Serie Trigonométrica de Fourier

La serie trigonométrica de Fourier se descubrió en el siglo diecinueve como una solución formal de ecuaciones en derivadas parciales de onda y calor en intervalos espaciales finitos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$

En 1822, cuando el matemático francés (Jean Baptiste) Josehp Fourier (1758-1830) estudiaba problemas de flujo de calor, demostró que las funciones periódicas arbitrarias se podían representar mediante una serie infinita de senoides armónicamente relacionadas. Más tarde fue usada para describir procesos físicos en los que los eventos ocurren en el tiempo según un patrón regular (periódico). Por ejemplo, una nota musical consiste una simple nota llamada fundamental, y una serie de vibraciones llamadas sobretonos. La serie de Fourier proporciona el lenguaje matemático que nos permite describir con precisión la estructura compleja de una nota musical.

La serie de Fourier, no es solamente uno de resultados importantes del análisis moderno sino también puede decirse que proporciona un instrumento indispensable para el tratamiento de casi toda pregunta recóndita en la ingeniería moderna. Para mencionar solamente algunas: las vibraciones sonoras, la propagación de señales en sistemas de comunicación y en la conducción o propagación de calor; son temas que en su generalidad son intratables sin esta herramienta, esto nos da una pequeña idea de su importancia.

Serie de Fourier de una función $f(x)$

Definición: Sea una f función continua por segmentos en el intervalo de $[-L, L]$, la serie de Fourier de f es la serie trigonométrica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

en donde:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\forall\, n \in N, \qquad n = 1,2,3, \dots, n.$$

Serie de Fourier cuando $\boldsymbol{f(x)}$ es par

Si la función $f(x)$ es una función par se dice que:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = 0;$$

$$\forall\ n \in N, \quad n = 1,2,3, \dots, n.$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Serie de Fourier cuando $\boldsymbol{f(x)}$ es impar

Si la función $f(x)$ es una función impar se dice que:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

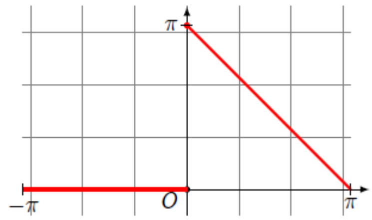
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\forall\ n \in N, \quad n = 1,2,3, \dots, n.$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Ejemplo

Expandir en una serie de Fourier la función $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$



Solución

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

Los coeficientes a_0 y a_n se determinan a partir de las expresiones

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx\,; \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\,; \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

El periodo de la función es $T = 2\pi$, por lo que el semiperiodo es $L = \pi$; entonces al sustituir en las expresiones anteriores se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(0)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - 0 + 0\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)cos(nx)dx\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}(\pi)cos(nx)dx - \int_{0}^{\pi}(x)cos(nx)dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1 - \cos(n\pi)}{n^2}\right]$$

$$a_n = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}(\pi - x)sen(nx)dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}(\pi)sen(nx)dx - \int_{0}^{\pi}(x)sen(nx)dx\right]$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

Por lo tanto, la serie trigonométrica de Fourier queda de la siguiente manera;

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2}cos(nx) + \frac{1}{n}sen(nx)\right]$$

Algunas sumas parciales son:

$$S_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos(x) + sen(x)$$

$$S_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos(x) + sen(x) + \frac{1}{2}sen(2x)$$

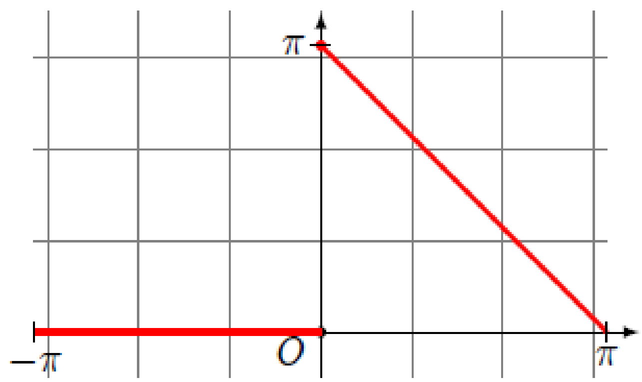
$$S_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos(x) + sen(x) + \frac{1}{2}sen(2x) + \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \frac{1}{3}\mathrm{sen}(3x)$$

