

Ecuaciones Diferenciales II

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM



Este libro se distribuye bajo una licencia CC BY-NC-SA 4.0.

Eres libre de distribuir y adaptar el material siempre que reconozcas a los autores originales del documento, no lo utilices para fines comerciales y lo distribuyas bajo la misma licencia.

creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Ecuaciones Diferenciales II

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Índice

I. Teoría	5
1. Ecuaciones lineales: teoremas de existencia y unicidad.	5
1.1. Matriz fundamental principal en un punto	6
2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov.	7
2.1. Estabilidad en EDO lineales.	8
2.1.1. Estabilidad de ecuaciones lineales escalares.	9
2.1.2. Estabilidad de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.	9
3. Órbitas	12
3.1. Diagramas de fase planos de EDO lineales	12
3.1.1. Valores propios reales	12
4. Ecuaciones no lineales: generalidades sobre existencia y unicidad de la solución	15
II. Ejercicios	17

Parte I.

Teoría

1. Ecuaciones lineales: teoremas de existencia y unicidad.

Definición 1.1 (Ecuación diferencial lineal). Sea $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sean $A : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ y $b : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^d$ funciones continuas. Entonces una ecuación diferencial lineal es de la forma:

$$x' = A(t)x + b(t), \quad (\text{C})$$

y se dice *completa*, o bien

$$x' = A(t)x, \quad (\text{H})$$

y en este caso se dice *homogénea*.

Teorema 1.1 (de existencia y unicidad de la solución). Dados $t_0 \in (\alpha, \beta)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y consideramos el *problema de valores iniciales* (PVI):

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{PVI})$$

Entonces, existe y es única una función $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^d$, con $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, que verifica

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t) \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

y que además cumple $\varphi(t_0) = x_0$, es decir, una única solución de [PVI](#).

Aplicando el teorema al PVI

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(t_0) = e_j. \end{cases} \quad (\text{PVI}_j)$$

para cada $j = 1, \dots, d$, obtenemos soluciones φ_j . Sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$, y consideramos $\varphi = \sum_{j=1}^d \langle x_0, e_j \rangle \varphi_j$. Es inmediato comprobar que φ es solución de [PVI](#) con $b = 0$. Por tanto, hemos probado:

Corolario 1.1. Las soluciones de [H](#) son un espacio vectorial de dimensión d .

Ahora, consideremos φ la solución de [PVI](#), para $x_0 \in \mathbb{R}^d$ arbitrario, es decir, una solución cualquiera de [C](#). Sean φ_c la solución de

1. Ecuaciones lineales: teoremas de existencia y unicidad.

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x'_0, \end{cases} \quad (1)$$

con $x'_0 \in \mathbb{R}^d$ arbitrario, y φ_h la de

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0 - x'_0, \end{cases} \quad (2)$$

y ahora es rutinario comprobar que $\varphi = \varphi_c + \varphi_h$. Además, para cualquier otra solución ψ_h de [H](#), $\varphi_c + \psi_h$ es solución de [C](#). En esta ocasión, hemos probado:

Corolario 1.2. El conjunto S_c de soluciones de [C](#), dada cualquier solución φ de la misma, es el espacio afín

$$S_c = \varphi + S_h,$$

con S_h el conjunto de soluciones de [H](#).

Otra consecuencia inmediata de la aplicación del teorema a [PVI](#), es la siguiente:

Corolario 1.3 (Existencia y unicidad de m.f.p.). Existe una única función de clase $1 \Phi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ tal que $\Phi' = A\Phi$, y además $\Phi(t_0) = I_d$.

1.1. Matriz fundamental principal en un punto

Dada una EDO lineal y homogénea con coeficientes constantes:

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{PVIH})$$

La matriz cuya existencia garantiza [1.3](#) (la *matriz fundamental principal (m.f.p.)* en t_0) viene dada por:

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)} \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

Ahora nos preguntamos cómo se calcula la m.f.p. cuando la matriz A es constante y diagonalizable (sobre \mathbb{C}). En este caso, existen $P, D \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ regulares y tales que $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ y $A = PDP^{-1}$. En cuyo caso, la matriz fundamental principal será:

$$e^{At} = P \cdot e^{Dt} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_d t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Nota. Recordando la definición de exponencial de una matriz A : $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, obtenemos que, para cada matriz regular P ,

$$e^{PAP^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (PAP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} PA^k P^{-1} = Pe^A P^{-1}.$$

