Algebra I

Alejandro Ceccheto

April 2, 2024

Theorem 1 (Proposiciones Lógicas) *Si un número es par entonces es múltiplo de 3*

$$x \text{ par} \Rightarrow x \text{ mult. de } 3$$

$\boxed{\text{p, q, r}}$ = Proposiciones.

- 1, 0 → prop.
- 1 y 0 → p ∧ q
- 1 o 0 → p ∨ q
- o 1 o 0 → p $\veebar$ q
- si 1 entonces 0 → p ⟹ q
- equivalencia → p ⟺ q
- Negación → >p, $\vec{p}$, ∼p, -p

Negación =

P	$\sim P$
V	F
F	V

Conjunción =

P Q	$P \wedge Q$
V V	V
V F	F
F V	F
F F	F

Disyunción =

P Q	$P \vee Q$
V V	V
F V	V
V F	V
F F	F

Condicional =

P Q	$P \Rightarrow Q$
V V	V
V F	F
F V	V
F F	V

Bicondicional=

P Q	$P \Leftrightarrow Q$
V V	V
V F	F
F V	F
F F	V

Entonces, con estas lógicas algebraicas podemos deducir 3 cosas, si son Tautología, que significa que siempre va a ser verdadero, Contradicción, que significa que son siempre falsas, o Contingencia → a veces V, otras F.

P Q	r	$P \vee Q$	$P \vee Q \Rightarrow r$
V V	V	V	V
V V	F	V	F
V F	V	F	V
V F	F	F	V
F V	V	F	V
F V	F	F	V
F F	V	F	V
F F	F	F	V

q

p —— ∼p

∼p∨q

(por cultura general)

1 Ejericios hechos.

1. ∼(p∨q)

P	Q	$P \vee Q$	$\sim(p \vee q)$
V	V	V	F
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	F	V

2. P⇒(q∧∼q)

P	Q	$\sim Q$	$(Q \wedge \sim P)$	$P \Rightarrow (Q \wedge \sim Q)$
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

3. p ⇒ (q ∨ ∼ q)

P	Q	$\sim Q$	$(Q \vee \sim Q)$	$P \Rightarrow (Q \vee \sim Q)$
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Para mas referencias y ejemplos visitar[1].

Chapter 2: Propiedades.

En este capitulo veremos como se aplican las propiedades en álgebra, particularmente en proposiciones. Para eso particularmente a mi tendriamos que tener en mente las 3 tablas de y,ó e implica.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	F	F

[1]Uno de los libros que mas se asemeja a la forma de explicar de la profe.
https://archive.org/details/AlgebraIArmandoRojo/page/n13/mode/2up

2 Propiedades.

Estas son las 3 cosas que tendríamos que tener en mente siempre al momento de operar con condicionales. Luego las propiedades hay bastantes una leve lista de ellas seria.

- Propiedad conmutativa.
- Propiedad Distributiva.
- Propiedad Absorción.
- Propiedad Semis-Absorción.
- Propiedad de Morgan.

Entre muchas otras, estas son las que mas se suelen usar.

Propiedad Distributiva.

Theorem 2

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \vee Q)$$

lo que platea la teoria es que P y (Q O R) es equivalente a (P y R) ó (P ó Q) siendo que la P se reparte entre Q y R.

Ejemplo

$$(P \vee (Q \vee R)) \equiv \big((P \wedge Q) \vee (P \vee R)\big)$$

Propiedad Asociativa.

Theorem 3

$$\big((P \vee Q) \vee R\big) \equiv \big(P \vee (Q \vee R)\big)$$
$$\big((P \wedge Q) \wedge R\big) \equiv \big(p \wedge (Q \wedge R)\big)$$

Planteo de la propiedad, es lo mismo escribir (P ó Q) ó R $\Leftrightarrow$ P ó (Q ó R) lo mismo sucede si tenemos y´s ($\wedge$).

3 Propiedades.

Theorem 4

$$\big(P \wedge Q\big) \equiv \big(Q \wedge P\big)$$
$$\big(P \vee Q\big) \equiv \big(Q \vee P\big)$$
$$\big(P \Leftrightarrow Q\big) \equiv \big(Q \Leftrightarrow P\big)$$
$$\big(P \veebar Q\big) \equiv \big(Q \veebar P\big)$$

La propiedad plantea que siempre se puede escribir de distinta forma una operacion simepre y cuando esta sea llevada a la simpleza de n y/o/im/ n.

Negación de $\underbrace{Conujuncion/Diyuncion}_{\textbf{Propiedad de Morgan}}$.

Theorem 5 *Esta propiedad plantea que si tengo una negación antes que un conjunto, dicha negacion puede negar los dos conjuntos por separado e invertir su unión* ($\vee, \wedge, \Leftarrow$)

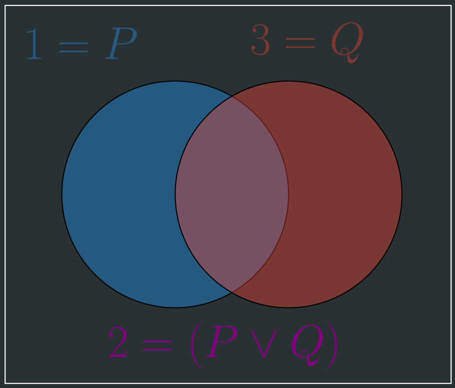
$$\sim \big(P \vee Q\big) \equiv \sim P \wedge \sim Q$$
$$\sim \big(P \wedge Q\big) \equiv \sim P \vee \sim Q$$

Absorción y Semi-Absorción.

