Cálculo Vectorial
Lectura 20: Invariantes en Sistemas de Coordenadas Ortogonales

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

A los operadores diferenciales de gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano se les conoce como invariantes. Este término indica que los resultados que arrojen estos operadores no cambia (no varía) con el sistema de coordenadas; es decir, el resultado del operador diferencial es independiente del sistema de coordenadas que se esté utilizando. Por ejemplo, si **f** es irrotacional en el sistema de coordenadas cartesianas, entonces también lo será en coordenadas esféricas o cilíndricas.

La invarianza del operador no indica que se calcula de la misma forma en todos los sistemas de coordenadas; como se vio anteriormente, los factores de escala reajustan las componentes de los campos. Por eficiencia de cálculo, todos los desarrollos se realizarán en $\mathbb{R}^2$ ya que los resultados pueden extenderse a $\mathbb{R}^3$. Debido a la definición de rotacional, éste es el único operador que se realizará en $\mathbb{R}^3$.

1. Gradiente

El campo escalar $f(u,v)$ en coordenadas curvilíneas puede expresarse en términos de x y y mediante las ecuaciones de transformación del sistema de coordenadas uv:

$$\begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \end{cases}$$

Al calcular el gradiente se aplica

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} \tag{1}$$

Como f depende de u y v, y éstos a su vez de x y y. Para calcular las derivadas parciales debe aplicarse la regla de la cadena en derivadas parciales, donde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3}$$

Al sustituir las derivadas (2) y (3) en el gradiente (1) se pueden reorganizar los vectores respecto a las derivadas parciales en u y v.

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}\right)$$
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial v}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}\right)$$
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v \tag{4}$$

Por lo que (4) es la expresión que calcula el gradiente en coordenadas uv. Pero, como se revisó en coordenadas curvilíneas, en un sistema ortogonal los gradientes de las ecuaciones de transformación son:

$$\nabla u = \frac{1}{h_u}\hat{\mathbf{u}}, \qquad \nabla v = \frac{1}{h_v}\hat{\mathbf{v}}$$

Al sustituir en (4) se llega al gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{\mathbf{v}}$$

En el sistema de coordenadas ortogonales uvw el gradiente de un campo escalar $f(u, v, w)$ se calcula como

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{\mathbf{w}}$$

2. Divergencia

A partir de la expresión del gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales se observa que el operador nabla se define como

$$\nabla = \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\hat{\mathbf{v}}$$

Al aplicar el operador nabla para calcular la divergencia al campo $\mathbf{f}(u, v) = P\hat{\mathbf{u}} + Q\hat{\mathbf{v}}$ se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\hat{\mathbf{v}}\right) \cdot (P\hat{\mathbf{u}} + Q\hat{\mathbf{v}})$$

No se trata de un producto punto, pero sí de un operador diferencial el cual es lineal. Por lo que se puede aplicar álgebra de transformaciones lineales para desarrollar la divergencia.

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\hat{\mathbf{v}}\right) \cdot (P\hat{\mathbf{u}} + Q\hat{\mathbf{v}})$$
$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}(P\hat{\mathbf{u}} + Q\hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}(P\hat{\mathbf{u}} + Q\hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{v}} \tag{5}$$

Se desarrollará la derivada respecto a u en la ecuación (5), denotada d_u, y se inducirá el resultado para la derivada respecto a v. Al aplicar la linealidad de la derivada y la derivada del producto se obtiene:

$$d_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}(P\hat{\mathbf{u}} + Q\hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{u}}$$
$$d_u = \frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial P}{\partial u}\hat{\mathbf{u}} + P\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial u}\hat{\mathbf{v}} + Q\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial u}\right) \cdot \hat{\mathbf{u}} \tag{6}$$

Por lo que se revisó en Geometría Diferencial, la derivada de un vector con magnitud constante es un vector perpendicular. Por tal motivo, la derivada de $\hat{\mathbf{u}}$ respecto a u es $\alpha\hat{\mathbf{v}}$, y (6) se reescribe como

$$d_u = \frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial P}{\partial u}\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + P\alpha\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{\partial Q}{\partial u}\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + Q\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial u} \cdot \hat{\mathbf{u}}\right)$$
$$d_u = \frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial P}{\partial u} + Q\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial u} \cdot \hat{\mathbf{u}}\right) \tag{7}$$

Por otro lado, $\mathbf{r}_v = h_v\hat{\mathbf{v}}$ y $\mathbf{r}_u = h_u\hat{\mathbf{u}}$ por la transformación de xy a uv, que al aplicarles derivadas parciales cruzadas y por la derivada de un vector unitario se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathbf{r}_v\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(h_v\hat{\mathbf{v}}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\mathbf{r}_u\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(h_u\hat{\mathbf{u}}\right)$$
$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial v}=h_v\frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial u}+\frac{\partial h_v}{\partial u}\hat{\mathbf{v}} \qquad \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v\partial u}=h_u\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial v}+\frac{\partial h_u}{\partial v}\hat{\mathbf{u}}$$

Por el teorema de Schwarz sobre derivadas parciales mixtas se puede hacer la igualdad

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial v}&=\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v\partial u}\\ h_v\frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial u}+\frac{\partial h_v}{\partial u}\hat{\mathbf{v}}&=h_u\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial v}+\frac{\partial h_u}{\partial v}\hat{\mathbf{u}} \qquad (8)\end{aligned}$$

