Cálculo Vectorial
Lectura 27: Aplicaciones Geométricas de la Integral Doble

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Cálculo de Áreas

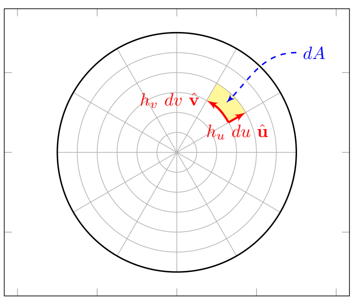

Figura 1. Diferencial de área definida en coordenadas curvilíneas mediante factores de escala y vectores unitarios.

La primera aplicación de la integral doble es al cálculo de áreas de regiones en sistemas de coordenadas bidimensionales. Para calcular la diferencial de área en coordenadas curvilíneas hay que recordar la definición de vectores tangentes a las curvas coordenadas:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = h_u \hat{\mathbf{u}} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = h_v \hat{\mathbf{v}} \tag{2}$$

Al multiplicar las ecuaciones (1) y (2) por su respectiva diferencial de longitud se obtienen dos vectores que forman el paralelogramo con área diferencial; en la figura 1 se muestra la geometría de esta situación.

$$d\mathbf{u} = h_u \hat{\mathbf{u}}\ du \tag{3}$$

$$d\mathbf{v} = h_v \hat{\mathbf{v}}\ dv \tag{4}$$

Para calcular la diferencial de área se aplica la norma del producto cruz entre los vectores (3) y (4), que es igual al área del paralelogramo:

$$\begin{aligned} dA &= \|d\mathbf{u} \times d\mathbf{v}\| \\ &= \|h_u \hat{\mathbf{u}} du \times h_v \hat{\mathbf{v}} dv\| \\ &= h_u h_v \|\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}\|\ du\ dv \\ &= h_u h_v \|\hat{\mathbf{u}}\|\ \|\hat{\mathbf{v}}\| \left(\sin \frac{\pi}{2}\right) du\ dv \\ dA &= h_u h_v\ du\ dv \end{aligned}$$

Por lo tanto, al aplicar la integral doble en la región se obtiene el área en coordenadas curvilíneas.

El área de una región R del plano xy se calcula como

$$A = \iint_R dx\ dy$$

En el plano uv se calcula como

$$A = \iint_R h_u h_v\ du\ dv$$

De esta forma, el área en una región se puede calcular mediante una integral iterada. Considerando que la región se trata como tipo I, la integral iterada de área es

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\ dx \\ &= \int_a^b y\Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \\ A &= \int_a^b g_2(x) - g_1(x)\ dx \end{aligned} \tag{5}$$

La expresión (5) es la forma de calcular el área entre curvas mediante la integral de una sola variable.

Ejemplo. Calcule el área de la región interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y exterior al cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

El área solicitada se muestra en la figura 2

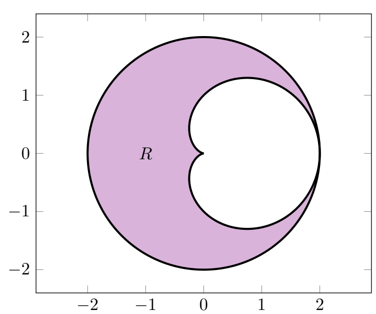

Figura 2

Para calcular el área hay que tener la ecuación polar de la circunferencia:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta &= \\ r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) &= \\ r^2 &= 4 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

De esta forma, los límites de integración en r son funciones de θ. Como el cardioide está dentro de la circunferencia, su coordenada r es menor que el de ella; es decir, $1 + \cos\theta \le r \le 2$. Ya se tiene el primer intervalo de integración.

El planteamiento anterior indica que los límites de integración en θ deben ser constantes. Ambas curvas recorren el plano polar, cerrándose; esto indica que el intervalo de la segunda variable de integración es $0 \le \theta \le 2\pi$.

Por último, como se integrará en un sistema curvilíneo, la diferencial de área es $dA = h_r h_\theta\ dr\ d\theta$. El área por integrar es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_{1+\cos\theta}^{2} r dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\Big|_{1+\cos\theta}^{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4 - \left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3 - 2\cos\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\ d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{5}{2}\theta - 2\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} \\ A &= \frac{5}{2}\pi\ \left[u^2\right] \end{aligned}$$

2. Cálculo de Volúmenes

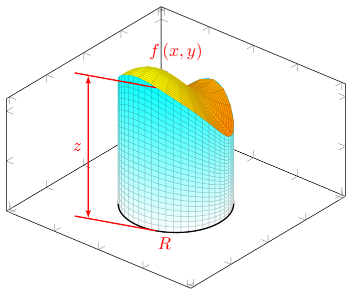

Figura 3. Volumen limitado por el plano xy y la función $f(x,y)$.

