Cálculo Vectorial

Lectura 10: Geometría Diferencial IV, el Triedro Móvil

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero de 2020

1. El Sistema $\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{B}}$

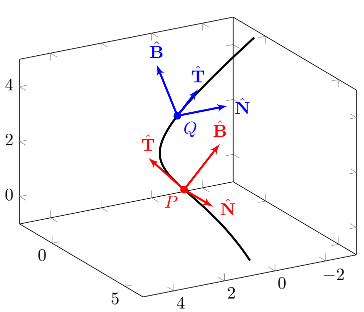

Figura 1. El triedro móvil cambia al recorrer la curva desde P hasta Q.

Los tres vectores unitarios forman un conjunto ortonormal, el cual es análogo a la base de vectores canónicos $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$. La ortogonalidad y normalización permiten que el conjunto $\left\{\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{B}}\right\}$ sea una base del espacio $\mathbb{R}^3$, con la ventaja de ser movible: conforme la curva se recorre, los tres vectores pueden ser recalculados en cada punto.

La base movible $\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{B}}$ es un sistema de referencia local que recorre una curva, como se muestra en la figura 1. Recorrer la curva indica implícitamente que se requiere la longitud de arco para definir cada uno de los vectores unitarios. Por lo tanto, existen formas de calcular esta base ortonormal mediante la longitud de arco tal cual como sucede con la curvatura y la torsión.

Los vectores $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{N}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ forman el triedro móvil de la curva $\mathbf{r}$, y están definidos a partir de la longitud de arco:

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \qquad \hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \qquad \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}$$

Al hablar del sistema de coordenadas xyz no solo se mencionan a los ejes coordenados, también se incluye a los planos xy, xz y yz. En el triedro móvil también se presentan tres planos, los cuales son ortogonales entre sí de la misma forma que los planos cartesianos. En la figura 2 se muestra la geometría de los vectores unitarios y los planos que se forman.

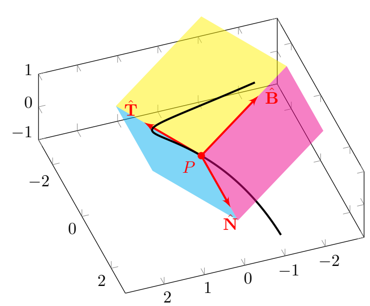

Figura 2. Los planos del triedro móvil son osculador (cian), normal (magenta) y rectificante (amarillo).

Cada plano de este sistema de coordenadas local está formado por una pareja de vectores del triedro, y será ortogonal al tercer vector. Los tres planos tienen nombres de acuerdo a su posición respecto de la curva: osculador, normal y rectificante.

Sea $\mathbf{r}(t)$ una curva con vectores tangente, normal y binormal unitarios. Los planos del triedro móvil son:

Osculador. Es el plano que contiene a la circunferencia de curvatura (también llamada osculatriz) y es ortogonal a $\hat{\mathbf{B}}$. El nombre viene del latín *osculum*, beso.

Normal. Es el plano que corta ortogonalmente a $\mathbf{r}$ y, por lo tanto, es perpendicular a $\hat{\mathbf{T}}$.

Rectificante. Es el plano tangente a $\mathbf{r}$ y es ortogonal a $\hat{\mathbf{N}}$. El nombre viene de la característica de tangencia, pues geométricamente el plano guía a la curva.

Recapitulando los últimos temas estudiados, se ha caracterizado a una curva mediante el triedro móvil $\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{B}}$, la longitud de arco, la curvatura, la torsión, y ahora mediante los planos osculador, normal y rectificante. Éstos son los fundamentos de la Geometría Diferencial de una curva.

Ejemplo. Sea la curva

$$\mathbf{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + \left(2 - t^2\right)\hat{\mathbf{j}} - e^{2t}\hat{\mathbf{k}}$$

Obtenga las ecuaciones cartesianas de los planos osculador, normal y rectificante en el punto donde $t = 0$.

