Cálculo Vectorial

Lectura 3: Valores Propios de la Matriz Hessiana

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero de 2020

1. Formas Cuadráticas y Puntos Estables

Toda función multivariable posee una matriz hessiana, independientemente del número de variables que posea. En general, una función $f(\mathbf{x})$ posee una matriz hessiana de la forma

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_1x_n} & f_{x_2x_n} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

Al ser una matriz simétrica, la matriz hessiana puede clasificarse de acuerdo a la naturaleza de los valores propios que se estudian en Álgebra Lineal:

- Definida positiva: sus valores propios son positivos.
- Definida negativa: sus valores propios son negativos.
- Indefinida: sus valores propios son positivos y negativos.
- Semidefinida positiva: sus valores propios son no negativos.
- Semidefinida negativa: sus valores propios son no positivos.

Esta clasificación permite identificar la geometría de una forma cuadrática. Esta identificación se basa en el concepto estudiado anteriormente de la aproximación mediante polinomios de Taylor.

Previamente, se estableció que la aproximación por polinomio de Taylor de una función con dos variables en el punto estable es

$$f(x,y) \approx f + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x-x_0)^2 + \right. \\ \left. + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)^2\right]$$

que al reescribirse en forma matricial se convierte en

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$

De manera general, el polinomio de Taylor de una función multivariable en la región del punto estable se expresa como

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T H(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \tag{1}$$

La matriz hessiana H de la expresión (1) indicará el tipo de forma cuadrática que se estableció anteriormente. La aproximación de f mediante (1) posee una representación geométrica característica que depende de la naturaleza del punto estable; dicha representación se muestra en la figura 1.

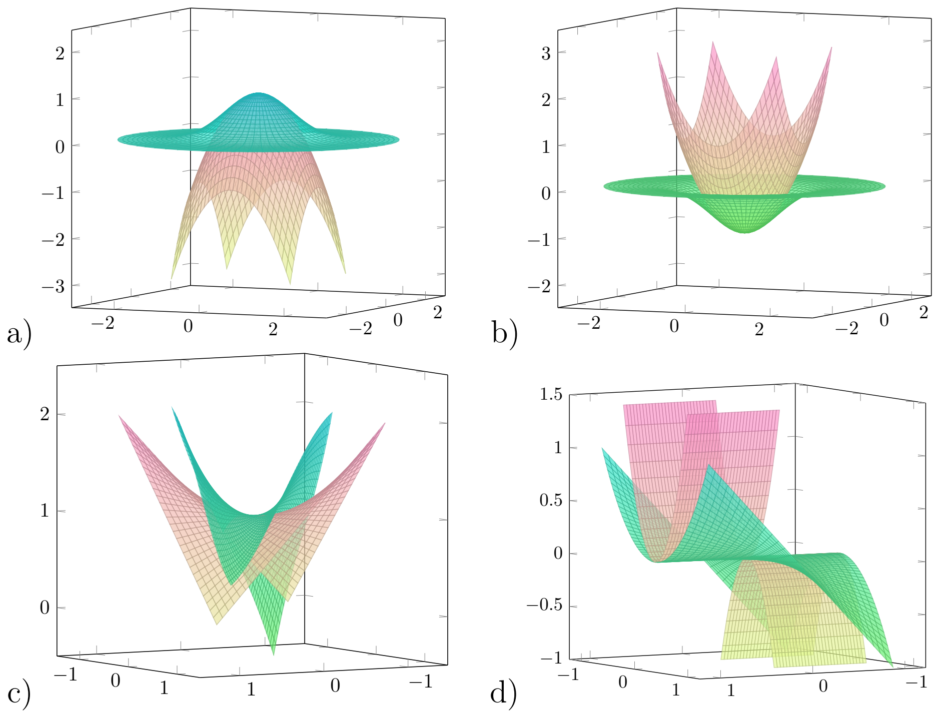

Figura 1. Representación de una función con punto estable (mapeo verde-azul) y su aproximación cuadrática (mapeo amarillo-rosa): a) forma definida negativa que aproxima al máximo de la función; b) forma definida positiva que aproxima al mínimo de la función; c) forma indefinida que aproxima al punto silla; d) formas semidefinidas donde existen extremos locales consecutivos.

