Etapas esenciales en procesamiento discreto de señales

Dr. Ing. Rodrigo Gonzalez

rodralez@frm.utn.edu.ar

Técnicas Digitales III

Universidad Tecnológica Nacional,
Facultad Regional Mendoza.

Resumen

Muestreo periódico

La representación discreta de una señal contínua $x_c(nT)$ se puede obtener muestreando la misma en forma uniforme. Esto genera una secuencia de muestras $x[n]$.

$$x[n] = x_c(nT), \qquad -\infty < n < \infty\,, \tag{1}$$

donde T es el periodo de muestreo, y $f_s = 1/T$ es la frecuencia de muestreo, o $\Omega_s = 2\pi/T$ en radianes.

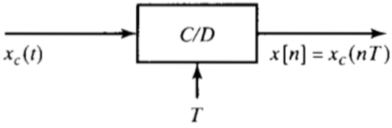


Figure 4.1 Block diagram representation of an ideal continuous-to-discrete-time (C/D) converter.

- Matemáticamente, es conveniente representar el muestreo de una señal contínua en dos etapas.
- Se multiplica un tren de impulsos $s(t)$ por la señal contínua $x_c(t)$.
- La señal contínua $x_s(t)$ es transformada en una secuencia discreta $x[n]$.

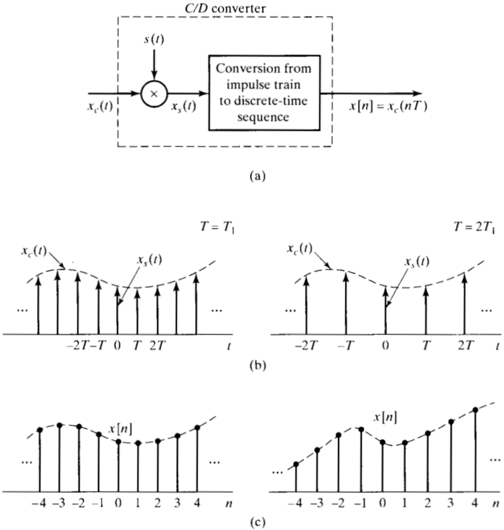


Figure 4.2 Sampling with a periodic impulse train followed by conversion to a discrete-time sequence. (a) Overall system. (b) $x_s(t)$ for two sampling rates. (c) The output sequence for the two different sampling rates.

Respuesta en frecuencia de señales muestreadas

$x_s(t)$ se obtiene modulando $x_c(t)$ por un tren un impulsos $s(t)$,

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\,, \tag{2}$$

$$x_s(t) = x_c(t)\, s(t)\,, \tag{3}$$

$$= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\,, \tag{4}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\, \delta(t - nT)\,. \tag{5}$$

La transformada de Fourier de $s(t)$ es un tren de tren de impulsos periódico,

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega), \quad \text{con } \Omega_s = \frac{2\pi}{T}\,. \tag{6}$$

La transformada de Fourier de $x_s(t)$ es la convolución en el dom. de la frecuencia de $X_c(j\Omega)$ y $S(j\Omega)$,

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega)\,, \tag{7}$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} X_c[j(\Omega - k\Omega_s)]\,. \tag{8}$$

- $X_c(j\Omega)$ representa una señal BW limitado, con frec. máxima Ω_N.
- Las réplicas de $X_c(j\Omega)$ no se superponen cuando
  - $\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N$, o
  - $\Omega_s > 2\Omega_N$

