# Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Objetivo:

**El alumno aplicará los conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias al analizar e interpretar problemas físicos y geométricos.**

**Una ecuación diferencial de orden n de la forma**

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$$

**es homogénea, mientras que una ecuación**

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x),$$

**con $g(x)\neq 0$, es no homogénea.**

**Por ejemplo:**

$$2y''+3y'-5y=0$$
$$x^3y'''+6y'+10y=e^x$$

En cálculo, la diferenciación se denota por lo común por la letra $D$ mayúscula, es decir, ${}^{dy}/_{dx} = Dy$.

El símbolo $D$ se llama operador diferencial porque transforma una función diferenciable en otra función.

Por ejemplo,

$$D(\cos(4x)) = -4sen(4x)$$

y

$$D\left(5x^3 - 6x^2\right) = 15x^2 - 12x.$$

# Operadores diferenciales

Las derivadas de orden superior se expresan en términos de $D$ de manera natural:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}=D(Dy)=D^2y,$$

y en general

$$\frac{d^ny}{dx^n}=D^ny,$$

donde "$y$" representa una función diferenciable.

Las expresiones polinomiales en las que interviene $D$, como:

$$D+3, D^2+3D+4 \text{ y } 5x^3D^2+4xD+9,$$

son también operadores diferenciales. En general, se define un operador diferencial de n-ésimo orden u operador polinomial como;

$$L=a_n(x)D^n+a_{n-1}(x)D^{n-1}+\cdots+a_1(x)D+a_0(x).$$

# Operadores diferenciales

Como consecuencia de dos propiedades de la diferenciación, $D(cf(x)) = cDf(x)$ , donde $c$ es una constante, y $D\{f(x) + g(x)\} = Df(x) + Dg(x)$ , el operador diferencial $L$ posee una propiedad lineal; es decir, $L$ operando en una combinación lineal de dos funciones diferenciables es lo mismo que la combinación lineal de $L$ operando en cada una de las funciones. Esto significa que;

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L(f(x)) + \beta L(f(x)),$$

donde $\alpha$ y $\beta$ son constantes. Como resultado de esta última expresión, se dice que el operador diferencial de n-ésimo orden es un operador lineal.

# Operadores diferenciales

Cualquier ecuación diferencial lineal puede expresarse en términos de la notación $D$. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = 5x - 3$$

se puede escribir como

$$D^2y + 5Dy + 6y = 5x - 3 \text{ ó } \left(D^2 + 5D + 6\right)y = 5x - 3.$$

en donde el operador polinomial $L = \left(D^2 + 5D + 6\right)$, por lo que la ecuación diferencial es $Ly = 5x - 3$.

Considerando esto último, se pueden escribir las ecuaciones diferenciales lineales de orden n en forma compacta como:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

$$Ly = 0$$

$$Ly = g(x)$$

donde

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x).$$

Escribir las siguientes ecuaciones diferenciales en términos del operador diferencial

$$a)\ y''' + 3y'' + 2y = senx$$

$$b)\quad x^3y''' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

$$c)\ x^2y'' - y + 2y' = 3x^2$$

$$d)\quad \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + 3x = 0$$

## Ejemplo

En el siguiente teorema se ve que la suma, o superposición de dos o más soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea es también una solución.

## TEOREMA

Sean $y_1$ , $y_2$ ,..., $y_k$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden en un intervalo $I$.

Entonces la combinación lineal

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x),$$

donde $c_i$ , donde $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.

# Principio de superposición para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

Las funciones $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 Inx$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea $x^3 y''' - 2xy' + 4y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$. Por el principio de superposición, la combinación lineal

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 Inx,$$

es también una solución de la ecuación en el intervalo.

La función $y = e^{7x}$ es una solución de $y'' - 9y' + 14y = 0$. Debido a que la ecuación diferencial es lineal y homogénea, el múltiplo constante $y = ce^{x}$ es también una solución. Para varios valores de $c$ se ve que $y = 9e^{7x}, y = 0, y = -\sqrt{5}e^{7x}, \ldots$ son soluciones de la ecuación.

## Ejemplo

Un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo $I$ si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas cero, tales que

$$\boldsymbol{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0}$$

para toda $x$ en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente.

En otras palabras, un conjunto de funciones es linealmente independiente en un intervalo $I$ si las únicas constantes para las que

$$\boldsymbol{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0}$$

para toda $x$ en el intervalo son $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

# Dependencia e independencia lineal

# Nota

- Si un conjunto de dos funciones es linealmente dependiente, entonces una función es simplemente un múltiplo constante del otro.

- Un conjunto de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ es linealmente independiente cuando ninguna función es un múltiplo constante de la otra en el intervalo.