Cálculo Vectorial
Lectura 26: Integración Doble

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

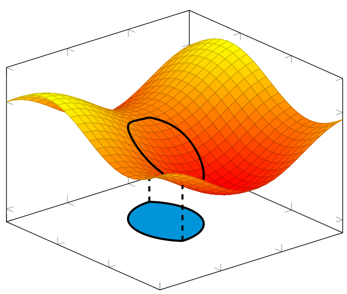

Figura 1. Para integrar una función multivariable se requiere definir lugares de integración que están limitados, en general, por curvas.

Hasta el momento se ha estudiado la derivada de funciones multivariables, en donde se incluyen las derivadas parciales y las derivadas de funciones vectoriales. El salto a la comprensión de la integral de línea cubre el proceso inverso de la derivación vectorial de variable escalar. Sin embargo, no es la única integral que puede realizarse con funciones multivariable.

En la integral de una sola variable se toma en consideración una recta acotada sobre el eje x que indica el intervalo de integración. En funciones multivariable, el uso de un intervalo lineal se queda bastante corto para denotar los lugares de integración pues, además de requerir dos o más direcciones, la integral puede realizarse a lo largo de curvas no lineales. La figura 1 ilustra esta idea.

Para integrar una función multivariable es necesario recurrir a las regiones. Una región es una porción de un plano coordenado cualquiera, cuyos puntos interiores pertenecen al conjunto sobre el cual se realizará la integración multivariable. En el caso de $\mathbb{R}^2$ la región será bidimensional.

1. Tipos de Regiones Regulares

Las regiones pueden dividirse en dos tipos principales: regulares e irregulares. Para determinar el tipo de región se analiza la geometría de la frontera y de rectas paralelas a los ejes coordenados.

Las regiones regulares se caracterizan por tener, como máximo, dos puntos de intersección entre su frontera y cada recta paralela a los ejes coordenados sin importar si el sentido es vertical u horizontal, tal como se muestra en la figura 2.

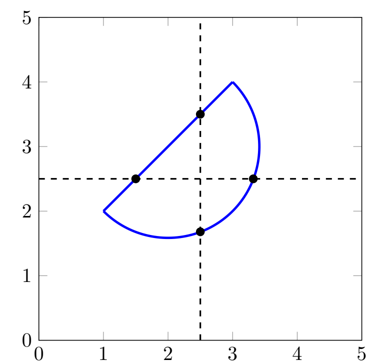

Figura 2. La región regular es cortada solo en dos puntos por una recta horizontal o vertical.

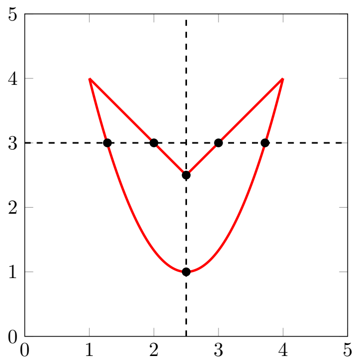

Figura 3. La frontera de una región irregular es cortada tres o más veces por, al menos, una recta horizontal o vertical.

Una región irregular no presenta las mismas características geométricas de la región regular. La figura 3 muestra que si una región es irregular entonces al menos una recta paralela a los ejes coordenadas que se trace, cortará la frontera en tres o más puntos; no se requiere que todas las rectas tengan esta propiedad, solo basta que una de ellas, ya sea horizontal o vertical, lo cumpla.

Hay que especificar que una región irregular puede seccionarse en subregiones regulares para trabajar con cada una de ellas de manera independiente. Esto hace que la definición de regiones para integrar solo se centre en regiones regulares.

Debido a que la región tiene dependencia multivariable, la forma de trabajar con ella depende del orden en el que se integren las variables. Esto lleva a una subclasificación de las regiones regulares, en donde una variable debe tener límites constantes y la otra funciones como límites. La clasificación para el sistema de coordenadas xy es:

- **Tipo I**. Son regiones tratadas como *horizontales*, pues los límites del intervalo sobre el eje x son contantes; es decir, $a \leq x \leq b$. Los límites en el eje y son funciones dependientes de x:

$$g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

- **Tipo II**. Estas regiones son tratadas como *verticales*, ya que el intervalo sobre el eje y es constante: $c \leq y \leq d$. Dos funciones dependientes de y son los límites del intervalo para el eje x:

$$h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

La figura 4 muestra una región tratada como los tipo I y tipo II.

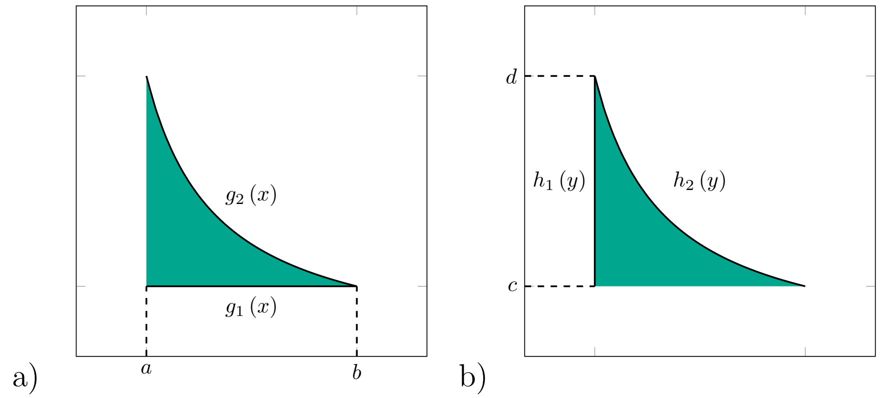

Figura 4. a) Región como tipo I u horizontal. b) Región como tipo II o vertical.

