Cálculo Vectorial

Lectura 7: Geometría Diferencial I, el Vector Tangente

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero de 2020

1. El Vector Tangente Unitario

Una vez conocida la forma en la cual se deriva una función vectorial de variable escalar, hay que analizar la geometría detrás tanto de la función como de su derivada.

Para comenzar, un campo vectorial con variable escalar se ajusta a la definición de curva.

> Una curva C es un lugar geométrico representado por una ecuación vectorial dependiente de un único parámetro real:
>
> $$C: \ \mathbf{r} = f_1(t)\,\hat{\mathbf{i}} + f_2(t)\,\hat{\mathbf{j}} + f_3(t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

Por lo tanto, toda ecuación vectorial de una curva expresa una función vectorial de variable escalar. Al ser una función, la curva puede derivarse según se ha estudiado anteriormente y se obtendría una nueva ecuación vectorial $\mathbf{r}'$ que es un vector derivada. Para determinar su significado geométrico, se utilizará Cálculo de una variable y Geometría Analítica.

Dados una función $y = f(x)$ con derivada $y' = f'(x)$ y un vector $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$, f puede ser sustituida en el vector $\mathbf{r}$, de manera que se tendrá una función vectorial con variable x:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}(x) = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \tag{1}$$

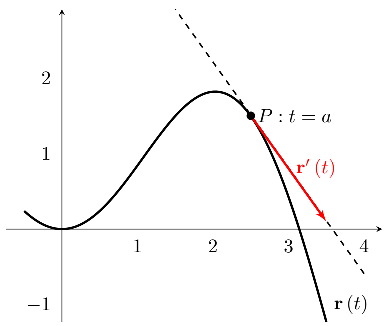

Figura 1. La curva $\mathbf{r}(t)$ posee una recta tangente en $t = a$, de la cual su vector director es la derivada $\mathbf{r}'(a)$.

La expresión (1) puede derivarse respecto de x, resultando en

$$\mathbf{r}'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Por otro lado, la derivada f' representa la pendiente de la recta tangente en $x = a$, tal que dicha recta tiene como ecuación

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ y &= f'(a)\,x + b \end{aligned} \tag{3}$$

Definiendo un segundo vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$, ahora se sustituye (3) en $\mathbf{p}$ y se separan los términos variables de los términos constantes:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ f'(a)\,x + b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ f'(a)\,x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \\ \mathbf{p} &= x \begin{bmatrix} 1 \\ f'(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \qquad (4)\end{aligned}$$

La ecuación vectorial en (4) pertenece a la recta tangente a f, y su vector director es $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(a) \end{bmatrix}$. Se observa que la derivada vectorial (2) evaluada en $x = a$ es el vector director de la recta (4). Por lo tanto, la derivada de una función vectorial de variable escalar $\mathbf{r}$, geométricamente es un vector tangente a $\mathbf{r}$ (véase la figura 1).

Sea $\mathbf{r}(t)$ una función vectorial de variable escalar. La derivada $\mathbf{r}'(a)$ es el vector director de la recta tangente a $\mathbf{r}$ en $t = a$.

Si se obtiene el vector unitario de $\mathbf{r}'(a)$, entonces se conoce como el vector tangente unitario a la curva $\mathbf{r}$, y se denota como

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

Una característica importante del vector tangente es su dirección. Si la curva $\mathbf{r}(t)$ representa la trayectoria de una partícula en movimiento, el vector tangente señala la dirección del movimiento en un momento en particular.

Debido a su condición de tangencia, los vectores tangentes también son útiles para medir la longitud de la curva.

Ejemplo. Sea la curva

$$\mathbf{r}(t) = 7e^{2-t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{16}{t^3}\hat{\mathbf{j}} + (5-t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

¿Cuál es una de las ecuaciones vectoriales de la recta tangente a $\mathbf{r}$ en el punto $A(7,2,3)$?

Para determinar la recta tangente se necesita un punto (ya proporcionado) y el vector director (el vector tangente). Obteniendo la derivada de la curva:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= 7e^{2-t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{16}{t^3}\hat{\mathbf{j}} + (5-t)\,\hat{\mathbf{k}} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{r}'(t) &= -7e^{2-t}\hat{\mathbf{i}} - \frac{48}{t^4}\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

El lugar donde debe evaluarse la derivada es en el punto A, donde el valor del parámetro se calcula cuando $\mathbf{a}$ es igual a la curva $\mathbf{r}(t)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 7\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{r} \\ 7\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}} &= 7e^{2-t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{16}{t^3}\hat{\mathbf{j}} + (5-t)\,\hat{\mathbf{k}} \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} 7 = 7e^{2-t} \\ 2 = \frac{16}{t^3} \\ 3 = 5 - t \end{cases} \end{aligned}$$

