Cálculo Vectorial
Lectura 32: La Integral Triple

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Integral Triple

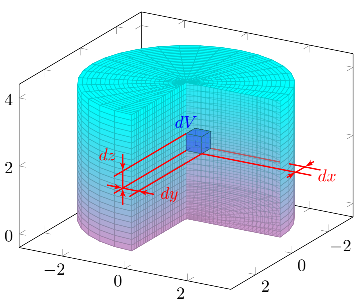

Figura 1. Un volumen diferencial dV es un prisma que posee dimensiones dx, dy y dz.

Hasta el momento, el concepto de integral en una variable se ha extendido a dos. Este progreso de una a dos dimensiones puede continuar a tres, cuatro o n dimensiones. La figura 1 muestra como una porción V infinitamente pequeña del espacio tridimensional está formada por tres diferenciales: una por cada variable independiente. Al momento de dividir a V en prismas de volumen infinitamente pequeño ΔV, sus aristas son incrementos Δx sobre el eje x, Δy sobre el eje y y Δz sobre el eje z, de tal forma que

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \tag{1}$$

Una vez definida la diferencial de volumen, una función escalar $f(x, y, z)$ puede incrementarse en un punto perteneciente a dicho volumen V al incrementar sus variables independientes; implícitamente el incremento se daría respecto del volumen ΔV de acuerdo con (1). Para calcular un incremento ΔI de la función conforme se incrementa el volumen en el punto x_p, y_q, z_r, basta con multiplicar a la función por el volumen ΔV que se incrementa en dicho punto

$$\Delta I = f(x_p, y_q, z_r)\,\Delta V \tag{2}$$

Si se desea sumar todos los incrementos ΔI en el volumen, resultando en un incremento global I, se realiza una suma infinita pues V posee infinidad de elementos ΔV. La expresión (2) define a la integral triple

$$I = \lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty \\ r\to\infty}} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} f(x_i, y_j, z_k)\, dV$$

La integral triple de una función escalar $f(x, y, z)$, en un volumen V, se define como

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV = \lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty \\ r\to\infty}} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} f(x_i, y_j, z_k)\, dV$$

donde $dV = dx\ dy\ dz$.

La definición de integral triple es análoga a la de integral doble, por lo que su cálculo se realiza mediante tres integrales parciales (iteradas):

$$\iiint_V f(x, y, z)\ dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\ dx\ dy\ dz$$

Los intervalos de integración también pueden intercambiarse, obteniéndose el mismo resultado mientras la función sea integrable en el volumen especificado. Un ejemplo del orden de integración puede ser $dx\ dy\ dz$, donde el intervalo en x es

$$h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)$$

en tanto que el de y (segunda en orden de integración) es

$$g_1(z) \leq y \leq g_2(z)$$

por lo que z posee un intervalo constante.

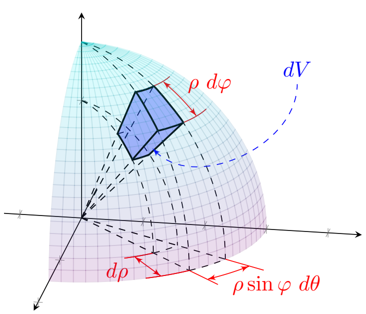

Figura 2. En el sistema esférico la diferencial de volumen dV se calcula con las diferenciales y los factores de escala $\rho^2 \sin\varphi\ d\rho\ d\varphi\ d\theta$.

En el caso de un sistema curvilíneo ortogonal, la integral debe manejarse, nuevamente con los factores de escala. De esta forma la diferencial de volumen está definida, nuevamente, haciendo uso del producto de factores de escala:

$$dV = h_u h_v h_w\ du\ dv\ dw$$

Esta diferencial de volumen puede reescribirse mediante el uso del jacobiano de las ecuaciones de transformación del sistema de coordenadas uvw. La figura 2 muestra el concepto geométrico de diferencial de volumen en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales.

Ejemplo. Calcúlese la integral de $f(x, y, z) = xyz$ en el volumen definido por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, y el plano $z = 4$.

En la figura 3 se muestra el paraboloide con las regiones que pueden tomarse como intervalos de integración.

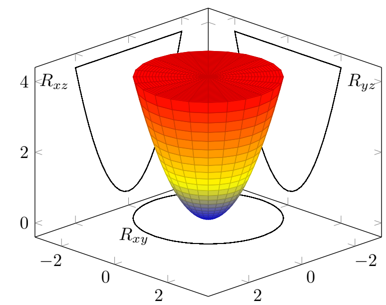

Figura 3

La utilidad de mostrar todas las posibles regiones de integración en los plano coordenados es que permite identificar cuáles son los intervalos de integración más eficientes. Por ejemplo, si se toma la región del plano yz, entonces y podría tener intervalo constante, z poseería intervalo que dependa de y, y en consecuencia, x debería tener un intervalo que dependa de y y z. De acuerdo a las ecuaciones de las superficies, no es conveniente tener a x y a y dependientes de z ya que se tendría que manejar raíces; esto indica que la región del plano xz tampoco es conveniente. La mejor forma de integrar es encontrar el intervalo de z en función de las otras variables, y después integrar en la región del plano xy que se indica es una circunferencia.

El intervalo para z es el más claro: las ecuaciones que definen el volumen indican que la parte inferior es $z = x^2 + y^2$, mientras que superior es el plano $z = 4$; de esta forma, $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$. La región del plano xy es la curva de intersección entre el plano $z = 4$ y el paraboloide, la cual es la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 4$$

que es la curva sobre el plano xy mostrada en la figura 3.

