# TEMA I Teoría de la Probabilidad

Objetivo: El alumno evaluará probabilidades utilizando axiomas y teoremas de la probabilidad, técnicas de conteo y diagramas de árbol.



#### Teoría de la Probabilidad

- I.I Concepto de probabilidad.
- 1.2 Principio fundamental de conteo, análisis combinatorio, teoría de conjuntos.
- 1.3 Experimento aleatorio y determinista.
- **1.4** Espacio muestral.
- 1.5 Eventos y su clasificación.
- 1.6 Enfoques, interpretaciones, escuelas de la probabilidad.
- 1.7 Axiomas y teoremas básicos.
- **1.8** Probabilidad condicional.
- 1.9 Probabilidad de eventos independientes.
- **1.10** Probabilidad total.
- I.II Teorema de Bayes.



## ANTES DE COMENZAR

Expresiones que debemos manejar a la perfección y nunca más volver a preguntar:

Por arriba del valor	Por debajo del valor
-Al menos	-A lo sumo
-Por lo menos	-Como máximo
-A lo menos	-Cuando mucho
-Como mínimo	
-Cuando menos	
Se necesitan 3, 4 o más	Se necesitan 0, 1 o 2
alumnos para competir en un	respuestas erróneas para
concurso.	aprobar el examen.



# 1.1 Concepto de Probabilidad

Un poco de historia...







Siglo XVII Fetmat y **Pascal** 

Siglo XIX Gauss con la teoría de errores Laplace con el TLC Mendel con la genética



Cristo Sumerios

Antes de

- Egipcios
- Romanos
- Griegos











Siglo XVI Gerolamo Cardano con su libro de los juegos de azar



CHANCES: o R, \( \Delta \) Method of Calculating the Probability
of Events in Play.



Siglo XVII Bernoulli con la distribución binomial De Moivre con el TLC

Siglo XX Kolmogorov con la definición axiomática



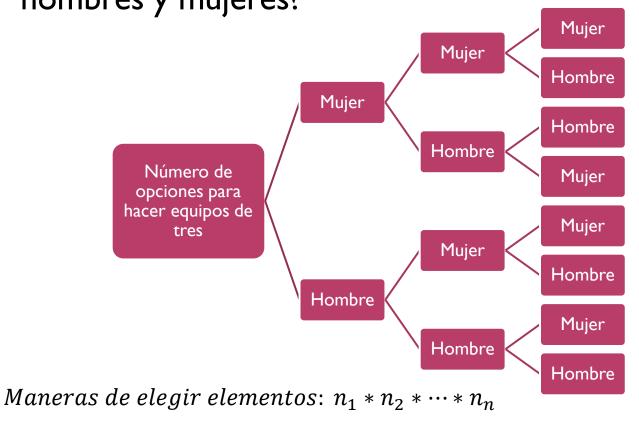
# 1.1 Concepto de Probabilidad

- Probabilitas
- Probare "comprobar"
- ▶ −bilis "posibilidad"
- –tat–"cualidad"

- La probabilidad es la posibilidad que existe entre varias opciones, que un hecho o condición se produzcan.
- La Probabilidad es la mayor o menor posibilidad de que ocurra un determinado suceso.
- Medición de la ocurrencia de un evento

# 1.2 Principio Fundamental del conteo

¿De cuántas formas se puede hacer un equipo de 3 personas en el grupo si solo nos interesa separar entre hombres y mujeres?





## 1.2 Principio Fundamental del conteo

# EJEMPLO I

¿De cuántas formas se puede pedir un helado de dos bolas cuando se tienen 8 posibles sabores?

¿Y sin repetir el sabor?

## EJEMPLO 2

En una clínica médica se tienen tres especialistas en medicina interna y tres médicos generales, ¿cuántas formas existen de seleccionar un doctor de cada tipo para un turno en específico?



### 1.2 Análisis combinatorio

## EJEMPLO 3

Una firma de transporte tiene un contrato para enviar una carga de mercancías de la ciudad W a la ciudad Z. No hay rutas directas que enlacen W con Z, pero hay 6 carreteras de W a X y 5 de X a Z. ¿Cuántas rutas en total se deben considerar?

## EJEMPLO 4

Considérese que se desea obtener el número de placas de identificación que se pueden generar si las placas tienen 4 dígitos y no se permite repetición. ¿De cuántas formas se puede hacer este arreglo?



