Variedades diferenciables

LibreIM

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Variedades diferenciables

LibreIM

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Índice

Parte I.
Teoría

1. Introducción

En esta sección, definimos el concepto de *variedad diferenciable*. Para ello, comenzamos definiendo el de *superficie diferenciable* que ha podido verse en otras asignaturas, para después generalizarlo.

> **Definición 1.1 (Superficie diferenciable).** Una *superficie de* $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que, para cada $p \in S$, existen $U \subseteq \mathbb{R}^2, V \subset \mathbb{R}^3$ abiertos, con $p \in V$, y existe $X : U \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, de manera que:
>
> *(i)* $X(U) = V \cap S$,
> *(ii)* $X : U \to V \cap S$ es un homeomorfismo, y
> *(iii)* para cada $q \in U$, $\mathrm{d}X_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

Nota. Si eliminamos el requisito de que X sea diferenciable, la definición es la de *superficie topológica*.

Cuando trabajamos con la diferencial $\mathrm{d}f$ de una aplicación diferenciable $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, solemos representarla matricialmente respecto de las bases canónicas de los espacios euclídeos, y escribimos:

$$\mathrm{d}f_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij}(p).$$

Esta definición depende de la elección de las bases canónicas. Por ello, no se puede generalizar directamente al caso en que intervengan espacios que no posean una.

Para subsanar este defecto, damos la siguiente definición.

> **Definición 1.2.** Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to O \subseteq \mathbb{R}^n$ diferenciable, con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Entonces, la diferencial de f evaluada en v es
>
> $$\mathrm{d}f_p(v) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t).$$

De la aplicación de la regla de la cadena resulta que la diferencial no depende de la elección de α, y que esta definición es equivalente a la representación matricial.

Ahora, generalizamos la definición de superficie diferenciable para definir una subvariedad de dimensión arbitraria n, todavía dentro de un espacio euclídeo.

> **Definición 1.3.** Una subvariedad n-dimensional de $\mathbb{R}^N$ $(n < N)$ es un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^N$ tal que, para cada $p \in M$, existen $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^N$ abiertos, con $p \in V$, y existe $X : U \to \mathbb{R}^N$ diferenciable, de manera que:
>
> *(i)* $X(U) = V \cap M$,
> *(ii)* $X : U \to V \cap M$ es un homeomorfismo, y
> *(iii)* para cada $q \in U$, $\mathrm{d}X_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ es inyectiva.

Veamos algunos ejemplos de subvariedades de dimensión superior.

Ejemplo 1.1. Grafos. Sea $F : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{N-n}$ $(n < N)$ diferenciable. Entonces, el grafo de F viene dado por

$$\mathrm{Gr}(F) := \{(x, F(x)) : x \in O\} \subseteq \mathbb{R}^N.$$

$\mathrm{Gr}(F)$ es una subvariedad n-dimensional de $\mathbb{R}^N$: tomando en la definición $U = O, V = \mathbb{R}^N$ para cada $p \in \mathrm{Gr}(F)$, y $X : U \to \mathbb{R}^N$ dada por $X(x) = (x, F(x))$.

La primera condición se cumple claramente: $X(U) = \mathrm{Gr}(F)$. Para la segunda, basta observar que la proyección de las n primeras componentes restringida $\mathrm{Gr}(F)$ es la inversa de X. Para la tercera, la diferencial de X viene dada por

$$\mathrm{d}X_q = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n\times(N-n)} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{\partial F_i}{\partial x_j}} \end{array} \right),$$

lo que define un monomorfismo.

En este ejemplo, obtenemos que $\mathrm{Gr}(F)$ es homeomorfa a un abierto. Por tanto, una subvariedad compacta jamás aparecerá como un grafo.

El concepto de *valor regular*, y el siguiente teorema, cuya demostración diferimos, nos permiten dar algunos ejemplos de subvariedades de espacios euclídeos.

> **Definición 1.4 (Valor regular).** Sea $f : O \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, con $m \leq N$. Dado $a \in \mathbb{R}^m$, diremos que es un *valor regular de f* si, para cada $p \in f^{-1}(a)$, $\mathrm{d}f_p$ es sobreyectiva.

> **Teorema 1.1.** *Sean $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-n}$, $a \in \mathbb{R}^N$ un valor regular de f. Si $f^{-1}(a) \neq \emptyset$, entonces $M = f^{-1}(a)$ es una subvariedad n-dimensional de $\mathbb{R}^N$.*

Vamos a construir algunas subvariedades como preimágenes de valores regulares, y probaremos que lo son apoyándonos en este teorema.

Ejemplo 1.2. Esfera de centro p, radio $r > 0$. La esfera n-dimensional de centro p y radio $r > 0$,

$$\mathbb{S}^n(r, p) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x - p\|_2^2 = r^2 \right\},$$

es una subvariedad de codimensión 1.

Definimos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x-p\|^2 = \langle x-p, x-p\rangle. \end{aligned}$$

Tomamos $x \in \mathbb{S}^n(r,p)$, $v \in \mathbb{R}^n$, y $\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$, con $\alpha(0)=x$, $\alpha'(0)=v$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_x(v) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \langle \alpha(t)-p, \alpha(t)-p\rangle \\ &= 2\langle \alpha'(0), \alpha(0)-p\rangle \\ &= 2\langle v, x-p\rangle, \end{aligned}$$

sobreyectiva.

Ejemplo 1.3. Toros n-dimensionales. El toro n-dimensional,

$$\mathbb{T}^n = \left\{ (x_1,y_1,\dots,x_n,y_n) \in \mathbb{R}^{2n} : \begin{array}{ccc} x_1^2+y_1^2 & = & r_1^2 \\ & \vdots & \\ x_n^2+y_n^2 & = & r_n^2 \end{array} \right\} = \prod_{i=1}^n \mathbb{S}^1(r_i),$$

es también una subvariedad n-dimensional, de $\mathbb{R}^{2n}$ en este caso.

Definimos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{2n} &\to \mathbb{R}^n \\ (x_1,y_1,\dots,x_n,y_n) &\mapsto (x_1^2+y_1^2,\dots,x_n^2+y_n^2), \end{aligned}$$

y así $\mathbb{T}^n = f^{-1}(r_1^2,\dots,r_n^2) \neq \emptyset$.

Ahora, tomamos $x \in f^{-1}(r_1^2,\dots,r_n^2)$, y consideramos $\mathrm{d}f_x : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$. Tomamos $v = (w_1,z_1,\dots,w_n,z_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\alpha(t) = (\beta_1(t),\gamma_1(t),\dots,\beta_n(t),\gamma_n(t))$ con $\alpha(0)=x, \alpha'(0)=v$. Tenemos

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f\circ\alpha)(t) = & \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\beta_1^2(t)+\gamma_1^2(t),\dots,\beta_n^2(t)+\gamma_n^2(t)) \\ &= 2(x_1w_1+y_1z_1,\dots,x_nw_n+y_nz_n), \end{aligned}$$

trivialmente inyectiva.

Nota. A la hora de calcular la diferencial en ejercicios, una buena práctica es comprobar que sea, efectivamente, lineal.

Demostración del teorema 1.1. Sea $x_0 \in f^{-1}(a)$. Suponemos $\mathrm{d}f_{x_0} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-n}$ sobreyectiva. Viene representada por

$$\mathrm{d}f_{x_0} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \;\middle|\; \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_{\substack{i=1,\dots,N-n \\ j=1,\dots,n \\ k=n+1,\dots,N}} (x_0)$$

El teorema de Rouché-Frobenius nos asegura que $\mathrm{d}f_{x_0}$ posee un menor de orden $(N-n)\times(N-n)$ con determinante no nulo. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que este es

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_{\substack{i=1,\dots,N-n\\ k=n+1,\dots,N}}(x_0).$$

Ahora, definimos

$$\begin{aligned} G : O \subseteq \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R}^N \\ x &\mapsto (x_1,\dots,x_n,f_1(x),\dots,f_{N-n}(x)), \end{aligned}$$

y la diferencial de G viene dada por

$$\mathrm{d}G = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n\times N-n} \\ \hline \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \end{array}\right),$$

luego $\det(\mathrm{d}G(x_0)) = \det(I_n)\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right) \neq 0$. Aplicamos el teorema de la función inversa a G, y obtenemos $V \subseteq O$ abierto, con $x_0 \in V$, de manera que $G : V \to W := G(V)$ es un difeomorfismo.

Ahora,

$$G(f^{-1}(a)) = \left\{(x_1,\dots,x_n,a) : x \in f^{-1}(a)\right\},$$

luego

$$G : V \cap f^{-1}(a) \to \hat{W} = W \cap G(f^{-1}(a)) = \{x \in W : (x_{n+1},\dots,x_N) = a\}.$$

$V\cap f^{-1}(a)$ es abierto en $f^{-1}(a)$, luego $\hat{W} = G(V\cap f^{-1}(a))$ es abierto en $G(f^{-1}(a)) = \left\{(x,a) : x \in f^{-1}(a)\right\} = f^{-1}(a)\times\{a\}$.

Definiendo $\pi : G(f^{-1}(a)) \to \mathbb{R}^n$ como la proyección sobre las n primeras coordenadas, observamos que π es una aplicación abierta, al ser una proyección de un espacio topológico producto a una de sus componentes. Por tanto, $U := \pi(\hat{W})$ es abierto, y

$$\begin{aligned} X : U \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^N \\ x &\mapsto G(x,a) \end{aligned}$$

es la parametrización buscada. En efecto,

$$\mathrm{d}X_q = \underbrace{\mathrm{d}G_{\_}}_{\text{isomorfismo}} \circ \underbrace{\mathrm{d}(x \mapsto (x,a))}_{\text{inyectiva}}.$$

□

Continuamos con algunos ejemplos más de subvariedades de espacios euclídeos que se obtienen mediante este teorema. Los siguientes ejemplos aparecerán como grupos de Lie de matrices. Para abordarlos, introducimos la notación

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) := \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

para el espacio vectorial de matrices de orden n.

Ejemplo 1.4. Grupo ortogonal. Vamos a ver que

$$O(n) := \left\{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : AA^T = I\right\}$$

es una subvariedad de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Las matrices simétricas

$$\mathrm{Sim}(n,\mathbb{R}) := \left\{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : A = A^T\right\}$$

son un subespacio de dimensión $\frac{n^2+n}{2}$ de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Definimos

$$\begin{aligned} f : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) &\to \mathrm{Sim}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto AA^T \end{aligned}$$

y veamos que I es un valor regular de f:

$$\mathrm{d}f_A(B) = AB^T + BA^T,$$

sobreyectiva, tomando $B = \frac{CA}{2}$ para obtener $\mathrm{d}f_A(B) = C$. Por tanto, $O(n)$ es una subvariedad de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.5. Grupo especial lineal. El grupo especial lineal

$$\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

es una hipersuperficie (subvariedad de codimensión 1) de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Para probarlo, vamos a ver que 1 es un valor regular del determinante.

Sea $A \in \det^{-1}(1)$, y consideramos la curva $A(t) = (1+t)A$ –la curva *que pasa a velocidad A por A en el cero*–, para obtener

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\det)_A(A) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \det((1+t)A) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (1+t)^n \det(A) \\ &= n\det(A) \neq 0. \end{aligned}$$

2. Definición de variedad diferenciable

En esta sección, vamos a construir la definición de variedad diferenciable a partir de aproximaciones a ella. Veremos los problemas que presenta cada aproximación, hasta dar con la definición correcta.

El principal objetivo de esta definición será liberarnos del espacio euclídeo ambiente, para poder estudiar variedades definidas en espacios más generales.

2.1. Primera aproximación

Empezamos con el concepto de variedad topológica, y ya podemos hablar de diferenciabilidad de aplicaciones que nacen en una subvariedad de $\mathbb{R}^N$.

