Transformada de Laplace

Multiplicación de una función por t^n

La transformada de Laplace del producto de una función $f(t)$ con t, se puede encontrar mediante la diferenciación de la transformada de Laplace de $f(t)$.

Entonces,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st} f(t)dt]$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\},$$

es decir,

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$\frac{d^2}{ds^2}F(s) = \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial s^2}[e^{-st} f(t)dt]$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st} t f(t)dt] = \int_0^\infty e^{-st} t^2 f(t)dt = \mathcal{L}\{t^2 f(t)\}$$

es decir,

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$\frac{d^3}{ds^3} F(s) = \frac{d^3}{ds^3} \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{d^3}{ds^3} \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial^3}{\partial s^3} [e^{-st} f(t)dt]$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial s^2} [e^{-st} t f(t)dt] = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} [e^{-st} t^2 f(t)dt] = -\int_0^\infty e^{-st} t^3 f(t)dt$$

$$-\mathcal{L}\{t^3 f(t)\}$$

es decir,

$$\mathcal{L}\{t^3 f(t)\} = -\frac{d^3}{ds^3} \mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{d^3}{ds^3} F(s)$$

Multiplicación de una función por t^n

La transformada de Laplace del producto de una función $f(t)$ con t, se puede encontrar mediante la diferenciación de la transformada de Laplace de $f(t)$.

Entonces, si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe y $n = 1,2,3, \ldots$, entonces,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Obtener la transformada de Laplace de las siguientes funciones

- $\mathcal{L}\{tsen(t)\}$
- $\mathcal{L}\{tcos(3t)\}$
- $\mathcal{L}\{t^2e^t\}$

Obtener la transformada de Laplace de las siguientes funciones

- $\mathcal{L}\{t^2 sen(t)\}$
- $\mathcal{L}\{tcosh(4t)\}$
- $\mathcal{L}\{t^2 senh(3t)\}$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{2\tau} d\tau\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cosh(\tau) d\tau\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\}$$

Transformada de la integral de una función

Sea $f(t)$ una función seccionalmente continua en $t \geq 0$, y si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(\tau)\} = \frac{F(s)}{s}$$

y su transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\,d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Este teorema nos da la oportunidad de encontrar la transformada de Laplace de una integral.

Encontrar la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{2\tau} d\tau\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cosh(\tau) d\tau\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\}$$

Actividad

Resolver el siguiente problema de valor inicial haciendo uso de la transformada de Laplace

$$z'' + 16z = \cos(4t)\,; \qquad z(0) = 0, z'(0) = 1$$

Haciendo uso de la propiedad de la multiplicación de una función por t^{n}, obtener:

$$\mathcal{L}\{t^4 sen(2t)\}$$

Haciendo uso de la propiedad de la integral de una función, obtener:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t sen(2\tau)d\tau\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos(3\tau)\,d\tau\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-2)^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2-1)}\right\}$$

Teorema de Convolución

Si $f(t)$ y g(t) son continuas por partes en $[0, \infty)$ y su transformada de Laplace existe, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

$\therefore$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) = g(t) * f(t).$$

Convolución

La convolución de dos funciones $f(t)$ y g(t) se denota como $f(t) * g(t)$ y se define como

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

suponiendo que dicha integral exista.

Nota: el traslado lo determina el grado de dificultad de las funciones, es decir; la más sencilla se traslada.

Encontrar la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$*\mathcal{L}\{e^{t} * sen(t)\}$$

$$*\mathcal{L}\{sen(2t) * \cosh(t)\}$$

$$*\mathcal{L}\{senh(3t) * t^{4}\}$$

$$*Sea\ Y(s) = \frac{1}{(s-3)(s-2)}, obtener\ y(t)$$

$$*Sea\ Y(s) = \frac{1}{s^{2}+2s-3}, obtener\ y(t)$$

$$*Sea\ F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2}, obtener\ f(t)$$

$$*Sea\ G(s) = \frac{2}{(s-1)(s^2+4)}, obtener\ g(t)$$

Traslación en el eje "s"

Evaluar transformadas como $\mathcal{L}\{e^{4t}t^3\}$ y $\mathcal{L}\{e^{2t}\cos(4t)\}$ es directo siempre y cuando se conozca $\mathcal{L}\{t^3\}$ y $\mathcal{L}\{\cos(4t)\}$. En general, si se conoce la transformada de Laplace de una función $f(t)$, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, es posible calcular la transformada de Laplace de un múltiplo exponencial de $f(t)$, es decir, $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$, sin ningún esfuerzo adicional que no sea trasladar o desplazar la transformada de $F(s)$ a $F(s-a)$. Este resultado se conoce como primer teorema de traslación o primer teorema de desplazamiento.

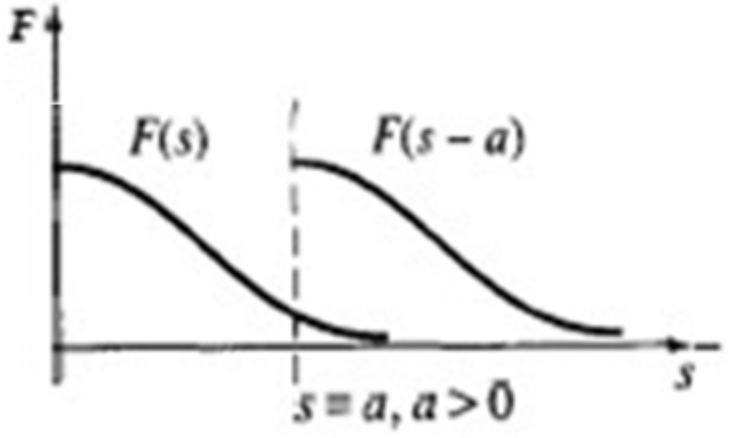
Primer teorema de traslación (traslación en el dominio "s")

