Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

Teorema 1. *Sea G un grupo y H_i una serie normal de G. La serie es de composición si cada uno de sus factores H_i/H_{i-1} es simple.*

Demostración. Vamos a demostrar que si cada factor es simple, la serie es de composición.

Sea la siguiente serie:

$$\{1\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G$$

Suponemos que los factores son simples. Para todo i se tiene que H_i/H_{i-1} luego $H_i \trianglelefteq H_i$ propiamente. Luego la serie es normal propia.

Supongamos que la serie tiene un refinamiento propio:

$$\{1\} = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_{n-1} \trianglelefteq K_n = G$$

Entonces $n < m$ y todos los grupos de la serie H_i aparecen en la serie K_i. Como $n < m$, existe un $l \leq m$ tal que $K_l \neq H_i$ para cualquier i. Sea t el mayor subíndice tal que K_t no aparece en la serie H_i.

Notemos que $0 < t < m$. Podemos considerar K_{t+1} y por la elección de t, existe $r \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $K_{t+1} = H_r$. Entonces tenemos la siguiente situación:

$$H_{r-1} \trianglelefteq K_t \trianglelefteq K_{t+1} = H_r$$

donde las inclusiones son estrictas, con lo cual $1 \neq K_t/H_{r-1} \trianglelefteq H_r/H_{r-1}$ con las desigualdades también estrictas, lo que está en contra de la simplicidad de H_r/H_{r-1}.

Por lo tanto la serie H_i no admite ningún refinamiento.

□

Ejemplos:

1. En S_4, la serie $1 \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$ no es de composición porque $A_4/1 = A_4$ no es simple.

2. En S_4, la serie $1 \trianglelefteq K \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$ no es de composición porque $K/1 = K$ no es simple.

3. En S_4, sea $1 \trianglelefteq C_2 \trianglelefteq K \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$. Tenemos que $|S_4/A_4| = 2$ y por tanto $S_4/A_4 \cong C_2$ con lo que es simple (abeliano, finito de orden un primo). $|A_4/K| = 3$ y por tanto $A_4/K \cong C_3$ con lo que es simple. $|K/C_2| = 2$ y por lo tanto es simple. $C_2/1 = C_2$ que es simple. Como todos los factores son simples, la serie es de composición.

Teorema 2. *Todo grupo finito tiene una serie de composición.*

Demostración. Sea G finito. Hacemos inducción en el orden de G. Si $|G| = 2$, entonces $G \cong C_2$ y por tanto es simple. Entonces $1 \trianglelefteq G$ propiamente, es una serie de composición de G.

Supongamos $|G| > 2$ y que el resultado es cierto para todo grupo de orden menor que el de G. LLamamos $\Delta = \{K \in \mathrm{Sub}(G) : K \trianglelefteq G \text{ propiamente}\}$. $\Delta \neq \emptyset$, y es finito por serlo $\mathrm{Sub}(G)$ (que es finito por serlo $\mathcal{P}(G)$).

Elegimos $K \in \Delta$ tal que $|K|$ sea el mayor de los órdenes de los elementos de Δ. Se tiene que G/K es un grupo simple. En efecto, como $K \trianglelefteq G$ propiamente, G/K es no trivial y si $L \trianglelefteq G/K$, entonces $L = H/K$ con $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$. Si H es distinto de K, entonces necesariamente $H = G$, porque en otro caso $H \trianglelefteq G$, $H \in \Delta$ y el orden de K sería estrictamente menor que el de H, lo cual es una contradicción.

Si $H \neq K \implies H = G \implies L = G/K$ y si $H = K$ entonces $L = \{1\}$. Es decir G/K es simple. Como $K \trianglelefteq G$ propiamente y entonces $|K| < |G|$ y por hipótesis de inducción, K tiene una serie de composición. Entonces consideramos la serie:

$$1 = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_r = K \trianglelefteq K_{r+1} = G$$

es una serie de composición de G.

□

Ejemplo:
$D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$. Tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} & & D_4 & & \\ \langle r^2, s\rangle & & \langle r\rangle & & \langle r^2, rs\rangle \\ & \langle s\rangle & \langle r^2 s\rangle & \langle r^2\rangle \ldots & \end{array}$$

Subgrupos normales $\langle r^2, s\rangle, \langle r\rangle, \langle r^2, rs\rangle$, pues son índice dos en D_4. Tenemos que $Z(D_4) = \langle r^2\rangle$ y entonces $\langle r^2\rangle \trianglelefteq D_4$. El rsto de subgrupos de orden 2 no son normales en D_4, por ejemplo, como $r\langle s\rangle r^{-1} \not\leq \langle s\rangle$.

Continuando el procedimiento llegamos a las siete series de descomposición distintas (todas de longitud 3). Por ejemplo:

$$1 \trianglelefteq \langle r^2\rangle \trianglelefteq \langle r\rangle \trianglelefteq D_4$$

Sus factores son siempre isomorfos a C_2. Se observa que los factores de las demás series son, salvo isomorfismos, todos igual a C_2.

Definición 1 (Series equivalentes)**.** Sea G un grupo y supongamos dos series normales de G. Diremos que son equivalentes o isomorfas si se verifica:

1. Tienen la misma longitud.

2. Los factores, salvo permutaciones, son isomorfos.

Lema 1 (Teorema de refinamiento de Schreier)**.** *Cualesquiera dos series normales de un grupo G admiten refinamientos equivalentes.*

Lema 2. *Si una serie normal de un grupo G es equivalente a una serie de composición de G, entonces dicha serie es también de composición.*

Teorema 3 (Teorema de Jordan-Holder)**.** *Sea G un grupo que admite una serie de composición. Entonces se verifica:*

1. *Toda serie normal admite un refinamiento que es una serie de composición.*

2. *Cualesquiera dos series de composición son equivalentes.*

Demostración. Sea G_i una serie de composición de G.

Veamos el primer apartado Sea H_i una serie normal de G. Por el lema de Schreier, ambas series admiten refinamientos equivalentes. Como la primera serie es de composición, todo refinamiento suyo coincide con ella misma. Entonces la serie H_i tiene un refinamiento equivalente a una serie de composición. Por el segundo lema, dicho refinamiento es también una serie de composición.

El apartado dos es una consecuencia inmediata. Tomamos dos series, por el teorema de refinamiento de Schreier.

□

Definición 2 (Longitud de un grupo)**.** Definimos la longitud de un grupo finito G que denotaremos por $l(G)$ como la longitud de cualquiera de sus series de composición.

Definición 3 (Factores de un grupo)**.** Definimos los factores de composición de G como los factores de su serie de composición. Al conjunto de dichos factores lo denotaremos por $\mathrm{fact}(G)$. Al conjunto de dichos factores lo denotaremos por $\mathrm{fact}(G)$.

Ejemplos:

1. S_2 tiene la siguiente serie de composición $1 \trianglelefteq S_2$. En este caso la longitud es 1 y $\text{fact}(S_2) = S_2 = C_2$.

2. S_3 tiene la serie de descomposición:

$$1 \trianglelefteq A_3 \trianglelefteq S_3$$

   y por tanto la longitud de S_2 es 2 y sus factores son C_2, C_3.

3. $l(S_4) = 4$ y $\text{fact}(S_4) = \{C_2, C_3, C_2', C_2''\}$.

4. $D_3 = \{1, r, r^2, s, r, r^2 s\}$, tiene longitud 2 y $\text{fact}(D_3) = \{C_2, C_3\}$.

5. D_4 ya hemos visto que tiene longitud tres y $\text{fact}(D_4) = \{C_2, C_2'.C_2''\}$.