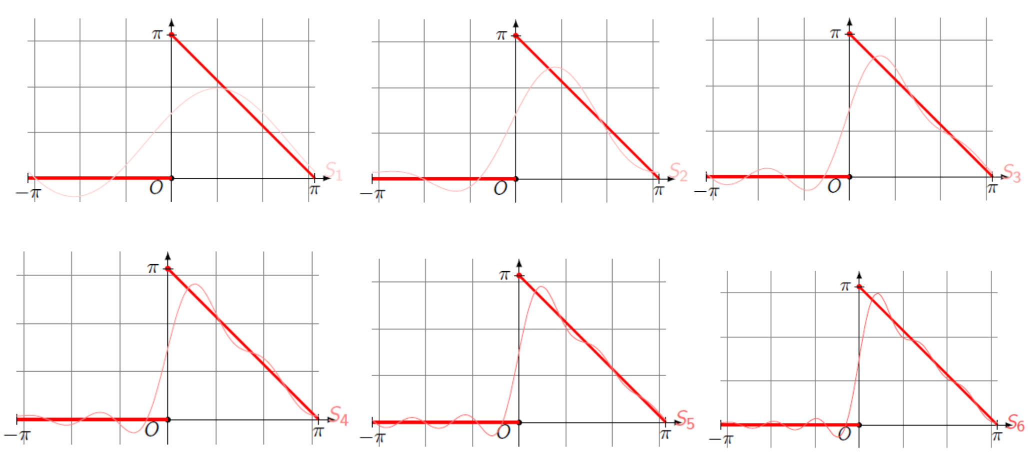
$$S_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos(x) + sen(x) + \frac{1}{2}sen(2x) + \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \frac{1}{3}\mathrm{sen}(3x) + \frac{1}{4}sen(4x)$$

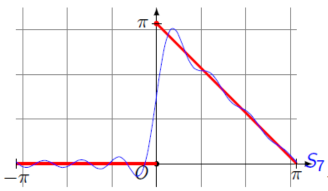
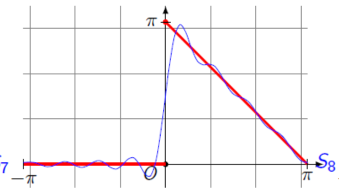
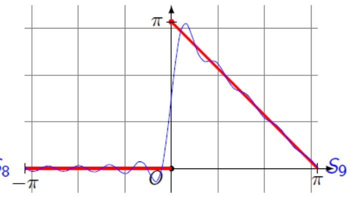
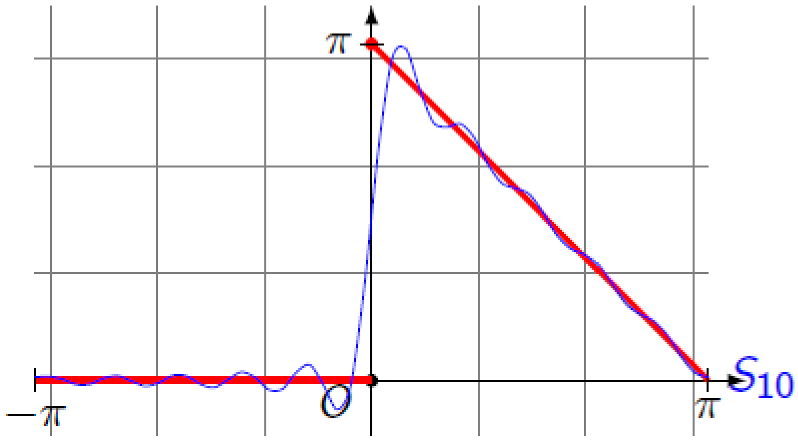
$$S_5 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos(x) + sen(x) + \frac{1}{2}sen(2x) + \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \frac{1}{3}\mathrm{sen}(3x) + \frac{1}{4}sen(4x) + \frac{2}{25\pi}\cos(5x) + \frac{1}{5}sen(5x)$$

$$S_5 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos(x) + sen(x) + \frac{1}{2}sen(2x) + \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \frac{1}{3}\mathrm{sen}(3x) + \frac{1}{4}sen(4x) + \frac{2}{25\pi}\cos(5x) + \frac{1}{5}sen(5x) + \frac{1}{6}sen(6x)$$

