Cálculo Vectorial
Lectura 18: Interpretación de la Divergencia y el Rotacional

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Significado de la Divergencia

El operador divergencia es más común en la Física de lo que podría parecer. Un fenómeno físico interesante es observar el flujo del agua (o cualquier otro fluido, líquido o gaseoso). Dentro de un flujo de agua pueden verse los lugares de donde brota (como una fuente) o donde existen pozos (como una coladera).

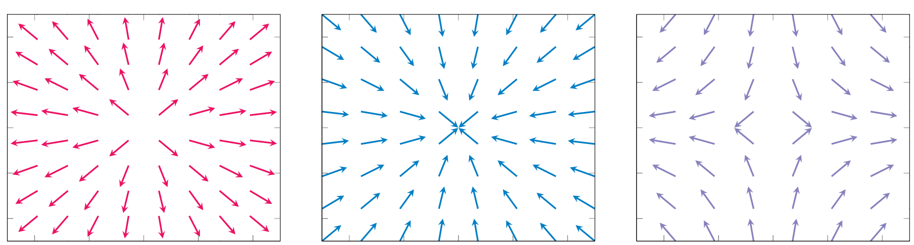
Un campo vectorial puede representar a un fluido como el agua, ya que cada punto está asociado con un vector, como si fueran moléculas de agua que se mueven con una dirección. La divergencia puede determinar dónde existen puntos en los cuales los vectores salen (como una fuente de agua) y en donde entran (como un pozo).

Sea $\mathbf{f}$ un campo vectorial con divergencia $\operatorname{div}\mathbf{f}$. Si para un punto A del dominio de $\mathbf{f}$ se cumple que:

- $\operatorname{div}\mathbf{f} > 0$, en A existe una fuente (los vectores salen).
- $\operatorname{div}\mathbf{f} < 0$, en A existe un sumidero (los vectores entran).

En el caso que $\operatorname{div}\mathbf{f} = 0$, entonces el campo se llama solenoidal.

La fuente y el sumidero en el campo vectorial indican que los vectores salen y entran, respectivamente, en el punto de análisis. En el caso de un campo solenoidal no se observan puntos en los cuales existan fuentes o sumideros. Estas características pueden interpretarse como lugares donde la densidad del campo aumenta, disminuye o se mantiene constante: la fuente es un punto que pierde densidad, pues los vectores se alejan de él; el sumidero concentra la densidad en el punto, debido a que los vectores caen en él; el campo solenoidal mantiene la densidad, pues no existen lugares que la ganen o pierdan. La figura 1 muestra los casos de la fuente, el sumidero y el campo solenoidal.



a) b) c)

Figura 1. a) La divergencia es positiva en una fuente. b) En un sumidero la divergencia es negativa. c) Un campo solenoidal tiene divergencia nula.

Ejemplo. Sea el campo vectorial

$$\mathbf{f}(x,y,z) = x^2y\hat{\mathbf{i}} + xyz\hat{\mathbf{j}} - x^2y^2\hat{\mathbf{k}}$$

Determine si el campo es solenoidal. En caso negativo, investigue si el punto $A(2,-1,3)$ es una fuente o un sumidero.

La divergencia del campo es

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{f} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y\right)\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\left(xyz\right)\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\left(-x^2y^2\right)\hat{\mathbf{k}} \\ &= 2xy + xz\end{aligned}$$

Como la divergencia no es nula, el campo no es solenoidal. Se evalúa el resultado en A para determinar su naturaleza.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{f}\Big|_A &= 2(2)(-1) + (2)(3) \\ &= -4+6 \\ &= 2\end{aligned}$$

El valor de la divergencia es positivo. Por lo tanto, el punto A es una fuente.

Al momento de evaluar la divergencia en el ejemplo anterior, bien pudo resultar en cero. Esto no indica que el campo sea solenoidal, pues se esta estudiando un punto en particular; más bien se trata de un punto que no es fuente ni sumidero. En el caso que la divergencia sea constante (positiva o negativa) quiere decir que todo el campo se acerca (o se aleja) de un único punto. Los incisos a) y b) de la figura 1 muestran campos cuya divergencia es constante.

El electromagnetismo es uno de los fenómenos físicos que puede estudiarse a partir de campos vectoriales. El campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el magnético $\mathbf{B}$ pueden describirse mediante las llamadas ecuaciones de Maxwell: son cuatro ecuaciones (ley de Gauss, ley de Gaus para el magnetismo, ley de Faraday y ley de Ampere) que James Clerk Maxwell reunió y modificó para describir la teoría electromagnética.

La primera ecuación es

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

donde ρ es la cantidad total de densidad de carga y ε_0 es la permitividad del vacío. Esta ecuación señala que la divergencia del campo eléctrico indica el tipo de carga: una carga positiva es una fuente y una carga negativa es un sumidero (véase la figura 2).

La segunda ecuación es

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

En esta ecuación se observa que la divergencia del campo magnético es nula; es decir, el campo magnético es solenoidal. Esto se debe a que los polos norte y sur magnéticos no pueden separarse (figura 2), de tal forma que no hay fuentes o sumideros en un campo magnético.

