Cálculo Vectorial

Lectura 2: Criterio de la Segunda Derivada

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero de 2020

1. Matriz Hessiana

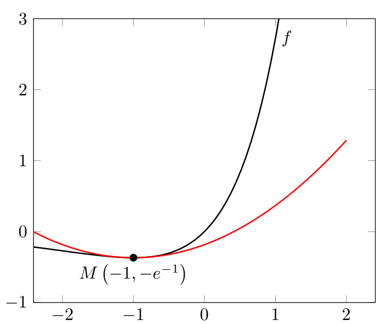

Figura 1. La función $f(x) = xe^x$ puede aproximarse mediante un polinomio de Taylor de segundo grado en $x = -1$, donde existe un mínimo.

Una vez que se conoce la manera de obtener los puntos estables, es necesario plantear el proceso que dictaminará la naturaleza (máximo, mínimo o punto silla). Para ello se hará uso de la aproximación a partir de polinomios de Taylor, la cual indica que una función $f(x)$ puede aproximarse a un polinomio en $x = a$; es decir

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

Como se muestra en la figura 1, la función $f(x)$ puede aproximarse a un polinomio de segundo grado en el punto donde se encuentra el mínimo. La razón de utilizar un polinomio de grado dos es el signo del término cuadrático, ya que es positivo e indica que la parábola abre hacia arriba; en consecuencia se tiene un mínimo. En el caso del máximo es al revés: la parábola abre hacia abajo y el coeficiente cuadrático es negativo.

Como se recordará, este concepto es el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos en funciones con una variable independiente. Si se extiende este criterio a una función con dos variables independientes se obtendrá una manera de catalogar los puntos estables. Tomando en cuenta que $f(x,y)$ posee un punto estable en $E(x_0, y_0)$, la expansión del polinomio de Taylor de segundo grado es

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f + f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x-x_0)^2 + \right. \\ &\qquad \left. + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)^2\right] \qquad (1) \\ &\approx f + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x-x_0)^2 + \right. \\ &\qquad \left. + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)^2\right] \qquad (2) \end{aligned}$$

La ecuación (1) tiene términos en x y en y debido a las derivadas parciales. Cuando E evalúa a las primeras derivadas se anulan pues es un punto estable. De esta forma, se obtiene la ecuación (2).

El criterio de la segunda derivada solo toma en cuenta el término de segundo grado. Por lo tanto, de la ecuación (2) solo se utilizarán los términos

$$f_{xx}(x-x_0)^2+2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(y-y_0)^2 \tag{3}$$

La ecuación (3) representa una forma cuadrática con coeficientes $A=f_{xx}$, $B=2f_{xy}$ y $C=f_{yy}$. En Álgebra Lineal se estudiaron las formas cuadráticas así como su representación matricial, la cual en este caso se conforma con los coeficientes A, B y C ya descritos:

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \tag{4}$$

La matriz en (4) se conoce como matriz hessiana, nombrada en honor del matemático alemán Ludwig Otto Hesse. Al ser una matriz cuadrada, la matriz hessiana posee un determinante (llamado hessiano) calculado como

$$|H|=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$$

el cual permite plantear el llamado criterio de la segunda derivada para puntos estables.

Sea la función $f(x,y)$ una función con segundas derivadas parciales y con punto estable en E. El criterio de la segunda derivada se basa en evaluar el determinante hessiano con E:

- si $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2>0$ y $f_{xx}>0$ (o bien, $f_{yy}>0$), entonces E es un mínimo.
- si $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2>0$ y $f_{xx}<0$ (o bien, $f_{yy}<0$), entonces E es un máximo.
- si $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2<0$, entonces E es un punto silla.
- si $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=0$, el criterio no decide.

Este criterio es válido para funciones con dos o más variables. Más adelante se establecerá la completa conexión entre las segundas derivadas parciales y las formas cuadráticas mediante la caracterización de matrices definidas.

Ejemplo. Determine la naturaleza de los puntos estables de la función

$$f(x,y)=y^4+x^3-x^2-32y$$

Las primeras derivadas parciales igualadas a cero son

$$\begin{aligned} f_x&=3x^2-2x &\Rightarrow\quad 3x^2-2x=0 \\ f_y&=4y^3-32 &\Rightarrow\quad 4y^3-32=0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones Los puntos estables para esta función yacen donde $x=0$, $x=\dfrac{2}{3}$ y $y=2$. Por lo tanto, los puntos estables son $E_1(0,2,f(0,2))$ y $E_2\left(\dfrac{2}{3},2,f\left(\dfrac{2}{3},2\right)\right)$. Por otro lado, las segundas derivadas son

$$f_{xx}=6x-2,\qquad f_{yy}=12y^2,\qquad f_{xy}=0$$

El dictamen sobre la naturaleza de los dos puntos estables encontrados lo establece el criterio de la segunda derivada. Para E_1:

$$f_{xx}\Big|_{x=0}=-2,\quad f_{yy}\Big|_{y=2}=48\quad\therefore\quad(-2)(48)-(0)^2=-96$$

Por lo tanto, en E_1 existe un punto silla. Para E_2:

$$f_{xx}\Big|_{x=\frac{2}{3}}=2,\quad f_{yy}\Big|_{y=2}=48\quad\therefore\quad(2)(48)-(0)^2=96$$

Como $f_{xx}>0$, se concluye que en E_2 hay un mínimo.