Cuando A no sea diagonalizable tendremos que utilizar la forma canónica de Jordan. En este caso, existen $P, J \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ regulares, y con J diagonal por bloques:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_r \end{pmatrix}, \quad e^J = \begin{pmatrix} e^{J_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{J_r} \end{pmatrix}$$

donde, si el orden de J_k es 1, entonces $J_k = (\lambda_k)$ con λ_k valor propio de A , y en otro caso, si lo llamamos r :

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad e^{J_k} = e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & t^r/r! \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

En esta sección, con arreglo a definir los conceptos básicos de la teoría de estabilidad de Lyapunov, consideramos un problema de valores iniciales más general:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

con $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ continua y tal que haya unicidad de soluciones en [P](#). Notamos, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tal que $(t_0, x_0) \in D$, $\varphi_{x_0} : (\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ a la solución maximal de [P](#).

Definición 2.1. φ_{x_0} es estable si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(t_0, \bar{x}_0) \in D \text{ y } \|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta \implies \begin{cases} \varphi_{\bar{x}_0} \text{ está definida en } (t_0, +\infty), \\ \|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{\bar{x}_0}(t)\| < \varepsilon \text{ para cada } t \geq t_0. \end{cases}$$

$\varphi_{x_0}[t_0, +\infty) + (-\varepsilon, \varepsilon)$ se llama *entorno tubular* de φ_{x_0} .

Definición 2.2. Una solución se dice *inestable* si no es estable.

Negando la definición de estabilidad, obtenemos:

Proposición 2.1 (Caracterización de soluciones inestables). φ_{x_0} es inestable si, y solo si, existen $\varepsilon_0 > 0$, $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ con $(t_0, x_n) \in D$, $x_n \rightarrow x_0$ y existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, $t_n \geq t_0$ tal que

2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

$$\|\varphi_{x_n}(t_n) - \varphi_{x_0}(t_n)\| \geq \varepsilon_0.$$

Definición 2.3 (Atractor). φ_{x_0} es un *atractor* (local) si existe $\mu > 0$ tal que, si $(t_0, \bar{x}_0) \in D$ y $\|x_0 - \bar{x}_0\| < \mu$, entonces $\varphi_{\bar{x}_0}$ está definida en $(t_0, +\infty)$ y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi_{\bar{x}_0}(t) - \varphi_{x_0}(t)\| = 0.$$

Definición 2.4 (Estabilidad asintótica). φ_{x_0} es *asintóticamente estable* (a.e.) si es estable y atractor.

2.1. Estabilidad en EDO lineales.

Proposición 2.2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Todas las soluciones de **C** son estables,
- (ii) existe una solución de **C** que es estable,
- (iii) la solución trivial ($\varphi = 0$) de **H** es estable,
- (iv) todas las soluciones de **H** son acotadas en $[t_0, +\infty)$,
- (v) la m.f.p. en t_0 de **H** es acotada en $[t_0, +\infty)$.

Demostración.

i) \implies ii) Evidente.

ii) \implies iii) Sean $\varepsilon > 0$, φ_{x_0} solución estable de **C**, y δ el dado por la estabilidad de φ_{x_0} para ε .

Sea ψ solución de **H** con $\|\psi(t_0)\| < \delta$. Entonces, $y := \psi + \varphi_{x_0}$ es solución de **C** y $\|y(t_0) - \varphi_{x_0}(t_0)\| = \|\psi(t_0)\| < \delta$, y por la estabilidad, $\|\psi(t)\| < \varepsilon$ para cada $t \in [t_0, +\infty)$.

iii) \implies iv) Sea φ_{x_0} una solución cualquiera de **H**, y sea $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|\lambda x_0\| < \delta$, con δ el dado por la estabilidad para $\varepsilon = 1$. Entonces, como $\lambda \varphi_{x_0}$ es solución, $\|\varphi_{x_0}(t)\| < 1/\lambda$ para cada $t \in [t_0, +\infty)$.

iv) \implies v) Se deduce usando la norma del supremo tanto en \mathbb{R}^d como en $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, y teniendo en cuenta que la m.f.p. está formada por soluciones por columnas. En general, basta usar cualquier par de normas tales que la matricial sea compatible con la que se usa en \mathbb{R}^d , en el sentido de que $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|$.

v) \implies i) Sean M la cota de la m.f.p., que notamos Φ , y $\varepsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta M < \varepsilon$, y $\varphi_{x_0}, \varphi_{\bar{x}_0}$ soluciones de **C** tales que $\|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta$.

