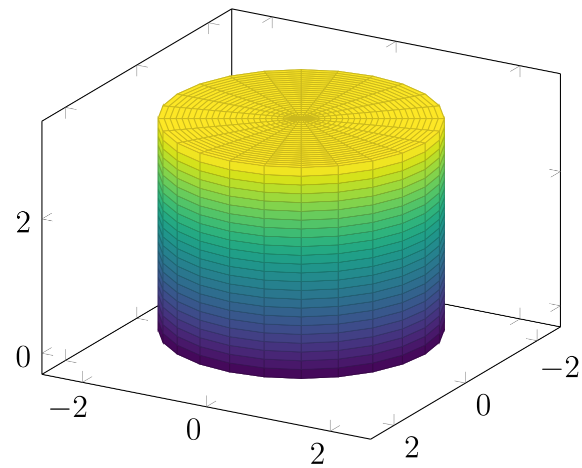
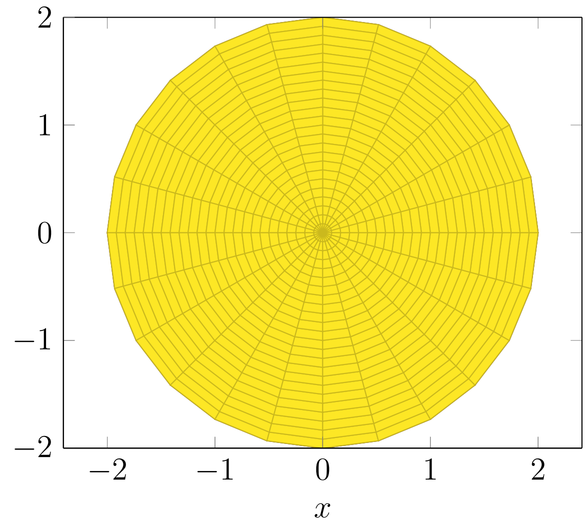
Ejemplo 1

Calcula $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}\, dS$ sobre la superficie compuesta por $x^2+y^2=4$ y $0 \leq z \leq \pi$.

La figura siguiente indica muestra la región de la superficie que se desea trabajar.





Para calcular la integral completa se debe tomar en cuenta los tres segmentos que forma a superficie: la pared del cilindro, la tapa y el fondo.

Para la pared, la parametrización toma a $x = 2\cos v$, $y = 2\sin v$ y $w = z$:

$$\mathbf{r}\left(v, w\right) = 2\cos v\hat{\mathbf{i}} + 2\sin v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}$$

Para tomar el cilindro completo, se tiene que v debe dar la vuelta completa a la pared; por lo tanto, $0 \leq v \leq 2\pi$. Por otro lado, la altura del cilindro se mide desde 0 hasta π; por lo tanto, $0 \leq w \leq \pi$. Al evaluar la función vectorial con la parametrización se obtiene:

$$\begin{aligned} f\left(x, y, z\right) &= \sqrt{1+x^2+y^2} \\ f\left(2\cos v, 2\sin v, w\right) &= \sqrt{1+4\cos^2 v+4\sin^2 v} \\ f\left(\mathbf{r}\left(v, w\right)\right) &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

El cálculo del vector normal se realiza mediante las derivadas parciales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= -2\sin v\hat{\mathbf{i}} + 2\cos v\hat{\mathbf{j}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} &= \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -2\sin v & 2\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{n} = 2\cos v\hat{\mathbf{i}} + 2\sin v\hat{\mathbf{j}}$$

La norma de este vector es:

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{4\cos^2 v + 4\sin^2 v}$$

$$\|\mathbf{n}\| = 2$$

La integral de superficie a calcular es:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_S f\left(\mathbf{r}\left(v,w\right)\right)\|\mathbf{n}\| \ dv \ dw \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 2\sqrt{5} \ dv \ dw \\ &= 2\sqrt{5}\int_0^{\pi} v\Big|_0^{2\pi} dw \\ &= 2\sqrt{5}\int_0^{\pi} 2\pi \ dw \\ &= 4\sqrt{5}\pi w\Big|_0^{\pi} \\ I_1 &= 4\sqrt{5}\pi^2 \end{aligned}$$

Para los discos que cubren al cilindro, la parametrización debe ser en términos de planos paralelos al plano xy:

$$\mathbf{r}\left(x,y\right) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