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

o bien

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}|_{s \to s-a}$$



desplazamiento en el ejes

Encontrar la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$*\mathcal{L}\{e^{3t}t^3\}$

$*\mathcal{L}\{e^{4t}t^3\}$

$*\mathcal{L}\{sen(t)e^{5t}\}$

$*\mathcal{L}\{e^{-3t}\cos(2t)\}$

$*\mathcal{L}\{te^{-3t}cos3t\}$

*$\mathcal{L}\{te^{-3t}cosh3t\}$

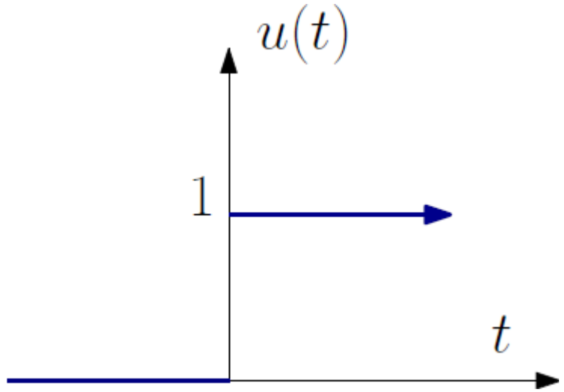
Obtener la transformada de Laplace de la siguiente función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq t < 1 \\ 2 & si\ 1 \leq t < 3 \\ 1 & si\ \quad\quad t \geq 3 \end{cases}$$

Función escalón unitario

En ingeniería es común encontrar funciones que estén ya sea "desactivadas" o "activadas". Por ejemplo, una fuerza externa que actúa en un sistema mecánico, o un voltaje aplicado a un circuito, se puede desactivar después de un cierto tiempo.

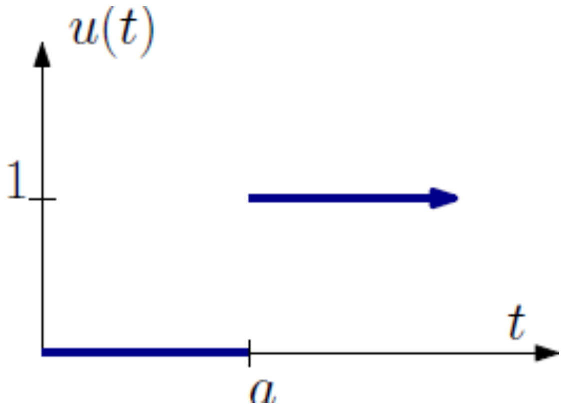
Por lo tanto, es conveniente definir una función especial que es el número "0" (desactivado) hasta un cierto tiempo "t=a" y luego el número "1" (activada) después de ese tiempo. La función se llama "función escalón unitario" o "función Heaviside"



Definición

La función escalón unitario $u(t)$ esta dada por $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$

y también puede haber un desfasamiento $u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$



