Cálculo Vectorial

Lectura 5: Campos Vectoriales y Campos Escalares

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero de 2020

Anteriormente se hizo una clasificación de los diversos tipos de funciones que pueden plantearse. La clasificación que se mencionó puede reducirse a dos:

- Funciones escalares, si la función arroja un valor escalar después de ser evaluada. Por ejemplo,

$$f(x, y, z) = 3x + 2y^2 z - z^3 \tag{1}$$

- Funciones vectoriales, si la función arroja un vector después de ser evaluada. Por ejemplo,

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x + y)\,\hat{\mathbf{i}} + \left(x^2 + yz - 1\right)\hat{\mathbf{j}} + (xyz - 1)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{2}$$

Para interpretar el significado de las funciones (1) y (2), hay que saber qué naturaleza tienen el dominio y el codominio. Analizando la función (1) el dominio es el espacio $\mathbb{R}^3$ (una ubicación en el cubo coordenado), en tanto que el codominio es $\mathbb{R}$. En el caso de la función (2), el dominio son vectores de $\mathbb{R}^3$ y el codominio también son vectores (en este caso del mismo espacio vectorial).

La descripción de las funciones de esta manera introduce los conceptos de campo vectorial y campo escalar.

1. Campo Escalar

Imaginando una superficie metálica (como podría ser una sartén), al calentarla, cada punto de la superficie tendrá una temperatura determinada: el centro de la aplicación de calor tendrá temperaturas más altas que los lugares donde no se aplica el fuego directamente. Este tipo de fenómenos pueden modelarse mediante una función escalar de variable vectorial, donde a cada vector del dominio se le asignará un valor escalar de salida mediante la función (véase la figura 1).

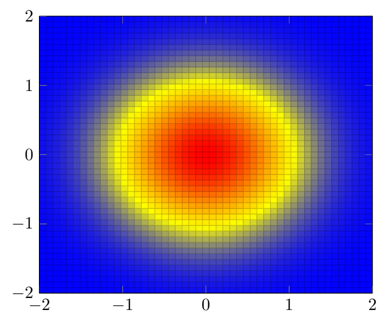

Figura 1. A cada punto del plano le corresponde una temperatura (alta en rojo, baja en azul) de acuerdo con la función escalar $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$.

Asignar temperaturas a un punto (ya sea en el plano o en el espacio) no es el único fenómeno físico que puede modelarse con las funciones escalares de variable vectorial;

la masa, la carga eléctrica, el volumen o el tiempo son cantidades escalares que pueden asignarse a vectores mediante los llamados campos escalares (funciones escalares).

Sea $f : D_f \to \mathbb{R}$ una función donde $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. La función f es un campo escalar, pues le asigna un escalar $f(\mathbf{x})$ a cada vector $\mathbf{x} \in D_f$.

Dentro de esta definición se considera que el dominio del campo escalar puede o no ser un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo. Obtenga el dominio del campo escalar

$$f(x, y) = 2 + \sqrt{2 - x^2 + 2x - y^2 - 2y}$$

Al igual que en una función de una sola variable independiente, el dominio del campo f debe satisfacer las condiciones de la regla de correspondencia; en este caso

$$2 - x^2 + 2x - y^2 - 2y \geq 0 \tag{3}$$

La desigualdad (3) puede reescribirse al completar los cuadrados

$$\begin{aligned}
2 - x^2 + 2x - y^2 - 2y &\geq 0 \\
2 - \left(x^2 - 2x\right) - \left(y^2 + 2y\right) &\geq 0 \\
2 - \left(x^2 - 2x + 1\right) - \left(y^2 + 2y + 1\right) + 2 &\geq 0 \\
4 - (x-1)^2 - (y+1)^2 &\geq 0 \\
4 &\geq (x-1)^2 + (y+1)^2
\end{aligned}$$

Puede observarse que al final del desarrollo se obtiene la condición que debe cumplir el dominio: f solo puede ser evaluada con elementos dentro y sobre la circunferencia $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$, la cual se muestra en la figura (2).

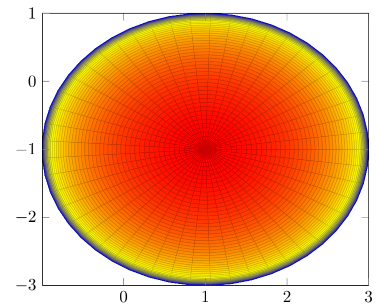

Figura 2

Por lo tanto, el dominio del campo escalar f es

$$D_f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| 4 \geq (x-1)^2 + (y+1)^2 ; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Campo Vectorial

Ahora, el escenario a plantear es un avión en movimiento. Durante los vuelos es común experimentar las llamadas turbulencias, las cuales se producen por los cambios de velocidad y dirección que sufren las corrientes de aire y que chocan contra la estructura del fuselaje del avión. Cada corriente de aire está compuesta por partículas que se encuentran en una posición dada con una velocidad determinada en un instante. Es decir, la posición de cada partícula de aire tiene asignada un vector ve-

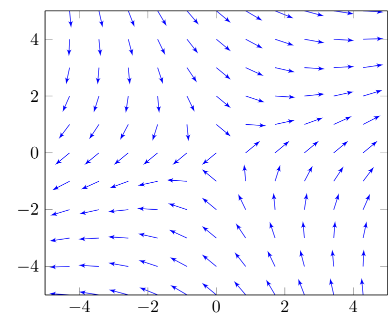

Figura 3. Cada punto del plano tiene un vector velocidad (su magnitud indica la rapidez) asignado por la función vectorial $\mathbf{f}(x, y) = (x + y)\,\hat{\mathbf{i}} + (x - y)\,\hat{\mathbf{j}}$.

locidad (véase la figura 3).

La velocidad, el desplazamiento, el campo eléctrico, el campo magnético, la fuerza o la aceleración son fenómenos físicos representados por vectores, los cuales pueden ser asignados a otros vectores del espacio o del plano. La asignación se realiza mediante funciones vectoriales, también llamadas campos vectoriales.

Sea $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \to \mathbb{R}^m$ una función donde $D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n$. La función $\mathbf{f}$ es un campo vectorial, pues cada vector $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{f}}$ tiene asignado otro vector $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$.

Al igual que los campos escalares, los campos vectoriales poseen un dominio que puede ser un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, o bien el propio espacio.

Ejemplo. Obtenga el dominio del campo vectorial

$$\mathbf{f}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{j}}$$

Como en el ejemplo anterior, el dominio debe respetar las restricciones que se produzcan al analizar las funciones que forman las componentes del campo.

Para la componente en $\hat{\mathbf{i}}$:

$$f_1(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

La fracción implica que el denominador no puede ser nulo, por lo que $x \neq 0$ y $y \neq 0$.

Para la componente en $\hat{\mathbf{j}}$:

$$f_2(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

Nuevamente, el denominador no puede ser cero y se presentan las mismas condiciones que en f_1.

Por lo tanto, el dominio de este campo vectorial es

$$D_{\mathbf{f}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| x \neq 0, y \neq 0; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

La figura (4) muestra al campo del ejemplo

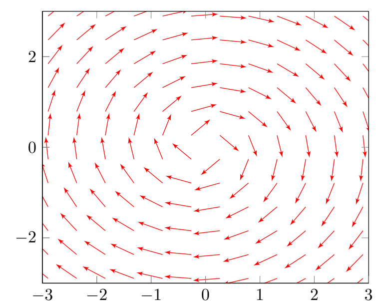

Figura 4

En el ejemplo anterior puede notarse que cada componente de un campo vectorial es un campo escalar.