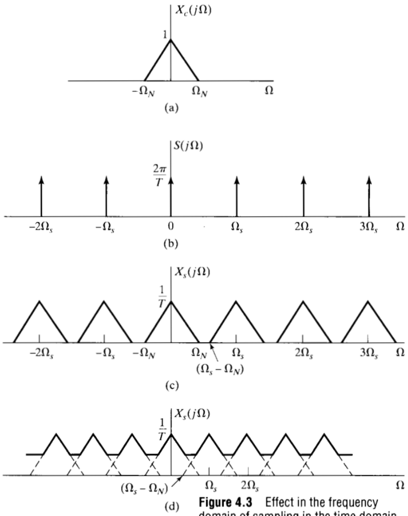
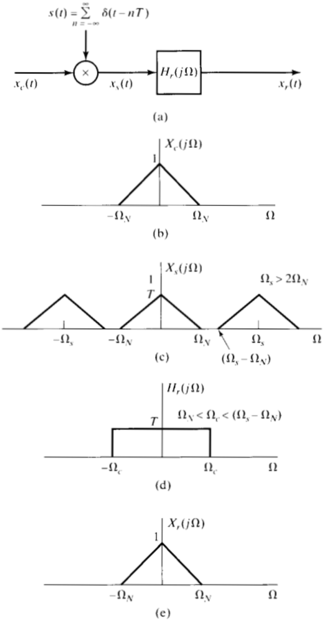


Figure 4.3 Effect in the frequency domain of sampling in the time domain. (a) Spectrum of the original signal. (b) Spectrum of the sampling function. (c) Spectrum of the sampled signal with $\Omega_s > 2\Omega_N$. (d) Spectrum of the sampled signal with $\Omega_s < 2\Omega_N$.

- Si $X_r(j\Omega)$ es un filtro pasa bajos ideal con ganancia T y frecuencia de corte Ω_c tal que,

  $\Omega_N < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_N$

  Entonces, $X_r(j\Omega) = X_c(j\Omega)$



Sea $x_c(t)$ una señal limitada en frecuencia con

$$X_c(j\Omega) = 0 \text{ para } |\Omega| \geq \Omega_n \,. \tag{9}$$

Entonces $x_c(t)$ está unícamente determinado por sus muestras $x[n] = x_c(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ si

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_n \,. \tag{10}$$

Ω_n se conoce como la frecuencia de Nyquist

Etapas esenciales de un sistema DSP

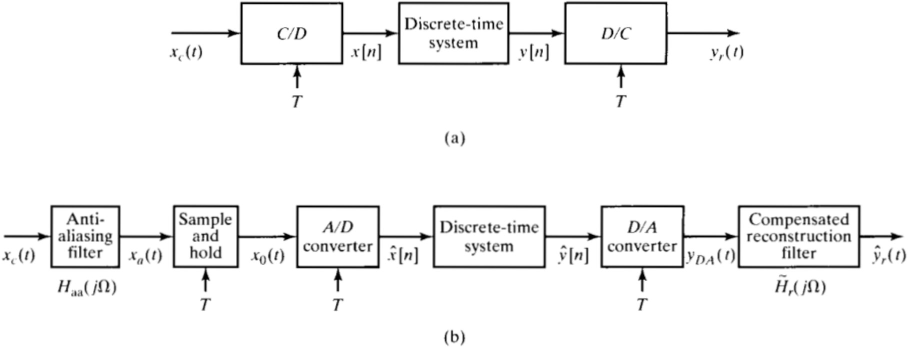
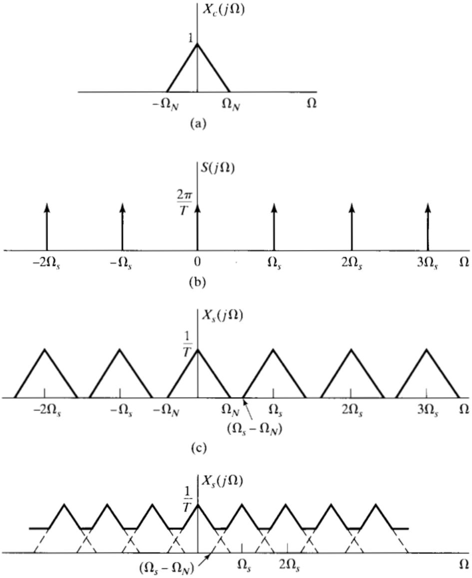


Figure 4.41 (a) Discrete-time filtering of continuous-time signals. (b) Digital processing of analog signals.

