (A_3, A_1, A_2) \qquad (A_3, A_2, A_1)$$

$$(A_2, A_3, A_1) \qquad (A_2, A_1, A_3) \qquad (A_1, A_3, A_2)$$

Podemos dar dicho orden de acuerdo a diferentes características de los conjuntos como pueden ser su cardinalidad ($|A_i| = q_i$). Por lo tanto, dado el conjunto S con partición $\{A_1, \ldots, A_t\}$ tq $|A_i| = q_i$. Una partición ordenada de s puede ser $(A_1, A_2, \ldots, A_t)$ que puede ser denotada como $(q_1, \ldots, q_t)$ y se conoce como el tipo de la partición.

Ejemplo : Listar todas las particiones ordenadas del conjunto $s = \{a, b, c, d\}$ de tipo $(1, 1, 2)$

$(\{a\}, \{b\}, \{c, d\})$	$(\{c\}, \{a\}, \{b, d\})$
$(\{a\}, \{c\}, \{b, d\})$	$(\{c\}, \{b\}, \{a, d\})$
$(\{a\}, \{d\}, \{b, c\})$	$(\{c\}, \{d\}, \{a, b\})$
$(\{b\}, \{a\}, \{c, d\})$	$(\{d\}, \{a\}, \{b, c\})$
$(\{b\}, \{c\}, \{a, d\})$	$(\{d\}, \{b\}, \{c, a\})$
$(\{b\}, \{d\}, \{a, c\})$	$(\{d\}, \{c\}, \{a, b\})$