Cálculo Vectorial
Lectura 17: Invariantes de Primer Orden

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Operador Nabla

Al inicio del estudio de funciones multivariable se conoció al operador nabla, ∇, el cual permite calcular el gradiente para una función escalar $f(\mathbf{x})$. Pero, el operador nabla no solo tiene ese uso, también puede utilizarse para determinar la naturaleza de ciertos puntos en un campo vectorial.

El operador vectorial nabla se define como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

Hay que aclarar que al decir operador vectorial no se está diciendo que se trata de un vector. El operador unario nabla es vectorial porque se aplica sobre un vector.

Este operador es invariante para cualquier sistema de coordenadas ortogonales. El término invariante hace referencia a que es independiente de las coordenadas que se estén trabajando; es decir, aplicar el operador nabla a un campo tendrá el mismo resultado en cualquier sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales.

2. Divergencia

Un campo vectorial

$$\mathbf{f}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\hat{\mathbf{i}} + Q(x, y, z)\,\hat{\mathbf{j}} + R(x, y, z)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1}$$

tiene como matriz jacobiana a

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Hay que resaltar el hecho de que la matriz jacobiana existe siempre que las primeras derivadas parciales de cada componente del campo existan.

En (2), los elementos en rojo forman la diagonal principal de la matriz, la cual es importante en el álgebra matricial. Una de las operaciones especiales que se realizan con matrices cuadradas es la traza, la cual consiste en sumar los elementos de la diagonal principal. La traza de la matriz jacobiana es el invariante llamado divergencia.

Sea

$$\mathbf{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\hat{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\,\hat{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\,\hat{\mathbf{k}}$$

un campo vectorial con primeras derivadas parciales. La divergencia del campo $\mathbf{f}$ se define como:

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

La divergencia también puede ser calculada como

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \operatorname{div}\mathbf{f}$$

Además del cálculo del gradiente, el operador nabla es útil para calcular la divergencia de un campo vectorial mediante una notación similar al producto punto. Hay que considerar que la operación que se realiza es una derivada (similar al operador diferencial), y como tal no es un producto punto entre ∇ y el campo vectorial, solo es una notación.

Las propiedades de la divergencia para cuales quiera campos vectoriales $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$, y cualquier campo escalar h son

- $\operatorname{div}(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \operatorname{div}\mathbf{f} + \operatorname{div}\mathbf{g}$.
- $\operatorname{div}(h\mathbf{f}) = h\operatorname{div}\mathbf{f} + \nabla h \cdot \mathbf{f}$.

Ejemplo. Sea el campo vectorial

$$\mathbf{f}(x,y,z) = xyz\hat{\mathbf{i}} + \cos(xyz)\,\hat{\mathbf{j}} + xy^2z^3\hat{\mathbf{k}}$$

Calcule la divergencia en el punto $A\left(\frac{\pi}{2}, 3, 1\right)$.

La divergencia se calculará mediante el operador nabla.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{f} &= \nabla \cdot \mathbf{f} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(xyz\hat{\mathbf{i}} + \cos(xyz)\,\hat{\mathbf{j}} + xy^2z^3\hat{\mathbf{k}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}\cos(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}\left(xy^2z^3\right) \\
\operatorname{div}\mathbf{f} &= yz - xz\sin(xyz) + 3xy^2z^2
\end{aligned}$$

Al evaluar en el punto A se obtiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{f} &= yz - xz\sin(xyz) + 3xy^2z^2 \\
\operatorname{div}\mathbf{f}\Big|_A &= 3 - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{27\pi}{2} \\
&= 3 + \frac{\pi}{2} + \frac{27\pi}{2} \\
\operatorname{div}\mathbf{f}\Big|_A &= 3 + 14\pi
\end{aligned}$$

3. Rotacional

Los elementos de la matriz jacobiana (2) que forman los triángulos superior e inferior (en azul) pueden agruparse en restas que indican la simetría de la matriz. Para ello se restan cada elemento del triángulo inferior menos su respectivo simétrico en el triángulo superior:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Estas restas forman las componentes de un vector que indicará la capacidad del campo (1) para rotar sus vectores alrededor de los puntos del dominio. Éste es el segundo invariante llamado rotacional.

Sea

$$\mathbf{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\hat{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\,\hat{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\,\hat{\mathbf{k}}$$

un campo vectorial con primeras derivadas parciales. El rotacional del campo $\mathbf{f}$ se define como:

$$\operatorname{rot}\mathbf{f} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

El rotacional también puede ser calculado como

$$\nabla \times \mathbf{f} = \operatorname{rot}\mathbf{f}$$

El uso de la notación del producto cruz para el rotacional es solo eso, una notación. Al igual que la divergencia, no debe confundirse con una operación entre vectores.

La propiedades del rotacional para los campos vectoriales $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$, y el campo escalar h son:

- $\operatorname{rot}(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \operatorname{rot}\mathbf{f} + \operatorname{rot}\mathbf{g}$.
- $\operatorname{rot}(h\mathbf{f}) = h\operatorname{rot}\mathbf{f} + \nabla h \times \mathbf{f}$.
- $\operatorname{div}(\mathbf{f}\times\mathbf{g}) = \mathbf{g}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{f} - \mathbf{f}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{g}$.
- $\operatorname{rot}(\mathbf{f}\times\mathbf{g}) = (\operatorname{div}\mathbf{g} + \mathbf{g}\cdot\nabla)\,\mathbf{f} - (\operatorname{div}\mathbf{f} + \mathbf{f}\cdot\nabla)\,\mathbf{g}$.

Ejemplo. Obtenga el rotacional del campo

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \left(1+y+z^2\right)\hat{\mathbf{i}} + e^{xyz}\hat{\mathbf{j}} + \ln(xyz)\,\hat{\mathbf{k}}$$

en el punto $B(1,1,-1)$.

Al igual que el ejemplo anterior, se utilizará el operador nabla.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{f} &= \nabla\times\mathbf{f} \\
&= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 1+y+z^2 & e^{xyz} & \ln(xyz) \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}\ln(xyz) - \frac{\partial}{\partial z}e^{xyz}\right)\hat{\mathbf{i}} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(1+y+z^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\ln(xyz)\right)\hat{\mathbf{j}} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}e^{xyz} - \frac{\partial}{\partial y}\left(1+y+z^2\right)\right)\hat{\mathbf{k}} \\
\operatorname{rot}\mathbf{f} &= \left(\frac{1}{y} - xye^{xyz}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(2z - \frac{1}{x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(yze^{xyz} - 1\right)\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Evaluando el rotacional con el punto B se obtiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{f} &= \left(\frac{1}{y} - xye^{xyz}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(2z - \frac{1}{x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(yze^{xyz} - 1\right)\hat{\mathbf{k}} \\
\operatorname{rot}\mathbf{f}\Big|_B &= \left(1 - e^{-1}\right)\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} - \left(e^{-1} + 1\right)\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Tanto la divergencia como el rotacional se aplican en la mecánica de fluidos y el electromagnetismo. Estas aplicaciones se revisarán en el siguiente subtema.