Para cubrir el fondo del cilindro, se tiene una región circular que puede parametrizarse como $x = u\cos v$ y $y = u\sin v$; para cubrir toda la región de toma a $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Por otro lado, como $z = 0$, entonces la parametrización del plano es

$$\mathbf{r}\left(u,v\right) = u\cos v\hat{\mathbf{i}} + u\sin v\hat{\mathbf{j}}$$

Las derivadas parciales, y el vector normal, para esta superficie son:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = \cos v\hat{\mathbf{i}} + \sin v\hat{\mathbf{j}}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = -u\sin v\hat{\mathbf{i}} + u\cos v\hat{\mathbf{j}}$$

$$\therefore \qquad \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{n} = u\hat{\mathbf{k}}$$

Así, la norma es $\|\mathbf{n}\| = u$. Al evaluar el campo con la nueva superficie se tiene:

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= \sqrt{1 + x^2 + y^2} \\
f(u\cos v, u\sin v, 0) &= \sqrt{1 + u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v} \\
f(\mathbf{r}(v, w)) &= \sqrt{1 + u^2}
\end{aligned}$$

De esta manera la integral para la superficie que es el piso del cilindro se calcula como:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\|\mathbf{n}\| \ du\ dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 u\sqrt{1 + u^2}\ du\ dv \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}\sqrt{\left(1 + u^2\right)^3}\right]_0^2\ du\ dv \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} 5\sqrt{5} - 1\ dv \\
&= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right) v\Big|_0^{2\pi} \\
I_2 &= \frac{2}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)\pi
\end{aligned}$$

Para la superficie que sirve de tapa al cilindro la ecuación vectorial de la superficie es similar a la del fondo, con la diferencia que en esta ocasión $z = \pi$:

$$\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\hat{\mathbf{i}} + u\sin v\hat{\mathbf{j}} + \pi\hat{\mathbf{k}}$$

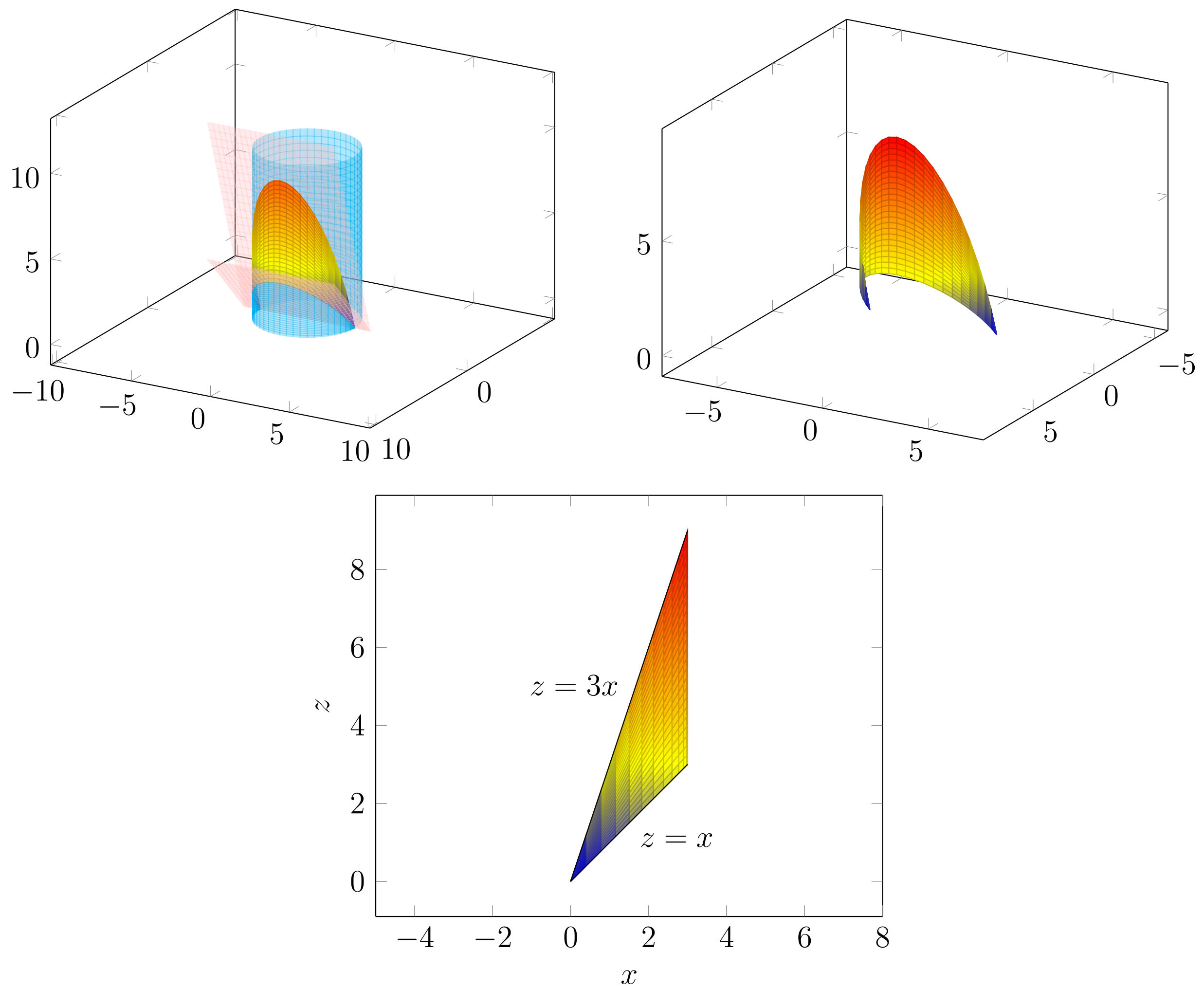
Debido a que los planos son paralelos y que en el campo escalar no está presente z, se observará que la integral de superficie es la misma que en el plano al fondo. De esta forma, la integral completa sobre el cilindro es