Definición 2.1 (Variedad topológica). Sea M^n un espacio topológico Haussdorf, tal que para cada $p \in M$, existen $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq M$ abiertos, y $X : U \to V$ tales que

(i) $X : U \to V$ es un homeomorfismo.

Esta definición presenta cierta estructura diferenciable, es decir, podemos hablar de funciones diferenciables.

Definición 2.2. Sea $f : M^n \to \mathbb{R}$, con M^n una subvariedad n-dimensional de $\mathbb{R}^N$. Diremos que f es diferenciable si, para cada $p \in M^n$, existe una parametrización $X : U \to M^n$ tal que $f \circ X : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

Se puede probar que, con esta definición, la diferenciabilidad no depende de la parametrización escogida.

Esta definición dota a las variedades de estructura topológica, pero no diferenciable, en el sentido de que no se exige diferenciabilidad a las parametrizaciones.

Además, solo tenemos garantía de que la diferenciabilidad es invariante ante cambios de parametrizaciones para subvariedades de $\mathbb{R}^N$, como ilustra el siguiente ejemplo. Esto nos impide extender la definición anterior a variedades topológicas arbitrarias.

Ejemplo 2.1. Tomamos la variedad topológica $\mathbb{R}$ con la parametrización

$$X(t) = \begin{cases} t & t < 0, \\ 2t & t \geq 0. \end{cases}$$

La aplicación X^{-1} es diferenciable, en el sentido de la definición anterior, con la parametrización X, pero no con la identidad.

2.2. Segunda aproximación

Para intentar capturar la invarianza de la diferenciabilidad por cambios de parametrizaciones, podemos añadir la siguiente propiedad a la definición anterior:

(ii) para cada par de parametrizaciones $X : U \to M, \tilde{X} : \tilde{U} \to M$, con $X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U}) = W \neq \emptyset$, la aplicación $\tilde{X}^{-1} \circ X : X^{-1}(W) \to \tilde{X}^{-1}(W)$ es de clase $\mathscr{C}^\infty$,

y considerar cada variedad con un conjunto de parametrizaciones fijo.

Sin embargo, esto tampoco es suficiente.

Ejemplo 2.2. Consideramos de nuevo la variedad $\mathbb{R}$, con las parametrizaciones $X = \mathrm{id}$ y $\hat{X}(t) = t^3$. Estas dos parametrizaciones verifican la propiedad añadida –cada una por separado–, y sin embargo, $f(t) = t^{1/3}$ sería diferenciable con $\hat{X}$ y no con X.

2.3. Definición

Pasamos ya a presentar la definición correcta de variedad diferenciable.

Definición 2.3 (Estructura diferenciable). Sea M un espacio topológico Haussdorf. Una *estructura diferenciable n-dimensional sobre M* es una familia $\mathscr{D} = \{(V_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ que verifica

(i) $\{V_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de M,
(ii) para cada $i \in I$, $\phi_i : V_i \to \phi_i(V_i)$, $\phi_i(V_i)$ es abierto, y ϕ_i es un homeomorfismo,
(iii) Si $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, entonces $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(V_i \cap V_j) \to \phi_j(V_i \cap V_j)$ es un difeomorfismo, y
(iv) $\mathscr{D}$ es maximal entre las familias que verifican las propiedades anteriores.

Definición 2.4 (Variedad diferenciable). Una *variedad diferenciable n-dimensional* es un par $(M, \mathscr{D})$.

Notación. En ocasiones, usaremos la notación M^n para una variedad diferenciable n-dimensional M, para indicar su dimensión.

Llamamos a cada par (V, ϕ) de una estructura diferenciable *carta* o *entorno coordenado*.

Definición 2.5 (Atlas). Llamamos *atlas* a una estructura que verifique las tres primeras propiedades de la definición de estructura diferenciable.

Algunas propiedades de las cartas de una estructura diferenciable:

Proposición 2.1. *Sea $(V, \phi) \in \mathscr{D}$. Se verifican*

(i) *si $W \subseteq V$ abierto, entonces $(W, \phi\big|_W) \in \mathscr{D}$,*
(ii) *si $\psi : \phi(V) \subseteq \mathbb{R}^n \to O \subseteq \mathbb{R}^N$ es un difeomorfismo, entonces $(V, \psi \circ \phi) \in \mathscr{D}$.*

Y algunas propiedades de los atlas:

Proposición 2.2. *Sea $\mathscr{A}$ un atlas n-dimensional en M. Se verifican*

(i) *existe una única estructura diferenciable $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ con $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{A})$,*
(ii) *si $\mathscr{A}'$ es otro atlas n-dimensional con $\psi \circ \phi^{-1}$ para cada par $\psi \in \mathscr{A}'$, $\phi \in \mathscr{A}$, entonces $\mathscr{D}(\mathscr{A}) = \mathscr{D}(\mathscr{A}')$.*

2.4. Ejemplos de variedades diferenciables

Ejemplo 2.3. $\mathbb{R}^n$. $\mathscr{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$ es un atlas de esta variedad. La estructura diferenciable asociada contiene todos los difeomorfismos entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.4. Abierto de una variedad. Sea $O \subseteq M^n$ abierto. Entonces, la restricción de la estructura diferenciable

$$\mathscr{D}\big|_O = \left\{(V \cap O, \phi\big|_{V\cap O})\right\}$$

es una estructura diferenciable en O. El hecho de que O sea abierto es necesario para garantizar la tercera condición en la definición de estructura diferenciable.

Ejemplo 2.5. Subvariedades. Cualquier subvariedad de $\mathbb{R}^N$ es una variedad diferenciable, considerando en ella el atlas

$$\mathscr{A} = \left\{(V \cap M, X^{-1}\big|_{V\cap M}) \,|\, X : U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^N \text{ parametrización}\right\}.$$

Ejemplo 2.6. Variedad producto. Sean $M_1^{n_1}, M_2^{n_2}$ variedades diferenciables. En $M_1 \times M_2$ consideramos, con su topología producto,

$$\{(V_1 \times V_2, \phi_1 \times \phi_2) : (V_i, \phi_i) \in \mathscr{D}_i\},$$

que es un atlas.

Ejemplo 2.7. Cocientes. Los cocientes de variedades **no** producen, en general, variedades. Basta pensar en la relación de equivalencia por la que se obtiene un cono a partir de un cilindro.

Ejemplo 2.8. Espacio proyectivo real. El espacio proyectivo real es un cociente

$$\mathbb{RP}^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}{\mathrm{R}},$$

con R la relación de equivalencia $x\mathrm{R}y \iff x = \lambda y, \lambda \neq 0$. Este es un caso particular de cociente de una variedad que **sí** es una variedad. Para verlo, vamos a construir un atlas.

Recordemos que la topología de un cociente $\frac{X}{\mathrm{R}}$ viene dada de la siguiente forma: $O \subseteq \frac{X}{\mathrm{R}}$ es abierto si $\pi^{-1}(O)$ es abierto en X.

Ahora, sean los abiertos de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$O_i = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \neq 0\right\}$$

para $i = 1, \ldots, n+1$. Estos abiertos forman un recubrimiento de $\mathbb{R}^{n+1}$, y además tienen la siguiente propiedad: $x \in O_i$ implica que $\pi(x) \subseteq O_i$. Esta propiedad implica que $V_i := \pi(O_i)$ son abiertos. Además, recubren a $\mathbb{RP}^n$. Para construir las cartas, vamos a contruir aplicaciones $\psi_i : O_i \to \mathbb{R}^n$, y vamos a usarlas para inducir aplicaciones ϕ_i que hagan conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} O_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\pi_i"'] & \mathbb{R}^n \\ V_i \arrow[ur, dashed, "\phi_i"] & \end{tikzcd}$$

Recordemos que ψ_i induce una tal aplicación si $x\mathrm{R}y$ implica $\psi_i(x) = \psi_i(y)$, y que dicha aplicación será un homeomorfismo si ψ_i es una identificación. Una condición suficiente para que ψ_i sea una identificación es que tenga una inversa continua a derecha. Pues bien, vamos a definir ψ_i y ver que cumple estas propiedades.

$$\begin{aligned} \psi_i : O_i &\to \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Es inmediato que respeta la relación de equivalencia R y que $h_i(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n)$ es su inversa a derecha.

3. Aplicaciones diferenciables entre variedades

Consideramos una aplicación $F : M^m \to N^n$ continua entre dos variedades diferenciables M y N.

Definición 3.1. F es *diferenciable* si, para cada $p \in M$, existe (V, ϕ) carta de M con $p \in V$, y además existe (W, ψ) carta de N con $F(p) \in W$ tales que

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(F^{-1}(W) \cap V) \to \psi(W)$$

es diferenciable.

De la definición se desprende el siguiente hecho: si $(\hat{V}, \hat{\phi}), (\hat{W}, \hat{\psi})$ son otras cartas, entonces

$$\hat{\psi} \circ F \circ \hat{\phi}^{-1} = \underbrace{\hat{\psi} \circ \psi^{-1}}_{\text{dif.}} \circ \underbrace{\psi \circ F \circ \phi^{-1}}_{\text{dif.}} \circ \underbrace{\phi \circ \hat{\phi}^{-1}}_{\text{dif.}},$$

restringiendo las aplicaciones a un abierto más pequeño si fuera necesario. Es decir, se verifica la siguiente proposición.

Proposición 3.1. $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ *es diferenciable para cualesquiera cartas* $(V, \phi), p \in V$, $(W, \psi), F(p) \in W$, *si y solo si existe un par de cartas para el que sea diferenciable.*

Podemos trasladar también el concepto de difeomorfismo.

Definición 3.2 (Difeomorfismo). F es un difeomorfismo si tiene inversa F^{-1} y ambas son diferenciables.

Nota. Esto implica $m = n$.

Ejemplo 3.1. Consideramos en $\mathbb{R}$ dos atlas: $\mathscr{A} = \{(\mathbb{R}, \mathrm{id})\}$, y $\mathscr{A}' = \left\{(\mathbb{R}, t \mapsto t^{1/3})\right\}$. Además, consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}, \mathscr{D}(\mathscr{A})) &\to (\mathbb{R}, \mathscr{D}(\mathscr{A}')) \\ t &\mapsto t^3. \end{aligned}$$

Claramente, $(t^{1/3}) \circ F \circ \mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$ y $\mathrm{id} \circ F^{-1} \circ (t^{1/3})^{-1} = \mathrm{id}$ son diferenciables, luego F es un difeomorfismo con estas estructuras diferenciables, aunque no lo sea con la usual.

Proposición 3.2 (Propiedades de las aplicaciones diferenciables).

(i) *$F : M^m \to N^n$ constante es diferenciable,*
(ii) *la aplicación identidad en un variedad es diferenciable,*
(iii) *la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable,*
(iv) *la composición de difeomorfismos es un difeomorfismo,*
(v) *si $f, g : M \to \mathbb{R}$ son diferenciables, entonces $fg : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable,*
(vi) *si $O \subseteq M$ es abierto, la inclusión en M es diferenciable. Por tanto, las restricciones a abiertos de aplicaciones diferenciables son diferenciables,*
(vii) *si (V, ϕ) es una carta de M, y $\phi : V \to \phi(V)$ es un difeomorfismo.*

Demostración. (v): sea (V, ϕ) una carta alrededor de $p \in M$. Entonces, $f \circ \phi^{-1}$ y $g \circ \phi^{-1}$, de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, son diferenciables. Solo queda observar que $(fg) \circ \phi^{-1} = (f \circ \phi^{-1})(g \circ \phi^{-1})$.

(vii): considerando en $\mathbb{R}^n$ la estructura diferenciable usual, $(\phi(V), \mathrm{id})$ es una carta suya. $\mathrm{id} \circ \phi \circ \phi^{-1}$ es diferenciable, y también lo es su inversa. $\square$

Algunas propiedades que serán útiles cuando tratemos con subvariedades del euclídeo.

