Informática
Año 2014/2015
Facultad de CC. Matemáticas

Hoja de ejercicios 3

Bucles

24 de noviembre de 2014

▷ 1. Número de cifras en una determinada base

Escribe un programa que determine cuántas cifras tiene una cantidad C si la expresamos en una determinada base b.

▷ 2. Reverso de un número

Escribe un programa que "dé la vuelta" a un número. Por "dar la vuelta" entendemos invertir las cifras, por ejemplo: el número 17 deberá convertirse en el 71, el 120 en el 21,...

▷ 3. Suma marciana

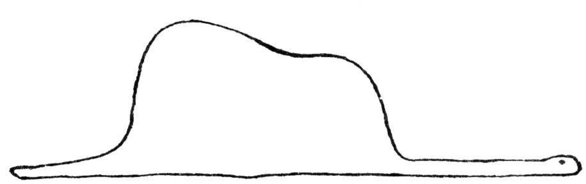
Se ha encontrado en Marte la siguiente operación de sumar, resuelta en una roca:

$$\begin{array}{ccc} \clubsuit & \diamondsuit & \spadesuit \\ & \clubsuit & \heartsuit \\ \hline \diamondsuit & \spadesuit & \clubsuit \end{array}$$

Se desea descifrar el significado (o sea, el valor) de esos símbolos, suponiendo que se ha empleado el sistema de numeración decimal.

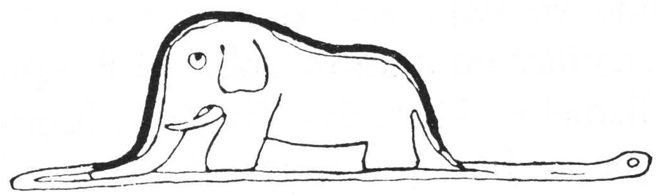
▷ 4. El principito

Mi dibujo número uno. Era así:



Mostré mi obra maestra a las personas mayores y les pregunté si mi dibujo les daba miedo. Me contestaron: "¿Por qué nos habría de asustar un sombrero?"

Pero mi dibujo no representaba un sombrero, sino una serpiente boa que digería un elefante. Dibujé entonces el interior de la serpiente boa, a fin de que las personas adultas pudiesen comprender, pues los adultos siempre necesitan explicaciones. Mi dibujo número dos era así:



> Las personas mayores me aconsejaron abandonar los dibujos de serpientes boas abiertas o cerradas y que pusiera más interés en la geografía, la historia, el cálculo y la gramática. Y así fue como a la temprana edad de seis años, abandoné una magnífica carrera de pintor, desalentado por el fracaso de mis dibujos números uno y dos. Las personas mayores nunca comprenden por sí solas las cosas, y resulta muy fastidioso para los niños tener que darles continuamente explicaciones.
>
> *El principito*, Antoine de Saint-Exupéry

Al principito le gustan mucho los números y prefiere las fracciones así:

$$\frac{5687171}{18686419}$$

ya que puede ver y disfrutar de muchas cifras. Sin embargo los mayores prefieren ver cosas más simples y explicadas:

$$\frac{5687171}{18686419} = \frac{7 \cdot 812453}{23 \cdot 812453} = \frac{7}{23}$$

Pista: Se trata de simplificar al máximo una fracción $\frac{n}{d}$. Para ello, tenemos que calcular el máximo común divisor del numerador y del denominador, $\mathrm{mcd}(n, d)$, que es el mayor número por el que podemos dividir tanto n como d.

▷ 5. Descomposición en factores primos

Seguro que has realizado alguna vez la tediosa tarea de descomponer un número en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

¿Podríamos hacer un programa que fuése capaz de hacer estas descomposiciones? Seguro que sí. Escribe un programa que reciba como entrada un número entero positivo y calcule la descomposición del mismo en factores primos.

▷ 6. Los cubos de Nicómaco

(*) Considera la siguiente propiedad descubierta por Nicómaco de Gerasa:

> *Sumando el primer impar, se obtiene el primer cubo;*
> *sumando los dos siguientes impares, se obtiene el segundo cubo;*
> *sumando los tres siguientes, se obtiene el tercer cubo, etc.*

Comprobémoslo:

$$\begin{array}{rcl cr} 1^3 & = & 1 & = & 1 \\ 2^3 & = & 3+5 & = & 8 \\ 3^3 & = & 7+9+11 & = & 27 \\ 4^3 & = & 13+15+17+19 & = & 64 \end{array}$$

Desarrolla un programa que calcule los n primeros cubos utilizando esta propiedad.

Un poco de historia Nicómaco de Gerasa vivió en Palestina entre los siglos I y II de nuestra era. Escribió *Arithmetike eisagoge* (Introducción a la aritmética) que fue el primer tratado en el que la aritmética se consideraba de forma independiente de la geometría. Este libro se utilizó durante más de mil años como texto básico de aritmética, a pesar de que Nicómaco no demostraba sus teoremas, sino que únicamente los ilustraba con ejemplos numéricos.

