Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

Corolario 1 (Teorema de estructura de grupos abelianos finitos)**.** Sea A un grupo abeliano finito con $|A| = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ la factorización en primos de su orden.

Entonces:

$$A \cong \prod_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=1}^{t_i} C_{p_i^{n_{ij}}} \right)$$

donde para cada $i = 1, \ldots, k$ tenemos que $\sum n_{iji} = r_i$ y son decrecientes.

Además esta descomposición es única salvo el orden y se llama la Descomposición Cíclica Primaria del grupo A.

A los $p_i^{n_{ij}}$ se les llama divisores elementales del grupo A.

Demostración. Tenemos que $|A| = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$.

Como el grupo es abeliano, hay un único p_i-subgrupo de Sylow, P_i. $|P_i| = p_i^{r_i}$. Sabemos además que:

$$A \cong P_1 \times \cdots \times P_k$$

Para cada $i = 1, \ldots, k$, consideramos $|P_i| = p_i^{r_i}$ es un p_i-grupo abeliano y entonces, por la proposición anterior, existen $n_{i1} \geq \ldots n_{iti} \geq 1$ tal que $\sum n_{ij} = r_i$ y

$$P_i \cong C_{p_i^{n_{i1}}} \times \cdots \times C_{p_i^{n_{it}}}$$

Combinando ambas fórmulas obtenemos la descomposición buscada.

La unicidad es consecuencia de la unicidad de la descomposición de cada P_i.

$\square$

Observación 1. Un grupo abeliano finito está totalmente determinado por sus divisores elementales.

Observación 2. Dos grupos abelianos finitos son isomorfos si y solo si tienen los mismos divisores elementales.

Este hecho nos permite dar la lista de los grupos abelianos no isomorfos entre sí, de un orden determinado.

Vamos a determinar salvo isomorfismo todos los grupos abelianos de orden 360.

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ Tenemos:

$$C_8 \times C_9 \times C_5$$

$$C_4 \times C_2 \times C_9 \times C_5$$

y así podríamos seguir. Vamos a ser más metódicos. Veamos las particiones de los exponentes.

Calculamos las particiones de 3:
3
$2, 1$
$1, 1, 1$
Las de 2: 2
$1, 1, 1$
Las de 1: 1.
Tenemos: $C_8 \times C_9 \times C_5$
$C_8 \times C_3 \times C_3 \times C_5$
$C_4 \times C_2 \times C_9 \times C_5$
$C_4 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_5$
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_9 \times C_5$
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_5$

Teorema 1 (Teorema de descomposición cíclica de un grupo abeliano finito)**.** *Sea A un grupo abeliano finito. Entonces:*

$$A \cong C_{d_1} \times \cdots \times C_{d_t}$$

donde $d_1, \ldots, d_t$ son enteros positivos tal que $|A| = d_1 \cdots d_t$ y $d_i | d_j$ para cada $j \leq i$.

Además esta descomposición es única.

A los $\{d_1, \ldots, d_t\}$ se les llama factores invariantes del grupo A.

Demostración. $|A| = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ y sabemos que:

$$A \cong \prod_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=1}^{t_i} C_{p_i^{n_{ij}}} \right)$$

con los indices sumando r_i y además ordenados descendentemente.

Sea $t = \max\{t_i\}$. Ponemos $n_{il} = 0$ para $t_i < l \leq t$, es decir, prolongamos con unos.

Consideramos la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} p_1^{n11} & \cdots & p_k^{n_{k1}} \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ p_1^{n1t} & \cdots & p_k^{n_{kt}} \end{pmatrix}$$

Consideramos

$$d_j = \prod p_i^{n_{ij}}$$

es decir, el producto de los elementos de la fila i-ésima.

Teniendo en cuenta que $n_{ij} \geq n_{ij+1}$ entonces $d_i | d_j$ y

$$C_{d_j} \cong C_{p_1^{n_{1j}}} \times \cdots \times C_{p_t^{n_{tj}}}$$

$\square$

Veamos en el ejemplo anterior: La DCP (Primaria): $C_8 \times C_9 \times C_5$

$C_8 \times C_3 \times C_3 \times C_5$

$C_4 \times C_2 \times C_9 \times C_5$

$C_4 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_5$

$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_9 \times C_5$

$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_5$

la última la transformamos en:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y tenemos $d_1 = 30$, $d_2 = 6$, $d_3 = 2$. Con lo que la descomposición queda:

$$C_{30} \times C_6 \times C_2$$