Proposición 3.3. *Sean $M^n \subset \mathbb{R}^N$ una subvariedad, y N^n una variedad diferenciable. Entonces,*

(i) *la inclusión $i : M \to \mathbb{R}^N$ es diferenciable,*
(ii) *$F : N \to M$ es diferenciable si, y solo si, $i \circ F : N \to \mathbb{R}^N$ es diferenciable,*
(iii) *si $O \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto, con $M \subset O$, y $F : O \to N$ es diferenciable, entonces $F\big|_M$ es diferenciable.*

Demostración. (i): tomando $p \in M$, (V, ϕ) una carta de M con $p \in V$, y llamando $X = \phi^{-1}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, shift left, "\phi"] & \mathbb{R}^N \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ U := \phi(V) \subseteq \mathbb{R}^N \arrow[u, shift left, "X"] \arrow[r, "X"] & \mathbb{R}^N \end{tikzcd}$$

(ii): tomamos $p \in N$, (W, ψ) una carta con $p \in W$; y (V, ϕ) una carta en M

con $F(p) \in V$. Llamamos $U := \phi(V)$, $X := \phi^{-1}$. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\psi"] & V \arrow[r, "i"] \arrow[d, shift left, "\phi"] & \mathbb{R}^N \\ \mathbb{R}^m & U \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[u, shift left, "X"] & \end{tikzcd}$$

y tenemos que $i \circ F$ es diferenciable. Por tanto, dada una parametrización G de $\mathbb{R}^N$, $G^{-1} \circ i \circ F \circ \psi^{-1}$ será diferenciable, y lo será $G^{-1} \circ i \circ X \circ \phi \circ F \circ \psi^{-1}$. Si elegimos G de forma que $G^{-1} \circ i \circ X = x \mapsto (x, 0)$, obtendremos el resultado, pues tendremos

$$\underbrace{\underbrace{G^{-1} \circ i \circ X}_{x \mapsto (x,0)} \circ \phi \circ F \circ \psi^{-1}}_{\text{diferenciable}}.$$

Definamos

$$\begin{aligned} G : U \times \mathbb{R}^{N-n} &\to \mathbb{R}^N \\ (x, y) &\mapsto X(x) + (0, y). \end{aligned}$$

Entonces, es claro que $G(x,0) = X(x)$, luego, supuesta invertible, $G^{-1}(X(x)) = (x, 0)$. Además, la diferencial de G en $\phi(F(p))$ viene representada matricialmente en la forma

$$\mathrm{d}G_{\phi(F(p))} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} & 0 \\ \hline \frac{\partial X_k}{\partial x_j} & I \end{array} \right)((\phi \circ F)(p)),$$

y por ser X una parametrización de una subvariedad, su determinante será no nulo, luego G será un difeomorfismo en un entorno $\hat{U} \times B(0, \epsilon)$ de $\phi(F(p))$. Además, por continuidad, podemos suponer que $G(\hat{U} \times B(0, \epsilon)) \subseteq V$, y tomando V más pequeño (proposición 2.1-(i)), suponemos la igualdad, y por tanto conmutará

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\psi"] & V \arrow[r, "i"] \arrow[d, shift left, "\phi"] & V \arrow[d, "G^{-1}"] \\ \mathbb{R}^m & U \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[u, shift left, "X"] \arrow[r, "x \mapsto (x,0)"] & \hat{U} \times B(0, \epsilon) \end{tikzcd}$$

(iii): $F\big|_M = F \circ i$. □

Ejercicio 3.1. Sean $M_1^{n_1}$ y $M_2^{n_2}$ variedades diferenciables. Probar:

(i) Las proyecciones π_1 y π_2 de la variedad producto $M_1 \times M_2$ son diferenciables,

(ii) si $(p_0, q_0) \in M_1 \times M_2$, entonces $i_{q_0} : M_1 \to M_1 \times M_2$ dada por $i(p) = (p, q_0)$ es diferenciable.

Solución. Ver en Ejercicios (7.1).

La siguiente proposición caracteriza la diferenciabilidad de aplicaciones que nacen en espacios proyectivos.

Proposición 3.4. *Sea M^m una variedad diferenciable, $F : \mathbb{RP}^n \to M$, y $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ la proyección del proyectivo. Entonces, F es diferenciable si, y solo si, $F \circ \pi$ es diferenciable.*

Demostración. **Supuesto que F es diferenciable:** se sigue de que π es diferenciable, veámoslo. Usamos la notación introducida en la demostración del ejemplo 2.8. Sea $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, entonces $x \in O_i$ para cierto i. Queda el diagrama

$$\begin{tikzcd} O_i \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \pi(O_i) \arrow[d, "\phi_i"] \\ O_i \arrow[r, "\phi_i \circ \pi"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

con $\phi_i \circ \pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$, diferenciable.

Supuesto que $F \circ \pi$ es diferenciable: tomando de nuevo $x \in O_i$, y (W, ψ) una carta de $F(p)$, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} O_i \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \pi(O_i) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\phi_i"] & W \arrow[d, "\psi"] \\ O_i \arrow[r, "\phi_i \circ \pi"] & \mathbb{R}^n & \psi(W) \end{tikzcd}$$

$F \circ \pi$ es diferenciable, luego lo es $\psi \circ F \circ \pi$. Observando que $\phi_1^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \pi(y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_i, \ldots, y_n)$, se obtiene que $\psi \circ F \circ \phi_i^{-1}$ es diferenciable. □

3.1. Funciones meseta

En esta sección, probamos la existencia de funciones diferenciables no triviales que nacen en variedades diferenciables arbitrarias y toman valores reales.

Lema 3.1. *Sean r_1, $r_2 \in \mathbb{R}^+$ con $r_2 > r_1$. Entonces, existe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable con*

(i) $h\big|_{B(0,r_1)} = 1$,
(ii) $h\big|_{\mathbb{R}^n - B(0,r_2)} = 0$, *y*
(iii) $h\big|_{B(0,r_2) - B(0,r_1)} \in [0, 1]$.

Proposición 3.5 (Funciones meseta en una variedad). *Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$ y $O \subset M$ un abierto. Entonces, existen $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable y V_p un abierto relativamente compacto –es decir, con adherencia compacta–, con $p \in \bar{V}_p \subset O$, tales que:*

(i) $f\big|_{V_p} = 1$, *y*
(ii) $\mathrm{sop}(f) = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$ *es compacto y contenido en O.*

Demostración. Sea (W, ϕ) una carta de M con $p \in W \subset O$ y $\phi(p) = 0$, lo cual se puede suponer sin pérdida de generalidad, componiendo con una traslación.

Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ con $r_1 < r_2$, $\bar{B}(0, r_2) \subset \phi(O)$, y h la función dada por el lema 3.1.

Definimos ya $f : M \to \mathbb{R}$: $f\big|_W = h \circ \phi$, $f\big|_{M-W} = 0$. Además, definimos $V_p := \phi^{-1}(B(0, r_1))$, y de esta forma:

- $\overline{V_p} = \phi^{-1}(\overline{B(0, r_1)})$ es compacto y está contenido en $W \subset O$,
- $\operatorname{sop}(f) = \phi^{-1}(\operatorname{sop}(h))$ es compacto y está contenido $W \subset O$.

Por tanto, $f\big|_{W-\phi^{-1}(\overline{B(0,r_2)})} = 0$, y f es diferenciable. $\square$

Corolario 3.1. *Sean M una variedad diferenciable, $K \subseteq M$ un compacto, y $O \subseteq M$ un abierto con $K \subseteq O$. Entonces, existe $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable, con $f\big|_K = 1$, $\operatorname{sop}(f) \subseteq O$.*

Demostración. Para cada $p \in K$, sean f_p y V_p los dados por el teorema anterior para p y O. Entonces, $\{V_p\}_{p\in K}$ es un recubrimiento por abiertos de K. Extraigamos un subrecubrimiento finito $\{V_{p_i}\}_{i=1,\dots,r}$. Definiendo

$$f = 1 - \prod_{i=1}^{r} (1 - f_{p_i})$$

se obtiene la función deseada. El producto de aplicaciones diferenciables es diferenciable (proposición 3.2). El soporte de f es compacto: es la unión de los soportes de las f_{p_i}. $\square$

4. Diferencial de una aplicación

En esta sección, definimos el espacio tangente de una variedad diferenciable M en un punto $p \in M$, y la diferencial de una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables.

Para entender cómo la siguiente definición generaliza a la ya conocida para funciones diferenciables entre espacios euclídeos, vamos a hacer algunas observaciones sobre este último concepto. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, y sea $p \in \mathbb{R}^n$. La diferencial de f en p viene dada por la forma lineal

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_p : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(p + tv). \end{aligned}$$

En esta definición, cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ está jugando el papel de operador de derivación. Podemos formalizar esto de la siguiente forma: definimos

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_p : \mathbb{R}^n \to& (\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}) \\ v \mapsto& \hat{v} : f \mapsto \mathrm{d}f_p(v). \end{aligned}$$

y $\hat{v} = \lambda(v)$ sería v visto como operador de derivación. En la definición de λ, usamos $(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R})$ para notar el conjunto de funciones de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ a $\mathbb{R}$.

La linealidad de la derivada y la regla del producto para la derivación nos permiten afirmar que la imagen de λ está contenida en el subconjunto

$$\mathscr{W}^p := \left\{ \alpha \in (\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}) : \begin{array}{l} \alpha \text{ es lineal} \\ \alpha \text{ verifica la regla del producto en } p \end{array} \right\},$$

donde esta segunda restricción debe entenderse del siguiente modo:

$$\alpha(fg) = \alpha(f)g(p) + f(p)\alpha(g)$$

para cada $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Vamos a probar lo siguiente:

Teorema 4.1. *$\mathscr{W}^p$ es un espacio vectorial de dimensión n y λ_p es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Que $\mathscr{W}^p$ es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalares usuales se puede comprobar rutinariamente. Que λ es lineal se obtiene de la linealidad de la diferencial en un punto. Asimismo, es inmediato comprobar que el núcleo de λ es trivial. La dificultad de la demostración reside en comprobar que λ es sobreyectiva.

Sean $\alpha \in \mathscr{W}^p$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Primero, observamos que

$$\alpha(1) = \alpha(1) \cdot 1 + 1 \cdot \alpha(1) = 2\alpha(1).$$

Por linealidad, $\alpha(c) = 0$ para cualquier función constante c.

Segundo, observamos que es posible desarrollar f de la siguiente forma:

$$f(x) - f(p) = \int_0^1 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=s} f(tx + (1-t)p)\,\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(sx + (1-s)p)\,\mathrm{d}s}_{g_i(x)}.$$

Por tanto, por linealidad, por la regla del producto y por ser cero en funciones constantes,

$$\alpha(f) = \sum_{i=1}^n \alpha(x_i - p_i) g_i(p) = \sum_{i=1}^n \alpha(x_i) g_i(p).$$

Tomando $v = (\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n))$,

$$\lambda(v)(f) = \mathrm{d}f_p(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha(x_i) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} f(p)}_{=g_i(p)} = \alpha(f).$$

□

4.1. Espacio tangente

Motivados por la exposición anterior, podemos dar las siguientes definiciones, notando $\mathscr{C}^\infty(M) := \{f \in (M \to \mathbb{R}) : f \text{ es diferenciable}\}$.

Definición 4.1 (Derivación). Se llama *derivación (en p)* a un funcional $v : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ lineal y que respete la regla del producto en p.

Definición 4.2 (Espacio tangente). Sean M una variedad diferenciable, y $p \in M$. Llamamos *espacio tangente de M en p* al conjunto

$$\mathrm{T}_p M := \{v \in (\mathscr{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}) : v \text{ es una derivación en } p\}.$$

A los elementos de $\mathrm{T}_p M$ se les llama *vectores tangentes*.

