Solución de la ecuación diferencial lineal no homogénea

Para resolver una e.d.l no homogénea de coeficientes constantes

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = Q(x),$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ y a_0 son constantes, se deben hacer dos cosas:

1) Determinar la solución homogénea y_h asociada, cuando $Q(x) = 0$.
2) Hallar alguna solución particular de la e.d.l no homogénea; $y_{p_{nh}}$ o y_p.

Donde la solución general sea

$$y_G = y_h + y_p$$

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = 2x + 3$$

COEFICIENTES INDETERMINADOS

Es un método para resolver e.d.l no homogéneas con coeficientes constantes y para su manejo se requiere conocer la forma de como anular la función $Q(x)$ de manera que la ecuación se transforma en una ecuación diferencial homogénea de orden mayor a la original.

Operador anulador

1) El operador diferencial D^n anula cada una de las funciones

$$\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$

2) El operador diferencial $(D-\alpha)^n$ anula cada una de las funciones

$$\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \dots, x^{n-1}e^{\alpha x}\}$$

3) El operador diferencial $[D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2]^n$ anula cada una de las funciones

$$\left\{\begin{matrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), x^2e^{\alpha x}\cos(\beta x), \dots, x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), xe^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \dots, x^{n-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \end{matrix}\right\}$$

Encontrar el operador anulador, P(D) que anule las siguientes funciones

a) $Q(x) = 5x^2$

b) $Q(x) = 1 - 5x^2 + 8x^3$

c) $Q(x) = x^{100} + 1$ *

d) $Q(x) = e^{-3x}$

f) $Q(x) = xe^x$

g) $Q(x) = 4e^{2x} - 10xe^{2x}$

h) $Q(x) = x + e^{4x}$

i) $Q(x) = 2e^{3x} + e^{-x}$

j) $Q(x) = e^x + e^{4x} + xe^{4x} + x^2e^x$ *

k) $Q(x) = cos4x$
l) $Q(x) = senx$
m) $Q(x) = cos2x + sen2x$
n) $Q(x) = cosx + sen4x$
ñ) $Q(x) = cos2x + 1$
o) $Q(x) = 5e^{-x}cos2x - 9e^{-x}sen2x$ ****
p) $Q(x) = cos2x + xsen2x + x^2cos2x$
q) $Q(x) = x^2 + e^x + cos2x + xsenx$
r) $Q(x) = \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x$

Resolver

$$y'' - y = 9 - x^3$$
$$y'' + 4y = 2e^{-x}$$
$$y'' + y' - 6y = -5e^{2x}$$
$$y'' + 3y' - 10y = cosx$$
$$y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4senx$$
$$y'' + y = xcosx - cosx$$
$$y'' - 2y' + y = 10e^{-2x}cosx$$

Resolver el siguiente problema de valor inicial

$$y'' = x^2 - 1; \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Resolver

$$y''' - 4y'' + 4y' = 5x^2 - 6x + 4x^2e^{2x} + 3e^{5x}$$

Nota

El método de coeficientes indeterminados no es aplicable a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, ni tampoco es aplicable a ecuaciones lineales con coeficientes constantes cuando $Q(x)$ es una función tal que

$$Q(x) = Inx, Q(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = tanx, Q(x) = sen^{-1}x, \text{etc.}$$