Cálculo Vectorial
Lectura 31: Integral de Superficie de Campo Vectorial

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Integral de Superficie Vectorial

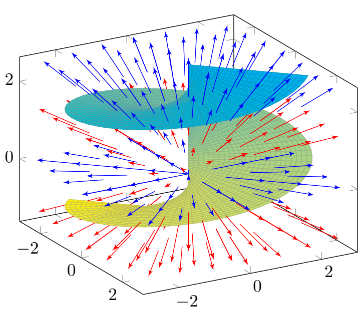

Figura 1. Un campo vectorial representa a un flujo que puede atravesar una superficie.

Ya se ha comentado que un campo vectorial puede representar a un conjunto de velocidades, fuerzas o líneas de campo electromagnético. Cuando una superficie se encuentra dentro de un campo (por ejemplo, una hoja de papel en un campo magnético), ésta puede ser atravesada por una infinidad de vectores, como se ilustra en la figura 1. Cada punto de la superficie se ve afectado por un vector del campo que la atraviesa. Si se desea cuantificar la cantidad de vectores que atraviesan a la superficie en una sección determinada, la integral de superficie es una herramienta que ayuda a dicha tarea.

El campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z)$ atraviesa la superficie S, de ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v)$. Mediante las derivadas parciales de la ecuación vectorial se obtienen tres vectores trascendentes a la superficie: los vectores tangentes $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$, y el vector normal $\mathbf{n}$. La figura 2 muestra, en un punto determinado, que los vectores tangentes a la superficie y el vector del campo $\mathbf{f}$ forman un paralelepípedo.

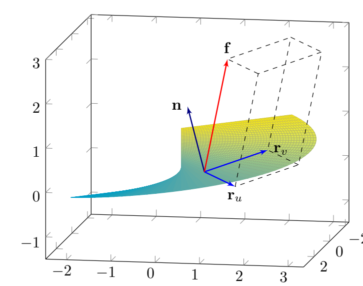

Figura 2. Paralelepípedo formado sobre una superficie. Las aristas del cuerpo geométrico son los vectores tangentes $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ y el campo vectorial $\mathbf{f}$.

La base del paralelepípedo es una diferencial de superficie, por lo que las aristas concurrentes en el vértice (punto de la superficie) son $\mathbf{f}(x, y, z)$, $\mathbf{r}_u du$ y $\mathbf{r}_v dv$; mediante el producto mixto de los tres vectores se puede calcular la diferencial de volumen que atraviesa la superficie, denotada como dF. Es decir,

$$dF = \mathbf{f}(x, y, z) \cdot (\mathbf{r}_u du \times \mathbf{r}_v dv) \quad (1)$$

Para asegurar que solo se toman en cuenta los vectores que atraviesan la superficie, el campo vectorial $\mathbf{f}$ debe evaluarse con la ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v)$ de S. De esta forma, la diferencial dF es

$$dF = \mathbf{f}\big(\mathbf{r}(u, v)\big) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\ du\ dv$$

Al aplicar la integral doble sobre la superficie S en el plano uv, se obtiene la integral de superficie de campo vectorial.

Sean la superficie $S: \ \mathbf{r}(u,v)$ y el campo vectorial $\mathbf{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. La integral de superficie de $\mathbf{f}$ a lo largo de S en una región del plano uv se define como

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{f}\big(\mathbf{r}(u,v)\big) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \ du \ dv$$

Una forma alternativa de observar la diferencial dF es mediante la componente escalar del campo $\mathbf{f}$ sobre el vector normal $\mathbf{n}$ de la superficie. La diferencial de superficie de campo escalar es

$$dS = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \ du \ dv$$

en la cual se puede sustituir el vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, obteniendo la igualdad

$$dS = \|\mathbf{n}\| \ du \ dv \tag{2}$$

Por otro lado, la componente escalar del campo $\mathbf{f}$ sobre el vector normal es

$$\mathrm{CompEsc}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{f} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \tag{3}$$

Al multiplicar (2) por (3), se obtiene la diferencial (1).

$$\begin{aligned} dS &= \|\mathbf{n}\| \ du \ dv \\ \mathrm{CompEsc}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{f} \ dS &= \mathrm{CompEsc}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{f} \,\|\mathbf{n}\| \ du \ dv \\ \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \ dS &= \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \|\mathbf{n}\| \ du \ dv \\ \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \ dS &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \ du \ dv \\ \mathbf{f} \cdot d\hat{\mathbf{S}} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \ du \ dv \end{aligned}$$

De esta forma, la integral de superficie también puede escribirse como

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \ du \ dv$$

o bien

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \ dS$$

Ejemplo. Calcule la integral de superficie del campo

$$\mathbf{f}(x,y,z) = x^2\hat{\mathbf{i}} + 2z\hat{\mathbf{j}} - 3y\hat{\mathbf{k}}$$

sobre la superficie $y^2 + z^2 = 4$, entre los planos $x = 0$ y $x = 3 - z$.