Filtro antialiasing, motivación



Filtro antialiasing

- Aunque la señal esté naturalmente limitada en frecuencia (por ej., música), se debe limitar el AB para reducir el ruido blanco.
- (Reproducir video).

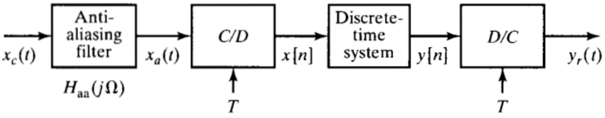


Figure 4.42 Use of prefiltering to avoid aliasing.

Ejemplo de antialiasing

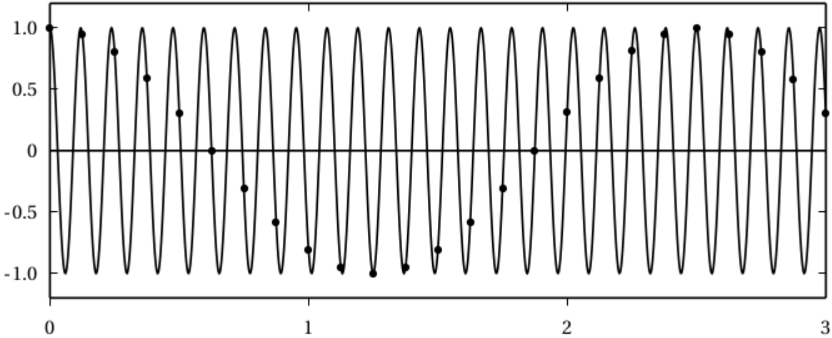
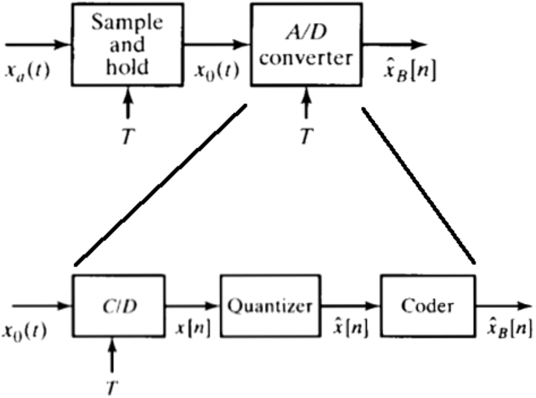


Figure 9.8 Example of aliasing: a sinusoid at 8400 Hz, $x(t) = \cos(2\pi \cdot 8400t)$ (solid line) is sampled at $F_s = 8000$ Hz. The sampled values (dots) are indistinguishable from those of at 400 Hz sinusoid sampled at F_s.

Etapas de un conversor A/D



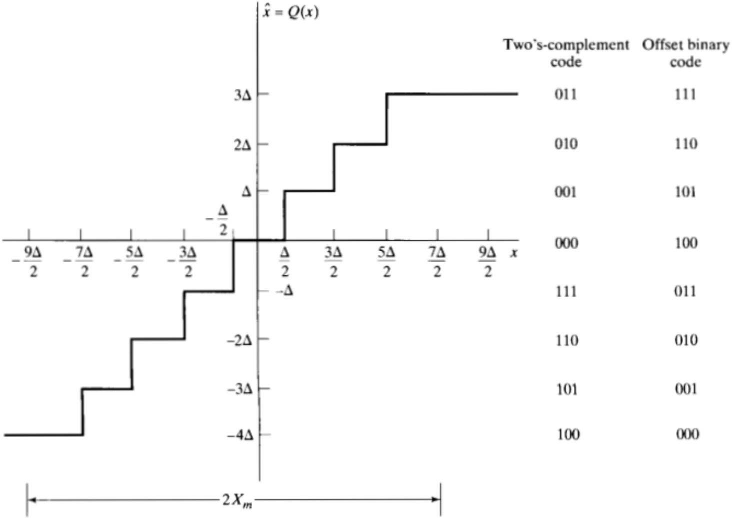
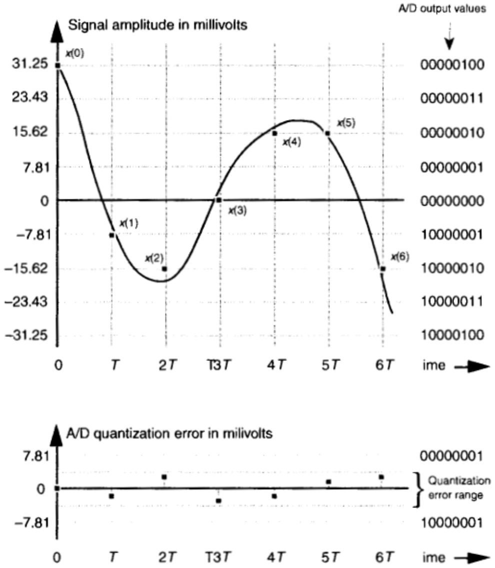


