Cálculo Vectorial

Lectura 9: Geometría Diferencial III, el Vector Binormal

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero de 2020

1. El Vector Binormal Unitario

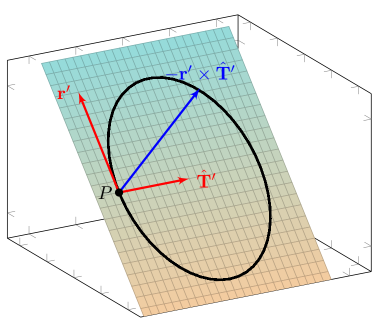

Figura 1. Los vectores $\mathbf{r}'$ y $\hat{\mathbf{T}}'$ están contenidos en un plano, cuyo vector ortogonal es $\mathbf{r}' \times \hat{\mathbf{T}}'$.

Una vez que se conoce a los vectores $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$ en un punto P de una curva $\mathbf{r}(t)$, basta observar que ambos son vectores directores de un plano que contiene a P, tal como muestra la figura (1). Como es un plano, existe un vector que es ortogonal a todos los puntos de la superficie. A éste vector no se le llamará normal para no confundir con el vector $\hat{\mathbf{N}}$.

Para obtener el vector ortogonal mencionado se cuenta con $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$, de tal forma que el resultado de aplicar el producto cruz a ambos es el llamado vector binormal $\hat{\mathbf{B}}$.

Cabría preguntarse si el vector binormal es unitario o no; sin embargo, la repuesta yace en la Geometría: el producto cruz de dos vectores ortonormales siempre es un tercer vector ortonormal.

Sea $\mathbf{r}(t)$ una función vectorial de variable escalar con vectores unitario tangente $\hat{\mathbf{T}}$ y normal unitario $\hat{\mathbf{N}}$. El vector binormal unitario se define como

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}$$

Así como los vectores $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$ son indispensables para caracterizar una curva (para el tangente la longitud de arco y para el normal la curvatura), el vector binormal está relacionado con la planicidad de la curva.

Ejemplo. Obtenga los vectores tangente, normal y binormal unitarios a la curva

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\hat{\mathbf{i}} + \sin t\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{2}t\hat{\mathbf{k}}$$

en el punto donde $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Para el vector tangente se requiere la derivada:

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\hat{\mathbf{i}} + \cos t\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{k}}$$

cuya norma es $\|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Por lo tanto,

$$\hat{\mathbf{T}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t\hat{\mathbf{i}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos t\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{k}}$$

Al derivar $\hat{\mathbf{T}}$:

$$\hat{\mathbf{T}}' = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t\hat{\mathbf{i}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin t\hat{\mathbf{j}}$$

que posee la norma $\left\|\hat{\mathbf{T}}'\right\| = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Entonces,

$$\hat{\mathbf{N}} = -\cos t\hat{\mathbf{i}} - \sin t\hat{\mathbf{j}}$$

Para el vector binormal se realiza el producto cruz entre $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t & \frac{2}{\sqrt{5}}\cos t & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sin t\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos t\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Finalmente, al evaluar los vectores en $t = \frac{\pi}{4}$ el resultado buscado es

$$\hat{\mathbf{T}} = -\sqrt{\frac{2}{5}}\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{\frac{2}{5}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{k}} \qquad \hat{\mathbf{N}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{k}}$$

La figura 2 muestra los tres vectores y la curva analizada.

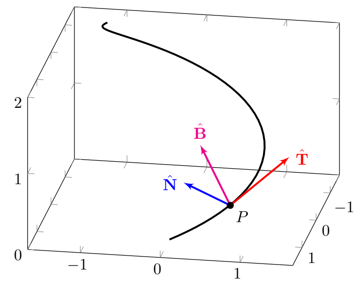

Figura 2

2. La Torsión

Cuando se habla de torsión, se hace alusión a que un objeto *está enroscado*. Nuevamente, este tipo de definiciones no ayudan a la Geometría.

Una vez que se conoce al vector binormal unitario, la variación de su dirección da una medida de qué tan plana es una curva. Es decir, derivar el vector $\hat{\mathbf{B}}$ implica que se conocerá la variación de la planicidad de la curva en estudio (véase la figura 3); si no hay variación, significa que la curva es plana.

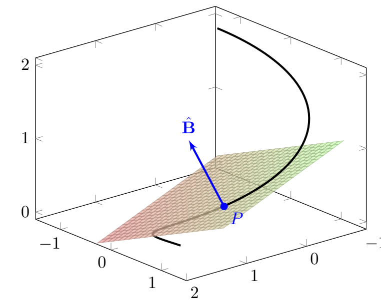

Figura 3. La derivada de $\hat{\mathbf{B}}$ indica la planicidad de la curva. Se observa que esta curva no está contenida completamente en el plano ortogonal a $\hat{\mathbf{B}}$.