Es inmediato comprobar que $\mathrm{T}_p M$ tiene la estructura de espacio vectorial natural. Ahora, vamos a extender el conjunto de derivaciones que consideramos, para poder obtener diferenciales de funciones que no estén definidas en toda la variedad M, sino solamente en un abierto de la misma. Para ello, vamos a servirnos del siguiente lema.

Lema 4.1. *Se verifican:*

(i) *Sean $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$, $p \in M$ y O un entorno abierto suyo, tales que $f\big|_O = g\big|_O$. Entonces, para cada $v \in \mathrm{T}_p M$, $v(f) = v(g)$.*
(ii) *Si $c : M \to \mathbb{R}$ es constante, entonces $v(c) = 0$ para cada $v \in \mathrm{T}_p M$.*

Demostración. (i): sea $h : M \to \mathbb{R}$ la función dada por la proposición 3.5 para p y O. Entonces, $h(f-g)$ es la función constantemente cero, por lo que

$$\begin{aligned} 0 &= v(h(f-g)) \\ &= v(h)\underbrace{(f-g)(p)}_{=0} + h(p)v(f-g) = v(f-g). \end{aligned}$$

□

Para considerar funciones que sean diferenciables en un entorno de p, no tenemos por qué restringirnos a un entorno concreto. El siguiente conjunto también goza de estructura de álgebra de manera natural:

$$\mathscr{C}^\infty(p) := \{f \in (O \to \mathbb{R}) : O \text{ es un entorno de } p \text{ y } f \text{ es diferenciable}\}.$$

La suma y el producto vienen dados por la suma y el producto usuales de las funciones restringidas a la intersección de sus dominios. Además, es claro que $\mathscr{C}^\infty(M) \subseteq \mathscr{C}^\infty(p)$.

Este espacio nos permite considerar otra variante del espacio tangente:

$$\hat{\mathrm{T}}_p(M) := \{v \in (\mathscr{C}^\infty(p) \to \mathbb{R}) : v \text{ es una derivación en } p\}.$$

Pues bien,

Teorema 4.2. *$\hat{\mathrm{T}}_p M$ y $\mathrm{T}_p M$ son isomorfos como espacios vectoriales.*

Demostración. Basta dar un isomorfismo $\Phi : \hat{\mathrm{T}}_p M \to \mathrm{T}_p M$. $\Phi(v) = v\big|_{\mathscr{C}^\infty(M)}$. En el otro sentido, para definir Φ^{-1}, hemos de extender un funcional $\hat{v} : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ a $\mathscr{C}^\infty(p)$. Para ello, dada una función $f \in \mathscr{C}^\infty(p)$, la extendemos a una función $F \in \mathscr{C}^\infty(M)$, y definimos $\Phi^{-1}(\hat{v})(f) = \hat{v}(F)$. El lema 4.1 implica que esta definición no depende de la extensión tomada.

Sea O el dominio de f, y sea $h : M \to \mathbb{R}$ la dada por la proposicion 3.5 para p y O. Definiendo $F\big|_O = hf$ y $F\big|_{M-O} = 0$, se tiene el resultado. □

A partir de este momento, notaremos por $\mathrm{T}_p M$ al espacio extendido $\hat{\mathrm{T}}_p M$.

Vectores tangentes a curvas Ya estamos listos para generalizar un concepto que nos es familiar del estudio de superficies diferenciables: el vector tangente a una curva.

Definición 4.3. Sean $\alpha : (a, b) \to M$ diferenciable, y $t_0 \in (a, b)$. El *vector tangente a α en t_0* es la aplicación

$$\begin{aligned} \alpha'(t_0) : \mathscr{C}^\infty(\alpha(t_0)) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0} (f \circ \alpha)(t). \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que $\alpha'(t_0) \in \mathrm{T}_{\alpha(t_0)} M$.

Proposición 4.1 (Cambio de parámetros). *Sean $h : (c, d) \to (a, b)$ un difeomorfismo, y $\alpha : (c, d) \to M$ diferenciable. Entonces,*

$$(\alpha \circ h)'(s_0) = h'(s_0)\alpha'(h(s_0)).$$

Otro resultado esperable, al menos en parte, es el siguiente:

Teorema 4.3. *$\mathrm{T}_p M$ tiene dimensión n (la de la variedad). Dada una carta (V, ϕ) con $p \in V$, una base es $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : i = 1, \ldots, n \right\}$, donde*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \mathscr{C}^\infty(p) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{\partial}{\partial r_i}(f \circ \phi^{-1})(q), \end{aligned}$$

$q = \phi(p)$, y $\frac{\partial}{\partial r_i}$ son las derivadas parciales usuales.

Demostración. Solo es necesario probar la segunda afirmación. Probamos que es un sistema linealmente independiente. Llamando $x_i = r_i \circ \phi$, con r_i las proyecciones de $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \right)(x_j) = \lambda_j,$$

por lo que si los coeficientes son tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = 0$, han de ser nulos todos.

Ahora, veamos que es sistema de generadores. Sean $v \in \mathrm{T}_p M$, y $f \in \mathscr{C}^\infty(p)$. Desarrollamos

$$(f \circ \phi^{-1})(r) = (f \circ \phi^{-1})(q) + \sum_{i=1}^{n} (r_i - q_i) g_i(r)$$

en una bola alrededor de q. Llamando $\phi^{-1}(r) = x$, obtenemos el desarrollo

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x_i(x) - q_i)(\underbrace{g_i \circ \phi}_{\hat{g}_i})(x).$$

Dado este desarrollo, vemos que v actúa sobre f de la forma

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_{i=1}^{n} \left(v(x_i - q)\hat{g}_i(p) + \underbrace{(x_i(p) - q_i)}_{=0} v(\hat{g}_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v(x_i)\hat{g}_i(p). \end{aligned}$$

Solo queda ver que $v(x_i)$ son las coordenadas de v respecto de este sistema:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^{n} v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \right](f) &= \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (x_j)\hat{g}_j(p)}_{\delta_{ij}\hat{g}_j(p)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} v(x_i)\hat{g}_i(p). \end{aligned}$$

□

De la demostración anterior se desprende cuáles son las coordenadas de un vector tangente respecto de una base de este tipo. En particular, cuáles son las coordenadas de los elementos de otra base.

Notación. En ocasiones, notaremos a una carta (V, ϕ, x_i) para indicar explícitamente sus coordenadas $x_i = r_i \circ \phi$.

> **Proposición 4.2 (Cambio de coordenadas).** *Dadas dos cartas (V, ϕ, x_i), (W, ψ, y_i), y sus bases dadas por el teorema 4.3 B y B', la matriz de cambio de base entre ellas es*
>
> $$M(B, B') = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p (x_i) \right)_{ij}.$$

Proposición 4.3. *Para cada $v \in \mathrm{T}_pM$, existe $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$.*

Demostración. Sea (V, ϕ, x_i) una carta en p, entonces $v = \sum_{i=1}^n v(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$. Llamando $w := (v(x_1), \ldots, v(x_n)) \in \mathbb{R}^n$, y definiendo $\alpha(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tw)$,

$$\begin{aligned}
\alpha'(0)(f) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ \phi^{-1})(\phi(p) + tw) \\
&= \sum_{i=1}^n w_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial r_i}(f \circ \phi^{-1})(\phi(p))}_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f)}.
\end{aligned}$$

□

4.2. Diferencial de una aplicación diferenciable

Pasamos ya a definir la diferencial de una aplicación.

Definición 4.4 (Diferencial de una aplicación). Sea $f : M^m \to N^n$ diferenciable. Si $p \in M$, entonces la *diferencial de f en p*, que notamos $\mathrm{d}f_p : \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{f(p)}N$, se define como

$$(\mathrm{d}f_p(v))(g) = v(g \circ f).$$

La siguiente proposición nos permite asegurar que la diferencial está bien definida.

Proposición 4.4. *Para cada $p \in M$, $\mathrm{d}f_p$ es una derivación.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}f_p)(g_1 g_2) &= v((g_1 g_2) \circ f) \\
&= v(g_1 \circ f) g_2(f(p)) + g_1(f(p)) v(g_2 \circ f) \\
&= \mathrm{d}f_p(g_1) g_2(f(p)) + g_1(f(p)) \mathrm{d}f_p(g_2).
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.5 (Propiedades de la diferencial). *Se verifican:*

(i) *La diferencial es lineal,*
(ii) *si f es constante, entonces $\mathrm{d}f_p = 0$ para cada $p \in M$,*
(iii) $\mathrm{d}(\mathrm{id})_p = \mathrm{id}$,
(iv) *regla de la cadena: $\mathrm{d}(G \circ F)_p = \mathrm{d}G_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p$,*
(v) *si $F : M^n \to N^n$ es un difeomorfismo, entonces para cada $p \in M$, $\mathrm{d}F_p$ es un isomorfismo y su inversa es $(\mathrm{d}F_p)^{-1} = \mathrm{d}F_p^{-1}$,*
(vi) *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable. Notando por $\mathrm{d}F_p^*$ a la diferencial en el*

sentido clásico del análisis real, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathrm{d}F_p^*"] \arrow[d, "\lambda_p"] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\lambda_{F(p)}"] \\ \mathrm{T}_p\mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathrm{d}F_p"] & \mathrm{T}_{F(p)}\mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

donde λ_p es el isomorfismo definido al comienzo de esta sección.

(vii) *si f es diferenciable, $p \in M$, $v \in \mathrm{T}_pM$, y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es cualquier curva que verifique $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces*

$$\mathrm{d}f_p(v) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t),$$

entendiendo la derivada a la derecha de la igualdad en el sentido de la definición 4.3.

Demostración. (iv):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(G \circ F)_p(v)(g) &= v(g \circ G \circ F) \\ &= (\mathrm{d}F_p)(v)(g \circ G) \\ &= \mathrm{d}G_{F(p)}(\mathrm{d}F_p(v))(g). \end{aligned}$$

(vi): Por un lado,

$$\begin{aligned} \lambda_{F(p)}(\mathrm{d}F_p^*(v)) &= (g \mapsto \mathrm{d}g_{F(p)}(\mathrm{d}F_p^*(v))) \\ &= (g \mapsto \mathrm{d}(g \circ F)_p(v)). \end{aligned}$$

Por otro,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_p(\lambda_p(v)) &= (g \mapsto \lambda(v)(g \circ F)) && \text{por definición de } \mathrm{d}F_p \\ &= (g \mapsto \mathrm{d}(g \circ F)_p(v)) && \text{por definición de } \lambda_p. \end{aligned}$$

□

4.3. Expresión matricial de la diferencial

Fijadas dos cartas (V, ϕ, x_i) con $p \in M$, (W, ψ, y_j) con $F(p) \in N$, hemos visto que podemos obtener sendas bases de los espacios tangentes: la base de T_pM

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p : i = 1, \ldots, m \right\},$$

y la base de $\mathrm{T}_{F(p)}N$

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{f(p)} : j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Esto nos permite expresar la diferencial $\mathrm{d}F_p$ matricialmente:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p &= \sum_{j=1}^{n}\left(\mathrm{d}F_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)(y_j)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{F(p)} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (y_j\circ F)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{F(p)},\end{aligned}$$

por lo que la matriz jacobiana asociada es

$$\mathrm{d}F_p = \left(\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (y_j\circ F)\right)_{ij}.$$

4.4. El espacio tangente en subvariedades del euclídeo

En esta sección vamos a establecer una forma práctica de trabajar con el espacio tangente de subvariedades del euclídeo. Para ello, lo identificaremos con un cierto subespacio de $\mathbb{R}^N$.

