Díaz Hernández Marcos Bryan Tarea Virtual: 04

• Describir la forma general y los tipos de ecuaciones de recurrencia.

Una ecuación de recurrencia es una regla que define el término general en función de los términos en función de elementos anteriores. A estos se les conoce como condiciones iniciales o condiciones frontera.

Definición: $\{a_n\} = \underline{a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}}$ para $n \geq n_0$ donde n es un entero positivo.
Una sucesión es una solución de una relación si sus términos satisfacen la relación para todo término positivo n.

La forma general está en función de n elementos - posiciones, donde los dos primeros elementos resultan ser condiciones para obtener una solución única, a partir de esto se obtienen los valores siguientes y se puede obtener una sucesión solución.

Tipos:

• Relación de recurrencia lineal de primer orden.

Para explicar es necesario utilizar un ejemplo: $\underline{a_{n+1} = 3a_n}$ $n \geq 0$ $\overbrace{a_0 = 5}^{\text{Valores frontera}}$

El valor actual a_{n+1} = depende del valor anterior a_n para $n \geq 0$ por lo tanto es una relación inmediata de primer orden, homogénea, con coeficientes constantes,

- homogénea: solo contiene valores múltiplos de a
- Constantes: porque 3 no depende de n y siempre es el mismo.

Caso general: $\underline{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}}$ donde $c_1 \ldots$ son constantes y $c_k \neq 0$

• Con orden k

• Relación de recurrencia lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

Para la ecuación anterior cuando $a_n = F(n) = 0$ para $n \geq 0$ la relación es homogénea y para este caso se busca en la relación de orden dos: $C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = 0$ para $n \geq 2$.

Se busca la solución $a_n = Cr^n$ donde r es una constante y C es una condición inicial.

Al substituir se obtiene:

$C_n Cr^n + C_{n-1} Cr^{n-1} + C_{n-2} Cr^{n-2} = 0 \longrightarrow \underline{C_n r^2 + C_{n-1} r + C_{n-2} = 0}$, es una ecuación cuadrática - característica.

• Relación de recurrencia no homogénea.

1) $a_n + c_{n-1} a_{n-1} = F(n)$ $n \geq 1$

2) $a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} = F(n)$ $n \geq 2$

donde c_{n-1} y c_{n-2} son constantes
$c_{n-1} \neq 0$ en 1)
$F(n) \neq 0$ por lo tanto no es homogénea.

Si $c_{n-1} = -1$ para $a_n - a_{n-1} = F(n)$ en 1)

$a_1 = a_0 + F(1)$

$a_2 = a_1 + F(2) = a_0 + F(1) + F(2)$

$a_3 = a_2 + F(3) = a_0 + F(2) + F(1) + F(3)$

⋮

$a_n = a_0 + F(1) + \dots + F(n) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} F(i)$ → solución general posible

• 2 ejemplos de recurrencia.

1) Determina si la sucesión $\{a_n\}$ es solución de la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n \geq 2$ $a_n = 3n$ para todo n positivo y para $a_n = 2^n$ y $a_n = 5$

• Si $a_n = 3n$ para n positivo, para $n \geq 2$ se tiene $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 3n = a_n$ ∴ es solución.

• Si $a_n = 2^n$ para n positivo $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ y $a_2 = 4$ ∴ $2a_1 - a_0 = 2 \cdot 2^n - 1 = 3 \neq a_2$ y $\{a_n\}$ no es solución.

• Si $a_n = 5$ para n positivo, para $n \geq 2$ se tiene que $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2 \cdot 5 - 5 = 5$ ∴ $\{a_n\}$ es solución.

2) Un banco paga un interés anual del 6% para cuentas de ahorros, con un interés compuesto mensual. Si Patricia deposita \$1000 el 1° de Mayo, ¿cuánto dinero tendrá depositado un año después?

• La tasa de interés anual es del 6%, y la mensual $6\%/12 = 0.5\% = 0.005$. $0 \leq n \leq 12$, sea p_n el valor del depósito de Patricia al final de n meses ∴ $p_{n+1} = p_n + 0.005 p_n$ donde $p_n\, 0.005$ es el interés obtenido sobre p_n durante el mes $n+1$ para $0 \leq n \leq 11$ y $p_0 = 1000$

Donde $p_{n+1} = (1.005) p_n$ y $p_0 = 1000 \longrightarrow p_n = p_0 (1.005)^n = 1000(1.005)^n$

$p_n = (1000)(1.005)^{12} = 1061.68$ \$

3) Resuelva la relación de recurrencia: $a_{n+2} - 4a_{n+1} = -3a_n - 200$, $n \geq 0$ $a_0 = 3000$ $a_1 = 3300$

- $a_n^h = c_1(3^n) + c_2(1^n) = c_1(3^n) + c_2$ como $f(n) = -200 = -200(1)^n$ es una solución para $a_n^p = An$ para alguna constante A:

$A(n+2) - 4A(n+1) + 3An = -200$ y $-2A = -200$ $A = 100$.

∴ $a_n = c_1(3^n) + c_2 + 100n$. Con $a_0 = 3000$ y $a_1 = 3000 + 300$, y queda:

$a_n = 100(3^n) + 2900 + 100n$, $n \geq 0$.

- Aplicaciones.

- Análisis de ecuaciones de recurrencia para sistemas discretos
- Aplicado a modelos macroeconómicos
- Análisis de algoritmos recursivos
- Análisis de algoritmos de búsqueda

Referencias:

- Grimaldi, R. "Matemáticas discretas y combinatorias". (1997). México: Editorial Addison-Wesly Iberoamericana
- Rosen K, (2004). "Matemática discreta y sus aplicaciones" Colombia: Mc Graw-Hill.