Actividad 3.
Díaz Hernández Marcos Bryan
Ecuaciones Diferenciales
Grupo: 25

- Existencia y unicidad / unicidad

Una ecuacion diferencial ordinario de orden n es una igualdad que relaciona la variable independiente con la n-ésima derivada de la variable dependiente

$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = x^3$ ¿sean lineales o no

De tal forma que se pueda expresar como: $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$
tal que F es una relacion que depende de "x" y "y", tambien de las derivados de "y" de orden n.

Se puede reescribir como sigue: $\frac{d^ny}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$

- Problema valor inicial

Se busca una solución $y(x)$ que pueda satisfacer ciertas condiciones adicionales prescritas, es decir condiciones impuestas en la $y(x)$. En algún intervalo I que contiene a x_0, se nos pide resolver:

$\frac{d^ny}{dx^n} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ tal que $y(x_0) = y_0, y'(x_0), y_1, y^{(n-1)}(x_0)$ son constantes reales

Los valores de $y(x)$ y sus primeras "n-1" derivadas en un solo punto x_0: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1 \ldots$ $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ son las condiciones iniciales.

Para las ecuaciones diferenciales se tiene que las derivadas vienen de la interpretacion de los valores tal que las condicio nes determinen una solucion que cumpla con estas y que sea aplicada para la solucion especifica del problema/ecuación.

- Existencia y unicidad para un problema de valores iniciales.

Se considera: existe la solución
la solucion es única

Actividad 3.
Díaz Hernández Marcos Bryan
Ecuaciones Diferenciales
Grupo: 25

Existencia: $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ Posee soluciones y alguna $g(x)$ cumple con pasar por el punto (x_0, y_0)

Unicidad: Cuando pasa la curva precisamente por el punto ó cuando es posible que la curva solucion pase por (x_0, y_0)

E.1 $y=0$ y $y=\frac{1}{16}x^4$ satisfacen $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ y C.I: $y(0)=0$

• Tiene al menos dos soluciones por cumplir con la condición.

• Teorema de existencia / primer orden

dada: $y' = F(x,y)$ definido en la región R que contiene (x_0, y_0)

Debe cumplir la condiciones
1. $F(x,y)$ continua en R
2. $\frac{\partial F}{\partial y}$ es continua en R

Entonces existe un intervalo I con centro en x_0 y existe una y solo una funcion $y=g(x)$ definida en el intervalo I que satisface la condicion $y(x_0)=y_0$, son dos condiciones que no son obligatorias ya que existen ecuaciones y $g(x)$ que cumplan con ser solución única.

a) $y' = \frac{1}{y^2}$ con $y(x_0)=0 \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{y^2}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3}$ / $-\frac{3}{y^3}$
entonces en $(x_0, 0)$ la funcion es discontinua por lo que no hay solución

b) Indica la region donde existe solucion a $y' = xy + e^{-x}$

1) $F(x,y) = xy + e^{-x}$ y su derivada $\frac{\partial F}{\partial y} = x - e^{-x}$ son continuas
por lo tanto el plano donde existe la solucion es el mismo xy

Actividad 3.
Díaz Hernández Marcos Bryan
Ecuaciones Diferenciales
Grupo: 25

c) Existe solucion para $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ en $y(2)=1$

La Funcion $F(x,y) = xy^{1/2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$ son continuas para $y>0$

talque (x_0, y_0), $y>0$ en el semiplano superior hay un intervalo centrado en x_0 en el que la ecuacion diferencial tiene solución unica.

2) Determinar si el teorema de existencia y unicidad garantiza que la ecuacion diferencial $y' = \sqrt{y^2-9}$ tiene solucion en cada uno de los sig. puntos

$F(x,y) = \sqrt{y^2-9}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = (y^2-9)^{1/2} = \frac{1 \quad 2y}{2\sqrt{y^2-9}}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2-9}$

$y^2-9 \geq 0$; $(y+3)(y-3) \geq 0$ $\quad \left.\begin{matrix} y \geq -3 \\ y \geq 3 \end{matrix}\right\}$ Rango $F(x,y)$ $\quad (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ y

$y^2-9 > 0$; $(y+3)(y-3) > 0$
$y+3 > 0$
$y > -3$
$y > 3$

$\left.\begin{matrix} y > -3 \\ y > 3 \end{matrix}\right\}$ Rango $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\quad (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ y

a) $(1,4) \Rightarrow y(1) = 4$ $\quad \therefore$ Tiene solución
Solucion unica

b) $(5,3) \Rightarrow y(5) = 3$ $\quad \therefore$ Tiene solución
No tiene solucion unica necesariamente

c) $(2,-3) \Rightarrow y(2) = -3$ $\quad \therefore$ Tiene solución
No tiene solucion unica necesariamente

d) $(-7,7) \Rightarrow y(-7) = 7$ $\quad \therefore$ No tiene solucion necesariamente
No tiene solucion unica necesariamente

3) Indicar en que región del plano xy donde existe la solucion de la ecuacion diferencial $y' = xy + e^{y}$

$F(x,y) = xy + e^{-y}$ $\quad e^{y} \neq 0 \mid y \neq \ln(0)$ $\quad \therefore$ Definido para todo el plano xy

$\frac{\partial F}{\partial y} = x - e^{-y} = x - \frac{1}{e^{y}}$ $\quad \therefore e^{y} \neq 0 \mid y \neq \ln(0)$