2. La Integral Doble

Una vez que se ha definido la manera de trabajar las regiones de integración, hay que definir propiamente a la integral multivariable, que en este caso será la integral doble.

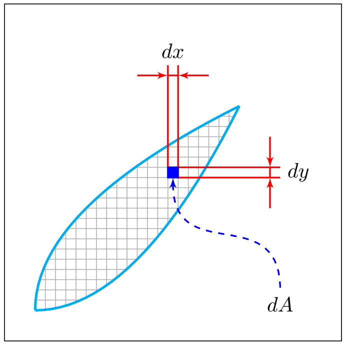

Figura 5. Cada diferencial de área dA de una región tiene lados dx y dy.

La figura 5 muestra como una porción infinitamente pequeña de una región R está formada por dos diferenciales: una por cada variable independiente. Al momento de dividir una región R en rectángulos de área infinitamente pequeña ΔA, sus lados son incrementos Δx sobre el eje x y Δy sobre el eje

y, de tal forma que

$$\Delta A = \Delta x \Delta y \tag{1}$$

Por otro lado, una función escalar $f(x, y)$ puede incrementarse en un punto perteneciente a la región R al incrementar sus variables independientes; implícitamente el incremento se daría respecto del área ΔA de acuerdo con (1). Para calcular un incremento ΔI de la función conforme se incrementa el área en el punto x_p, y_q, basta con multiplicar a la función por el área ΔA que se incrementa en dicho punto:

$$\Delta I = f(x_p, y_q)\,\Delta A \tag{2}$$

Si se desease sumar todos los incrementos ΔI en la región, resultando en un incremento global I, se requiere realizar una suma infinita pues R está compuesta por una infinidad de elementos ΔA. La expresión (2) se transformaría en

$$I = \lim_{\substack{p \to \infty \\ q \to \infty}} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f(x_i, y_j)\, dA$$

que es la definición de integral doble.

La integral doble de una función escalar $f(x, y)$, en una región R, se define como

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\substack{p \to \infty \\ q \to \infty}} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f(x_i, y_j)\, dA$$

donde $dA = dx\ dy$.

La definición de doble integral podrá reescribirse una vez que se estudie su aplicación al cálculo de volúmenes.

2.1. Integral Iterada

Una integral iterada es una expresión del tipo

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

Este tipo de integrales son útiles para calcular las integrales dobles, pues es un proceso similar al de la derivación parcial: se integra en un sentido mientras se mantiene fijo el otro sentido.

Las integrales iterada y doble serán equivalentes siempre que la función integrando sea continua dentro de la región de integración, en caso contrario no habrá equivalencia alguna entre ambas integrales.

Sea $f(x, y)$ una función multivariable. La integral doble de f en la región de tipo I

$$R = \{(x, y)\,|a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

se calcula como

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\ dx$$

siempre que f sea continua en R.

Al igual que la derivación parcial cruzada, la integración iterada cruzada resulta en el mismo valor independientemente del orden de las variables de integración. La única diferencia radica en los límites de integración: si se integra $dy\ dx$, la región es de tipo I; en cambio, si se integra $dx\ dy$, la región es de tipo II. Es decir,

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\ dx = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\ dy$$

donde R expresada como tipo II es

$$R = \{(x, y)\,|c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

Es importante que el orden de integración sea acorde con los límites establecidos para la región.

Ejemplo. Calcule la doble integral de la función

$$f(x, y) = xy$$

en la región $R = \{(x, y)\,|x^2 + y^2 = 1, y \ge 0\}$.

Se comenzará estableciendo los límites de integración en la región. Como se trata de la parte superior de una circunferencia unitaria con centro en el origen, se tomará a la región como de tipo I. La figura 6 muestra la geometría de R.

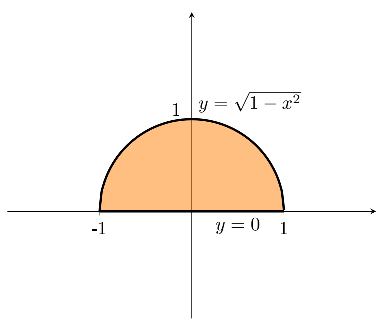

Figura 6

Se observa que los límites de la región sobre el eje x son constantes: $-1 \le x \le 1$.

Para los límites de y, las funciones involucradas en el intervalo son el *piso* de la semicircunferencia en y y el *techo* en la parte superior de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$:

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = 1 - x^2$$
$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Por lo tanto, $0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}$. La integral doble a realizar es

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x, y)\,dA &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xy\ dy\ dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 - x(0)\ dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^3\ dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)
\end{aligned}$$

Por lo que el valor de la integral es

$$\iint_R f(x, y)\,dA = 0$$