Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

Otros ejemplos de acción:

6. Acción por traslación: $X = G$ y tomamos ${}^{g}h := gh$. $\ker(f) = \{1\}$, luego es fiel. Si G es finito y el orden de G es n, entonces $S(G) \cong S_n$. Como ϕ es un monomorfismo, tenemos que aplicando el primer teorema de isomorfía, deducimos que $G \cong \mathrm{Im}(\phi)$.

7. Sea G un grupo y $H \leq G$ y consideramos $G \times G/H \longrightarrow G/H$ una acción definida por ${}^{g}h := gxH$ es una acción. Del mismo modo ${}^{g}h = Hxg^{-1}$ también es una acción.

8. Sea $X = G$ y consideramos la acción por conjugación de G sobre sí mismo: ${}^{g}h := ghg^{-1}$. La representación asociada cumple que $\phi(g) = \varphi_g$, el automorfismo interno definido por el elemento g. Tenemos que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Int}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$. El núcleo es el centro del grupo, es decir, se cumple que $\ker(\phi) = Z(G)$.

9. Sea G un grupo y consideramos el conjunto $X = \mathrm{Sub}(G)$. Entonces la aplicación ${}^{g}h := gHg^{-1}$.

Teorema 1 (Teorema de Cayley)**.** *Todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de S_n, donde $n \leq |G|$.*

Definición 1. Sea G un grupo y X un G-conjunto. Sea $G \times X \longrightarrow X$ una acción. Definimos la siguiente relación de equivalencia denotada por $\sim$:

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } {}^{g}x = y$$

Definición 2 (Órbitas)**.** Para cada $x \in X$, definimos la órbita de x, que denotaremos por $O(x)$, como la clase de equivalencia de x por la relación de equivalencia anterior.

$$O(x) := \{y \in X : x \sim y\} = \{y \in X : {}^{g}x = y\} = \{{}^{g}x : g \in G\}$$

Observación 1. Dos órbitas coinciden cuando sus representantes están relacionados.

Observación 2. El conjunto de órbitas es una partición de X: las órbitas son disjuntas y su unión forman todo el espacio.

Definición 3 (Acción transitiva)**.** Cuando tiene una única órbita. En otros términos, si para todo $x, y \in G$ existe $g \in G$ tal que

$$^{g}x = y$$

Definición 4 (Estabilizador)**.** Sea G un grupo y X un G-conjunto. Para cada $x \in X$ definimos el estabilizador de dicho elemento en G como

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G : {}^{g}x = x\}$$

Proposición 1. *El estabilizador es un subgrupo de G, llamado el grupo de isotopía de x en G.*

Observación 3. Dados $H, K \in \mathrm{Sub}(G)$ se dicen que son conjugados si existe algún $g \in G$ tal que $H = gKg^{-1}$.

Proposición 2. *Sea G un grupo y X un G-conjunto. Sean $x, y \in X$, entonces si sus órbitas coinciden, entonces sus respectivos estabilizadores son subgrupos conjugados de G.*

Demostración. Suponemos que $O(x) = O(y)$, entonces existe un $g \in G$ tal que $y = {}^{g}x$. Veamos que se cumple la tesis.

Supongamos $h \in \mathrm{Stab}_G(x)$, tenemos que ${}^{h}x = x$. Consideramos ${}^{ghg^{-1}}y = {}^{gh}x = {}^{g}x = y$, es decir, $ghg^{-1} \in \mathrm{Stab}_G(y)$.

Por el mismo razonamiento anterior usando que $x = {}^{g^{-1}}y$, vemos la otra inclusión. □

Teorema 2. *Sea G un grupo finito y X un G-conjunto. Entonces para cada $x \in X$ la órbita de x es un conjunto finito, teniéndose que el cardinal de la órbita es $|O(x)| = [G : \mathrm{Stab}_G(x)]$. En particular, el cardinal de la órbita es un divisor del orden de G.*

Demostración. $G/\mathrm{Stab}_G(x) = \{g\,\mathrm{Stab}_G(x) : g \in G\}$ definimos una aplicación a la óbita y veamos que es biyectiva:

$$\lambda(g\,\mathrm{Stab}_G(x)) := {}^{g}x$$

Tomemos $g, h \in G$ tales que $g\,\mathrm{Stab}_G(x) = h\,\mathrm{Stab}_G(x)$ podemos deducir que ${}^{g}x = {}^{h}x$, con lo que está bien definida y es inyectiva.