### 1.2 Análisis combinatorio

- Permutaciones: subconjunto ordenado
- ▶ El número de permutaciones de *r* objetos tomados de un conjunto de *n* objetos distintos es

$$_{n}P_{r} = P \quad _{n}^{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

## 1.2 Análisis combinatorio

## EJEMPLO 5

De las 16 bolas de billar, ¿de cuántas formas podemos elegir 4 bolas?

## EJEMPLO 6

Si hay nueve autos en una carrera, ¿en cuántas formas diferentes pueden ocupar el primero, segundo y tercer lugar?



## 1.2 Análisis combinatorio

# EJEMPLO 7

En forma casual, un químico combinó dos sustancias de laboratorio que produjeron un producto conveniente. Desafortunadamente, su asistente no registró los nombres de los ingredientes. Hay cuarenta sustancias disponibles en el laboratorio, y puesto que se empleó un catalizador conocido, el orden en el que se mezclan los ingredientes es importante. ¿Cuál es el número máximo de pruebas que podrían efectuarse?



### 1.2 Análisis combinatorio

Permutaciones con repetición

Si se seleccionan **k** objetos de un conjunto de **n** elementos que se pueden repetir, las formas distintas de efectuar la selección son:

$$_{n}PR_{k}=n^{k}$$



## 1.2 Análisis combinatorio

# **EJEMPLO 8**

¿Cuántas placas para automóviles se pueden generar si se requieren 3 números y 3 letras?



## 1.2 Análisis combinatorio

## EJEMPLO 9

Beethoven escribió 9 sinfonías y Mozart 27 conciertos para piano. Si el locutor de una estación de radio desea tocar dos sinfonías de Beethoven y dos conciertos de Mozart. ¿De cuántas maneras puede hacerlo? Considere que no se pueden repetir.

El Gerente de la radiodifusora determina que en cada noche sucesiva (7 días por semana), se transmitirá una sinfonía de Beethoven, seguida de un concierto para piano de Mozart y después un cuarteto para cuerdas de Schubert (de los cuáles hay 15), ¿Durante cuántos años podría continuar este sistema antes de que tenga que repetirse el mismo programa?



## 1.2 Análisis combinatorio

#### Combinaciones

Cuando el orden de los elementos no importa, el número de combinaciones posibles de k elementos a elegir de un conjunto de n elementos se calcula:

$$_{n}C_{k} = C_{k}^{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



## 1.2 Análisis combinatorio

## ▶ EJEMPLO 10

Se hará una rifa de 5 regalos sorpresa en una fiesta de 20 invitados. ¿De cuántas maneras se pueden elegir a los 5 ganadores?

- a) Considere que los 5 regalos son iguales
- b) Considere que los 5 regalos son diferentes



## 1.2 Análisis combinatorio

# EJEMPLO I I

Se inspecciona un lote de 140 chips mediante la selección de una muestra de cinco de ellos. Suponga que 10 chips no cumplen con los requerimientos del cliente.

- a) ¿Cuál es el número de muestras distintas posibles?
- b) ¿Cuántas muestras de cinco contienen exactamente un chip que no cumple con los requerimientos?
- c) ¿Cuántas muestras de cinco contienen al menos un chip que no cumple con los requerimientos?



# TEMA I 1.2 Análisis combinatorio

# EJEMPLO 12

El gerente de una pequeña planta desea determinar el número de maneras en que puede asignar trabajadores al primer turno. Cuenta con 15 hombres que pueden servir como operadores del equipo de producción, 8 que pueden desempeñarse como personal de mantenimiento y 4 que pueden ser supervisores. Si el turno requiere de 6 operadores, 2 trabajadores de mantenimiento y l supervisor, ¿de cuántas maneras puede integrarse el primer turno?



## 1.2 Análisis combinatorio

## EJEMPLO 13

Una compañía tiene 10 programadores, ocho analistas de sistemas, cuatro ingenieros en sistemas y tres estadísticos. Se elegirá un "equipo" para un nuevo proyecto de largo plazo. El equipo consistirá en tres programadores, dos analistas de sistemas, dos ingenieros en sistemas y un estadístico.

- a) ¿En cuántas formas puede seleccionarse el equipo?
- b) Si el cliente insiste en que se incluya en el proyecto a un ingeniero con el que ha trabajado anteriormente, ¿de cuántas maneras puede seleccionarse al equipo?



