Cálculo Vectorial
Lectura 24: Propiedades del Campo Conservativo

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Diferencial Exacta

Anteriormente se revisó el concepto de campo conservativo; se estudió que es irrotacional, pues sus derivadas parciales se anularán de manera cruzada. Tomando en cuenta el campo

$$\mathbf{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\hat{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\,\hat{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1}$$

su rotacional es

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{f} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Si $\mathbf{f}$ es conservativo, entonces es irrotacional y sus componentes tienen derivadas parciales que satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \tag{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \tag{3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{4}$$

Al satisfacer (2), (3) y (4), el campo $\mathbf{f}$ posee una diferencial total exacta; es decir, existe una función escalar g cuyo gradiente es el campo $\mathbf{f}$. Hablar de campo irrotacional, conservativo o con diferencial exacta es hablar del mismo concepto.

Sea el campo conservativo $\mathbf{f} = P\hat{\mathbf{i}} + Q\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}}$. El campo $\mathbf{f}$ posee diferencial exacta

$$dg = P\ dx + Q\ dy + R\ dz$$

donde $\nabla g = \mathbf{f}$, y satisface

$$P_y = Q_x, \qquad P_z = R_x \qquad Q_z = R_y$$

La diferencial exacta está relacionada con las ecuaciones diferenciales exactas, pues ambas buscan una función de la cual se obtienen las funciones derivadas P, Q y R. La diferencia radica que en ecuaciones diferenciales se considera una sola variable independiente.

Ejemplo. ¿Cuál de los siguientes campos vectoriales

a. $\mathbf{f}(x,y,z) = (2xy+z^2)\,\hat{\mathbf{i}} + (x^2+2yz)\,\hat{\mathbf{j}} + (y^2+2xz)\,\hat{\mathbf{k}}$

b. $\mathbf{r}(x,y,z) = \dfrac{1}{yz}\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{1}{xy}\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{1}{xz}\hat{\mathbf{k}}$

posee diferencial exacta?

Para el primer campo se calculan las derivadas parciales cruzadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy+z^2\right) &= 2x; & \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+2yz\right) &= 2x\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(2xy+z^2\right) &= 2z; & \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2+2xz\right) &= 2z\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2+2xz\right) &= 2y; & \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+2yz\right) &= 2y
\end{aligned}$$

Como las derivadas parciales cruzadas son iguales entre sí, entonces el campo es conservativo.

En el caso del segundo campo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{yz}\right) &= -\frac{1}{y^2z}; & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{xy}\right) &= -\frac{1}{x^2y}\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{yz}\right) &= -\frac{1}{yz^2}; & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{xz}\right) &= -\frac{1}{x^2z}\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{xz}\right) &= 0; & \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{xy}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Este campo no es conservativo, porque sus derivadas parciales cruzadas no son iguales.

El análisis de campos vectoriales para determinar si poseen diferencial exacta, es equivalente a mostrar si dichos campos son conservativos o irrotacionales.

2. Función Potencial

Una vez que se ha descubierto que un campo vectorial es conservativo, y por lo tanto tiene diferencial exacta, puede estudiarse el caso de recuperar su función primitiva; es decir, obtener el campo escalar del cual fue obtenido el campo vectorial.

Retomando la definición de diferencial exacta del campo vectorial (1),

$$dg = P\ dx + Q\ dy + R\ dz$$

se puede integrar a ambos lados y recuperar la función g de donde procede (1):

$$\begin{aligned}
dg &= P\ dx + Q\ dy + R\ dz\\
\int dg &= \int P\ dx + Q\ dy + R\ dz\\
g(x,y,z) + c &= \int P\ dx + Q\ dy + R\ dz
\end{aligned}$$

Sea $\mathbf{f}(x,y,z)$ un campo vectorial con diferencial exacta $d\mathbf{r}$. A la función $g(x,y,z)$, tal que

$$g(x,y,z) + c = \int \mathbf{f}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r}$$

se le llama función potencial de $\mathbf{f}$.

La función potencial solo puede recuperarse cuando un campo vectorial proviene de un gradiente; en caso contrario, no existe una función potencial que pueda obtenerse. Haciendo hincapié que $\mathbf{f} =$

$P\hat{\mathbf{i}} + Q\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}}$ es el gradiente ∇g, entonces

$$P(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$Q(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial y}$$
$$R(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial z}$$

Ejemplo. Para el campo vectorial conservativo

$$\mathbf{f}(x,y,z) = 2xy^2z^2\hat{\mathbf{i}} + 2x^2yz^2\hat{\mathbf{j}} + 2x^2y^2z\hat{\mathbf{k}}$$

¿cuál es su función potencial?

Las funciones componentes de $\mathbf{f}$ son las derivadas parciales de la función potencial g. Se puede comenzar con cualquiera de las tres componentes para recuperar g. Comenzando con $R(x,y,z)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial z} &= R(x,y,z)\\ &= 2x^2y^2z\end{aligned}$$

Al integrar respecto de z:

$$\begin{aligned}g(x,y,z) &= \int 2x^2y^2z\ dz\\ &= x^2y^2z^2 + a(x,y)\end{aligned}$$

Al derivar la función g respecto de z, toda función que solo dependa de x y y se convertirá en 0; de ahí que al integrar se obtenga la función $a(x,y)$.

