Temario

- 1. Teoría de la probabilidad
- 2. Variables aleatorias
- 3. Variables aleatorias conjuntas
- **4. Modelos probabilísticos de fenómenos aleatorios discretos**
- 5. Modelos probabilísticos de fenómenos aleatorios continuos

Modelos Probabilísticos Comunes
Objetivo

El alumno aplicará algunas de **las distribuciones más utilizadas en la práctica de la ingeniería**, a fin de elegir la más adecuada para analizar algún fenómeno aleatorio discreto en particular.

Temario

4.1 Ensayo de Bernoulli, distribución de Bernoulli, cálculo de su media y varianza.

4.2 Proceso de Bernoulli, distribución binomial, cálculo de su media y variancia, distribución geométrica, cálculo de su media y varianza, distribución binomial negativa su media y varianza, distribución hipergeométrica.

4.3 Proceso de Poisson, distribución de Poisson, cálculo de su media y varianza, aproximación entre las distribuciones binomial y Poisson.

TEMA IV
Modelos Probabilísticos Comunes

Distribuciones discretas

- Uniforme
- Bernoulli
- Binomial
- Geométrica
- Pascal
- Hipergeométrica
- Poisson

TEMA IV
Distribución discreta Uniforme

Sea X una v.a. que toma los valores $x_1 , x_2, x_3, \dots , x_k$ con igual probabilidad

$$f_X(x) = \frac{1}{k}, \qquad x = x_1 , x_2, x_3, \dots , x_k$$

Entonces la distribución es discreta uniforme con parámetro k.

TEMA IV
Distribución discreta Uniforme

EJEMPLO 1

La rueda de una ruleta se divide en 25 sectores de igual área y se enumeran del 1 al 25.

a) Encontrar una fórmula para la distribución de probabilidad de X, que represente el número que ocurre cuando se hace girar la ruleta.
b) Determinar la probabilidad de que el número observado sea menor o igual a 15.
c) Determinar la media y la varianza de X.

TEMA IV
Distribución de Bernoulli

Sea X la variable aleatoria que representa el número de éxitos que se obtienen al realizar un ensayo de Bernoulli, entonces X tiene una distribución de Bernoulli con parámetro p.

$$f_X(x;p)\begin{cases} 1-p\,; & x=0 \\ p\,; & x=1 \\ 0\,; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\mu = p$$
$$\sigma^2 = pq$$
$$M_X(\theta) = q + e^{\theta} p$$

NOTA: el experimento sólo se realiza una vez y sólo se tienen dos posibles resultados.

TEMA IV
Distribución de Bernoulli

EJEMPLO 2

Un experimento consiste en observar **una vez** si un dado que es lanzado cae en número par o non, ¿obtener la desviación estándar del experimento?

TEMA IV
Distribución de Bernoulli

PROCESO DE BERNOULLI

Si se repite varias veces un ensayo de Bernoulli, se tiene entonces un proceso de Bernoulli. El proceso de Bernoulli tiene las siguientes propiedades.

1. El experimento consiste de ***n*** ensayos de Bernoulli.
2. Los resultados de cada ensayo pueden clasificarse como éxito o fracaso.
3. La probabilidad de éxito ***p***, permanece constante para todos los ensayos.
4. Los ensayos son independientes.

TEMA IV
Distribución Binomial

Sea X la variable aleatoria que representa el número de éxitos que se observan al realizar un proceso de Bernoulli, entonces recibe el nombre de variable aleatoria binomial, con distribución

$$f_X(x;n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & ; x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & ;\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\mu = np$$
$$\sigma^2 = npq$$
$$M_X(\theta) = \left(q + e^{\theta} p\right)^n$$

TEMA IV
Distribución Binomial

EJEMPLO 3

Supóngase que los motores de un aeroplano operan en forma independiente y tienen una probabilidad de falla de 0.4. Suponiendo que un aeroplano puede realizar una vuelo seguro en tanto se mantengan funcionando al menos la mitad de sus motores, determinar qué aeroplano, uno de 4 motores o uno de 2, tiene mayor probabilidad de terminar su vuelo en forma segura.

