Cálculo Vectorial
Lectura 21: Integral Vectorial e Integral de Línea de Campo Escalar

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Integración Vectorial

Como se ha estudiado, una curva es una función vectorial como:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

Para derivar la curva, se realiza la derivación ordinaria de cada componente respecto de t:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt}x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{d}{dt}y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{d}{dt}z(t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

Para revertir el proceso, se integra respecto de t cada componente.

Sea la curva C, cuya ecuación vectorial es $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ su derivada. La integral indefinida de $\mathbf{r}'(t)$ respecto de t se define como

$$\int \mathbf{r}'(t)\ dt = \mathbf{r}(t) + \mathbf{c}$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector constante.

Para calcular la integral entre los valores paramétricos t_1 y t_2 se define la integral definida de la función vectorial de variable escalar.

La integral definida de $\mathbf{r}'(t)$ entre t_1 y t_2 es

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r}'(t)\ dt = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector constante.

El significado de esta integral sigue siendo una suma infinita de diferenciales, pero éstas son vectoriales:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\ dt$$

Es decir, es la suma de incrementos infinitamente pequeños de cada componente de la función vectorial.

Ejemplo. Sea la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \sin 2t\hat{\mathbf{i}} + 4e^{-2t}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{t+1}\hat{\mathbf{k}}$$

Obtenga:

a. su integral indefinida.
b. su integral entre $t = 0$ y $t = \pi$.

a. Se integra directamente la función:

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)\ dt &= \int \left(\sin 2t\hat{\mathbf{i}} + 4e^{-2t}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{t+1}\hat{\mathbf{k}}\right) dt \\ &= -\frac{1}{2}\cos 2t\hat{\mathbf{i}} - 2e^{-2t}\hat{\mathbf{j}} + \ln(t+1)\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{c}\end{aligned}$$

b. Ahora se evalúa la integral indefinida en los valores requeridos:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mathbf{r}(t)\ dt &= -\frac{1}{2}\cos 2t\Big|_0^\pi \hat{\mathbf{i}} - 2e^{-2t}\Big|_0^\pi \hat{\mathbf{j}} + \ln(t+1)\Big|_0^\pi \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{c} \\ &= 0\hat{\mathbf{i}} - (2e^{-2\pi} - 2)\hat{\mathbf{j}} + \ln(\pi+1)\hat{\mathbf{k}} \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{e^{2\pi}}\right)\hat{\mathbf{j}} + \ln(\pi+1)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

2. Integral de Línea de Campo Escalar

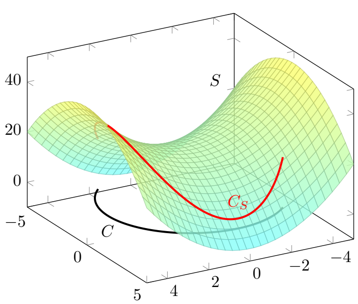

Figura 1. La curva C proyecta una trayectoria C_S en el espacio que recorre la superficie S.

A partir de la derivada de una función vectorial de variable escalar se definió la longitud de arco

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\ dt \tag{1}$$

para calcular la longitud de una curva a lo largo de su trayectoria.

Una curva C en el plano tiene ecuación vectorial con componente 0 en $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} \tag{2}$$

Si ahora se tiene una superficie S con ecuación cartesiana

$$S: \quad z = f(x,y) \tag{3}$$

la curva C puede *proyectarse* verticalmente en la superficie, creando una nueva trayectoria que recorre S conforme t hace recorrer a la curva, tal como muestra la figura 1. Es decir, los puntos de la superficie que se encuentran por encima de C crean la nueva trayectoria C_S.

Si se trazan rectas verticales que unan perpendicularmente a la curva C y a la curva C_S se formará una nueva superficie de la cual puede calcularse su área A.