▷ 7. Ecuación diofántica

Se llama ecuación *diofántica* a cualquier ecuación algebraica, generalmente de varias variables, planteada sobre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ o los números naturales $\mathbb{N}$.

- Escribe un programa que calcule las maneras diferentes en que un número natural n se puede escribir como suma de otros dos números naturales. Es decir, que calcule las soluciones de la ecuación diofántica $x + y = n$.
- Escribe un programa que calcule las maneras diferentes en que un número natural n se puede escribir como producto de dos números naturales. Es decir, que calcule las soluciones de la ecuación diofántica $xy = n$.
- Escribe un programa que, dado un número natural n, calcule la cantidad de soluciones de la ecuación diofántica: $x^2 - y^2 = n$

Pista: Ten en cuenta que toda solución de la anterior ecuación nos produce una factorización del entero n:

$$n = (x + y)(x - y)$$

Ya sólo nos queda dilucidar cuáles de esas factorizaciones producen una solución de la ecuación.

Un poco de historia La palabra *diofántica* hace referencia al matemático griego del siglo III de nuestra era Diofanto de Alejandría.
(`http://es.wikipedia.org/wiki/Diofanto_de_Alejandr%C3%ADa`)

▷ 8. Aproximaciones al número π

Desde que el ser humano se ha preocupado por conocer el entorno y explicar el porqué de las cosas que lo rodean, ha habido personas que han intentado calcular la relación existente entre la longitud de la circunferencia y el radio (o diámetro) que la define.

Largo ha sido el periplo de los matemáticos en torno a este número. En este ejercicio te proponemos utilizar las siguientes fórmulas matemáticas para construir programas que permitan calcular aproximaciones al número π.

- François Viète (1540–1603) en 1593:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

- John Wallis (1616–1703) en 1656:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}$$

- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) en 1673:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

- Borwein en 1987:

$$x_0 = \sqrt{2} \qquad y_1 = 2^{\frac{1}{4}} \qquad \pi_0 = 2 + \sqrt{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) \qquad y_{n+1} = \frac{y_n\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}}{y_n + 1} \qquad \pi_n = \pi_{n-1}\frac{x_n + 1}{y_n + 1}$$

  Tiene una convergencia muy rápida: $\pi_n - \pi < 10^{-2^{n+1}}$.

Notas bibliográficas π es sin duda el más famoso de los números, y por eso la bibliografía sobre él es extensísima. Dos libros llenos de curiosidades sobre π son [AH01] y [Bec82]. En [Cha99] se dedica un capítulo a los diversos métodos usados a lo largo de la historia para calcular π. Tan distinguido número no podía faltar tampoco en Internet:

```
http://www.joyofpi.com/pilinks.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html
```

En las dos primeras direcciones hay cientos de referencias diversas dedicadas a π; en la tercera puedes encontrar muchas, pero que muchas, cifras decimales de π.

Un poco de historia El primero que utilizó el símbolo π fue William Jones (1675–1749) en 1706. A Euler le gustó este símbolo, lo adoptó y difundió su uso. La fórmula de Leibniz es una particularización de la serie que define el arcotangente de un ángulo; James Gregory (1638–1675) la había descrito con anterioridad, pero no hay ninguna información de que la usase para aproximar el número π.

He aquí una tabla con la cronología del número de cifras decimales de π calculadas:

Número de decimales	**Año**	**Autores**	**Sistema informático**
2 037	1949	G.W. Reitwiesner, ...	ENIAC
10 000	1958	F. Genuys	IBM 704
100 265	1961	D. Shanks y J. Wrench	IBM 7090
1 001 250	1974	J. Guilloud y M. Bouyer	CDC 7600
16 777 206	1983	Y. Kanada, S. Yoshino y Y. Tamura	HITAC M-280H
134 214 700	1987	Y. Kanada, Y. Tamura, Y. Kubo, ...	NEC SX-2
6 442 450 000	1995	D. Takahashi y Y. Kanada	HITAC S-3800/480 (2 procesadores)
51 539 600 000	1997	D. Takahashi y Y. Kanada	HITACHI SR2201 (1024 procesadores)
206 158 430 000	1999	D. Takahashi y Y. Kanada	HITACHI SR8000 (128 procesadores)

▷ **9. Método de Newton.**

Desde hace mucho tiempo los matemáticos se han preocupado de hallar soluciones de ecuaciones. De estas las más sencillas son las polinómicas. Si la solución x a un problema cumple $a \cdot x + b = 0$, con a, b números reales la cosa es muy fácil: $x = a/b$. Todo el mundo sabe que si un problema se reduce a resolver una ecuación del tipo $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, con a, b y c números reales, basta aplicar una sencilla fórmula para obtener los dos posibles valores de x. Para las de grado 3 y 4 existen fórmulas para obtener las raíces pero la cosa ya se pone un poco más complicada (de hecho, salvo raras excepciones, no se estudian esas fórmulas en la educación secundaria).

