Licenciatura en Matemáticas

Calculo Integral

Unidad 2 Actividad 3. Solidos de Revolución

Alejandro de la Torre

Redactado en LaTeX

Instrucciones: Desarrolla y resuelve lo siguiente:

Parte 1

1.- ¿Que es un solido de revolución?

De la actividad uno explique que :
Estas aplicaciones se basan en obtener una función $F(\zeta)$ con respecto a una variable ζ y su función γ (es decir $\gamma = f(\zeta)$), que nos indica bajo la función $\gamma = f(\zeta)$. Por lo que es ideal para determinar el area entre dos variables γ, ζ en el caso de funciones en un espacio geométrico por ejemplo x, y"

Añadiendo una explicación a esto, dire que a partir del area de una superficie en un plano ζ X γ con X como el producto cartesiano se genera un plano $\mathbb{P}$, sin embargo si a este plano le aplicamos el producto eculideo con respecto a otra variable ω tendremos un espacio en $\mathbb{R}^3$ por lo que se puede visualizar este plano como una linea desde $\mathbb{P}$ X ω, donde $\omega \parallel n \cdot \mathbb{P}$ por lo que visto de esta forma, si queremos obtener la superficie de una linea $\overrightarrow{\mathrm{P}} \in \mathbb{P}$ que gira alrededor del eje ω seria equivalente obtener el área de un circulo con radio $r = \overrightarrow{\mathrm{P}}$, y sabemos que dicha area es igual a $2\pi \cdot r^2$.

Significado geometrico:

Esto implicara que el volumen en $\mathbb{R}^3$ puede formarse a partir de girar una superficie en R^2 que es normal a un tercer eje ω; por lo que:

$$\int_{\omega}^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(\gamma, \zeta, \omega) d\zeta d\gamma d\omega = \int_{\omega}^{2\pi} d\omega \int_{\mathbb{R}^2} f^2(\gamma, \zeta) d\zeta d\gamma = 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} f^2(\gamma, \zeta) d\zeta d\gamma \tag{1}$$

2.- ¿Dónde se ven implicados los sólidos de revolución en tu vida diaria?

Una de las aplicaciones mas usadas para estimar volúmenes mediante sólidos de revolución, son los cables, al producirse, estos toman el radio estadístico, y se aproximan mediante la formula $2\pi * k^2 * L$ donde k es el radio estadístico del calibre, L es la longitud.

En el caso de la industria y la ingeniería, básicamente todo lo que se realiza en un torno se genera mediante revoluciones, el metal que puede ser refundido de las rebabas generadas se calcula fácilmente de esta forma.

3.- Proporciona ejemplos:

Otros ejemplos los podemos encontrar en la teoría electromagnética, donde una onda emitida se modela de forma que las partículas emitidas tienen la misma probabilidad de encontrarse a la misma distancia del origen. Por lo que es simétrica la emisión desde un punto inicial, esto ayuda a simplificar las operaciones. De hecho esto ayuda a generar otros teoremas.

Sin embargo, el uso de este tipo de integrales también se usan para resolver problemas que no están solamente en un espacio visible, muchos fenómenos físicos son modelables por ecuaciones diferenciales simétricas, como la física atómica, la cuantica, a partir de los cuales están desarrollados los semiconductores de todos los dispositivos electrónicos. Si bien no todos los armónicos esféricos