$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{1}{s} e^{-as}$$

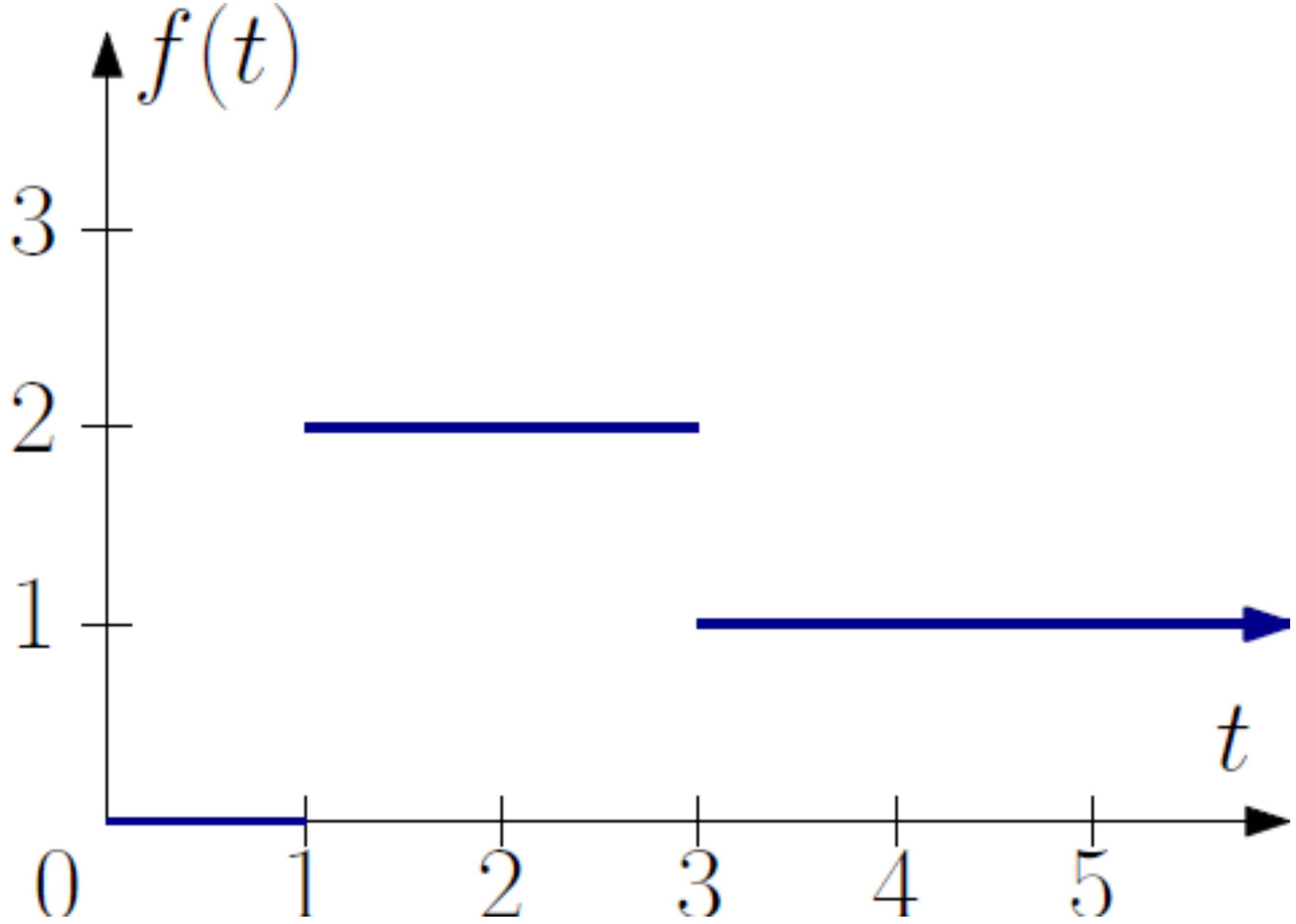
Ejemplo

Sea la función f, definida en el intervalo $[0, \infty)$ por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq t < 1 \\ 2 & si\ 1 \leq t < 3 \\ 1 & si \qquad t \geq 3 \end{cases}$$

a) Trace la gráfica de la función.
b) Exprésela en términos de la función escalón unitario.
c) Obtenga la transformada de Laplace de $f(t)$.

Ejemplo



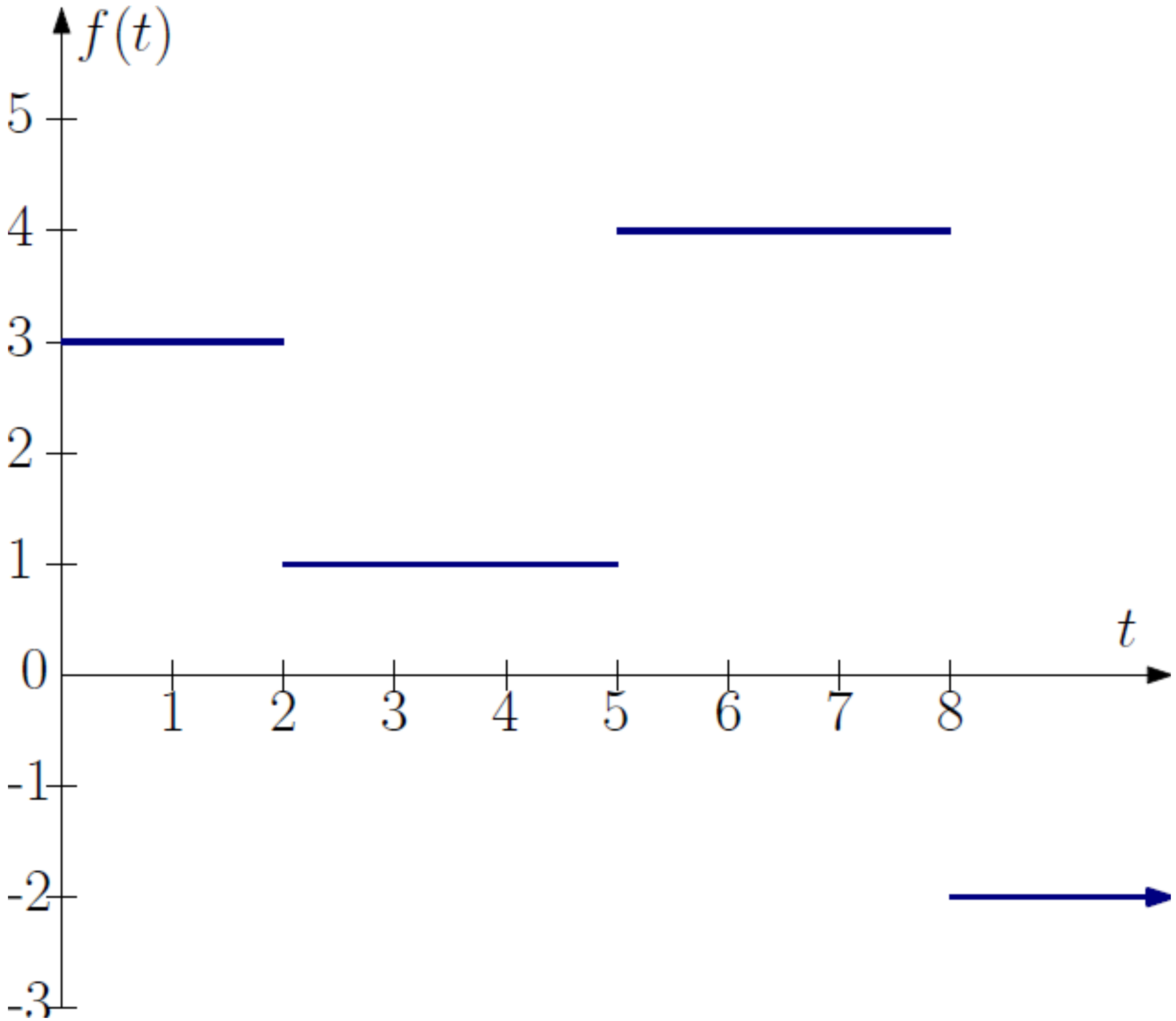
Ejemplo

Sea la función f, definida en el intervalo $[0, \infty)$ por

$$f(t) = \begin{cases} 3 & si & t < 2 \\ 1 & si & 2 \leq t < 5 \\ 4 & si & 5 \leq t < 8 \\ -2 & si & t \geq 8 \end{cases}$$

a) Trace la gráfica de la función.
b) Exprésela en términos de la función escalón unitario.
c) Obtenga la transformada de Laplace de $f(t)$.