Hemos visto que si $M^n \subset \mathbb{R}^N$ es una subvariedad, entonces la inclusión es diferenciable. Además, su diferencial es inyectiva:

> **Proposición 4.6.** *Para cada $p \in M$, $\mathrm{d}i_p$ es inyectiva.*

Demostración. Sea (V, ϕ, x_i) una carta en p, y $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^N$ una parametrización tal que $X^{-1}\big|_{V\cap M} = \phi$.

$$\mathrm{d}X_{\phi(p)} = \mathrm{d}i_p \circ \mathrm{d}\phi^{-1}_{\phi(p)},$$

con $\mathrm{d}X_{\phi(p)}$ inyectiva y $\mathrm{d}\phi^{-1}_{\phi(p)}$ un isomorfismo. □

Esto nos da la siguiente cadena de aplicaciones lineales:

$$\mathrm{T}_pM \xrightarrow{\mathrm{d}i_p} \mathrm{T}_p\mathbb{R}^N \xrightarrow{\lambda_p^{-1}} \mathbb{R}^N$$

Trabajaremos identificando en lo sucesivo T_pM con $V_p := \lambda_p^{-1}(\mathrm{d}i_p(T_pM))$ mediante $\lambda_p^{-1}\circ \mathrm{d}i_p$, que es una aplicación lineal inyectiva, y por tanto ambos espacios tienen la misma dimensión.

Una observación adicional que será útil:

> **Proposición 4.7.** *La inversa de λ_p viene dada por*
>
> $$\begin{aligned}\lambda_p^{-1} : \mathrm{T}_p\mathbb{R}^N &\to \mathbb{R}^N \\ v &\mapsto (v(r_1), \dots, v(r_N)),\end{aligned}$$
>
> *con r_i las proyecciones usuales de $\mathbb{R}^N$.*

Esta identificación es natural en el siguiente sentido: sea $v \in \mathrm{T}_pM$, y sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Podríamos haber elegido identificar v con el vector tangente a la curva vista como una curva en $\mathbb{R}^N$, es decir, con $(i \circ \alpha)'(0)$, en el sentido de la derivada clásica del análisis. Pues bien, esto es equivalente a la identificación que hemos hecho:

$$\begin{aligned}
(i \circ \alpha)'(0) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (i \circ \alpha)(t) \\
&= (\alpha'(0)(i_1), \dots, \alpha'(0)(i_N)) && \text{en el sentido de 4.3} \\
&= (v(i_1), \dots, v(i_N)) \\
&= \lambda_p^{-1}(\mathrm{d}i_p(v)) && \text{por la proposición 4.7.}
\end{aligned}$$

En suma, esta identificación nos permite determinar el espacio tangente mediante el siguiente procedimiento: consideramos curvas diferenciables en M que pasen por p en 0, y las derivamos de la manera usual, tratándolas como curvas en el espacio ambiente. Los vectores que obtengamos de esta forma comformarán el espacio tangente.

Ejemplo 4.1. Esfera. Calculemos el espacio tangente de la esfera (ejemplo 1.2). Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^n(a, R)$. Entonces, α verifica la ecuación $\|\alpha - a\|^2 = R^2$. Derivando,

$$\langle \alpha'(0), \alpha(0) - a \rangle = \langle v, p - a \rangle = 0,$$

lo que nos da la condición $V_p \perp p - a$. Por tanto, $V_p \subseteq (p-a)^\perp$, pero $(p-a)^\perp$ tiene dimensión n, luego se da la igualdad.

Ejemplo 4.2. Grupo ortogonal. Recordamos el grupo ortogonal del ejemplo 1.4. Pues bien, sea A una curva diferenciable en $O(n)$, con $A(0) = I$ y $A'(0) = B$. A verifica

$$AA^T = I,$$

luego derivando

$$A'(0)A(0)^T + A(0)A'(0)^T = B + B^T = 0.$$

Razonando como en el ejemplo anterior, el espacio tangente a $O(n)$ en I es el espacio de las matrices antisimétricas.

Para obtener el espacio tangente en una matriz $A \in O(n)$ cualquiera, vamos a emplear una técnica que se puede extender a cualquier grupo de Lie. Consideramos las traslaciones a izquierda y derecha $l_A, r_A : O(n) \to O(n)$ dadas por $l_A(B) = AB$ y $r_A(B) = BA$. Es inmediato que son difeomorfismos. Por tanto, $(\mathrm{d}l_A)_I, (\mathrm{d}r_A)_I : \mathrm{T}_I O(n) \to \mathrm{T}_A O(n)$ son isomorfismos. Ahora,

$$(\mathrm{d}l_A)_I(B) = AA'(0) = AB,$$

luego

$$\mathrm{T}_A O(n) = \left\{AB : B + B^T = 0\right\}.$$

Ejemplo 4.3. Razonando como en el ejemplo anterior, podemos llegar a

$$\mathrm{T}_A \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) = \{AB : \mathrm{tr}(B) = 0\}.$$

Ejemplo 4.4. Retomamos la notación del ejemplo 2.8. Vamos a hallar el espacio tangente a un punto $p = \pi(x)$, con $x \in O_i$, a través de la diferencial

$$\mathrm{d}\pi_x : \mathrm{T}_x\mathbb{R}^{n+1} \to \mathrm{T}_p\mathbb{RP}^n.$$

Como nace en un espacio de dimensión $n+1$ y toma valores en uno de dimensión n, es obvio que tiene núcleo. Calculémoslo.

Sea $v \in \ker(\mathrm{d}\pi_x)$, lo cual se verifica si y solo si

$$v(f \circ \pi) = 0$$

para cada $f \in \mathscr{C}^\infty(p)$. Consideramos $f = r_j \circ \phi_i$, con $i \neq j$. Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ \pi)(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= (r_j \circ \psi_i)(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\ &= \frac{x_j}{x_i}.\end{aligned}$$

Veamos qué vale $v(x_j/x_i)$:

$$\begin{aligned} v\left(\frac{x_j}{x_i}\right) &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} v(x_k)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_x\right)\left(\frac{x_j}{x_i}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} v(x_k)\left(\frac{x_i\delta_{jk} - x_j\delta_{ik}}{x_i^2}\right) \\ &= \frac{v(x_j)}{x_i} - \frac{v(x_i)x_j}{x_i^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que, si notamos $v = (v_1, \ldots, v_{n+1})$ en coordenadas de $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_x\right\}_{k=1}^{n+1}$, $v = \frac{v_i}{x_i}x$. Por tanto, en dichas coordenadas,

$$\ker(\mathrm{d}\pi_x) = \langle x \rangle.$$

Ahora, aplicando el primer teorema de isomorfía para espacios vectoriales,

$$\frac{\mathrm{T}_x\mathbb{R}^{n+1}}{\ker(\mathrm{d}\pi_x)} \cong \mathrm{im}(\mathrm{d}\pi_x) = \mathrm{T}_p\mathbb{RP}^n.$$

Por otro lado, mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{T}_x\mathbb{R}^{n+1}}{\ker(\mathrm{d}\pi_x)} &\to \ker(\mathrm{d}\pi_x)^\perp \\ z + \ker(\mathrm{d}\pi_x) &\mapsto P_{\ker(\mathrm{d}\pi_x)^\perp}(z), \end{aligned}$$

con $P_{\ker(\mathrm{d}\pi_x)^\perp}$ la proyección ortogonal sobre $\ker(\mathrm{d}\pi_x)^\perp$, podemos identificar

$$\mathrm{T}_p\mathbb{RP}^n \cong \ker(\mathrm{d}\pi_x)^\perp \cong \langle x \rangle^\perp.$$

4.5. Difeomorfismos locales

Vamos a extender el concepto de difeomorfismo local al contexto de diferenciabilidad entre variedades.

Definición 4.5. $F : M^m \to N^m$ es un *difeomorfismo local* si, para cada $p \in M$, existen entornos abiertos O y O' de p y $F(p)$ tal que $F : O \to O'$ es un difeomorfismo.

Proposición 4.8. *Si, para cada $p \in M$, $\mathrm{d}F_p$ es un isomorfismo, entonces F es un difeomorfismo local.*

Demostración. La demostración se basa en trasladar el problema a abiertos de $\mathbb{R}^m$ mediante cartas en p y $F(p)$ y aplicar allí el teorema de la función inversa. Sean (V, ϕ) y (W, ψ) cartas en p y $F(p)$. Entonces, las diferenciales hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_p M \arrow[r, "\mathrm{d}F_p(\cong)"] \arrow[d, "\mathrm{d}\phi_p(\cong)"] & \mathrm{T}_{F(p)} N \arrow[d, "\mathrm{d}\psi_{F(p)}(\cong)"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathrm{d}(\psi\circ F\circ\phi^{-1})"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

luego todas las aplicaciones del diagrama son isomorfismos. Aplicando el teorema de la función inversa a $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ y notando que ψ y ϕ son difeomorfismos se obtiene el resultado. $\square$

4.6. Particiones de la unidad

Vamos a estudiar el concepto de *partición de la unidad*, que nos servirá para extender funciones diferenciables en variedades.

A partir de ahora, exigiremos a las variedades que consideremos que sean, además de Haussdorf, segundo axioma de numerabilidad, es decir, que su topología posea una base numerable. Esta propiedad se hereda en subespacios, productos y funciones continuas y sobreyectivas.

Pues bien, pasamos a definir el concepto:

Definición 4.6 (Partición de la unidad). Una *partición de la unidad en M* es una familia $\{\theta_n : M \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones diferenciables que verifican:

(i) *Finitud local*: para cada $p \in M$, existe un entorno abierto O de p tal que $\mathrm{sop}(\theta_n) \cap O = \emptyset$ excepto para un subconjunto finito de la familia,

(ii) $0 \leq \theta_n \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n = 1$.

Los siguientes lemas nos permitirán probar la existencia de particiones de la unidad no triviales (del tipo $\{1/2, 1/2\}$) y justificarán el requisito de ser ANII.

Lema 4.2. *Sea M una variedad diferenciable. Entonces, la topología de M admite una base numerable de abiertos relativamente compactos.*

Demostración. Sea $\mathscr{B}$ una base numerable de la topología de M. Definimos

$$\mathscr{B}' = \left\{B \in \mathscr{B} : \overline{B} \text{ es compacto}\right\},$$

y vamos a ver que es también una base de la topología.

Sean $p \in M$, $V \subseteq O \subseteq M$ abiertos con $p \in V$, y (V, ϕ) una carta de M. Podemos suponer que V es difeomorfo a una bola y que $\overline{V} \subset O$, luego $\overline{V}$ es compacto.

Por ser $\mathscr{B}$ base, existe $B \in \mathscr{B}$ con $p \in B \subseteq V$, luego $\overline{B} \subseteq \overline{V}$, compacto, es decir, $B \in \mathscr{B}'$. □

Lema 4.3. *Sea M una variedad diferenciable. Entonces, existe una familia $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de M que verifica:*

(i) $\overline{G_n}$ *es compacto para cada* $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $\overline{G_n} \subseteq G_{n+1}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$,
(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = M$.

Demostración. Sea, por el lema 4.2, $\mathscr{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de la topología compuesta por abiertos relativamente compactos. Definimos, inductivamente:

(i) $G_1 := B_1$,
(ii) supuesto que G_n está definido, observamos que $\mathscr{B}$ recubre a $\overline{G_n}$, y tomamos un subrecubrimiento finito $\left\{B_{n_k}\right\}_{k=1}^{N}$. Entonces, definimos

$$G_{n+1} := \bigcup_{k=1}^{N} B_{n_k} \cup B_n.$$

□

El siguiente teorema nos da particiones de la unidad no triviales.

Teorema 4.4. *Sean M una variedad diferenciable, y $U = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un recubrimiento abierto de M. Entonces, existe una partición de la unidad $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que se verifica, para cada $n \in \mathbb{N}$:*

(i) θ_n *tiene soporte compacto,*
(ii) *existe* $\alpha_n \in A$ *tal que* $\operatorname{sop}(\theta_n) \subseteq U_{\alpha_n}$.

