# Etapas esenciales en procesamiento discreto de señales

Dr. Ing. Rodrigo Gonzalez

rodralez@frm.utn.edu.ar

Técnicas Digitales III

Universidad Tecnológica Nacional,
Facultad Regional Mendoza.

# Resumen

# Muestreo periódico

La representación discreta de una señal contínua $x_c(nT)$ se puede obtener muestreando la misma en forma uniforme. Esto genera una secuencia de muestras $x[n]$.

$$x[n] = x_c(nT), \qquad -\infty < n < \infty \,, \tag{1}$$

donde $T$ es el periodo de muestreo, y $f_s = 1/T$ es la frecuencia de muestreo, o $\Omega_s = 2\pi/T$ en radianes.

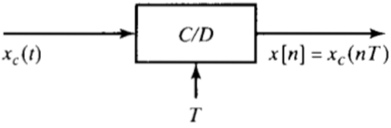



**Figure 4.1** Block diagram representation of an ideal continuous-to-discrete-time (C/D) converter.

- Matemáticamente, es conveniente representar el muestreo de una señal contínua en dos etapas.
- Se multiplica un tren de impulsos $s(t)$ por la señal contínua $x_c(t)$.
- La señal contínua $x_s(t)$ es transformada en una secuencia discreta $x[n]$.

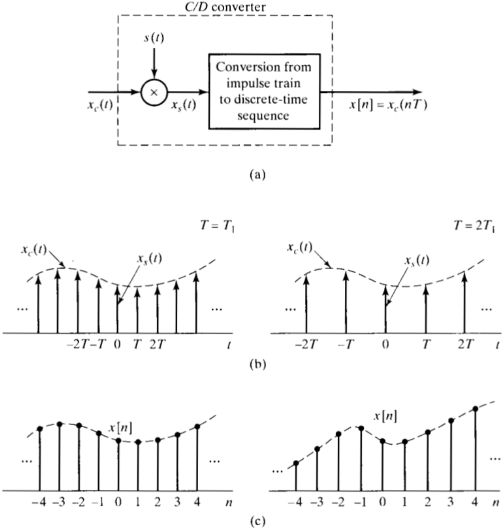



**Figure 4.2** Sampling with a periodic impulse train followed by conversion to a discrete-time sequence. (a) Overall system. (b) $x_s(t)$ for two sampling rates. (c) The output sequence for the two different sampling rates.

# Respuesta en frecuencia de señales muestreadas

$x_s(t)$ se obtiene modulando $x_c(t)$ por un tren un impulsos $s(t)$,

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\,, \tag{2}$$

$$x_s(t) = x_c(t)\, s(t)\,, \tag{3}$$

$$= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\,, \tag{4}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\, \delta(t - nT)\,. \tag{5}$$

La transformada de Fourier de $s(t)$ es un tren de tren de impulsos periódico,

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega), \qquad \text{con } \Omega_s = \frac{2\pi}{T}\,. \tag{6}$$

La transformada de Fourier de $x_s(t)$ es la convolución en el dom. de la frecuencia de $X_c(j\Omega)$ y $S(j\Omega)$,

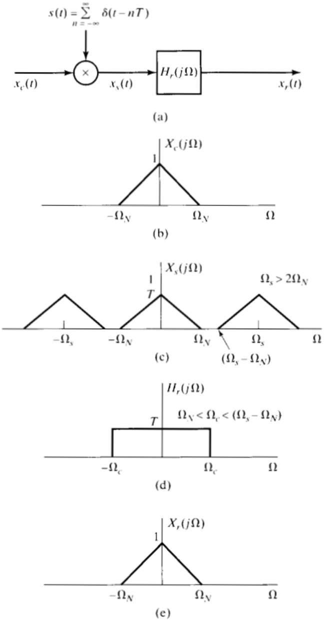
$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega)\,, \tag{7}$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} X_c[j(\Omega - k\Omega_s)]\,. \tag{8}$$

- Si $X_r(j\Omega)$ es un filtro pasa bajos ideal con ganancia $T$ y frecuencia de corte $\Omega_c$ tal que,