Para cada plano se requiere el vector unitario ortogonal correspondiente, pero para efectos prácticos, con que dicho vector sea paralelo es suficiente. Pero, primero se obtendrá el punto base de cada plano a partir de $t = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= (0)\,\hat{\mathbf{i}} + \left(2 - (0)^2\right)\hat{\mathbf{j}} - e^{2(0)}\hat{\mathbf{k}} \\ &= 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

El punto es $P(0, 2, -1)$. Para el plano normal, la derivada de $\mathbf{r}$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \hat{\mathbf{i}} - 2t\hat{\mathbf{j}} - 2e^{2t}\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{r}'(0) &= \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación del plano normal es

$$\begin{aligned} \left(x\hat{\mathbf{i}} + (y-2)\,\hat{\mathbf{j}} + (z+1)\,\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{k}}\right) &= 0 \\ x - 2z - 2 &= 0 \end{aligned}$$

La derivada de $\hat{\mathbf{T}}$ en el punto P indicará un vector paralelo a $\hat{\mathbf{N}}$.

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{r}(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4e^{4t}} \\ \Rightarrow \quad & \hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 4e^{4t}}}\left(\hat{\mathbf{i}} - 2t\hat{\mathbf{j}} - 2e^{2t}\hat{\mathbf{k}}\right) \\ \Rightarrow \quad & \hat{\mathbf{T}}' = \frac{-4\left(t + 2e^{4t}\right)}{\sqrt{\left(1 + 4t^2 + 4e^{4t}\right)^3}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{8e^{4t}(2t-1) - 2}{\sqrt{\left(1 + 4t^2 + 4e^{4t}\right)^3}}\hat{\mathbf{j}} - \\ & \qquad - \frac{4e^{2t}\left(4t^2 - 2t + 1\right)}{\sqrt{\left(1 + 4t^2 + 4e^{4t}\right)^3}}\hat{\mathbf{k}} \\ \Rightarrow \quad & \hat{\mathbf{T}}'(0) = -\frac{8}{5\sqrt{5}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{10}{5\sqrt{5}}\hat{\mathbf{j}} - \frac{4}{5\sqrt{5}}\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Al simplificar el vector $\hat{\mathbf{T}}'(0)$, el vector que se utilizará para la ecuación del plano rectificante es $\mathbf{u} = -4\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$.

$$\begin{aligned} \left(x\hat{\mathbf{i}} + (y-2)\,\hat{\mathbf{j}} + (z+1)\,\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(-4\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}\right) &= 0 \\ -4x - 5y - 2z + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Para el plano osculador solo se obtendrá el producto cruz entre los vectores ortogonales a los planos anteriores.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(0)\times\mathbf{u} &= \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & -5 & -2\end{vmatrix} \\ &= -10\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

El plano osculador tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\left(x\hat{\mathbf{i}} + (y-2)\,\hat{\mathbf{j}} + (z+1)\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(-2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 1\hat{\mathbf{k}}\right) &= 0 \\ -2x + 2y - z - 5 &= 0\end{aligned}$$

2. Las Ecuaciones de Ferret-Senet

Las definiciones de torsión y curvatura a partir de la longitud de arco permiten fundamentar a la Geometría Diferencial con tres simples ecuaciones entre los vectores del triedro móvil.

Tomando en cuenta que

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\cdot\mathbf{T} = 0$$

el vector normal unitario es

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\dfrac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}}{\left\|\dfrac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right\|} \tag{1}$$

Como la definición de curvatura es $\kappa = \left\|\dfrac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right\|$, la expresión (1) se reescribe como

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \tag{2}$$

Dos propiedades importantes de los vectores $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{N}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ son su norma unitaria (producto punto de un vector consigo mismo igual a uno) y su ortogonalidad (producto punto entre vectores diferentes igual a cero). Tomando el producto $\hat{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{T}} = 0$ y derivándolo, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\hat{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{T}}\right) &= 0 \\ \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}\cdot\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{B}}\cdot\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} &= \end{aligned}$$

Por (2)

