Cálculo Vectorial
Lectura 22: Integral de Línea de Campo Vectorial

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Integral de Línea

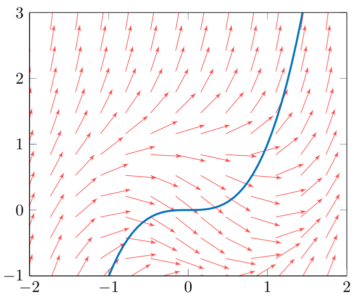

Figura 1. La curva C (en azul) atraviesa el campo vectorial $\mathbf{f}$ (en rojo) e intercepta varios vectores en su trayectoria.

Se ha estudiado el comportamiento de una trayectoria sobre un campo escalar para definir la integral de línea de un campo escalar. Si ahora el campo que recorre la trayectoria es un campo vectorial (véase la figura 1), el concepto de *área bajo la trayectoria* se conserva, pero el cálculo de la integral cambia pues ahora se trabaja puramente con vectores.

La trayectoria de una curva C a través de un campo vectorial $\mathbf{f}$ no es igual a la que se presenta en un campo escalar: la trayectoria a través del campo escalar, geométricamente se interpreta como una curva que está contenida sobre una superficie; en el caso del campo vectorial la trayectoria no está contenida en el campo, más bien lo atraviesa de tal forma que los puntos que definen la curva se encuentran con los vectores del campo.

Para determinar la integral de línea del campo vectorial

$$\mathbf{f}(x, y) \tag{1}$$

se partirá, nuevamente, de la longitud de arco de la curva:

$$s = \int_C \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \tag{2}$$

donde $\mathbf{r}'(t)$ es la derivada de la curva $C: \ \mathbf{r}(t)$. Al derivar (2) respecto a t se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| \tag{3}$$

Por otro lado, el vector tangente unitario a la curva es

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

Si se multiplica (3) por el vector tangente y por la diferencial dt, la nueva expresión, simplificada, es

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{T}}\ dt\frac{ds}{dt} &= \|\mathbf{r}'(t)\|\, \hat{\mathbf{T}}\ dt \\
\hat{\mathbf{T}}\ ds &= \|\mathbf{r}'(t)\| \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\ dt \\
\hat{\mathbf{T}}\ ds &= \mathbf{r}'(t)\ \ dt
\end{aligned} \tag{4}$$

Se observa que la expresión (4) es una cantidad vectorial, y como la integral de línea es una cantidad escalar, debe usarse el producto punto antes de integrar. Aquí es donde participa el campo vectorial: se aplica el producto punto entre (1) y (4). Pero, para asegurar que solo se tomen en cuenta los puntos del campo que están en la trayectoria, la expresión (1) debe evaluarse con la curva C.

$$\mathbf{f}\big(\mathbf{r}\,(t)\,\big)\cdot\hat{\mathbf{T}}\;ds=\mathbf{f}\big(\mathbf{r}\,(t)\,\big)\cdot\mathbf{r}'\,(t)\;\;dt$$

Finalmente, se integra en la trayectoria al evaluar $\mathbf{f}$ con la curva $\mathbf{r}$:

$$\int_C\mathbf{f}\big(\mathbf{r}\,(t)\,\big)\cdot\hat{\mathbf{T}}\;ds=\int_C\mathbf{f}\big(\mathbf{r}\,(t)\,\big)\cdot\mathbf{r}'\,(t)\;\;dt$$

Sean la trayectoria $C:\;\mathbf{r}\,(t)$ y el campo vectorial $\mathbf{f}\,(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. La integral de línea de f a lo largo de C en el intervalo $[t_1,t_2]$ es

$$\int_C\mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{T}}\;ds=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{f}\big(\mathbf{r}\,(t)\,\big)\cdot\mathbf{r}'\,(t)\;\;dt$$

Hay que resaltar dos cuestiones importantes sobre las integrales de línea en campos vectoriales. La primera es la notación, ya que las expresiones

$$\int_C\mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{T}}\;ds$$

$$\int_C\mathbf{f}\big(\mathbf{r}\,(t)\,\big)\cdot\mathbf{r}'\,(t)\;\;dt$$

$$\int_C\mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$$

$$\int_C P\,(x,y)\;\;dx+Q\,(x,y)\;\;dy$$

donde, $\mathbf{f}\,(x,y)=P\,(x,y)\,\hat{\mathbf{i}}+Q\,(x,y)\,\hat{\mathbf{j}}$, representan lo mismo. La segunda cuestión es el significado del producto punto dentro de la integral.

Considerando que

$$\int_C\mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{T}}\;ds$$

el producto $\mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{T}}$ tiene un significado geométrico.