  $\Omega_N < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_N$

  Entonces, $X_r(j\Omega) = X_c(j\Omega)$



# Teorema de Nyquist

Sea $x_c(t)$ una señal limitada en frecuencia con

$$X_c(j\Omega) = 0 \text{ para } |\Omega| \geq \Omega_n \,. \tag{9}$$

Entonces $x_c(t)$ está unícamente determinado por sus muestras $x[n] = x_c(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ si

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_n \,. \tag{10}$$

$\Omega_n$ se conoce como la frecuencia de Nyquist

# Etapas esenciales de un sistema DSP

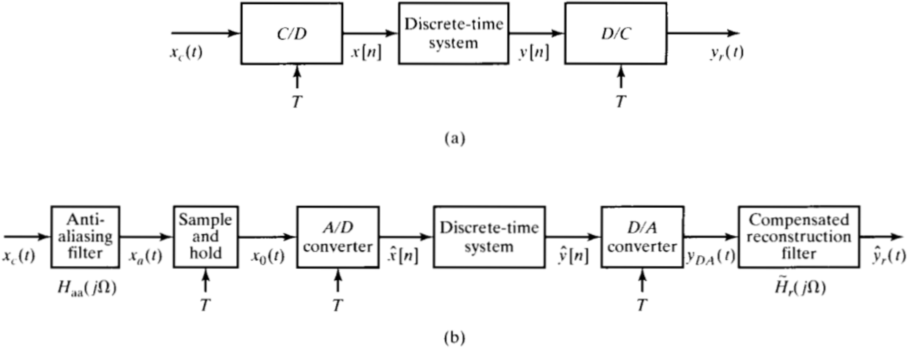
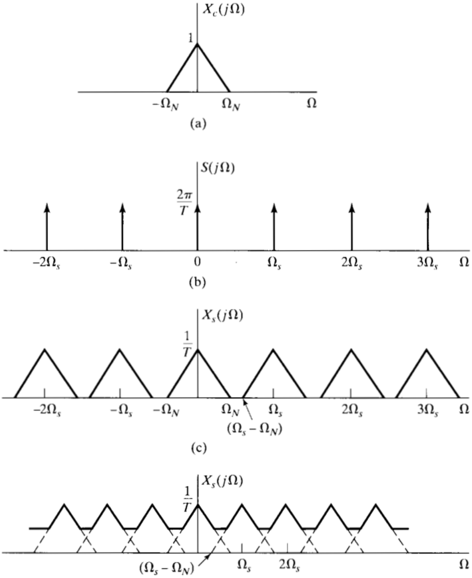



**Figure 4.41** (a) Discrete-time filtering of continuous-time signals. (b) Digital processing of analog signals.

# Filtro antialiasing, motivación



- Aunque la señal esté naturalmente limitada en frecuencia (por ej., música), se debe limitar el BW para reducir el ruido blanco presente en todo el espectro.
- (Reproducir video).

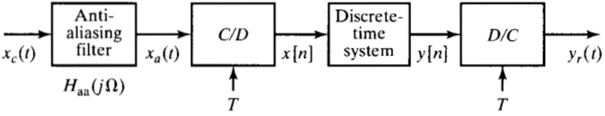



**Figure 4.42** Use of prefiltering to avoid aliasing.

# Ejemplo de antialiasing

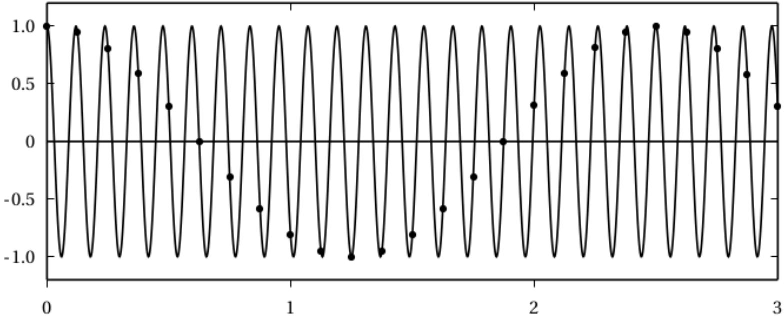



**Figure 9.8** Example of aliasing: a sinusoid at 8400 Hz, $x(t) = \cos(2\pi \cdot 8400t)$ (solid line) is sampled at $F_s = 8000$ Hz. The sampled values (dots) are indistinguishable from those of at 400 Hz sinusoid sampled at $F_s$.