Teniendo en cuenta que $\varphi_{x_0} = \varphi_{\bar{x}_0} + \Phi(x_0 - \bar{x}_0)$, obtenemos $\|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{\bar{x}_0}(t)\| \leq \|\Phi(t)\|\|x_0 - \bar{x}_0\| < M\delta < \varepsilon$. \square

Proposición 2.3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Todas las soluciones de **C** son atractores.
- (ii) Existe una solución de **C** que es un atractor.

2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

- (iii) La solución trivial $y = 0$ de **H** es un atractor.
- (iv) Todas las soluciones de **H** convergen hacia el vector 0 cuando $t \rightarrow +\infty$.
- (v) La matriz fundamental de **H** principal en t_0 converge hacia la matriz 0 cuando $t \rightarrow +\infty$.

Corolario 2.1. Los atractores de la ecuación **C** son asintóticamente estables.

Definición 2.5. Se dice que la ecuación **C** es *estable* si todas su soluciones son estables, y, análogamente, la ecuación **C** se dice *asintóticamente estable* si todas sus soluciones son asintóticamente estables.

No siempre podemos calcular la matriz fundamental, pero nos centraremos en casos donde sí podemos calcularla.

2.1.1. Estabilidad de ecuaciones lineales escalares.

Sean $a, b : (\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continuas. Se considera la ecuación diferencial lineal escalar

$$x' = ax, \quad (\text{l.e.})$$

y sea $t_0 \in (\alpha, +\infty)$.

La matriz fundamental principal en t_0 en $\phi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$ y por tanto podemos caracterizar la estabilidad de **C** controlando una primitiva del coeficiente $a(t)$.

Proposición 2.4.

- (i) La ecuación **l.e.** es estable si, y solo si la función $a(t)$ tiene una primitiva acotada superiormente en $[t_0, +\infty)$.
- (ii) La ecuación **l.e.** es a.e. si, y solo si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t a(s)ds = -\infty$.

Ejemplo 1: - Inestable - A.E. - estable - - Inestable - estable - estable -
Estable $\rightarrow \lambda \leq 0$ A.E. $\rightarrow \lambda < 0$ Inestable $\rightarrow \lambda > 0$

2.1.2. Estabilidad de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

Sea $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Fijamos alguna notación:

Notación (Multiplicidad (aritmética)). Notamos por $m(\lambda)$ a la *multiplicidad* del valor propio λ , es decir, la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de A .

Notación (Espectro). El *espectro* de A es el conjunto de valores propios de A , tanto reales como complejos, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$, contados con su multiplicidad.

Notación. Los valores propios de A cuya parte real es 0:

$$\sigma_0(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re}(\lambda) = 0\}.$$

2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

Fijamos $b : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^d$ y consideramos las EDO lineales

$$x' = Ax, \quad (\text{l.c.h.})$$

$$x' = Ax + b \quad (\text{l.c.c.})$$

El principal indicador para determinar la estabilidad de esta es el máximo de las partes reales de los valores propios de A :

$$\mu(A) = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Teorema 2.1. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- (i) si $\mu(A) < 0$ entonces \mathcal{C} es a.e.,
- (ii) si $\mu(A) = 0$ y $m(\lambda) = \dim(E_\lambda)$ para cada $\lambda \in \sigma_0(A)$, entonces \mathcal{C} es estable (pero no a.e.),
- (iii) si $\mu(A) = 0$ y existe $\lambda \in \sigma_0(A)$ tal que $m(\lambda) \neq \dim(E_\lambda)$, entonces \mathcal{C} es inestable,
- (iv) si $\mu(A) > 0$ entonces \mathcal{C} es inestable.

A continuación, veremos una serie de ejemplos y proseguiremos con la teoría necesaria para abordar la demostración de este enunciado.

Ejemplo 2.1.

