Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

G-conjuntos y p-grupos

Definición 1 (Acción)**.** Sea G un grupo y X un conjunto distinto del vacío. Una acción de G sobre X por la izquierda es una aplicación $G \times X \longrightarrow X$ tal que $(g, x) \mapsto {}^{g}x$. que verifica que ${}^{1}x = x$ y que ${}^{(gh)}x = {}^{g}({}^{h}x)$.

Diremos que G actúa sobre X por la izquierda o que X es un $G-$*conjunto*. Diremos que X G es el dominio de operadores y a la acción y a la acción la aplicación de G-estructura.

De modo análogo se define por la derecha, pero no vamos a usarla. Cuando hablemos de acción siempre nos refereriremos a una aplicación por la derecha.

Definición 2. Para cada $g \in G$ podemos definir la siguiente aplicación:

$$\phi(g)(x) := {}^{g}x$$

Observación 1. La primera condición nos dice que $\phi(i) = \mathrm{id}_X$ y la segunda que $\phi(gh) = \phi(g) \circ \phi(h)$. En particular es una aplicación biyectiva tal que $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$. Entonces hemos definido un homomorfismo de grupos ϕ entre G y $S(X)$, el conjunto de permutaciones sobre X.

Llamaremos a ϕ representación de G por permutaciones asociada a la acción.

Proposición 1. *Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Supongamos dado un homomorfismo $f : G \longrightarrow S(X)$. Entonces podemos definir una acción de G sobre X como sigue: $(g, x) \mapsto {}^{g}x := f(g)(x)$.*

Entonces las condiciones de la definición de G-conjunto se satisfacen, cuya representación es f.

Definición 3. Una acción de G sobre un conjunto X diremos que es fiel si el núcleo de $\phi : G \longrightarrow S(X)$ es trivial.

$$\ker(\phi) = \{g \in G : \phi(g) = {}^{g}x = \mathrm{id}\} = \{1\}$$

Algunos ejemplos:

1. Dado G un grupo y $X \neq 0$ la aplicación $G \times X \longrightarrow X$ tal que $(g, x) \mapsto {}^g x := x$, la llamaremos la acción trivial. $\phi(g) = \mathrm{id}$ para todo $g \in G$, el homomorfismo trivial, es su representación asociada.

2. Supongamos X un G-conjunto y $H \leq G$, entonces X también es un H-conjunto con la acción dada por la restricción de la acción a H.

3. $G = S_n$ y $X = \{1, \ldots, n$, tenemos que la aplicación $(\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$. Su representación asociada es la identidad en S_n.

4. Tomamos como grupo $G = D_4$ y como $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Sea $\phi : D_4 \longrightarrow S_4$ y $\phi(r^i) := (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)^i$ y $\phi(r^i s) = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)^i (2 \quad 4)$ es un homomorfismo de grupos. Tenemos entonces una acción de D_4 sobre el conjunto X. Esto permite numerar los vértices del cuadrado sobre el que hemos definido D_4. Esta acción cumple $\ker(\phi) = \{1\}$, luego es fiel.

5. $G = S_n$, Consideramos $X^n = X \times \cdots \times X$. Definimos una acción de S_n sobre X^n como sigue:

$$(\sigma, (x_1, \ldots, x_n)) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots x_{\sigma^{-1}(n)})$$