Cálculo Vectorial

Lectura 12: Vector Normal a la Superficie

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero de 2020

1. Superficies

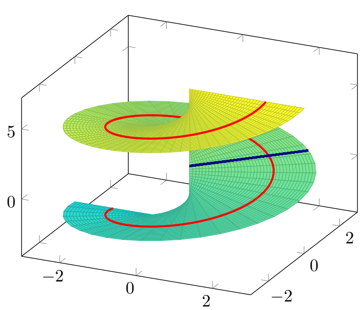

Figura 1. Toda superficie se genera mediante una curva directriz (en rojo) y una generatriz (en azul). Ambas curvas pueden intercambiar papeles.

Las curvas son lugares geométricos que satisfacen una ecuación vectorial que depende de un parámetro, pues solo existe una dirección que cambia conforme avanza el parámetro. Esta característica de las curvas permite generar a las superficies, las cuales estarán compuestas por dos de ellas: una curva generatriz y al menos una curva directriz, como se muestra en la figura 1.

Al generar una superficie la curva generatriz se desplaza siguiendo la directriz, de tal manera que toda superficie es una colección continua e infinita de curvas. Esta característica permite denotar a la superficie como el lugar geométrico que posee dos parámetros: uno que pertenece a la directriz y otro a la generatriz.

Una superficie es el lugar geométrico que satisface una ecuación vectorial dependiente de dos variables:

$$\mathbf{r}\left(u,v\right)=f_1\left(u,v\right)\hat{\mathbf{i}}+f_2\left(u,v\right)\hat{\mathbf{j}}+f_3\left(u,v\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Ya que la ecuación vectorial de una superficie depende de dos parámetros, uno de ellos puede permanecer constante mientras el otro recorre una de las curvas de la superficie. Este proceso permite conocer la variación de la superficie ya sea en dirección de la generatriz o de la directriz.

2. Derivada de la Función Vectorial Multivariable

La ecuación vectorial de una superficie depende de dos parámetros; cada parámetro indica una de las curvas que generan la superficie, de tal forma que para derivar la ecuación un parámetro se ajusta como constante mientras que el otro es la variable de derivación. Éste es, justamente, el concepto de derivada parcial, y geométricamente representa un vector tangente para sendas curvas de generación de la superficie.

Sea la superficie

$$\mathbf{r}(u,v) = f_1(u,v)\,\hat{\mathbf{i}} + f_2(u,v)\,\hat{\mathbf{j}} + f_3(u,v)\,\hat{\mathbf{k}}$$

La derivada $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ es el vector tangente a la curva de generación de S

$$\mathbf{r}(u) = f_1(u)\,\hat{\mathbf{i}} + f_2(u)\,\hat{\mathbf{j}} + f_3(u)\,\hat{\mathbf{k}}$$

cuando v es contante, en tanto que la derivada $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ es el vector tangente a la curva de generación de S

$$\mathbf{r}(v) = f_1(v)\,\hat{\mathbf{i}} + f_2(v)\,\hat{\mathbf{j}} + f_3(v)\,\hat{\mathbf{k}}$$

cuando u es constante.

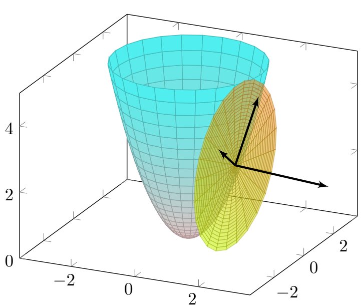

Figura 2. Una superficie tiene dos vectores tangentes, los cuales son directores del plano tangente a la superficie.

Los vectores tangentes a las curvas forman un conjunto linealmente independiente. Por lo tanto, forman una base (vectores directores) de un plano. Puesto que cada vector es tangente a una curva de la superficie, el plano resultante es tangente a la superficie en el punto donde se calculan las derivadas parciales, como se muestra en la figura 2.

Las características geométricas del vector tangente a una curva se extiende a las superficies con el plano tangente, pues permite relacionar la fracción de superficie con su entorno.

Sea la superficie

$$\mathbf{r}(u,v) = f_1(u,v)\,\hat{\mathbf{i}} + f_2(u,v)\,\hat{\mathbf{j}} + f_3(u,v)\,\hat{\mathbf{k}}$$

El vector normal a la superficie se calcula como $\mathbf{n} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ y es el vector ortogonal al plano tangente a $\mathbf{r}$.

Ejemplo. Calcule el ángulo entre las superficies

$$\begin{aligned} S_1 \quad & \mathbf{f}(s,t) = 2\cos t \sin s\hat{\mathbf{i}} + \cos s\hat{\mathbf{j}} + 2\sin t \sin s\hat{\mathbf{k}} \\ S_2 \quad & \mathbf{g}(u,v) = 2\cos u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + 2\sin u\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

en el punto $P(2,0,0)$.

Para S_1, el punto se encuentra en $s = \dfrac{\pi}{2}$ y $t = 0$, mientras que para S_2 $u = 0$ y $v = 0$. Las respectivas derivadas evaluadas son:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s &= 2\cos t\cos s\hat{\mathbf{i}} - \sin s\hat{\mathbf{j}} + 2\sin t\cos s\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad -\hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{f}_t &= -2\sin t\sin s\hat{\mathbf{i}} + 2\cos t\sin s\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad 2\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{g}_u &= -2\sin u\hat{\mathbf{i}} + 2\cos u\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad 2\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{g}_v &= \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Los vectores normales a sendas superficies son:

$$\begin{aligned} S_1: \quad \mathbf{n}_1 &= -\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad -2\hat{\mathbf{i}} \\ S_2: \quad \mathbf{n}_2 &= 2\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad -2\hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Las superficies tienen vectores paralelos, y como el ángulo entre superficies es igual al ángulo entre vectores normales, S_1 y S_2 son tangentes en el punto P.