Figure 4.48 Typical quantizer for A/D conversion.

Cuantizador, cont'd



Error de cuantización

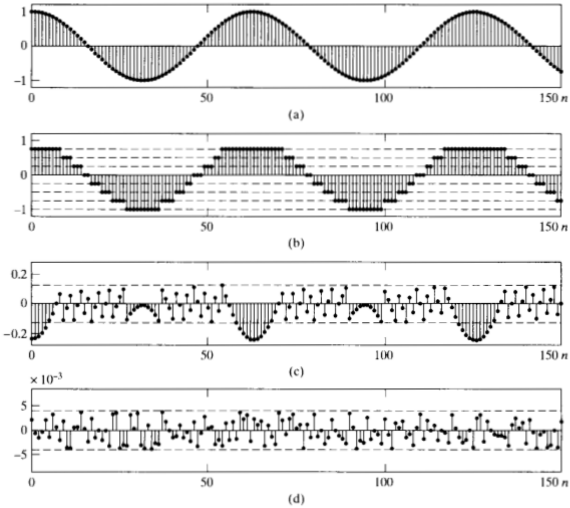


Figure 4.51 Example of quantization noise. (a) Unquantized samples of the signal $x[n] = 0.99\cos(n/10)$. (b) Quantized samples of the cosine waveform in part (a) with a 3-bit quantizer. (c) Quantization error sequence for 3-bit quantization of the signal in (a). (d) Quantization error sequence for 8-bit quantization of the signal in (a).

Error de cuantización, cont'd

La precisión del cuantizador está dada por:

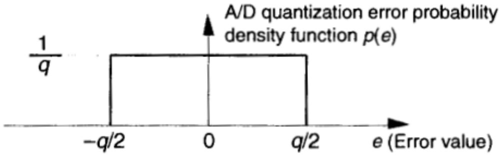
$$q = \frac{2V_p}{2^B}. \quad [mV] \tag{11}$$

$SNR = (P_{signal})/(P_{noise})$ relaciona potencias. Como q se define como una variable aleatoria, no se puede representar su potencia explícitamente. Se usa una versión estadística de SNR.

$$SNR_{ADC} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\text{varianza señal entrada}}{\text{varianza ruido cuantizador}}\right), \quad [\text{dB}] \tag{12}$$

$$= 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\sigma^2_{signal}}{\sigma^2_{ADC}}\right). \tag{13}$$