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + 3x_2 \\ x'_2 = 5x_1 - x_2 \end{cases}$$

La ecuación característica de A de orden 2 es $\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$. En este caso, $\lambda^2 + 3\lambda - 13 = 0$. Por tanto,

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{61}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{61}}{2} \right\} = \{2.4\dots, 5.4\dots\},$$

luego $\mu(A) > 2.4 > 0$, y por tanto la ecuación es inestable.

Vistos los ejemplos, con el objetivo de demostrar el teorema, recordemos la forma canónica de Jordan.

Sea $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \exists P, J \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tales que :

- P es regular (invertible)
- J es diagonal por bloques:

$$J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_k) \text{ matriz diagonal } \forall j = 1, \dots, k \quad (3)$$

- $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ Para calcular J se usan:
- $\sigma(A) = \lambda_1, \dots, \lambda_d$
- $m(\lambda_j)$
- $\dim E_{\lambda_j}$

2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

- $\nu(\lambda_j) = \min k \in \mathbb{Z}^+ : \text{BORRA}$ Los bloques de J pueden ser:
- de orden 1: $J_k = (\lambda_k)\lambda_k \in \sigma(A)$
- de orden mayor que 1: $J_k = \text{diag}(\lambda_k, \dots, \lambda_k)(1 \dots 1 \text{ encimadeladiag}) \text{ con } \lambda_k \in \sigma(A)$
- el orden $(J_k) \leq \nu(\lambda_k)$
- la suma de los órdenes de todos los bloques asociados aun mismo valor propio es igual a la multiplicidad de ese valor propio

INSERTE EJEMPLO DE CAJA DE JORDAN

Con estos datos, podemos hacer el siguiente cálculo de la exponencial:

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1} \implies A^n = P \cdot J^n \cdot P^{-1} \implies e^A = P \cdot e^J \cdot P^{-1}$$

Y de manera análoga:

- $e^{At} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}$
- $e^{Jt} = \text{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_r t})$

Lema 2.1.

$$|||e^{Jt}|||_1 = \max |||e^{J_1 t}|||_1, |||e^{J_r t}|||_1$$

Lema 2.2. $\exists T \geq 0$ tal que :

$$|||e^{Jt}|||_1 = \left(1 + \dots + \frac{t^n}{n!}\right) \cdot e^{\mu t} \quad \forall t \geq T$$

donde:

$$\mu = \max \text{Re}(\lambda_j) : \lambda_j \in \sigma(A)$$

$$n = \max \nu(\lambda_j) - 1 : \lambda_j \in \sigma(A) \text{ y } \text{Re}(\lambda_j) = \mu$$

Usando el lema anterior:

$$|||e^{Jt}|||_1 = \max \left\{ \left(1 + \dots + \frac{t^{\nu(\lambda_j)-1}}{(\nu(\lambda_j)-1)!}\right) \cdot e^{\text{Re}(\lambda_j)t} : \lambda_j \in \sigma(A) \right\} \quad (\text{cosarara})$$

$\exists T \geq 0$ tal que:

$$\left(1 + \dots + \frac{t^{\nu(\lambda_j)-1}}{\nu(\lambda_j)-1}\right) \cdot e^{\text{Re}(\lambda_j)t} \leq \left(1 + \dots + \frac{t^n}{n!}\right) e^{\mu t} \quad (4)$$

Finalmente, podemos demostrar el teorema anterior:

Demostración. $\exists P, J \in \mathcal{M}_d(\mathcal{C})$ tales que P es inestable, J es diagonal por bloques y $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$. Por tanto

$$e^{At} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}$$

. Defino en $\mathcal{M}_d(\mathcal{C})$ la norma matricial:

$$|||B||| = |||P \cdot J \cdot P^{-1}|||_1$$

. Así, tenemos que:

1. Si $\mu < 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |||e^{At}||| = 0 \implies x' = Ax$ es A.E.
2. Si $\mu = 0$ y $\dim E_j = m(\lambda)' \forall \lambda \in \sigma_0(A) \implies n = 0 \implies |||e^{At}||| = 1 \implies |||e^{At}|||$ es estable pero no A.E.
3. Si $\mu = 0$ y $\exists \lambda \in \sigma_0(A) \nu(A) > 1 \implies n \geq 1 \implies |||e^{At}||| \geq 1 + t$ no es acotada en $[0, +\infty)$
4. Si $\mu > 0 \implies |||e^{At}||| \geq e^{\mu t} \rightarrow \infty$ no es acotada en $[0, +\infty)$

□

3. Órbitas

3.1. Diagramas de fase planos de EDO lineales

Consideramos la EDO lineal homogénea autónoma en \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

3.1.1. Valores propios reales

Consideramos primero el caso en que $\sigma(A) = \lambda_1, \lambda_2 \subset \mathbb{R}$, y a su vez analizamos el resto de casos según los signos de los valores propios.

