Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

Ejemplo de cálculo del supremo.

Sea $K = \{\mathrm{id}, \alpha_1 = (12)(34), \alpha_2 = (13)(24), \alpha_3 = (14)(23)\} \leq S_4$, consideramos $H = \{\mathrm{id}, (12)\}$.

Comprobamos que $KH = HK$. Entonces $KH \in \mathrm{Sub}(G)$ y $K \bigwedge H = KH$.

Grupo generado por un conjunto

Definición 1. Sea G un grupo y $X \subseteq G$ no vacío. Definimos el subgrupo generado por X como el menor subgrupo de G que contiene a X.

Lo denotaremos por $\langle X \rangle$.

Además se tiene que:

$$\langle X \rangle = \bigcap_{K \in \mathrm{Sub}(G), X \subseteq K}$$

Definición 2. Sea G un grupo y X un subconjunto no vacío. Una palabra en los elementos de X es una expresión de la forma:

$$x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$$

donde $k \geq 1$ y $n_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in X$ para $i \in \{1, \ldots, k$. Diremos que dicha palabra es reducida si $x_i \neq x_{i+1}$.

Proposición 1. *Sea G un grupo y $X \subset G$ no vacío. Entonces:*

$$\langle X \rangle = \{\alpha : \alpha \textit{es una palabra generadas}\}$$

Además, si G es finito, podemos coger solo palabras con exponentes positivos.

Demostración. $X \subseteq \{x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k} : x_i \in X, n_i \in \mathbb{Z}, k \geq 1\}$, luego es distinto del vacío.

Sean x, y dos palabras en los elementos de X. Entonces $x = x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}$ y $y = y_1^{m_1} \ldots y_k^{m_k}$.

Entonces:

$$xy^{-1} = x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k} y_1^{-m_1} \ldots y_k^{-m_k}$$

que es claramente una palabra.

En el caso de que G sea finito, $\{x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k} : x_i \in X, n_i \in \mathbb{N}_0, k \geq 1\}$ es cerrado para productos y por tanto es un subgrupo de G.

En ambos caso es evidente que es el más pequeño que contiene a X. $\square$

Definición 3. Sea G un grupo y X un subconjunto no vacío de G. Si $\langle X \rangle = G$, diremos que X es un conjunto de generadores del grupo G.

Un grupo G diremos que es finitamente generado si existe un conjunto de generadores finito.

Definición 4. El subgrupo cíclico generado por a:

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

Observación 1. $\langle a \rangle$ es siempre abeliano.

Ejemplos:

1. $Q_2 = \langle i, j \rangle$.
2. $D_2 = \langle r, s \rangle$.
3. $S_n = \langle (ij) \rangle$.
4. $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.
5. $\langle 2 \rangle = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$.
6. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle (1,0), (0,1) \rangle$.