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\ DS \\
&= I_1 + 2I_2 \\
&= 4\sqrt{5}\pi^2 + 2\left(\frac{2}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)\pi\right) \\
I &= 4\sqrt{5}\pi^2 + \frac{4}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)\pi
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcula el área de la porción de superficie $x^2 + y^2 = 9$, localizada por arriba del plano xy comprendida entre los planos $z = 3x$ y $z = x$.

La siguiente figura muestra el área que se desea calcular.



Para calcular el área de la porción de superficie se utiliza la integral de superficie de campo escalar.

$$A = \iint_s \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

Los parámetros que se utilizarán son x y z, ya que la región en el plano xz (mostrada en la parte baja de la figura) tiene intervalos en z en función de x y constantes en x. De esta forma, en la figura se muestra que el techo de la región de integración es $z = 3x$, mientras que el piso es $z = x$; mientras tanto, x varía desde 0 hasta 3. Los intervalos de integración son $x \leq z \leq 3x$ y $0 \leq x \leq 3$.

Solo falta la parametrización de la superficie $x^2 + y^2 = 9$. Como x es uno de los parámetros de integración, y debe ser despejada. Como es un cilindro, la altura queda en términos del parámetro z:

$$\mathbf{r}\left(x, z\right) = x\hat{\mathbf{i}} \pm \sqrt{9 - x^2}\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

Solo se tomará la parte positiva de y, ya que el área es simétrica respecto del eje x; al final el valor que arroje la integral se multiplica por dos. Los vectores tangentes son

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} &= \hat{\mathbf{i}} - \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\hat{\mathbf{j}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} &= \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

De esta forma, el vector normal es

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$$

La norma a integrar es

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| &= \sqrt{\frac{x^2}{9 - x^2} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{9}{9 - x^2}}\end{aligned}$$

