Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

Proposición 1. *Sea $n \geq 2$. En S_n se tiene que:*

1. *El inverso de todo ciclo es el ciclo leído al revés:*
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_r \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x_r & x_{r-1} & \cdots & x_1 \end{pmatrix}$$

2. *Para todo $\alpha \in S_n$ se cumple:*
$$\alpha(x_1, \ldots, x_r)\alpha^{-1} = (\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_r))$$

3. $(x_1, \ldots, x_r) = (x_1, x_2) \cdots (x_{r-1}, x_r)$

4. *Para todo r-ciclo se verifica que para todo k menor que r, su potencia k-ésima es distinta de la identidad, y su potencia r-ésima es justo la identidad:*
$$(x_1, \ldots, x_r)^k = \mathrm{id} \iff k = r \forall 1 \leq k \leq r$$

El apartado 4 se demuestra por inducción sobre k.

Definición 1 (Grupos diédricos)**.** Sea $n \leq 3$ y P_n el polígono regular de n lados.

Se define el n-ésimo grupo diédrico (D_n) como el grupo de las isometrías del plano euclídeo que dejan globalmente fijo al polígono.

La operación es la composición.

Proposición 2. *D_n es un grupo infinito con $|D_n| = 2n$.*

Demostración. Tomamos el polígono centrado en el origen y de radio 1. Entonces los vértices de P_n son $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$ donde $\vartheta_k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right)$

Reconocemos $2n$ elementos que son:

1. Para cada $0 \leq k \leq n-1$, el giro centrado en el origen y de amplitud $\frac{2k\pi}{n}$, que son exactamente n.

2. Sean $s_1, \ldots, s_n$ los n ejes de simetría de P_n que son:

a) Si n es impar tomamos la recta que pasa por el vértice y por la mediatriz del lado opuesto, pasando por el origen.

b) Si n es par tomamos las rectas que unen cada vértice con el origen y todas las rectas que unen las mediatrices de lados opuestos.

Para cada $0 \leq k \leq n-1$, la simetría ortogonal respecto al eje s_k.

$\square$