Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

Proposición 1. *Todo subgrupo de índice 2 es normal.*

Demostración. Sea G finito y $H \leq G$ tal que $[G : H] = 2$. Entonces, por definición, solo existen dos clases:

$$G/H = \{H, aH\}$$
$$H/G = \{H, Ha\}$$

Como $G = H \cup aH = H \cup Ha$, ambas uniones disjuntas, obtenemos que $aH = Ha$. $\square$

Corolario 1. $A_n \trianglelefteq S_n$ para todo $n > 1$, pues $[S_n : A_n] = 2$.

Corolario 2. También se deduce que en D_n, el grupo $\langle r \rangle \trianglelefteq D_n$, puesto que $[\langle r \rangle : D_n] = \frac{|D_n|}{|N|} = \frac{2n}{n} = 2$.

Podemos describir el retículo de subgrupos de A_4.

$$\begin{aligned} A_n &= \{\mathrm{id}, (1\quad 2)(3\quad 4), (1\quad 3)(2\quad 4), (1\quad 4)(2\quad 3), (1\quad 2\quad 4), (1\quad 4\quad 2), \\ &\quad (1\quad 3\quad 4), (1\quad 4\quad 3), (2\quad 3\quad 4), (2\quad 4\quad 3)\} \end{aligned}$$

$K = \{\mathrm{id}, (1\quad 2)(3\quad 4), (1\quad 3)(2\quad 4), (1\quad 4)(2\quad 3)\} \trianglelefteq A_4$

No hay subgrupos de orden 6. Supongamos que hay un subgrupo de orden 6. Sea $N \leq A_4$ de orden 6, por tanto de índice 2.

Como $|N| = 6$, N tiene un ciclo de longitud 3. Supongamos $(1\quad 2\quad 3) \in N$ y su inverso $(1\quad 2\quad 3)^{-1} = (1\quad 3\quad 2) \in N$.

Sea $\alpha = (1\quad 2)(3\quad 4) \in A_4$, como es subgrupo normal de A_4: $\alpha(1\quad 2\quad 3)\alpha^{-1} = (2\quad 1\quad 4) = (1\quad 2\quad 4)$ y su inverso también.

Procediendo una vez más conseguimos 6 elmentos en N distintos de la identidad, luego $|N| > 6$ y hemos llegado a una contradicción.

Se puede ver que ninguno de los subgrupos de orden 2 o 3 es normal. Por tanto K es el único subgrupo propio normal en A_4.

Ejemplo, $C_2 = \{\mathrm{id}, (1\quad 2)(3\quad 4)\}$ no es normal. Sea $\alpha = (1\quad 2\quad 3)$ entonces:

$$\alpha\alpha\alpha^{-1} = (1\quad 4)(2\quad 3) \notin C_2$$

Curiosamente, tenemos que $C_2 \trianglelefteq K$, pero sin embargo $C_2 \leq A_4$.

En cambio:

Observación 1. Si $N \trianglelefteq G$, y $N \leq H \leq G$, entonces $N \trianglelefteq H$.

Definición 1 (Grupo cociente de G por N)**.** Sean $N \trianglelefteq G$. Consideramos:

$$G/N = \{aN : a \in G\}$$

Definimos en G/N la siguiente operación binaria:

$$\begin{array}{rcl} G/N \times G/N & \longrightarrow & G/N \\ (aN, bN) & \mapsto & (aN)(bN) := abN \end{array}$$

Por ser N normal, la operación está bien definida.

Proposición 2. *G/N con la operación anterior tiene estructura de grupo, con el uno dado por N y para cada aN, su inverso es $a^{-1}N$.*

Definición 2 (Proyección canónica)**.** Se tiene un epimorfismo de grupos $p : G \longrightarrow G/N$ dado por $p(a) := aN$, que llamaremos proyección canónica.

Teorema 1 (Descomposición canónica)**.** *Sea $f : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos. Sea N un subgrupo normal en G tal que $N \trianglelefteq G$ tal que $N \leq \ker(f)$, entonces:*

1. *Existe un único homomorfismo $\overline{f} : G/N \longrightarrow G'$ tal que $\overline{f} \circ p = f$.*

2. *$\overline{f}$ es epimorfismo si y solo si f lo es.*

3. *$\overline{f}$ es monomorfismo si y solo si $N = \ker(f)$.*

$\overline{f}$ se llama el homomorfismo inducido por f en el grupo cociente G/N.

Demostración. Definimos $\overline{f}(aN) := f(a)$. Veamos que está bien definido. Si $aN = bN$, entonces $b^{-1}a \in N$ y entonces $b^{-1}a \in \ker f$. Pero entonces:

$$f(b)^{-1}f(a) = f(b^{-1}a) = 1 \implies f(a) = f(b)$$

Es fácil ver que $\overline{f}$ es un homomorfismo, así como que $\overline{f} \circ p = f$.