# Filtro antialiasing, Oversampling

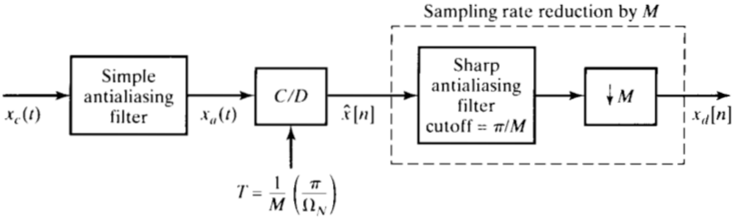



**Figure 4.43** Using oversampled A/D conversion to simplify a continuous-time antialiasing filter.

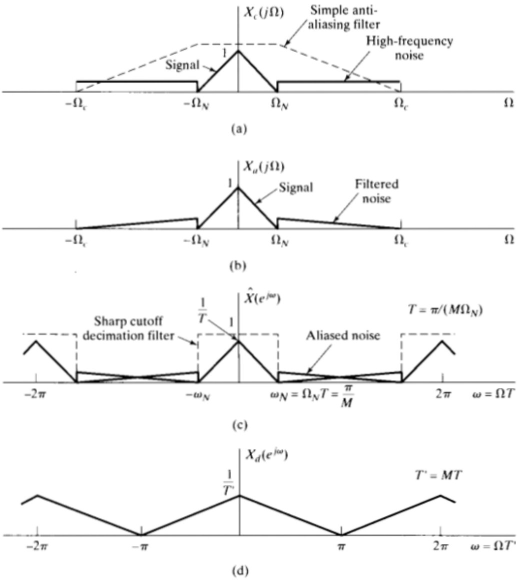
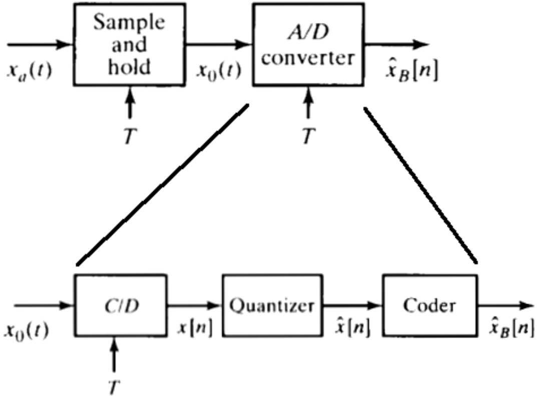



**Figure 4.44** Use of oversampling followed by decimation in C/D conversion.

# Etapas de un conversor A/D



# Cuantizador

- Cuantizador Lineal o no lineal.
- Cuantizador para señales bipolares.
- La cantidad de niveles de cuantización es potencia de dos ($2^N$)

