Cálculo Vectorial
Lectura 14: Coordenadas Curvilíneas

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Coordenadas Curvilíneas

El jacobiano de una transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ introdujo la inversión parámetrica, la cual puede interpretarse como un cambio entre dos bases diferentes del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo,

$$T : \quad \begin{cases} u\left(x, y, z\right) \\ v\left(x, y, z\right) \\ w\left(x, y, z\right) \end{cases} \tag{1}$$

tiene componentes u, v y w expresadas en términos de x, y y z, por lo que (1) está referido a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Si al calcular el jacobiano de (1) es diferente de cero (sin importar los puntos singulares), entonces pueden invertirse los parámetros de las componentes de la transformación: x, y y z estarán expresadas en términos de u, v y w. Esta inversión paramétrica es equivalente a hacer un cambio de la base canónica a la nueva base $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ de $\mathbb{R}^3$. En Álgebra Lineal a este proceso se le conoce como un cambio de coordenadas, por lo que la transformación (1) define un cambio entre el sistema de coordenadas cartesianas y un sistema de coordenadas alternativo.

Puesto que (1) son funciones que dependen de tres variables, al mantener a dos de ellas constantes se obtendrá una función que depende de un solo parámetro, que no es otra cosa que una curva. Si se fijan dos variables de manera cíclica, se obtendrán tres curvas que llevan diferente dirección. Ésta característica nombra al sistema de coordenadas alternativo como sistema de coordenadas curvilíneas.

Sea la transformación

$$T : \quad \begin{cases} u\left(x, y, z\right) \\ v\left(x, y, z\right) \\ w\left(x, y, z\right) \end{cases}$$

Si $J\left(\dfrac{u, v, w}{x, y, z}\right) \neq 0$, entonces $u\left(x, y, z\right)$, $v\left(x, y, z\right)$ y $w\left(x, y, z\right)$ definen un sistema de coordenadas curvilíneas con curvas u, v y w como ejes coordenados y base $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

El sistema de coordenadas curvilíneas será ortogonal sí la base B es ortogonal.

El sistema de coordenadas cartesianas posee curvas (rectas) y superficies (planos) coordenadas. Geométricamente, tanto los ejes como las superficies poseen un vector característico: el director en el caso de los ejes, y el normal para la superficies. Por ejemplo, el plano xy tiene como vector normal a $\hat{\mathbf{k}}$ que a su vez es el vector director, y tangente, del eje z. Como todo sistema de coordenadas, un sistema curvilíneo posee curvas y superficies coordenadas, obtenidas a partir de las ecuaciones de transformación.

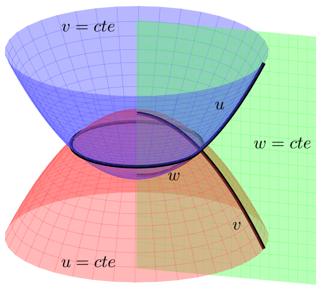

Figura 1. En el sistema curvilíneo uvw, una superficie coordenada se genera al mantener constante una ecuación de transformación, en tanto que al fijar dos se tendrá una curva coordenada.

Sea el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales uvw, donde sus ecuaciones de transformación son

$$T: \quad \begin{cases} u\left(x,y,z\right) \\ v\left(x,y,z\right) \\ z\left(x,y,z\right) \end{cases}$$

Para obtener una superficie coordenada se fija como constante a una ecuación de transformación, mientras que al fijar dos se tendrá una curva coordenada (véase la figura 1). Por ejemplo, si u es constante se obtendrá la ecuación cartesiana de la superficie

$$u\left(x,y,z\right) = k_1$$

a la cual al calculársele su gradiente arrojará el vector normal, que es

$$\nabla u = u_x\hat{\mathbf{i}} + u_y\hat{\mathbf{j}} + u_z\hat{\mathbf{k}} \tag{2}$$

Si ahora v o w son constantes, las superficies coordenadas son

$$\begin{aligned} v\left(x,y,z\right) &= k_2 \\ w\left(x,y,z\right) &= k_3 \end{aligned}$$

cuyos respectivos vectores normales son

$$\nabla v = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}} \tag{3}$$

$$\nabla w = w_x\hat{\mathbf{i}} + w_y\hat{\mathbf{j}} + w_z\hat{\mathbf{k}} \tag{4}$$

Los vectores en (2), (3) y (4) son ortogonales entre sí, y en consecuencia forman la base ortogonal B del sistema de coordenadas curvilíneas.

