Teoremas y resultados de Cálculo I

Alejandro Villanueva Prados

Funciones

Teorema de los ceros de Bolzano.

Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto del intervalo

Demostración

1. Objetivo: probar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces f se anula en algún punto del intervalo $]a, b[$. Buscamos $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.
2. A la izquierda de c la función es negativa, y a la derecha positiva. Se define:

$$E = \{x \in [a.b] : f(t) < 0, \forall t \in [a, x]\}$$

   - Nota: $E \subset [a, b]$ y $a \in E$
3. Usando el principio del supremo, llamamos $c = sup(E)$, y $a \leq c \leq b$. Vamos a probar que la desigualdad es estricta.
4. Para ello, usamos la propiedad local de conservación del signo (porque f es continua): se tiene que para $\delta > 0$, $f(a + \delta) < 0$ y $f(b - \delta) > 0$. Ahora suponemos que $a = c$, si eso fuese cierto, $a + \delta > c$ y $a + \delta \in E$, lo cual es imposible porque $c = sup(E)$ y por tanto se prueba que $a < c$. Análogamente $c < b$, por lo tanto nos queda: $a < c < b$
5. Ahora vamos a probar que $f(t) < 0, \forall t \in [a, c[$, equivalente a $[a, c[\subset E$. Esto se hace usando que c es supremo de E, tomamos un $x : a < x_0 < c$ dado que c es supremo de E, entonces existe un $z_0 \in E$ tal que $x_0 < z_0 \leq c$. Así que cualquier elemento de $[a, x_0]$ pertenence también a $[a, z_0]$, y como $z_0 \in E$, probamos que $f(t) < 0, \forall t \in [a, c[$.
   - Aclaración: como los números que escogemos (x_0 y z_0) son arbitrarios, eso significa que el intervalo $[a, c[\subset E$.
6. Paso final: $f(c) = 0$. A la izquierda de c, la función toma valores negativos, así que por la continuidad de f y la conservación local del signo, no puede ser $f(c) > 0$, con lo cual $f(c) \leq 0$, pero como a la derecha es positiva, no puede ser $f(c) < 0$, así que $f(c) \geq 0$ y **también** $f(c) \leq 0$. Por tanto, $f(c) = 0$, con $c \in]a, b[$

Consecuencias

1. Existencia de raíces: *Dados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ hay un único número $c > 0$ tal que $c^k = a$, en otras palabras, $\log_c a = k$ es único.*
   - Demostración: La función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^k - a$ es continua y con distinto signo entre 0 y $1 + a$, con lo cual $\exists c > 0 : f(c) = 0$. Este número es único porque f es estrictamente creciente. (sea $\varepsilon > 0$, $f(n) < f(n + \varepsilon)$)