1. Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales

Objetivo: El alumno identificará las ecuaciones diferenciales como modelo matemático de fenómenos físicos y geométricos y resolverá ecuaciones diferenciales de primer orden.

Definición de ecuación diferencial.

- Es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

$$\frac{dy}{dx} + y = 5, \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{dw}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} = y$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + y = 4, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- Se clasifican a las ecuaciones diferenciales por su tipo, orden, grado y linealidad.

Clasificación en cuanto a su tipo

- **Ecuación diferencial ordinaria (EDO):** Es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a <u>UNA</u> variable independiente.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 10y = 0$$

$$\frac{dx}{dy} + 5x = e^y$$

$$\frac{d^2t}{da^2} - \frac{dz}{da} + 5t = 2a$$

$$\frac{d^9a}{dw^9} + \frac{d^2b}{dw^2} + \frac{dc}{dw} + \frac{de}{dw} + \frac{df}{dw} + \frac{dg}{dw} + \frac{dh}{dw} = 15$$

- **Ecuación diferencial parcial (EDP):** Es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a <u>DOS o MÁS</u> variables independientes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Orden de una ecuación diferencial

- El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden de la mayor derivada en la ecuación.

$$\overset{\text{segundo orden}}{\overset{\Downarrow}{\frac{d^2y}{dx^2}}} + 5\left(\overset{\text{primer orden}}{\overset{\Downarrow}{\frac{dy}{dx}}}\right)^3 - 4y = e^x$$

- ¿Cuál es la mayor derivada? = orden de la ecuación

$$5\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^7 + \frac{d^6y}{dx^6} + \frac{dy}{dx} + y = 10x$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^7 + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = x$$

$$4\frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^4y}{dx^4} + 7\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^4 = 10\frac{\partial^3u}{\partial t^3} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial^4u}{\partial x^4}\right)^3 = \frac{\partial^3u}{\partial t^3} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 8\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

Grado de una ecuación diferencial

- El grado es el exponente al que esta elevado el término que involucra la derivada de mayor orden, siempre y cuando la variable dependiente y sus derivadas estén dadas de forma polinomial en la ecuación diferencial.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

Clasificación por linealidad

- Una ecuación diferencial lineal es aquella en que la variable dependiente "y" y sus derivadas sólo aparecen en combinaciones aditivas de sus primeras potencias, es decir;

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=F(x)$$

De lo cual se observa:

a) La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado.

b) Los coeficientes dependen sólo de la variable independiente

Si no cumple con la forma de una ecuación diferencial lineal, es una ecuación diferencial NO lineal. Las funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas tales como $sen(y)$ o e^y, no pueden aparecer en una ecuación lineal.

Ejemplos

$$(y-x)dx+4xdy=0$$
$$y''-2y'+y=0$$
$$y^3\frac{d^3x}{dy^3}+y\frac{dx}{dy}-5x=e^y$$
$$(1-y)y'+2y=e^x$$
$$\frac{d^2x}{dy^2}+sen(x)=0$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}+y^2=0$$

Ejercicio

Ecuación Diferencial	Tipo	V.D.	V.I.	Orden	Grado	¿Lineal?
$\frac{dy}{dx} = 2e^y$						
$y'' - 4y' - 5y = e^{3x}$						
$\frac{\partial^4 v}{\partial n^4} + \left(\frac{\partial u}{\partial m}\right)^3 + \frac{\partial^4 w}{\partial h^4} = 5$						
$\left(\frac{d^3 s}{dt^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^3 = s - 3t$						
$yy'' + xy' + x^2 y = x$						
$\frac{d^3 s}{dt^3} + \frac{d^2 s}{dt^2} = s - 3t$						
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = e^t$						
$\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 5\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$						
$x' + x = \frac{e^y}{y}$						
$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$						