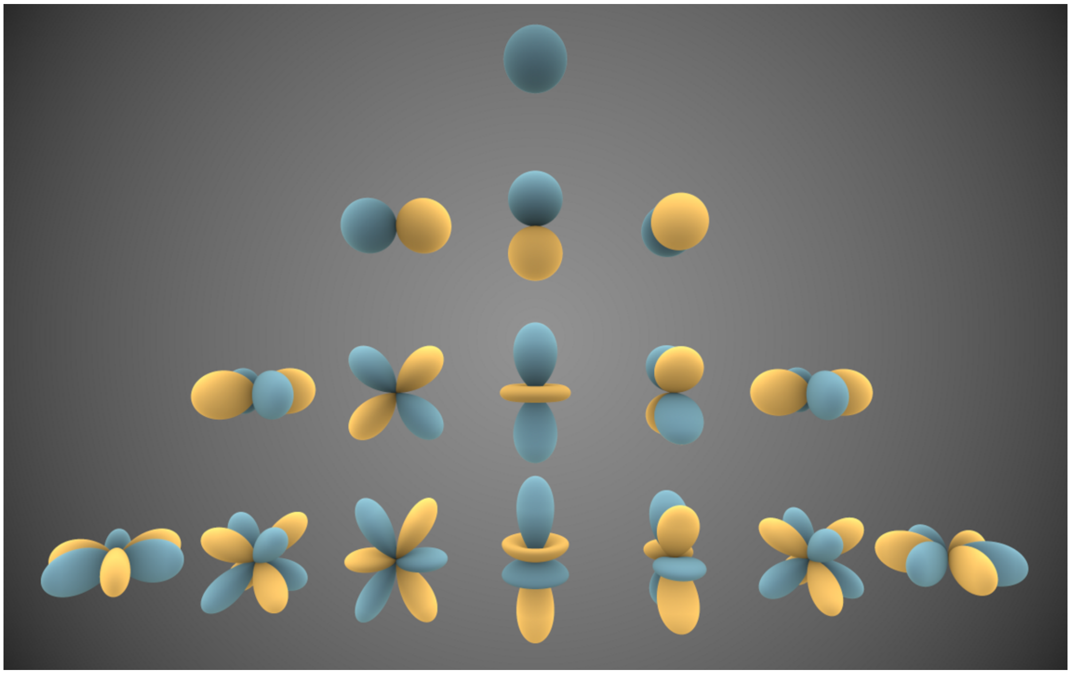

Figura 1: Armonicos esfericos usados en quimica, fisica cuantica, semiconductores, materiales, etc. Recuperado de [9]

pueden obtenerse mediante la formula en (1). Los de la gigura uno en la parte central si pueden obtenerse mediante ese método, algunos pueden obtenerse de una ecuación

$$\int_{\omega}^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(\gamma, \zeta, \omega) d\zeta d\gamma d\omega \tag{2}$$

Calcula el volumen del sólido de revolución al girar la región limitada de las siguientes funciones dadas alrededor del eje especificado. Haz un esquema de la región, del sólido y de un disco o un anillo típico.

4.- Solido de revolución acotado por $y = e^x$; $y = x$, con $x : [0 : 1]$ alrededor de x

De (1 tendremos que:)

$$A(x, f(x)) = \int_0^1 (e^x)\ dx \int_0^1 -x^2\ dx = \int_0^1 (e^{2x} - x^2)\ dx = \tag{3}$$

$$\left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = \tag{4}$$

$$\left[\frac{e^2}{2} - \frac{1}{3}\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{0}{3}\right] = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} - \frac{5}{6} \tag{5}$$

