Cálculo Vectorial
Lectura 34: Teorema de Gauss

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

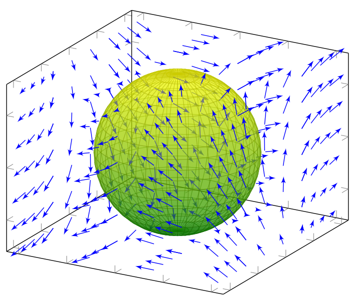

Figura 1. El flujo del campo $\mathbf{f}$ a través de la superficie cerrada puede cuantificarse mediante integrales de superficie con parametrización en cada plano coordenado.

Una superficie cerrada S, como la mostrada en la figura 1, forma un volumen que es atravesado por el campo vectorial

$$\mathbf{f}(x,y,z) = P\hat{\mathbf{i}} + Q\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}} \tag{1}$$

Cada componente del campo (1) es una función escalar susceptible de aplicársele la derivación parcial respecto de una de sus variables; por ejemplo, la componente R se puede derivar respecto a z. El resultado de la derivación seguirá siendo una función con tres variables, por lo que puede aplicársele una integral triple en el volumen definido por S, es decir,

$$I = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dV \tag{2}$$

Hay que considerar que (2) se integra en el intervalo de z que varía entre funciones dependientes de x y y, el intervalo en y varía entre funciones dependientes de x, y el intervalo en x varía entre valores constantes. Por lo que los intervalos de integración para z en el volumen son $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$.

La razón de por qué realizar este proceso yace en el cálculo de la integral de superficie para hallar el flujo F de (1) a través de S: el flujo a través de una superficie cerrada se calcula mediante una integral de superficie sobre cada sección que conforma a S; es decir, S se divide en dos secciones (una superior y una inferior) y a cada sección se le calcula su propia integral de superficie. El flujo total suma todas las cantidades en una sola.

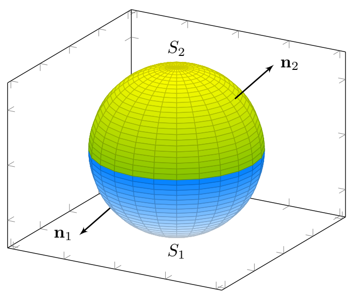

Figura 2. La superficie cerrada puede separarse en dos secciones, cada una con su propia ecuación vectorial y su propio vector normal.

De esta forma, a cada sección de la superficie le corresponde una ecuación vectorial para obtener un vector normal. La figura 2 muestra esta división de la superficie cerrada, junto con el respectivo vector normal. Así es como S se fragmenta en S_1

cuya ecuación vectorial es

$$S_1: \quad \mathbf{r}_1 = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z_1(x,y)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{3}$$

y en S_2 de ecuación vectorial

$$S_2: \quad \mathbf{r}_2 = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z_2(x,y)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{4}$$

Con estas consideraciones el cálculo del flujo del campo (1) que atraviesa S se da mediante la integral

$$F = \iint_S \left(P\hat{\mathbf{i}} + Q\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

que puede separarse mediante la linealidad; de esta forma se tendrán tres integrales, una por cada componente del campo $\mathbf{f}$:

$$\begin{aligned} F &= \iint_S \left(P\hat{\mathbf{i}} + Q\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot d\mathbf{S} \\ F &= \iint_S P\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{n}\; dA + \iint_S Q\hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{n}\; dA + \iint_S R\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}\; dA \end{aligned} \tag{5}$$

De aquí en adelante solo se trabajará con la tercera componente del campo (1) y se inducirá el proceso en las dos componentes restantes. Al tomar la tercera integral de (5), la superficie a utilizar depende de la sección. De acuerdo a la figura 2, para S_1 el vector normal tiene orientación opuesta al vector normal perteneciente a S_2; es decir, el vector normal a S_1 es el mismo a S_2 pero con signo contrario. De esta manera, la integral (5) se convierte en

$$\iint_S R\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}\; dy\; dx = \iint_{S_2} R\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}\; dy\; dx + \iint_{S_1} R\hat{\mathbf{k}} \cdot (-\mathbf{n})\; dy\; dx \tag{6}$$

Por otro lado, el vector normal $\mathbf{n}$ a la superficie S es

$$\mathbf{n} = -z_x\hat{\mathbf{i}} - z_y\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \tag{7}$$

En este caso no importa si se calculó con base en (3) o (4), ya que los vectores normales son el mismo pero en dirección opuesta. Al calcular el producto punto del integrando de (6) se obtiene:

$$\begin{aligned} R\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n} &= R\hat{\mathbf{k}} \cdot \left(-z_x\hat{\mathbf{i}} - z_y\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) \\ R\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n} &= R \end{aligned} \tag{8}$$

Sustituyendo (8) en (6) la integral a realizar es

$$\begin{aligned} F_3 &= \iint_{S_2} R\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}\; dy\; dx + \iint_{S_1} R\hat{\mathbf{k}} \cdot (-\mathbf{n})\; dy\; dx \\ &= \iint_{S_2} R\; dy\; dx - \iint_{S_1} R\; dy\; dx \end{aligned}$$

la cual requiere la evaluación de la función R con las ecuaciones vectoriales definidas por (3) y (4). Es entonces que se obtiene

$$\begin{aligned} F_3 &= \iint_{S_2} R\; dy\; dx - \iint_{S_1} R\; dy\; dx \\ &= \iint_{S_2} R(\mathbf{r}_2)\; dy\; dx - \iint_{S_1} R(\mathbf{r}_1)\; dy\; dx \\ F_3 &= \iint_{S_2} R(x,y,z_2)\; dy\; dx - \iint_{S_1} R(x,y,z_1)\; dy\; dx \end{aligned} \tag{9}$$