# TEMA I 1.2 Teoría de conjuntos

- Complemento
- Unión
- Intersección
- Eventos mutuamente excluyentes
- Eventos colectivamente exhaustivos

# 1.2 Teoría de conjuntos

## EJEMPLO 14

Suponga que un vehículo que toma una salida particular de una autopista puede virar a la derecha (D), virar a la izquierda (I) o continuar de frente (F). Analice las direcciones posibles que pueden tomar tres autos sucesivos.

- A) Elabore una lista de todos los resultados en el evento A en el que los vehículos van en la misma dirección.
- B) Elabore una lista de todos los resultados en el evento B en el que los vehículos van en direcciones diferentes.
- C) Elabore una lista de todos los resultados en el evento C en el que exactamente dos vehículos dan vuelta a la derecha.



# 1.2 Teoría de conjuntos

## EJEMPLO 15

Use Diagramas de Venn para las dos siguientes relaciones para los eventos A y B. (Estas se conocen como Leyes de De Morgan).

a) 
$$(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$$

# 1.2 Teoría de conjuntos

## EJEMPLO 16

Un experimento consiste en lanzar un par de dados, uno verde y uno rojo y registrar los números que resultan. Sea el resultado del dado verde y del dado rojo, listar los elementos que corresponden a los siguientes eventos.

- a) A, en el que la suma sea mayor que 8.
- b) B, en el que ocurra un dos en cualquiera de los dados.
- c) C, en el que se obtiene un número mayor de 4 en el dado verde.
- d)  $A \cap B$
- e)  $B \cap C$
- f)  $A \cap C$

#### Teoría de la Probabilidad

## Ejemplo Extra

Sea  $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$  y  $A = \{2,3,4\}, B = \{3,4,5\},$   $C = \{5,6,7\}$ , listar los elementos de los conjuntos correspondientes:

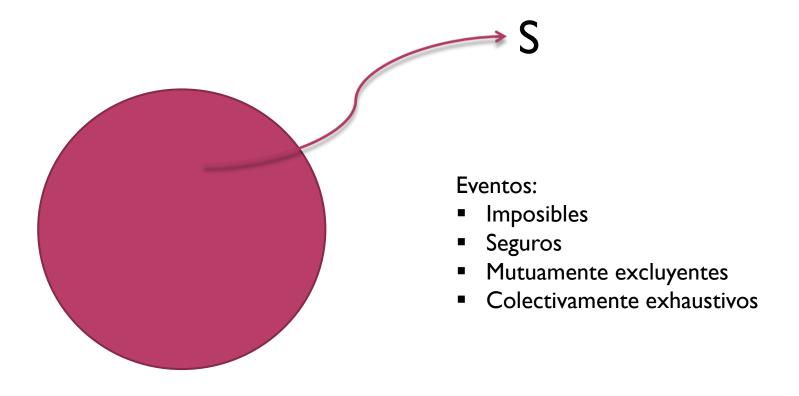
- a)  $\bar{A} \cap B$
- b)  $\bar{A} \cup B$
- c)  $\overline{A} \cap \overline{B}$
- d)  $\overline{A \cap (B \cap C)}$
- e)  $A \cap (B \cup C)$

# 1.3 Experimento





# 1.4-1.5 Espacio muestral y eventos



# 1.4-1.5 Espacio muestral y eventos

# EJEMPLO 17

Describir el espacio muestra de cada uno de los siguientes experimentos.

- Se lanzan dos monedas para observar el número de veces que ambas caen en águila.
- b) Se lanzan dos dados para observar cuántas veces la suma de los resultados es mayor a 7.



# 1.4-1.5 Espacio muestral y eventos

## EJEMPLO 18

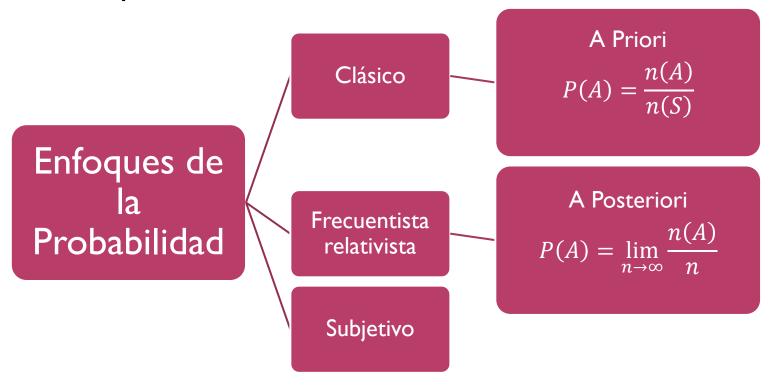
Describir el espacio muestra de cada uno de los siguientes experimentos.