TEMA IV
Distribución Binomial

EJEMPLO 4

La probabilidad e que un satélite, después de colocarlo en órbita, funcione de manera adecuada es 0.9. Supóngase que cinco de éstos se colocan en órbita y operan de manera independiente:

a) ¿cuál es la probabilidad e que, por lo menos el 80% funcione adecuadamente?
b) Responder al inciso (a) si n=10
c) Responder al inciso (a) si n=20

TEMA IV
Distribución Binomial

EJEMPLO 5

Un puente de peaje cobra un dólar a los automóviles de pasajeros y 2.5 a otros vehículos. Supóngase que durante las últimas horas diurnas, 60% de los automóviles son de pasajeros. Si 25 vehículos cruzan el puente durante determinado periodo diurno, ¿cuál es el ingreso por peaje esperado?

TEMA IV
Distribución Geométrica

Sea X la variable aleatoria que representa el número de ensayos de Bernoulli que se requieren para observar por primera vez un éxito, entonces tiene una distribución geométrica con parámetro

$$f_X(x;p) = \begin{cases} q^{x-1}p & ; x = 1,2,\ldots,n \\ 0 & ; en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$$

$$M_X(\theta) = \frac{pe^\theta}{1 - qe^\theta}$$

TEMA IV
Distribución Geométrica

EJEMPLO 6

Se estima que el 60% de una población de consumidores prefiera una marca particular de pasta de dientes A.

a) ¿Cuál es la probabilidad, al entrevistar a un grupo de consumidores, de que se tenga que entrevistar a cinco personas exactamente, para encontrar al primer consumidor que prefiera la marca A?
b) ¿Al menos a cinco personas?

TEMA IV
Distribución Geométrica

EJEMPLO 7

Una maquina detecta fallas en los productos que elabora una fabrica. Si los productos tienen una probabilidad de falla del 0.05, calcular la probabilidad de que la maquina encuentre su primer producto defectuoso en la octava ocasión que selecciona un producto para su inspección.

TEMA IV
Distribución Geométrica

EJEMPLO 8

En una bolsa hay 10 bolas de las cuales 6 son blancas y el resto rosas. Si se hacen extracciones con reposición

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan tres rosas antes de que salga por primera vez una blanca?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan tres blancas antes de que salga por primera vez una rosa?
c) Si se hacen extracciones sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que salgan tres rosas antes de que salga por primera vez una blanca?

TEMA IV
Distribución Pascal

Distribución de Pascal

Sea X una variable aleatoria que representa el número de ensayos de Bernoulli que se requieren para observar el r-ésimo éxito, si en cada uno de los ensayos se tiene una probabilidad de éxito **p**, entonces tiene una distribución de Pascal con parámetros **r** y **p**.

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} & ; x = r, r+1, \ldots \\ o & ; \text{ en otro caso} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{r}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{rq}{p^2}$$

$$M_X(\theta) = \left(\frac{pe^\theta}{1 - qe^\theta} \right)^r$$

TEMA IV
Distribución Pascal

EJEMPLO 9

Un cliente entra a una agencia de automóviles cada hora. La probabilidad de que una vendedora cierre una transacción es de 0.1. Si ella debe continuar trabajando hasta que venda tres autos, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que trabajar exactamente ocho horas? ¿y más de ocho horas?

TEMA IV
Distribución Pascal

EJEMPLO 10

Un gran lote de llantas contiene 10% de defectuosas, y de ahí se elegirán cuatro para colocarlas en un auto.

a) Obtener la probabilidad de que seis llantas deban seleccionarse del lote para obtener cuatro en buen estado.
b) Calcular el valor esperado y la variancia del número de selecciones que deben efectuarse para obtener cuatro llantas sin defectos.

TEMA IV
Distribución Hipergeométrica

Sea ***X*** la v.a. que representa el número de éxitos en ***n*** ensayos extraídos de una población de tamaño ***N***, con ***r*** elementos que tienen la característica de interés, entonces ***X*** es una variable aleatoria hipergeométrica con parámetros ***N***, ***n*** y ***r***; con función de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} & ; \quad x = 0,1,2 \ldots n \\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\mu = n\frac{r}{N}$$

$$\sigma^2 = n\frac{r}{N}\left(1 - \frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

TEMA IV
Distribución Hipergeométrica

EJEMPLO 11

¿Cuál es la probabilidad de que una auditora de Hacienda detecte solamente dos declaraciones de impuestos con deducciones ilegales, si se seleccionan aleatoriamente seis de 18 declaraciones, ocho de las cuales contienen deducciones ilegales?