Al aplicar el producto punto a ambos lados de la igualdad (8), y por la derivada de un vector constante se obtiene

$$\begin{aligned}h_v\frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial u}\cdot\hat{\mathbf{u}}+\frac{\partial h_v}{\partial u}\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{u}}&=h_u\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial v}\cdot\hat{\mathbf{u}}+\frac{\partial h_u}{\partial v}\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{u}}\\ h_v\frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial u}\cdot\hat{\mathbf{u}}&=\frac{\partial h_u}{\partial v}\\ \frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial u}\cdot\hat{\mathbf{u}}&=\frac{1}{h_v}\frac{\partial h_u}{\partial v} \qquad (9)\end{aligned}$$

Al sustituir (9) en (7) se obtiene

$$\begin{aligned}d_u&=\frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial P}{\partial u}+Q\frac{\partial\hat{\mathbf{v}}}{\partial u}\cdot\hat{\mathbf{u}}\right)\\ &=\frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial P}{\partial u}+\frac{Q}{h_v}\frac{\partial h_u}{\partial v}\right)\end{aligned}$$

Siguiendo el mismo proceso, la derivada respecto a v de (5) es

$$\begin{aligned}d_v&=\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\left(P\hat{\mathbf{u}}+Q\hat{\mathbf{v}}\right)\cdot\hat{\mathbf{v}}\\ d_v&=\frac{1}{h_v}\left(\frac{P}{h_u}\frac{\partial h_v}{\partial u}+\frac{\partial Q}{\partial v}\right)\end{aligned}$$

Sustituyendo d_u y d_v en la divergencia en (5) se pueden reagrupar términos:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{f}&=\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(P\hat{\mathbf{u}}+Q\hat{\mathbf{v}}\right)\cdot\hat{\mathbf{u}}+\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\left(P\hat{\mathbf{u}}+Q\hat{\mathbf{v}}\right)\cdot\hat{\mathbf{v}}\\ &=\frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial P}{\partial u}+\frac{Q}{h_v}\frac{\partial h_u}{\partial v}\right)+\frac{1}{h_v}\left(\frac{P}{h_u}\frac{\partial h_v}{\partial u}+\frac{\partial Q}{\partial v}\right)\\ &=\frac{1}{h_u}\frac{\partial P}{\partial u}+\frac{Q}{h_uh_v}\frac{\partial h_u}{\partial v}+\frac{P}{h_uh_v}\frac{\partial h_v}{\partial u}+\frac{1}{h_v}\frac{\partial Q}{\partial v}\\ &=\frac{h_v}{h_uh_v}\frac{\partial P}{\partial u}+\frac{Q}{h_uh_v}\frac{\partial h_u}{\partial v}+\frac{P}{h_uh_v}\frac{\partial h_v}{\partial u}+\frac{h_u}{h_uh_v}\frac{\partial Q}{\partial v}\\ &=\frac{1}{h_uh_v}\left({\color{red}h_v\frac{\partial P}{\partial u}+P\frac{\partial h_v}{\partial u}}+{\color{blue}Q\frac{\partial h_u}{\partial v}+h_u\frac{\partial Q}{\partial v}}\right) \qquad (10)\end{aligned}$$

En la ecuación (10) los términos en rojo son la derivada del producto h_vP respecto de u y los términos en azul son la derivada del producto h_uQ respecto de v. Por lo tanto, la divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales es

$$\nabla\cdot\mathbf{f}=\frac{1}{h_uh_v}\left(\frac{\partial}{\partial u}h_vP+\frac{\partial}{\partial v}h_uQ\right)$$

En el sistema de coordenadas ortogonales uvw la divergencia de un campo vectorial

$$\mathbf{f}\left(u,v,w\right)=P\hat{\mathbf{u}}+Q\hat{\mathbf{v}}+R\hat{\mathbf{w}}$$

se calcula como

$$\nabla\cdot\mathbf{f}=\frac{1}{h_uh_vh_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}h_vh_wP+\frac{\partial}{\partial v}h_uh_wQ+\frac{\partial}{\partial w}h_uh_vR\right)$$

3. Rotacional

Para el rotacional se aplica la definición a partir del operador nabla.

Tomando al campo

$$\mathbf{f}\left(u,v,w\right) = P\hat{\mathbf{i}} + Q\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}}$$

al aplicarle la definición de rotacional

$$\nabla \times \mathbf{f} = \left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\hat{\mathbf{w}}\right) \times \left(P\hat{\mathbf{i}} + Q\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}}\right)$$

se construye el determinante

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{u}} & \hat{\mathbf{v}} & \hat{\mathbf{w}} \\ \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} & \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} & \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

que por propiedades en el determinante del producto de una columna por un escalar se llega a

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{\mathbf{u}} & h_v\hat{\mathbf{v}} & h_w\hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_uP & h_vQ & h_wR \end{vmatrix}$$

En el sistema de coordenadas ortogonales uvw el rotacional de un campo vectorial

$$\mathbf{f}\left(u,v,w\right) = P\hat{\mathbf{u}} + Q\hat{\mathbf{v}} + R\hat{\mathbf{w}}$$

se calcula como

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{\mathbf{u}} & h_v\hat{\mathbf{v}} & h_w\hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_uP & h_vQ & h_wR \end{vmatrix}$$

4. Laplaciano

Como el laplaciado está definido como la divergencia del gradiente, solamente hay que aplicar ambas definiciones para encontrar la expresión en coordenadas curvilíneas. Para el campo escalar $f\left(u,v\right)$, su gradiente es

$$\nabla \mathbf{f} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{\mathbf{v}}$$

Al aplicarle la divergencia se obtiene

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{f} = \frac{1}{h_u h_v}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{h_v}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{h_u}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

En el sistema de coordenadas ortogonales uvw el laplaciano de un campo escalar $f\left(u,v,w\right)$ se calcula como

$$\nabla^2 \mathbf{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)$$