Cálculo Vectorial
Lectura 1: Máximos y Mínimos de Funciones Multivariable

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero de 2020

1. Funciones Multivariable

El Cálculo Diferencial e Integral se fundamenta con funciones con una sola variable independiente. El Cálculo Multivariable hace uso de varias incógnitas independientes para definir diferentes tipos de funciones:

- **Funciones escalares de variable escalar**. Son las funciones clásicas en las cuales tanto la variable independiente como la dependiente son escalares. Un ejemplo es

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=x^2+x+1$$

- **Funciones escalares de variable vectorial**. Son funciones que dependen de múltiples variables independientes (un punto variable) con una sola variable dependiente, por ejemplo

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\Rightarrow f(x,y,z)=xyz+x^2+yz+2$$

- **Funciones vectoriales de variable escalar**. Este tipo de funciones posee una sola variable independiente, pero con múltiples salidas dependientes (vector); las curvas en forma parámetrica se clasifican dentro de este grupo, por ejemplo

$$\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\Rightarrow \mathbf{f}(t)=te^t\hat{\mathbf{i}}+\left(t^2+1\right)\hat{\mathbf{j}}+\cos 2t\hat{\mathbf{k}}$$

- **Funciones vectoriales de variable vectorial**. En este caso, las funciones poseen un punto como variable independiente y un vector como variable dependiente. Las superficies parametrizadas son ejemplos de estas funciones:

$$\mathbf{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\Rightarrow \mathbf{f}(x,y)=x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+\sqrt{9-x^2-y^2}\hat{\mathbf{k}}$$

En este tema, se estudiarán los máximos y mínimos de funciones escalares de variable vectorial.

1.1. Máximos, Mínimos y Puntos Silla

Una superficie es un lugar geométrico en tres dimensiones que satisface una ecuación cartesiana. Por ejemplo, la superficie

$$f(x,y)=-x^2-y^2+3$$

se encuentra representada en la figura 1 y se conoce como paraboloide.

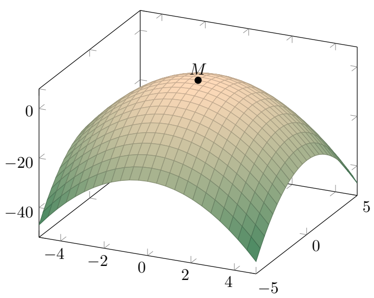

Figura 1. Esta superficie posee un punto máximo en el origen de coordenadas.

Las superficies poseen puntos importantes, como pueden ser aquéllos que se encuentran por encima (o por debajo) del resto de la superficie. Puede observarse que el paraboloide de la figura 1 posee un punto que se encuentra por encima de todos los demás; es decir, existe un punto $M(x, y, z)$ tal que $z = f(x, y)$, donde z es mayor al resto de los valores de la superficie; este tipo de puntos se llaman máximos. También existen puntos que se encuentran por debajo del resto de la superficie llamados mínimos. En el caso de funciones multivariable, existen puntos que son *combinación* de un máximo y un mínimo al mismo tiempo, y como tal no son extremos; son los llamados puntos silla. En conjunto, a los tres tipos de puntos (máximo, mínimo y silla) se les conoce como puntos estables. A continuación se definen los tres tipos de puntos.

Sea la función $f(\mathbf{x})$. Si en una región circular del dominio de f con centro en $\mathbf{x}_0$ y radio $r > 0$ se satisface:

- $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\ \forall\ \mathbf{x} \ni \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$, existe un máximo en $\mathbf{x}_0$.
- $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)\ \forall\ \mathbf{x} \ni \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$, existe un mínimo en $\mathbf{x}_0$
- $f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}_0)\ \forall\ \mathbf{x}_1 \ni \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| < r$ y $f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_0)\ \forall\ \mathbf{x}_2 \ni \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\| < r$, existe un punto silla en $\mathbf{x}_0$.

Para caracterizar cada punto estable, se requiere saber qué sucede a su alrededor; es decir, si por ejemplo se investiga un máximo, debe confirmarse que se trata del punto *más alto* en la región.

1.2. Cálculo de los Puntos Estables

Para determinar la naturaleza de un punto crítico o estable debe conocerse la razón de cambio de la función en la región de análisis. Para este estudio se necesitan dos elementos: conocer qué variación existe en el punto extremo o silla, y una herramienta que permita medir dicha variación.

Considerando una función con un mínimo (véase la figura 2), se puede recorrer ésta hasta llegar al punto más bajo (el mínimo). La función varía conforme se avanza punto por punto, y conforme se acerca *al fondo* la tasa de cambio se va reduciendo hasta llegar a 0. Justo en el mínimo no hay cambio, pues se ha llegado a un lugar donde la función se ha estabilizado. Para un máximo y un punto silla se realiza el mismo análisis: un punto extremo o punto silla yace en un lugar donde la función se estabiliza, de ahí que estos puntos reciban el nombre de puntos estables.

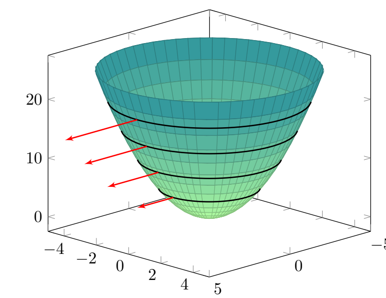

Figura 2. Una superficie con curvas de nivel y un mínimo. Puede observarse que el vector gradiente a cada curva de nivel disminuye su magnitud conforme se acerca al mínimo.

Una vez establecido que el cambio de la función en el punto estable es cero, se requerirá una manera de calcular ese cambio. En la figura 2 se muestra como la magnitud del gradiente disminuye conforme la función se acerca al mínimo. Debido a que el gradiente de una función indica la dirección del máximo cambio en la función, es la herramienta que se requiere para encontrar los puntos estables de una función multivariable.

Sea $f(\mathbf{x})$ una función escalar con primeras derivadas parciales. La función f tendrá un punto estable en $\mathbf{x}_0$ si

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

El igualar el gradiente de una función $f(x, y, z)$ al vector $\mathbf{0}$ es la generalización del criterio de la primera derivada para el cálculo de extremos en una sola variable. Si se desarrolla

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} \tag{1}$$

Por igualdad entre vectores, la ecuación (1) se separa en

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Por lo que un punto estable de una función f se encuentra en el lugar donde las primeras derivadas parciales son nulas. En cálculo de una sola variable este proceso solo involucra la derivada respecto a x igualada a 0 (donde la pendiente de la recta tangente es nula).

Ejemplo. Obtenga los puntos estables de la función

$$f(x, y) = x^3 - y^2 - xy + 1$$

Se deben calcular las primeras derivadas parciales de la función f para encontrar cada punto estable:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y - x \end{aligned}$$

Una vez calculadas las primeras derivadas, se procederá a resolver el sistema de ecuaciones

$$3x^2 - y = 0 \tag{2}$$
$$-2y - x = 0 \tag{3}$$

Al despejar x de la ecuación (3), $x = -2y$, y sustituirla en (2), se obtienen los primeros valores para los puntos estables.

$$\begin{aligned} 3x^2 - y &= 0 \\ 3(-2y)^2 - y &= \\ 12y^2 - y &= \\ y(12y - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = 0$ y $y = \frac{1}{12}$, que al sustituirlos en x se llega a que los puntos estables para esta función se encuentran en $P_1(0, 0, f(0, 0))$ y $P_2\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, f\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)\right)$.