Por definición es sobreyectiva, y por tanto como hay una biyección entre $O(x)$ y $G/\mathrm{Stab}_G(x)$ se tiene lo que se quería demostrar.

□

Otro ejemplo: $X = \{1,2,3,4\}$ consideramos la acción $G = A_4$ tal que ${}^{\sigma}i = \sigma(i)$.

$$O(2) = \{\sigma(2) : \sigma \in A_4\} = \{1,2,3,4\} = X$$

Sabemos que $[A_4 : \mathrm{Stab}_{A_4}(2)] = |O(2)| = 4$, con lo que $|\mathrm{Stab}_{A_4}(2)| = 3$.

Tenemos que

$$\mathrm{Stab}_{A_4}(2) = \langle (1 \quad 3 \quad 4) \rangle$$

Definición 5 (Elementos fijos)**.** Sea G un grupo y X un G-conjunto. Un elemento $x \in X$ diremos que es un elemento fijo por la acción si ${}^{g}x = x$ para toda $g \in G$. El conjunto de los elementos fijo lo denotaremos por $\mathrm{Fix}(X)$.

Equivalentemente:

$$x \in \mathrm{Fix}(X) \iff O(x) = \{x\} \iff \mathrm{Stab}_G(x) = G$$

Definición 6. Sea G un grupo finito y X un G-conjunto finito. El conjunto $X/\sim$ también es finito. Supongamos que $X/\sim = \{O(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$. Sabemos que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} O(x_i)$$

unión disjunta.

Sabemos entonces que

$$\begin{aligned} |X| &= \sum_{i=1}^{r} |O(x_i)| = |\mathrm{Fix}(X)| + \sum_{x \notin \mathrm{Fix}(x)} |O(x)| \\ &= |\mathrm{Fix}(X)| + \sum_{x \notin \mathrm{Fix}(x)} [G : \mathrm{Stab}_G(x)] \end{aligned}$$

Ejemplo: Consideramos G un grupo no trivial y consideramos la acción de G sobre sí mismo por traslación. Sea $h \in G$, tenemos que

$$O(h) = \{{}^{g}h : g \in G\} = \{gh : g \in G\} = G$$

Por tanto solo hay una órbita y tenemos que la acción traslación es transitiva.

$$\mathrm{Stab}_G(h) = \{g \in G : gh = h\} = \{1\}$$

y por último

$$\mathrm{Fix}(G) = \{h \in G : gh = h\} = \emptyset$$

Otro ejemplo: Consideramos la acción sobre sí mismo por conjugación. Sea $h \in G$.

$$O(h) = \{{}^g h : g \in G\} = \{ghg^{-1} : g \in G\} = \mathrm{cl}(h)$$

que se llama la clase de conjugación del elemento h.

Tenemos que

$$\mathrm{Stab}_G(h) = \{g \in G : ghg^{-1} = h\} = \{g \in G : gh = hg\} = c_G(h) \leq G$$

que es el subgrupo centralizador de h en G.

$\mathrm{Fix}(G) = Z(G)$, es por tanto también un subgrupo.

Si G es finito, tenemos que:

$$G/\sim = \{\mathrm{cl}(h_1), \ldots, \mathrm{cl}(h_n)\}$$

Entonces:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{h \notin Z(G)} |\mathrm{cl}(h)| = |Z(G)| + \sum_{h \notin Z(G)} [G : c_G(h)]$$

que se conoce como la fórmula de las clases.

Proposición 3. *Para todo G se tiene que* $\mathrm{cl}(1) = \{1\}$. *Además, por ser una clase de equivalencia, $g \in \mathrm{cl}(g)$ para todo $g \in G$.*

Proposición 4. *Las clases de conjugación del grupo D_4 son:*

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{cl}(1) & = & \{1\} \\
\mathrm{cl}(r) & = & \{r, r^3\} \\
\mathrm{cl}(r^2) & = & \{r^2\} \\
\mathrm{cl}(s) & = & \{s, r^2 s\} \\
\mathrm{cl}(rs) & = & \{rs, r^3 s\}
\end{array}$$