Díaz Hernández Marcos Bryan Ma-Ju N.L: 25
Tarea: 25

- Ejercicio 6, 2013-2, 2° Final, Tipo A.

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual y el operador lineal $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es: $S(x,y) = (2x+3y, x-y)$

a) obtener el adjunto de S
b) Determinar si S es normal

$S^*(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ tal que: $(S(\bar{u}) | \bar{v}) = (\bar{u} | S^*(\bar{v}))$

Si $(x,y) = \bar{u}$, $(a,b) = \bar{v}$

$(S(x,y) | (a,b)) = ((x,y) | S^*(a,b))$

$((2x+3y, x-y) | (a,b)) = ((x,y) | (\alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b))$

$a(2x+3y) + b(x-y) = x(\alpha a + \beta b) + y(\gamma a + \delta b)$

$a(2x+3y) + b(x-y) = a(\alpha x + \gamma y) + b(\beta x + \delta y)$

1) $2x+3y = \alpha x + \gamma y$
2) $x-y = \beta x + \delta y$

$\alpha = 2$ $\beta = 1$
$\gamma = 3$ $\delta = -1$

$S^*(x,y) = \underline{(2x+y, 3x-y)}$

b) $S \circ S^* = S^* \circ S$

$S(2x+y, 3x-y) = S^*(2x+3y, x-y)$

$(2(2x+y) + 3(3x-y), (2x+y) - (3x-y)) = (2(2x+3y) + x - y, 3(2x+3y) - (x-y))$

$(4x+2y+9x-3y, 2x+y-3x+y) = (4x+6y+x-y, 6x+9y-x+y)$

$(13x-y, -x+2y) = (5x+5y, 10y+5x)$ $\therefore$ <u>No es normal</u>

- Ejercicio 6, 2016-1, 1° Final, Tipo A.

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual y el operador lineal $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) El adjunto de S.
b) si es S es un operador normal.

$E = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $S(T) = \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ $S^*(T) = \begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$ $S = \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = (x+2y,\ 3x+4y)$

a) $S^*(T) = \begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = S^*(T) = \underline{(x+3y,\ 2x+4y)}_{//}$

b) $S \circ S^* = S^* \circ S$

$S(x+3y,\ 2x+4y) = S^*(x+2y,\ 3x+4y)$

$(x+3y+2(2x+4y),\ 3(x+3y)+4(2x+4y)) = (x+2y+3(3x+4y),\ 2(x+2y)+4(3x+4y))$

$(x+3y+4x+8y,\ 3x+9y+8x+16y) = (x+2y+9x+12y,\ 2x+4y+12x+16y)$

$(5x+11y,\ 11x+25y) = (10x+14y,\ 14x+20y)$ ∴ <u>No es normal</u> //

- Ejercicio 2, Página 447, Barrera.

Sea el espacio vectorial $M = \left\{ \begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R} \right\}$ definido en el campo de los reales y sea el operador lineal $T: M \to M$ con regla de correspondencia:

$T\left(\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a-b&0\\0&a+b\end{bmatrix}$ a) Obtener el operador adjunto de T, considerando el siguiente producto interno:

$\left(\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}x&0\\0&y\end{bmatrix}\right) = ax+by$

$F\left(\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}\right) = (a,b)$ $T((a,b)) = (a-b,\ a+b)$ $((a,b)|(x,y)) = ax+by$

$B = \{(1,0),(0,1)\}$

$T(1,0) = (1,1)$ $M_B^B(T) = \begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ $M_B^B(T^*) = \begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y\\-x+y\end{bmatrix}$

$T(0,1) = (-1,1)$

$\underline{T^*\left(\begin{bmatrix}x&0\\0&y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+y&0\\0&-x+y\end{bmatrix}}_{//}$

-Ejercicio 9, página 449, Barrera.

Sea el operador lineal $T: C^2 \to C^2$, donde C^2 esta definido en el campo complejo y cuya regla de correspondencia es:

$T(x,y) = (2x+iy, y-ix)$

a) Determine si T es un operador normal respecto al producto interno usual en C^2.

b) Obtenga $\| T^*(1+i, 1-i)\|$

$B=\{(1,0),(0,1)\}$

$T(1,0) = (2, -i)$

$T(0,1) = (i, 1)$

$M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ $M(T^*) = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{matrix} 2x+iy \\ -ix+y \end{matrix}$

$T^*(x,y) = (2x+iy, -ix+y)$

$T \circ T^* = T^* \circ T$ $T(2x+iy, -ix+y) = T^*(2x+iy, -ix+y)$

$= (2(2x+iy) + i(-ix+y), -i(2x+iy) + -ix+y) = 2(2x+iy)+i(-ix+y), -i(2x+iy) + -ix+y$

$(4x+2iy+x+iy, -2ix+y-ix+y) = (4x+2iy+x+iy, -i2x+y-ix+y)$

$(5x+3iy, -3ix+2y) = (5x+3iy, -3ix+2y)$ $\therefore$ Es un operador normal

b) $\| T^*(1+i, 1-i)\| = \| 2(1+i)+i(1-i), -i(1+i)+1-i\| = \| 2+2i+i+1, -i+1+1-i\|$

$\|(3+3i, 2-2i)\| = \sqrt{(3+3i, 2-2i)|(3+3i, 2-2i)} = \sqrt{(3+3i)(3-3i)+(2-2i)(2+2i)}$

$= \sqrt{9+9+4+4} = \sqrt{26}$