Se mencionó que la integral de línea es un resultado escalar, el cual no puede obtenerse con un solo vector; el uso del producto punto arroja ese escalar que se integrará. Pero no es cualquier escalar, se trata de la componente escalar de $\mathbf{f}$ en la dirección de $\hat{\mathbf{T}}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{CompEsc}_{\hat{\mathbf{T}}}\mathbf{f}&=\frac{\mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{T}}}{\left\|\hat{\mathbf{T}}\right\|}\\&=\mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{T}}\end{aligned}$$

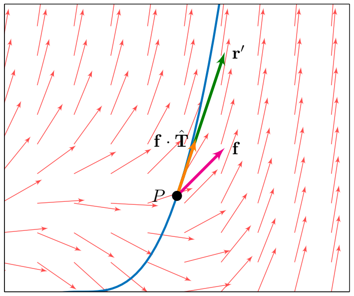

Figura 2. Interpretación geométrica de la integral de línea en un punto. La integral realiza este proceso con una infinidad de vectores a lo largo de la trayectoría. La integral proyecta cada vector $\mathbf{f}$ del campo sobre el vector $\hat{\mathbf{T}}$ tangente a la curva.

Al analizar la geometría, la curva $\mathbf{r}$ intercepta al campo $\mathbf{f}$ en el punto P; en ese mismo punto existe el vector derivada, que es tangente a la curva y que se utiliza para calcular la longitud de arco en P. Sobre el vector tangente puede hacerse la proyección de $\mathbf{f}$ en la dirección de $\mathbf{r}'$; el significado de esta proyección es saber el impacto de $\mathbf{f}$ en la dirección de la trayectoria, como se muestra en la figura 2.

Ejemplo. Sean la curva $C:\;\mathbf{r}\,(t)=t\hat{\mathbf{i}}+t^2\hat{\mathbf{j}}$ y el campo vectorial

$$\mathbf{f}\,(x,y)=\left(x^2+y\right)\hat{\mathbf{i}}+\left(x^2-y\right)\hat{\mathbf{j}}$$

Obtenga la integral de línea de $\mathbf{f}$ bajo la trayectoria C en el intervalo $[0,1]$.

La derivada de $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{r}'(t) = \hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}}$$

El campo evaluado con $\mathbf{r}$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(x,y) &= \left(x^2+y\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(x^2-y\right)\hat{\mathbf{j}}\\ \mathbf{f}\left(t,t^2\right) &= \left(t^2+t^2\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(t^2-t^2\right)\hat{\mathbf{j}}\\ &= 2t^2\hat{\mathbf{i}}\end{aligned}$$

El cálculo del producto punto arroja

$$\begin{aligned}\mathbf{f}\cdot\mathbf{r}' &= \left(\hat{\mathbf{i}}+2t\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot\left(2t^2\hat{\mathbf{i}}\right)\\ &= 2t^2\end{aligned}$$

Finalmente la integral es

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{f}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt &= \int_0^1 2t^2\;dt\\ &= \frac{2}{3}t^3\Big|_0^1\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Al igual que en las integrales de línea de campo escalar, las trayectorias para la integral del campo vectorial pueden ser cerradas o no:

$$\oint_C \mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{T}}\;ds$$

denota a la integral de línea sobre trayectoria cerrada.

También existe el caso que la trayectoria sobre la que se integra esté seccionada, de tal forma que la suma de las integrales será el resultado de la integral completa. La figura (3) muestra ejemplos de trayectorias seccionada y no seccionada cerradas.

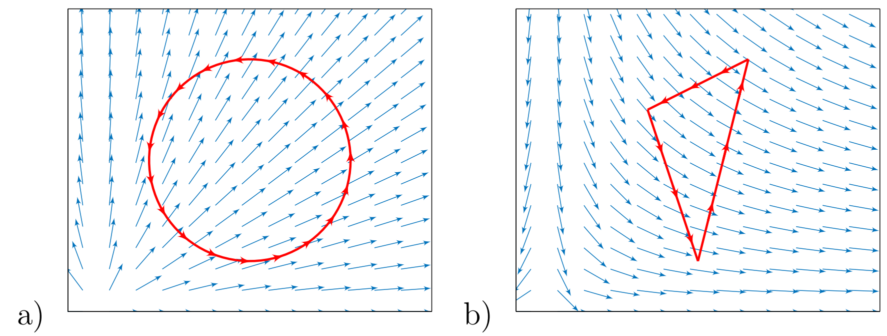

Figura 3. a) Trayectoria cerrada no seccionada. b) Trayectoria cerrada seccionada. Ambas trayectorias indican el sentido de recorrido de las curvas.