$$Vol = \pi \cdot A(x, f(x)) = \frac{\pi e^2}{2} - \frac{5\pi}{6} \tag{6}$$

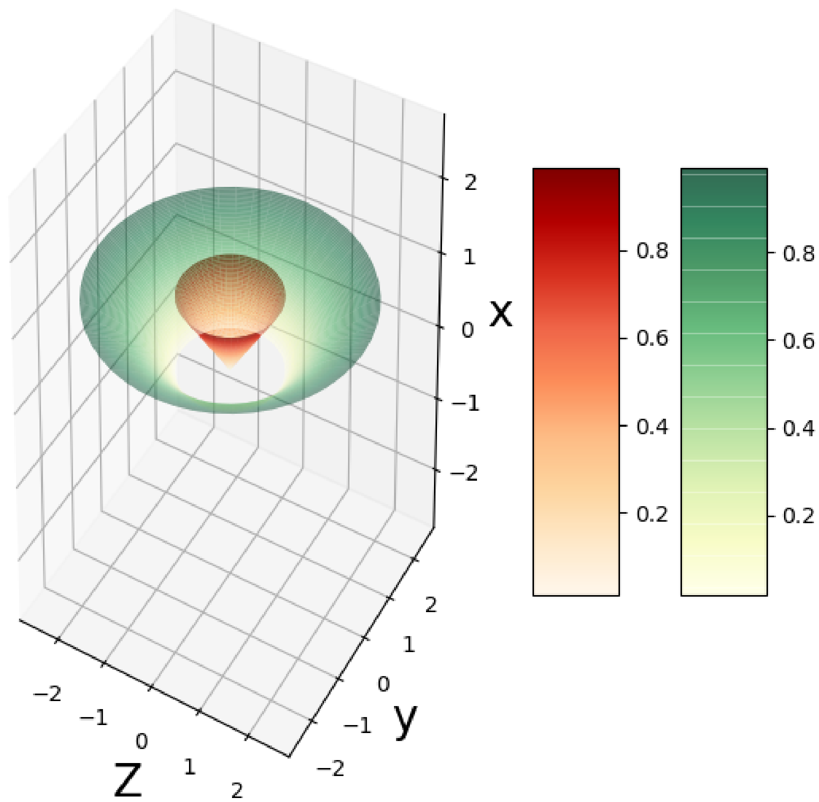

Figura 2: Ejercicio 4, esquema de la region entre el area roja a la verda, sin escala.

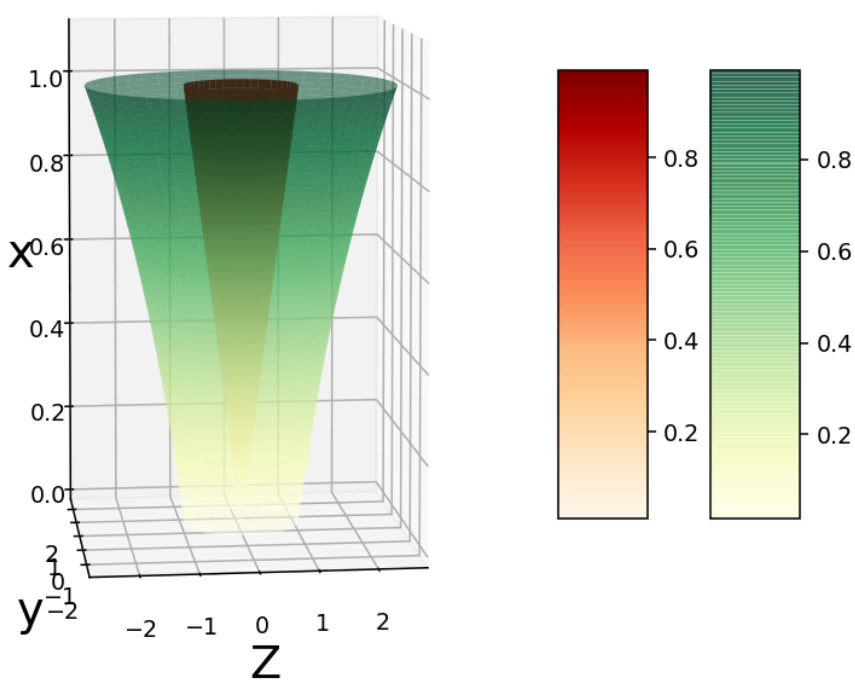

Figura 3: Ejercicio 4, vista del solido.