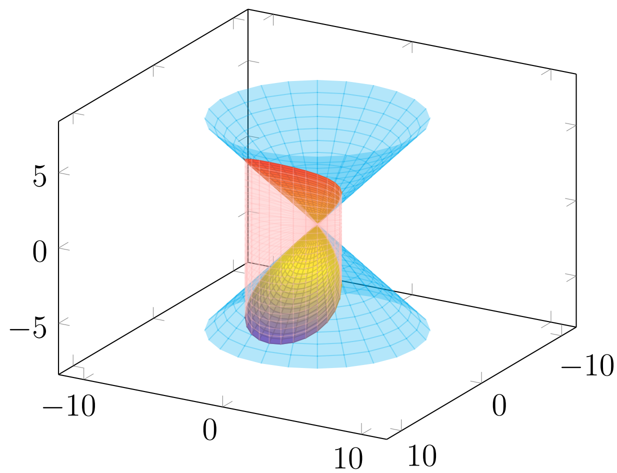
La integral es

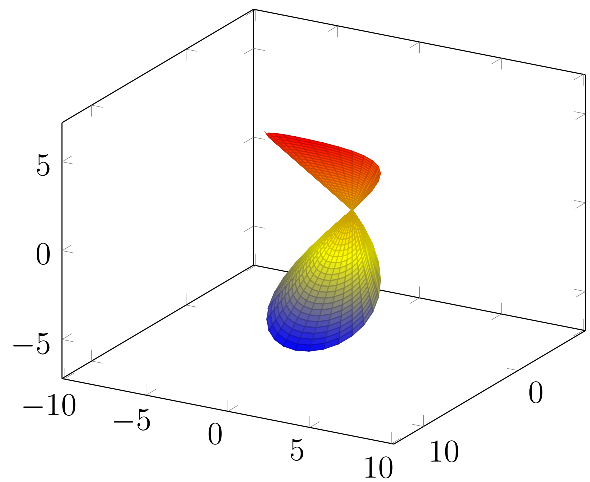
$$\begin{aligned}A &= 2\int_0^3 \int_x^{3x} \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}\ dz\ dx \\ &= 2\int_0^3 \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} z\Big|_x^{3x} dx \\ &= 2\int_0^3 \frac{6x}{\sqrt{9 - x^2}}\ dx \\ &= 2\left[-6\sqrt{9 - x^2}\right]_0^3 \\ A &= 36\ \left[u^2\right]\end{aligned}$$

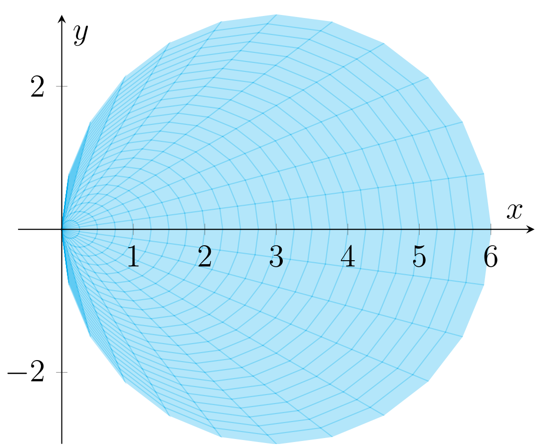
Ejemplo 3

Calcula el área de la porción de cono de ecuación $x^2+y^2=z^2$, interior al cilindro de ecuación $x^2-6x+y^2=0$.

La siguiente figura muestra el área a calcular.







Como la superficie es simétrica respecto al plano xy, se calculará una de las hojas y se multiplicará por dos para tener el área completa. Como muestra la figura inferior, la región de integración es una circunferencia tangente al eje x. Como es una circunferencia, la parametrización más natural es en senos y cosenos y la realizaremos con base en coordenadas polares. De esta forma, el cono es

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= z^2 \\ (r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2 &= z^2 \\ r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta &= z^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r^2 &= z^2 \\
r &= z
\end{aligned}
$$

La ecuación vectorial es

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p} &= x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \\
&= r\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + r\sin\theta\hat{\mathbf{j}} + r\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}
$$

Entonces, los vectores tangentes son:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} &= \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \\
\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + r\cos\theta\hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}
$$

y el vector normal es

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= -r\cos\theta\hat{\mathbf{i}} - r\sin\theta\hat{\mathbf{j}} + r\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}
$$

donde su norma es

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{n}\| &= \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2} \\
&= \sqrt{2}r
\end{aligned}
$$

Para el intervalo de integración, hay que convertir la ecuación del cilindro a su equivalente polar. Para lograrlo, se sustituyen las ecuaciones de transformación en la ecuación del cilindro.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 6x + y^2 &= 0 \\
\left(x^2 + y^2\right) - 6x &= 0 \\
r^2 - 6r\cos\theta &= 0 \\
r^2 &= 6r\cos\theta \\
r &= 6\cos\theta
\end{aligned}
$$

En la tercera imagen puedes observar como las líneas que definen la superficie salen radialmente desde el origen hasta la contorno de a región; es decir, son los radios r que salen del 0 y llegan a la ecuación que acabamos de transformar. Por lo tanto, el intervalo en r es $0 \le r \le 6\cos\theta$. En el caso de θ solo se recorre la mitad del plano coordenado, por lo que el intervalo de integración va desde $-y$ hasta y, que en coordenadas polares es $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. La integral a calcular es

