Cálculo Vectorial

Lectura 11: Movimiento de una Partícula

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero de 2020

1. Mecánica

Todo objeto en movimiento cambia de posición según cambia el tiempo; es decir, un móvil posee una trayectoria que es función dependiente del tiempo t. Al ser una función, puede derivarse y en consecuencia conocer cuál es su razón de cambio instantáneo, en este caso respecto del tiempo. Dentro de la Mecánica, este concepto es la velocidad de un móvil.

Sea un móvil cuya trayectoria es $\mathbf{r}(t)$, donde t es el tiempo. La velocidad $\mathbf{v}(t)$ es la razón de cambio instantáneo de la posición $\mathbf{r}$ respecto de t y se calcula como

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Al módulo de la velocidad se le llama rapidez.

$$v = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|$$

La velocidad también puede expresarse en términos de la longitud de arco:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{ds}{dt}\hat{\mathbf{T}} \\ &= \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{ds} \end{aligned} \tag{1}$$

En el caso de la rapidez, la expresión es:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{2}$$

Otro concepto importante en la Mecánica es cuando la velocidad cambia; es decir, el cambio de la velocidad respecto del tiempo. Para este caso, se deriva la expresión (1) mediante la regla de la cadena y la derivada del producto de funciones.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{ds}{dt}\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\right] + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\mathbf{r}}{ds} \\ &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\mathbf{r}}{ds} \end{aligned} \tag{3}$$

Al tomar $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{N}}$ de las ecuaciones de Frenet-Serret, $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \hat{\mathbf{T}}$ de la definición de vector tangente y la expresión (2), la expresión (3) se reescribirá como

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} + \frac{d^2 s}{dt^2}\frac{d\mathbf{r}}{ds} \\
&= v^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)\hat{\mathbf{T}} \\
&= v^2 \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} + \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{T}} \\
\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= v^2\kappa\hat{\mathbf{N}} + v'\hat{\mathbf{T}} \qquad (4)
\end{aligned}$$

La ecuación (4) es la aceleración del móvil.

Sea un móvil cuya trayectoria y velocidad son $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$, donde t es el tiempo. La aceleración $\mathbf{a}(t)$ es la razón de cambio instantáneo de la velocidad $\mathbf{v}$ respecto de t y se calcula como

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

La aceleración también se calcula como

$$\mathbf{a} = v^2\kappa\hat{\mathbf{N}} + v'\hat{\mathbf{T}}$$

donde $v^2\kappa$ es la componente normal y v' es la componente tangencial.

Descomponer la aceleración en su parte normal y su parte tangencial permite describir el cambio de velocidad del objeto en movimiento. Por ejemplo, si la trayectoria es recta, entonces la velocidad será constante y habrá una aceleración nula; en cambio, si la trayectoria es curva, la aceleración tendrá una componente normal, y dependiendo de la naturaleza de la curva que define el movimiento la componente tangencial puede o no ser nula.

La componente tangencial a_T es múltiplo del vector velocidad e indica si ésta aumenta (es positiva) o disminuye (es negativa); geométricamente, si la componente tangencial es positiva tiene la misma dirección del movimiento, mientras que si es negativa señala la dirección contraria.

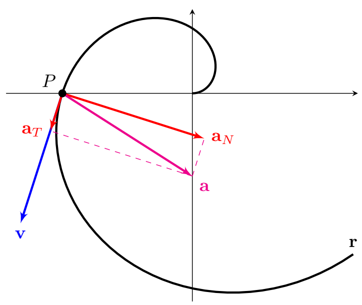

Figura 1. La velocidad y la aceleración, con sus dos componentes, de una trayectoria $\mathbf{r}$ en un punto P.

La aceleración normal a_N siempre apunta al centro de curvatura, a menos que sea nula; es la responsable del cambio de dirección de la trayectoria del móvil. En la figura 1 se muestran las características de ambas componentes de la aceleración.

Ejemplo. Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria

$$\mathbf{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + \left(t^2 - t - 2\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(t^2 - t - 2\right)\hat{\mathbf{k}} \ \ [m]$$

donde t está en segundos. Obtenga, en el punto $P(1, -2, -2)$:

a. la velocidad y la rapidez.
b. la aceleración y sus dos componentes.
c. el radio de curvatura.

Obteniendo la primera y segunda derivadas se calcularán todas las cantidades pedidas.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= t\hat{\mathbf{i}} + \left(t^2 - t - 2\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(t^2 - t - 2\right)\hat{\mathbf{k}} \\
\mathbf{r}'(t) &= \hat{\mathbf{i}} + (2t-1)\hat{\mathbf{j}} + (2t-1)\hat{\mathbf{k}} \\
\mathbf{r}''(t) &= 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

El punto P se obtiene cuando $t = 1$; al evaluar las derivadas,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(1) &= \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \ \left[\frac{m}{s}\right] \\ \mathbf{a}(1) &= 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}} \ \left[\frac{m}{s^2}\right]\end{aligned}$$

Para la rapidez se calcula la norma de la velocidad.

$$v = \sqrt{3} \ \left[\frac{m}{s}\right]$$

Las componentes de la aceleración se determinarán mediante la componente y resta vectoriales.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_T &= \operatorname{CompVect}_{\mathbf{v}} \mathbf{a} \\ &= \frac{4}{3}\left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) \quad \Rightarrow \quad a_T = \frac{4}{3}\sqrt{3}\left[\frac{m}{s^2}\right] \\ \Rightarrow \qquad \mathbf{a}_N &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_T \\ &= \left(2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\right) - \frac{4}{3}\left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) \quad \Rightarrow \quad a_N = \frac{2}{3}\sqrt{6}\left[\frac{m}{s^2}\right] \end{aligned}$$

El radio de curvatura se calculará a partir de la componente normal.

$$\begin{aligned} a_N &= v^2\kappa \\ a_N &= \frac{v^2}{\rho} \\ \rho &= \frac{v^2}{a_n} \\ &= \frac{3}{\frac{2}{3}\sqrt{6}} \\ \rho &= \frac{9}{2\sqrt{6}} \end{aligned}$$

2. $\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{B}}$ en Términos del Tiempo

Una vez que se conoce la relación de la Geometría Diferencial con la Mecánica, es conveniente hacer notar que las ecuaciones para calcular al triedro móvil pueden escribirse con base en el tiempo (o cualquier parámetro diferente de la longitud de arco). Para ello conviene analizar que, para una trayectoria $\mathbf{r}(t)$, su segunda derivada

$$\mathbf{r}''(t) = a_N\hat{\mathbf{N}} + a_T\hat{\mathbf{T}}$$

es una combinación lineal de los vectores normal y tangente unitarios. En consecuencia, $\mathbf{r}''$ se encuentra sobre el plano osculador y es perpendicular al vector binormal unitario. Además, la componente normal lleva el mismo sentido que el vector $\hat{\mathbf{N}}$, lo cual indica que el vector binormal puede calcularse a partir del producto cruz entre la primera y la segunda derivadas de la trayectoria:

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}$$

El vector tangente se calculará como hasta ahora se ha hecho:

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}$$

Y en lugar de derivar al vector tangente unitario, el vector $\hat{\mathbf{N}}$ se obtiene mediante proyección y resta vectorial:

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{r}'' - \operatorname{CompVect}_{\mathbf{r}'} \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'' - \operatorname{CompVect}_{\mathbf{r}'} \mathbf{r}''\|}$$

La curvatura se obtiene mediante la componente normal:

$$\kappa = \frac{a_N}{v^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\|\mathbf{r}'' - \operatorname{CompVect}_{\mathbf{r}'} \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^2}$$