Cálculo Vectorial
Lectura 25: Integral de Línea en Coordenadas Curvilíneas Ortogonales

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

Las integrales de línea no solo pueden calcularse en el sistema cartesiano. Como se estudió, el campo conservativo es un gradiente, el cual forma parte de los invariantes de primer orden. Eso indica que la integral de línea puede plantearse y calcularse en otros sistemas de coordenadas curvilíneos.

Tomando en cuenta que las ecuaciones de transformación a un sistema curvilíneo ortogonal bidimensional son

$$x = x\left(u, v\right) \qquad\qquad y = y\left(u, v\right)$$

entonces la trayectoria $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ puede expresarse como

$$\mathbf{r} = x\left(u, v\right)\hat{\mathbf{i}} + y\left(u, v\right)\hat{\mathbf{j}}$$

cuya diferencial es

$$d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} \tag{1}$$

Como x y y dependen de u y v se requiere aplicar la derivada total respecto del parámetro de la curva:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\end{aligned}$$

Por lo tanto, las diferenciales dx y dy son:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \tag{2}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \tag{3}$$

Al sustituir (2) y (3) en (1), se pueden reorganizar las componentes para obtener la diferencial de curva en términos de u y v.

$$\begin{aligned}d\mathbf{r} &= dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}\\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right)\hat{\mathbf{j}}\\ &= \frac{\partial x}{\partial u}\,du\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u}\,du\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\hat{\mathbf{j}}\\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u}\hat{\mathbf{j}}\right)du + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial v}\hat{\mathbf{j}}\right)dv\\ d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,dv \qquad (4)\end{aligned}$$

Mediante la definición de los factores de escala y vectores unitarios, la expresión (4) da como resultado la diferencial en términos del sistema curvilíneo ortogonal uv:

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\ du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\ dv \\
d\mathbf{r} &= h_u\ du\hat{\mathbf{u}} + h_v\ dv\hat{\mathbf{v}}
\end{aligned}
$$

Sea el campo vectorial

$$\mathbf{f}\left(u,v,w\right) = P\left(u,v,w\right)\hat{\mathbf{u}} + Q\left(u,v,w\right)\hat{\mathbf{v}} + R\left(u,v,w\right)\hat{\mathbf{w}}$$

La integral de línea del campo $\mathbf{f}$ a lo largo de la trayectoria C es

$$I = \int_C Ph_u\ du + Qh_v\ dv + Rh_w\ dw$$

Al igual que los invariantes diferenciales, las integrales de línea también son invariantes que deben ser ajustados por los factores de escala para llegar al resultado correcto.

Ejemplo. Sea el campo vectorial

$$\mathbf{f}\left(r,\theta\right) = \sin\theta\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Calcule la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo de la trayectoria C, definida por el cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

En coordenadas polares la integral se calcula como

$$I = \int_C Ph_r\ dr + Qh_\theta\ d\theta$$

A partir de la ecuación del cardioide se obtendrá la diferencial dr.

$$
\begin{aligned}
r &= 1 + \cos\theta \\
\frac{dr}{d\theta} &= -\sin\theta \\
dr &= -\sin\theta\ d\theta
\end{aligned}
$$

El campo evaluado, al no depender de r queda exactamente igual. Pero el factor de escala $h_\theta = r$ sí debe evaluarse con la ecuación del cardioide. De tal forma, la integral de línea es

$$
\begin{aligned}
I &= \int_C Ph_r\ dr + Qh_\theta\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin\theta\cos\theta\right)\left(1\right)\ dr + \left(\cos\theta\right)r\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin\theta\cos\theta\right)\left(-\sin\theta\right) + \left(\cos\theta\right)\left(1+\cos\theta\right)\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta\cos\theta + \cos\theta + \cos^2\theta\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta\cos\theta + \cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\ d\theta \\
&= \left[-\frac{1}{3}\sin^3\theta + \sin\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left(2\pi - 0\right) \\
I &= \pi
\end{aligned}
$$

