Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

Teorema 1 (Teorema de Burnside)**.** *Sea G un p-grupo finito. Entonces $|Z(G)| \geq p$.*

En particular $Z(G)$ no es trivial.

Demostración. Supongamos $|G| = p^n$.

Si G es abeliano $Z(G) = G$ y se tendría el resultado.

Si G no es abeliano, por la fórmula de las clases:

$$|Z(G)| = |G| - \sum_{h \notin Z(G)} |\mathrm{cl}(h)|$$

Si $h \notin Z(G)$, entonces $|\mathrm{cl}(h)| > 1$ y como $|\mathrm{cl}(h)| = [G : c_G(h)]$, es decir, $md\mathrm{cl}(h)|\,|G| = p^n$, entonces $|\mathrm{cl}(h)| = p^k$. Consecuentemente, p es un divisor de $\sum_{h \notin Z(G)} |\mathrm{cl}(h)|$. Como p divide a $|G|$, obtenemos que $p|\,|Z(G)|$ y por lo tanto $|Z(G)| \geq p$.

□

Corolario 1. Sea p un número primo y G un grupo con $|G| = p^2$. Entonces G es abeliano.

Demostración. Por el teorema de Burnside, $|Z(G)| \geq p$. Con lo que $|Z(G)| = p$ o $|Z(G)| = p^2$.

Supongamos que $|Z(G)| = p$ entonces existe un $a \in G$ tal que $a \notin Z(G)$. $c_G(a) \leq G$ Es claro que $Z(G) < c_G(a)$ y eso implica que su orden es p^2 pero entonces $c_G(a) = G$ $a \in Z(G)$ lo que es una contradicción. Luego $|Z(G)| = p^2 = |G|$ entonces $Z(G) = G$ y por tanto G es abeliano.

□

Corolario 2. Si G es un grupo finito, entonces G es resoluble.

Demostración. Sea $|G| = p^n$. Hacemos inducción en n. Para $n = 1$ tenemos que $G \equiv C_p$, y es resoluble.

Sea $n > 1$ y el resultado cierto para todo p-grupo de orden menor que p^n.

Si G es abeliano ya sabiamos que es resoluble y lo tendríamos.

Supongamos G no abeliano.

$$1 \lhd Z(G) \lhd G$$

Entonces $|Z(G)| = p^k$. Por hipótesis de inducción, $Z(G)$ es resoluble.

Por otro lado $|G/Z(G)| = p^{n-k}$ con $1 \leq n-k < n$ y entonces por hipótesis de inducción, $G/Z(G)$ es resoluble.

□

Definición 1. Sea G un grupo finito y p un número primo.

Un subgrupo H de G que sea p-grupo, lo llamaremos un p-subgrupo de G.

Teorema 2 (Primer teorema de Sylow)**.** *Sea G un grupo finito con $|G| = n$. Sea p un número primo divisor de n. Entonces, para cada potencia p^i que divida a n, existe $H \leq G$ tal que $|H| = p^i$.*

Demostración. Para $i = 1$, el resultado se sigue del Teorema de Cauchy.

Sea $i > 1$ y supongamos cierto para los anteriores.

Veamoslo para i. $|G| = n$ y $p^i|n$, hacemos inducción sobre n.

Para $n = 1$, tenemos $p^i|n$ el primer caso es $|G| = p^i$ y entonces basta tomar $H = G$. Supongamos que $n > p^i$ y el resultado cierto para todo grupo de orden menor a n y divisible por p^i.

Caso 1:

Existe un $K < G$ tal que p no divide a $[G : K]$, como $|G| = [G : K]\,|K|$ y como $p^i|n$ tenemos que $p^i|\,|K|$ y por hipótesis de inducción, existe un subgrupo $H \leq K$ tal que $|H| = p^i$. Claramente $H \leq G$ y se tiene el resultado.

Caso 2:

Para todo $K \leq G$, $p|[G : K]$. Por la fórmula de las clases,

$$|Z(G)| = |G| - \sum_{h \notin Z(G)} [G : c_G(h)]$$

entonces $p|\,|G|$ y $p|\sum[G : c_G(h)]$ y entonces $p|Z(G)$. Aplicamos el teorema de Cauchy a $Z(G)$ y entonces existe $N \leq Z(G)$ tal que $|N| = p$. Como $N \leq Z(G)$ entonces $N \trianglelefteq G$.

Consideramos el cociente G/N. Como $|N| = p$ y $p^i|\,|G|$ entonces $p^{i-1}|\,|G/N|$.

Por la hipótesis de inducción, existe $L \leq G/N$ tal que $|L| = p^{i-1}$ y por tanto existe un $N \trianglelefteq H \leq G$ tal que $L = H/N$.

Como $|H/N| = p^{i-1}$, $|H| = |H/N|\,|N| = p^{i-1}p = p^i$.

□

Definición 2 (p-subgrupos de Sylow)**.** Sea p^k la máxima potencia de p que divide a $|G|$, es decir, $|G| = p^k m$, con p y m primos relativos.

Los p-subgrupos de G de orden p^k se llaman p-subgrupos de Sylow de G.

Corolario 3. Todo grupo G tiene p-subgrupos de Sylow, para cada p divisor de $|G|$.