Cálculo Vectorial
Lectura 29: Teorema de Green

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

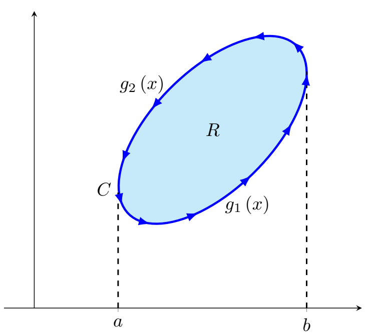

Figura 1. Región de tipo I limitada por una trayectoria cerrada formada por dos curvas.

Una región regular siempre está delimitada por una frontera que es una curva suave, o bien suave seccionada, cerrada. Es decir, toda trayectoria cerrada delimita a una región. Esta aseveración indica que existe una relación entre la integral de línea, que recorre una trayectoria cerrada, y la integral doble, que utiliza la región interior a la trayectoria. La figura 1 muestra este concepto.

La integral de línea del campo

$$\mathbf{f}(x,y) = P(x,y)\,\hat{\mathbf{i}} + Q(x,y)\,\hat{\mathbf{j}}$$

sobre la trayectoria (frontera de la región) ilustrada de la figura 1 se puede calcula como

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Por la propiedad de linealidad en la integral, la suma del integrando puede separarse:

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \oint_C P(x,y)\,dx + \oint_C Q(x,y)\,dy \tag{1}$$

Primero se calculará la integral de la diferencial dx, lo cual indica que el intervalo de integración debe ser sobre x. La trayectoria C puede seccionarse en dos tramos: el definido por la función $y = g_1(x)$ en el intervalo $a \le x \le b$, y el correspondiente a la función $y = g_2(x)$ en $b \le x \le a$. Es decir, el primer sumando de (1) se calcula como

$$\begin{aligned}\oint_C P(x,y)\,dx &= \int_{g_1} P(x,y)\,dx + \int_{g_2} P(x,y)\,dx \\ &= \int_a^b P(x,g_1)\,dx + \int_b^a P(x,g_2)\,dx \end{aligned}\tag{2}$$

La expresión (2) tiene el mismo intervalo de integración, solo que cada integral lo recorre en diferente sentido. Para evitar esto, se debe multiplicar por -1 e invertir el intervalo en una de las integrales para tener una sola integral:

$$\oint_C P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x,g_1)\,dx + \int_b^a P(x,g_2)\,dx$$

$$\begin{aligned}\oint_C P(x,y)\,dx &= \int_a^b P(x,g_1)\,dx - \int_a^b P(x,g_2)\,dx \\ &= \int_a^b -P(x,g_2)\,dx + \int_b^a P(x,g_1)\,dx \\ &= -\int_a^b P(x,g_2) - P(x,g_1)\,dx \qquad (3)\end{aligned}$$

La integral (3) está siendo evaluada en y por las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$; es decir, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Esto indica que la expresión (3) viene de resolver una integral reiterada en y; como este tipo de integrales es una antiderivada parcial, entonces se obtiene

$$\begin{aligned}\oint_C P(x,y)\,dx &= -\int_a^b P(x,g_2) - P(x,g_1)\,dx \\ &= -\int_a^b P(x,y)\Big|_{g_1}^{g_2} dx \\ &= -\int_a^b \int_{g_1}^{g_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx \\ \oint_C P(x,y)\,dx &= -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \qquad (4)\end{aligned}$$

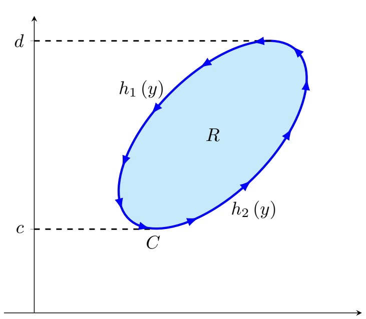

Figura 2. Región de la figura 1, pero considerada como tipo II.

Para calcular el segundo sumando de (1) se aplicará un proceso similar al descrito anteriormente, solo que en esta ocasión se tomará al intervalo de integración en términos de y como se muestra en la figura (2). En consecuencia, la trayectoria está definida en los siguientes segmentos: el intervalo $c \leq y \leq d$ define el sentido de la trayectoria $x = h_2(y)$, en tanto que se establece el intervalo $d \leq y \leq c$ para la curva $x = h_1(x)$. Por lo tanto, la integral para la diferencial dy es

$$\begin{aligned}\oint_C Q(x,y)\,dy &= \int_{h_2} Q(x,y)\,dy + \int_{h_1} Q(x,y)\,dy \\ &= \int_c^d Q(h_2,y)\,dy + \int_d^c Q(h_1,y)\,dy \\ &= \int_c^d Q(h_2,y)\,dy - \int_c^d Q(h_1,y)\,dy \\ &= \int_c^d Q(h_2,y) - Q(h_1,y)\,dy \\ &= \int_c^d Q(x,y)\Big|_{h_1}^{h_2} dy \\ &= \int_c^d \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \\ \oint_C Q(x,y)\,dy &= \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA \qquad (5)\end{aligned}$$

Al sustituir (4) y (5) en la integral (1) se obtiene

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

que es el llamado teorema de Green.