Para determinar si un campo en coordenadas curvilíneas es conservativo, solo hay que aplicar la definición de rotacional al campo

$$\mathbf{f}\left(u,v,w\right) = P\hat{\mathbf{u}} + Q\hat{\mathbf{v}} + R\hat{\mathbf{w}}$$

e igualar al vector nulo para encontrar las ecuaciones de la diferencial exacta. Se recalca que, nuevamente, los factores de escala desempeñan un papel importante para conservar la invariancia del resultado de la integral de línea. Entonces, el rotacional de $\mathbf{f}$ es

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{\mathbf{u}} & h_v \hat{\mathbf{v}} & h_w \hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u P & h_v Q & h_w R \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = {} & \frac{1}{h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial v} h_w R - \frac{\partial}{\partial w} h_v Q \right) \hat{\mathbf{u}} + \\ & + \frac{1}{h_u h_w} \left(\frac{\partial}{\partial w} h_u P - \frac{\partial}{\partial u} h_w R \right) \hat{\mathbf{v}} + \\ & + \frac{1}{h_u h_v} \left(\frac{\partial}{\partial u} h_v Q - \frac{\partial}{\partial v} h_u P \right) \hat{\mathbf{w}} \end{aligned}$$

por lo que al igualar sus componentes a 0 se obtienen las ecuaciones de la diferencial exacta.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial v} h_w R - \frac{\partial}{\partial w} h_v Q & \Rightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial v} h_w R = \frac{\partial}{\partial w} h_v Q \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial w} h_u P - \frac{\partial}{\partial u} h_w R & \Rightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial w} h_u P = \frac{\partial}{\partial u} h_w R \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial u} h_v Q - \frac{\partial}{\partial v} h_u P & \Rightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial v} h_u P = \frac{\partial}{\partial u} h_v Q \end{aligned}$$

Ejemplo. Sea el campo vectorial

$$\mathbf{g}(\rho, \varphi, \theta) = (\sin \varphi + 2\rho \cos \theta) \hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} - \rho \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Determine si es conservativo. En caso afirmativo, obtenga su función potencial.

Por las ecuaciones de la diferencial exacta

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} R\rho \sin \varphi = \frac{\partial}{\partial \theta} Q\rho$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\rho^2 \sin \theta \right) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \rho \cos \varphi \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} R\rho \sin \varphi &= \frac{\partial}{\partial \theta} P \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\rho^2 \sin \theta \right) &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \varphi + 2\rho \cos \theta) \\ -2\rho \sin \theta &= -2\rho \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} Q\rho &= \frac{\partial}{\partial \varphi} P \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \cos \varphi &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi + 2\rho \cos \theta) \\ \cos \varphi &= \cos \varphi \end{aligned}$$

Se observa que el campo es conservativo y puede calcularse su función potencial. Tomando en cuenta que

$$\nabla g(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

entonces

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho} \\ \sin \varphi + 2\rho \cos \theta &= \frac{1}{1} \frac{\partial g}{\partial \rho} \\ \int \sin \varphi + 2\rho \cos \theta \, d\rho &= \int dg \\ \rho \sin \varphi + \rho^2 \cos \theta + a(\varphi, \theta) &= g(\rho, \varphi, \theta) \end{aligned}$$

Al derivar g respecto de φ y dividir entre h_φ se tiene

$$\frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial g}{\partial \varphi} = Q$$

$$\frac{1}{\rho}\big(\rho\cos\varphi + a_\varphi(\varphi,\theta)\big) =$$

$$\cos\varphi + \frac{1}{\rho}a_\varphi(\varphi,\theta) = \cos\varphi$$

Por lo que $a_\varphi(\varphi,\theta) = 0$ y en consecuencia $a(\varphi,\theta) = b(\theta)$. Repitiendo el proceso pero para θ se llega a

$$\frac{1}{h_\theta}\frac{\partial g}{\partial \theta} = R$$

$$\frac{1}{\rho\sin\varphi}\big(-\rho^2\sin\theta + b_\theta(\theta)\big) =$$

$$-\rho\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} + \frac{1}{\rho\sin\varphi}b_\theta(\theta) = -\rho\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$$

de donde $b_\theta(\theta) = 0$, y por lo tanto $b(\theta) = k$. La función potencial del campo $\mathbf{g}$ es

$$g(\rho,\varphi,\theta) = \rho\sin\varphi + \rho^2\cos\theta + k$$