Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

Teorema 1 (Segundo teorema de isomorfía o del doble cociente)**.** *Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G. Sea $H \in \mathrm{Sub}(G)$ tal que $N \leq H$. Entonces:*

$$H/N \trianglelefteq G/N \iff H \trianglelefteq G$$

Además en tal caso

$$G/H \cong (G/N)(H/N)$$

Demostración. Vamos a empezar por la implicación hacia la izquierda. Sea $N \trianglelefteq G$ y $H \leq G$ con $N \trianglelefteq G$ y tenmos que ver que $H/N \trianglelefteq G/N$. Sea $aN \in H/N$ y $xN \in G/N$.

$$(xN)(aN)(xN)^{-1} = (xax^{-1})N$$

y $xax^{-1} \in H$. Es decir, $(xN)H/N(xN)^{-1} \leq H/N$ y por tanto $H/N \trianglelefteq G/N$.

Veamos el recírpoco. Suponemos $H/N \trianglelefteq G/N$ y consideramos:

$$G \to^p G/N \to^q (G/N)/(H/N)$$

y consideramos el homomorfismo $f = q \circ p$ que $f(a) = (aN)H/N$. f es un epimorfismo por ser composición de epimorfismos.

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{a \in G : f(a) = H/N\} \\ &= \{a \in G : (aN)H/N = H/N\} \\ &= \{a \in G : aN \in H/N\} \end{aligned}$$

Veamos que $H = \ker(f)$ por doble inclusión. Es claro que $H \leq \ker(f)$. Sea $a \in \ker(f)$ entonces $aN \in H/N$ implica que existe un $b \in H$ tal que $aN = bN$. Esto solo ocurre si $b^{-1}a \in N \leq H$ y $b \in H$. Por tanto $a = b(b^{-1}a) \in H$ con lo que $\ker(f) \leq H$.

Consecuentemente, $H = \ker(f)$ lo que implica $H \trianglelefteq G$. Aplicando el primer teorema de isomorfía a f:

$$G/H = G/\ker(f) \cong \mathrm{Im}(f) = (G/N)/(H/N)$$

pues f es epimorfismo.

$\square$

Teorema 2 (Tercer teorema de isomorfía). *Sea G un grupo y $N, K \in \mathrm{Sub}(G)$ con $N \trianglelefteq G$. Entonces:*

1. *KN es un subgrupo de G y $N \trianglelefteq KN$.*

2. *$K \cap N \trianglelefteq K$.*

3. *Existe un isomorfismo $K/(K \cap N) \cong KN/N$.*

Demostración. Recordemos que si $KN = NK$, entonces $KN \leq N$. Pero esta igualdad es inmediata puesto que $N \trianglelefteq G$.

Por tanto, $KN \in \mathrm{Sub}(G)$. Es claro que $N \leq KN$. Como $N \trianglelefteq G$, entonces $N \trianglelefteq KN$.

Veamos los siguientes apartados. Consideremos los homomorfismos

$$K \to^{\iota} G \to^{p} G/N$$

Y sea $g = p \circ i$. $g(a) = aN$ para todo $a \in K$.

$$\ker(g) \quad = \quad \{a \in K : a \in N\} = K \cap N$$

y entonces $K \cap N \trianglelefteq K$ y tenemos el segundo punto.

Aplicando el primer teorema de isomorfía,

$$K/(K \cap N) \cong \mathrm{Im}(g)$$

$$\mathrm{Im}(g) = \{g(a) : a \in K\} = \{aN : a \in K\} =?KN/N$$

Puesto que $K \leq KN$, es claro que $\mathrm{Im}(g) \leq KN/N$. Recíprocamente, sea $xN \in KN/N$ es decir $x \in KN$.

Si $x \in KN$, existe un $a \in K$ y un $b \in N$ tal que $x = ab$. Entonces $xN = (ab)N = (aN)(bN) = (aN)N = aN \in \mathrm{Im}(g)$.

$KN/N \leq \mathrm{Im}(g)$.

$$K/(K \cap N) \cong KN/N$$

□

Proposición 1. *Sea N un subgrupo normal de G tal que N y G/N son abelianos. Sea H un subgrupo cualquiera de G. Demostrar que existe un subgrupo normal $K \trianglelefteq H$ tal que K y H/K son abelianos.*

Demostración. Sea G y $N, H \in \mathrm{Sub}(G)$ y $N \trianglelefteq G$. $N \cap H \trianglelefteq H$ y $NH/N \cong H/(N \cap H)$.

Tomamos $K = N \cap H \trianglelefteq H$. Como $K \leq N$ y N es abeliano, K es abeliano.

Por otro lado $H/K = H(N \cap K) \cong HN/N \leq G/N$. Como G/N es abeliano, entonces HN/N es abeliano. H/K es abeliano.

□

Proposición 2. *Sea G un grupo finito, y sean H, K subgrupos de G, con K normal y tales que $|H|$ y $[G : K]$ son primos relativos. Demostrar que H está contenido en K.*

Demostración. Sea G un grupo finito, $K, N \in \mathrm{Sub}(G)$ con $N \trianglelefteq G$. Suponemos que $|K|$ y $[G : N]$ son primos relativos.

Demostramos que $K \leq N$.

Sabemos que

$$K/(K \cap N) \cong KN/N$$

por el tercer teorema de isomorfía. Entonces

$$[K : K \cap N] = [KN : N] = r$$

Como $KN/N \leq G/N$, entonces

$$r = |KN/N| \mid |G/N| = [G : N]$$

Por otro lado,

$$r = [K : K \cap N] = \frac{|K|}{|K \cap N|}$$

y en particular, $|K| = r\,|K \cap N|$. Entonces $r \mid |K|$. Como $\gcd(|K|, [G : N]) = 1$ entonces $r = 1$. Tenemos entonces

$$|K/(K \cap N)| = 1 \implies K = K \cap N$$

lo que prueba lo que se quería probar. □