Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

Descripción de los grupos diédricos

Sea $n \geq 3$, consideramos D_n el grupo diédrico, r el giro centrado en el origen y amplitud $\frac{2\pi}{n}$ y s la simetría respecto al eje $y = 0$.

Entonces se verifica que:

$$R_k = r^k$$

$$S_k = r^k s$$

donde $k \in \mathbb{Z}_n$.

Además, $r^n = 1 = s^2$ y $sr = r^{n-1}s$. A estas identidades las llamaremos fundamentales.

En general tenemos $sr^k = r^{n-k}s$.

Con esta información podemos describir totalmente el grupo D_n.

Diremos que D_n está generado por r y s y escribiremos:

$$D_n = \langle r, s : r^n = s^2 = 1, sr = r^{n-1}s \rangle$$

Además, como $D_n = \{1, r, \ldots, r^{n-1}, s, rs, \ldots, r^{n-1}s\}$ tenemos que $|D_n| = 2n$

Puesto que $sr = r^{n-1}s$ no es un grupo abeliano para $n \geq 3$ ya que $sr \neq rs$.

Grupo de los cuaternios

Q_2 es un grupo dado por:

$$Q_2 = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$$

expresados como matrices (reales o complejas) y con la operación dada por el producto de matrices.

Los elementos inversos son:

$$(-1)^{-1} = -1$$

$$i^{-1} = i$$

$$j^{-1} = j$$

$$k^{-1} = k$$

Proposición 1. *Se verifican las siguientes identidades o relaciones fundamentales:*

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$(-1)^2 = 1$$

$$i(-1) = (-1)i = -i$$

$$j(-1) = (-1)j = -j$$

$$k(-1) = (-1)k = -k$$

$$ij = k$$

Observación 1. Prescindiendo de la descripción de los elementos de Q_2 como matrices, y utilizando únicamente las identidades anteriores, se puede describir el grupo.

El grupo de Klein

Definición 1. Sean G y H dos grupos. Definimos el producto directo de G y H como el grupo dado por su producto cartesiano $G \times H$ y con el producto dado por:

$$(x, y)(x', y') := (xx', yy')$$

El 1 del grupo es $(1, 1)$ y para cada elemto (a, b) su inverso es (a^{-1}, b^{-1}).

Si ambos grupos son finitos, entonces su producto directo también es finito y su orden es el producto de ambos órdenes, $|G \times H| = |G|\,|H|$.

Definimos el grupo de Klein K como el producto:

$$K := \mu_2 \times \mu_2 = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

Recordando que $\mu_2 = \{1, -1\}$, tenemos $|K| = 4$.

Homomorfismos

Definición 2. Sean G, G' dos grupos. Un homomorfismo de grupos de G en G' es una aplicación $f : G \longrightarrow G'$ verificando:

$$f(ab) = f(a)f(b) \forall a, b \in G$$

Si f es inyectiva, diremos que es un monomorfismo, si es sobreyectiva es un epimorfismo y si es biyectiva es un isomorfismo.

Ejemplos:

1. Para todo grupo G, la identidad es un isomorfismo.

2. Para $n \geq 2$, K^0 un cuerpo, $\det : GL_n(K) \longrightarrow K^*$ es un homomorfismo.

3. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es un homomorfismo entre $\mathbb{R}$ con la suma y $\mathbb{R}^+$ con el producto.

4. Para todo $n \geq 2$, $p : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, siendo p el resto de dividir entre n, es un homomorfismo.

Observación 2. Sea f un homomorfismo de grupos. Entonces:

1. $f(1) = 1$
2. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Proposición 2. *Sean $f : G \longrightarrow G'$ y $g : G' \longrightarrow G''$ dos aplicaciones. Entonces:*

1. *Si son homomorfismos, su composición también lo es.*
2. *Si son monomorfismos, su composición también lo es.*
3. *Si son epimorfismos, su composición también lo es.*
4. *Si son isomorfismos, su composición también lo es.*

Proposición 3. *Sea $f : G \longrightarrow G'$ un homormofismo. Entonces f es isomorfismo si y solamente si existe una g tal que $f \circ g = \mathrm{id}_{G'}$ y $g \circ f = \mathrm{id}_G$. En tal caso g es única y la denotaremos g^{-1}.*

Demostración. Tomamos como g la aplicación inversa. Veamos que es un homomorfismo:

$$f(g(x'y')) = (f \circ g)(x'y') = x'y'$$
$$f(g(x')g(y')) = (f \circ g)(x')(f \circ g)(y') = x'y'$$

Como $f(g(x'y')) = f(x'y')$ y f es un isomorfismo, tenemos que $g(x'y') = x'y'$.

$\square$

Corolario 1. En la clase de todos los grupos, la relación de isomorfía es una relación de equivalencia. Dados dos grupos G y G' diremos que son isomorfos, y lo escribiremos $G \cong G'$ si existe un isomorfismo entre ellos.

Demostración. Puesto que id es un isomorfismo, se cumple la propiedad reflexiva.

Si $G \cong G'$, existe un isomorfismo. Por la proposición anterior, el isomorfismo inverso implica que $G' \cong G$, con lo que se cumple la propiedad transitiva.

Por la proposición sobre composición de isomorfismos, la relación $\cong$ cumple la propiedad transitiva.

$\square$

Uno de los objetivos de la teoría de grupos finitos es su clasificación salvo isomorfismo. Es decir obterner un listado completo de las clases de equivalencia de los grupos, con un representante por cada clase.