La matriz hessiana es un criterio más general que el de la segunda derivada que, como se mencionó, viene del determinante de dicha matriz. Conforme la función tiene más variables, el determinante hessiano crece en orden $n!$ y es más complicado calcularlo; esto no sucede con los valores propios, pues mediante transformaciones elementales pueden calcularse sin llegar a utilizar determinantes.

De acuerdo con la clasificación de matrices, la aproximación establecida en la expresión (1) y la geometría ilustrada en la figura 1, se establece el criterio de los valores propios de la matriz hessiana.

Sea la función $f(\mathbf{x})$ con segundas derivadas parciales y punto estable en E. Los valores propios de la matriz hessiana $H(\mathbf{x}_0)\Big|_E$ indican la naturaleza del punto estable:

- ❑ Valores propios nulos y positivos, mínimos locales.
- ❑ Valores propios nulos y negativos, máximos locales.
- ❑ Valores propios positivos, hay un mínimo.
- ❑ Valores propios negativos, hay un máximo.
- ❑ Valores propios con signos diferentes, hay un punto silla.

Las propiedades de las matrices simétricas no se limitan a los valores propios; para determinar la naturaleza de los puntos estables también se puede recurrir a:

- ❑ Determinante (criterio de la segunda derivada). La matriz hessiana H de orden n...
  - ❑ es definida positiva si $|H| > 0$.
  - ❑ es definida negativa si $|H| < 0$ con n impar y $|H| > 0$ con n par.
  - ❑ es indefinida si $|H| < 0$.
  - ❑ es semidefinida si $|H| = 0$.
- ❑ Pivotes principales. Si la matriz hessiana posee...
  - ❑ pivotes positivos, es definida positiva.
  - ❑ pivotes positivos y negativos alternadamente, es definida negativa.
  - ❑ pivotes negativos, es indefinida.
  - ❑ al menos un pivote nulo, es semidefinida.
- ❑ Menores principales. Aplica de la misma forma que los pivotes principales.

Ejemplo. Determine la naturaleza de los puntos estables de la función

$$f(x,y,z) = x^3 - 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + xz - yz + 3z$$

Se comenzará encontrando los puntos estables y después se les caracterizará. Para las primeras derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4x - 2y + z \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 4x - 2y + z = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x - z \quad \Rightarrow \quad -2x + 2y - z = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + x - y + 3 \quad \Rightarrow \quad x - y + 2z + 3 = 0 \tag{4}$$

De la ecuación (3) se despeja z y se sustituye en (4),

$$\begin{aligned} z = -2x + 2y \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 4x - 2y + z &= 0 \\ 3x^2 - 4x - 2y + (-2x + 2y) &= \\ 3x^2 - 6x &= \\ 3x(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene $x = 0$ y $x = 2$. Por otro lado al sumar término a término la ecuación (3) con el doble de la ecuación (4),

$$\begin{aligned} -2x + 2y - z + 2(x - y + 2z + 3) &= 0 \\ -2x + 2y - z + 2x - 2y + 4z + 6 &= 0 \quad \Rightarrow \quad 3z + 6 = 0 \end{aligned}$$

por lo que $z = -2$. Sustituyendo los valores obtenidos en cualquiera de las tres ecuaciones originales, se obtienen los puntos estables. Para $x = 0$ en la ecuación (2),

$$3x^2 - 4x - 2y + z = 0$$

$$3(0) - 4(0) - 2y + (-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2y - 2 = 0$$

y se obtiene que $y = -1$. Ahora, para $x = 2$ en la ecuación (4),

$$\begin{aligned} -2x + 2y - z &= 0 \\ -2(2) + 2y - (-2) &= 0 \quad \Rightarrow \quad -2 + 2y = 0 \end{aligned}$$

que arroja $y = 1$. Los puntos son $P(0,-1,-2)$ y $Q(2,1,-2)$. Para la caracterización, se requieren las segundas derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -1$$

Para el punto P la matriz hessiana es

$$H(0,-1,-2) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -4.6745$, $\lambda_2 = 3.6069$ y $\lambda_3 = 1.0676$. Al ser un valor propio negativo y dos positivos, la matriz hessiana es indefinida y en P existe un punto silla.

En el caso del punto Q

$$H(2,1,-2) = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

es la matriz hessiana con valores propios positivos $\lambda_1 = 8.8350$, $\lambda_2 = 2.2658$ y $\lambda_3 = 0.8992$. Por lo tanto, se trata de una matriz definida positiva y en el punto Q hay un mínimo.