Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una igualdad que relaciona la variable independiente con la n-ésima derivada de la variable dependiente. Algunos ejemplos son:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = x^3$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - y = 1$$

$$\frac{dx}{dt} + 5x = e^t.$$

Independientemente de ser lineales o no. Así, una forma general para una ecuación de orden n con "x" como la variable independiente, "y" la variable dependiente, se puede expresar como;

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

donde f es una relación que depende de "x", "y" y de las derivadas de "y" hasta de orden n; es decir, depende de $x, y, .., {}^{d^ny}/_{dx^n}$. En muchos casos, podemos despejar el término de orden máximo ${}^{d^ny}/_{dx^n}$ y escribir la ecuación anterior como;

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

que con frecuencia se prefiere sobre la ecuación anterior por razones teóricas y de cálculo.

1.3 PROBLEMA DE VALOR INICIAL.

Con frecuencia nos interesan problemas en los que se busca una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial de modo que $y(x)$ satisfaga condiciones adicionales prescritas, es decir; condiciones impuestas en la $y(x)$ desconocida o en sus derivadas.

En algún intervalo I que contiene a x_0, nos piden

Resolver

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

sujeto a

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,}$$

donde y_0, y_1,..., y_{n-1} son constantes reales especificadas de manera arbitraria, se llama problema de valores iniciales (PVI). Los valores de $y(x)$ y sus primeras "n-1" derivadas en un solo punto x_0: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, se llaman condiciones iniciales.

Por ejemplo,

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

sujeto a:

$$y(x_0) = y_0$$

Resolver

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \ldots \ldots \ldots \ldots . (2)$$

sujeto a:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1,$$

son problemas de valores iniciales de primer y segundo orden, respectivamente. Estos dos problemas son fáciles de interpretar en términos geométricos. Para (1) se busca una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ en el intervalo I que contiene a x_0 de modo que su gráfica pase por el punto especificado (x_0, y_0). En la figura que se muestra a continuación, se aprecia una curva solución en color azul.

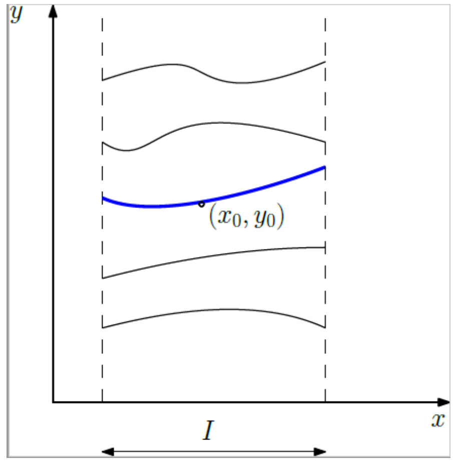


Figura 1. Solución del problema de valor inicial de primer orden.

Para (2) se desea encontrar una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y'' = f(x, y, y')$ en el intervalo I que contiene a x_0, de tal manera que su gráfica no pase sólo por (x_0, y_0), sino que la pendiente de la curva en este punto sea y_1. En la figura se muestra una curva solución en color azul.

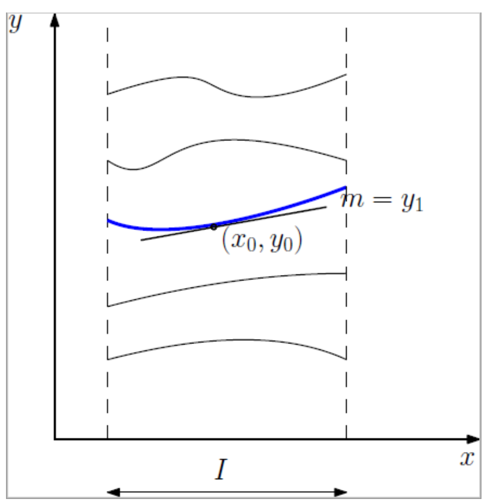


Figura 2. Solución del problema de valor inicial de segundo orden.

El término condiciones iniciales derivan de sistemas físicos donde la variable independiente es el tiempo t y donde $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = y_1$ representan la posición y la velocidad, respectivamente de un objeto en algún tiempo inicial t_0.

Ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = y \; en \; (-\infty, \infty)$$

Solución

$$y = Ce^x$$

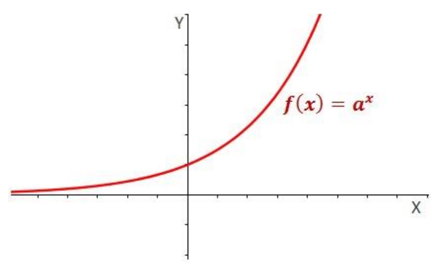


Figura 3. Gráfica de la función exponencial

Debido a la constante obtenida de la solución de esta ecuación diferencial podemos observar que contamos con una infinidad de soluciones del problema, pero sólo hay una solución para cada problema de valor inicial, por lo que esta dependerá de la condición inicial dada.

