Cálculo Vectorial
Lectura 16: Sistemas de Coordenadas Ortogonales

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Coordenadas Polares

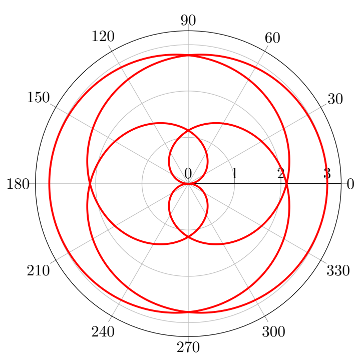

Figura 1. Curva $r = 3\sin\frac{1}{4}\theta$ en el plano polar.

El sistema de coordenadas polares (figura 1) permite ubicar lugares geométricos mediante un radio r, medido desde un punto central llamado polo, y un ángulo θ, medido desde un eje horizontal llamado eje polar hasta r. Es un sistema que se utiliza frecuentemente en números complejos para designar a las formas polar y trigonométrica.

Las ecuaciones de transformación en el sistema cartesiano son parte de la base de la Geometría Analítica, pues el radio r es la aplicación de la distancia (ecuación de la circunferencia) y el ángulo θ está relacionado con las funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente). Considerando a una circunferencia con centro en el polo, el cálculo del radio requiere aplicar el teorema de Pitágoras, mientras que el ángulo se obtiene con la función inversa de la tangente tomando al cateto adyacente sobre el eje polar:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

El sistema de coordenadas polar posee ecuaciones de transformación

$$T : \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad T^{-1} : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

con vectores unitarios y factores de escala

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}} &\Rightarrow\quad h_r &= 1 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}} &\Rightarrow\quad h_\theta &= r \end{aligned}$$

y matriz de transición

$$M_{xy}^{r\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad M_{r\theta}^{xy} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Este sistema de coordenadas es una gran herramienta para representar y parametrizar curvas cuya ecuación cartesiana es muy complicada para analizar o utilizar. Un ejemplo de una ecuación de difícil manejo en el sistema xy es

$$\left(x^2+y^2-3r\cos\theta\right)^2=4\left(x^2+y^2\right)$$

que en el sistema polar se reduce a

$$r=2+3\cos\theta$$

Ejemplo. Sea la curva

$$C:\quad y=x\tan\sqrt{x^2+y^2}$$

Obtenga el vector tangente a C.

Al sustituir las ecuaciones de transformación inversa en la curva C se obtiene

$$\begin{aligned} r\sin\theta &= r\cos\theta\tan\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta} \\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \tan\sqrt{r^2} \\ \tan\theta &= \tan r \\ \theta &= r \end{aligned}$$

En coordenadas polares la curva solo presenta la ecuación $r=\theta$, la cual se conoce como espiral de Arquímedes; la figura 2 muestra a la curva en el plano polar.

Para el vector tangente se requiere conocer a C en términos de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Tomando al vector de la curva como

$$\mathbf{c}=x\left(r,\theta\right)\hat{\mathbf{i}}+y\left(r,\theta\right)\hat{\mathbf{j}}$$

se sustituyen las ecuaciones de transformación, y después los vectores unitarios junto con la ecuación de la espiral:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= r\cos\theta\hat{\mathbf{i}}+r\sin\theta\hat{\mathbf{j}} \\ &= r\left(\cos\theta\hat{\mathbf{i}}+\sin\theta\hat{\mathbf{j}}\right) \\ \mathbf{c} &= \theta\hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Para el vector tangente se requiere derivar a la ecuación vectorial respecto de θ, pero se debe considerar que $\hat{\mathbf{r}}$ depende de esta variable por lo que debe aplicarse la derivada del producto.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{c}}{d\theta} &= \frac{d\theta}{d\theta}\hat{\mathbf{r}}+\theta\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} \\ &= \hat{\mathbf{r}}+\theta\frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\hat{\mathbf{i}}+\sin\theta\hat{\mathbf{j}}\right) \\ &= \hat{\mathbf{r}}+\theta\left(-\sin\theta\hat{\mathbf{i}}+\cos\theta\hat{\mathbf{j}}\right) \\ \mathbf{T} &= \hat{\mathbf{r}}+\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

C posee ecuación polar $r=\theta$, ecuación vectorial $\mathbf{c}=\theta\hat{\mathbf{r}}$ y vector tangente $\mathbf{T}=\hat{\mathbf{r}}+\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$. En la figura 2 se representan los vectores unitarios y tangente en $\theta=\pi$, y la curva c.

