Ecuaciones Diferenciales II

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Ecuaciones Diferenciales II

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Índice

Parte I.
Teoría

1. Ecuaciones lineales: teoremas de existencia y unicidad.

Definición 1.1 (Ecuación diferencial lineal). Sea $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sean $A : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ y $b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^d$ funciones continuas. Entonces una ecuación diferencial lineal es de la forma:

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{C}$$

y se dice *completa*, o bien

$$x' = A(t)x, \tag{H}$$

y en este caso se dice *homogénea*.

Teorema 1.1 (Teorema de existencia y unicidad de la solución). Dados $t_0 \in (\alpha, \beta)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y consideramos el *problema de valores intermedios* (PVI):

$$\begin{cases} x' &= A(t)x + b(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \tag{PVI}$$

Entonces, existe una única solución $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^d$, con $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, que verifica

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t) \qquad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

y que además cumple $\varphi(t_0) = x_0$, es decir, una única solución de PVI.

Aplicando el teorema al PVI

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(t_0) = e_j. \end{cases} \tag{PVI$_j$}$$

para cada $j = 1, \ldots, d$, obtenemos soluciones φ_j. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$, y consideramos $\varphi = \sum_{j=1}^d \langle x_0, e_j \rangle \varphi_j$. Es inmediato comprobar que φ es solución de (PVI) con $b = 0$. Por tanto, hemos probado:

Corolario 1.1. Las soluciones de (H) son un espacio vectorial de dimensión d.

Ahora, consideremos φ la solución de (PVI), para $x_0 \in \mathbb{R}^d$ arbitrario, es decir, una solución cualquiera de (C). Sean φ_c la solución de

$$\begin{cases} x' &= A(t)x + b(t), \\ x(t_0) &= x_0', \end{cases} \tag{1}$$

con $x_0' \in \mathbb{R}^d$ arbitrario, y φ_h la de

$$\begin{cases} x' &= A(t)x, \\ x(t_0) &= x_0 - x_0', \end{cases} \tag{2}$$

y ahora es rutinario comprobar que $\varphi = \varphi_c + \varphi_h$. Además, para cualquier otra solución ψ_h de (H), $\varphi_c + \psi_h$ es solución de (C). En esta ocasión, hemos probado:

Corolario 1.2. El conjunto S_c de soluciones de (C), dada cualquier solución φ de la misma, es el espacio afín

$$S_c = \varphi + S_h,$$

con S_h el conjunto de soluciones de (H).

1.1. Matriz Fundamental Principal en un punto

Definición 1.2. Dada una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) lineal y homogénea con coeficientes constantes:

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Definimos la matriz fundamental principal(m.f.p) en t_0 como:

$$\phi(t) = e^{A(t-t_0)} \qquad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

Ahora nos preguntamos cómo se calcula la m.f.p. cuando la matriz A es diagonalizable. En este caso, $\exists P, D \in \mathcal{M}_d(\mathcal{C})$ tales que $det(P) \neq 0, \quad D = diag(\lambda_1, ...\lambda_d)$ y $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. En cuyo caso, la matriz fundamental principal será:

$$e^{At} = P \cdot e^{Dt} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_d t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

Cuando A no sea diagonalizable tendremos que utilizar la forma canónica de Jordan. En este caso, $\exists P, J \in \mathcal{M}_d(\mathcal{C})$ tales que $det(P) \neq 0$ y J diagonal por bloques:

$$\begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_r \end{pmatrix}$$

donde $orden(J_k) = 1 \quad \forall = 1, ..., r \implies J_k = (\lambda_k)$ con λ_k valor propio de A o si

$orden(J_k) > 1$,

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

FIXME : POR TERMINAR

1.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Proposición 1.1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(*i*) Todas las soluciones de (C) son atractores.
(*ii*) Existe una solución de (C) que es un atractor.
(*iii*) La solución trivial $y = 0$ de (H) es un atractor.
(*iv*) Todas las soluciones de (H) convergen hacia el vector 0 cuando $t \to +\infty$.
(*v*) La matriz fundamental de (H) principal en t_0 converge hacia la matriz 0 cuando $t \to +\infty$.

Corolario 1.3. Los atractores de la ecuación (H) son asintóticamente estables.

Definición 1.3.
- Se dice que la ecuación (C) es estable si todas su soluciones son estables
- Se dice que la ecuación (C) es asintóticamente estable si todas sus soluciones son asintóticamente estables.

No siempre podemos calcular la matriz fundamental, pero nosotros nos centraremos en el caso escalar donde sí podemos calcularla.