Ejemplo



Ejemplo

Sea la función f, definida en el intervalo $[0, \infty)$ por

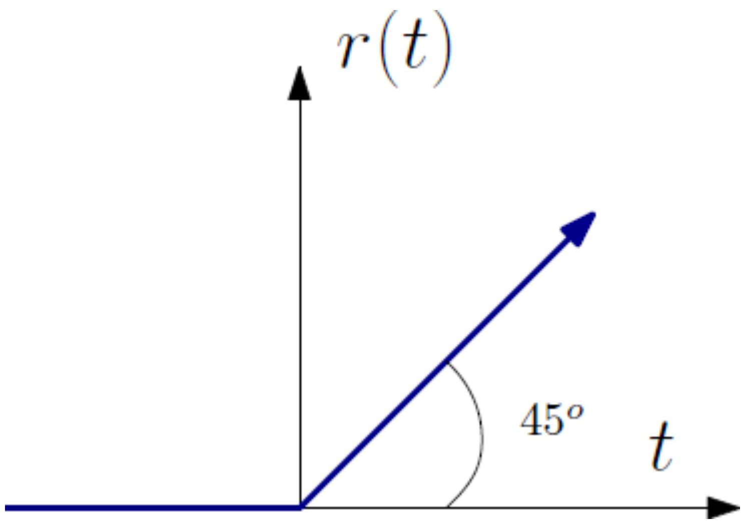
$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t < 1 \\ 2 & si \quad 1 \leq t < 3 \\ 4 & si \quad 3 \leq t < 4 \\ -2 & si \quad t \geq 4 \end{cases}$$

a) Trace la gráfica de la función.

b) Exprésela en términos de la función escalón unitario.

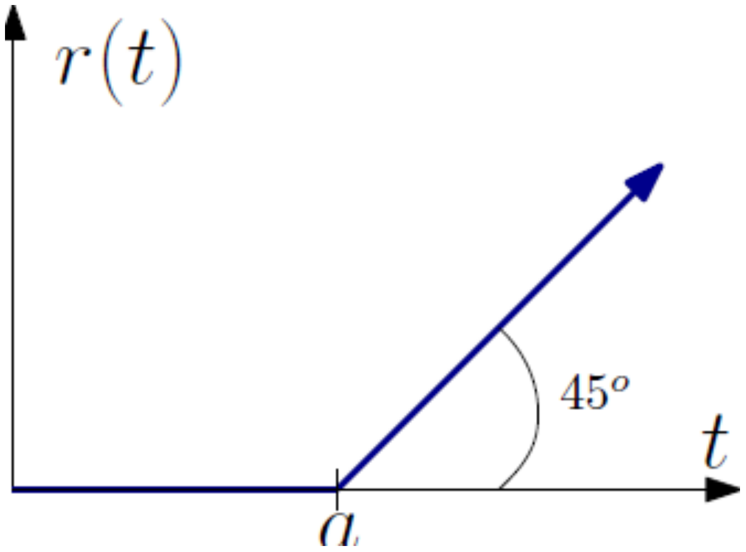
c) Obtenga la transformada de Laplace de $f(t)$.

Función Rampa



Se representa mediante la letra $r(t)$ y se define como $r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$

Ahora, si existe un desfasamiento $r(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ t-a, & t \geq a \end{cases}$

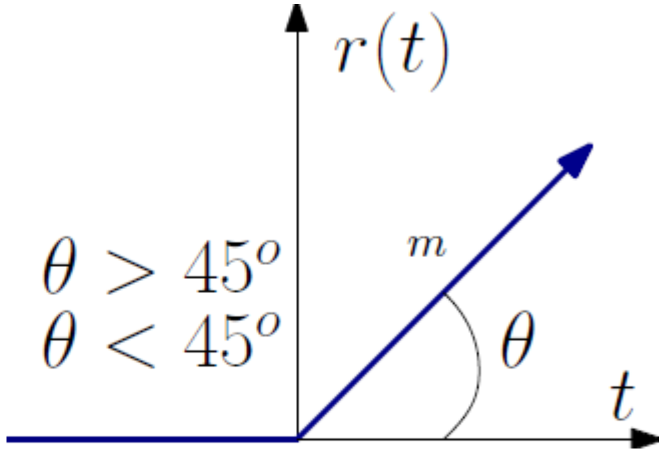


$$\mathcal{L}\{r(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s^2}$$

Función Rampa no unitaria

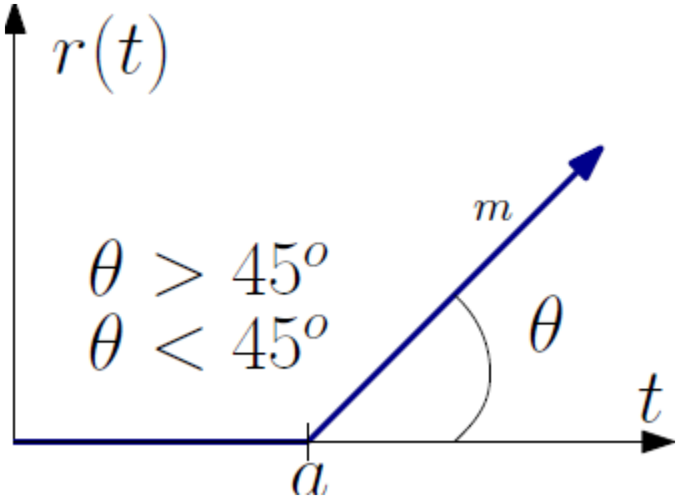
Para la función rampa no unitaria

$$mr(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ mt, & t \geq 0 \end{cases}$$



