Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$a_1(y)\frac{dx}{dy} + a_0(y)\,x = g(y)$$

Caso más sencillo, cuando $g(y)=0$

$\therefore$ Ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden

$$a_1(y)\,\frac{dx}{dy} + a_0(y)\,x = 0$$

Para resolver una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden se tienen dos procedimientos

1er Método: Variables separables

$$a_1(y)\,\frac{dx}{dy} + a_0(y)\,x = 0$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{a_0(y)}{a_1(y)}\,x = 0 \quad ; \quad \frac{a_0(y)}{a_1(y)} = p(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = -p(y)\,x$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = -\int p(y)\,dy$$

$$\ln x + C_1 = -\int p(y)\,dy + C_2$$

$$\ln x = -\int p(y)\,dy + C$$

Nota: Al ser una ecuación diferencial lineal homogénea se hace explícito que la variable dependiente es x, por lo tanto se requiere a la solución de tipo explícito.

$\therefore$

$$\ln x = -\int p(y)\,dy + C$$

$$e^{\ln x} = e^{-\int p(y)\,dy + C} = e^{-\int p(y)\,dy}\,\overset{C}{\cancel{e^{C}}}$$

$$\boxed{x = C\,e^{-\int p(y)\,dy}}$$

2do Método: Factor integrante

$$a_1(y)\frac{dx}{dy} + a_0(y)x = 0$$

Para comenzar con este segundo método, se requiere normalizar a la ecuación diferencial.

$\therefore$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{a_0(y)}{a_1(y)}x = 0 \qquad \frac{a_0(y)}{a_1(y)} = p(y)$$

$\therefore$

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = 0$$

Proponiendo un factor integrante

$$\mu(y) = e^{\int p(y)\,dy}$$

y derivando con respecto de "y"

$$\frac{d\mu}{dy} = e^{\int p(y)\,dy}\,\frac{d}{dy}\left(\int p(y)\,dy\right)$$

$$\therefore \boxed{\frac{d\mu}{dy} = \mu(y)\,p(y)} \quad \ldots (1)$$

derivando de forma similar al producto de funciones ux, tenemos

$$\frac{d}{dy}(ux) = u\frac{dx}{dy} + x\frac{du}{dy},$$

tomando en cuenta la relación (1), tenemos

$$\frac{d}{dy}(ux) = u\frac{dx}{dy} + xup$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d(ux)}{dy} = u\left(\frac{dx}{dy} + px\right)} \quad \ldots (2)$$

Retomando la ecuación diferencial original a resolver

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = 0,$$

Esta ecuación nos permite multiplicarla con uno sin afectarla, por lo que ese uno será nuestro factor integrante propuesto.

$$\frac{u(y)}{u(y)}\left[\frac{dx}{dy} + p(y)x\right] = 0$$

$$\therefore \quad u\left[\frac{dx}{dy} + py\right] = 0,$$

tomando en cuenta la relación (2), se tiene

$$\boxed{\frac{d(ux)}{dy} = 0.} \quad \ldots (a)$$

Aplicando el método de variables separables, tenemos

$$\int d(ux) = \int 0 \, dy$$

$$ux = C$$

Despejando a x, que es la función a encontrar

$$x = \frac{C}{u}, \text{ tomando en cuenta que } u = e^{\int p(y)dy}$$

La solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden es:

$$\boxed{x = Ce^{-\int p(y)dy}}$$

jemplo.

Resolver la ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} + x^3 y = 0$$

⊗ Resolviendo mediante el primer método: Variables separables

$$x\frac{dy}{dx} = -x^3 y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x^3}{x}dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -x^2 dx$$

$$\ln y = -\frac{x^3}{3} + C$$

$$e \qquad e$$

$$y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$$ Solución general.

Resolviendo mediante el segundo método

$$x\frac{dy}{dx} + x^3 y = 0$$

Normalizando

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = 0 \quad \therefore \quad p(x) = x^2$$

Proponiendo el factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int x^2} = e^{\frac{x^3}{3}}$$

Nota: Para los factores integrantes, se considera a la constante de integración, un valor de 1.

tomando en cuenta la ecuación 4

$$\frac{d(uy)}{dx} = 0$$

$$\int d(uy) = \int 0 \, dx$$

$$uy = Cte$$

$$\therefore \quad y = \frac{C}{u} = \frac{C}{e^{\frac{x^3}{3}}}$$

$$\therefore \quad y = C e^{-\frac{x^3}{3}}$$

Solución general.

Considerando el segundo método para resolver una ecuación diferencial lineal de la siguiente forma,

$$a_1(y)\frac{dx}{dy} + a_0(y)\,x = g(y)$$

Normalizando la ecuación

$$\frac{dx}{dy} + \frac{a_0(y)}{a_1(y)}\,x = \frac{g(y)}{a_1(y)}, \quad \frac{a_0(y)}{a_1(y)} = p(y), \quad \frac{g(y)}{a_1(y)} = f(y)$$

$$\frac{dx}{dy} + p(y)\,x = f(y)$$

Multiplicando a la ecuación diferencial por el factor integrante propuesto se tiene

$$\frac{\mu(y)}{\mu(y)}\left(\frac{dx}{dy} + p(y)\,x\right) = f(y)$$

$$\mu\left(\frac{dx}{dy} + px\right) = \mu f$$

Tomando en cuenta a la relación (2)

$$\boxed{\frac{d(\mu x)}{dy} = \mu f} \quad \therefore \ (6)$$

Resolviendo por variables separables

$$\int d(\mu x) = \int \mu f\, dy$$

$$\mu x = \int \mu f \, dy + C$$

despejando x

$$\therefore \quad x = \frac{1}{\mu}\int \mu f \, dy + \frac{C}{\mu}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = e^{-\int p(y)dy} \int e^{\int p(y)dy} f(y)\, dy + C e^{-\int p(y)dy}}$$

Solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden.

• Nota: Para este análisis la variable dependiente es "x", mientras que la independiente es y.

Formulario para examen

$$\boxed{(\mu x)' = 0} \quad \ldots \text{(a)}$$

$$\boxed{(\mu x)' = \mu f} \quad \ldots \text{(b)}$$

donde $\mu(y) = e^{\int p(y)dy}$