Teoremas y resultados de Cálculo I

Alejandro Villanueva Prados

Funciones

Índice.

Sobre funciones

Teorema de los ceros de Bolzano

Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto del intervalo

Demostración

1. Objetivo: probar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces f se anula en algún punto del intervalo $]a, b[$. Buscamos $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.
2. A la izquierda de c la función es negativa, y a la derecha positiva. Se define:

$$E = \{x \in [a.b] : f(t) < 0, \forall t \in [a, x]\}$$

   - Nota: $E \subset [a, b]$ y $a \in E$
3. Usando el principio del supremo, llamamos $c = sup(E)$, y $a \leq c \leq b$. Vamos a probar que la desigualdad es estricta.
4. Para ello, usamos la propiedad local de conservación del signo (porque f es continua): se tiene que para $\delta > 0$, $f(a + \delta) < 0$ y $f(b - \delta) > 0$. Ahora suponemos que $a = c$, si eso fuese cierto, $a + \delta > c$ y $a + \delta \in E$, lo cual es imposible porque $c = sup(E)$ y por tanto se prueba que $a < c$. Análogamente $c < b$, por lo tanto nos queda: $a < c < b$
5. Ahora vamos a probar que $f(t) < 0, \forall t \in [a, c[$, equivalente a $[a, c[\subset E$. Esto se hace usando que c es supremo de E, tomamos un $x : a < x_0 < c$ dado que c es supremo de E, entonces existe un $z_0 \in E$ tal que $x_0 < z_0 \leq c$. Así que cualquier elemento de $[a, x_0]$ pertenence también a $[a, z_0]$, y como $z_0 \in E$, probamos que $f(t) < 0, \forall t \in [a, c[$.
   - Aclaración: como los números que escogemos (x_0 y z_0) son arbitrarios, eso significa que el intervalo $[a, c[\subset E$.
6. Paso final: $f(c) = 0$. A la izquierda de c, la función toma valores negativos, así que por la continuidad de f y la conservación local del signo, no puede ser $f(c) > 0$, con lo cual $f(c) \leq 0$, pero como a la derecha es positiva, no puede ser $f(c) < 0$, así que $f(c) \geq 0$ y **también** $f(c) \leq 0$. Por tanto, $f(c) = 0$, con $c \in]a, b[$

□

Consecuencias

1. Existencia de raíces: *Dados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ hay un único número $c > 0$ tal que $c^k = a$, en otras palabras, $\log_c a = k$ es único.*
   - Demostración: La función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^k - a$ es continua y con distinto signo entre 0 y $1 + a$, con lo cual $\exists c > 0 : f(c) = 0$. Este número es único porque f es estrictamente creciente. (sea $\varepsilon > 0$, $f(x) < f(x + \varepsilon)$).
2. Ceros de polinomio de grado impar: *Toda función polinómica de grado impar se anula en algún punto*

Demostración: *WIP*

Teorema del valor intermedio consecuencia de Bolzano

La imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo.

Demostración

1. Objetivo: Probar que dado $I \neq \emptyset, I \subset \mathbb{R}$, entonces $f(I) = J$ siendo J un intervalo.
2. Sea un intervalo I y $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Probar el teorema equivale a probar que dados dos puntos cualesquiera de $J = f(I)$, todos los puntos entre ellos también pertenecen a J (Definición de intervalo). Sean pues, $u, v : u < v$ elementos de J.
3. Al ser u y v imágenes de puntos de I, deben existir $\alpha \in I : f(\alpha) = u$ y $\beta \in I : f(\beta) = v$, no puede ser $\alpha = \beta$ por ser f función. Suponngamos que $\alpha < \beta$
4. Tomamos un z tal que $u < z < v$ y definimos $h : I \to \mathbb{R}$, $h(x) = z - f(x)$ para todo $x \in I$. h es continua (composición de funciones continuas) en I.
5. Ahora realizamos $h(\alpha) = z - f(\alpha) = z - u > 0$ (recordemos $z > u$). Del mismo modo $h(\beta) < 0$. Así que por el Teorema de los ceros de Bolzano, existe λ tal que $\alpha < \lambda < \beta$ y $h(\lambda) = z - f(\lambda) = 0 \implies f(\lambda) = 0$
6. Dado que $\lambda \in]\alpha, beta[\subset I$, debe ocurrir que $f(\lambda) = z \in J$ como esto ocurre para cualquier $u < z < v$, deducimos que $]u, v[\subset J$ y que J es un intervalo.

$\square$

Además, se da el recíproco: si suponemos que la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo, y la función toma valores positivos y negativos, entonces la función debe anularse en algún punto del intervalo.

Sobre sucesiones

Teorema de Complitud de $\mathbb{R}$. Límites superior e inferior.

- **Definición**: Condición de Cauchy. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, si para cada númmero positivo $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geq m_\varepsilon$ y $q \geq m_\varepsilon$ se verifica que $|x_p - x_q| < \varepsilon$

Teorema de Complitud de $\mathbb{R}$

Una sucesión de números reales converge si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.

Demostración

1. Partimos de $\{x_n\}$ cumple la condición de Cauchy. Vamos a probar que está acotada.
2. La condición de Cauchy implica que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_p - x_{m_0}| < 1$ para todo $p \geq m_0$. Manipulando la desigualdad se obtiene $|x_p| \leq |x_p - x_{m_0}| + |x_{m_0}| \implies |x_p| < 1 + |x_{m_0}|$
3. Definimos $M = máx\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{m_0}|, 1 + |x_{m_0}|\}$. Así que obtenemos que $x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto, concluimos que $\{x_n\}$ está acotada.
4. Ahora, aplicamos el teorema de Bolzano-Weierstrass, que nos garantiza que existe una sucesión parcial que converge a $x \in \mathbb{R}$, a la que notamos como $\{x_{\sigma(n)}\} \to x \in \mathbb{R}$.Hemos de probar que $\{x_n\}$ también converge a x.
5. Sea $\varepsilon > 0$, existe un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $p, q \geq n_0$ (Esto se obtiene aplicando la hipótesis de que $\{x_n\}$ es de Cauchy).También se tiene que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{\sigma(n)} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ (Porque la sucesión parcial es convergente a x). Si tomamos $m = máx\{n_0, n_1\}$, entonces para todo $n \geq m$ se tiene que $\sigma(n) \geq n \geq m$ por lo cual se verifican ambas igualdades. Las sumamos:

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$