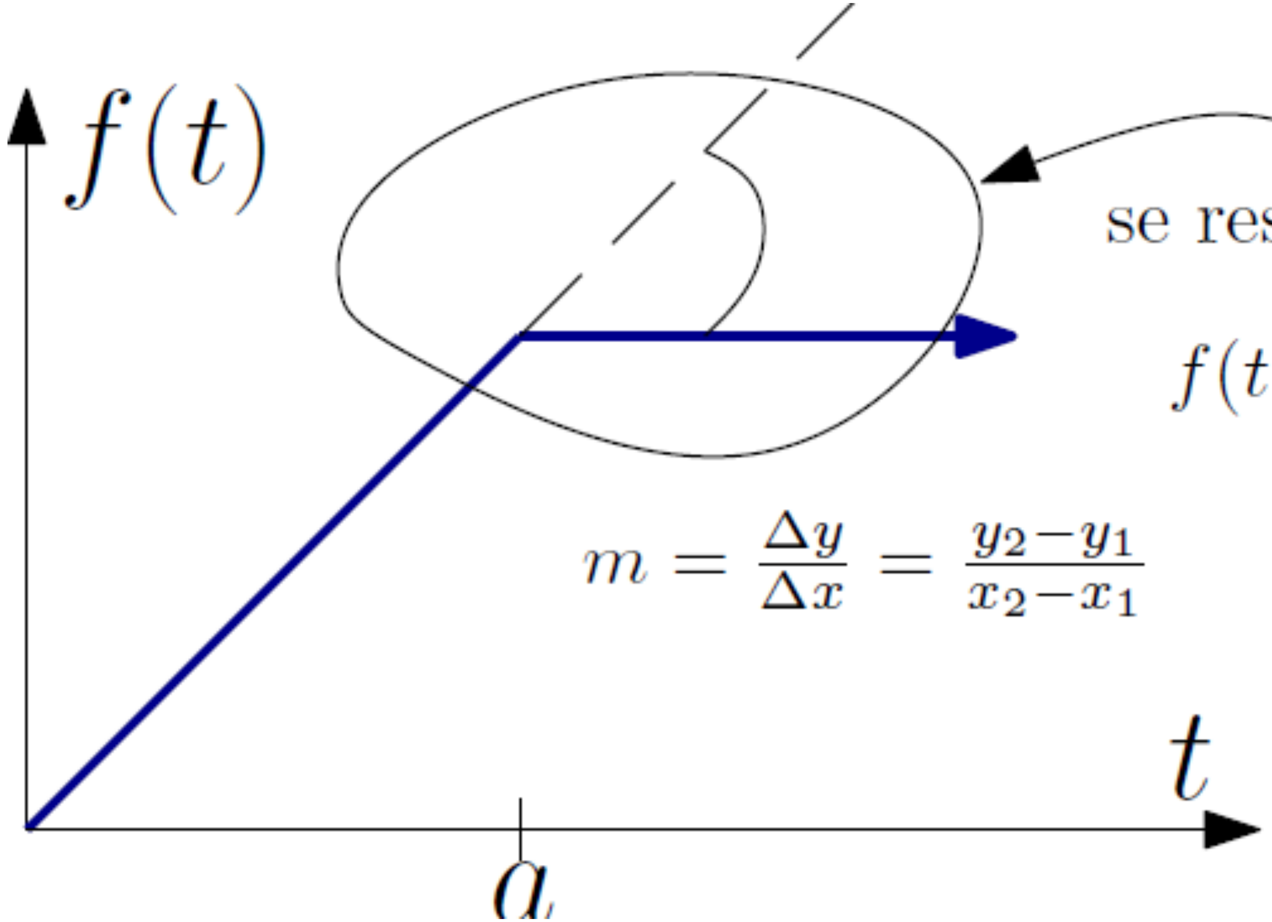
y si hay un desfasamiento

$$mr(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ m(t-a), & t \geq a \end{cases}$$