Si ahora se deriva respecto a x:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy^2z^2 + a_x(x,y)$$

y se compara con la función P de $\mathbf{f}$,

$$2xy^2z^2 = 2xy^2z^2 + a_x(x,y)$$

se obtiene que la función $a_x(x,y)$ es igual a 0, por lo que al integrarla se obtendrá una función que solo dependa de y:

$$b(y) = \int a_x(x,y)\ dx$$

y la función potencial hasta ahora es

$$g(x,y,z) = x^2y^2z^2 + b(y)$$

Derivando respecto a y y comparando con la función Q,

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2x^2yz^2 + b_y(y) \quad \Rightarrow \quad Q(x,y,z) = 2x^2yz^2$$

se obtiene que $b_y(y) = 0$; por lo tanto, la integral de b_y es una constante. La función potencial del campo $\mathbf{f}$ es

$$g(x,y,z) = x^2y^2z^2 + c$$

2.1. Independencia de la Trayectoria

Para un campo conservativo la integral de línea se calcula como

$$I = \int_C \nabla g \cdot d\mathbf{r} \tag{5}$$

Pero por la diferencial exacta, (5) se reescribe como

$$\int_C dg = \int_C \nabla g \cdot d\mathbf{r}$$

$$\int_A^B dg =$$

$$g(B) - g(A) = \int_A^B \nabla g \cdot d\mathbf{r} \tag{6}$$

La expresión (6) implica que el resultado de la integral será la función potencial evaluada desde punto A hasta el punto B; es decir, independientemente de la trayectoria, el valor de la integral solo depende del punto inicial y del punto final.

Esta independencia permite calcular el valor de una integral a lo largo de una trayectoria cerrada.

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^A dg \\ &= g(A) - (A) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo. ¿Cuál es el valor de la integral

$$\oint_C x\ dx + y\ dy$$

sobre las trayectorias $C_1 :\ x^2 + y^2 = 1$ y $C_2 :\ x^2 + 4y^2 = 4$?

La curva C_1 parametrizada es

$$C_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \frac{1}{2}\pi \le t \le \frac{5}{2}\pi$$

y su derivada es $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\hat{\mathbf{i}} + \cos t\hat{\mathbf{j}}$. Entonces, la integral es

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t)\ dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} 0\ dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

El resultado es el esperado, pues el campo que se integra es conservativo y la trayectoria es cerrada.

En el caso de la curva C_2, su parametrización es

$$C_2 : \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \frac{1}{2}\pi \le t \le \frac{5}{2}\pi$$

de la cual su derivada es $\mathbf{r} = -4\sin t\hat{\mathbf{i}} + \cos t\hat{\mathbf{j}}$. La integral sobre la trayectoria 2 es

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} (-16 \sin t \cos t + \sin t \cos t)\ dt \\ &= -15 \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \sin t \cos t\ dt \\ &= -15 \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \\ &= \frac{15}{2}(1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

El resultado es el esperado.

Por último, mediante la función potencial del campo se evaluará en los puntos donde se cierran las trayectorias.

Cuando $t = \frac{1}{2}\pi$, en ambas trayectorias $x = 0$ y $y = 1$; mientras tanto en $t = \frac{5}{2}\pi$, las coordenadas del punto son $x = 0$ y $y = 1$.

Por lo que al evaluar la función potencial $g(x, y)$,

$$\begin{aligned} I &= \oint_C x\ dx + y\ dx \\ &= g(0,1) - g(0,1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se confirma que la integral de línea de un campo conservativo es independiente de la trayectoria.

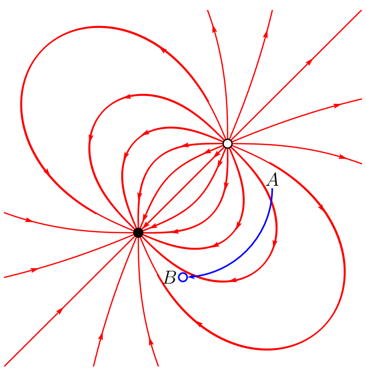

Figura 1. El campo eléctrico es un campo conservativo; la diferencia de potencial eléctrico es independiente de la trayectoria desde el punto A hasta el punto B, y se conoce como voltaje.

El concepto del campo conservativo concuerda con la Física. Tomando como ejemplo un campo eléctrico estático $\mathbf{E}$, el cálculo del trabajo que se requiere para mover una carga puntual entre dos puntos se conoce como la diferencia de potencial V_{AB} o voltaje (véase la figura 1). Es decir, el campo $\mathbf{E}$ es conservativo puesto que

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $q\mathbf{E}$ es igual a la fuerza $\mathbf{F}$ que el campo ejerce sobre una unidad de carga eléctrica q; el signo negativo indica que se pierde energía potencial, debido al sentido del campo de $(+)$ a $(-)$, y por tal razón es llamada caída de potencial. De tal forma que la relación entre el voltaje y el campo eléctrico es

$$-\nabla V = \mathbf{E}$$