Cálculo Vectorial
Lectura 30: Integral de Superficie de Campo Escalar

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Área de una Superficie

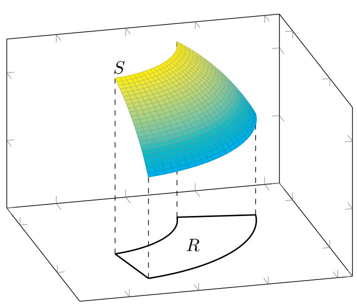

Figura 1. Superficie S cuya proyección en el plano xy es la región R.

Una función $\mathbf{r}(u,v)$ representa al lugar geométrico conocido como superficie. La superficie suave S puede proyectarse sobre el plano que definen los parámetros independientes u y v, creando una *sombra*: una región regular R (véase la figura 1).

Ya se ha estudiado que la región R puede dividirse en fragmentos muy pequeños, dando origen a la diferencial de área dA. La superficie S que se proyecta como R sobre el plano uv también puede dividirse en secciones infinitamente pequeñas, donde cada fragmento es conocida como diferencial de superficie dS. La diferencia entre una y otra es que dA está sobre un plano horizontal, mientras que dS no lo está.

La diferencial dS es una aproximación plana a la superficie (figura 2) que, al ser tan pequeña, prácticamente es un paralelogramo sobre dicha superficie. De esta forma, a partir de la ecuación vectorial $\mathbf{r}(u,v)$ de S se pueden obtener los vectores tangentes que permiten calcular la diferencial dS mediante el área del paralelogramo sobre la superficie utilizando el producto cruz:

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} dv \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right\|$$

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv \qquad (1)$$

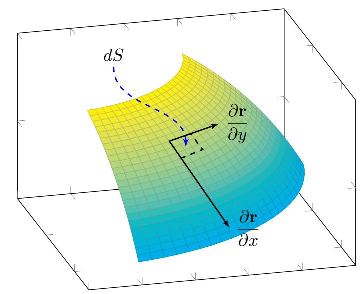

Figura 2. Una porción pequeña de la superficie S puede aproximarse mediante una diferencial ds con forma de paralelogramo, cuyos lados son los vectores tangentes a S.

Integrando sobre la región R se obtiene el área de la superficie.

El área de una superficie S con ecuación vectorial $\mathbf{r}(u,v)$ es

$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

Ejemplo. Calcule el área del cilindro parabólico $z = x^2$ que es interior al cilindro circular $x^2 + y^2 = 9$.

La figura 3 muestra ambos cilindros y la superficie a la cual se le desea calcular el área.

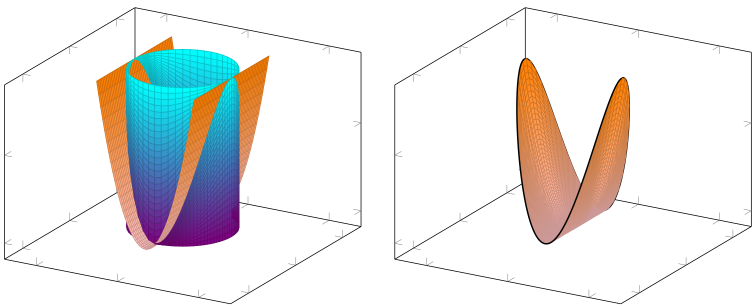

Figura 3

La ecuación vectorial de la superficie $z = x^2$ es quien proporcionará los vectores tangentes para calcular la diferencial de superficie. Para obtenerla, se utilizarán x y y como parámetros y se sustituirá $z = x^2$ en la componente $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\mathbf{r}(x, y) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z(x, y)\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{r}(x, y) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + x^2\hat{\mathbf{k}}$$

Las derivadas parciales de la ecuación vectorial son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \hat{\mathbf{i}} + 2x\hat{\mathbf{k}}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \hat{\mathbf{j}}$$

Por lo que la norma del producto cruz de ambos vectores tangentes a la superficie es

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -2x\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}$$
$$\therefore \qquad \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{4x^2 + 1}$$

La región de integración de los parámetros es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, de la cual al despejar y se obtiene

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Esto indica que los intervalos de integración son $-\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$ y $-3 \leq x \leq 3$. Por lo que el área de la superficie es

$$S = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{4x^2 + 1}\; dy\; dx$$
$$S = 80.07 \;\left[u^2\right]$$

Es posible que este tipo de integrales sean muy complejas de resolver, por lo que se prefiere calcularlas mediante un método numérico.

Este ejemplo denota la conveniencia de utilizar a x y y como parámetros. Si la ecuación vectorial de la superficie S se define como

$$\mathbf{r}(x, y) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z(x, y)\,\hat{\mathbf{k}}$$

donde $z(x, y)$ es la ecuación cartesiana de S, entonces los vectores tangentes son

$$\mathbf{r}_x = \hat{\mathbf{i}} + z_x\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{r}_y = \hat{\mathbf{j}} + z_y\hat{\mathbf{k}}$$

Al calcular la norma del producto cruz se llega a

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} \\ &= -z_x\hat{\mathbf{i}} - z_y\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \\ \therefore \quad \left\| \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y \right\| &= \sqrt{\left(z_x\right)^2 + \left(z_y\right)^2 + 1}\end{aligned}$$

Por lo que al tener la ecuación cartesiana de la superficie S, se puede obtener la norma del vector normal directamente.

