Transformada de Laplace y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

El alumno aplicará la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Transformada Integral

Si $f(x)$ es una función de dos variables, entonces una integral definida de f con respecto a una de las variables lleva a una función de la otra variable. Por ejemplo, si se mantiene a "y" constante, se observa que

$$\int_1^2 2xy^2dx = 2y^2\int_1^2 xdx = y^2x^2|_1^2 = y^2(4-1) = 3y^2$$

De manera similar, una integral definida como $\int_a^b K(s,t)f(t)dt$ transforma una función f de la variable "t" en una función F de la variable "s". Se tiene interés particular en una transformada integral, donde el intervalo de integración en el intervalo no acotado es $[0,\infty)$.

Si $f(t)$ se define para $t \geq 0$, entonces la integral impropia $\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt$ se define como un límite

$$\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt = lím_{b\to\infty} \int_0^b K(s,t)f(t)dt$$

Si existe el límite, entonces se dice que la integral existe o es convergente. Si no existe el límite, la integral no existe y es divergente. En general, el límite existirá sólo para ciertos valores de “s”.

La función $K(s,t)$ se llama núcleo de la transformada. La elección de $K(s,t) = e^{-st}$ como el núcleo nos proporciona una transformada integral especialmente importante.

Definición

Sea f una función definida para $t \geq 0$; $[0, \infty)$, la transformada integral o TRANSFORMADA DE LAPLACE de f es la función F definida mediante la integral

$$F(S) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = l\acute{\imath}m_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st} f(t)dt$$

El nombre de transformada proviene del hecho de que este operador transforma una función f en el dominio de “t” (tiempo) en una función F en el dominio de “s” (frecuencia).

Cuando la integral de la definición anterior converge, el resultado es una función de s. En el análisis general se usa una letra minúscula para denotar la función que se transforma y la letra mayúscula correspondiente para denotar su transformada de Laplace, por ejemplo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \qquad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s), \qquad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s).$$

Sea $f(t) = \mathrm{C}$, obtener la transformada de Laplace.

$\therefore$

$$\mathcal{L}\{C\} = \frac{C}{s}$$

siempre que $s > 0$.

Sea $f(t) = t$, obtener la transformada de Laplace.

Sea $f(t) = t^2$, obtener la transformada de Laplace.

Sea $f(t) = t^3$, obtener la transformada de Laplace.

Sea $f(t) = t^5$, obtener la transformada de Laplace.

Sea $f(t) = t$, obtener la transformada de Laplace.

Sea $f(t) = t^2$, obtener la transformada de Laplace.

Sea $f(t) = t^3$, obtener la transformada de Laplace.

Sea $f(t) = t^5$, obtener la transformada de Laplace.

$\therefore$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

siempre que $s > 0$.

Sea $f(t) = e^{-2t}$, obtener la transformada de Laplace.
Sea $f(t) = e^{6t}$, obtener la transformada de Laplace.
Sea $f(t) = e^{-t}$, obtener la transformada de Laplace.
Sea $f(t) = e^{4t}$, obtener la transformada de Laplace.

Sea $f(t) = e^{-2t}$, obtener la transformada de Laplace.

Sea $f(t) = e^{6t}$, obtener la transformada de Laplace.

Sea $f(t) = e^{-t}$, obtener la transformada de Laplace.

Sea $f(t) = e^{4t}$, obtener la transformada de Laplace.

$\therefore$

$$\mathcal{L}\{e^{nt}\} = \frac{1}{s-n}$$

siempre que $s > n$.

Sea $f(t) = \cos(wt)$, obtener la transformada de Laplace.

Sea $f(t) = sen(wt)$, obtener la transformada de Laplace.

$\therefore$

$$\mathcal{L}\{\cos(wt)\} = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

$$\mathcal{L}\{sen(wt)\} = \frac{w}{s^2 + w^2}$$