# Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

**Definición 1** (Grupo resoluble)**.** Un grupo $G$ se dice resoluble si tiene una serie normal:

$$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G$$

tal que $H_i/H_{i-1}$ es abeliano para todo $i = 1, \ldots, n$.

*Observación* 1. Es claro que si $G$ es abeliano, entonces es resoluble, puesto que la serie

$$1 \trianglelefteq G$$

tiene sus factores abelianos ($G/1 = G$).

**Teorema 1.** *Sea $G$ un grupo finito. Son equivalentes los siguientes enunciados.*

1. *Los factores de composición de $G$ son cíclicos de orden un número primo.*

2. *$G$ es resoluble.*

*Demostración.* Que la primera afirmación implica la segunda es obvia por la abelianidad de $C_p$.

Veamos el recíproco. Suponemos $G$ resoluble, sea $G_i$ una serie normal de $G$ con $G_i/G_{i-1}$ abeliano. Como $G$ es finito, podemos aplicar el teorema de Jordan-Hölder. La serie puede refinarse a una serie de composición.

Sea $H_i$ dicho refinamiento. Vamos a ver que los factores $H_r/H_{r-1}$ de esta serie son todos abelianos para $r \geq 1$. Elegimos un $r$ y existirá entonces un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $H_r \leq G_i$ por ser refinamiento.

Estudiamos los siguientes casos:

Caso 1. Que $H_{r-1} = G_{i-1}$, entonces

$$H_r/H_{r-1} = H_r/G_{r-1} \leq G_i/G_{i-1}$$

que es abeliano, luego $H_r/H_{r-1}$ también lo es.

Caso 2. $H_{r-1} \neq G_{i-1}$, entonces:

$$G_{i-1} \trianglelefteq H_{r-1} \triangleleft H_r \leq G_i$$

Entonces $H_r/H_{r-1} \cong (H_r/G_{i-1})/(H_{r-1}/G_{i-1})$ y este cociente es abeliano porque $H_r/G_{i-1}$, $H_{r-1}/G_{i-1}$ son subgrupos del grupo abeliano $G_i/G_{i-1}$.

Como $H_r/H_{r-1}$ es simple y abeliano, entonces es cíclico de orden primo.

□

**Corolario 1.** $S_n$ es resoluble si y solo si $n \leq 4$.

*Demostración.* Si $n = 2, 3, 4$, tenemos que $\text{fact}(S_2) = (C_2)$, $\text{fact}(S_3) = (C_2, C_3)$ y $\text{fact}(S_4) = (C_2, C_2, C_2, C_3)$. son resolubles por el teorema anterior.

Si $n \geq 5$, entonces $\text{fact}(S_n) = \{C_2, A_n\}$. Como $A_n$ no es cíclico de orden primo, entonces no es resoluble.

□

Ejemplo: Hemos visto que $\text{fact}(D_3) = (C_2, C_3)$, $\text{fact}(D_4) = (C_2, C_2, C_2)$ y $\text{fact}(D_4) = (C_3, C_2, C_2)$, como son todos cíclicos, $D_3, D_4, D_6$ son resolubles.

**Lema 1.** *Sean $N, N', H \leq G$ con $N \trianglelefteq N'$ entonces $N \cap H \trianglelefteq N' \cap H$.*

**Lema 2.** *Sean $H, H', N \leq G$ con $H \trianglelefteq H'$ y $N \trianglelefteq G$ entonces $NH \trianglelefteq NH'$.*

**Proposición 1.** *Se cumple:*

1. *Sea $G$ un grupo resoluble y $H \leq G$, entonces $H$ también lo es.*

2. *Sea $G$ resoluble y $N \trianglelefteq G$, entonces $G/N$ es resoluble.*

3. *Sea $G$ un grupo y $N \trianglelefteq G$ tal que $N$ y $G/N$ son resolubles. Entonces también lo es $G$.*

*Demostración.* Sea $G_i$ una serie normal de $G$ con $G_i/G_{i-1}$ abeliano.

Sea $H \leq G$. Por el primer lema, obtenemos una serie normal

$$1 = G_o \cap H \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_{n-1} \cap H \trianglelefteq H$$

Sea $i \in \{1, \ldots n\}$ aplicamos el tercer teorema de isomorfía a $G_i$ y a los subgrupos $K = G_i \cap H \leq G_i$ y a los subgrupos $N = G_{i-1} \trianglelefteq G_i$. Entonces $K/(N \cap K) \cong KN/N$.

Entonces $(G_i \cap H)/(G_{i-1} \cap G_i \cap H) \cong G_{i-1}(G_i \cap H)/G_{i-1}$ y por otro lado $(G_i \cap H)/(G_{i-1} \cap G_i \cap H) = (G_i \cap H)/(G_{i-1} \cap H)$.

Puesto que $G_{i-1}(G_i \cap H)/G_{i-1} \leq G_i/G_{i-1}$, y es entonces abeliano por ser subgrupo de un grupo abeliano.

Por tanto $H$ tiene una serie normal con factores abelianos, y por tanto $H$ es resoluble.

Veamos ahora el punto 2. Consideramos $G_i$ una serie normal de $G$ con factores abelianos. Aplicamos el segundo lema, obtenemos que $G_{i-1}N \trianglelefteq G_iN$. Además, $N$ es normal en todo $G_iN$ pues $N$ es normal en $G$. Podemos tomar cociente y obtenemos $G_iN/N$, serie normal de $G/N$. Sus factores son los siguientes $(G_iN/N)/(G_{i-1}N/N) \cong G_iN/(G_{i-1}N)$, por el segundo teorema de isomorfía.