Al ser una circunferencia, lo más conveniente es hacer un cambio de coordenadas. Como x y y están sobre una circunferencia, y z depende de ellas, el cambio más eficiente es a coordenadas cilíndricas. De esta forma los intervalos de integración son:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\leq 4 & \qquad x^2+y^2 &\leq z \leq 4 \\ r^2 &\leq 4 & r^2 &\leq z \leq 4 \\ r &\leq 2 \end{aligned}$$

θ realiza una vuelta completa a la circunferencia, por lo que el último intervalo es $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Con esto, la integral a calcular es:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V xyz\ dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 (r\cos\theta)(r\sin\theta)\, z\ r\ dz\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r^3 z \cos\theta \sin\theta\ dz\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 z \Big|_{r^2}^4 \cos\theta \sin\theta\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(4r^3 - r^5\right) \cos\theta \sin\theta\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[r^4 - \frac{1}{6}r^6\right]_0^2 \cos\theta \sin\theta\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} \cos\theta \sin\theta\ d\theta \\ &= \frac{8}{3}\sin^2\theta \Big|_0^{2\pi} \\ I &= 0 \end{aligned}$$

De la misma forma que las integrales dobles, el plantear los intervalos de integración es la parte sensible del cálculo de integrales triples. Es buen hábito el plantear todas las regiones de integración del volumen para determinar cuál es la forma más eficiente de lograr la integración.

2. Volumen de un Sólido

Puesto que en las integrales triples se definen a partir de un volumen, son herramientas adecuadas para calcular el volumen de un sólido entre superficies. Para obtener un volumen con integrales triples, se requiere un integrando unitario; es decir, $f(x,y,z) = 1$. De esta forma, la integral triple de volumen en xyz es

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dV \\ V &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} dz\ dy\ dx \end{aligned}$$

Al aplicar la primera integral, se obtiene la integral doble que se utiliza para, precisamente, calcular el volumen entre dos superficies.

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} dz\ dy\ dx \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} z\Big|_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} dy\ dx \\ V &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} h_2(x,y) - h_1(x,y)\ \ dy\ dx \end{aligned}$$

Se observa que este tipo de integrales generaliza las integrales dobles y la integral de una sola variable. La generalización no solo es a integrales de dimensión inferior, sino también a integrales cuartas, quintas, y así sucesivamente. Sin embargo, las integrales de dimensiones superiores no pueden representarse geométricamente en el Universo conocido.

Ejemplo. Calcule el volumen exterior al cono $x^2+y^2=z^2$ e interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=9$.

La figura 4 ilustra las superficies y la sección de volumen a calcular.

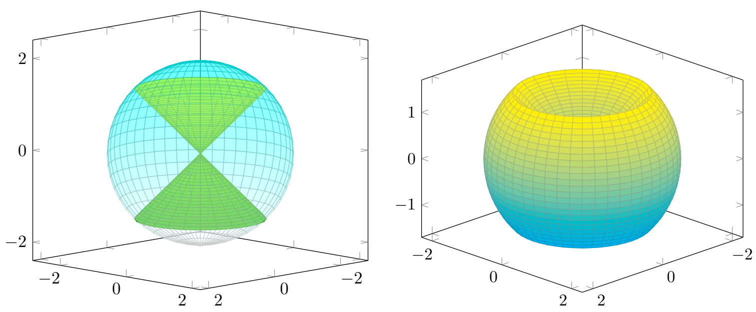

Figura 4

Puesto que una de las superficies es una esfera, se utilizarán coordenadas esféricas para calcular la integral. Tal cual se muestra en la figura, el volumen es simétrico respecto del plano xy; la integral se calculará por encima del plano coordenado mencionado y se multiplicará por dos. Antes de determinar los intervalos, las ecuaciones deben estar en el sistema esférico:

$$x^2+y^2+z^2=9 \qquad\qquad x^2+y^2=z^2$$

$$\rho=3 \qquad\qquad \varphi=\frac{\pi}{4}$$

De acuerdo a la figura, el parámetro φ varía desde el cono hasta el plano xy. De esta forma, como φ se mide desde la parte positiva del eje z hasta el plano xy, el primer intervalo de integración es $\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$.

El segundo intervalo es θ, que hace dar una vuelta completa a ρ sobre el borde de la superficie; por lo tanto, $0\leq\theta\leq 2\pi$.

Finalmente, ρ inicia en el origen de coordenadas y, mediante la figura, se induce que la máxima longitud que alcanza es la esfera. Por lo tanto, el último intervalo es $0\leq\rho\leq 3$.

El volumen solicitado se calcula con la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
V &= 2\iiint_V dV\\
&= 2\int_0^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\rho^2\sin\varphi\ d\theta\ d\varphi\ d\rho\\
&= 2\int_0^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\rho^2\sin\varphi\right)\theta\Big|_0^{2\pi}\ d\varphi\ d\rho\\
&= 4\pi\int_0^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\sin\varphi\ d\varphi\ d\rho\\
&= 4\pi\int_0^3 -\rho^2\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\rho\\
&= \frac{4\pi}{\sqrt{2}}\int_0^3\rho^2\ d\rho\\
&= \frac{4\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^3\\
V &= \frac{36\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Después de racionalizar el resultado, se obtiene que el volumen solicitado es $V=18\sqrt{2}\pi\ \ [u^3]$.

Además del volumen, las integrales triples también pueden utilizarse para calcular masa o carga a partir de la densidad volumétrica ρ, los momentos estáticos respecto a planos coordenados y el flujo a través de una superficie cerrada. El flujo se estudiará más adelante mediante el teorema de Gauss.