Relación señal-ruido de un ADC



$$\sigma^2_{ADC} = \int_{-q/2}^{-q/2} (e-\mu)^2 p(e) de = \int_{-q/2}^{-q/2} e^2 p(e) de = \frac{1}{q}\int_{-q/2}^{-q/2} e^2 de = \frac{q^2}{12}\,, \tag{14}$$

$$\sigma^2_{ADC} = \left(\frac{2V_p}{2^B}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \boxed{\frac{V_p^2}{3\cdot 2^{2B}}}\,, \tag{15}$$

$$LF = \frac{rms_{signal}}{V_p} = \frac{\sigma_{signal}}{V_p} \implies \sigma^2_{signal} = \boxed{LF^2 \cdot V_p^2}\,, \tag{16}$$

$$SNR_{ADC} = 10\cdot\log_{10}\left[\left(LF^2\cdot V_p^2\right)\cdot\frac{3\cdot 2^{2B}}{V_p^2}\right] = 10\cdot\log_{10}\left[\left(LF^2\cdot 3\cdot 2^{2B}\right)\right]\,, \tag{17}$$

$$= 10\cdot\left[\log_{10}(LF^2) + \log_{10}(3) + 2\log_{10}(2)\cdot B\right]\,, \tag{18}$$

$$= 20\cdot\log_{10}(LF) + 4.77 + 6.02\cdot B\,. \qquad [\text{dB}] \tag{19}$$

Consideraciones relación señal-ruido del ADC

$$\begin{aligned} SNR_{ADC} &= 20 \cdot \log_{10}(LF) + 4.77 + 6.02 \cdot B\,, \quad [\text{dB}] \\ &= 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{rms_{signal}}{V_p}\right) + 4.77 + 6.02 \cdot B\,. \quad [\text{dB}] \end{aligned}$$

Consideraciones:

- Para aumentar SNR_{ADC} lo ideal es que $rms_{signal} >> V_p$, pero esto producirá distorsión severa en la señal muestreada (saturación).
- Por otro lado, si $rms_{signal} << V_p$ disminuye SNR_{ADC}.
- La ec. 19 es para un ADC ideal. No se consideran otras fuentes de error del ADC.
- Además, se considera que la tensión máxima de entrada coincide con V_p del ADC.
- Por tanto, en la práctica se asume que el SNR_{ADC} calculado es entre 3 y 6 dB menor.
- Se ve que SNR_{ADC} aumenta 6 dB por cada bit que posea el cuantizador del ADC.
- Entonces, mientras más bits tenga el ADC, mejor. ¿O no?.

Relación señal-ruido del ADC señal gaussiana

Para una señal con distribución gaussiana, una solución de compromiso es $rms_{signal} = V_p/2$ (demostración para el alumno).

$$SNR_{ADC} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{rms_{signal}}{V_p}\right) + 4.77 + 6.02 \cdot B\,, \tag{20}$$

$$= 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{V_p/2}{V_p}\right) + 4.77 + 6.02 \cdot B\,. \tag{21}$$

Así, su máximo SNR_{ADC} está dado por,

$$SNR_{ADC} = 20 \cdot \log_{10}(0.5) + 4.77 + 6.02 \cdot B\,, \tag{22}$$

$$= -6.02 + 4.77 + 6.02 \cdot B\,, \tag{23}$$

$$= -1.25 + 6.02 \cdot B\,. \quad \text{[dB]} \tag{24}$$

Determinación de la cantidad de bits necesarios de un ADC

Considere el siguiente ejemplo:

- La SNR de cierto amplificador de audio es de 110 dB.
- Se decide usar un ADC de 24 bits (audio profesional) para muestrear el amplificador.

$$SNR_{ADC} = -1.25 + 6.02 \cdot 24 - 3 = 140.23 \text{ dB} .$$

- ¡Se están usando $(140 - 110)/6 \simeq 5$ bits para muestrear ruido!.
- En un lazo de control una mala estimación de la cantidad de bits del ADC puede llevar a resultados catastróficos.

Conclusión: la cantidad bits de un ADC debe estar en función de la SRN de la señal que se desea muestrear.

Regla: se debe elegir el ADC comercial con el número de bits inmediatamente superior al calculado. Luego, eleminar de las mediciones los bits adicionales con desplazamiento a derecha aritmético (`adc_read »= 5`).