Demostración. Sea $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia dada por el lema 4.3. Además, llamemos $G_0 = \emptyset$. Consideramos

$$A_n := \overline{G_{n+1}} - G_n.$$

Observamos:

(i) A_n es un cerrado en un compacto, luego compacto,

(ii) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ recubre a M,
(iii) $A_n = \overline{G_{n+1}} - G_n \subseteq G_{n+2} - \overline{G_{n-1}}$, que es abierto.

Ahora, si $p \in A_n$, entonces existe α_p con $p \in U_{\alpha_p}$, luego $p \in (G_{n+2} - \overline{G_{n-1}}) \cap U_{\alpha_p}$. Por el lema 3.5, existen $f_p : M \to \mathbb{R}$ una función meseta y V_p un entorno abierto relativamente compacto de p de manera que:

(i) $\text{sop}(f_p) \subseteq (G_{n+2} - \overline{G_{n-1}}) \cap U_{\alpha_p}$ y es compacto,
(ii) $f_p\big|_{V_p} = 1$.

De este modo, $\{V_p : p \in A_n\}$ es un recubrimiento abierto de A_n. Tomamos un subrecubrimiento finito que recubra a A_n, y las funciones correspondientes. Repitiendo esta construcción para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos –recordamos que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable– una familia numerable de funciones diferenciables $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y cada una verifica las propiedades anteriores. Además, sus soportes recubren a M. Podemos definir ya

$$\theta_n = \frac{f_n}{\sum_{m=1}^{\infty} f_m}.$$

Es inmediato comprobar que la suma del denominador es finita y no nula, y que la familia así definida verifica las propiedades del enunciado. □

Corolario 4.1. *Sean $F \subseteq M$ cerrado y $O \subseteq M$ abierto, con $F \subseteq O$. Entonces, existe $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable con $0 \leq f \leq 1$, $f\big|_F = 1$, y $\text{sop}(f) \subseteq O$.*

Demostración. Tomamos el recubrimiento $U = \{M - F, O\}$ de M, y $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la partición de la unidad dada por el teorema para U. Consideramos $\{\theta_k : k \in I\}$ la subfamilia de las funciones que verifican

(i) $\text{sop}(\theta_k) \not\subseteq M - F$,
(ii) $\text{sop}(\theta_k) \cap F \neq \emptyset$.

Por tanto, verifican $\text{sop}(\theta_k) \subseteq O$. Definimos

$$f := \sum_{k\in I} \theta_k.$$

Claramente, $0 \leq f \leq 1$ y $\text{sop}(f) \subseteq O$. Además,

$$f\big|_F = \sum_{k\in I} \theta_k\big|_F = \sum_{n\in\mathbb{N}} \theta_n\big|_F = 1,$$

pues el soporte de las que se añaden en la segunda sumatoria está en $M - F$. □

El siguiente corolario nos dice que, en cierto sentido, no hay funciones diferenciables exclusivas de las subvariedades.

Lema 4.4. *Sean $p \in M$, y $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable. Existen un entorno abierto $W_p \subseteq \mathbb{R}^N$ de p y una función diferenciable $\tilde{f}_p : W_p \to \mathbb{R}$ tales que $\tilde{f}_p\big|_{W_p\cap M} = f\big|_{W_p\cap M}$.*

Demostración. Vamos a usar una construcción como la que se empleó en la demostración de la proposición 3.3-(ii). Sea (V,ϕ) una carta de M con $p\in V$, y obtenemos, como se hizo allí, una carta (W_p,ψ) de $\mathbb{R}^N$ tal que $\psi\circ i\circ\phi^{-1}=(x\mapsto(x,0))$.

Definimos

$$\tilde{f}_p=f\circ\phi^{-1}\circ\pi\circ\psi,$$

con π la proyección sobre las primeras n componentes, y así $\tilde{f}_p$ es diferenciable. Además, si $v\in V$, entonces

$$(\psi\circ i)(v)=(\psi\circ i\circ\phi^{-1})(\phi(v))=(\phi(v),0),$$

luego

$$(\pi\circ\psi\circ i)(v)=\phi(v),$$

y por último

$$(\phi^{-1}\circ\pi\circ\psi\circ i)(v)=v.$$

Es decir, $\phi^{-1}\circ\pi\circ\psi\big|_V=\mathrm{id}$. Por tanto, $\tilde{f}_p\big|_{W_p\cap M}=f\big|_{W_p\cap M}$. □

Corolario 4.2. *Sean $M\subseteq\mathbb{R}^N$ una subvariedad del euclídeo, cerrada en $\mathbb{R}^N$, y $f:M\to\mathbb{R}$ diferenciable. Entonces, existe $F:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ diferenciable que extiende a f.*

Demostración. Sean, para $p\in M$, W_p el entorno de p y $\tilde{f}_p$ la función dados por el lema 4.4. Consideramos el recubrimiento de $\mathbb{R}^N$:

$$U:=\left\{W_p\right\}_{p\in M}\cup\left\{\mathbb{R}^N-M\right\}.$$

Aplicamos el teorema 4.4 y obtenemos una partición de la unidad $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para U. De esta familia, consideramos la subfamilia $\{\theta_k\}_{k\in I}$ de las θ_k que verifiquen $\operatorname{sop}(\theta_k)\cap M\neq\emptyset$, lo que implica $\operatorname{sop}(\theta_k)\subseteq w_{p_k}$ para cierto $p_k\in M$.

Definimos, para cada $k\in I$,

$$\hat{f}_k:=\begin{cases}\theta_k\tilde{f}_{p_k} & \text{en } W_{p_k},\\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^N-W_{p_k},\end{cases}$$

y $F:=\sum_{k\in I}\hat{f}_k$. Es inmediato que es una extensión diferenciable de f. □

5. Campos de vectores

En esta sección vamos a abordar el concepto de *campo de vectores*, que consistirá en una aplicación que asigne a cada punto de una variedad diferenciable un vector tangente a la variedad en ese punto.

Definición 5.1 (Fibrado tangente). Llamamos *fibrado tangente* de una variedad diferenciable M a:

$$\mathrm{T}M = \bigsqcup_{p\in M} \mathrm{T}_pM.$$

También se puede definir el fibrado tangente con la unión usual –no disjunta–. En este caso, el cero es común a todos los tangentes, pero salvo esta excepción, la unión es disjunta.

Lema 5.1. *Sean V un espacio vectorial, y U y W subespacios propios. Entonces, $U \cup W \neq V$.*

Demostración. Razonamos por contradicción, suponiendo que $U \cup W = V$. Observamos que $U \cap W \neq U$: si se da la igualdad, $U \subseteq W$, luego $U \cup W = W \neq V$. Análogamente para W. Tomamos $v \in U - U \cap W$, $v' \in W - U \cap W$.

Entonces, $v + v' \in V$, luego $v + v' \in U$ o $v + v' \in W$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $v + v' \in U$. Entonces, $v + v' - v = v' \in U$, contradicción. □

Proposición 5.1. *Si M es una variedad diferenciable, $p, q \in M$, y $p \neq q$, entonces $\mathrm{T}_pM \cap \mathrm{T}_qM = \{0\}$.*

Demostración. Sea $v : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ lineal y no nula, y supongamos que $v \in \mathrm{T}_pM$, $v \in \mathrm{T}_qM$. Entonces, para cada $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} v(fg) &= v(f)g(p) + f(p)v(g) \\ &= v(f)g(q) + f(q)v(g), \end{aligned}$$

luego

$$v(f)(g(p) - g(q)) + v(g)(f(p) - f(q)) = 0.$$

En particular, tomando $f = g$,

$$2v(f)(f(p) - f(q)) = 0$$

para cada $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, luego, si $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, entonces

$$\begin{cases} f \in \ker(v) & \text{o} \\ f(p) = f(q). \end{cases} \tag{$*$}$$

Definimos $L : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ por $L(f) = f(p) - f(q)$, lineal. Podemos traducir $(*)$ como

$$\ker(v) \cup \ker(L) = \mathscr{C}^\infty(M).$$

Ahora, por ser dos funcionales lineales no nulos, ninguno de sus núcleos es el espacio completo. Por tanto, su unión no puede ser el espacio completo (lema 5.1), y hemos llegado a contradicción. □

La siguiente proyección será relevante al definir los campos de vectores.

Definición 5.2. La *proyección natural* del fibrado tangente de una variedad es

$$\begin{aligned} \Pi : \mathrm{T}M &\to M \\ (p, v) &\mapsto p. \end{aligned}$$

Definición 5.3 (Campo de vectores). Un campo de vectores en M es una aplicación

$$\begin{aligned} X : M &\to \mathrm{T}M \\ p &\mapsto X_p \end{aligned}$$

que verifica $\Pi \circ X = \mathrm{id}$, es decir, $X_p \in \mathrm{T}_p M$ para cada $p \in M$.

Consideraremos, en el conjunto de los campos de vectores, estructuras de espacio de vectorial y de módulo sobre las funciones $(M \to \mathbb{R})$, de la siguiente forma:

(i) el producto escalar y la suma: $(aX + bY)_p = aX_p + bY_p$,
(ii) el producto por funciones $f : M \to \mathbb{R}$: $(fX)_p = f(p)X_p$.

Ejemplo 5.1. Una carta (V, ϕ, x_i) en M permite dar un campo en V mediante

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) : V &\to \mathrm{T}M \\ p &\mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p. \end{aligned}$$

Este campo de vectores nos permite expresar, localmente, cualquier otro campo en coordenadas respecto de $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) : i = 1, \ldots, n\right\}$: si $X : V \to \mathrm{T}M$ es un campo de vectores, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

para ciertos coeficientes $a_i(p)$. Así, estos coeficientes definen funciones $a_i : V \to \mathbb{R}$, con lo cual

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)_p = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)_p,$$

es decir, $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$.

5.1. Estructura del fibrado tangente

Para proporcionar una definición de campo de vectores *diferenciable*, que será el concepto que nos interese, primero hemos de dotar al fibrado tangente de estructura de variedad diferenciable.

Vamos a emplear el siguiente lema:

Lema 5.2. *Sean M un conjunto, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de subconjuntos de M, y $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ inyectiva para cada $\alpha \in A$, tales que:*

(i) *$\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto para cualesquiera $\alpha, \beta \in A$,*
(ii) *si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es $\mathscr{C}^\infty$,*
(iii) *hay una subfamilia numerable de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ que recubre a M,*
(iv) *para cualesquiera $p, q \in M$ distintos, existe U_α que contiene a ambos, o existen U_α, U_β disjuntos con $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$.*

Entonces, existen una única topología y estructura diferenciable en M tales que (U_α, ϕ_α) es una carta diferenciable para cada $\alpha \in A$.

Demostración. La topología en M será la dada por la base

$$\mathscr{B} = \left\{\phi_\alpha^{-1}(V) : \alpha \in A, V \subseteq \phi_\alpha(U_\alpha) \text{ abierto}\right\}.$$

Veamos que es una base. Por la inyectividad de las funciones ϕ_α y la propiedad (iii), $\mathscr{B}$ recubre a M. Sean $\phi_\alpha^{-1}(V)$ y $\phi_\beta^{-1}(W)$ dos abiertos básicos no disjuntos. Las propiedades (i) y (ii) implican que

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un difeomorfismo. Por tanto, $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(W)$ es abierto, y

$$\phi_\alpha^{-1}(V \cap \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(W)) = \phi_\alpha^{-1}(V) \cap \phi_\beta^{-1}(W)$$

es un abierto básico.

Ahora, con esta topología es claro que las funciones ϕ_α son homeomorfismos en sus imágenes. Por tanto, cada abierto U_α es ANII. La propiedad (iii) implica entonces que M es ANII, tomando una unión numerable de bases numerables.

Si $p, q \in M$ son distintos y existe U_α con $p, q \in U_\alpha$, por ser ϕ_α homemomorfismo U_α es Hausdorff, luego p y q se pueden separar por abiertos de U_α y M es Hausdorff.

