Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

Observación 1. Los grupos abelianos de orden 12 pueden ser $C_4 \times C_3 \cong C_{12}$ y $C_2 \times C_2 \times C_3 \cong C_6 \times C_2$.

Grupos no abelianos de orden 12 existen

Demostración. La primera parte se justificó en el tema anterior.

$n_3 | 4$ y $n_3 \equiv 1 \mod 3$ con lo que n_3 es 1 o 4.

Si $n_3 = 4$ entonces ya vimos que $G \cong A_4$.

Supongamos $n_3 = 1$. Sea $P \trianglelefteq G$ con $|P| = 3$. $P \cong C_3$, y P está generado por $x \in G$.

Veamos que en G hay un elemento de orden 6. Consideramos $\mathrm{cl}(x) = \{gxg^{-1} : g \in G\}$. Puesto que $P \trianglelefteq G$ entonces $\mathrm{cl}(x) \leq P \leq \{1, x, x^2\}$. Además, $1 \notin \mathrm{cl}(x)$ (si no, habría un $g \in G$ tal que $1 = gxg^{-1}$, luego $x = 1$, lo que es una contradicción).

Entonces $\mathrm{cl}(x)$ es $\{x\}$ o $\{x, x^2\}$, ya que contiene siempre a x. Recordamos que:

$$[G : c_G(x)] = |\mathrm{cl}(x)|$$

donde $c_G(x) = \{g \in G : gx = xg\} \leq G$. Entonces $[G : c_G(x)] \in \{1, 2\}$, por tanto el centralizador tiene orden 12 o 6. En ambos casos, $2 | \, |c_G(x)|$ y por el teorema de Cauchy, existe un $z \in c_G(x)$ tal que $\mathrm{ord}(z) = 2$.

Sea $a = xz$. Tenemos que $\gcd(\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(z)) = \mathrm{mcm}(3, 2) = 1$ tal que $xz = zx$.

Porque conmutan, $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(x)\,\mathrm{ord}(z) = 3 \cdot 2 = 6$.

Sea

$$K = \langle a \rangle$$

tenemos que $[G : K] = \frac{|G|}{|K|} = \frac{12}{6} = 2$, luego $K \trianglelefteq G$. Además hay únicamente dos clases laterales a derecha: K y Kb con $b \notin K$. Tenemos que

$$G = K \cup Kb = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}$$

Veamos que $bab^{-1} = a^5$, como $K \trianglelefteq G$ tenemos que $bab^{-1} \in K$, y tenemos que $\mathrm{ord}(bab^{-1}) = \mathrm{ord}(a) = 6$, por lo tanto $bab^{-1} \in \{a, a^5\}$. Pero si fuera igual a a tendríamos que $ba = ab$ y esto no puede ser porque G no es abeliano.

$ba = a^5b = a^{-1}b$. Consideramos $b^2 \in G$. Tenemos que $b^2 \in Kb$ porque $b \notin K$. Por tanto $b^2 \in K = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$.

Descartamos que b^2 sea a a o a^5, porque si no caemos en contradicción: $\text{ord}(b^2) = 6$, con lo que $\text{ord}(b) = 12$ y G sería abeliano.

Si $b^2 = a^2$, como $bab^{-1} = a^{-1}$, tendríamos que:

$$(a^{-1})^2 = (bab^{-1})^2 = ba^2b^{-1} = bb^2b^{-1} = b^2 = a^2$$

y $a^4 = 1$ en contradicción con que $\text{ord}(a) = 6$.

Si $b^2 = a^4$ tendríamos, con el mismo procedimiento, que $a^8 = 1$, lo que contradice que $\text{ord}(a) = 6$.

Entonces $b^{\in}\{1, a^3\}$. Tenemos que

$$G = \langle a, b | a^6 = 1, b^2 = 1, ba = a^{-1}b \rangle = D_6$$

o si $b^2 = a^3$:

$$G = \langle a, b | a^6 = 1, b^2 = a^3, ba = a^{-1}b \rangle = Q_3$$

□

Proposición 1. *El grupo A_4 es isomorfo a:*

$$\langle a, b | a^2 = 1, b^3 = 1, (ab)^3 = 1 \rangle$$

Demostración. Sea G ese grupo. Veamos que existe un epimorfismo de G en A_4.

Consideramos $\sigma = (1 \quad 2)(3 \quad 4) \in A_4$, $\tau = (1 \quad 2 \quad 3) \in A_4$. Tenemos que $\tau^3 = \sigma^2 = \text{id}$, y que $\sigma\tau = (2 \quad 4 \quad 3)$ y $(\sigma\tau)^3 = \text{id}$.

Por el teorema de Dyck, existe un único homomorfismo $f : G \longrightarrow A_4$ tal que $f(a) = \sigma$ y $f(b) = \tau$. Es fácil ver que $A_4 = \langle \sigma, \tau \rangle$, con lo que f es un epimorfismo.

Tenemos que $G/\ker(f) \equiv A_4$. Basta ver que $|G| = 12$. Ya sabemos que $|G| \geq 12$.

Notemos que $\text{ord}(a) = 2$ y $\text{ord}(b) = 3$.

Demostremos que los elementos $a, bab^2 \in G$ tienen orden 2 y conmutan entre sí, generando un subgrupo de G, $N = \langle a, bab^2 \rangle$, que es tipo Klein. Además vamos a ver que N es normal en G.

Ya sabemos que $\text{ord}(a) = 2$. Tenemos que

$$(bab^2)^2 = bab^2bab^2 = ba^2b^2 = bb^2 = b^3 = 1$$

$\text{ord}(bab^2) = 2$.

Veamos que conmutan, veamos que ambos son iguales a ab^2ab. Vamos a usar que $(ab)^3 = 1$.

$$a(bab^2) = abab^2 = ababb = (ab)^{-1}b = b^{-1}a^{-1}b = b^2ab$$

$$(bab^2) = bab^2a = bbabaa = b^2aba^2 = b^2ab$$

tenemos que N es tipo Klein y está formado por $\{1, a, bab^2, b^2ab\}$. Veamos que es normal.

Como $G = \langle a, b \rangle$, basta con ver que: $aNa^{-1} \leq N$ y $bNb^{-1} \leq N$. Como $N = \langle a, bab^2 \rangle$, basta con ver que $bab^{-1} \in N$ y $b(bab^2)b^{-1} \in N$.

Vemos que $bab^{-1} = bab^2 \in N$ y $b(bab^2)b^{-1} = b^2ab \in N$ por ser el producto de a y bab^2.

Entonces $N \trianglelefteq G$.

$G/N = \langle bN \rangle$, como $(bN)^3 = b^3N = N$, podemos decir que $\mathrm{ord}(bN) = 3$.

$|G/N| = 3$, $\mathrm{ord}(N) = 4$, tenemos que $|G| = 12$.

Tenemos que $\ker(f) = \{1\}$ y f es un isomorfismo.

$\square$