La figura 3 muestra a la superficie junto con dos vectores normales a ella, los cuales se orientan de manera diferente ($\mathbf{n}_1$ hacia dentro y $\mathbf{n}_2$ hacia fuera).

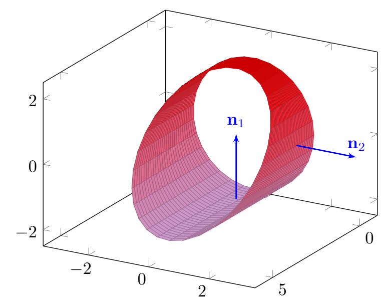

Figura 3

La superficie recorre todo el eje x, y al ser un cilindro circular recto su ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(u,v) = u\hat{\mathbf{i}} + 2\cos v\hat{\mathbf{j}} + 2\sin v\hat{\mathbf{k}}$$

El cálculo del vector normal en esta ocasión hará variar el resultado. En la integral de superficie de campo escalar no importaba el sentido del producto cruz, pues la norma simplificaba cualquier signo negativo. Como esta integral requiere un vector, la orientación del mismo es importante. Más adelante se comentará la forma de identificar la orientación de la superficie a partir de las componentes del vector normal. Por lo pronto, el cálculo de $\mathbf{n}$ sigue a continuación.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= \hat{\mathbf{i}} \\
\mathbf{r}_v &= -2\sin v\hat{\mathbf{j}} + 2\cos v\hat{\mathbf{k}} \\
\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sin v & 2\cos v \end{vmatrix} \\
&= -2\cos v\hat{\mathbf{j}} - 2\sin v\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Para los intervalos de integración, de acuerdo a la ecuación vectorial, la componente en x está controlada por el parámetro u y la componente z por $2\sin v$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
x &= 0 & \qquad x &= 3 - z \\
u &= 0 & \qquad u &= 3 - 2\sin v
\end{aligned}$$

Los intervalos de integración son $0 \le u \le 3 - 2\sin v$ y $0 \le v \le 2\pi$. La integral a calcular es

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S \mathbf{f}\big(\mathbf{r}(u,v)\big) \cdot d\mathbf{S} \\
&= \iint_S \left(u^2\hat{\mathbf{i}} + 4\sin v\hat{\mathbf{j}} - 6\cos v\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(-2\cos v\hat{\mathbf{j}} - 2\sin v\hat{\mathbf{k}}\right)\ du\ dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{3-2\sin v} 4\sin v\cos v\ du\ dv \\
&= \int_0^{2\pi} 4u\sin v\cos v\Big|_0^{3-2\sin v}\ dv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} 12\sin v\cos v - 8\sin^2 v\cos v\ dv \\
&= \left[6\sin^2 v - \frac{8}{3}\sin^3 v\right]_0^{2\pi} \\
I &= 0
\end{aligned}$$

2. Flujo a Través de una Superficie

Se mencionó al inicio que esta integral calcula la cantidad de vectores que atraviesan la superficie. Este concepto físico se conoce como flujo, el cuál puede ser eléctrico, magnético, lumínico, calórico o de algún líquido o gas. De esta forma, la integral de superficie permite calcular el flujo a través de una superficie.

2.1. Orientación de una Superficie

Para conocer el flujo es necesario saber la orientación del vector normal, pues el producto punto incluido en la integral cambiará de signo si se tiene una u otra orientación.

Para definir la orientación se tienen dos tipos de superficies: abiertas y cerradas. Una superficie es abierta cuando posee una frontera, por ejemplo un plano, un paraboloide, la mitad de una esfera. En cambio, una superficie es cerrada cuando define un volumen que no posee fronteras, por ejemplo, una esfera, un elipsoide, un cono con tapa.

La orientación de una superficie cerrada es positiva si el vector normal señala hacia fuera. En cambio, en una superficie abierta, no existe una orientación positiva tal cual, por lo que debe indicarse hacia donde debe señalar el vector normal.

Ejemplo. Obtenga el vector normal, con orientación positiva, a la superficie cerrada

$$\mathbf{r}(u,v) = (2+\cos v)\cos u\hat{\mathbf{i}} + (2+\cos v)\sin u\hat{\mathbf{j}} + \sin v\hat{\mathbf{k}}$$

La figura 4 muestra a la superficie con la orientación de los vectores normales solicitada.

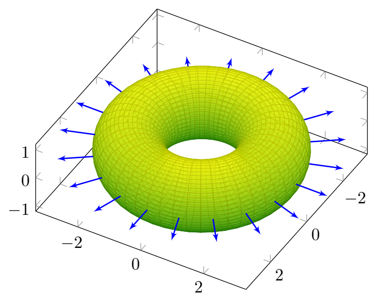

Figura 4

Para conocer al vector normal, se requieren las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u &= -(2+\cos v)\sin u\hat{\mathbf{i}} + (2+\cos v)\cos u\hat{\mathbf{j}}\\ \mathbf{r}_v &= -\sin v\cos u\hat{\mathbf{i}} - \sin v\sin u\hat{\mathbf{j}} + \cos v\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

La orientación positiva para la superficie se da cuando los vectores normales en el primer octante se alejan del origen. Por lo tanto, hay que buscar un vector normal con componente x y y positivas.

