Apuntes de clase

José Antonio de la Rosa Cubero

Proposición 1. *$S_3, C_{p^n}, \mathbb{Z}$, con p primo, no son producto directo internos de subgrupos propios.*

Demostración. En el primer caso, tenemos que aunque A_3 es normal, el resto de subgrupos de S_3 no son normales: ni $\langle(1 \quad 2)\rangle$, ni $\langle(1 \quad 3)\rangle$ ni $\langle(2 \quad 3)\rangle$.

Tenemos que en el segundo caso, cualquier pareja de subgrupos estará incluido uno en otro, y como en ese caso $H \leq K$ tenemos que $HK = K$.

Si $H \leq \mathbb{Z}$, subgrupo propio, entonces existe un número natural mayor que 1 tal que $H = n\mathbb{Z}$. En efecto, sea:

$$n = \text{mín}\{x > 0 : x \in H\} \neq 0$$

Como $H \leq \mathbb{Z}$, $n > 1$, pues si $n = 1$ entonces $H = \mathbb{Z}$, veamos que $H = n\mathbb{Z}$. Puesto que $n \in H$ entonces $n\mathbb{Z} \leq H$. Recíprocamente, sea $x \in H$, dividimos x entre n: $x = nq + r$. Tenemos que $r = x - nq \in H$, tenemos que $r = 0$ ya que $0 \leq r < n$. Con lo que $x = nq \in n\mathbb{Z}$.

Sean $n\mathbb{Z}$, $m\mathbb{Z}$ dos subgrupos. Entonces:

1. $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \gcd(n, m)\mathbb{Z}$

2. $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \text{mcm}(n, m)\mathbb{Z}$

□

Observación 1. Demostrar que no todo subgrupo de un producto directo $H \times K$ es de la forma $H1 \times K1$, con $H1$ subgrupo de H y $K1$ subgrupo de K.

Demostración. Tomamos $H = K = \mu_2$, con lo que $H \times K = G$, donde G es el grupo de Klein.

Sea $L = \{(1, 1), (-1, -1)\} \subset G$, que no puede ser de la forma $H_1 \times K_1$.

□