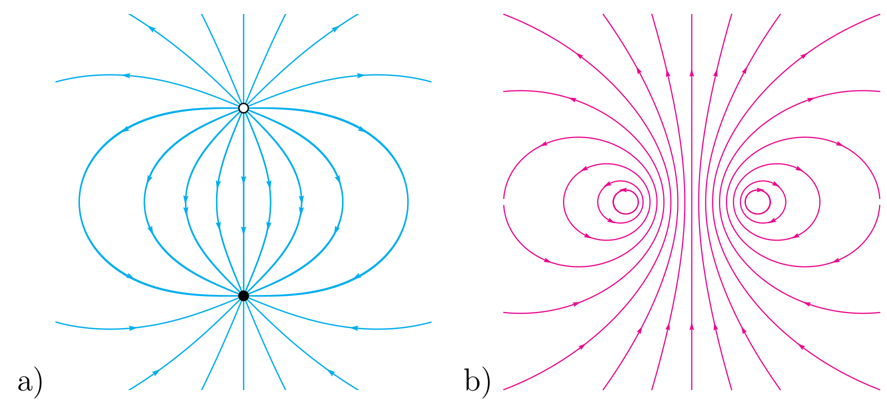


Figura 2. a) El campo eléctrico tiene fuentes (carga +, ∘) y sumideros (carga −, •). b) El campo magnético no tiene fuentes o sumideros, pues es solenoidal.

2. Significado del Rotacional

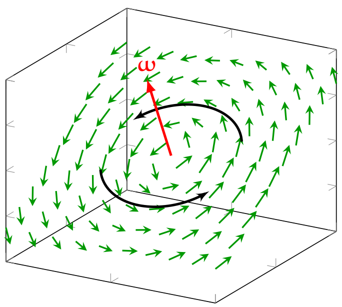


Figura 3. La rotación del campo alrededor de un punto induce a la obtención del vector vórtice $\boldsymbol{\omega}$, que es ortogonal al plano de rotación.

En los campos vectoriales no solo existen puntos donde existan fuentes o sumideros. También existen puntos donde los vectores lo rodean, dando la impresión de un remolino. Un ejemplo de este fenómeno es la estela de turbulencia de un avión. La diferencia de presiones en el aire que deja un avión al pasar, genera en las puntas de las alas sendos vórtices; es decir, el aire gira tras el paso de un avión.

Cada partícula del aire lleva una velocidad, por lo que el fluido puede verse como un campo vectorial de velocidades. La figura 3 muestra que un fluido puede rotar alrededor de un punto con cierta velocidad $\mathbf{v}$, lo cual genera un vector perpendicular $\boldsymbol{\omega}$ llamado vorticidad, la cual es una medida de la susceptibilidad del fluido a rotar. Se define como

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$$

Ésta es la razón por la que el rotacional lleva dicho nombre.

Sea $\mathbf{v}$ un campo vectorial. El rotacional $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ indica la tendencia a rotar que $\mathbf{v}$ posee. Dicha tendencia se mide mediante el vector

$$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$$

que es conocido como vorticidad. Si $\operatorname{rot}\mathbf{f} = \mathbf{0}$, entonces el campo es irrotacional.

Cuando se habla de un campo irrotacional también se habla del llamado campo conservativo, un concepto que se estudiará en las integrales de línea de un campo vectorial.

Ejemplo. Sea un fluido con campo de velocidades

$$\mathbf{v}(x,y,z) = x^2z^2\hat{\mathbf{i}} - 2y^2z^2\hat{\mathbf{j}} + xy^2z\hat{\mathbf{k}} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

Determine si $\mathbf{v}$ es irrotacional. En caso negativo, obtenga la vorticidad en el punto $B(1,1,1)$.

El rotacional del campo es

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2z^2 & -2y^2z^2 & xy^2z \end{vmatrix} \\
&= \left(2xyz + 4y^2z\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(2x^2z - y^2z\right)\hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

El campo no es irrotacional, por lo que debe evaluarse en el punto B para conocer su vorticidad:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{v}\Big|_B &= (2+4)\,\hat{\mathbf{i}} + (2-1)\,\hat{\mathbf{j}} \\
&= 6\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

La vorticidad del campo en el punto B es

$$\boldsymbol{\omega} = 6\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Las unidades de la vorticidad son radianes por segundo pues al derivar la velocidad respecto del desplazamiento se obtiene el inverso de los segundos, pero en el caso de la rotación el desplazamiento se realiza en un arco de circunferencia, que es medido en radianes.

Un rotacional nulo en un punto específico indica que en ese lugar no hay rotación, y no que el campo sea completamente irrotacional.

El rotacional también es aplicable al magnetismo y la electricidad. La divergencia ayuda a comprender que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ tiene fuentes y sumideros (cargas positivas y negativas), y que el campo magnético es solenoidal (no existen monopolos). El rotacional ayuda a demostrar que la electricidad y el magnetismo no son independientes, sino que forman parte del mismo fenómeno.

La tercera ecuación de Maxwell es

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Esta ecuación indica que, si un campo eléctrico gira alrededor de un punto (como podría ser el campo eléctrico en una bobina) se generará un campo magnético variable; es decir, una corriente eléctrica genera un campo magnético. Por otro lado, si el campo magnético es constante, su derivada es cero y el campo eléctrico es irrotacional.

La última ecuación es

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío y $\mathbf{J}$ es la cantidad total de la densidad de corriente eléctrica. Esta ecuación enuncia que, puesto que las líneas de campo magnético se cierran sobre sí mismas (rotan), se genera una corriente eléctrica perpendicular al campo magnético; es decir, un campo magnético genera una corriente eléctrica.