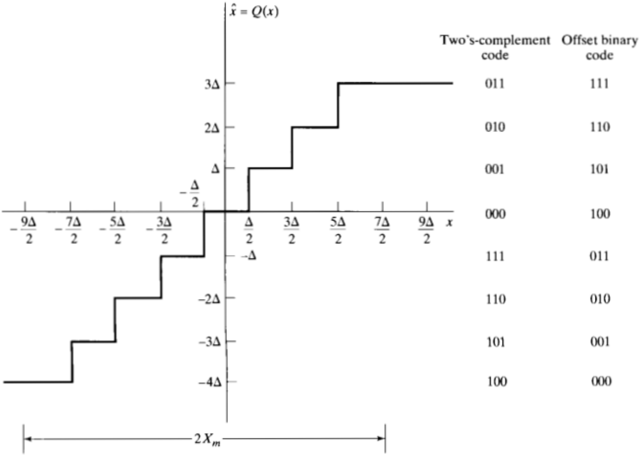



**Figure 4.48** Typical quantizer for A/D conversion.

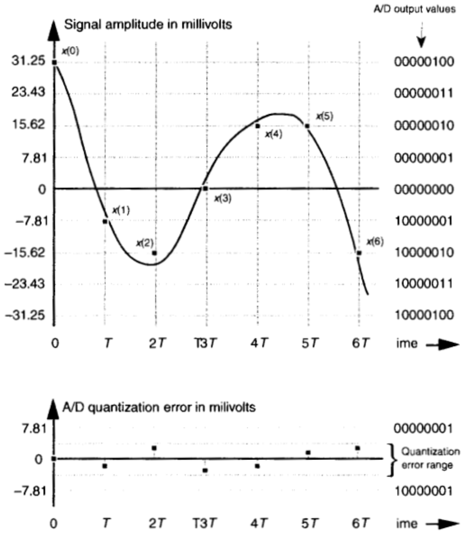

A/D output values
Signal amplitude in millivolts
31.25
23.43
15.62
7.81
0
−7.81
−15.62
−23.43
−31.25
x(0)
x(1)
x(2)
x(3)
x(4)
x(5)
x(6)
00000100
00000011
00000010
00000001
00000000
10000001
10000010
10000011
10000100
0
T
2T
T3T
4T
5T
6T
ime
A/D quantization error in milivolts
7.81
0
−7.81
00000001
Quantization error range
10000001
0
T
2T
T3T
4T
5T
6T
ime

Figure: 12.1 [2]

# Error de cuantización

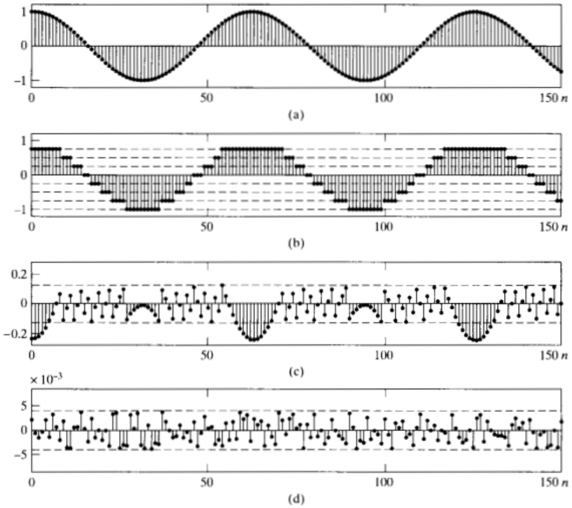



**Figure 4.51** Example of quantization noise. (a) Unquantized samples of the signal $x[n] = 0.99\cos(n/10)$. (b) Quantized samples of the cosine waveform in part (a) with a 3-bit quantizer. (c) Quantization error sequence for 3-bit quantization of the signal in (a). (d) Quantization error sequence for 8-bit quantization of the signal in (a).

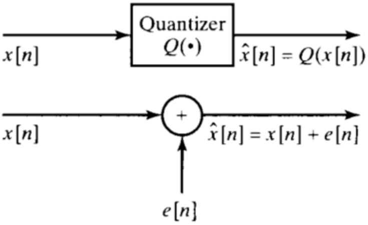



**Figure 4.50** Additive noise model for quantizer.

# Relación señal-ruido de un ADC

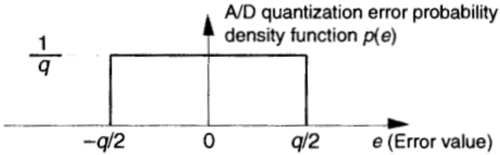
La precisión del cuantizador está dada por [2]:

$$q = \frac{\text{full voltage range}}{2^{\text{word lenght}}} = \frac{2V_p}{2^B}. \quad [mV] \tag{11}$$

$SNR = (P_{signal})/(P_{noise})$ relaciona potencias. Como $q$ se define como una variable aleatoria, no se puede representar su potencia explícitamente. Se usa una versión estadística de SNR.