Supongamos que g es otro homomorfismo que verifica lo mismo. Entonces $g \circ p = f$. Sea $aN \in G/N$. Entonces:

$$g(aN) = g(p(a)) = f(a) = \overline{f}(aN)$$

Como $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\overline{f})$, f es sobreyectiva si y solo lo es $\overline{f}$.

Supongamos que $\overline{f}$ es monomorfismo. Veamos que $\ker(f) \leq N$, la otra inclusión ya la tenemos. Sea $a \in \ker(f)$, tenemos que

$$\overline{f}(aN) = f(a) = 1$$

lo que implica que $aN \in \ker(\overline{f}) = \{N\}$ por ser inyectiva, luego $aN = N$ y por tanto $a \in N$.

Veamos que pasa si $N = \ker(f)$. Sea $aN \in G/N$ tal que

$$\overline{f}(aN) = f(a) = 1$$

con lo que tenemos que $a \in \ker(f) = N$, con lo que $aN = N$ y $a \in N$. Así que $\ker(f) = \{N\}$ y $\overline{(f)}$ es monomorfismo.

$\square$

Corolario 3 (Primer teorema de isomorfía)**.** Sea $f : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos. Entonces f induce un isomorfismo $G/\ker(f) \cong \mathrm{Im}(f)$ dado por $a\ker(f) \mapsto f(a)$.

Demostración. Consideramos $f : G \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ y aplicando el teorema anterior a $N = \ker(f)$. f induce un homomorfismo, pero al estar definido sobre su imagen, es epimorfismo, y al ser N el núcleo de f, es también monomorfismo. En consecuencia es un isomorfismo.

$\square$

Proposición 3. *Sean G, H finitos y $\gcd(|G|, |H|) = 1$. Veamos que si $f : G \longrightarrow H$ es un homorfismo, entonces $f(a) = 1$ para todo $a \in G$.*

Demostración.

$$|G| = |\ker(f)|\,|\mathrm{Im}(f)|$$

En particular, $|\mathrm{Im}(f)|$, divide al orden de G, y como $\mathrm{Im}(f) \leq H$ también divide a la imagen de H. Como $|\mathrm{Im}(f)| = 1$, luego $\mathrm{Im}(f) = \{1\}$.

$\square$

Corolario 4. Si f es un homomorfismo y G y G' son finitos, entonces:

$$|G| = |\mathrm{Im}(f)|\,|\ker(f)|$$

Vamos a estudiar quién es $\mathrm{Sub}(G/N)$ en relación con $\mathrm{Sub}(G)$.

Proposición 4. *Sea G un grupo y $N \trianglelefteq G$. Entonces:*

1. *Si $H \in \mathrm{Sub}(G)$ tal que $N \leq H$ entonces $N \trianglelefteq H$ y $H/N \in \mathrm{Sub}(G/N)$.*

2. *Si* $H_1, H_2 \in \mathrm{Sub}(G)$ *tal que* $N \trianglelefteq H_i$ *con* $i = 1, 2$*, entonces* $H_1/N = H_2/N \iff H_1 = H_1$*.*

3. *Sea* $L \in \mathrm{Sub}(G/N)$ *entonces existe un único* $H \in \mathrm{Sub}(G)$ *tal que* $N \trianglelefteq H$ *y* $L = H/N$*.*

Demostración. Si $aNa^{-1} \leq N$, para todo $a \in G$, entonces en particular para $a \in H$, con lo que $N \trianglelefteq H$.

Para demostrar el siguiente punto vemos que la implicación a la izquierda es obvia. Supongamos que se da la parte izquierda y demostremos por doble inclusión que se da la parte derecha.

$a \in H_1$, entonces $aN \in H_1/N = H_2/N$ y entonces hay un $b \in H_2$ tal que $aN = bN$, y entonces $b^{-1}aN \leq H_2$. Entonces $a = b(b^{-1}a) \in H_2$. Por tanto $H_1 \leq H_2$ y de forma análoga se ve que $H_2 \leq H_1$.

Para el siguiente punto consideramos $L \leq G/N$, y consideramos la proyección canónica $p : G \longrightarrow G/N$ tal que $p(a) = aN$. Entonces $p(L) \leq G$. Sea $H = p^{-1}(L) = \{a \in G : p(a) \in L\} = \{a \in G : aN \in L\} \leq G$.

Veamos que H es el que buscamos. Sea $a \in H$, entonces $p(a) = aN = N \in L$, luego $a \in H$. Es fácil ver que $L = H/N$.

$\square$

Teorema 2 (Segundo teorema de isomorfía o del doble cociente)**.** *Sea* G *un grupo y* N *un subgrupo normal de* G*. Sea* $H \in \mathrm{Sub}(G)$ *tal que* $N \leq H$*. Entonces:*

$$H/N \trianglelefteq G/N \iff H \trianglelefteq G$$

Además en tal caso

$$G/H \cong (G/N)(H/N)$$