Para la unicidad de la topología: cualquier topología que verifique la tesis del lema debe hacer a ϕ_α homeomorfa en su imagen. Entonces, los abiertos de la base $\mathscr{B}$ son los únicos posibles en U_α.

Para la unicidad de la estructura diferenciable: la familia $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es un atlas con la topología que hemos dado, con lo que la unicidad se sigue de la proposición 2.2. □

Ya podemos construir la estructura diferenciable en $\mathrm{T}M$:

Proposición 5.2. $\mathrm{T}M$ *está dotado de una topología y una estructura diferenciable que lo hacen una variedad diferenciable $2n$-dimensional y hacen la proyección Π diferenciable.*

Demostración. Vamos a emplear el lema 5.2. Para ello, vamos a definir las familias de abiertos y funciones necesarias. Dada una carta (U, ϕ, x_i) en M, definimos

$$\begin{aligned} \Phi : \Pi^{-1}(U) &\to \mathbb{R}^{2n} \\ (p, v) &\mapsto (\phi(p), v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

con v_i las coordenadas de v respecto de $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$. La imagen de Φ es $\Phi(\Pi^{-1}(U)) = \phi(U) \times \mathbb{R}^n$, abierto de $\mathbb{R}^{2n}$. Es invertible, con inversa

$$\Phi(x, v) = \left(\phi^{-1}(x), \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\phi^{-1}(x)} \right).$$

Ahora, sean $(\Pi^{-1}(U), \Phi)$ y $(\Pi^{-1}(V), \Psi)$ asociadas a (U, ϕ, x_i) y (V, ψ, y_i). $\Phi(\Pi^{-1}(U) \cap \Pi^{-1}(V)) = \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ es abierto. Además,

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi^{-1} : \phi(U \cap V) &\to \psi(U \cap V) \\ (x, v) &\mapsto (\psi \circ \phi^{-1}(x), v'_1, \dots, v'_n), \end{aligned}$$

con v'_i las coordenadas de $\sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ respecto de $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p\right\}$. Claramente, es diferenciable.

Visto esto, eligiendo un recubrimiento numerable $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por abiertos coordenados de M, obtenemos un recubrimiento $\left\{\Pi^{-1}(U_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{T}M$, con una familia de funciones asociada que verifica las tres primeras condiciones del lema. Es inmediato que también verifican la última.

Si $(p, v) \in \mathrm{T}M$, y $\Pi^{-1}(U)$ es un entorno coordenado de (p, v), entonces $\phi \circ \Pi \circ \Phi^{-1}(x, v) = x$, diferenciable. □

5.2. Campos diferenciables

Definición 5.4. Un campo X en M se dice *diferenciable* si es diferenciable como aplicación entre las variedades M y $\mathrm{T}M$.

Notamos por $\mathcal{X}(M)$ al conjunto de campos diferenciables en M.

Proposición 5.3. *X es diferenciable en p si, y solo si, existe un entorno V de p tal que, expresado X en coordenadas como $X\big|_V = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$, estas son diferenciables.*

Demostración. Se comprueba tomando cartas (V, ϕ) y $(\Pi^{-1}(V), \Phi)$, y escribiendo la condición de diferenciabilidad. □

Ejemplo 5.2. Sea (V, ϕ, x_i) una carta en M. Entonces, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ es un campo diferenciable en V.

5.3. Campos y derivaciones

En esta sección, vamos a dar una identificación entre los campos diferenciables sobre una variedad, y un concepto de *derivaciones* más amplio que el visto hasta ahora.

Consideramos el conjunto

$$\mathscr{D} = \left\{ \alpha \in (\mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)) : \begin{array}{l} \alpha \text{ es lineal} \\ \alpha(fg) = \alpha(f)g + f\alpha(g),\ f, g \in \mathscr{C}^\infty(M) \end{array} \right\},$$

y llamamos a sus elementos *derivaciones*. Si α es una derivación en este sentido, y notamos $\alpha_p(f) := \alpha(f)(p)$, entonces α_p es una derivación en p. Consideramos $\mathscr{D}$ como $\mathscr{C}^\infty(M)$-módulo con el producto $(g\alpha)(f) = g\alpha(f)$.

En la demostración de esta proposición daremos la identificación anunciada.

Proposición 5.4. *$\mathscr{X}(M)$ y $\mathscr{D}$ son isomorfos como espacios vectoriales reales y como $\mathscr{C}^\infty(M)$-módulos.*

Demostración. Definimos

$$\begin{aligned} F : \mathscr{X}(M) &\to \mathscr{D} \\ X &\mapsto (\alpha_X : f \mapsto X_\_(f)) \end{aligned}$$

y vamos a ver que F es un isomorfismo de espacios vectoriales y de módulos.

Primero, veamos que está bien definida, es decir, para cada $X \in \mathscr{X}(M)$, α_X es una derivación. Sea una carta (V, ϕ, x_i), y expresamos

$$X\Big|_V = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_.$$

Entonces,

$$\alpha_X(f) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_(f),$$

diferenciable: $(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_f) \circ \phi^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial r_i}\right)_(f \circ \phi^{-1}) \circ \phi \circ \phi^{-1}$. Además, $\alpha_X(\cdot)(p) = X_p$ es una derivación en p.

Veamos que es isomorfismo. Es inmediato que es lineal y morfismo de módulos. Hay que ver que tiene núcleo trivial y que es sobreyectivo. Núcleo trivial:

$$\begin{aligned} &\alpha_X = 0 \\ \iff &\alpha_X(f) = 0 \text{ para cada } f \in \mathscr{C}^\infty(M) \\ \iff &X_p(f) = 0 \text{ para cada } p \in M, f \in \mathscr{C}^\infty(M). \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathscr{D}$, tomando X dado por $X_p(g) = \alpha(g)(p)$, se tiene $\alpha_X = \alpha$. □

Tenemos así dos formas de interpretar un campo diferenciable X: como una aplicación diferenciable $X : M \to \mathrm{T}M$, o como una derivación $X : \mathscr{C}^\infty(M) \to$

$\mathscr{C}^\infty(M)$, dada por $X(f)(p) = X_p(f)$. Vamos a aprovechar esta identificación para dar una estructura de álgebra de Lie sobre $\mathscr{X}(M)$, mediante el corchete de Lie:

$$\begin{aligned}[-,-] : \mathscr{X}(M)^2 &\to \mathscr{X}(M) \\ (X,Y) &\mapsto [X,Y] : (f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))).\end{aligned}$$

Desarrollando $[X,Y](fg)$, es inmediato comprobar que está bien definido.

Proposición 5.5. *Se verifican:*

(i) $[X,Y] = -[Y,X]$,
(ii) $[X,X] = 0$,
(iii) $[-,-]$ *es bilineal,*
(iv) $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$,
(v) *la* identidad de Jacobi*:*

$$[[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,Z],X] = 0.$$

Demostración. Todas las propiedades se siguen de la definición, desarrollando cuando sea necesario. □

Proposición 5.6. *Sea $F : M \to N$ un difeomorfismo. Sea $F_* : \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ dado por $F_*(X)_{F(p)} = \mathrm{d}F_p(X_p)$. Entonces, F_* es un isomorfismo de álgebras de Lie.*

Demostración. Comenzamos probando que es homomorfismo de álgebras de Lie.

$$\begin{aligned}F_*([X,Y])_{F(p)}(f) &= \mathrm{d}F_p([X,Y]_p)(f) \\ &= [X,Y]_p(f \circ F) \\ &= X_p(Y(f \circ F)) - Y_p(X(f \circ F)).\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}X_p(Y(f \circ F)) &= X_p(Y(f \circ F) \circ F^{-1} \circ F) \\ &= \mathrm{d}F_p(X_p)(Y(f \circ F) \circ F^{-1}) \\ &= F_*(X)_{F(p)}(Y(f \circ F) \circ F^{-1}),\end{aligned}$$

y además,

$$\begin{aligned}F_*(X)(f)(F(p)) &= \mathrm{d}F_p(Y_p)(f) \\ &= Y_p(f \circ F) \\ &= Y(f \circ F)(p),\end{aligned}$$

luego $F_*(Y)(f) = Y(f \circ F) \circ F^{-1}$. Uniendo todo esto tenemos:

$$\begin{aligned}F_*([X,Y])_{F(p)}(f) &= F_*(X)_{F(p)}(F_*(Y)(f)) - F_*(Y)_{F(p)}(F_*(X)(f)) \\ &= [F_*(X), F_*(Y)]_{F(p)}(f).\end{aligned}$$

Para ver que F_* es invertible y su inversa es un homomorfismo de álgebras de Lie, basta ver que su inversa es $\left(F^{-1}\right)_*$:

$$\begin{aligned}\left(F^{-1}\right)_* (F_*(X))_p &= \left(\mathrm{d}F^{-1}\right)_{F(p)} \left(F_*(X)_{F(p)}\right) \\ &= \left(\mathrm{d}F^{-1}\right)_{F(p)} \left(\mathrm{d}F_p(X_p)\right) \\ &= \mathrm{d}(\mathrm{id})_p(X_p) \\ &= X_p.\end{aligned}$$

y análogamente con la composición a la derecha. □

Proposición 5.7 (Propiedades de F_*). *Se verifican:*

(i) F_* *es lineal,*
(ii) $F_*(fX) = (f \circ F^{-1})F_*(X)$, *para cada* $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$,
(iii) *propiedad de funtorialidad:* $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$,
(iv) $(F^{-1})_* = (F_*)^{-1}$.

5.4. Campos diferenciables en subvariedades

Vamos a relacionar el concepto de campo diferenciable con el concepto clásico visto en $\mathbb{R}^n$. Sea $O \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Entonces, los campos $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial r_n}\right)\right\}$ están globalmente definidos.

Así, cualquier campo $X \in \mathscr{X}(O)$ se expresa en coordenadas como $X = \sum_{i=1}^n X_i \left(\frac{\partial}{\partial r_i}\right)$. La aplicación dada por

$$\begin{aligned}\mathscr{X}(O) &\to \mathscr{C}^\infty(O, \mathbb{R}^n) \\ X &\mapsto (X_1, \dots, X_n)\end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales y de $\mathscr{C}^\infty(O)$-módulos.

Ahora, consideramos $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ una subvariedad cerrada. Recordamos la identificación de T_pM con un subespacio V_p de $\mathbb{R}^N$ mediante $\lambda_p^{-1} \circ \mathrm{d}i_p$, y definimos

$$\begin{aligned}T : \mathscr{X}(M) &\to \left\{F \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R}^N) : F(p) \in V_p \text{ para cada } p \in M\right\} \\ X &\mapsto \left(p \mapsto (\lambda_p^{-1} \circ \mathrm{d}i_p)(X_p)\right).\end{aligned}$$

Tenemos de nuevo:

Proposición 5.8. *La aplicación T definida en el párrafo anterior es un isomorfismo de espacios vectoriales y $\mathscr{C}^\infty(M)$-módulos.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}i_p(X_p) &= \sum_{j=1}^{N} \big(\mathrm{d}i_p(X_p)\big)(r_j)\left(\frac{\partial}{\partial r_j}\right)_p \\
&= \sum_{j=1}^{N} X_p(r_j \circ i)\left(\frac{\partial}{\partial r_j}\right)_p \\
&= \sum_{j=1}^{N} X_p\left(r_j\big|_M\right)\left(\frac{\partial}{\partial r_j}\right)_p \\
&= \left(\sum_{j=1}^{N} X\left(r_j\big|_M\right)\left(\frac{\partial}{\partial r_j}\right)\right)_p,
\end{aligned}$$

por lo que $\lambda_p^{-1}(\mathrm{d}i_p(X_p)) = \left(X_p\left(r_1\big|_M\right), \dots, X_p\left(r_N\big|_M\right)\right)$, y por tanto

$$T(X) = \left(X\left(r_1\big|_M\right), \dots, X\left(r_N\big|_M\right)\right).$$

Es inmediato que T es lineal y homomorfismo de $\mathscr{C}^\infty(M)$-módulos.

