# Cálculo Vectorial
## Lectura 8: Geometría Diferencial II, el Vector Normal

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero de 2020

## 1. El Vector Normal Unitario

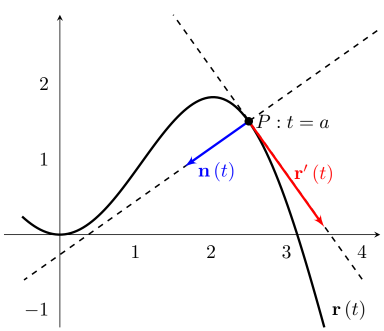


Figura 1. Vectores tangente (rojo) y normal (azul) a una curva en el punto $P$.

Se ha estudiado que el vector tangente a una curva está relacionado con la longitud de la misma. En este punto cabe preguntarse si existen otros vectores que ayuden a caracterizar la curva, ya sea de manera geométrica o de manera analítica.

En Cálculo de una variable, una curva posee dos rectas trascendentales en cada uno de sus puntos: la recta tangente y la recta normal, como se muestra en la figura 1. Cuando se trata a una curva como una función vectorial de variable escalar también se puede calcular un vector normal en un punto determinado. En el espacio $\mathbb{R}^2$ es simple obtener el vector normal (solo existe una dirección que sea perpendicular al vector tangente); sin embargo, en el espacio $\mathbb{R}^3$ hay una infinidad de direcciones que cumplen con la ortogonalidad entre vectores. Para calcular al vector normal se comenzará con el vector tangente unitario $\hat{\mathbf{T}}$.

Al ser unitario, $\hat{\mathbf{T}}$ posee norma constante y por definición

$$\left\|\hat{\mathbf{T}}\right\|^2 = \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}} \tag{1}$$

Si se toma la derivada de la expresión (1), esta debe afectar ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} \left\|\hat{\mathbf{T}}\right\|^2 &= \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}} \\ \frac{d}{dt}\left\|\hat{\mathbf{T}}\right\|^2 &= \frac{d}{dt}\left(\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

En la parte izquierda de (2) se puede sustituir el valor de la norma, que es 1; en la parte derecha, se desarrolla la derivada de acuerdo a la derivación del producto de funciones. Conforme la expresión se va simplificando, se obtendrá la condición de ortogonalidad.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\|\hat{\mathbf{T}}\right\|^2 &= \frac{d}{dt}\left(\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}}\right) \\ \frac{d}{dt}(1) &= \hat{\mathbf{T}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} + \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{T}} \end{aligned}$$

$$0 = 2\hat{\mathbf{T}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}$$
$$0 = \hat{\mathbf{T}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \qquad (3)$$

En la ecuación (3) intervienen dos vectores ortogonales entre sí: $\hat{\mathbf{T}}$ y su vector normal.

Sea $\mathbf{r}(t)$ una función vectorial de variable escalar con vector unitario tangente $\hat{\mathbf{T}}$ en $t = a$. El vector normal a $\mathbf{r}$ es $\dfrac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}$.

El vector normal unitario de $\mathbf{r}$ está definido como

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\dfrac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}}{\left\|\dfrac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\right\|}$$

El vector normal es un elemento indispensable para la caracterización de la curva. Así como el vector tangente permite calcular la longitud de arco, el vector normal está relacionado con medir el cambio de dirección de la curva.

***Ejemplo***. Obtenga los vectores tangente y normal a la curva

$$\mathbf{r}(t) = e^t\hat{\mathbf{i}} + e^t\hat{\mathbf{j}} + te^t\hat{\mathbf{k}}$$

en $t = 1$.

---

La derivada de $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r}'(t) = e^t\hat{\mathbf{i}} + e^t\hat{\mathbf{j}} + \left(te^t + e^t\right)\hat{\mathbf{k}}$$

cuya norma es $\|\mathbf{r}'\| = e^t\sqrt{t^2 + 2t + 3}$. El vector tangente unitario es

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 2t + 3}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 2t + 3}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{t+1}{\sqrt{t^2 + 2t + 3}}\hat{\mathbf{k}}$$

y en $t = 1$

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{\mathbf{k}}$$

Para el vector normal se deriva $\hat{\mathbf{T}}$.

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = -\frac{t+1}{\sqrt{\left(t^2 + 2t + 3\right)^3}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{t+1}{\sqrt{\left(t^2 + 2t + 3\right)^3}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{\sqrt{\left(t^2 + 2t + 3\right)^3}}\hat{\mathbf{k}}$$

La norma de este nuevo vector es $\left\|\hat{\mathbf{T}}'\right\| = \dfrac{\sqrt{2}}{t^2 + 2t + 3}$ y por lo tanto, el vector normal unitario es

$$\hat{\mathbf{N}} = -\frac{t+1}{\sqrt{2t^2 + 4t + 6}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{t+1}{\sqrt{2t^2 + 4t + 6}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{\sqrt{2t^2 + 4t + 6}}\hat{\mathbf{k}}$$

Entonces, al evaluarlo en $t = 1$

$$\hat{\mathbf{N}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{k}}$$

## 2. La Curvatura

Una de las características que da el nombre a una curva es precisamente la curvatura. De manera simple, la curvatura describe que tan drástico es el cambio de dirección de una trayectoria. Esta definición no es formal, por lo que no sirve para analizar un lugar geométrico.