1.3. Estabilidad de ecuaciones lineales escalares

Sean $a, b : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ continuas. Se considera la ecuación diferencial lineal escalar (??) y sea $t_0 \in (\alpha, +\infty)$. La matriz fundamental principal en t_0 en $\phi(t) = exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)$ y por tanto podemos caracterizar la estabilidad de (??) controlando una primitiva del coeficiente $a(t)$.

Teorema 1.2. Proposicion 3

- La ecuación de eqrefcompleta es estable sii la función $a(t)$ tiene una primitiva acotada superiormente en $[t_0, +\infty]$.
- La ecuación eqrefcompleta es a.e. sii la función $a(t)$ tiene una primitiva que converge hacia $-\infty$ [....]

Ejemplo 1: - Inestable - A.E. - estable - - Inestable - estable - estable - Estable $- > \lambda <= 0$ A.E. $- > \lambda < 0$ Inestable $- > \lambda > 0$

1.4. Estabilidad de ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Sea $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Usaremos la siguiente notación: NOTACIÓN:

Definición 1.4. Espectro de A El espectro de A es el conjunto de valores propios de A, tanto reales como complejos, $\sigma(A) = \lambda_1, ..., \lambda_d$, contados con su multiplicidad en nuestro caso.

Definición 1.5. Multiplicidad del valor propio λ_j $m(\lambda_j)\forall\lambda_j \in \sigma A$

Definición 1.6. Dimensión de cada subespacio propio E_{λ_j} $dimE_{\lambda_j} = dimker(A - \lambda_{jI}) = d - rango(A - \lambda I)$

Definición 1.7. Los valores propios de A cuya parte real es 0 son: $\sigma_0(A) = \lambda \in \sigma(A)\ Re(\lambda) = 0$

Consideramos la EDO lineal homogénea y autónoma $x' = Axx \in \mathbb{R}^d$. El principal indicador para determinar la estabilidad de * es el máximo de las partes reales de los valores propios de A: $\mu(A) = mxRe(\lambda : \lambda \in \sigma(A))$

Teorema 1.3.
1. Si $\mu(A) < 0$ entonces la EDO lineal * es A.E.
2. Si $\mu(A) = 0$ y $m(\lambda) = dimE_\lambda \forall \lambda \in \sigma_0(A)$, entonces la EDO lineal * es estable (pero no A.E.)
3. Si $\mu(A) = 0$ y $\exists \lambda \in \sigma_0(A)$ tal que $m(\lambda)! = dimE_l ambda$, entonces la EDO lineal * es inestable.
4. Si $\mu(A) > 0$ entonces la EDO lineal * es inestable.

A continuación, haremos una serie de ejemplos y proseguiremos con un poquito de teoría para poder producir la demostración de este enunciado. Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 5x_1 - x_2 \end{cases} \tag{3}$$

()=()()

$$\{\ x_1' = -23x_1'x_2' = 5 - 1x_2' \tag{4}$$

EC. $\lambda^2 - traza(A)\lambda + det(A = 0)$ $\lambda + 3\lambda - 13 = 0$ $\sigma(A) = \frac{-3+\sqrt{61}}{2}, \frac{-3-\sqrt{61}}{2} = 2.4..., 5.4...$ $\mu(A) > 2.4 > 0$ La ecuación es inestable.

Recordemos la forma canónica de Jordan.

Sea $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \exists P, J \in \mathcal{M}_d(\mathscr{C}) talesque :$

- P es regular (invertible)
- J es diagonal por bloques:

$$J = diag(J_1, ..., J_k) J_j matrizdiagonal \forall j = 1, ..., k \tag{5}$$

- $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ Para calcular J se usan:
- $\sigma(A) = \lambda_1, ...\lambda_d$
- $m(\lambda_j)$
- $dimE_{\lambda_j}$
- $\nu(\lambda_j) = mink \in \mathbb{Z}^+ : BORRA$ Los bloques de J pueden ser:
- de orden 1: $J_k = (\lambda_k)\lambda_k \in \sigma(A)$
- de orden mayor que 1: $J_k = diag(\lambda_k, ...\lambda_k)(1...1encimadeladiag)con\lambda_k \in \sigma(A)$
- el orden $(J_k) \leq \nu(\lambda_k)$
- la suma de los órdenes de todos los bloques asociados aun mismo valor propio es igual a la multiplicidad de ese valor propio

INSERTE EJEMPLO DE CAJA DE JORDAN
Con estos datos, podemos hacer el siguiente cálculo de la exponencial:

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1} \implies A^n = P \cdot J^n \cdot P^{-1} \implies e^A = P \cdot e^J \cdot P^{-1}$$

Y de manera análoga:

- $e^{At} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}$
- $e^{Jt} = diag(e^{J_1 t}, ..., e^{J_r t})$

Lema 1.1.

$$|||e^{Jt}|||_1 = max|||e^{J_1 t}|||_1, |||e^J_r t|||_1$$

Lema 1.2. $\exists T \geq 0$ tal que :

$$|||e^{Jt}|||_1 = (1 + ... + \frac{t^n}{n!}) \cdot e^{\mu t} \qquad \forall t \geq T$$

donde:

$$\mu = maxRe(\lambda_j) : \lambda_j \in \sigma(A)$$
$$n = max\,\nu(\lambda_j) - 1 : \lambda_j \in \sigma(A) y Re(\lambda_j) = \mu$$

Usando el lema anterior:
Finalmente, podemos demostrar el teorema anterior:

Demostración. $\exists P, J \in \mathcal{M}_d(\mathcal{C})$ tales que P es inestable, J es diagonal por bloques y $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$. Por tanto

$$e^{At} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}$$

. Defino en $\mathcal{M}_d(\mathcal{C})$ la norma matricial:

$$|||B||| = |||P \cdot J \cdot P^{-1}|||_1$$

. Así, tenemos que:

1. Si $\mu < 0 \implies \lim_{t\to\infty} |||e^{At}||| = 0 \implies x' = Ax$ es A.E.

2. Si $\mu = 0 y dim E_j = m(\lambda)' \forall \lambda \in \sigma_0(A) \implies n = 0 \implies |||e^{At}||| = 1 \implies |||e^{At}||| es estable pero no A.E.$
3. Si $\mu = 0 y \exists \lambda in \sigma_0(A) \nu(A) > 1 \implies n \geq 1 \implies |||e^{At}||| \geq 1 + t$ no es acotada en $[0, +\infty)$
4. Si $\mu > 0 \qquad |||e^{At}||| \geq e^{\mu t} \to \infty$ no es acotada en $[0, +\infty)$

□

2. Órbitas

2.1. Diagramas de fase planos

Consideramos la EDO lineal homogénea autónoma en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

- Caso 1: Cuando los valores propios de la matriz A son reales: $\sigma(A) = \lambda_1, \lambda_2 \subset \mathbb{R}$

  1. Son reales, positivos y distintos: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ traza(A) > 0 \\ det(A) > 0 \end{cases}$
     Inserte dibujito de fuente (flechas hacia fuera) $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \qquad v_j \in E_{\lambda_j}$
  2. Sonreales, negativos y distintos: $\lambda_2 < \lambda_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ traza(A) < 0 \\ det(A) > 0 \end{cases}$ Inserte dibujito de sumidero (flechas hacia dentro)
  3. Son reales, no nulos y con distinto signo : $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Leftrightarrow det(A) < 0$
     Inserte dibujito de punto hiperbólico o punto silla
  4. Son reales, positivos e iguales : $\lambda_1 = \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ traza(A) > 0 \end{cases}$.
     a) Si A es diagonalizable : En este caso tendremos todo el espacio y volveremos a tener una fuente.
     b) Si A no es diagonalizable : Nos encontramos con una fuente degenerada.
  5. Son reales, negativos e iguales : $\lambda_1 = \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ traza(A) < 0 \end{cases}$.
     a) Si A es diagonalizable : En este caso tendremos todo el espacio y volveremos a tener un sumidero.

   b) Si A no es diagonalizable : Nos encontramos con un sumidero degenerado.

6. Un valor propio es 0 y el otro positivo $\lambda > 0$ Inserte dibujito rectas paralelas y perpendiculares a una única recta generada por el 0(Hacia dentro). Rectas de puntos de equilibrio estables
7. Un valor propio es 0 y el otro negativo $\lambda < 0$ Inserte dibujito rectas paralelas y perpendiculares a una única recta generada por el 0(Hacia fuera). Rectas de puntos de equilibrio inestables
8. Dos valores propios iguales a 0 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ traza(A) = 0 \\ det(A) = 0 \end{cases}$
   a) Si A es diagonalizable $A = 0$
   b) Si A no es diagonalizable.

- Caso 2: Cuando los valores propios de la matriz A no son reales : $\sigma(A) = \lambda_1, \lambda_2 \subset \mathbb{C} - \mathbb{R} \quad \lambda_1 = a + bi \; \lambda_2 = a - bi$
  1. Tiene parte real positiva $\Delta < 0$
     $traza(A) > 0$ Fuente en espiral
  2. Tiene parte real negativa $\Delta < 0$
     $traza(A) < 0$ Sumidero en espiral
  3. Tiene parte real igual a 0. Diagrama de Poincaré

Parte II.
Ejercicios