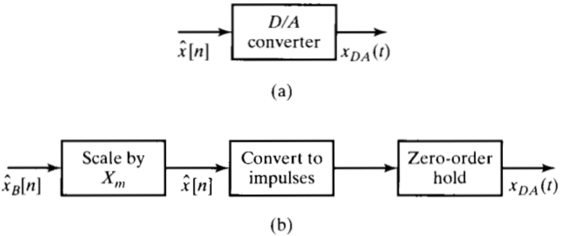


Figure 4.53 (a) Block diagram of D/A converter. (b) Representation in terms of a zero-order hold.

Un conversor D/A toma una secuencia de números y los transforma en una señal contínua $x_{DA}(t)$,

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t - nT)\,, \tag{25}$$

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{26}$$

$$x_{DA}(t) = x_0(t) + e_0(t)\,, \tag{27}$$

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t - nT)\,, \tag{28}$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] h_0(t - nT)\,. \tag{29}$$

$x[n]$ se relaciona con la señal de entrada como $x[n] = x_a(nT)$.

La transformada de Fourier de $x_0(t)$,

$$X_0(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] H_0(j\Omega) e^{-j\Omega nT}, \tag{30}$$

$$= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega nT} \right) H_0(j\Omega), \tag{31}$$

$$= X(e^{j\Omega T}) H_0(j\Omega), \tag{32}$$

$$= \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right) \right] H_0(j\Omega). \tag{33}$$

La respuesta en frecuencia de un filtro ZOH,

$$H_0(j\Omega) = \frac{2\sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2}. \tag{34}$$

Por tanto, la respuesta en frecuencia de un filtro de rescontrucción compensado,

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)}, \tag{35}$$

$$\tilde{H}_r(j\Omega)(t) = \begin{cases} \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)} e^{j\Omega T/2} & , |\Omega| < \pi/T \\ 0 & , |\Omega| > \pi/T \end{cases} \tag{36}$$

Así, la salida del DAC será $x_a(t)$ si la entrada es $x_o(t)$.

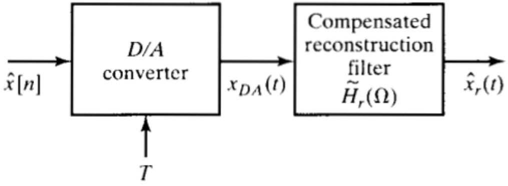


Figure 4.55 Physical configuration for digital-to-analog conversion.

Filtro compensado

$|H_0(j\Omega)|$ atenua -4 dB a $\Omega = \pi/T$.

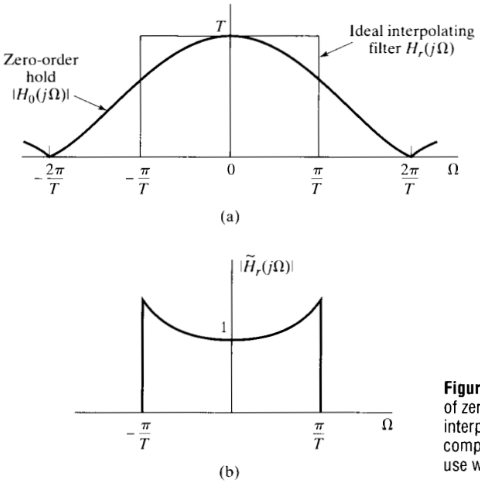


Figure 4.54 (a) Frequency response of zero-order hold compared with ideal interpolating filter. (b) Ideal compensated reconstruction filter for use with a zero-order-hold output.

Bibliografía

- Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schafer. *Discrete-time signal processing, 2nd Ed*. Prentice Hall. 1999. Secciones 4.1, 4.2, 4.3 y 4.8.
- Richard G. Lyons. *Understanding Diginal Signal Processing, 2nd Ed*. Prentice Hill. 2004. Sección 12.3.1.
- Paolo Prandoni and Martin Vetterli. Signal processing for communications. Taylor and Francis Group, LLC. 2008. Sección 9.6.