1.4 TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA UN PROBLEMA DE VALORES INICIALES.

Al considerar un problema de valores iniciales surgen dos preguntas fundamentales:

- ¿Existe una solución del problema?
- Si existe una solución, ¿Es única?

Para el problema de valores iniciales de primer orden, se considera:

Existencia:

¿La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ posee soluciones?

¿Alguna de las curvas solución pasa por el punto (x_0, y_0)?

Unicidad:

¿Cuándo se puede estar seguro de que hay precisamente una curva solución que pasa por el punto (x_0, y_0)?

Ejemplo

Cada una de las funciones $y = 0$ y $y = \frac{1}{16}x^4$ satisface la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ y la condición inicial $y(0) = 0$, por lo que el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \qquad y(0) = 0$$

tiene al menos dos soluciones. Como se muestra en la siguiente figura, las gráficas de las dos soluciones pasan por el mismo punto $(0,0)$.

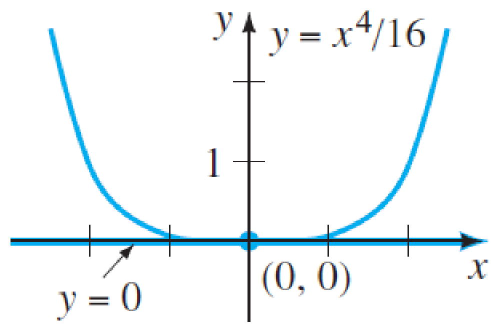


Figura 4. Dos curvas solución del mismo PVI.

Dentro de los límites seguros de un curso formal de ecuaciones diferenciales se puede estar seguro en buena medida de que la mayor parte de las ecuaciones diferenciales tendrán soluciones y que las soluciones de problemas de valores iniciales probablemente serán únicas. Sin embargo, en la vida real no es tan idílico (sería un caso ideal y no real). Por consecuencia, al tratar de resolver un problema de valores iniciales es deseable saber por adelantado si existe una solución y, cuando es así, si la solución es única.

Como en este tema se van a considerar ecuaciones diferenciales de primer orden, aquí se expresa sin demostración un teorema directo que da las condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de una solución de un problema de valor inicial de primer orden de la forma que se proporciona en (1).

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \; sujeto \; a \;\; y(x_0) = y_0.$$

Teorema de existencia y unicidad

Dada una ecuación diferencial

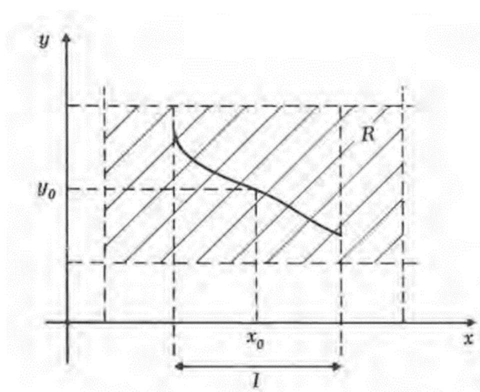
$$y' = f(x, y)$$

donde $f(x, y)$ está definida en una región rectangular R que contiene al punto (x_0, y_0).

Si $f(x, y)$ satisface las condiciones:

1. $f(x, y)$ continua en R,
2. $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en R,

entonces, existe un intervalo I con centro en x_0, una y sólo una función $y = g(x)$ definida en el intervalo I que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.



Nota: Estás condiciones son suficientes, pero no necesarias, porque puede existir una solución única que satisface $y(x_0) = y_0$, pero no cumple con la condición 1, o la condición 2, o ninguna de las dos.

Ejemplos

a) ¿Existe la solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{y^2}$ con $y(x_0) = 0$?

Solución

Tomando la forma general de la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3},$$

Entonces en los puntos $(x_0, 0)$ no se cumplen las condiciones.

La función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son discontinuas en el eje x, por lo que no hay solución al problema de valores iniciales.

b) Indicar la región del plano xy donde existe la solución de la ecuación diferencial:

$$y' = xy + e^{-y}$$

Solución

La función $f(x, y) = xy + e^{-y}$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$ son continuas con respecto a x y y, en todos los puntos del plano xy. Por tanto, la vecindad en que la ecuación dada tiene solución única es todo el plano xy.

c) ¿Existe solución única para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ en $y(2) = 1$?

Solución

La función $f(x, y) = xy^{1/2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$ muestra que son continuas en el semiplano superior definido por $y > 0$. Por consiguiente, el teorema permite concluir que por cualquier (x_0, y_0), $y_0 > 0$ en el semiplano superior hay algún intervalo centrado en x_0 en el que la ecuación diferencial que se proporciona tiene una solución única. Así, por ejemplo, incluso sin resolverla, se sabe que existe algún intervalo centrado en el que el problema de valores iniciales $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ en $y(2) = 1$ tiene solución única.