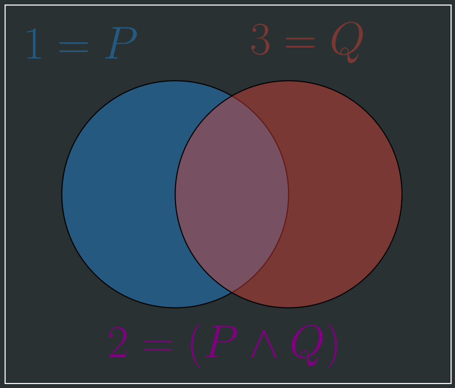
F = Contradiccion	V = Tautologia
$\sim \big(\sim P\big) \equiv P$	$P \vee \mathbb{V} \equiv \mathbb{V}$
—	$P \vee \sim P \equiv \mathbb{V}$
$P \wedge \sim P \equiv \mathbb{F}$	—
$P \ \wedge \mathbb{F} \equiv F$	—
$P \ \vee \mathbb{F} \equiv P$	—

4 Propiedades.

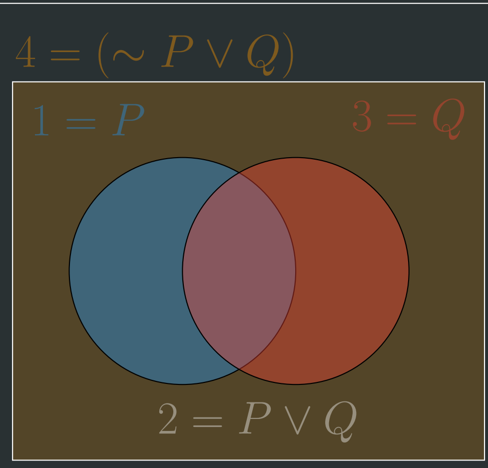
Propiedades de absorción.



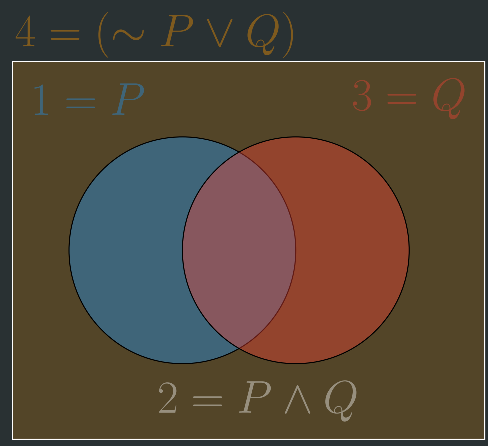
Esto es un diagrama de venn explicando de forma gráfica como seria la composición lógica de $P \wedge (P \vee Q)$ siendo que esto es equivalente a P
$P \wedge \big(P \vee Q\big) \equiv P$.



Esto es un diagrama de venn explicando de forma gráfica como seria la composición lógica de $P \wedge (P \vee Q)$ siendo que esto es equivalente a P
$P \wedge \big(P \vee Q\big) \equiv P$.



Esto es un diagrama de venn explicando de forma gráfica como seria la composición lógica de $P \wedge (\sim P \vee Q)$ siendo que esto es equivalente a P y Q
$P \wedge (\sim P \vee Q) \equiv P \wedge Q.$



Esto es un diagrama de venn explicando de forma gráfica como seria la composición lógica de $P \vee (\sim P \wedge Q)$ siendo que esto es equivalente a P ó Q

$$\underbrace{P}_{1,2} \wedge (\underbrace{\sim P}_{3,4} \vee \underbrace{Q}_{2,3}) \equiv P \vee Q.$$

Propiedad de morgan.

Theorem 6 *Esta propiedad se mete con los implica $\Rightarrow$, de forma que podemos convertirlos en expresiones mucho mas faciles de resolver sin tener que pensar en la tabla del implica.*

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\sim P \vee Q)$$

Ejercicio de ejemplo.

$$\sim \big(Q \Rightarrow P\big) \Rightarrow \big((P \vee Q) \Rightarrow (Q \wedge \sim P)\big)$$

$$\underbrace{\sim \big(Q \Rightarrow P\big)}_{\text{P}} \Rightarrow \underbrace{\big((P \vee Q) \Rightarrow (Q \wedge \sim P)\big)}_{\text{Q}}$$

$$\sim \big(Q \Rightarrow P\big) \Rightarrow \big((P \vee Q) \Rightarrow (Q \wedge \sim P)\big) \tag{1}$$
$$\sim (Q \vee P) \vee \big((P \vee Q) \Rightarrow (Q \wedge \sim P)\big) \tag{2}$$
$$\sim (Q \vee P) \vee \big(\sim (P \vee Q) \vee (Q \wedge \sim P)\big) \tag{3}$$
$$\sim (\sim Q \vee \sim P) \vee \big((\sim P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)\big) \tag{4}$$
$$(Q \wedge \sim P) \vee \big((\sim P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)\big) \tag{5}$$
$$\sim P \wedge (\sim Q \vee Q) \tag{6}$$
$$\sim P \wedge \mathbb{V} \equiv Absorcion \tag{7}$$
$$(\sim P \wedge Q) \vee \sim P \equiv \sim P \tag{8}$$

En[2]

[2] Fecha de modificación y adición al 2/4/2024