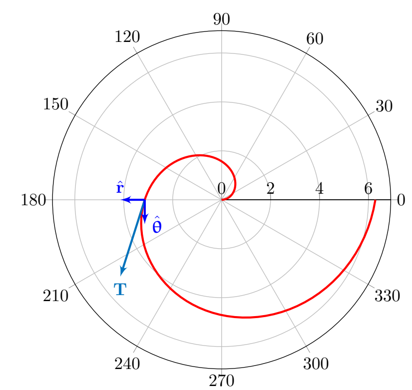

Figura 2

2. Coordenadas Cilíndricas Circulares

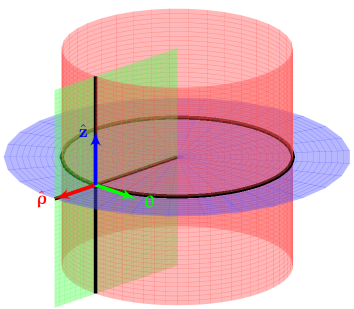

Figura 3. Las coordenadas cilíndricas extienden el sistema polar al espacio con el eje z.

De la misma forma que el plano xy se extiende al espacio mediante el cubo coordenado xyz, el plano polar puede extenderse al espacio utilizando el mismo eje z para formar un sistema de coordenadas curvilíneas en forma de cilindro, el cual se conoce como sistema de coordenadas cilíndricas y es mostrado en la figura 3.

Al ser el sistema polar en dimensión tres, las ecuaciones de transformación para el plano son las mismas que el sistema polar; es decir, r y θ como primeras coordenadas, en tanto que la tercera se proporciona por el eje z del sistema rectangular usual.

El sistema de coordenadas cilíndricas circulares posee ecuaciones de transformación

$$T: \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \qquad T^{-1}: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

con vectores unitarios y factores de escala

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}} &\Rightarrow&\quad h_r = 1 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}} &\Rightarrow&\quad h_\theta = r \\ \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{k}} &\Rightarrow&\quad h_z = 1 \end{aligned}$$

y matriz de transición

$$M_{xyz}^{r\theta z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{r\theta z}^{xyz} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solo se aclara que en adelante a este sistema de coordenadas se le llamará sistema de coordenadas cilíndricas, haciendo la aclaración que existen más sistemas curvilíneos que llevan la característica del cilindro (coordenadas parabólicas, elípticas, hiperboloides, entre otros) pero que no se estudiarán aquí.

Ejemplo. Sea la superficie

$$S: \quad x^2+y^2 = z$$

Obtenga el vector normal a S.

El vector normal se calculará a partir de la parametrización en coordenadas cilíndricas. Tomando la ecuación de la superficie y sustituyendo las ecuaciones de transformación se obtiene:

$$\begin{aligned} r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta &= z \\ r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) &= \\ r^2 &= z \end{aligned}$$

Para encontrar la ecuación vectorial se recurrirá al vector general en coordenadas cilíndricas, de la misma forma que se obtuvo en el ejemplo de coordenadas polares.

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= x(r,\theta,z)\,\hat{\mathbf{i}} + y(r,\theta,z)\,\hat{\mathbf{j}} + z(r,\theta,z)\,\hat{\mathbf{k}} \\ &= r\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + r\sin\theta\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{s} = r\left(\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}}\right) + r^2\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{s} = r\hat{\mathbf{r}} + r^2\hat{\mathbf{z}}$$

A pesar que la ecuación vectorial solo muestra dependencia respecto a r, también depende implícitamente de θ en el vector $\hat{\mathbf{r}}$. Las derivadas parciales respecto de los parámetros son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r\hat{\mathbf{r}}) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\hat{\mathbf{z}}\right) \\
&= \frac{\partial r}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial r} + 2r\hat{\mathbf{z}} \\
\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} &= \hat{\mathbf{r}} + 2r\hat{\mathbf{z}} \\
\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(r\hat{\mathbf{r}}) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r^2\hat{\mathbf{z}}\right) \\
&= \frac{\partial r}{\partial \theta}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} \\
\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} &= r\hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}$$

Puesto que los vectores en el sistema cilíndrico son vectores de $\mathbb{R}^3$, el producto cruz para obtener el vector normal es el mismo que en el sistema cartesiano.

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 0 & 2r \\ 0 & r & 0 \end{vmatrix} \\
&= -2r^2\hat{\mathbf{r}} + r\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

El vector normal a la superficie buscado es $\mathbf{n} = -2\rho^2\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\hat{\mathbf{z}}$.

El vector normal pudo obtenerse mediante el gradiente de la ecuación cartesiana, pero hay que aplicar los factores de escala. Más adelante se estudiará cómo obtener el gradiente en coordenadas curvilíneas.