- Un lote de 120 tapas de baterías para celdas de marca pasos contiene varias defectuosas debido a un problema con el material de barrera que se aplica en el sistema de alimentación. Se seleccionan tres tapas al azar (sin reemplazo) y se inspeccionan con cuidado.
- b) Una paleta de 10 piezas fundidas contiene una unidad defectuosa y nueve en buen estado. Se seleccionan cuatro piezas al azar (sin reemplazo) y se inspeccionan.



# TEMA I 1.6 Enfoques, interpretaciones, escuelas de la probabilidad

▶ Enfoques de la Probabilidad



\*También llamadas escuelas



# 1.7 Axiomas y teoremas básicos.

#### Definición axiomática de la Probabilidad

Dados un evento A en un espacio muestral S, la probabilidad de ocurrencia del evento A se denota por P(A) y tiene las siguientes propiedades:

- I. Es un número no negativo:  $P(A) \ge 0$
- 2. La probabilidad del espacio muestral es la unidad: P(S) = 1
- 3. Si  $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$  son eventos que se excluyen mutuamente en S, entonces la probabilidad de la unión de los eventos es igual a la suma de sus probabilidades.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



# 1.7 Axiomas y teoremas básicos.

## EJEMPLO 19

Si se tira un dado al aire, determinar la probabilidad de obtener:

- a) Un número par
- b) Un número divisible entre tres

¿Qué enfoque se utilizó para resolver este ejemplo?



# 1.7 Axiomas y teoremas básicos.

## EJEMPLO 20

Los empleados de la compañía "Nuevo Horizonte" se encuentran separados en tres divisiones: administración, operación de planta y ventas. La siguiente tabla muestra el número de empleados en cada división clasificados por sexo:

	Mujeres	Hombres	Total
Administración (A)	20	30	50
Operación de planta (O)	60	140	200
Ventas (V)	100	50	150
Total	180	220	400

# 1.7 Axiomas y teoremas básicos.

#### EJEMPLO 20

	Mujeres	Hombres	Total
Administración (A)	20	30	50
Operación de planta (O)	60	140	200
Ventas (V)	100	50	150
Total	180	220	400

- a) Utilizar un diagrama de Venn para ilustrar los eventos y para todos los empleados de la compañía. ¿Son mutuamente excluyentes?
- b) Si se elige aleatoriamente un empleado:

¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en ventas?

¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y trabaje en la división de administración?



# 1.7 Axiomas y teoremas básicos.

# Teoremas elementales de la Probabilidad

- 1.  $P(\emptyset) = 0$
- 2. Si  $\bf A$  es un evento cualquiera, entonces  $\overline{\bf A}$  también lo es, y su probabilidad es:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

3. Sean **A** y **B** dos eventos cualquiera  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 

# 1.7 Axiomas y teoremas básicos.

# EJEMPLO 21

Sean los eventos A y B, correspondientes a un mismo espacio muestral, tales que  $P(\bar{A}) = 0.6$ ,  $P(\bar{B}) = 0.6$  y  $P(A \cap B) = 0.2$ . Calcular  $P(A \cup B)$ 

Sean los eventos A y B correspondientes a un mismo espacio muestral, tales que  $P(\overline{A \cup B}) = 0.2$ ,  $P(\overline{A}) = 0.2$  y  $P(A \cap B) = 0.2$ , calcule la probabilidad de los eventos A y B

# 1.7 Axiomas y teoremas básicos.

## EJEMPLO 22

Una placa de metal tiene 20 tornillos y 5 de ellos no están bien apretados. Si se elige inspeccionar 4 de ellos al azar...

- a) ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro tornillos estén bien apretados?
- ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos no esté bien apretado?



## 1.7 Axiomas y teoremas básicos.

## **EJEMPLO 23**

La ruta utilizada por cierto automovilista para ir al trabajo tiene dos cruceros con semáforo. La probabilidad de que pare en el primer semáforo es de 0.4, la probabilidad análoga para el segundo semáforo es 0.5, y la probabilidad de que se detenga por lo menos en uno de los semáforos es 0.6. Determinar la probabilidad de que:

- a) Se detenga en ambos semáforos.
- b) Se detenga en el primero, pero no en el segundo.
- c) Se detenga exactamente en uno de ellos.



