Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

Grupos resolubles

Definición 1 (Serie normal)**.** Sea G un grupo. Una cadena de subgrupos de G en la forma:

$$\{1\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \dots H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G$$

la llamamos una serie normal de G. A los H_i se les llama términos y a los H_i/H_{i-1} se le llama factor i-ésimo. La seri se dice propia si todas las inclusiones son propias o estrictas. Diremos entonces que tiene longitud n.

Definición 2 (Refinamiento de una serie)**.** Dadas dos series, de términos H_i y K_i, diremos que la segunda es un refinamiento de la primera si:

1. La longitud de la primera es menor o igual a la de la segunda.

2. Si para cada índice j de la primera serie existe un índice r de la segunda tal que $H_j = K_r$.

Es decir, si todos los grupos de la primera aparecen en la segunda.

Si la longitud de la primera es estrictamente menor que la longitud de la segunda (la segunda serie tiene más grupos que la primera), diremos que el refinamiento es propio.

Ejemplos: En S_4 tenemos:

$$\{\mathrm{id}\} \trianglelefteq K \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$$

tiene como refinamiento:

$$\{\mathrm{id}\} \trianglelefteq C_2 \trianglelefteq K \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$$

Observación 1. Notemos que en una serie normal cada término es normal en el siguiente, pero no tiene por qué serlo para los siguientes términos.

Definición 3 (Serie de composición)**.** Sea G un grupo. Una serie normal propia que no admite refinamientos propios la llamaremos una serie de composición de G.

A los factores de una serie de composición los llamaremos factores de composición de G.

Observación 2. No todo grupo tiene series de composición. Por ejemplo, $\mathbb{Z}$ no las tiene.

En efecto, sea
$$\{0\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_n = \mathbb{Z}$$

Si $n = 1$, $\{0\} \trianglelefteq \mathbb{Z}$, entonces tomando $m\mathbb{Z}$ con $m > 1$ tenemos el siguiente refinamiento propio:
$$\{0\} \trianglelefteq m\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$$

Si $n > 1$, entonces H_1 es unsubgrupo propio, y por tanto $H_1 = m\mathbb{Z}$. Consideramos $2m\mathbb{Z}$, entonces:

$$\{0\} \trianglelefteq 2m\mathbb{Z} \trianglelefteq m\mathbb{Z} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq \mathbb{Z}$$

es un refinamiento de la serie dada.

Definición 4 (Grupo simple)**.** Un grupo G no trivial diremos que es simple si no admite subgrupos normales propios.

Proposición 1. *Sea G un grupo abeliano. G es simple si y solo si es finito de orden un número primo.*

Observación 3. G es simple y abeliano si y solo si no tiene subgrupos propios.

Teorema 1. *Sea G un grupo y H_i una serie normal de G. La serie es de composición si cada uno de sus factores H_i/H_{i-1} es simple.*