3. Coordenadas Esféricas

En los sistemas anteriores se calculó un radio que permite ubicar un punto en el plano a partir de su distancia al origen de coordenadas. En dimensión tres también puede utilizarse la distancia al origen como coordenada; éstas son las coordenadas esféricas, mostradas en las figuras 4 y 5.

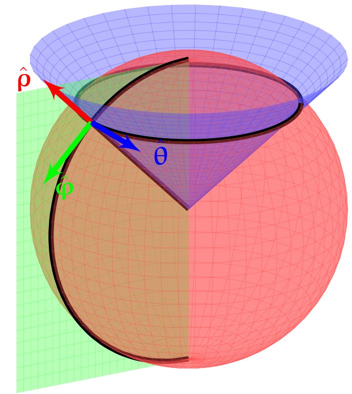

Figura 4. Las coordenadas esféricas fundamentan las coordenadas terrestres, basadas en meridianos y paralelos.

La figura 5 indica la geometría de este sistema coordenado. La distancia entre el origen y un punto $P(x, y, z)$ es el radio del sistema esférico:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

El radio ρ forma un ángulo φ con el eje z, donde éste último es el cateto adyacente del triángulo rectángulo que se forma, por lo que

$$\cos\varphi = \frac{z}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arccos\frac{z}{\rho}$$

Si se proyecta ρ sobre el plano xy se obtienen el radio r y el ángulo θ del sistema polar, dando la tercera coordenada del sistema esférico. Las ecuaciones de transformación son

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \varphi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

Para las ecuaciones de transformación inversa se toma

$$z = \rho\cos\varphi \tag{1}$$

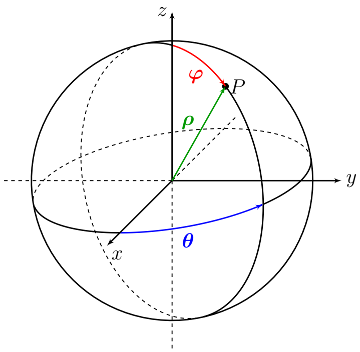

Figura 5. Relación de x, y y z con ρ, φ y θ.

Tomando la ecuación de ρ se obtendrán las ecuaciones inversas para x y y a partir de (1).

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\rho^2 &= x^2+y^2+z^2 \\
&= x^2+y^2+\rho^2\cos^2\varphi \\
\rho^2-\rho^2\cos^2\varphi &= x^2+y^2 \\
\rho^2\left(1-\cos^2\varphi\right) &= \\
\rho^2\sin^2\varphi &= x^2+y^2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

La expresión (2) representa una circunferencia en el plano xy, el cual es el sistema de coordenadas polares. La circunferencia en (2) deberá parametrizarse utilizando el ángulo θ, de tal forma que

$$\begin{aligned}
\rho^2\sin^2\varphi &= x^2+y^2 \\
1 &= \frac{x^2}{\rho^2\sin^2\varphi}+\frac{y^2}{\rho^2\sin^2\varphi} \\
\cos^2\theta+\sin^2\theta &= \left(\frac{x}{\rho\sin\varphi}\right)^2+\left(\frac{y}{\rho\sin\varphi}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho\sin\varphi} & \Rightarrow \quad x=\rho\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\rho\sin\varphi} & \Rightarrow \quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$

El sistema de coordenadas esféricas posee ecuaciones de transformación

$$T: \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad T^{-1}: \begin{cases} x=\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

con vectores unitarios y factores de escala

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\rho}} &= \cos\theta\sin\varphi\hat{\mathbf{i}}+\sin\theta\sin\varphi\hat{\mathbf{j}}+\cos\varphi\hat{\mathbf{k}} && \Rightarrow && h_\rho = 1 \\
\hat{\boldsymbol{\varphi}} &= \cos\theta\cos\varphi\hat{\mathbf{i}}+\sin\theta\cos\varphi\hat{\mathbf{j}}-\sin\varphi\hat{\mathbf{k}} && \Rightarrow && h_\varphi = \rho \\
\hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin\theta\hat{\mathbf{i}}+\cos\theta\hat{\mathbf{j}} && \Rightarrow && h_\theta = \rho\sin\varphi
\end{aligned}$$

y matriz de transición

$$M_{xyz}^{\rho\varphi\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\rho\varphi\theta}^{xyz} = \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo. Obtenga la ecuación en coordenadas esféricas de la superficie

$$x^2+y^2=z^2$$

Al sustituir las ecuaciones de transformación en la ecuación del cono se tendrá la representación buscada.

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= z^2 \\
\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi &= \rho^2\cos^2\varphi \\
\rho^2\sin^2\varphi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) &= \rho^2\cos^2\varphi \\
\sin^2\varphi &= \cos^2\varphi \\
\tan\varphi &= 1 \\
\varphi &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$