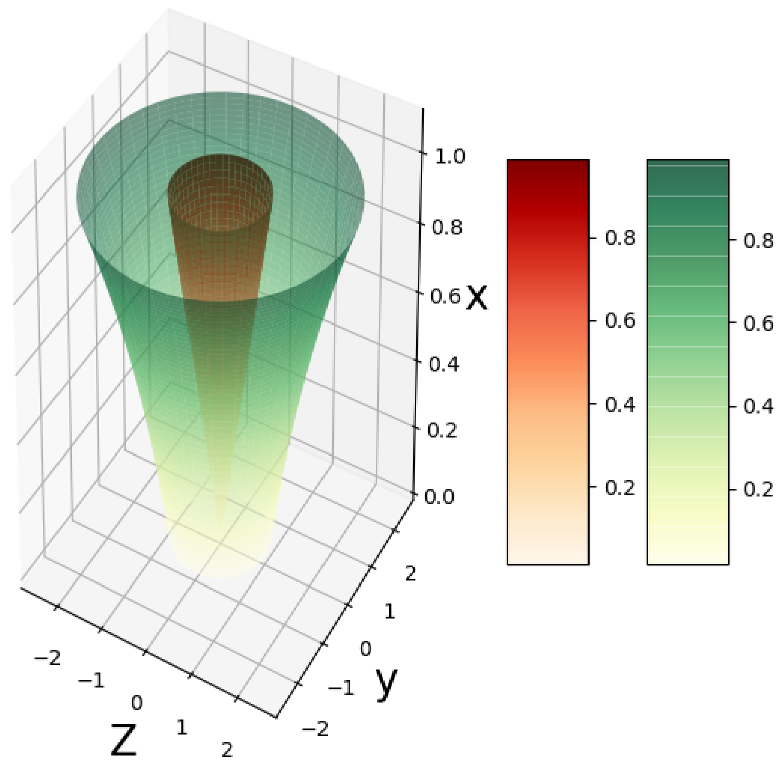

Figura 4: Ejercicio 4, discos de la region roja a la verde

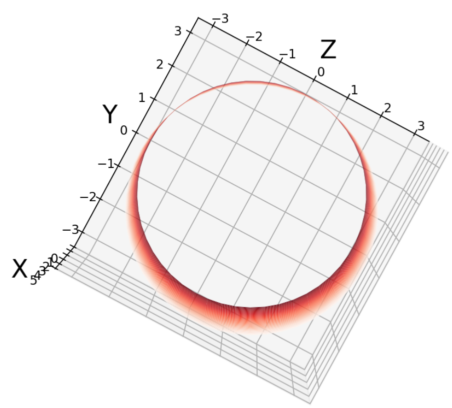

Figura 5: Ejercicio 5, discos de la region, delimitados por la superficie roja

5.-Solido de revolución acotado por $y = 3$, con $x : [0 : 5]$ alrededor de x

De (1) tendremos que:

$$A(x, f(x)) = \int_0^5 (3)^2 \, dx = 9x\Big|_0^5 = 45 - 0 = 45 \tag{7}$$

$$Vol = \pi \cdot A(x, f(x)) = 45\pi \tag{8}$$

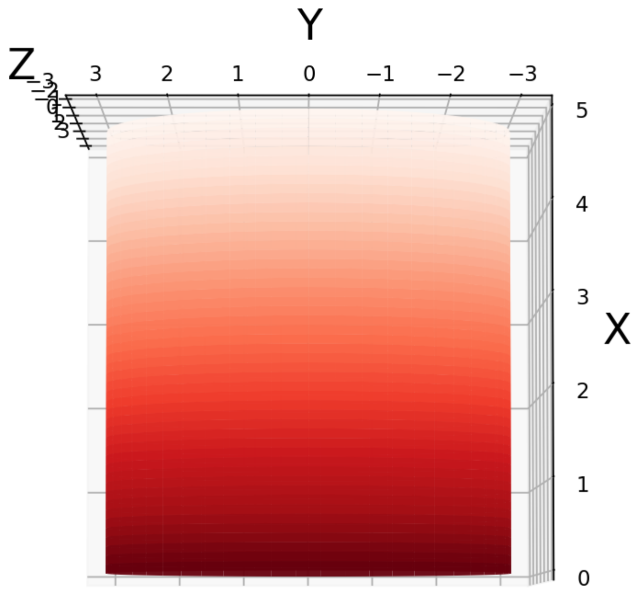

Figura 6: Ejercicio 5, esquema de la region en el area roja

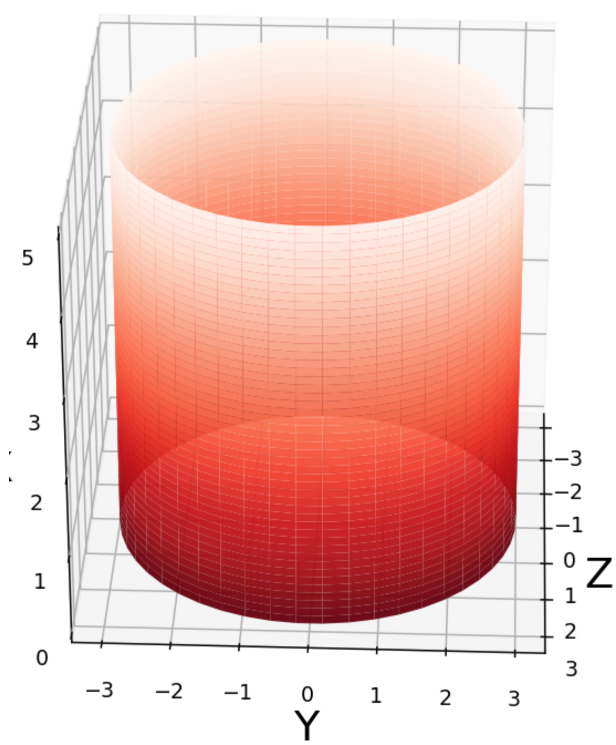

Figura 7: Ejercicio 5, vista del solido

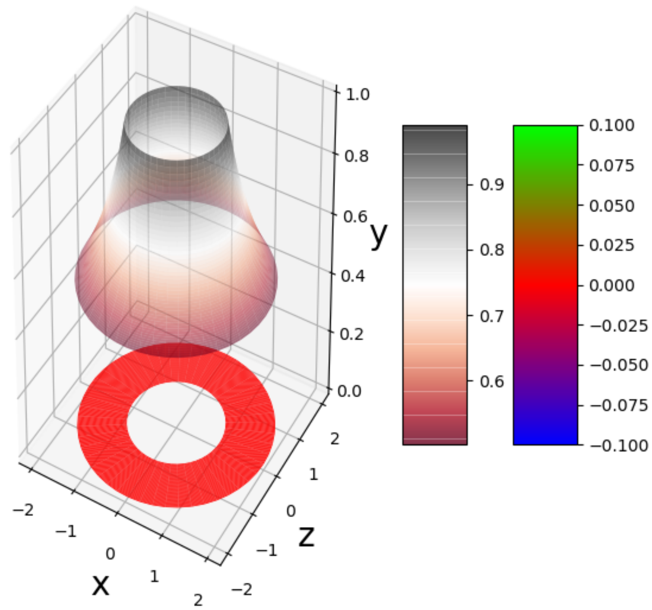

Figura 8: Ejercicio 6, vista del solido, con volumen desde el disco hasta la superficie

<u>Parte 2</u>

Realiza un bosquejo de la región calculada de cada uno de los ejercicios.

En el siguiente ejercicio utiliza el método de los Cascarones Cilíndricos para hallar el volumen generado al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor del eje y.

6.- Solido de revolución acotado por $y = 1/x$, $y = 0$ con $x : [1 : 2]$ alrededor de y
Para este problema cambiare el eje de integración a y
Tenemos que para un solido de revolución alrededor de y podemos integrar, los anillos de radio r^* con perimetro $p = 2\pi r^*$ en el intervalo de dicho radio $[A, B]$, con $\Delta r = \frac{B-A}{n}$; por lo que llegamos a la ecuación:

$$Vol = \Sigma_0^n 2\pi r^* * \Delta r * h = 2\pi \int_A^B rf(r)dr \tag{9}$$

$$Vol(x, f(x)) = 2\pi \int_1^2 x * 1/x \ dx = 2\pi \int_1^2 dx = 2\pi x \Big|_0^1 = 2\pi \tag{10}$$

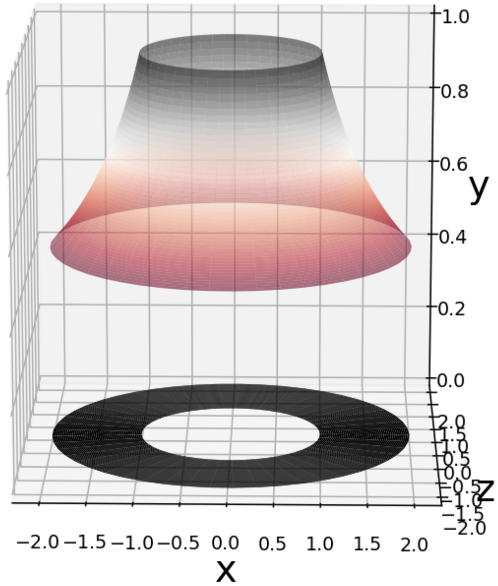

Figura 9: Ejercicio 6, vista del solido, con volumen desde el disco hasta la superficie

En este ejercicio usa el método de los Cascarones Cilíndricos para calcular el volumen generado por la curva dada alrededor del eje x.

