

Ecuaciones diferenciales parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP), al igual que las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), se clasifican como lineales o no lineales. De manera analógica a una EDO, la variable dependiente y sus derivadas parciales en una EDP lineal están elevadas sólo a la primera potencia

Ecuación diferencial lineal parcial

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G,$$

donde los coeficientes A, B, C, D, E, F y G son funciones de x y y . Cuando $G(x, y) = 0$, se dice que la ecuación es homogénea; de lo contrario, es no homogénea. Por ejemplo, las ecuaciones lineales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

son homogénea y no homogénea, respectivamente.

Una solución de una ecuación diferencial parcial como la mostrada en la diapositiva anterior es una función $u(x, y)$ de dos variables independientes que posee las derivadas parciales que aparecen en la ecuación y que satisface la ecuación en alguna región del plano xy .

No se intenta examinar procedimientos para hallar soluciones generales de ecuaciones diferenciales parciales. Con frecuencia, no sólo resulta difícil obtener una solución general de una EDP de segundo orden, sino que normalmente una solución general no es de todo útil en las aplicaciones. Así, la atención se centra en hallar soluciones particulares de algunas de las EDP más importantes, es decir, ecuaciones que aparecen en muchas aplicaciones.

Separación de variables

Aunque hay varios métodos que se pueden probar para hallar soluciones de una EDP, el único que nos interesa en este curso se llama "método de separación de variables". En este método se busca una solución de la forma de un producto de una función de x y una función de y

$$u(x, y) = F(x)G(y).$$

Con esta suposición a veces es posible reducir una EDP lineal de dos variables a dos EDO. Para este fin se observa que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F'G, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = FG', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = FG''$$

donde las primas denotan derivadas.

Ejemplo 1

Determinar la solución de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial u}{\partial y}$$

Solución

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$
$$\frac{F''}{4F} = \frac{G'}{G} = \lambda$$

Puesto que el lado izquierdo de la ecuación es independiente de y , al igual que el lado derecho, de x , se concluye que ambos lados de la ecuación son independientes de x y y . En otras palabras, cada lado de la ecuación debe ser una constante. En la práctica es conveniente escribir una constante de separación, λ .

Ejemplo 2

Resolver la ecuación diferencial parcial empleando una constante de separación positiva $\lambda = 4$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Utilizar el método de separación de variables separables para resolver la ecuación en derivadas parciales considerando una constante de separación negativa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = u$$

Resolver la ecuación diferencial parcial empleando una constante de separación positiva igual a 1.

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u = 0$$

Obtenga una solución completa de la ecuación diferencial en derivadas parciales para una constante de separación positiva

$$6t^4 \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial t} = 2 \frac{\partial^2 M}{\partial s^2}$$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

para una constante de separación $\lambda = 0$.

Resolver la ecuación en derivadas parciales considerando una constante de separación igual a cero

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

Clasificación de ecuaciones

Una ecuación diferencial parcial, lineal, de segundo orden de dos variables independientes con coeficientes constantes, se clasifica en uno de tres tipos. Esta clasificación depende sólo de los coeficientes de las derivadas de segundo orden. Por supuesto, se supone que por lo menos uno de los coeficientes A, B y C no es cero.

Se dice que la ecuación diferencial parcial, lineal, de segundo orden

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G,$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, es

hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$,

parabólica si $B^2 - 4AC = 0$,

elíptica si $B^2 - 4AC < 0$.

Obtener la solución en derivadas parciales de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, que cumple con las condiciones de frontera $u(0, y) = 2$ y $u(-1, y) = 0$.

Determine la solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales de $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u$, sujeta a las condiciones de frontera $u(0, y) = 2e^y$.

Obtener la solución de la siguiente ecuación diferencial parcial $\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, sujeta a las condiciones de frontera $u(t, 0) = 0$, $u(t, 10) = 0$ y la condición inicial $u(0, x) = 5 \text{sen}(2\pi x)$.