Reales, positivos y distintos: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \iff \begin{cases} \Delta > 0, \\ \text{tr}(A) > 0, \\ \det(A) > 0. \end{cases}$

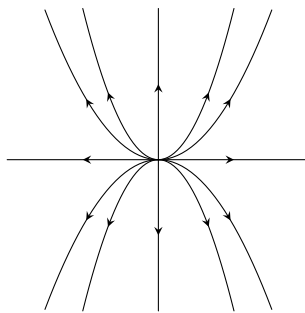


Figura 1: Una fuente.

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \quad v_j \in E_{\lambda_j}$$

(i) Son reales, negativos y distintos: $\lambda_2 < \lambda_1 \iff \begin{cases} \Delta > 0 \\ \text{tr}(A) < 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases}$ Inserte dibujito de sumidero (flechas hacia dentro)

3. Órbitas

- (ii) Son reales, no nulos y con distinto signo : $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Leftrightarrow \det(A) < 0$
 Inserte dibujito de punto hiperbólico o punto silla
- (iii) Son reales, positivos e iguales : $\lambda_1 = \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \text{tr}(A) > 0 \end{cases}$.
- a) Si A es diagonalizable : En este caso tendremos todo el espacio y volveremos a tener una fuente.
- b) Si A no es diagonalizable : Nos encontramos con una fuente degenerada.
- (iv) Son reales, negativos e iguales : $\lambda_1 = \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \text{tr}(A) < 0 \end{cases}$.
- a) Si A es diagonalizable : En este caso tendremos todo el espacio y volveremos a tener un sumidero.
- b) Si A no es diagonalizable : Nos encontramos con un sumidero degenerado.
- (v) Un valor propio es 0 y el otro positivo: $\lambda > 0$
 Inserte dibujito rectas paralelas y perpendiculares a una única recta generada por el 0 (Hacia dentro). Rectas de puntos de equilibrio estables
- (vi) Un valor propio es 0 y el otro negativo: $\lambda < 0$
 Inserte dibujito rectas paralelas y perpendiculares a una única recta generada por el 0 (Hacia fuera). Rectas de puntos de equilibrio inestables
- (vii) Dos valores propios iguales a 0: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \text{tr}(A) = 0 \\ \det(A) = 0 \end{cases}$
- a) Si A es diagonalizable $A = 0$
- b) Si A no es diagonalizable.
- (viii) Caso 2: Cuando los valores propios de la matriz A no son reales : $\sigma(A) = \lambda_1, \lambda_2 \subset \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $\lambda_1 = a + bi$ y $\lambda_2 = a - bi$.
- a) Tiene parte real positiva $\begin{cases} \Delta < 0 \\ \text{tr}(A) > 0 \end{cases}$ Fuente en espiral
- b) Tiene parte real negativa $\begin{cases} \Delta < 0 \\ \text{tr}(A) < 0 \end{cases}$ Sumidero en espiral
- c) Tiene parte real igual a 0. Diagrama de Poincaré

Ejemplo 3.1.

PREGUNTA EXAMEN PARCIAL: Representar el diagrama de fases

Nota. Recuerda que si $\lambda \in \sigma(A)$ y $v \in E_\lambda$ tal que $A \cdot v = \lambda \cdot v$ entonces $\varphi(t) = k \cdot e^{\lambda t} \cdot v \quad \forall t \in \mathbb{R}$ es solución de $x' = Ax$ y si $\varphi(t) \in E_\lambda \quad t \in \mathbb{R} \implies E_\lambda$ es invariante. De manera análoga $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \quad k_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ es también invariante. El subespacio propio generalizado sería $\lambda \in \sigma(A) \quad \hat{E}_\lambda = \cup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(A - \lambda I)^k =$

3. Órbitas

$\text{Ker}(A - \lambda I)^{v(\lambda)}$ con $\dim \hat{E}_\lambda = m(\lambda)$.