7.-Solido de revolución acotado por $x + y = 3$, $x = 4 - (y - 1)^2$ con respecto a x

Para este ejercicio lo resolveremos de la forma como lo haciamos en el ejercicio anterior; observamos que al igualar ambas ecuaciones obtenemos que $f(x) = g(x)$ cuando $x = 0, 4$ por lo que los usaremos como areas de integración. Dado que sabemos que sabemos por el teorema fundamental del calculo que el área dentro de una superficie que se encuentra hueca se puede restar del area total. Y como podemos observar al analizar la función o al graficarla(figuras 10 y 11) la curva lineal sera la superficie que delimite el area hueca $A(x, f(x)) = A_{total} - A_{hueca} \implies Vol(x, f(x)) = Vol_{total} - Vol_{hueca}$ por lo que buscaremos dicho volumen.

$$Vol(x, f(x)) = Vol_{total} - Vol_{hueca} = V_2 - V_1 = 2\pi \int_0^3 y f_2(y)\ dy - 2\pi \int_0^3 y f_1(y)\ dy = \tag{11}$$

$$2\pi \int_0^3 y(4 - (y-1)^2)\ dy - 2\pi \int_0^3 y(3 - y)\ dy = 2\pi \int_0^3 y(4 - (y-1)^2) - y(3 - y)\ dy = \tag{12}$$

$$2\pi \int_0^3 (4y - y(y^2 - 2y + 1) - 3y + y^2)\ dy = 2\pi \int_0^3 (y - y^3 + 2y^2 - y + y^2)\ dy = \tag{13}$$

$$2\pi \int_0^3 (-y^3 + 3y^2)\ dy = 2\pi \Big[\frac{-y^4}{4} + y^3\Big]\Big|_0^3 = 2\pi \Big[\frac{-3^4}{4} + 3^3\Big] = 2\pi * 6{,}75 = \tag{14}$$

$$Vol = 13{,}5\pi \tag{15}$$

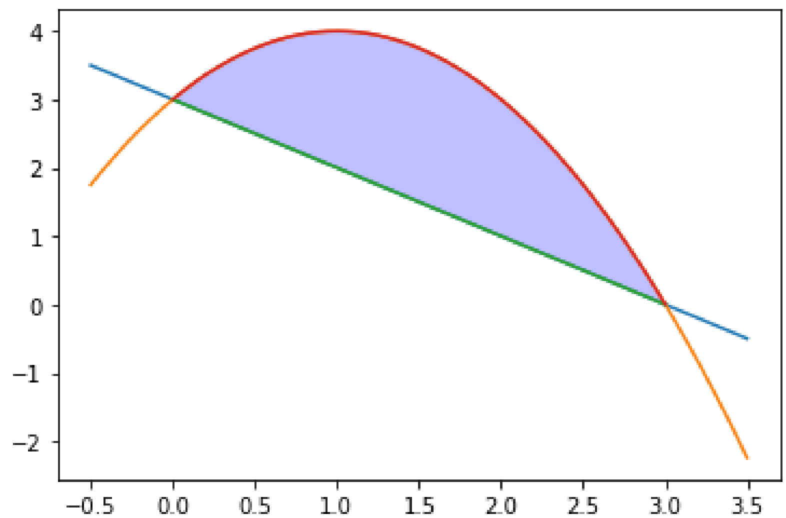

Figura 10: Ejercicio 7, área de integración a rotar.