Aplicamos el tercer teorema de isomorfía: $G_i \leq G_iN$ y $G_{i-1}N \trianglelefteq G_iN$. Tenemos que

$$\begin{aligned} G_i/((G_{i-1}N) \cap G_i) &\cong (G_i(G_{i-1}N))/(G_{i-1}N) = (G_iN)/(G_{i-1}N) \\ G_i/((G_{i-1}N) \cap G_i) &\cong G_i/((G_{i-1}N) \cap G_i) \end{aligned}$$

Consecuentemente $G/N$ tiene una serie normal con factores abelianos.

Veamos el punto 3.

Sea $N_i$ $i \leq r$ una serie normal de $N$ con factores abelianos y $H_i/N$ $i \leq s$ una serie normal de $G/N$ tal que $(H_j/N)/(H_{j-1}/N) \cong H_j/H_{j-1}$ es abeliano.

Entonces es inmediato que $H_i$ es una serie normal cuyos factores son abelianos. Por tanto, $G$ es resoluble.

□

**Corolario 2.** Para todo $n \geq 3$, el grupo diédrico $D_n$ es resoluble.

*Demostración.*

$$D_n = \langle r, s | r^n = 1 = s^2, sr = r^{-1}s \rangle$$

Consideramos $N = \langle r \rangle \cong C_n$. Tenemos que es abeliano, normal en $D_n$ y $[D_n : N] = 2$.

$N$ es abeliano y resoluble y $D_n/N \cong C_2$ abeliano y por tanto resoluble. Por la proposición anterior $D_n$ es resoluble.

□

**Definición 2** (Conmutador)**.** Sea $G$ un grupo y $x, y \in G$. Definimos el conmutador de $x, y$, denotado por $[x, y]$, como el elemento:

$$[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$$

**Definición 3** (Subgrupo conmutador o primer derivado)**.** Definimos el subgrupo conmutador o primer subgrupo derivado de $G$, denotado por $[G, G]$, como el subgrupo generado por los conmutadores. Esto es

$$[G, G] = \langle [x, y] | x, y \in G \rangle$$

**Definición 4** (Abelianizado de un grupo)**.** A $G/[G,G]$ se le llama el abelianizado de $G$.

**Proposición 2.** *Sea $G$ un grupo. Entonces:*

1. $[G,G] \trianglelefteq G$.
2. $[G,G] = 1 \iff G$ *es abeliano.*
3. $G/[G,G]$ *es un grupo abeliano.*
4. *Si $N \trianglelefteq G$ entonces $G/N$ es abeliano si y solo si $[G,G] \leq N$.*

*Demostración.* Puesto que $\{[x,y] | x,y \in G\}$ genera $[G,G]$, para ver que $[G,G] \trianglelefteq G$, basta ver que $a[x,y]a^{-1} \in [G,G]$ para todo $a \in G$. Esto último ocurre porque:

$$a[x,y]a^{-1} = [axa^{-1}, aya^{-1}] \in [G,G]$$

El segundo punto es trivial.

Para el tercero tenemos que $H = [G,G]$, entonces si $xH, yH \in G/H$ tenemos que:

$$(xH)(yH) = xyH$$
$$(yH)(xH) = yxH$$

Como $(xy)^{-1}xy = [x^{-1}, y^{-1}] \in G$, tenemos que $xyH = yxH$ y por tanto que $G/H = G/[G,G]$ es abeliano.

De forma similar se prueba el último punto.

□

**Proposición 3.** *Para todo $n \geq 3$, se tiene que $[S_n, S_n] = A_n$.*

*Demostración.* Sea $A_n \trianglelefteq S_n$ y $S_n/A_n$ es abeliano y $[S_n, S_n] \leq A_n$.

Para la otra inclusión basta ver que todo 3-ciclo está en el commutador.

$$(i \quad j \quad k) = [(i \quad j), (i \quad k)] \in [S_n, S_n]$$

□

**Definición 5.** Para cada $n$ definimos el $n$-ésimo subgrupo derivado de $G$ por recurrencia como sigue:

$$G^{(0)} := G$$
$$G^{(n+1)} := [G^{(n)}, G^{(n)}]$$

*Observación* 2. Tenemos la siguiente serie:

$$\ldots \trianglelefteq G^{(n+1)} \trianglelefteq G^{(n)} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G^{(2)} \trianglelefteq G^{(1)} \trianglelefteq G^{(0)} = G$$

que en general no tiene por qué ser finita.

Sus factores $G^{(n)}/[G^{(n)}, G^{(n)}]$ son abelianos. A esta serie se le llama la serie derivada de $G$.

**Teorema 2.** *$G$ es resoluble si y solo si existe un $n$ tal que $G^{(n)} = 1$.*

*Demostración.* Un ad las implicaciones es trivial. Veamos la otra. Sea $G$ resoluble y $H_i$ una serie normal de $G$ con $H_i/H_{i-1}$ abeliano.

Veamos que para todo $i \geq 1$, $G^{(i)} \leq H_{n-i}$ por inducción en $i$.

Si $i = 1$, tenemos que $H_n/H_{n-1} = G_{/}H_{n-1}$ es abeliano, entonces $[G, G] = G^{(1)} \leq H_{n-1}$ y se tiene el resultado.

Supuesto cierto para $i$ ($G^{(i)} \leq H_{n-i}$), veamos para $i+1$. Puesto que $H_{n-i}/H_{n-i-1}$ es abeliano, tenemos que $[H_{n-i}, H_{n-i}] \leq H_{n-(i+1)}$ Como $G^i \leq H_{n-i}$ tenemos que el conmutador $G^{i+1} \leq H_{n-(i+1)}$.

Tomando $i = n$, se tiene que $G^n \leq 1$, luego $G^n = 1$.

□