2. Vectores Unitarios y Factores de Escala

El sistema de coordenadas cartesianas posee tres vectores fundamentales: la base canónica. Esta base posee la característica de ser ortonormal (vectores unitarios ortogonales). Se ha visto que un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal uvw también posee vectores base, en este caso representados por las expresiones (2), (3) y (4). Sin embargo, no necesariamente son unitarios, por lo que deben normalizarse para obtener la respectiva base ortonormal. La figura (2) muestra que cada vector de la base ortonormal es perpendicular a cada superficie coordenada. La normalización da origen a los vectores unitarios del sistema curvilíneo uvw:

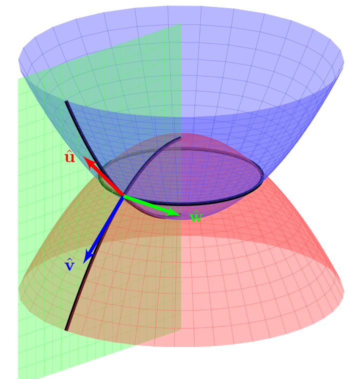

Figura 2. El sistema curvilíneo uvw posee vectores normales a las superficies coordenadas, y a su vez tangentes a las curvas coordenadas.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \frac{u_x}{\|\nabla u\|}\hat{\mathbf{i}} + \frac{u_y}{\|\nabla u\|}\hat{\mathbf{j}} + \frac{u_z}{\|\nabla u\|}\hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{v}} &= \frac{v_x}{\|\nabla u\|}\hat{\mathbf{i}} + \frac{v_y}{\|\nabla u\|}\hat{\mathbf{j}} + \frac{v_z}{\|\nabla u\|}\hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{w}} &= \frac{w_x}{\|\nabla u\|}\hat{\mathbf{i}} + \frac{w_y}{\|\nabla u\|}\hat{\mathbf{j}} + \frac{w_z}{\|\nabla u\|}\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Nótese que los vectores unitarios están expresados como combinación lineal de la base canónica, lo cual indica que existe una matriz de cambio de base entre las bases canónica y $B = \{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$:

$$M_{xyz}^{uvw} = \frac{1}{\|\nabla u\| \, \|\nabla v\| \, \|\nabla w\|} \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix}$$

También se hace hincapié que las normas de los gradientes no son unitarias, por lo que existe una discrepancia en la métrica de un sistema coordenado respecto del cartesiano; es decir, los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tienen una escala diferente respecto del sistema de coordenadas cartesianas. A las normas se les llaman factores de escala H.

Para el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales

$$T: \quad \begin{cases} u\left(x, y, z\right) \\ v\left(x, y, z\right) \\ w\left(x, y, z\right) \end{cases}$$

la base de vectores unitarios se define como

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}, \qquad \hat{\mathbf{v}} = \frac{\nabla v}{\|\nabla v\|}, \qquad \hat{\mathbf{w}} = \frac{\nabla w}{\|\nabla w\|}$$

en tanto que los factores de escala son

$$H_u = \|\nabla u\|, \qquad H_v = \|\nabla v\|, \qquad H_w = \|\nabla w\|$$

El cambio entre uvw y xyz se realiza mediante la matriz de transición

$$M_{xyz}^{uvw} = \frac{1}{H_u H_v H_w} \begin{bmatrix} \nabla u & \nabla v & \nabla w \end{bmatrix}$$

Una característica importante para los sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales es que la matriz de transición siempre es ortogonal, por lo que su inversa se obtiene al transponerla.

Ejemplo. Sea el sistema de coordenadas ortogonales, cuyas ecuaciones de transformación son:

$$T: \quad \begin{cases} u = x + y + z \\ v = -x + y \\ w = -x - y + 2z \end{cases}$$

Obténgase sus vectores unitarios, sus factores de escala y el jacobiano de la transformación.

Los vectores unitarios se obtienen mediante el gradiente de cada ecuación de transformación dividido entre su norma.

$$\nabla u = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\nabla v = -\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\nabla w = -\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\right)$$

Los factores de escala son las normas de los gradientes.

$$H_u = \sqrt{3}, \qquad H_v = \sqrt{2}, \qquad H_w = \sqrt{6}$$

Y el jacobiano de la transformación es

$$J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Nótese que el jacobiano de la transformación es igual al producto de los tres factores de escala.