$$\mathcal{L}\{mr(t-a)\} = m\mathcal{L}\{r(t-a)\} = m\frac{e^{-as}}{s^2}$$

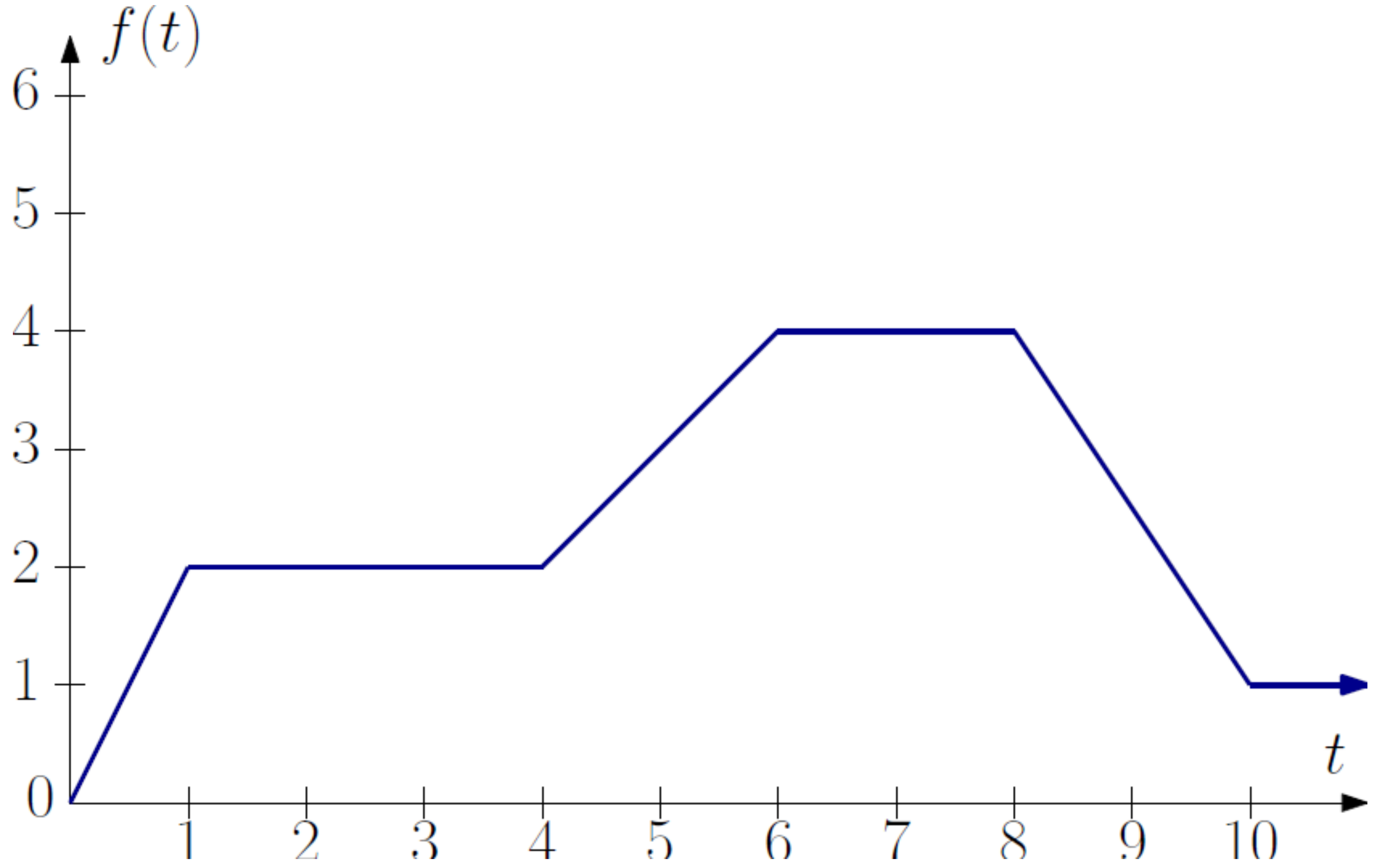
Nota:



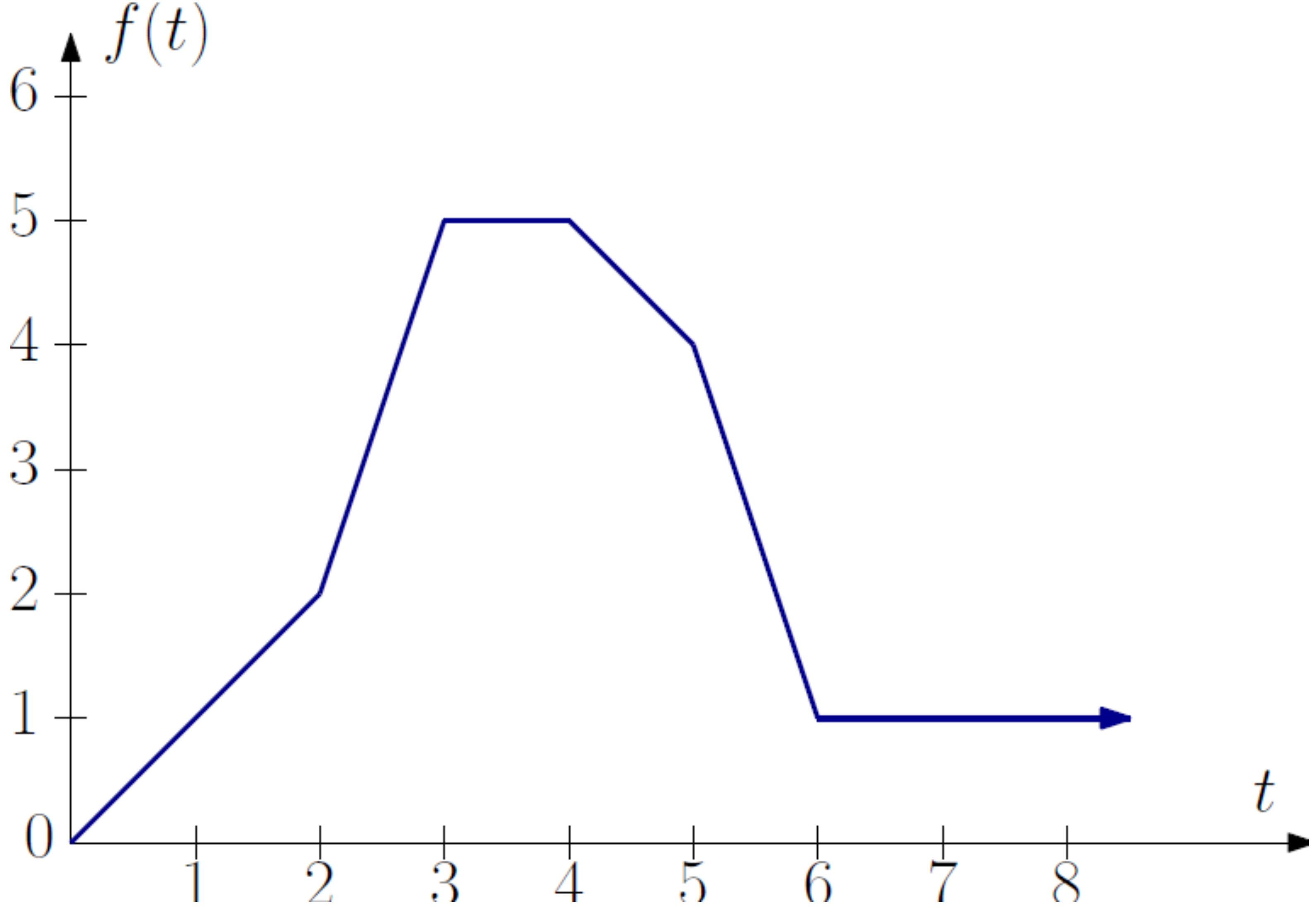
se resta para que cambie su dirección

$$f(t) = mr(t) - mr(t-a)$$

Ejemplo; encontrar la transformada de Laplace de la siguiente gráfica

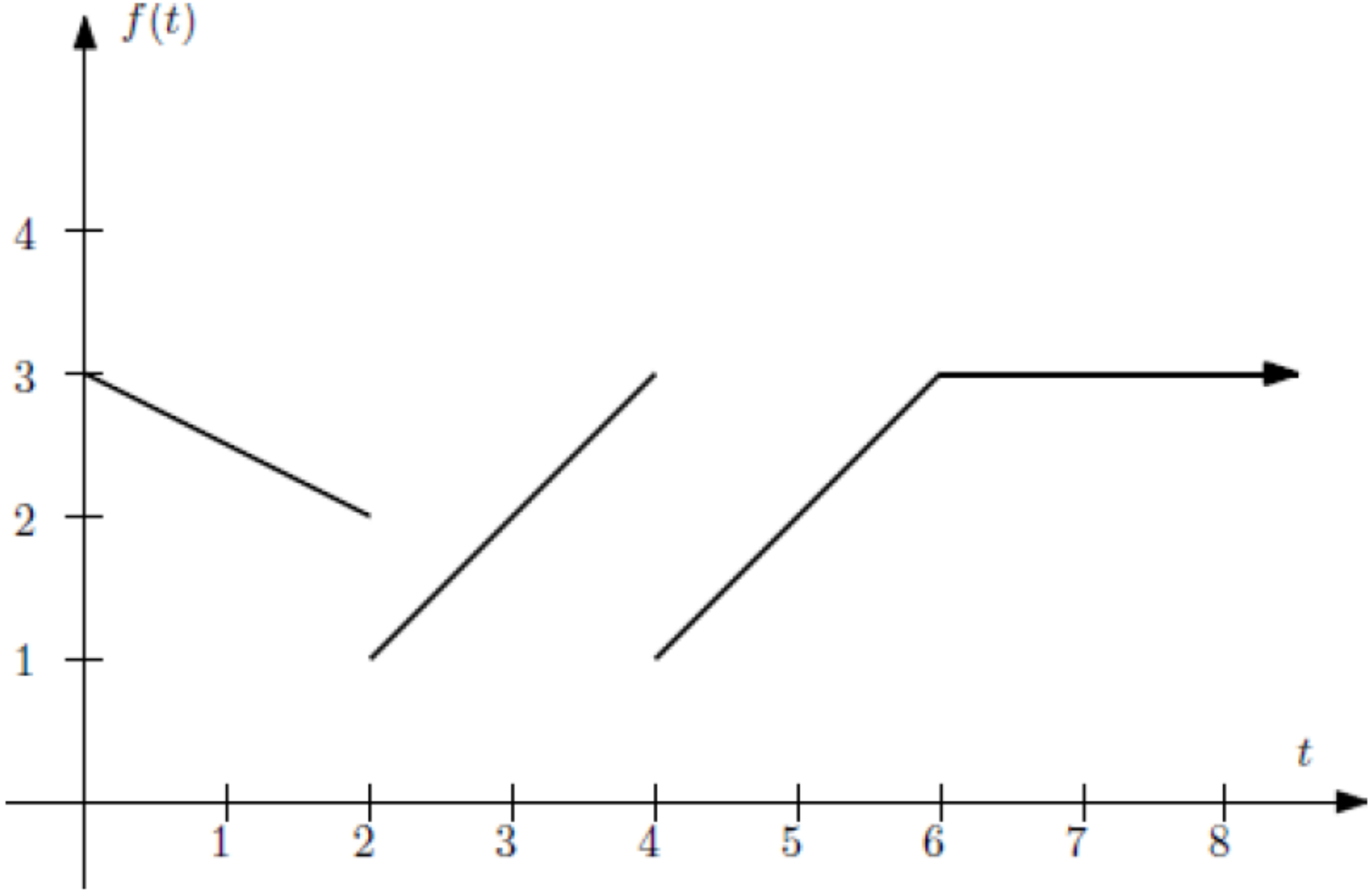


Ejemplo; encontrar la transformada de Laplace de la siguiente gráfica



Actividad

Obtener la transformada de Laplace de la función cuya gráfica se muestra a continuación