2. Integral para un Campo Escalar

En la integral de superficie puede incluirse un campo escalar como integrando. Para el cálculo de área la integral

$$S = \iint_S dS$$

tiene como función a integrar a 1. Ahora, se puede tomar en cuenta un campo escalar $f\left(x, y, z\right)$ cualquiera. En esta integral se requiere recorrer el campo escalar f sobre los puntos que componen la superficie; es decir, el campo escalar debe estar definido en la porción de superficie que se analiza: si la ecuación vectorial de la superficie S es

$$\mathbf{r}\left(u, v\right) = x\left(u, v\right)\hat{\mathbf{i}} + y\left(u, v\right)\hat{\mathbf{j}} + z\left(u, v\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{2}$$

entonces $\mathbf{r}\left(u, v\right)$ pertenece al dominio del campo escalar. Esto indica que $\mathbf{r}$ puede evaluar el campo $f\left(x, y, z\right)$. Al sustituir (2) en f se obtiene la parte del campo escalar que se encuentra sobre la superficie

$$f\Big(\mathbf{r}\left(u, v\right)\Big) = f\Big(x\left(u, v\right), y\left(u, v\right), z\left(u, v\right)\Big) \tag{3}$$

Al evaluar el campo con la superficie se obtiene una función puede integrarse doblemente. Como la región de integración es una superficie, entonces la diferencial para integración es la descrita en la expresión (1). De esta forma, al multiplicar (1) y (3), e integrar se obtiene la integral de superficie de un campo escalar:

$$\iint_S f\Big(x\left(u, v\right), y\left(u, v\right), z\left(u, v\right)\Big) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

Sean la superficie $S:\ \mathbf{r}\left(u, v\right)$ y el campo escalar $f\left(x, y, z\right)$. La integral de superficie de f sobre la región R es

$$\iint_S f\left(x, y, z\right) dS = \iint_R f\Big(\mathbf{r}\left(u, v\right)\Big) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

donde $\mathbf{r}\left(u, v\right) = x\left(u, v\right)\hat{\mathbf{i}} + y\left(u, v\right)\hat{\mathbf{j}} + z\left(u, v\right)\hat{\mathbf{k}}$ y R es la región definida en el plano uv.

Las integrales de superficie generalizan el concepto de integral de línea. Anteriormente, se estudió que las integrales de línea se calculan con base en una curva que sirve de trayectoria para analizar un campo (vectorial o escalar). Las integrales de superficie realizan la misma acción, pero sobre una superficie en lugar de una trayectoria.

Ejemplo. Calcule la integral

$$\iint_S x + y^2 + z^2 \; dS$$

donde la superficie S es la porción del paraboloide $x = 4 - y^2 - z^2$ tal que $x \geq -2$.

La figura 4 muestra la geometría de la superficie.

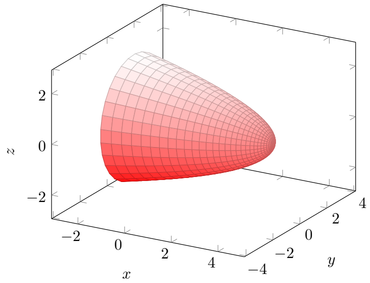

Figura 4

De acuerdo a la figura, el paraboloide es paralelo al eje x, y perpendicular al plano yz, donde se ubicará la región de integración. Como el paraboloide es de revolución, se utilizará la parametrización de un disco sobre el plano yz, de tal forma que su frontera es

$$\begin{cases} y = u\cos v \\ z = u\sin v \end{cases} \tag{4}$$

Al sustituir en x las ecuaciones de (4), se obtiene la parametrización completa:

$$\begin{aligned} x &= 4 - y^2 - z^2 \\ &= 4 - u^2\cos^2 v - u^2\sin^2 v \\ x &= 4 - u^2 \end{aligned} \tag{5}$$

La ecuación vectorial de la superficie es

$$\mathbf{r}(u,v) = \left(4 - u^2\right)\hat{\mathbf{i}} + u\cos v\hat{\mathbf{j}} + u\sin v\hat{\mathbf{k}}$$

y sus vectores tangentes son

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= -2u\hat{\mathbf{i}} + \cos v\hat{\mathbf{j}} + \sin v\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{r}_v &= -u\sin v\hat{\mathbf{j}} + u\cos v\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

De esta forma, la norma del vector normal es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= u\hat{\mathbf{i}} + 2u^2\cos v\hat{\mathbf{j}} + 2u^2\sin v\hat{\mathbf{k}} \\ \therefore \qquad \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{u^2 + 4u^4\cos^2 v + 4u^4\sin^2 v} \\ &= u\sqrt{1+4u^2} \end{aligned}$$

Los intervalos de integración son: $0 \le v \le 2\pi$ para cubrir la frontera del disco (4); el radio del disco inicia en $(u = 0)$ y termina en la frontera de la región, denotada por la restricción $x = -2$ enunciada en el problema. De esta forma al sustituir $x = -2$ en (5) se obtiene

$$\begin{aligned} x &= -2 \\ 4 - u^2 &= -2 \\ 6 &= u^2 \qquad \Rightarrow \qquad u = \sqrt{6} \end{aligned}$$

El intervalo faltante es $0 \le u \le \sqrt{6}$. La integral a calcular, previa evaluación del campo escalar con la superficie, es

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}} \left(x + y^2 + z^2\right) u\sqrt{1+4u^2}\; du\; dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}} \left(4 - u^2 + u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v\right) u\sqrt{1+4u^2}\; du\; dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}} 4u\sqrt{1+4u^2}\; du\; dv \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\left[\sqrt{\left(1+4u^2\right)^3}\right]_0^{\sqrt{6}} dv \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{124}{3} dv \\ I &= \frac{248}{3}\pi \end{aligned}$$

El cálculo de la integral también puede darse con los parámetros y y z. El resultado es independiente de la parametrización.