Cálculo Vectorial
Lectura 19: Laplaciano

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Invariantes de Segundo Orden

Un campo, ya sea escalar f o vectorial $\mathbf{f}$, puede tener segundas derivadas parciales, por lo que pueden ser susceptibles de aplicarles el operador nabla dos veces consecutivas. Los operadores diferenciales de segundo orden que pueden definirse son:

- $\nabla \cdot \nabla f$, llamado laplaciano.
- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$.
- $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{f})$.
- $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f})$.

Puede observarse que el segundo y cuarto arrojan un resultado definido: el rotacional es un campo solenoidal, mientras que el gradiente es un campo irrotacional.

De todos los invariantes de segundo orden, el más importante es el laplaciano. Este operador aparece en muchos fenómenos físicos como la propagación de ondas, la conducción del calor o la electrostática, entre otras. Sin embargo, su aplicación trascendental es en la mecánica cuántica, donde ayuda a plantear la ecuación de Schôdinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U\Psi = E\Psi$$

2. Laplaciano

El laplaciano es el operador de segundo orden que suma las segundas derivadas parciales no mixtas de un campo escalar.

Sea el campo escalar $f(x, y, z)$ con segundas derivadas parciales. El operador laplaciano se define como

$$\nabla^2 f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

o bien

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

El laplaciano también puede definirse mediante la matriz hessiana del campo escalar f. En máximos de funciones multivariable se estudio que la matriz hessiana está formada por las segundas derivadas parciales, y en consecuencia es una matriz cuadrada:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

En la diagonal principal de H están los términos del laplaciano, por lo que también puede definirse como

$$\nabla^2 f = \operatorname{tr} H(f)$$

Ejemplo. Obtenga el laplaciano del campo escalar

$$f(x, y, z) = x^2 + y + z^2 + xyz$$

Las primeras derivadas parciales respecto de cada variable son:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + yz \\ f_y &= 1 + xz \\ f_z &= 2z + xy \end{aligned}$$

Las segundas derivadas son:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2 \\ f_{yy} &= 0 \\ f_{zz} &= 2 \end{aligned}$$

Por lo que el valor del laplaciano es $\nabla^2 f = 4$.

Un concepto importante es cuando las segundas derivadas suman cero y por lo tanto el laplaciano se anula completamente.

Sea $f(x, y, z)$ un campo escalar con segunda derivadas parciales. El campo f es armónico si

$$\nabla^2 f = 0$$

Ejemplo. Determine si el campo escalar

$$f(x, y, z) = e^x \sin y + e^y \sin z + e^z \sin x$$

es armónico.

Las primeras derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} f_x &= e^x \sin y + e^z \cos x \\ f_y &= e^x \cos y + e^y \sin z \\ f_z &= e^y \cos z + e^z \sin x \end{aligned}$$

Las segundas derivadas son:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= e^x \sin y - e^z \sin x \\ f_{yy} &= -e^x \sin y + e^y \sin z \\ f_{zz} &= -e^y \sin z + e^z \sin x \end{aligned}$$

Al sumar todas las derivadas se obtiene que $\nabla^2 f = 0$, y por lo tanto el campo es armónico.