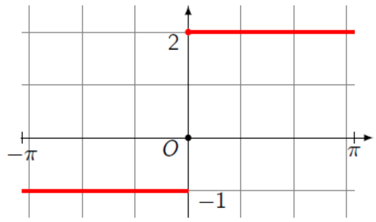
Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:






π
−π
O
π
S7

π
−π
O
π
S8

π
−π
O
π
S9

π
−π
O
π
S10

Expandir en una serie de Fourier la función $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \le x < \pi \end{cases}$



Solución

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

Los coeficientes a_0 y a_n se determinan a partir de las expresiones

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx\,; \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\,; \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

El periodo de la función es $T = 2\pi$, por lo que el semiperiodo es $L = \pi$; entonces al sustituir en las expresiones anteriores se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-1)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (2)dx = \frac{1}{\pi}(-x)|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}(x)|_{o}^{\pi} = \frac{1}{\pi}(0 - \pi + 2\pi)$$

$$a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-1)cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} (2)cos(nx)dx\right]$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} cos(nx)dx + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} cos(nx)dx = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{sen(nx)}{n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{sen(nx)}{n}\right]\Bigg|_{0}^{\pi}$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{sen(0) - sen(-n\pi)}{n}\right] + \frac{2}{\pi}\left[\frac{sen(n\pi) - sen(0)}{n}\right] = \frac{1}{\pi}\frac{sen(n\pi)}{n}$$

$$sen(x) = -sen(-x);\ sen(n\pi) = -sen(-n\pi)$$

$$sen(n\pi) = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx = -\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} sen(nx)dx\right] + \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} sen(nx)dx\right]$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}[\cos(nx)]|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{n\pi}[\cos(nx)]|_{0}^{\pi} = \frac{1}{n\pi}[\cos(0) - \cos(n\pi)] - \frac{2}{n\pi}[\cos(n\pi) - \cos(0)]$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{2\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{2}{n\pi} = \frac{3}{n\pi} - \frac{3\cos(n\pi)}{n\pi}$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$b_n = \frac{3[1-(-1)^n]}{n\pi}$$

Por lo tanto, la serie trigonométrica de Fourier queda de la siguiente manera;

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3[1-(-1)^n]}{n\pi} sen(nx)\right]$$

Algunas sumas parciales son:

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\text{sen}(x)$$

$$S_3 = S_4 = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\text{sen}(x) + \frac{2}{\pi}\text{sen}(3x)$$

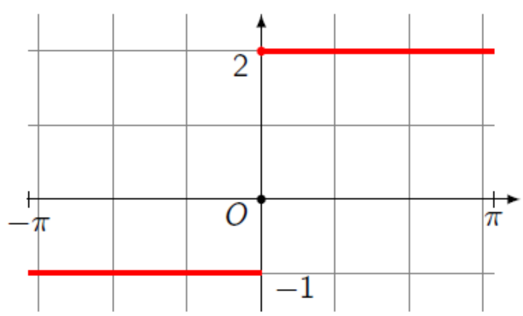
$$S_5 = S_6 = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\text{sen}(x) + \frac{2}{\pi}\text{sen}(3x) + \frac{6}{5\pi} sen(5x)$$

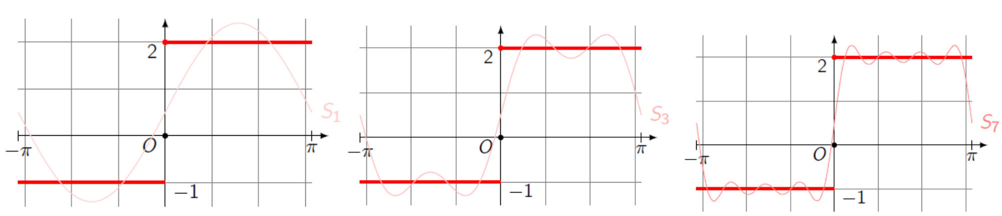
$$S_7 = S_8 = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\text{sen}(x) + \frac{2}{\pi}\text{sen}(3x) + \frac{6}{5\pi} sen(5x) + \frac{6}{7\pi} sen(7x)$$