$$SNR_{ADC} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\text{varianza señal entrada}}{\text{varianza ruido cuantizador}}\right), \quad [\text{dB}] \tag{12}$$

$$= 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\sigma^2_{signal}}{\sigma^2_{ADC}}\right). \tag{13}$$




$$\sigma^2_{ADC} = \int_{-q/2}^{q/2} (e-\mu)^2 p(e)de = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 p(e)de = \frac{1}{q}\int_{-q/2}^{q/2} e^2 de = \frac{q^2}{12}, \quad (14)$$

$$\sigma^2_{ADC} = \left(\frac{2V_p}{2^B}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \boxed{\frac{V_p^2}{3\cdot 2^{2B}}}, \quad (15)$$

$$LF = \frac{rms_{signal}}{V_p} = \frac{\sigma_{signal}}{V_p} \implies \sigma^2_{signal} = \boxed{LF^2 \cdot V_p^2}, \quad \text{(Load Factor)} \quad (16)$$

$$SNR_{ADC} = 10\cdot\log_{10}\left[\left(LF^2\cdot V_p^2\right)\cdot\frac{3\cdot 2^{2B}}{V_p^2}\right] = 10\cdot\log_{10}\left[\left(LF^2\cdot 3\cdot 2^{2B}\right)\right], \quad (17)$$

$$= 10\cdot\left[\log_{10}(LF^2) + \log_{10}(3) + 2\log_{10}(2)\cdot B\right], \quad (18)$$

$$= 20\cdot\log_{10}(LF) + 4.77 + 6.02\cdot B. \quad \text{[dB]} \quad (19)$$

# Consideraciones relación señal-ruido del ADC

$$
\begin{aligned}
SNR_{ADC} &= 20 \cdot \log_{10}(LF) + 4.77 + 6.02 \cdot B\,, \quad [\text{dB}] \\
&= 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{rms_{signal}}{V_p}\right) + 4.77 + 6.02 \cdot B\,. \quad [\text{dB}]
\end{aligned}
$$

Consideraciones:

- Para aumentar $SNR_{ADC}$ lo ideal es que $rms_{signal} >> V_p$, pero esto producirá distorsión severa en la señal muestreada (saturación).
- Por otro lado, si $rms_{signal} << V_p$ disminuye $SNR_{ADC}$.
- La ec. 19 es para un ADC ideal. No se consideran otras fuentes de error del ADC.
- Además, se considera que la tensión máxima de entrada coincide con $V_p$ del ADC.
- Por tanto, en la práctica se asume que el $SNR_{ADC}$ calculado es entre 3 y 6 dB menor.
- Se ve que $SNR_{ADC}$ aumenta 6 dB por cada bit que posea el cuantizador del ADC.
- Entonces, mientras más bits tenga el ADC, mejor. ¿O no?.

# Relación señal-ruido del ADC señal gaussiana

Para una señal con distribución gaussiana, una solución de compromiso es $rms_{signal} = V_p/2$ (demostración para el alumno).

$$SNR_{ADC} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{rms_{signal}}{V_p}\right) + 4.77 + 6.02 \cdot B\,, \tag{20}$$

$$= 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{V_p/2}{V_p}\right) + 4.77 + 6.02 \cdot B\,. \tag{21}$$

Así, su máximo $SNR_{ADC}$ está dado por,

$$SNR_{ADC} = 20 \cdot \log_{10}(0.5) + 4.77 + 6.02 \cdot B\,, \tag{22}$$

$$= -6.02 + 4.77 + 6.02 \cdot B\,, \tag{23}$$

$$= -1.25 + 6.02 \cdot B\,. \quad \text{[dB]} \tag{24}$$

# Determinación de la cantidad de bits necesarios de un ADC

Considere el siguiente ejemplo:

- La SNR de cierto amplificador de audio es de 110 dB.
- Se decide usar un ADC de 24 bits (audio profesional) para muestrear el amplificador.

$$SNR_{ADC} = -1.25 + 6.02 \cdot 24 - 3 = 140.23 \text{ dB}\,.$$

- ¡Se están usando $(140 - 110)/6 \simeq 5$ bits para muestrear ruido!.
- En un lazo de control una mala estimación de la cantidad de bits del ADC puede llevar a resultados catastróficos.

*Conclusión: la cantidad bits de un ADC debe estar en función de la SRN de la señal que se desea muestrear.*

- Regla: se debe elegir el ADC comercial con el número de bits que brinde 6 dB sobre la SNR de la señal a muestrear.
- Por otra parte, se pueden eliminar los bits adicionales (ruido) con desplazamiento a derecha aritmético (`adc_read »= 5`).