Sea R una región que puede trabajarse indistintamente como de tipo I o II, y que está delimitada por la curva seccionalmente suave C. Al recorrer la frontera C en sentido antihorario, la integral de línea del campo $\mathbf{f}(x,y) = P(x,y)\,\hat{\mathbf{i}} + Q(x,y)\,\hat{\mathbf{j}}$ se calcula como

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

El teorema de Green es útil para calcular integrales dobles (áreas, volúmenes, momentos, de funciones en general) mediante integrales de línea, y viceversa. Solo hay que tomar en cuenta que la integral de línea debe ser cerrada, pues así rodearía a una región. Nótese que si el campo a integrar es conservativo entonces la integral doble se anula:

$$\begin{aligned} &= \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\ dA \\ 0 &= \iint_R 0\ dA \end{aligned}$$

Ejemplo. Mediante el teorema de Green calcule el trabajo que realiza el campo

$$\mathbf{f}\left(x,y\right) = \left(y^2 - 6y\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(x+10\right)\hat{\mathbf{j}} \qquad [N]$$

a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura 3.

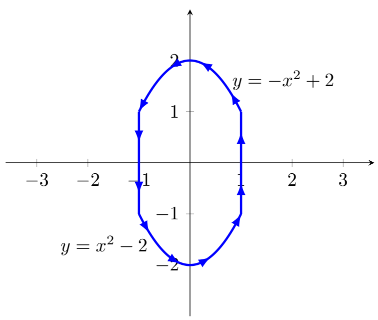

Figura 3

El cálculo de la integral de línea sobre la trayectoria mostrada en la figura 3 se vuelve largo, pues hay que calcular cuatro integrales (una por cada curva de la trayectoria). Pero el aplicar el teorema de Green solo se calcula una integral doble.

La región se trabajará como de tipo I, donde los intervalos de integración son $-1 \leq x \leq 1$ y $x^2 - 2 \leq y \leq -x^2 + 2$.

Para el integrando

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 - 6y\right) & \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x+10\right) \\ &= 2y - 6 & &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (2y - 6)$$

Por lo que la integral es

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-2}^{-x^2+2} 7 - 2y\ dy\ dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left[7y - y^2\right]_{x^2-2}^{-x^2+2} dx \\ &= \int_{-1}^{1} -14x^2 + 28\ dx \\ &= 14\left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{140}{3} \end{aligned}$$

Por lo que el trabajo es $W = \dfrac{140}{3}\ [J]$.

Para calcular la integral doble de la función $f\left(x,y\right)$, por medio del teorema de Green, se requiere calcular las componentes P y Q del campo vectorial mediante las derivadas parciales:

$$f\left(x,y\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Aquí se presentan varios casos: se contempla que $f\left(x,y\right) = Q_x$, $f\left(x,y\right) = -P_y$, o f se separa en dos sumandos (uno para cada derivada parcial).

Ejemplo. Calcule el área interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

Como se ha comentado anteriormente, calcular el área por integral doble equivale a integrar la función $f(x, y) = 1$. Por lo tanto, el integrando puede trabajarse como

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \\ 1 &= 1 - 0 \end{aligned}$$

donde $Q_x = 1$ y $P_y = 0$. Las funciones P y Q se calculan a partir de integración en la respectiva variable de derivación parcial:

$$\begin{aligned} Q_x &= 1 & P_y &= 0 \\ \int Q_x\ dx &= \int dx & \int P_y\ dy &= \int 0 dx \\ Q &= x + c_1 & P &= c_2 \end{aligned}$$

Las constantes c_1 y c_2 pueden asignarse de manera arbitraria, pues al derivarse para satisfacer la condición $f(x, y) = Q_x - P_y$ se anulan. En este caso se asumirá que tanto c_1 como c_2 son iguales a 0. La integral de línea a calcular es

$$\begin{aligned} \iint_R dA &= \oint_C P\ dx + Q\ dy \\ &= \oint_C x\ dy \end{aligned}$$

Ahora la curva debe parametrizarse para calcular la integral.

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$$

Por lo que la diferencial de trayectoria es

$$\begin{cases} x = 3\cos t & \Rightarrow \quad dx = -3\sin t\ dt \\ y = 3\sin t & \Rightarrow \quad dy = 3\cos t\ dt \end{cases}$$

donde el parámetro varía en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$. La integral de línea a calcular es

$$\begin{aligned} \oint_C x\ dy &= \int_0^{2\pi} (3\cos t)(3\cos t)\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} 9\cos^2 t\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} 9\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right)\ dt \\ &= 9\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

El área resultante es $A = 9\pi\ [u^2]$.

Como se comentó, la forma de calcular las funciones P y Q para la integral de línea mediante el teorema de Green es cambiante. Un ejemplo más extenso es cuando se desea integrar la función $f(x, y) = 3x^2 + 2y - x$. Para asignar las funciones se puede plantear

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2 + 2y - x \\ &= \left(3x^2\right) - (-2y + x) \end{aligned}$$

donde $P_y = -2y + x$ y $Q_x = 3x^2$. También es válido

$$f(x,y) = \left(3x^2 + 2y\right) - (x)$$

donde $P_y = x$ y $Q_x = 3x^2+2y$. Así como estos dos, existe una infinidad de casos para calcular las componentes del campo a integrar.