## 1.7 Axiomas y teoremas básicos.

## EJEMPLO 24

La probabilidad de que una industria transnacional se ubique en México es de 0.7; de que se localice en Brasil, de 0.4, y de que se encuentre ya sea en Brasil, México, o en ambas, es de 0.8. Determinar la probabilidad de que la industria se localice en:

- a) ambas ciudades,
- b) ninguna de las ciudades.



## 1.7 Axiomas y teoremas básicos.

## EJEMPLO 25

A continuación se presenta un resumen de la información obtenida de una muestra de 200 partes maquinadas

Condición de la arista	Barrenado mayor del necesario	Barrenado menor del necesario
Burda	15	10
Moderada	25	20
Sueva	60	70



## 1.7 Axiomas y teoremas básicos.

### **EJEMPLO 25**

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la parte seleccionada tenga una condición moderada en la arista y una profundidad de barrenado menor que la requerida?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la parte seleccionada tenga una condición moderada en la arista o una profundidad de barrenado menor que la requerida?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que la parte seleccionada no tenga una condición moderada en la arista o que no tenga una profundidad de barrenado menor que la requerida?
- d) Construir un diagrama de Venn que represente los eventos de este espacio muestral.



#### 1.8 Probabilidad Condicional

#### PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad condicional de un evento A dado que ya ocurrió un evento B está dad por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



#### 1.8 Probabilidad Condicional

## EJEMPLO 26

Dados dos eventos A y B tales que P(A)=0.5, P(B)=0.3 y  $P(A\cap B)=0.1$ , obtener:

- a) P(A|B)
- b) P(B|A)
- c)  $P(A \cap B | A \cup B)$

### 1.8 Probabilidad Condicional

## EJEMPLO 27

Una compañía de transporte cuenta con un grupo de camiones movidos por gasolina y por gasoil, lleva registros anuales de las reparaciones generales de los motores. En la tabla siguiente se representan la cantidad de kilómetros recorridos por un camión antes de tener que ser sometido a la revisión necesaria para cada tipo de vehículo.



#### 1.8 Probabilidad Condicional

#### EJEMPLO 27

#### KILÓMETROS RECORRIDOS POR UN VEHÍCULO ANTES DE SU REVISIÓN

Kilómetros recorridos	Vehículos con		Tota1
	Motor de Gasolina	Motor de Gasoil	
020.000	36	11	47
20.00140.000	58	55	113
40.001 o más	12	23	35
Total	106	89	195

Tabla 3.1.Distribución de frecuencias.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo de gasoil haya tenido un recorrido mayor a 40.000 km, antes de ser reparado?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo de gasolina haya tenido un recorrido mayor a 40.000 km, antes de ser reparado?
- c) Concluye, ¿qué tipo de camión le conviene más a la empresa?

### 1.8 Probabilidad Condicional

### EJEMPLO 28

Las enfermedades I y II son comunes entre la gente de cierta población. Se supone que el 10% de la población contraerá la enfermedad I alguna vez en su vida, I 5% contraerá eventualmente la enfermedad II; y 3% contraerá ambas.

- a) Determinar la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población contraiga al menos una de las enfermedades.
- b) Obtener la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población contraiga ambas enfermedades, dado que él o ella haya contraído al menos una de ellas.



## INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Dos eventos A y B son estadísticamente independientes si y sólo si se cumple:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) = P(A_1) * P(A_2) * \dots * P(A_n)$$

Por lo que P(A|B)=P(A)



EJEMPLO 29

Considerar un sistema de 4 componentes idénticos conectados en serie como se muestra.



Se sabe que la probabilidad que uno de los componentes falle es 0.14.¿Cuál es la probabilidad de que no falle el sistema?



## EJEMPLO 30

Un sistema contiene tres componentes, A, B y C. Éstos pueden conectarse en cualquiera de las cuatro configuraciones mostradas a continuación. Si los tres componentes operan de manera independiente y si la probabilidad de que cualquiera de ellos esté funcionando es de 0.95, determinar la probabilidad de que el sistema funcione para cada una de las cuatro configuraciones.



## EJEMPLO 31

Supóngase que las proporciones de fenotipos sanguíneos en determinada población son como se indica a continuación

A	В	AB	0
0.42	0.10	0.04	0.44

Si los fenotipos de dos individuos seleccionados al azar son independientes entre sí,

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos fenotipos sean O?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que los fenotipos de dos individuos elegidos al azar sean iguales?