Dentro de la Geometría Analítica las cónicas son las curvas básicas que están definidas a partir de distancias entre el lugar geométrico y puntos fijos (focos). De las cuatro cónicas solo hay una cuya distancia al foco es igual para todos los puntos de la curva: la circunferencia. Además, hay que considerar que esta cónica tiene excentricidad constante e igual a uno. Con ayuda de la circunferencia y su excentricidad se define la curvatura como una aproximación a la curva de estudio (véase la figura 2).

La curvatura $\kappa$ de una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ es el recíproco del radio $\rho$ de la circunferencia que mejor se aproxima a $\mathbf{r}$ en un punto dado. Se calcula a partir de la derivada del vector tangente unitario respecto a la longitud de arco $s$:

$$\kappa = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right\|$$

Al radio $\rho$ se le llama radio de curvatura y a la circunferencia de aproximación se le llama circunferencia osculatriz.

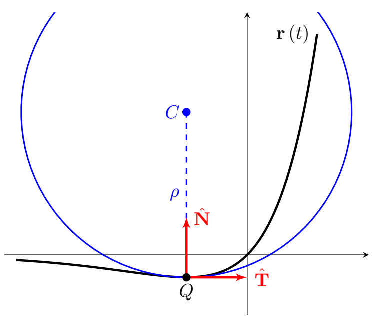


Figura 2. En el punto $Q$ la curva $\mathbf{r}(t)$ se aproxima a la circunferencia de curvatura (azul) con radio $\rho$ y centro en $C$. El vector $\hat{\mathbf{N}}$ señala al centro de curvatura.

Un aspecto importante a recalcar es que la curvatura está relacionada con el vector normal unitario. Recordando que la relación entre el vector tangente a una curva $\mathbf{r}(t)$ y la derivada de la longitud de arco es

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| \tag{4}$$

se usará la definición de curvatura para relacionarla con el vector tangente. Tomando a la curvatura, se multiplicará por un cociente unitario de diferenciales $dt$ y se invertirá la regla del sándwich para división de fracciones.

$$\begin{aligned} \kappa &= \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right\| \\ &= \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \frac{dt}{dt} \right\| \\ &= \frac{\left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \right\|}{\left\| \frac{ds}{dt} \right\|} \end{aligned} \tag{5}$$

En la ecuación (5) el denominador es la expresión en (4), en tanto que el numerador es el vector normal no unitario a la curva.

$$\kappa = \frac{\left\| \hat{\mathbf{T}}' \right\|}{\|\mathbf{r}'\|}$$

Geométricamente, el vector normal dirige el segmento de recta que une al centro de curvatura con la trayectoria analizada. Es decir,

$$\mathbf{c} = \rho\hat{\mathbf{N}} + \mathbf{r}(t)$$

donde $\mathbf{c}$ es el vector del centro de la circunferencia osculatriz.

***Ejemplo***. Sea la curva

$$\mathbf{r}(t) = \frac{2}{\cos t}\hat{\mathbf{i}} + 2\frac{\sin t}{\cos t}\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$$

Obtenga, para el valor de $t = 0$:

a. los vectores tangente y normal unitarios.
b. la curvatura.
c. la ecuación de la circunferencia osculatriz.

La derivada de la ecuación de la curva es

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{2\sin t}{\cos^2 t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{2}{\cos^2 t}\hat{\mathbf{j}}$$

que posee norma $\|\mathbf{r}'(t)\| = \dfrac{2}{\cos^2 t}\sqrt{1+\sin^2 t}$, y en consecuencia el vector tangente es

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\sin t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\hat{\mathbf{j}}$$

Al derivar el vector unitario tangente se obtendrá un vector normal:

$$\hat{\mathbf{T}}' = \frac{\cos t}{\sqrt{\left(1+\sin^2 t\right)^3}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\sin t\cos t}{\sqrt{\left(1+\sin^2 t\right)^3}}\hat{\mathbf{j}}$$

La norma de este vector normal es $\left\|\hat{\mathbf{T}}'\right\| = \dfrac{\cos t}{1+\sin^2 t}$. Por lo tanto, el vector normal unitario buscado es

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\sin t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\hat{\mathbf{j}}$$

Mediante el producto punto puede comprobarse que tanto $\hat{\mathbf{T}}$ como $\hat{\mathbf{N}}$ son ortogonales. Al evaluarlos en el valor del parámetro se obtiene:

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{j}} \qquad \text{y} \qquad \hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{i}}$$

Para calcular la curvatura ya se tienen las normas involucradas:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\left\|\hat{\mathbf{T}}'\right\|}{\|\mathbf{r}'\|} \\ &= \frac{\dfrac{\cos t}{1+\sin^2 t}}{\dfrac{2}{\cos^2 t}\sqrt{1+\sin^2 t}}\end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{\cos^3 t}{2\sqrt{\left(1+\sin^2 t\right)^3}}$$

Y en el valor de $t$ dado, la curvatura es $\kappa = \dfrac{1}{2}$ y el radio de curvatura es $\rho = 2$. Finalmente, el centro de curvatura está en

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \rho\hat{\mathbf{N}} + \mathbf{r}(0) \\ &= 2\hat{\mathbf{i}} + \left(2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{k}}\right) \\ &= 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Como la curva se encuentra sobre el plano $z = 3$, las ecuaciones de la circunferencia de curvatura son

$$\begin{cases}(x-4)^2 + y^2 = 4 \\ z = 3\end{cases}$$