Ecuaciones diferenciales de variables separables

Definición

Se dice que una ecuación diferencial de variables separables es aquella que tiene la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad o \quad \frac{f(x)}{g(y)} = \frac{dy}{dx}$$

debido a que es posible reescribirla como

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad o \quad f(x)dx = g(y)dy$$

Una vez que se encuentran separadas las "x" y las "y" se integran ambos lados de la igualdad

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \quad o \quad \int f(x)dx = \int g(y)dy$$

Resolver

- $sen(3x)dx + 2ycos^3(3x)dy = 0$
- $(1 + x)dy - ydx = 0$
- $e^x y\frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$
- $y' - (\sec(x)\tan(x))y = \frac{sen(x)}{cos^2(x)}$
- $(y - x)\frac{dx}{dy} = x$
- $\frac{dy}{dx} = sen^2(x - y)$

- $dy(xy - 2x + 4y - 8) - (xy + 3x - y - 3)dx$=0
- $(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} + 8xy = 2x$

1) Resolver el problema de valor inicial,

$$(x+2)senydx + xcosydy = 0; \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$$

2) Resolver la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = sen^2(x-y)$$

Ecuaciones diferenciales con coeficientes homogéneos

Funciones homogéneas

Las funciones homogéneas son aquellas funciones en las que todos los términos de la función son del mismo grado.

La forma de encontrar el grado de homogeneidad de una función es sustituir "x" por "tx" y "y" por "ty" para la función que se analiza.

Ejemplos

1. Determinar si la función $M(x,y) = x^2y + 8xy^2 - x^3 + y^3$ es de grado 3.

2. Determinar si la función $f(x,y) = \frac{x}{y}$ es homogénea e indicar el grado de homogeneidad.

3. Determinar si la función $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ es homogénea e indicar su grado de homogeneidad.

Ecuación diferencial homogénea

Una ecuación diferencial homogénea de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es homogénea si las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son del mismo grado de homogeneidad.

Una ecuación diferencial homogénea se transforma en una ecuación diferencial de variables separables al hacer el cambio de variable $y = ux$ ó $x = vy$.

Ejemplos

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$x^n y' = y - x.$$

Resolver la ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$$

Resolver la ecuación diferencial

$$xy^2dy = (y^3 + 2x^3)dx$$

Reolver los mismos ejercicios aplicando el cambio de variable $x = vy$.

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{xy}}$$

Ecuaciones diferenciales exactas

Una ecuación diferencial exacta es aqueda que procede de la diferencial total de una función conservativa.

¿Qué es una función conservativa?

No importa como cambien las variables, al final se obtiene una constante.

$$\boldsymbol{F(x, y) = C}$$

Teorema

Sea $M(x, y)$ y $N(x, y)$ funciones continuas con derivadas parciales de primer orden en un intervalo R. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es que sus derivadas parciales respectivas sean iguales; es decir,

$$\frac{\partial \boldsymbol{M(x, y)}}{\partial \boldsymbol{y}} = \frac{\partial \boldsymbol{N(x, y)}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

Ejemplos

Averiguar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas

- $xsenydx + ycosxdy = 0$
- $e^y dx + xe^y dy = 0$
- $(x + 3x^3seny)dx + x^4cosydy = 0$
- $2xy - (1 - x^2)dy = 0$

Ecuaciones diferenciales exactas

1) Identificar en la ecuación diferencial a $M(x,y)$ y $N(x,y)$.

2) Verificar si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son exactas con la condición de compatibilidad (teorema).

3) Elegir $M(x,y)$ ó $N(x,y)$, considerando en cada caso que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ y $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$, con la finalidad de obtener $F(x,y)$ integrando $M(x,y)$ con respecto de "x" ó $N(x,y)$ con respecto de "y", así entonces:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\partial x + g(y) \qquad a)$$

ó

$$F(x,y) = \int N(x,y)\partial y + h(x) \qquad b)$$

donde $g(y)$ y $h(x)$ son las constantes de integración.

4) El resultado se deriva con respecto a la variable que no fue integrada

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\partial x + g(y) \right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\partial x \right) + g'(y)$$

ó

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y)\,\partial y + h(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y)\,\partial y \right) + h'(x).$$

5) Considerando que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ y $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$, se iguala el nuevo resultado del paso 4 a $N(x,y)$ ó bien a $M(x,y)$, según sea el caso e integramos para poder obtener $g(y)$ ó $h(x)$.

6) Una vez que se obtiene $g(y)$ ó $h(x)$, se va a sustituir en el paso 3 (en la ecuación a ó b) y se cambia a $F(x,y)$ por una constante, C.

- Obtener la solución general de

$$2xydx - (1 - x^2)dy = 0$$

- Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - cosxsenx}{y(1 - x^2)}$$

- Obtener la solución general de

$$(x + 3x^3seny)dx + x^4cosydy = 0$$

Método del factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dy}$$

Resolver la siguiente ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ con la siguiente condición inicial $y(2) = 1$, utilizando el método del factor integrante.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

- $(e^y + e^{-x})dx + (e^y + 2ye^{-x})dy = 0$
- $(2y^2 + 3xy - 2y + 6x)dx + (x^2 + 2xy - x)dy = 0$

Resolver el siguiente problema de valor inicial

$$(1 + seny)dx = [2ycosy - x(secy + tany)]dy$$
$$y(0) = 1$$