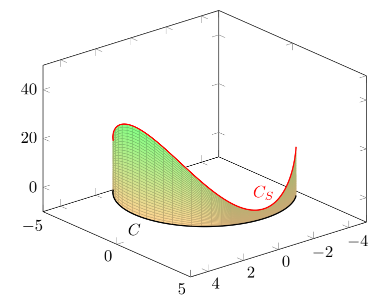

Figura 2. La superficie delimitada por C y C_S tiene un área que puede interpretarse como el área bajo la trayectoria C_S.

Mientras se va recorriendo la curva, la altura del área cambia de acuerdo con (3); cada una de las rectas verticales que unen C con C_S pueden interpretarse como rectángulos de base infinitamente pequeña y altura $f\big(\mathbf{r}(t)\big)$ (véase la figura 2). Las bases de dichos rectángulos se encuentran sobre la curva C; si se suman todas las bases, se está calculando la longitud de arco entre dos puntos de C. Para calcular el área de los rectángulos se multiplica cada base por su respectiva altura y se suman. Por lo tanto, la suma infinita queda calculada como la diferencial de longitud de arco (1) multiplicada por la superficie (3) evaluada en la curva:

$$\begin{aligned}dA &= f\big(\mathbf{r}(t)\big)\ ds \\ A &= \int_{t_1}^{t_2} f\big(\mathbf{r}(t)\big)\,\|\mathbf{r}'(t)\|\ dt\end{aligned}$$

La integral obtenida en términos de las componentes de la curva es

$$\int_{t_1}^{t_2} f\Big(x(t), y(t)\Big)\,\|\mathbf{r}'(t)\|\ dt$$

y se conoce como integral de línea o curvilínea de un campo escalar.

Sean la curva $C:\ \mathbf{r}(t)$ y la superficie $f(x,y)$. La integral de línea de f a lo largo de la trayectoria C es

$$\int_C f(x,y)\ ds = \int_{t_1}^{t_2} f\big(\mathbf{r}(t)\big)\ \|\mathbf{r}'(t)\|\ dt$$

donde $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}}$ y $[t_1, t_2]$ es el intervalo en el cual se calculará la integral.

Así como la integral ordinaria se interpreta geométricamente como el área bajo una curva, la integral de línea generaliza este concepto al área bajo una trayectoria en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo. Sean la curva

$$C: \quad \mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}\sqrt{(2t+1)^3}\hat{\mathbf{j}}$$

y la superficie

$$S: \quad f(x,y) = 3y^2 - 12x$$

Calcule la integral de f a lo largo de C desde $t=0$ hasta $t=1$.

La derivada de $\mathbf{r}(t)$ es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}t^2\hat{\mathbf{i}} + \frac{d}{dt}\frac{1}{3}\sqrt{(2t+1)^3}\hat{\mathbf{j}} \\ &= t\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{2t+1}\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

de la cual su norma es

$$\left\|\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)\right\| = \sqrt{t^2 + \left(\sqrt{2t+1}\right)^2}$$

$$\left\|\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)\right\| = t+1$$

Ahora se evalúa S con la curva C:

$$\begin{aligned}f(x,y) &= 3y^2 - 12x \\ f\big(\mathbf{r}(t)\big) &= 3\left(\frac{1}{3}\sqrt{(2t+1)^3}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}t^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(8t^3 - 6t^2 + 6t + 1\right)\end{aligned}$$

Finalmente, se evalúa la integral en el intervalo $[0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{1}{3}\left(8t^3 - 6t^2 + 6t + 1\right)(t+1)\ dt =$$

$$\frac{1}{30}\left(16t^5 + 5t^4 + 35t^2 + 10t\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{5}$$

Respecto a notación, si la trayectoria de integración es cerrada, se acostumbra escribir a la integral como

$$\oint_C f(x,y)\ ds$$

Con esta notación las integrales son conocidas como integrales de línea cerradas.

Una trayectoria C puede estar compuesta por n curvas, de tal forma que la integral de línea sobre C estará formada por la suma de las integrales sobre cada curva.

$$\int_C f\ ds = \int_{C_1} f\ ds + \int_{C_2} f\ ds + \cdots + \int_{C_n} f\ ds$$

Esto es posible porque la integral es una transformación lineal.