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}\cdot\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{B}}\cdot\kappa\hat{\mathbf{N}} &= \\ \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}\cdot\hat{\mathbf{T}} + \kappa\left(\hat{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{N}}\right) &= \\ \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}\cdot\hat{\mathbf{T}} &= 0 \qquad (3)\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\dfrac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}\cdot\hat{\mathbf{B}} = 0$, entonces la derivada del vector binormal está contenida en el plano osculador, y en consecuencia, es una combinación lineal de los vectores $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$;

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = \alpha_1\hat{\mathbf{T}} + \alpha_2\hat{\mathbf{N}} \tag{4}$$

Aplicando el producto punto con $\hat{\mathbf{T}}$ a ambos lados de (4) y sustituyendo (3) se obtendrá un escalar de la combinación lineal (4).

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} &= \alpha_1\hat{\mathbf{T}} + \alpha_2\hat{\mathbf{N}} \\ \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}\cdot\hat{\mathbf{T}} &= \alpha_1\hat{\mathbf{T}}\cdot\hat{\mathbf{T}} + \alpha_2\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\mathbf{T}} \\ 0 &= \alpha_1\hat{\mathbf{T}}\cdot\hat{\mathbf{T}} \\ 0 &= \alpha_1 \qquad (5)\end{aligned}$$

El valor en (5) indica que la derivada de $\hat{\mathbf{B}}$ es un vector paralelo a $\hat{\mathbf{N}}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} &= \alpha_1\hat{\mathbf{T}} + \alpha_2\hat{\mathbf{N}} \\ \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} &= \alpha_2\hat{\mathbf{N}} \qquad (6)\end{aligned}$$

Para la magnitud, se derivará el producto $\hat{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{N}} = 0$ y se utilizará (6).

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\hat{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{N}}\right) &= 0 \\ \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}\cdot\hat{\mathbf{N}} + \hat{\mathbf{B}}\cdot\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} &= \\ \alpha_2\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\mathbf{N}} + \hat{\mathbf{B}}\cdot\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} &= \\ \alpha_2 + \hat{\mathbf{B}}\cdot\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} &= \\ \alpha_2 &= -\hat{\mathbf{B}}\cdot\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} \qquad (7)\end{aligned}$$

Al sustituir (7) en (6) y recordando que la torsión es $|\tau| = \left\|\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}\right\|$, se llega a una expresión para definir al vector normal.

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} &= \left(-\hat{\mathbf{B}}\cdot\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds}\right)\hat{\mathbf{N}} \\ \Rightarrow \qquad |\tau| &= \left|-\hat{\mathbf{B}}\cdot\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds}\right| \\ \therefore \qquad -\tau &= \hat{\mathbf{B}}\cdot\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} \\ \Rightarrow \qquad \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} &= -\tau\hat{\mathbf{N}} \qquad (8)\end{aligned}$$

Por último, mediante el producto cruz, el vector normal es $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{B}}\times\hat{\mathbf{T}}$. Al obtener la derivada del vector normal y sustituir las expresiones (2) y (8) se calculará la derivada del vector normal.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{N}} &= \hat{\mathbf{B}}\times\hat{\mathbf{T}} \\ \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} &= \hat{\mathbf{B}}\times\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} + \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}\times\hat{\mathbf{T}} \\ &= \hat{\mathbf{B}}\times\kappa\hat{\mathbf{N}} - \tau\hat{\mathbf{N}}\times\hat{\mathbf{T}} \\ &= -\kappa\left(\hat{\mathbf{N}}\times\hat{\mathbf{B}}\right) + \tau\left(\hat{\mathbf{T}}\times\hat{\mathbf{N}}\right) \\ \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} &= -\kappa\hat{\mathbf{T}} + \tau\hat{\mathbf{B}} \qquad (9)\end{aligned}$$

Las expresiones (2), (8) y (9) son las ecuaciones de Frédéric Frenet y Joseph Alfred Serret.

Sea una curva $\mathbf{r}(s)$ con triedro móvil $\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{B}}$. Las ecuaciones de Frenet-Serret para la Geometría Diferencial son:

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{N}}, \qquad \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{N}}, \qquad \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = \tau\hat{\mathbf{B}} - \kappa\hat{\mathbf{T}}$$