La solución es $t = 2$. Entonces, el vector tangente a la curva es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(2) &= -7e^{2-2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{48}{2^4}\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} \\ &= -7\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Una ecuación de la recta tangente a $\mathbf{r}$ (véase la figura 2) es

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

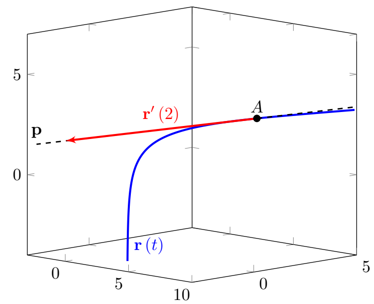

Figura 2

2. Longitud de Arco

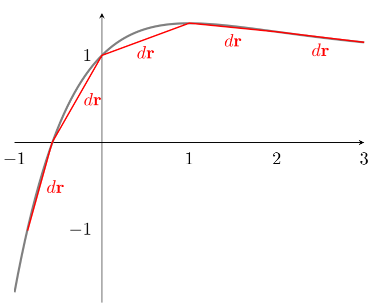

Figura 3. Al sumar distancias pequeñas entre puntos se obtendrá la longitud de la curva. Mientras más segmentos de menor longitud, mejor será la medición.

Cuando se habla de medir distancias, siempre es conveniente medir las longitudes rectas. Sin embargo, no siempre se tienen distancias que recorran una línea recta; por ejemplo, una carretera que conecta dos poblados tendrá en diversos tramos curvas, cuya longitud debe ser contabilizada para conocer la distancia exacta que debe recorrerse de una localidad a otra.

Para encontrar la longitud de una curva, pueden fijarse puntos a lo largo de ésta y medir la distancia entre segmentos (como se ilustra en la figura 3); mientras más pequeños sean los segmentos de recta, más precisa será la medición. Cuando se habla de fragmentos muy pequeños se habla del concepto de diferencial.

Sea $\mathbf{r}(t)$ una función vectorial de variable escalar con derivada $\mathbf{r}'(t)$, tal que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t)$$

La diferencial de curva se define como

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\,dt$$

La diferencial de una función vectorial sigue siendo un vector, y en este caso se requiere medir su longitud para calcular la distancia sobre la curva. Por lo tanto, se debe calcular la norma de la diferencial:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{r}'(t)\,dt \\ \Rightarrow \|d\mathbf{r}\| &= \|\mathbf{r}'(t)\,dt\| \\ &= \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt \end{aligned} \tag{5}$$

Hay que notar que la expresión (5) solo indica la distancia entre dos puntos infinitamente cercanos. Si se desea calcular la longitud de una curva en el intervalo $[a, b]$, se requiere sumar una infinidad de fragmentos infinitamente pequeños; es decir, se debe integrar:

$$\begin{aligned} \|d\mathbf{r}\| &= \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt \\ \int_a^b \|d\mathbf{r}\| &= \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt \end{aligned}$$

A la norma de la diferencial de curva se le llama diferencial de longitud de arco, y su integral es la longitud de arco s de una curva.

Sea la curva $\mathbf{r}(t)$. La longitud de arco de $\mathbf{r}$ en el intervalo $[a,b]$ es s, tal que

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

La longitud de arco también permite encontrar el vector tangente unitario sin necesidad de obtener la norma de la derivada $\mathbf{r}'(t)$. Partiendo de la definición de longitud de arco,

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \\ ds &= \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \\ \frac{ds}{dt} &= \|\mathbf{r}'(t)\| \end{aligned} \tag{6}$$

Al sustituir la expresión (6) en la definición de vector tangente unitario se llega a la expresión buscada:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} &= \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \\ &= \frac{\mathbf{r}'}{\frac{ds}{dt}} \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} \\ \hat{\mathbf{T}} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} \end{aligned}$$

Ejemplo. Sea la curva

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}t^3\hat{\mathbf{i}} + 4t\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{2}t^2\hat{\mathbf{k}}$$

Determine la longitud de arco de $\mathbf{r}$ en el intervalo $3 \le t \le 6$.

Primero, se calcula la derivada

$$\mathbf{r}' = t^2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 2\sqrt{2}t\hat{\mathbf{k}}$$

y su norma

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'\| &= \sqrt{t^4 + 16 + 8t^2} \\ &= \sqrt{(t^2+4)^2} \\ &= t^2 + 4 \end{aligned}$$

Por lo que la longitud de arco pedida es

$$\begin{aligned} s &= \int_3^6 t^2 + 4dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + 4t\right]_3^6 \\ s &= 75\ \ [u] \end{aligned}$$