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -(2+\cos v)\sin u & (2+\cos v)\cos u & 0 \\ -\sin v\cos u & -\sin v\sin u & \cos v \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = &\left(2\cos v + \cos^2 v\right)\cos u\hat{\mathbf{i}} + \left(2\cos v + \cos^2 v\right)\sin u\hat{\mathbf{j}} +\\ &+ (2+\cos v)\sin v\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Las componentes x y y del vector normal obtenido poseen signo positivo, por lo que el vector normal con la orientación correcta es

$$\begin{aligned}\mathbf{n} = &\left(2\cos v + \cos^2 v\right)\cos u\hat{\mathbf{i}} + \left(2\cos v + \cos^2 v\right)\sin u\hat{\mathbf{j}} +\\ &+ (2+\cos v)\sin v\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Si las componente en x y y hubiesen tenido signo negativo, para obtener la orientación correcta se multiplica el resultado por -1.

2.2. Flujo del Campo

El flujo F del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)$ a través de la superficie S se calcula como

$$F = \iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$$

Cuando el flujo F atraviesa una superficie, éste puede ser de salida o entrada. De acuerdo a una orientación positiva de la superficie, el flujo se clasifica como:

- saliente, si $F > 0$.
- entrante, si $F < 0$.
- equilibrado (lo que entra es igual a lo que sale), si $F = 0$.

Geométricamente, un flujo positivo indica que el campo se dirige en el mismo sentido que el vector normal a la superficie; el flujo negativo indica que el campo se dirige en sentido contrario al vector normal.

Ejemplo. Un disco S de radio 6, centrado alrededor del eje z y sobre el plano $z=-4$, es atravesado por el campo magnético

$$\mathbf{B}(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad [T]$$

Calcule el flujo total a través de S, si ésta se orienta hacia arriba.

La superficie es el plano $z=-4$, limitado por la circunferencia $x^2+y^2=36$. De esta manera una parametrización del disco es

$$\mathbf{r}(u,v)=v\cos u\hat{\mathbf{i}}+v\sin u\hat{\mathbf{j}}-4\hat{\mathbf{k}}$$

Los intervalos de integración recorren el disco, de esta forma el radio v viaja desde 0 hasta 6 y el argumento u recorre toda la circunferencia desde 0 hasta 2π.

Por otro lado, el calculo del vector normal sigue a continuación.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u&=-v\sin u\hat{\mathbf{i}}+v\cos u\hat{\mathbf{j}}\\ \mathbf{r}_v&=\cos u\hat{\mathbf{i}}+\sin u\hat{\mathbf{j}}\\ \mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v&=-v\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

La componente z del vector normal es negativa y va en sentido contrario a la orientación de la superficie. Para lograr la orientación correcta (positiva), el vector normal debe ser multiplicado por -1. Como la superficie es abierta, es importante seguir la indicación de la orientación para no calcular un flujo contrario. El flujo del campo a través de la superficie es

$$\begin{aligned}\Phi&=\iint_S\mathbf{B}(v\cos u,v\sin u,-4)\cdot d\mathbf{S}\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^6\left(v^2\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(v\hat{\mathbf{k}}\right)\,dv\,du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi&=\int_0^{2\pi}\int_0^6 v^3\,dv\,du\\ &=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}v^4\Big|_0^6du\\ &=\int_0^{2\pi}324\,du\\ &=324u\Big|_0^{2\pi}\\ \Phi&=648\pi\end{aligned}$$

Por lo tanto, el flujo total del campo magnético sobre la superficie es $\Phi=648\pi\ [Wb]$.

Una cuestión importante sobre la integral de superficie es saber si la superficie es abierta o cerrada. Si la superficie es abierta, solo se calcula una integral como se ha visto. En cambio, si la superficie es cerrada por secciones, como la mostrada en la figura 5, entonces debe calcularse una integral sobre cada sección de superficie. Es decir, si la superficie cerrada S está compuesta por las secciones $S_1,S_2,\cdots,S_n$, entonces la integral a calcular es

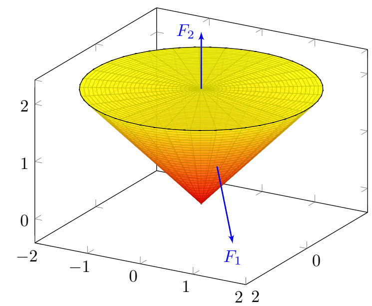

Figura 5. El flujo en una superficie cerrada es la suma de flujos en cada sección superficial.

$$\iint_S\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{S_1}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}+\iint_{S_2}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}+\cdots+\iint_{S_n}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$$

De esta forma, el flujo sobre una superficie seccionada también es la suma de todos los flujos sobre cada parte de la superficie.