TRANSFORMADA DE LAPLACE $\mathscr{L}$

Definiciones integrales

Transformada de Laplace	Transformada inversa de Laplace
$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}\equiv \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)\,dt$ s es en realidad una variable compleja pero se trata como constante durante la integración	$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\lim\limits_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}e^{st}F(s)\,ds$ σ es un número real elegido de tal forma que todos los polos de $F(s)$ queden a la izquierda de la recta vertical que pasa por σ

Tabla de transformadas

	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t^n n es un entero positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	$\sqrt{t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{4s^3}}$
4	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6	$t^n e^{at}$ n es un entero positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
7	$\operatorname{sen} kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
8	$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
9	$\operatorname{senh} kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
10	$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
11	$e^{at}\operatorname{sen} kt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
12	$e^{at}\cos kt$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+k^2}$
13	$t\operatorname{sen} kt$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
14	$t\cos kt$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
15	$\operatorname{sen} kt - kt\cos kt$	$\frac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}$
16	$\operatorname{sen} kt + kt\cos kt$	$\frac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}$

	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}$
17	$\operatorname{senh} kt - \operatorname{sen} kt$	$\frac{2k^3}{s^4-k^4}$
18	$\cosh kt - \cos kt$	$\frac{2k^2 s}{s^4-k^4}$
19	$1-\cos kt$	$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}$
20	$kt-\operatorname{sen} kt$	$\frac{k^3}{s^2(s^2+k^2)}$
21	$\frac{a\operatorname{sen} bt - b\operatorname{sen} at}{ab(a^2-b^2)}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
22	$\frac{\cos bt-\cos at}{a^2-b^2}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
23	$\ln t$	$-\frac{\gamma+\ln s}{s}$ γ es la constante de Euler ($\gamma = 0.5772156\ldots$)
24	$\ln^2 t$	$\frac{\pi}{6s}+\frac{(\gamma+\ln s)^2}{s}$
25	$-(\gamma+\ln t)$	$\frac{\ln s}{s}$
26	$(\gamma+\ln t)^2-\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\ln^2 s}{s}$
27	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$	$\ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right)$
28	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{\sqrt{4\pi t^3}}$	$\sqrt{s+b}-\sqrt{s+a}$
29	$\frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
30	$\operatorname{erf}(t)$	$\frac{e^{s^2/4}}{s}\left[1-\operatorname{erf}\left(\tfrac{1}{2}s\right)\right]$
31	$\frac{\operatorname{sen} t}{t}$	$\arctan\frac{1}{s}$

Teoremas y propiedades diversas

1	**Linearidad**	$\mathscr{L}\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)+\cdots+c_n f_n(t)\}=c_1F_1(s)+c_2F_2(s)+\cdots+c_nF_n(t)$ donde c_1, c_2, … c_n son constantes
2	**Primer teorema de traslación**	$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}=\mathscr{L}\{f(t)\}\big\vert_{s\to s-a}=F(s)\vert_{s\to s-a}=F(s-a)$ $\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{at}f(t)$
3	**Segundo teorema de traslación** donde la función escalón unitario es $\mathscr{U}(t-a)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ 1, & t\ge a\end{cases}$	$\mathscr{L}\{f(t-a)\mathscr{U}(t-a)\}=e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}=e^{-as}F(s)$ $\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\vert_{t\to t-a}\}\mathscr{U}(t-a)=f(t-a)\mathscr{U}(t-a)$
4	**Función multiplicada por** t^n (derivada de transformada)	$\mathscr{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$
5	**Función dividida entre** t (integral de transformada)	$\mathscr{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(s)ds$
6	**Transformada de derivada**	$\mathscr{L}\left\{\dfrac{df}{dt}\right\}=sF(s)-f(0)$ $\mathscr{L}\left\{\dfrac{d^2f}{dt^2}\right\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$ $\mathscr{L}\left\{\dfrac{d^nf}{dt^n}\right\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
7	**Transformada de integral**	$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}=\dfrac{F(s)}{s}$
8	**Teorema de convolución** donde la integral de convolución es $f*g\equiv\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$\mathscr{L}\{f*g\}=\mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\}=F(s)G(s)$ $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=f*g$
9	**Transformada de una función periódica** con periodo T tal que $f(t+T)=f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$
10	**Transformada de una función periódica** con periodo T tal que $g(t+T)=-g(t)$	$\mathscr{L}\{g(t)\}=\dfrac{1}{1+e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}g(t)dt$
		$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & t_0-a\le t\le t_0+a\\ 0, & t\le t_0-a \text{ o bien } t\ge t_0+a\end{cases}$ $\mathscr{L}\{\delta_a(t-t_0)\}=e^{-st_0}\dfrac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}$
11	**Función delta de Dirac** $\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\ne t_0\end{cases}$	$\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}$
12	**Derivada de la función delta** (función doble impulso)	$\mathscr{L}\left\{\dfrac{d}{dt}\delta(t-t_0)\right\}=se^{-st_0}$
13	**Teorema del valor inicial**	$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}[sF(s)]$
14	**Teorema del valor final**	$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}[sF(s)]$