Es inyectiva: $X \in \ker(T)$ si y solo si $\mathrm{d}i_p(X_p)$ tiene coordenadas nulas para cada $p \in M$, y $\mathrm{d}i_p$ es inyectiva.

Es sobreyectiva: si $F \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R}^N)$, entonces definiendo

$$X_p = (\mathrm{d}i_p)^{-1}(\lambda_p(F(p)))$$

se tiene $T(X) = F$. Solo queda ver que X así definido es diferenciable. Sea $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, y sea $\tilde{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ una extensión de f. Entonces, $\mathrm{d}i_p(X_p) = \lambda_p(F(p))$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}i_p(X_p)(\tilde{f}) &= \lambda_p(F(p))(\tilde{f}) \\
&= \sum_{i=1}^{N} F_i(p)\left(\frac{\partial}{\partial r_i}\right)_p (\tilde{f}) \\
&= X_p(\tilde{f} \circ i) \\
&= X_p(f).
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.3. Para la esfera unidad n-dimensional $\mathbb{S}^n$, habíamos identificado $\mathrm{T}_p\mathbb{S}^n \cong \langle p \rangle^\perp$. Así, identificamos

$$\mathscr{X}(M) \cong \left\{X \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^{n+1}) : \langle X_p, p\rangle = 0,\, p \in \mathbb{S}^n\right\}.$$

Entonces, es sencillo comprobar que los siguientes son campos diferenciables en esferas:

(i) $X_p = a - \langle p, a\rangle p$, para $a \in \mathbb{R}^{n+1}$,

(ii) El producto vectorial $X_p = p \times a$, en $\mathbb{S}^2$,

(iii) En $\mathbb{S}^{2n+1}$, $X_p = (-p_2, p_1, \dots, -p_{2n+2}, p_{2n+1})$. Este es un campo sin ceros.

5.4.1. Campos diferenciables en la esfera

Consideramos el difeomorfismo antípoda

$$\begin{aligned} A : \mathbb{S}^n &\to \mathbb{S}^n \\ p &\mapsto -p, \end{aligned}$$

que verifica $A \circ A = \mathrm{id}$. Así, A_* es un automorfismo de $\mathscr{X}(\mathbb{S}^n)$, que verifica $A_* \circ A_* = (A \circ A)_* = \mathrm{id}$, luego A_* tiene dos valores propios: 1 y -1. Llamando $\mathscr{X}_+(\mathbb{S}^n)$ y $\mathscr{X}_-(\mathbb{S}^n)$ a los subespacios propios de 1 y -1,

$$\mathscr{X}(\mathbb{S}^n) = \mathscr{X}_+(\mathbb{S}^n) \oplus \mathscr{X}_-(\mathbb{S}^n).$$

Además, la descomposición viene dada, para cada $X \in \mathscr{X}(\mathbb{S}^n)$, de la siguiente forma:

$$X = \underbrace{\frac{X + A_*(X)}{2}}_{\in \mathscr{X}_+(\mathbb{S}^n)} + \underbrace{\frac{X - A_*(X)}{2}}_{\in \mathscr{X}_-(\mathbb{S}^n)}.$$

A_* verifica lo siguiente:

$$A_*(X)_{-p} = A_*(X)_{A(p)} = \mathrm{d}A_p(X_p) = -X_p.$$

Así, podemos caracterizar $\mathscr{X}_+(\mathbb{S}^n)$ y $\mathscr{X}_-(\mathbb{S}^n)$ de la siguiente forma: $X \in \mathscr{X}_+(\mathbb{S}^n) \iff X_{-p} = -X_p$, mientras que $X \in \mathscr{X}_-(\mathbb{S}^n) \iff X_{-p} = X_p$.

5.4.2. Campos diferenciables en el proyectivo

Vamos a identificar $\mathscr{X}(\mathbb{RP}^n)$ con $\mathscr{X}_+(\mathbb{S}^n)$. Hemos visto que la proyección $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ es un isomorfismo local. Definimos

$$\begin{aligned} T : \mathscr{X}(\mathbb{RP}^n) &\to \mathscr{X}_+(\mathbb{S}^n) \\ Y &\mapsto (p \mapsto (\mathrm{d}\pi_p)^{-1}(Y_{\pi(p)})), \end{aligned}$$

y es inmediato ver que está bien definido y es un isomorfismo de espacios vectoriales y de módulos.

5.5. Extensión de campos diferenciables

Algunos resultados que permiten extender campos diferenciables:

> **Proposición 5.9.** *Sea M una variedad diferenciable. Se verifican:*
>
> (i) *si $O \subseteq M$ es abierto, y $X \in \mathscr{X}(O)$, entonces para cada $p \in O$ existen $\tilde{O} \subseteq O$ entorno abierto de p y $\tilde{X} \in \mathscr{X}(M)$ tales que $\tilde{X}\big|_{\tilde{O}} = X\big|_{\tilde{O}}$,*
> (ii) *para cada $p \in M$ y $v \in \mathrm{T}_pM$, existe $X \in \mathscr{X}(M)$ tal que $X_p = v$,*
> (iii) *si $M \subseteq \mathbb{R}^N$ es una subvariedad cerrada, y $X \in \mathscr{X}(M)$, entonces existe $\tilde{X} \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\tilde{X}\big|_M = X$.*

Demostración. (i): aplicando la proposición 3.5 a p y O, obtenemos $V_p \subseteq O$ abierto y relativamente compacto, y $\psi \in \mathscr{C}^\infty(M)$ con $\operatorname{sop}(\psi) \subseteq O$ compacto, $\psi\big|_{V_p} = 1$. Llamando $\tilde{O} = V_p$ y

$$\tilde{X}(f) = \begin{cases} \psi X(f\big|_O) & \text{en } O, \\ 0 & \text{en } M - O, \end{cases}$$

se obtiene el resultado.

(ii): sea (V, ϕ, x_i) una carta de M con $p \in V$. Ponemos v en coordenadas como $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$. Definimos $X := \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ y aplicamos (i) a X y V.

(iii): viendo X como función diferenciable de M a $\mathbb{R}^N$, sean $X_1, \ldots, X_n$ sus componentes. Por ser M cerrada, existen extensiones diferenciables de esas componentes (corolario 4.2). El campo cuyas componentes son estas extensiones es una extensión de X a $\mathbb{R}^N$. $\square$

6. Formas diferenciables

Definición 6.1 (Espacio cotangente). Dada una variedad diferenciable M, y un punto $p \in M$, llamamos *espacio cotangente* a T_p^*M, el dual del espacio tangente a M en p.

También hacemos la construcción análoga al fibrado tangente:

Definición 6.2 (Fibrado cotangente). Se llama *fibrado cotangente* a

$$\mathrm{T}^*M := \bigsqcup_{p \in M} \mathrm{T}_p^*M.$$

El fibrado cotangente también está provisto de una proyección natural

$$\begin{aligned} \Pi : \mathrm{T}^*M &\to M \\ (p, \omega) &\mapsto p. \end{aligned}$$

Consideramos a T^*M dotado de estructura de variedad $2n$-dimensional, como se hizo en la proposición 5.2, y usando, en lugar de $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}$, su base dual.

Definición 6.3 (1-forma). Una 1-forma es una aplicación $\omega : M \to \mathrm{T}^*M$ tal que $\Pi \circ \omega = \mathrm{id}$.

Ejemplo 6.1. Si $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, entonces $\mathrm{d}f_p : \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, luego podemos considerar $\mathrm{d}f$ una 1-forma sobre M.

Una observación que será instrumental en lo sucesivo:

Proposición 6.1. *Con la identificación de* $\mathrm{T}_p\mathbb{R} \cong V_p$ *dada en la sección 4.4, si* (V, ϕ, x_i) *es una carta en* M*, y* $p \in V$*,*

$$(\mathrm{d}x_i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \delta_{ij}.$$

Demostración. Para cada $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}x_i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)(f) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f \circ x_i) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial r_j}\right)(f \circ x_i \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial r_j}\right)(f \circ r_i)(\phi(p)) \\
&= f'(\phi_i(p))\left(\left(\frac{\partial}{\partial r_j}\right) r_i\right)(\phi(p)) \\
&= f'(\phi_i(p))\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

En particular,

$$(\mathrm{d}x_i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)(r) = \delta_{ij}.$$

□

Ejemplo 6.2. Sean (V, ϕ, x_i) una carta de M, y $p \in V$. La proposición anterior nos dice que $\left\{(\mathrm{d}x_i)_p\right\}_{i=1}^n$ es la base dual de $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}_{i=1}^n$.

Proposición 6.2. *Sean* ω *una 1-forma sobre* M*,* (V, ϕ, x_i) *una carta de* M *y* $p \in M$*. Entonces,*

$$\left(\omega\big|_V\right)_p = \sum_{i=1}^n \left(\omega\big|_V\right)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)(\mathrm{d}x_i)_p.$$

Demostración. Hemos visto que $\left\{(\mathrm{d}x_i)_p\right\}_{i=1}^n$ es una base de T_p^*M, por lo que

$$\omega\big|_V = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{d}x_i.$$

Queda observar que

$$\left(\omega\big|_V\right)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \sum_{i=1}^n a_i(p)\delta_{ij} = a_j(p).$$

□

Definición 6.4 (1-forma diferenciable). Decimos que $\omega : M \to \mathrm{T}^*M$ es una *1-forma diferenciable* si lo es como aplicación entre variedades diferenciables.

Proposición 6.3 (Caracterización de la diferenciabilidad). *ω es diferenciable si, y solo si, $a_i \in \mathscr{C}^\infty(V)$ para cada carta (V, ϕ, x_i) de un atlas.*

Notaremos $\Omega^1(M) := \{\omega : \omega \text{ es una 1-forma diferenciable sobre } M\}$.

Parte II.
Ejercicios

7. Aplicaciones diferenciables entre variedades

Ejercicio 7.1. Sean $M_1^{n_1}$ y $M_2^{n_2}$ variedades diferenciables. Probar:

(i) Las proyecciones π_1 y π_2 de la variedad producto $M_1 \times M_2$ son diferenciables,

(ii) si $(p_0, q_0) \in M_1 \times M_2$, entonces $i_{q_0} : M_1 \to M_1 \times M_2$ dada por $i(p) = (p, q_0)$ es diferenciable.

Solución. (i): Tomando $(x, y) \in M_1 \times M_2$, y $(V_1 \times V_2, \phi_1 \times \phi_2)$ una carta en (x, y), el siguiente diagrama ilustra la situación:

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\phi_1 \times \phi_2"] & V_1 \arrow[d, "\phi_1"] \\ \mathbb{R}^{n_1+n_2} & \mathbb{R}^{n_1} \end{tikzcd}$$

Ahora, es claro que $\phi_1 \circ \pi_1 \circ (\phi_1 \times \phi_2)^{-1}$ actúa como la proyección $(\phi_1(x), \phi_2(y)) \mapsto \phi_1(x) : \phi_1(V_1) \times \phi_2(V_2) \to \phi_1(V_1)$.

(ii): en este caso, tendríamos un diagrama parecido:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "i_{q_0}"] \arrow[d, "\phi_1"] & V_1 \times V_2 \arrow[d, "\phi_1 \times \phi_2"] \\ \mathbb{R}^{n_1} & \mathbb{R}^{n_1+n_2} \end{tikzcd}$$

y la composición $(\phi_1 \times \phi_2) \circ i_{q_0} \circ \phi_1^{-1}$ llevaría puntos $\phi_1(x)$ en $(\phi_1(x), \phi_2(q_0))$.