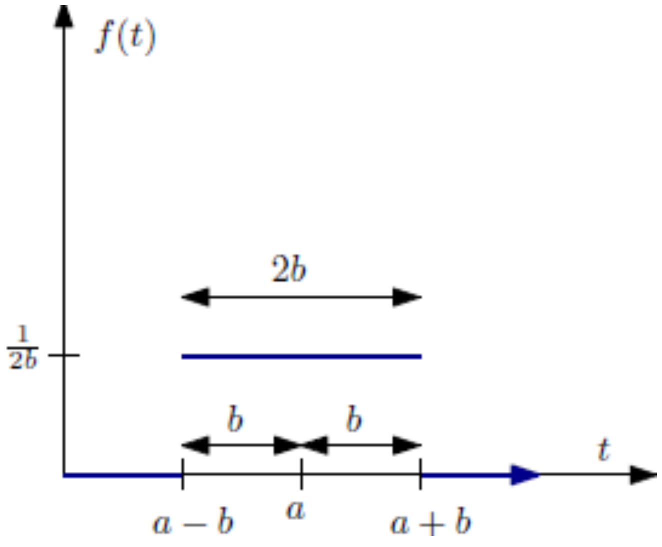


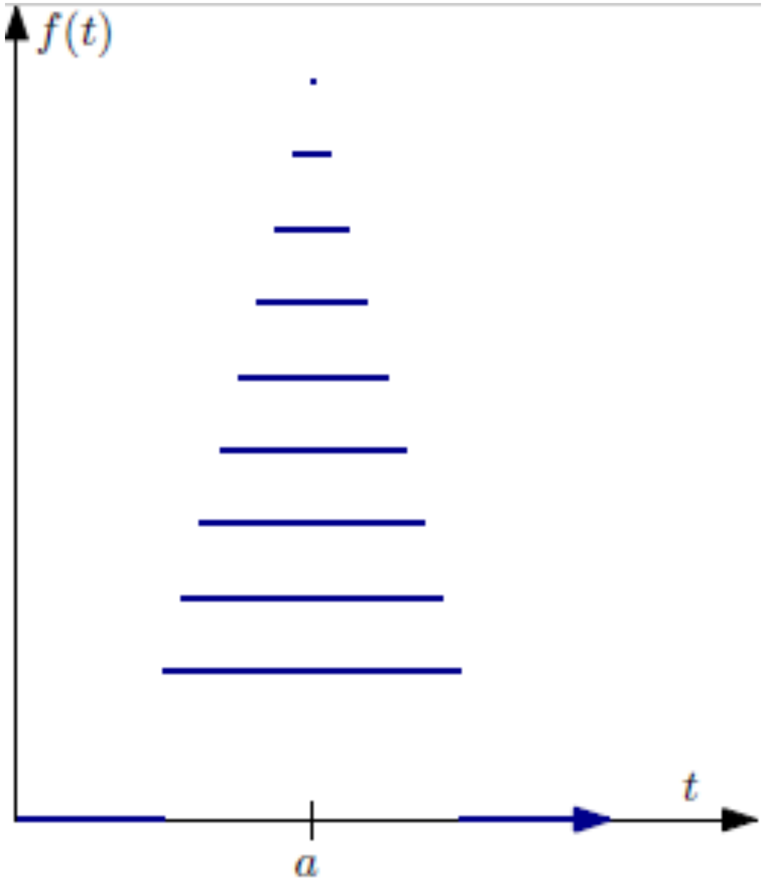
Función impulso o función delta de Dirac

Los sistemas mecánicos suelen ser afectados por una fuerza externa de una gran magnitud que actúa sólo por un periodo muy corto. Por ejemplo; una pelota (de béisbol, golf, tenis, etc.) podría ser enviada por los aires al ser golpeada de modo violento con un bate, palo de golf o una raqueta, respectivamente. La gráfica de la función definida por partes $b > 0$ y $a > 0$ puede servir como modelo para tal fuerza.

$$f(t) = \delta_b(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a-b \\ \frac{1}{2b}, & a-b \le t < a+b \\ 0, & t \ge a+b \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$
$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$





Comportamiento de δ cuando $b \to 0$

Ejemplo

Obtener $y(t)$ haciendo uso de la Transformada de Laplace

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \delta(t); \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

Teorema de traslación en el dominio de "t" (segundo teorema de traslación)

Suponga que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $a > 0$, donde a es una constante, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

y recíprocamente una transformada inversa de Laplace esta dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

Obtener la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-8s}\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-5s}\frac{e^{-2s}}{s}\right\}$$

Resolver el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + y = u(t-3); \quad y(0) = 2.$$

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales haciendo uso de la transformada de Laplace

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3y = te^{-t}$$

sujeto a $x(0) = 0, x'(0) = 2, \mathrm{y}(0) = 0$. Encontrar $x(t)$ y $y(t)$.

Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales haciendo uso de la transformada de Laplace sujeto a $x(0) = y(0) = -1$. Obtener solamente $x(t)$

$$x' + y' = 1$$
$$x' + 6y - x = 0$$

Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales haciendo uso de la transformada de Laplace sujeto a $y(0) = y'(0) = 0$ y $z(0) = 1$.

$$y'' + z + y = 0$$
$$z' + y' = 0$$

Mediante la transformada de Laplace, obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' - x + 2y = 0$$
$$3x + y' = 0$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 0; y(0) = 1.$

Reducir la siguiente ecuación diferencial a un sistema equivalente de primer orden

$$x''' + 2x'' - x' + 3x = 2t$$