El sistema curvilíneo puede analizarse desde la perspectiva de curvas coordenadas en lugar de superficies. Para hacerlo, se utilizará la matriz jacobiana de la transformación

$$T: \qquad \begin{cases} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{cases}$$

recordando que como el determinante jacobiano es invertible (por ser diferente de cero) la matriz también será invertible. Por un lado, calculando la matriz jacobiana,

$$J = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & y_z \end{bmatrix} \tag{5}$$

Por otra parte, los renglones de (5) son los gradientes de cada ecuación de transformación, los cuales pueden reescribirse en términos de los vectores unitarios:

$$\nabla u = H_u \hat{\mathbf{u}} \tag{6}$$
$$\nabla v = H_v \hat{\mathbf{v}} \tag{7}$$
$$\nabla w = H_w \hat{\mathbf{w}} \tag{8}$$

Sustituyendo (6), (7) y (8) en (5) y aplicando propiedades del álgebra matricial,

$$J = \begin{bmatrix} H_u \hat{\mathbf{u}}^T \\ H_v \hat{\mathbf{v}}^T \\ H_w \hat{\mathbf{w}}^T \end{bmatrix}$$
$$J = H_u H_v H_w \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^T \\ \hat{\mathbf{v}}^T \\ \hat{\mathbf{w}}^T \end{bmatrix} \tag{9}$$

La matriz jacobina en (9) es el producto de un escalar por una matriz ortogonal, por lo que la inversa es

$$J^{-1} = \frac{1}{H_u H_v H w} \left[\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{u}} & \hat{\mathbf{v}} & \hat{\mathbf{w}} \end{array} \right] \tag{10}$$

La inversa (10) indica que la transformación T ha sufrido la inversión paramétrica

$$T^{-1} = \begin{cases} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{cases}$$

La matriz jacobiana calculada desde las ecuaciones inversas de transformación es

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix} \tag{11}$$

Como (10) y (11) representan a la misma matriz, deben ser iguales columna por columna.

$$\frac{1}{H_u H_v H w} \left[\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{u}} & \hat{\mathbf{v}} & \hat{\mathbf{w}} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{H_u}\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{H_v}\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{H_w}\hat{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix}$$

Puede observarse que cada columna de (11) es la derivada parcial respecto de un parámetro, que desde el punto de vista de la Geometría Diferencial representa al vector tangente a una curva. En consecuencia, se han obtenido las expresiones para calcular los vectores unitarios y los factores de escala desde la transformación inversa, la cual es el sistema de coordenadas curvilíneas desde la perspectiva de las curvas coordenadas.

Se reitera que los análisis realizados son válidos bajo un sistema de coordenadas ortogonales. En casos de coordenadas no ortogonales se deben realizar los cálculos establecidos en la teoría del cambio de coordenadas en los espacios vectoriales.

En el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales uvw con ecuaciones de transformación inversas expresadas como el campo vectorial

$$\mathbf{f} = x(u,v,w)\,\hat{\mathbf{i}} + y(u,v,w)\,\hat{\mathbf{j}} + z(u,v,w)\,\hat{\mathbf{k}}$$

los vectores unitarios se definen como

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{f}_u}{\|\mathbf{f}_u\|}, \qquad \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{f}_v}{\|\mathbf{f}_v\|}, \qquad \hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{f}_w}{\|\mathbf{f}_w\|}$$

donde los factores de escala pueden expresarse como

$$\begin{aligned} h_u &= \|\mathbf{f}_u\| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{H_u} \\ h_v &= \|\mathbf{f}_v\| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{H_v} \\ h_w &= \|\mathbf{f}_w\| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{H_w} \end{aligned}$$

Ejemplo. Para el sistema de coordenadas ortogonales anterior, obtenga las ecuaciones de transformación inversa y calcule los vectores unitarios y los factores de escala.

La transformación anterior es

$$T: \quad \begin{cases} u = x + y + z \\ v = -x + y \\ w = -x - y + 2z \end{cases}$$

Para invertir las ecuaciones, se despejarán x, y y z. Al sumar u y w:

$$\begin{aligned} u + w &= 3z \\ \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}w &= z \end{aligned}$$

Ahora se suman u y v y se sustituye z en el resultado:

$$\begin{aligned} u + v &= 2y + z \\ \frac{1}{2}(u + v - z) &= y \\ \frac{1}{3}u + \frac{1}{2}v - \frac{1}{6}w &= y \end{aligned}$$

Para tener las ecuaciones de transformación completas se sustituye y en v y se despeja x:

$$\begin{aligned} x &= y - v \\ x &= \frac{1}{3}u - \frac{1}{2}v - \frac{1}{6}w \end{aligned}$$

Las ecuaciones como campo vectorial son:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{6}(2u - 3v - w)\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{6}(2u + 3v - w)\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}(u + w)\,\hat{\mathbf{k}}$$

Por lo que los vectores unitarios y factores de escala son:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{1}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{u}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) \\ \mathbf{v} &= -\frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right) \\ \mathbf{w} &= -\frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(-\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\right) \\ \therefore \quad h_u &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad h_v = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad h_w = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$