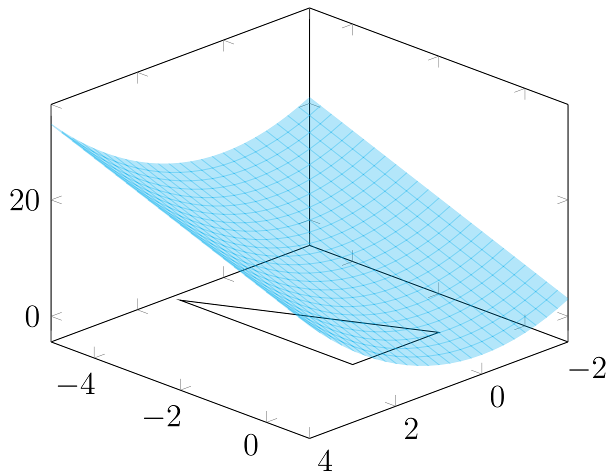
$$
\begin{aligned}
A &= 2\iint_S \|\mathbf{n}\| \; dr \; d\theta \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{6\cos\theta} \sqrt{2}r \; dr \; d\theta
\end{aligned}
$$

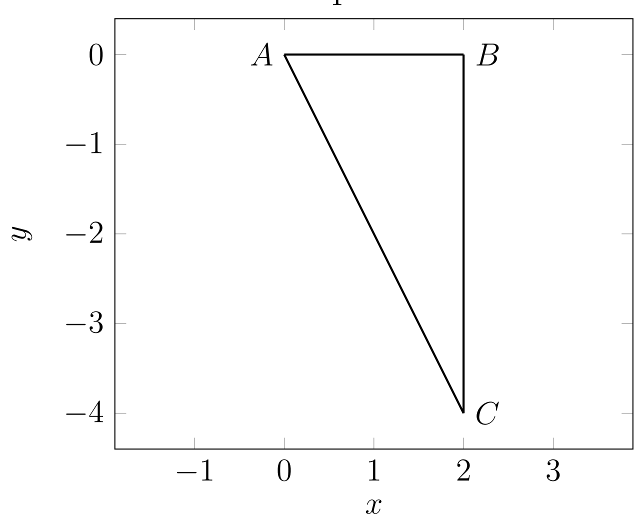
$$
\begin{aligned}
A &= 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{6\cos\theta} d\theta \\
&= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 36\cos^2\theta \ d\theta \\
&= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 36\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right) \ d\theta \\
&= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 18+18\cos 2\theta \ d\theta \\
&= \sqrt{2}\Big[18\theta + 9\sin 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
A &= 18\sqrt{2}\pi \ \ \left[u^2\right]
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4

Evalúa la integral $\displaystyle\iint_S -x^2 + 3y + z \; dS$, donde S es la porción de cilindro parabólico $z = x^2 - 3y + 2$ que yace por encima de la región triangular comprendida por los puntos $A\,(0,0)$, $B\,(2,0)$ y $C\,(2,-4)$.

En la siguiente figura se observa la superficie y la región que se utilizará para integrar.





La parametrización de la superficie dependerá de x y y, pues la ecuación de la superficie tiene a z despejada. La ventaja de esta parametrización es el cálculo de la norma del vector normal y los intervalos de integración. La norma se calcula como

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

De esta forma no se requiere a la ecuación vectorial de la superficie, simplemente se calculan las derivadas parciales de la superficie $z = x^2 - 3y + 2$ y se sustituyen en la norma.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{n}\| &= \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \\
&= \sqrt{(2x)^2 + (-3)^2 + 1} \\
&= \sqrt{4x^2 + 10}
\end{aligned}$$

Por otro lado, de acuerdo a la figura, la región de integración posee los siguientes intervalos: x se encuentra en el intervalo entre los puntos A y B, $0 \leq x \leq 2$; y varía desde la recta que une a los puntos A y C hasta la recta que une a los puntos A y B, $-2x \leq y \leq 0$.

Por último el campo $f(x, y, z) = -x^2 + 3y + z$ al ser evaluado con la superficie es

$$\begin{aligned}
f\left(x, y, x^2 - 3y + 2\right) &= -x^2 + 3y + \left(x^2 - 3y + 2\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

La integral que debemos calcular es

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \int_{-2x}^0 2\sqrt{4x^2 + 10}\ dy\ dx \\
&= \int_0^2 2\sqrt{4x^2 + 10}y\Big|_{-2x}^0 dx \\
&= \int_0^2 4x\sqrt{4x^2 + 10}\ dx \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\left(4x^2 + 10\right)^3}\Big|_0^2 \\
&= \frac{26}{3}\sqrt{26} - \frac{10}{3}\sqrt{10}
\end{aligned}$$