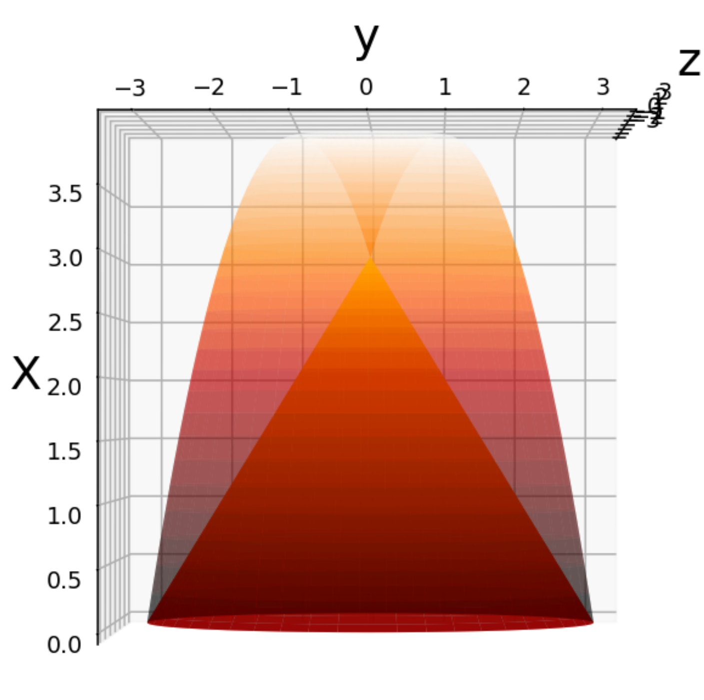

Figura 11: Ejercicio 7, vista del solido.

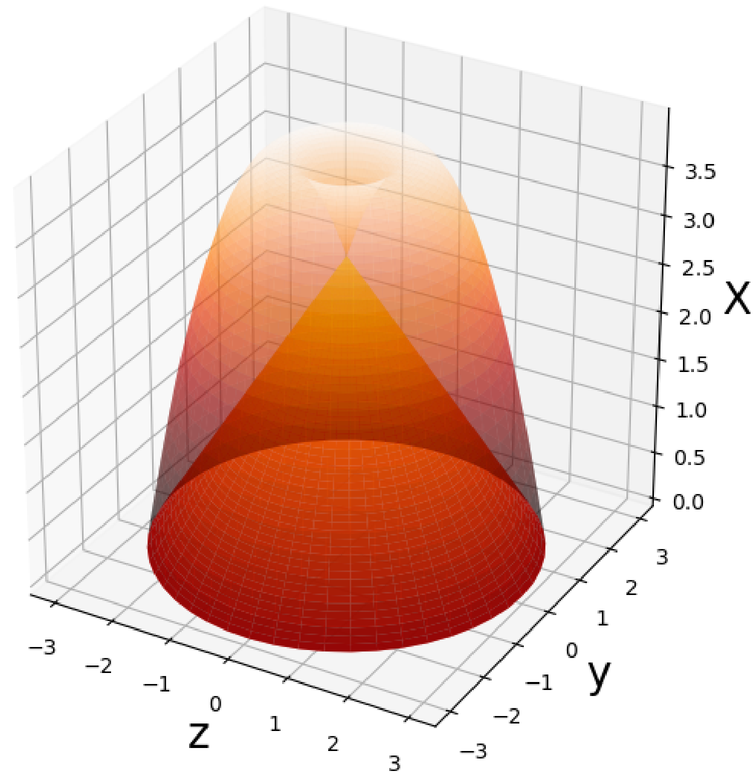

Figura 12: Ejercicio 7, vista del solido.

Referencias

[1] UNADM . *Apuntes de Calculo Integral*. DCEIT

[2] Spivak Michael (2003). *Calculus*. Reverté

[3] Woods Frederick (1932). *Advanced Calculus*. Massachusets Intitute of Technology textbook (Ginn and company)

[4] Courant R. & Fritz J.(1965) *Calculus and Analysis*. Wiley

[5] Hayt W. & Kemmerly J. & Durbin S. *Engineering Circuit Analysis(2002)*. Mc Graw Hill

[6] Hayt W. & Buck J. *Teoría Electromagnética (2012)*. Mc Graw Hill

[7] Feynman R. & Hibbs A. *Quantum Mechanics and Path Integrals (2018)*. Dover

[8] Tutorial de matplotlib. *Matplotlib.org*. recuperado de: https://matplotlib.org/tutorials/introductory/usage.html#sphx-glr-tutorials-introductory-usage-py

[9] Armonicos esfericos *qwe wiki*. recuperado de:https://es.qwe.wiki/wiki/Spherical_harmonics