TEMA IV
Distribución Hipergeométrica

EJEMPLO 12

Se capturaron, etiquetaron y liberaron cinco individuos de una población de animales que se piensa están al borde de la extinción en una región para que se mezclen con la población. Después de haber tenido la oportunidad de mezclarse, se selecciona una muestra aleatoria de 10 de estos animales. Sea ***X*** el número de animales etiquetados en la segunda muestra. Si en realidad hay 25 animales de este tipo en la región, ¿cuál es la probabilidad de que

a) $X = 2$?

b) $X \leq 2$?

TEMA IV
Distribución Hipergeométrica

EJEMPLO 13

Se formó un jurado de seis personas de un grupo de 20 posibles miembros, de los cuáles 8 eran mujeres y 12 hombres. El jurado se seleccionó aleatoriamente, pero resultó que sólo tenía a una mujer como miembro. ¿Tiene algún motivo para dudar de la aleatoriedad de la selección?

TEMA IV
Proceso de Poisson

El estudio de la ocurrencia de un evento dentro de un intervalo de tiempo. Tiene las siguientes características:

1. Estacionalidad. El valor esperado de la ocurrencia de un evento en un intervalo de tiempo de longitud t es λt, con λ constante. λ recibe el nombre de intensidad del proceso.
2. Unicidad o No multiplicidad. La probabilidad de que ocurra más de un evento en un intervalo (de tiempo) de longitud $h\ cuando\ h \to 0$ es despreciable comparada con la probabilidad de que ocurra solamente uno.
3. Independencia. El número de ocurrencias en cualquier intervalo de tiempo es independiente del número de ocurrencias en cualquier otro intervalo.

TEMA IV
Distribución de Poisson

Sea ***X*** una variable aleatoria con distribución de Poisson, con parámetro $\boldsymbol{\lambda}$ entonces

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & ; \quad x = 0,1,2,3 \ldots \\ \quad 0 & ; \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\mu_X = \lambda$$

$$\sigma_X^2 = \lambda$$

TEMA IV
Distribución de Poisson

EJEMPLO 14

En promedio, en una cierta intersección ocurren tres accidentes viales por mes. Determinar las probabilidades de que en un determinado mes en esta intersección ocurran

a) exactamente cinco accidentes;

b) menos de tres accidentes.

TEMA IV
Distribución de Poisson

EJEMPLO 15

Sea X el número de imperfecciones superficiales de una caldera seleccionada al azar de un tipo que tiene una media de 5 por metro cuadrado.

a) Obtener $P(5 < X < 8)$
b) Obtener $P(5 \leq X \leq 8)$

TEMA IV
Distribución de Poisson

EJEMPLO 16

Supóngase que aviones pequeños llegan a cierto aeropuerto según un proceso de Poisson con una tasa de 8 aviones por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente seis aviones pequeños lleguen durante una hora? ¿Por lo menos 10?
b) ¿Cuáles son el valor esperado y la desviación estándar de l número de aviones pequeños que llegan durante un periodo de 90 minutos?

TEMA IV
Distribución de Poisson

EJEMPLO 17

El número de nudos que hay en cierto tipo de madera tiene una distribución de Poisson con un promedio de 1.5 nudos por 10 pies cúbicos. Calcule la probabilidad de que un trozo de madera de 10 pies cúbicos tenga por lo menos un nudo.

TEMA IV
Modelos Probabilísticos Comunes

EJEMPLO 19

Un vendedor descubre que la probabilidad de hacer una venta en una sola entrevista con clientes es de 0.03 aproximadamente. Si se acerca a 100 posibles clientes, ¿Cuál es la probabilidad de hacer por lo menos una venta?

EJEMPLO 20

Un sistema de protección contra cohetes está construido con ***n*** unidades de radar que funcionan independientemente, cada una con probabilidad de 0.9 de detectar un cohete que ingresa en la zona que cubren todas las unidades.

a) Si ***n=5*** y un cohete entra en la zona, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro unidades detecten el cohete? ¿Al menos una unidad?

b) ¿Cuál debe ser el valor de ***n*** para que la probabilidad de detectar el cohete al entrar en la zona, sea de 0.999?

EJEMPLO 21

La cantidad de personas que llegan a una sala de urgencias se puede modelar mediante un proceso de Poisson con un parámetro de número de llegadas de cinco por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran exactamente cuatro llegadas durante una determinada hora?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen por lo menos cuatro personas durante cierta hora?
c) ¿Cuántas personas espera que lleguen durante un periodo de 45 minutos?