Díaz Hernández Marcos Bryan

Ma - Ju

Tarea: 16

N.L: 12

- Ejercicio 3, 2019-2, 2° Final, Tipo A

Sean los espacios vectoriales reales $P = \{ax+b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ y $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b \right\}$ y la transformación lineal $F: P \to M$ cuya regla de correspondencia es:

$F(ax+b) = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}$

a) Determinar si F es biyectiva

b) Si existe, obtener la inversa de F.

1) $\operatorname{Dim} N(F) = 0$ $\quad \circ\ F(ax+b) = (a,b) \quad G\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\right) = (a,b)$

2) $\operatorname{Dim} P = \operatorname{Dim} M \quad \circ\ F(a,b) = (a-b, a+b)$

1) $F(a,b) = (0,0)$

$(a-b, a+b) = (0,0)$

$\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=b \\ 2a=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \end{matrix}$

$N(F) = (0,0)$

$N(F) = \{0x+0\}$

$\therefore \underline{\operatorname{Dim} N(F) = 0}$

2) $\operatorname{Dim} P = \operatorname{Dim} M$ $\quad$ por método universal

Bases de P $\{(1,0),(0,1)\}$

Bases de M $\{(1,0),(0,1)\}$

$\therefore$ <u>es biyectiva</u>

b) $F(0,1) = (-1,1) \quad (-1,1) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) = (-1,1)$

$F(1,0) = (1,1) \quad (1,1) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) = (1,1)$

$M(F) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M(F)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad M(F)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$\circ\ (a,b) = \alpha(1,0) + b(0,1) = (a,b) \quad F^{-1}(a,b) = (1/2a + 1/2b, -1/2a + 1/2b)$

$M(F)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2a + 1/2b \\ -1/2a + 1/2b \end{bmatrix}$

$\underline{F^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = ((1/2)a + (1/2)b)x + ((-1/2)a + (1/2)b)}$

- Ejercicio 52, página 263, Borrura, inciso a.

Sea: $M(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la representación matricial del operador $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ referida a la base canónica.

a) Obtengo los espacios característicos asociados a los valores característicos del operador T.

$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$ $\quad B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $\quad$ Det $(A - \lambda I)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

$\lambda_{1,2} = \lambda = 2 \quad \lambda_{1,2} = 2$

$\lambda_3 = 1$ $\quad$ ∘ $N^\circ VI = N^\circ v - N^\circ Ecn$

∘ $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} -2a - b + 2c = 0 \\ a \in \mathbb{R} \quad b = -2a + 2c \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$V.C(2) = \{ (a, -2a+2c, c) \mid a, c \in \mathbb{R} \} - \{\bar{0}\}$

$\underline{E(2) = \{ (a, -2a+2c, c) \mid a, c \in \mathbb{R} \}}$ //

∘ $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} a = 0 \\ -2a + 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad b \in \mathbb{R}$$

$V.C(1) = \{ (0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R} \} - \{\bar{0}\}$

$\underline{E(1) = \{ (0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R} \}}$ //

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ejercicio 42, página 260, Barrera.

Sea la region definida por los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$,
Determine el efecto que produce:

a) Realizar primero una reflexión con respecto al origen y después una contracción vectorial con $h = 1/2$

b) Realizar primero una deformacion a lo largo del eje x con $h=1$ y después una reflexión sobre el eje y.

a) $R_o = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $C_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ b) $D_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $R_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

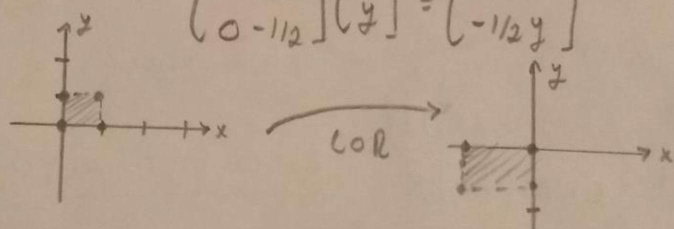
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{R} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2, \quad C \circ R$$

$$M(C \circ R) = M(C)M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M(C \circ R) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -1/2\, y \end{bmatrix}$$

$\therefore T = (-x, -1/2\, y)$

$T(0,0) = (0,0)$
$T(1,0) = (-1,0)$
$T(1,1) = (-1,-1/2)$
$T(0,1) = (0,-1/2)$



b) $$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{D} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{R} \mathbb{R}^2, \quad R \circ D$$

$$M(R \circ D) = M(R)M(D) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M(R \circ D) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-y \\ y \end{bmatrix}$$

$T = (-x-y, y)$

$T(0,0) = (0,0)$
$T(1,0) = (-1,0)$
$T(1,1) = (-2,1)$
$T(0,1) = (-1,1)$