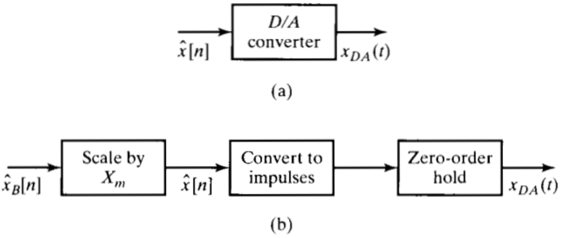



**Figure 4.53** (a) Block diagram of D/A converter. (b) Representation in terms of a zero-order hold.

# Conversión D/A (2)

Un conversor D/A toma una secuencia de números y los transforma en una señal contínua $x_{DA}(t)$,

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t - nT) \,. \tag{25}$$

$h_0$ es la respuesta al impulso de un sostenedor de orden zero (Zero-Order Hold, ZOH).

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \,. \tag{26}$$

Otro modelo de $x_{DA}(t)$

$$x_{DA}(t) = x_0(t) + e_0(t) \,, \tag{27}$$

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t - nT) \,, \tag{28}$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] h_0(t - nT) \,. \tag{29}$$

La transformada de Fourier de $x_0(t)$,

$$
\begin{aligned}
X_0(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] H_0(j\Omega) e^{-j\Omega n T}\,, &(30)\\
&= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n T} \right) H_0(j\Omega)\,, &(31)\\
&= X(e^{j\Omega T}) H_0(j\Omega)\,, &(32)\\
&= \left[ \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left( j \left( \Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right) \right] H_0(j\Omega)\,. &(33)
\end{aligned}
$$

$x[n]$ se relaciona con la señal de entrada como $x[n] = x_a(nT)$.

Se define la respuesta en frecuencia de un filtro de rescontrucción compensado como,

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)} . \qquad (34)$$

Donde,

$$H_0(j\Omega) = \frac{2\sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2} , \qquad (35)$$

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T & , |\Omega| < \pi/T \\ 0 & , |\Omega| > \pi/T \end{cases} . \qquad (36)$$

Por tanto,

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)} e^{j\Omega T/2} & , |\Omega| < \pi/T \\ 0 & , |\Omega| > \pi/T . \end{cases} \qquad (37)$$

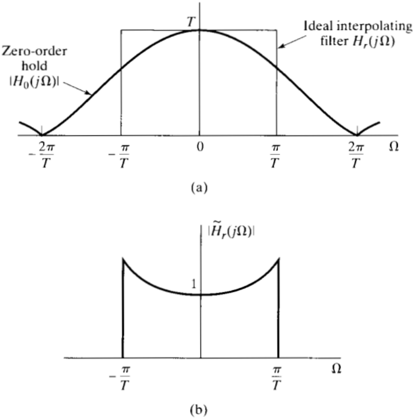



**Figure 4.54** (a) Frequency response of zero-order hold compared with ideal interpolating filter. (b) Ideal compensated reconstruction filter for use with a zero-order-hold output.

$|H_0(j\Omega)|$ atenua -4 dB en $\Omega = \pi/T$.

# Filtro de rescontrucción compensado

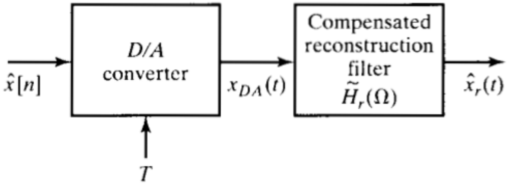



**Figure 4.55** Physical configuration for digital-to-analog conversion.

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \tag{38}$$

# Bibliografía


1. Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schafer. *Discrete-time signal processing, 2nd Ed*. Prentice Hall. 1999. Secciones 4.1, 4.2, 4.3 y 4.8.
2. Richard G. Lyons. *Understanding Diginal Signal Processing, 2nd Ed*. Prentice Hill. 2004. Sección 12.3.1.
3. Paolo Prandoni and Martin Vetterli. Signal processing for communications. Taylor and Francis Group, LLC. 2008. Sección 9.6.