La situación es peor para las de grado 5, para algunos polinomios existe una fórmula que nos dá las raíces en función de los coeficientes y para otros se sabe que no existe tal fórmula. Demostrar ésto último es una cuestión algebraica avanzada, la wikipedia nos dá buena información sobre esto: `http://en.wikipedia.org/wiki/Quintic_function`

Afortunadamente existen métodos numéricos para aproximar las soluciones de una ecuación. Si tenemos un polinomio $f(x)$ y un x_0, podemos sustituir el polinomio $f(x)$ por la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. Esa recta corta al eje x en un punto cuya coordenada x es $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Si repetimos el proceso obtenemos una sucesión: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Salvo para unas pocas elecciones de x_0 la sucesión converge a un cero de f.

Aproximar ceros. Debes definir una función newton que dados: una función (f), su derivada ($derf$), un valor inicial(x_0), un epsilon y un número máximo de iteracciones(max_iter), devuelva:

- una aproximación de un cero de la función f obtenida aplicando el método de Newton y el número de iteraciones que hemos necesitado. (consideramos que un x_k es suficientemente bueno si abs($f(x_k)$)<epsilon)
- si tras realizar el número maximo de iteraciones la aproximación no es aceptable devolvemos el valor alcanzado y el número de iteraciones.

▷ **10. Espectro natural**

(*) El *espectro natural* de una circunferencia de radio r es el conjunto de puntos con coordenadas naturales (n, m) tales que $n^2 + m^2 = r^2$. El método obvio para calcular el espectro necesitaría dos bucles anidados en donde se irían explorando las abcisas y ordenadas de los puntos desde 0 a r. Afortunadamente existe un método más eficiente, que además aprovecha la simetría del problema: si (n, m) está en el espectro también está (m, n). Definimos

$$B(x, y) = \{(n, m) \mid n^2 + m^2 = r^2 \wedge x \leq n \leq m \leq y\}$$

Obviamente el espectro es $B(0, r) \cup \{(m, n) \mid (n, m) \in B(0, r)\}$ que a su vez se puede calcular usando las siguientes reglas:

$$B(x, y) = \begin{cases} B(x+1, y), & \text{si } x^2 + y^2 < r^2 \\ \{(x, y)\} \cup B(x+1, y-1), & \text{si } x^2 + y^2 = r^2 \\ B(x, y-1), & \text{si } x^2 + y^2 > r^2 \end{cases}$$

Escribe un programa iterativo que calcule el espectro natural de una circunferencia de radio r utilizando exclusivamente las reglas dadas en el párrafo anterior.

Indica el número de pasos que lleva calcular el espectro en relación al radio r.

▷ 11. Calculando sobre tablas

Especifica y diseñar algoritmos para:

- Llenar una tabla con datos aleatorios.
- Mostrar los valores de una tabla por pantalla.
- Calcular la media y la desviación típica de los elementos de la tabla.
- Calcular la cantidad de números pares.
- Calcular la cantidad de cuadrados perfectos.
- Calcular la cantidad de los números cuyo logaritmo en base 2 sea menor que otro número dado `log` > 0.
- Determinar si la tabla está ordenada de menor a mayor.
- Contar el número de *picos* que contiene. Un número es un pico si es estrictamente mayor que los dos que tiene a su lado.
- Calcular la cantidad de números que sean potencia de dos.
- Decidir si la tabla es *palíndroma*, es decir, puede leerse igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.
- Calcular la cantidad de números primos que contiene.
- Si el nombre de la tabla es `t`, un algoritmo que calcule en otra tabla `s` las sumas parciales de los elementos de la primera:

$$s[1] = t[1],\ s[2] = t[1] + t[2],\ s[3] = t[1] + t[2] + t[3],\ \cdots \quad s[i] = \sum_{k=1}^{i} t[k]$$

▷ 12. Criba de Eratóstenes

Un método para encontrar todos los números primos entre 1 y n es la *criba de Eratóstenes*. Considera una lista de números entre 2 y n. El número 2 es el primer primo, pero todos los múltiplos de 2 (4, 6, 8, ...) no lo son, y por tanto pueden ser tachados de la lista. El primer número después de 2 que no está tachado es 3, el siguiente primo. Tachamos entonces de la lista los siguientes múltiplos de 3, por supuesto, a partir de 3×3 ya que los anteriores están ya tachados (9, 12, ...). El siguiente número no tachado es 5, el siguiente primo, y entonces tachamos los siguientes múltiplos de 5 (25, 30, 35, ...). Repetimos este proceso hasta que alcanzamos el primer número en la lista que no está tachado y cuyo cuadrado es mayor que n. Todos los números que quedan en la lista sin tachar son los primos entre 2 y n.

Escribe un programa que utilice este algoritmo de criba para encontrar todos los números primos entre 2 y n.

Referencias

[AH01] Jörg Ardnt and Chistoph Haenel. *Pi Unleashed*. Springer, 2001.

[Bec82] Petr Beckmann. *{A history of}* π. Golem Press, 1982.

[Cha99] Jean-Luc Chabert, editor. *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip*. Springer, 1999.