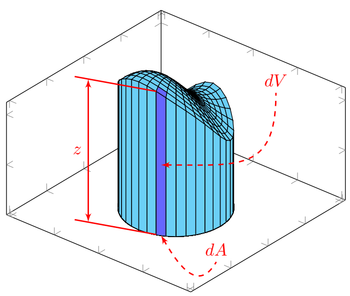

Figura 4. La diferencial de volumen dV se calcula mediante la diferencial de área dA y la altura $z = f(x,y)$.

Cuando una función $f(x,y)$ se define sobre una región R, ésta última quedará cubierta de tal manera que se forma un volumen con base en el plano xy (la región) y altura delimitada por la misma función f. La figura 3 muestra este caso.

Al obtener una diferencial de área dA en cada punto (x,y) de la región R, se forma la base de un prisma infinitamente delgado. Se puede considerar que dicho prisma es una diferencial de volumen dV, cuya altura se mide sobre el eje z. Esto quiere decir que,

$$dV = z\ dA \tag{6}$$

Si la altura z es la función $f(x,y)$ para cada punto de la región, se obtendría un conjunto de volúmenes diferenciales en forma de prisma, tal cual se muestra en la figura 4. Por lo que la expresión (6) se reescribe como

$$dV = f(x,y)\ dA$$

que al aplicar la integración doble devuelve el volumen limitado por f y la región R del plano xy:

$$V = \iint_R f(x,y)\ dA$$

Así como la integral de línea define al área bajo una superficie a lo largo de una trayectoria, la integral doble tiene el significado geométrico del volumen debajo de una función en una región del plano xy.

Ejemplo. Calcule el volumen de la región localizada por arriba del plano xy, interior al paraboloide $z = 9 - (x^2 + y^2)$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

Tanto el volumen a calcular como la región de integración se observan en la figura 5.

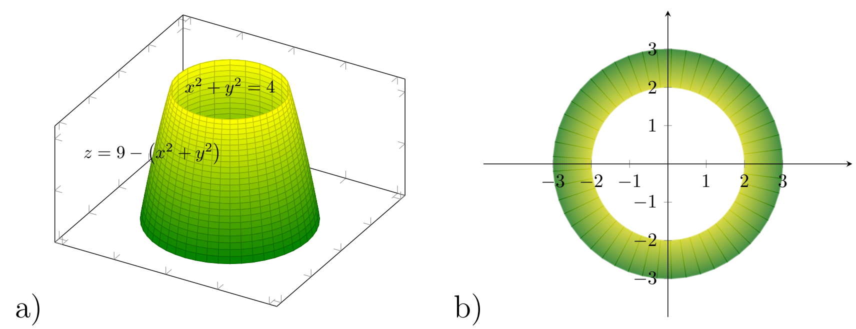

Figura 5. a) El volumen a calcular; la pared interior pertenece al cilindro y la exterior al paraboloide. b) La región del plano xy en la que se integrará.

La región de integración está compuesta por un anillo, donde la circunferencia interna es el borde del cilindro, en tanto que la frontera externa es la intersección del paraboloide con el plano xy. Debido a esta forma de la región es adecuado el cambio a coordenadas polares para realizar la integral. Entonces, la circunferencia interior tiene la ecuación del cilindro, que en coordenadas polares es $r = 2$; la circunferencia exterior tiene la ecuación

$$0 = 9 - \left(x^2 + y^2\right)$$

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad \Rightarrow \qquad r = 3$$

Por lo que el intervalo de integración en r es $[2, 3]$, en tanto que para θ sería la vuelta completa a la circunferencia polar, $[0, 2\pi]$.

La figura 5 muestra que la altura del volumen está definida por el paraboloide. La función es escalar, por lo que solo hay que sustituir las ecuaciones de transformación en ella para cambiar de coordenadas.

$$\begin{aligned} z &= 9 - \left(x^2 + y^2\right) \\ z &= 9 - r^2 \end{aligned}$$

La integral para calcular el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \iint_R f\left(x, y\right) dA \\ &= \int_2^3 \int_0^{2\pi} \left(9 - r^2\right) r \; d\theta \; dr \\ &= \int_2^3 \left(9r - r^3\right) \int_0^{2\pi} d\theta \; dr \\ &= \int_2^3 \left(9r - r^3\right) \theta \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= 2\pi \int_2^3 9r - r^3 \; dr \\ &= 2\pi \left[\frac{9}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4\right]_2^3 \\ V &= \frac{25}{4}\left(2\pi\right) \end{aligned}$$

Por lo que el volumen buscado es $V = \dfrac{25}{2}\pi \; [u^3]$.