Cálculo Vectorial
Lectura 13: El Jacobiano y la Inversión Paramétrica

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. El Jacobiano

El campo vectorial

$$\mathbf{f}(x,y,z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

puede parametrizarse al convertir cada componente en una función escalar que dependa de $\mathbf{r} = (u,v,w)$.

$$\mathbf{f}(u,v,w) = x(u,v,w)\,\hat{\mathbf{i}} + y(u,v,w)\,\hat{\mathbf{j}} + z(u,v,w)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1}$$

Al calcular la matriz jacobiana de (1),

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

se obtiene una matriz cuadrada, de la cual se puede calcular su determinante, conocido como jacobiano.

Sea $\mathbf{f}(u,v,w) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ un campo vectorial. Al determinante de la matriz jacobiana del campo $\mathbf{f}$ se le llama jacobiano:

$$J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) = \left|\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{r}}\right|$$

Cuyas propiedades son:

1. Regla de la cadena

$$J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) = J\left(\frac{x,y,z}{m,n,p}\right) J\left(\frac{m,n,p}{u,v,w}\right)$$

2. Inversión

$$J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) J\left(\frac{u,v,w}{x,y,z}\right) = 1$$

El jacobiano es una función escalar, y como tal puede depender de todos o algunos de los parámetros, o bien ser constante.

También hay que mencionar que un jacobiano se puede llamar jacobiano de una tranformación T, la cual se expresa mediante ecuaciones parámetricas (también llamadas ecuaciones de transformación). Es decir, un campo como (1) también puede expresarse como

$$T: \quad \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

y el jacobiano de las tres funciones paramétricas son el jacobiano de la transformación.

Ejemplo. Sea el campo vectorial cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\mathbf{f}: \quad \begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ y = \sinh u \sin v \\ z = w \end{cases}$$

Obtenga el jacobiano de $\mathbf{f}$

El campo puede reescribirse como

$$\mathbf{f}(u, v, w) = \cosh u \cos v \hat{\imath} + \sinh u \sin v \hat{\jmath} + w\hat{k}$$

Por lo que la matriz jacobiana es

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \sinh u \cos v & -\cosh u \sin v & 0 \\ \cosh u \sin v & \sinh u \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

El determinante de (2) es

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \begin{vmatrix} \sinh u \cos v & -\cosh u \sin v & 0 \\ \cosh u \sin v & \sinh u \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) &= \sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v \\ &= \sinh^2 u \cos^2 v + \left(1 + \sinh^2 u\right) \sin^2 v \\ &= \sinh^2 u \cos^2 v + \sin^2 v + \sinh^2 u \sin^2 v \\ &= \sinh^2 u + \sin^2 v \end{aligned}$$

2. Inversión Paramétrica

Si una matriz A posee inversa, entonces

$$\begin{aligned} |A| \left|A^{-1}\right| &= 1 \\ \left|A^{-1}\right| &= \frac{1}{|A|} \end{aligned} \tag{3}$$

La expresión (3) es, en términos generales, la segunda propiedad del jacobiano:

$$\begin{aligned} J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) &= 1 \\ J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) &= \frac{1}{J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right)} \end{aligned}$$

Esta propiedad es la inversión paramétrica de un campo vectorial; es decir, si un campo $\mathbf{f}$ depende de los parámetros u, v y w, entonces es posible invertir la transformación para que el campo quede expresado en términos de x, y y z. Hay que hacer notar dos casos: cuando el jacobiano es una constante no nula, la inversión parámetrica es completa y la transformación es biyectiva. Sin embargo, si el jacobiano es una función, su valor dependerá de los parámetros y no siempre podrán encontrarse las transformaciones inversas para ciertos puntos.

Sea $\mathbf{f}(u, v, w)$ un campo vectorial con jacobiano J. Si

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \neq 0$$

entonces $J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right)$ existe, aunque posiblemente no para todos los valores de u, v y w.

Si $J = 0$ para ciertos valores de u, v y w, las ternas (u, v, w) se conocen como puntos singulares.

La inversión del jacobiano indica que existen transformaciones inversas para un campo vectorial, aunque algunos valores no tengan inversa. Por ejemplo, si se toma en cuenta el campo vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \hat{\mathbf{i}} + u \sin v \hat{\mathbf{j}} \tag{4}$$

los parámetros u y v pueden despejarse y depender de x y y:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} u = \sqrt{x^2 + y^2} \\ v = \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Mas cuando $x = 0$, el parámetro v no tendrá un valor correspondiente (el cociente se vuelve inexistente). Esto indica que todos los puntos sobre el eje y son singulares para la transformación definida por la superficie en (4).

Ejemplo. Muestre que las ecuaciones de transformación

$$T: \quad \begin{cases} x = \sqrt[3]{u^2 v} \\ y = \sqrt[3]{u v^2} \end{cases}$$

son reversibles, y obtenga la transformación inversa.

El jacobiano de la transformación es

$$\begin{aligned} J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) &= \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{v}{u}} & \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} \\ \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v^2}{u^2}} & \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Como el jacobiano de la transformación es constante y diferente de cero, entonces la transformación es invertible sin puntos singulares.

Ahora, las ecuaciones de transformación inversa se obtienen al despejar u y v. De x:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{u^2 v} \\ x^3 &= u^2 v \\ \frac{x^3}{u^2} &= v \end{aligned} \tag{5}$$

De y:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{u v^2} \\ y^3 &= u v^2 \\ \frac{y^3}{v^2} &= u \end{aligned} \tag{6}$$

Al sustituir (6) en (5):

$$\begin{aligned} v &= \frac{x^3}{u^2} \\ &= \frac{x^3}{\left(\frac{y^3}{v^2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{x^3 v^4}{y^6} \\
\frac{v}{v^4} &= \frac{x^3}{y^6} \\
\frac{1}{v^3} &= \frac{x^3}{y^6} \\
\frac{1}{v} &= \frac{x}{y^2} \\
v &= \frac{y^2}{x}
\end{aligned}
$$

Obtenida la transformación inversa para v se sustituye en (6).

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{y^3}{v^2} \\
&= \frac{y^3}{\left(\frac{y^2}{x}\right)^2} \\
&= \frac{x^2 y^3}{y^4} \\
u &= \frac{x^2}{y}
\end{aligned}
$$

Que es la segunda ecuación de transformación. La inversa de T es

$$
T^{-1} = \begin{cases} u = \dfrac{x^2}{y} \\ v = \dfrac{y^2}{x} \end{cases}
$$

Para finalizar, se calculará el jacobiano de T^{-1} para mostrar que $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$ es el inverso de $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

$$
\begin{aligned}
J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Por lo que se corrobora que ambos jacobianos son inversos, y que la transformación efectivamente es invertible.