#### 1.10 Probabilidad total

#### PROBABILIDAD TOTAL

Sean los eventos  $B_1, B_2, ..., B_k$  una partición exhaustiva y mutuamente excluyente del espacio muestral S, de tal forma que  $P(B_i) \neq 0$  para i = 1, 2, ..., k entonces cualquier evento A en S:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=i}^{k} P(B_i) * P(A|B_i)$$



#### 1.10 Probabilidad total

### EJEMPLO 32

Una caja contiene 9000 componentes de los cuales 5% son defectuosos, una segunda caja contiene 7000 componentes de los cuales 40% son defectuosos. Existen otras 2 cajas con 6000 componentes cada una y 10% de defectuosos.

Si se selecciona aleatoriamente una caja, y de ella un componente, ¿cuál es la probabilidad de que el componente seleccionada sea defectuoso?

Si se vacían todos los componentes en una sola caja, y se selecciona aleatoriamente un componente, ¿cuál es la probabilidad de que el componente seleccionado sea defectuoso?



### 1.10 Probabilidad total

#### EJEMPLO 33

En el área de mecánica de los suelos se usa el término licuación de arena para designar el fenómeno en que una arena saturada pierde súbitamente su capacidad de carga al estar sometida a solicitaciones dinámicas como las generadas en los sismos. Este fenómeno puede ocasionar daños a las estructuras cimentadas en la arena. Por simplicidad, suponga que la intensidad de los sismos se clasifican en baja (B), moderada (M) y alta (A) y que la probabilidad de licuación para esas condiciones es 0.05, 0.20 y 0.90; además, la probabilidad anual de ocurrencia para sismos de esa intensidad es 0.90, 0.09 y 0.01

- a) Determinar la probabilidad de licuación de arena el siguiente sismo.
- b) Si la ocurrencia entre sismos es independiente, determinar la probabilidad que no haya licuación en los tres sismos próximos.



## 1.11 Teorema de Bayes

#### TEOREMA DE BAYES

Sean los eventos  $B_1, B_2, B_3, ..., B_k$  una partición exhaustiva y mutuamente excluyente del espacio muestral S, de tal forma que  $P(B_i) \neq 0$  para i = 1,2,3,...,k, entonces para cualquier evento A en S tal que  $P(A) \neq 0$  se tiene:

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r) * P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i) * P(A|B_i)}$$



## 1.11 Teorema de Bayes

## EJEMPLO 34

Tres máquinas denominadas A, B y C, producen un 43%, 26% y 31% de la producción total de una empresa respectivamente, se ha detectado que un 8%, 2% y 1.6% del producto manufacturado por estas máquinas es defectuoso.

- a. Si se selecciona un producto al azar y se encuentra que es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el producto haya sido fabricado en la máquina B?
- b. Si el producto seleccionado resulta que no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en la máquina C?



## 1.11 Teorema de Bayes

## EJEMPLO 35

Según la Publicación Num3ragua 2016 de la Comisión Nacional del Agua, en 2015 la cobertura de agua potable en todo el país fue del 92.5% de la población, de dónde el 95.7% fue en área urbana y el 81.6% era rural.

Según estos números, ¿Qué porcentaje de población se encontraba en el área rural y qué porcentaje en el área urbana en 2015?



## 1.11 Teorema de Bayes

## EJEMPLO 36

Un médico cirujano se especializa en cirugías estéticas. Entre sus pacientes, el 20% se realizan correcciones faciales, un 35% implantes mamarios y el restante en otras cirugías correctivas. Se sabe además, que son de genero masculino el 25% de los que se realizan correcciones faciales, 15% implantes mamarios y 40% otras cirugías correctivas. Si se selecciona un paciente al azar, determine:

- a. La probabilidad de que sea de género masculino
- b. Si resulta que es de género masculino, determine la probabilidad que se haya realizado una cirugía de implantes mamarios.



## 1.11 Teorema de Bayes

### EJEMPLO 37

Setenta por ciento de los aviones ligeros que desaparecen en vuelo en cierto país en vías de desarrollo son descubiertos posteriormente. De las naves descubiertas, el 60% tenían un localizador de emergencia, mientras que el 90% de los no descubiertos lo tenía. Suponer que desaparece un avión ligero

- a) Calcular la probabilidad de el avión tenga localizador.
- b) Si tiene localizador de emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que no sea localizado?
- c) Si no tiene localizador, ¿cuál es la probabilidad de que sea localizado?