Se puede hacer la siguiente descomposición de \mathbb{R}^d .

Se definen:

$$E = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(A) \\ \text{Re}(\lambda) < 0}} \hat{E}_\lambda$$

$$\mathcal{U} = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(A) \\ \text{Re}(\lambda) > 0}} \hat{E}_\lambda$$

$$\mathcal{Z} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_0(A)} \hat{E}_\lambda$$

entonces para $x' = Ax$:

$$\mathbb{R}^d = E \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{U}$$

Ejercicio 3.1. Estudia la estabilidad del sistema lineal:

$$\begin{cases} x' = -2tx \\ y' = e^t x - 2ty \end{cases}$$

Ejercicio 3.2. Estudia la estabilidad del sistema lineal:

$$\begin{cases} x' = -2x + 5y \\ y' = -3x + 4y \end{cases}$$

Comenzamos calculando la traza y el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Tenemos entonces que:

$$\text{tr}(A) = 2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\text{Re}\lambda_1 > 0$$

$$\det(A) = 7 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$\text{Re}\lambda_1, \text{Re}\lambda_2 > 0$ luego si son reales será inestable y como $2\text{Re}\lambda_1 > 0$ entonces si son complejos también será inestable.

Ejercicio 3.3.

$$\begin{cases} x' = -2x + y - z \\ y' = 2x - 3y + z \\ z' = 4x - 4y + 2z \end{cases}$$

Tras unos cálculos, tenemos que: $\sigma(A) = -2, -1, 0$ luego es estable pero no asintóticamente estable.

Nota. El polinomio característico de $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ es $-\lambda^3 + \text{tr}(A)\lambda^2 - \text{tr}(\text{adj}(A))\lambda + \det(A)$.

Ejercicio 3.4. Estudia la estabilidad (FALTA)

Ejercicio 3.5. Representa el diagrama de fases de la EDO lineal:

$$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$$

Solución. Sus valores propios son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-5 - \sqrt{33}) \approx -5.37$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-5 + \sqrt{33}) \approx 0.37$$

Y sus vectores propios serían:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -0.68 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2.19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Ecuaciones no lineales: generalidades sobre existencia y unicidad de la solución

Definición 4.1 (Solución de una EDO). Dados un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y una función continua $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$, consideramos la ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$x' = f(t, x) \quad (\text{EDO})$$

Una *solución* de una EDO en un intervalo abierto $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ que verifica:

- φ continua y derivable en J
- $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in J$

Definición 4.2 (Solución Prolongable). Una solución $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ es *prolongable* si existe otra solución $\hat{\varphi} : \hat{J} \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que:

- $J \subsetneq \hat{J}$.

4. Ecuaciones no lineales: generalidades sobre existencia y unicidad de la solución

$$\bullet \hat{\varphi}|_J = \varphi.$$

Definición 4.3 (Solución Maximal). Una solución que no es prolongable recibe el nombre de *maximal*.

Dadas dos soluciones de la EDO:

$$\varphi_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^d \quad \varphi_2 : J_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$$

tales que existe $\tau \in J_1 \cap J_2$ tal que $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau)$ y se verifica que la función definida a trozos:

$$\phi : J_1 \cup J_2 \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \phi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{si } t \leq \tau \\ \varphi_2(t) & \text{si } t \geq \tau \end{cases}$$

también es solución de la EDO. Dados un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, un punto $(t_0, x_0) \in D$ y una función continua $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$, consideramos el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{PVI})$$

Definición 4.4 (Solución de un PVI). Es una función $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ donde:

1. $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto tal que $t_0 \in J$,
2. $\varphi(t_0) = x_0$,
3. φ es solución de la EDO $x' = f(t, x)$.

Existen varios conceptos de unicidad:

Definición 4.5 (Unicidad Global). El EDO verifica la propiedad de *unicidad global* si para cualquier par de solución del PVI

$$\varphi_1 : J \rightarrow \mathbb{R}^d \quad \varphi_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^d$$

se cumple $\forall t \in J_1 \cap J_2$ que $\phi_1(t) = \phi_2(t)$.

Definición 4.6 (Unicidad Local).

Faltan más conceptos de unicidad.

Parte II.

Ejercicios