La integral en (9) se está realizando sobre la misma superficie, por lo que puede englobarse nuevamente en una sola. Al realizar esto, debe observarse que la función R está siendo evaluada en z_2 y se le está restando su propia evaluación en z_1. Esto quiere decir que R ha sido integrada respecto de z, y por lo tanto, posee una derivada parcial respecto de dicha variable; se puede reescribir a (9) en términos de la derivada parcial de R:

$$F_3 = \iint_{S_2} R(x,y,z_2)\; dy\; dx - \iint_{S_1} R(x,y,z_1)\; dy\; dx$$

$$\begin{aligned}F_3 &= \iint_S R(x,y,z_2) - R(x,y,z_1)\ dy\ dx \\ &= \iint_S R(x,y,z)\Big|_{z_1}^{z_2} dy\ dx \\ F_3 &= \iint_S \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R}{\partial z}\ dz\ dy\ dx\end{aligned}$$

Esta integral, que viene de (5), es la expresión denota por la integral triple (2), por lo que se concluye que

$$\iint_S R\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}\ dS = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\ dV \tag{10}$$

Al aplicar este mismo proceso a los sumandos restantes de (5), se obtienen las siguientes integrales:

- Para $P\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{n}$,

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\ dV = \iint_S P\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{n}\ dA \tag{11}$$

- Para $Q\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{n}$,

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\ dV = \iint_S Q\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{n}\ dA \tag{12}$$

Cuando se suman (10), (11) y (12) se obtiene el flujo completo a través de la superficie S:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\ dV$$

El integrando de la integral triple es la divergencia del campo $\mathbf{f}(x,y,z)$. Esta relación entre la integral de superficie cerrada y la divergencia se conoce como el teorema de Gauss o de la divergencia.

Sea S una superficie suave cerrada en $\mathbb{R}^3$, tal que al proyectar S sobre los planos coordenados se obtienen regiones simples. El teorema de Gauss para el campo vectorial $\mathbf{f} = (x,y,z)$ establece que

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f}\ dV$$

Puesto que la divergencia de un campo vectorial cuantifica las fuentes y sumideros existentes, el teorema de la divergencia permite calcular el flujo mediante la suma de todas las fuentes y todos los sumideros a través de la superficie. En otras palabras, se realiza la suma de todo lo que sale más todo lo que entra a la superficie cerrada.

Ejemplo. Calcule el flujo del campo

$$\mathbf{f}(x,y,z) = xy\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}y^2\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

a través de la superficie cerrada S, compuesta por el paraboloide $z = 4 - 3x^2 - 3y^2$ en $1 \le z \le 4$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en $0 \le z \le 1$ y el plano $z = 0$.

El volumen denotado por la superficie se muestra en la figura 3.

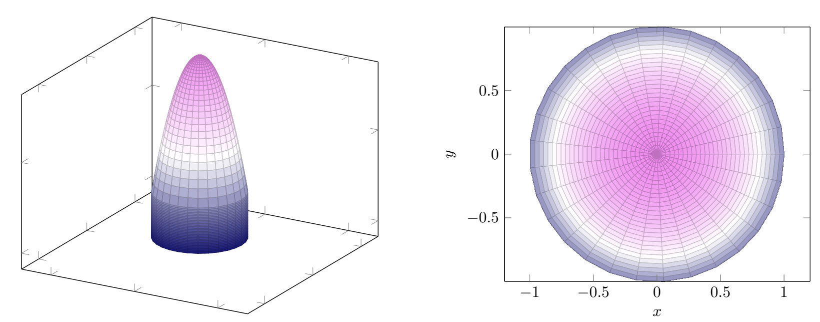

Figura 3

Primero se establecerán los intervalos de integración. De acuerdo a la figura 3, el intervalo de z está limitado por $z = 0$ en la parte inferior y $z = 4 - 3x^2 - 3y^2$ en la parte superior:

$$0 \leq z \leq 4 - 3\left(x^2 + y^2\right)$$

Respecto a x y y, la región está cercada por la pared del cilindro (figura 3). Al ser una circunferencia, el cambio a coordenadas cilíndricas es la mejor opción para la integral.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 1 \\ r^2 &\leq 1 \\ r &\leq 1 \end{aligned}$$

Los tres intervalos de integración son $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq z \leq 4 - 3\rho^2$.

Para el cálculo del flujo se requiere la divergencia del campo vectorial, por lo que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{f}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} xy - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}y^2\right) + \frac{\partial}{\partial z} z \\ &= y - y + 1 \end{aligned}$$

Y, por lo tanto, la integral para el flujo es

$$\begin{aligned} F &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f}\ dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{4-3r^2} r\ dz\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 rz\Big|_0^{4-3r^2} dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r - 3r^3\ dr\ d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r - 3r^3\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{3}{4}r^4\right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{5}{4}\ d\theta \\ &= \frac{5}{4}\theta\Big|_0^{2\pi} \\ F &= \frac{5}{2}\pi \end{aligned}$$

Éste es el flujo buscado.