La torsión τ de una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ se calcula a partir de la derivada del vector binormal unitario respecto a la longitud de arco s:

$$|\tau| = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} \right\|$$

Si el vector $\hat{\mathbf{B}}$ es constante a lo largo de toda la curva, entonces su derivada es cero y $\tau = 0$. Esto solo es posible cuando la curva es plana.

Tanto la curvatura como la torsión están definidas a partir de derivadas donde la variable independiente es la longitud de arco. Hay ocasiones que es muy complicado expresar a la función en términos de s, por lo que se puede obtener una expresión en términos del parámetro independiente.

Recordando que

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| \tag{1}$$

se toma la definición de torsión y de vector binormal unitario:

$$\begin{aligned} |\tau| &= \left\| \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} \right\| \\ &= \left\| \frac{\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\| \\ |\tau| &= \frac{\left\| \frac{d}{dt}\left(\hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}\right) \right\|}{\left\| \frac{ds}{dt} \right\|} \end{aligned} \tag{2}$$

Al sustituir (1) en (2),

$$|\tau| = \frac{\left\| \frac{d}{dt}\left(\hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}\right) \right\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

y desarrollar el producto cruz,

$$\begin{aligned} |\tau| &= \frac{\left\| \hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{dt} + \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \times \hat{\mathbf{N}} \right\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \\ &= \frac{\left\| \hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{dt} \right\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \\ &= \frac{\left\| \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{dt} \right\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \\ |\tau| &= \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|^2} \left\| \mathbf{r}'(t) \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{dt} \right\| \end{aligned} \tag{3}$$

Llegar a la expresión (3) es posible debido a las propiedades del producto cruz y de la norma vectorial, además de considerar que $\dfrac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}$ es paralelo a $\hat{\mathbf{N}}$ y que $\hat{\mathbf{T}}$ es igual a $\dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$. Más adelante se obtendrá una segunda expresión para la torsión.

Ejemplo. Sea la curva

$$\mathbf{r}(t) = e^t \sin t\hat{\mathbf{i}} + e^t \cos t\hat{\mathbf{j}} + e^t\hat{\mathbf{k}}$$

Obtenga el valor de la torsión en $t = \pi$.

Como $|\tau| = \dfrac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|^2}\left\|\mathbf{r}'(t)\times\dfrac{d\hat{\mathbf{N}}}{dt}\right\|$, solo se obtendrán los vectores tangente y normal unitarios. Para $\hat{\mathbf{T}}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}'(t) = e^t(\cos t+\sin t)\,\hat{\mathbf{i}} + e^t(\cos t-\sin t)\,\hat{\mathbf{j}} + e^t\hat{\mathbf{k}}\\
\Rightarrow\quad &\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2}e^t\\
\therefore\quad &\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t+\sin t)\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t-\sin t)\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Para $\hat{\mathbf{N}}$:

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t+\sin t)\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t-\sin t)\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{k}}\\
\Rightarrow\quad &\hat{\mathbf{T}}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t-\sin t)\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t+\cos t)\,\hat{\mathbf{j}}\\
&\quad = \hat{\mathbf{N}}
\end{aligned}$$

Ya se obtuvieron ambos vectores unitarios. Al derivar el vector normal unitario se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t-\sin t)\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t+\cos t)\,\hat{\mathbf{j}}\\
\Rightarrow\quad &\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t+\cos t)\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t-\cos t)\,\hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

Al evaluar $\|\mathbf{r}'(t)\|$, $\mathbf{r}'(t)$ y $\dfrac{d\hat{\mathbf{N}}}{dt}$ se podrá evaluar la expresión (3) para obtener la torsión.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(\pi) &= -e^\pi\hat{\mathbf{i}} - e^\pi\hat{\mathbf{j}} + e^\pi\hat{\mathbf{k}}\\
\|\mathbf{r}'(\pi)\| &= \sqrt{2}e^\pi\\
\left.\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{dt}\right|_{t=\pi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\tau| &= \frac{1}{2e^{2\pi}}\left\|\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ -e^\pi & -e^\pi & e^\pi\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{vmatrix}\right\|\\
&= \frac{1}{2e^{2\pi}}\left\|-\frac{1}{\sqrt{2}}e^\pi\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^\pi\hat{\mathbf{j}}\right\|\\
&= \frac{1}{2e^{2\pi}}(e^\pi)
\end{aligned}$$

La torsión es $|\tau| = \dfrac{1}{2e^\pi}$.