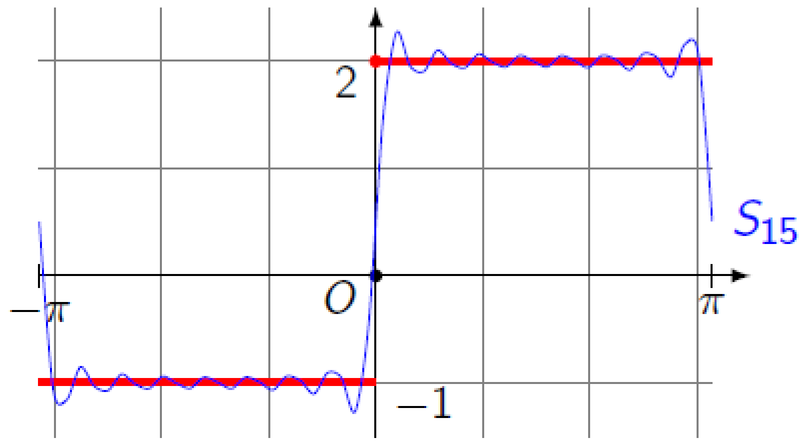
$$S_9 = S_{10} = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\text{sen}(x) + \frac{2}{\pi}\text{sen}(3x) + \frac{6}{5\pi} sen(5x) + \frac{6}{7\pi} sen(7x) + \frac{2}{3\pi} sen(9x)$$

$$S_{11} = S_{12} = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\text{sen}(x) + \frac{2}{\pi}\text{sen}(3x) + \frac{6}{5\pi} sen(5x) + \frac{6}{7\pi} sen(7x) + \frac{2}{3\pi} sen(9x) + \frac{6}{11\pi} sen(11x)$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:







2
S_{15}
$-\pi$
O
π
-1

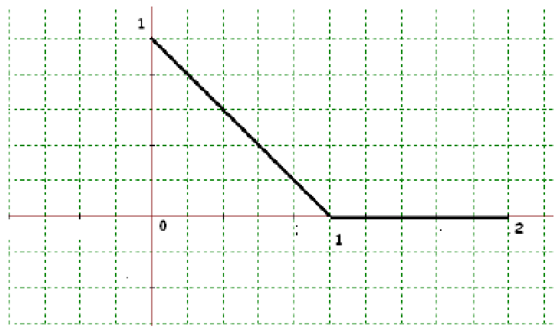
Ejemplo

Encontrar la serie de Fourier de la siguiente función: a) sólo en términos de senos, b) sólo en términos de cosenos.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Solución

Antes de comenzar el desarrollo de este problema se debe graficar la función $f(x)$.

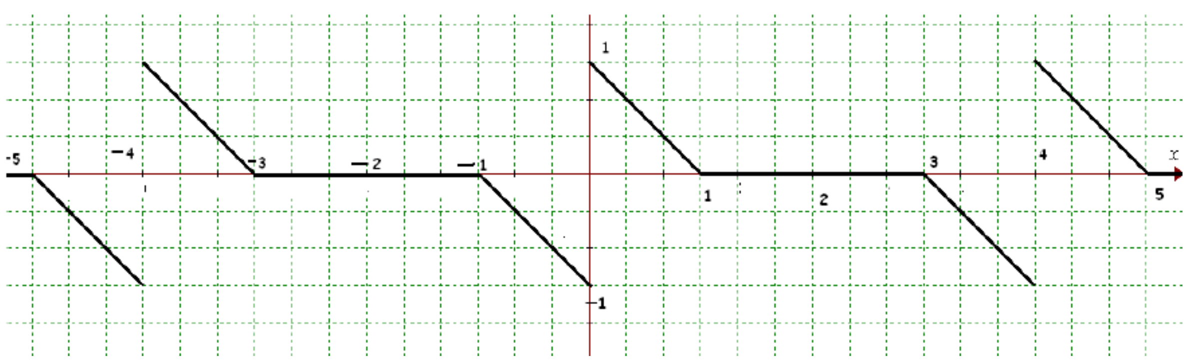


a) En términos de senos:

Como se aprecia en la gráfica, esta no es una función par ni impar. Por lo tanto para obtener el desarrollo en series de Fourier sólo en términos de senos de esta función se debe proceder a hacer una extensión periódica impar de $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ -f(-x), & -L < x < 0' \end{cases} \qquad donde\ T = 2L$$

Por lo que la nueva gráfica se representa de la siguiente forma,



Como se observa en la gráfica ahora el periodo de la función es $T = 2L$, donde $L = 2$, por lo tanto el periodo T es 4.

Ahora si la función $f(x)$ es una función impar se cumple las siguientes condiciones:

$a_0 = 0$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$\forall\, n \in N, \qquad n = 1,2,3, \dots, n.$

$$\therefore\, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_0^2 f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_0^1 (1-x) sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_1^2 (0) sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$b_n = \int_0^1 (1-x) sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$u = 1 - x, \quad du = -dx;$

$dv = \ sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx; \quad v = -\frac{2}{n\pi} cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right);$

$$b_n = -\left[(1-x)\frac{2}{n\pi} cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{n\pi} cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}\left[(1-x) cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^1 - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^1 = -\frac{2}{n\pi}(0-1) - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right]$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Ahora la función en términos de senos es:

Como es impar, entonces: $a_n = 0$, y $a_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]$$

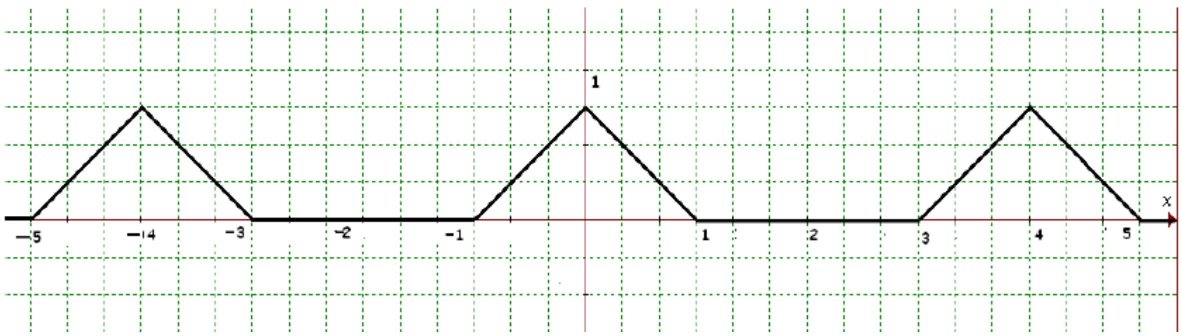
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]$$

b) En términos de cosenos:

Igualmente que en el caso anterior para obtener la serie de Fourier sólo en términos de cosenos de $f(x)$, la función debe ser una función par, si no lo es se debe hacer una extensión periódica de forma par. Es decir:

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ f(-x), & -L < x < 0' \end{cases} \qquad donde\ T = 2L$$

Por lo que la nueva gráfica se represента de la siguiente forma,



Como se observa en la gráfica ahora el periodo de la función es $T = 2L$, donde $L = 2$, por lo tanto el periodo T es 4.

Ahora si la función $f(x)$ es una función impar se cumple las siguientes condiciones:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = 0;$$

$$\forall\, n \in N, \quad n = 1,2,3, \dots, n.$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Encontrando los coeficientes a_n, a_0:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (0)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^1 = \left[1 - \frac{1}{2} - 0 + 0\right] = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_0^2 f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \int_0^1 (1-x)cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 (0)cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$a_n = \int_0^1 (1-x)cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\,;$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = 1-x, \quad du = -dx;$$

$$dv = \ cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx; \quad v = \frac{2}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right);$$

$$a_n = \int_0^1 (1-x)cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \left[(1-x)\frac{2}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left[(1-x)sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]\Big|_0^1 - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]\Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi}(0-0) - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right]$$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1 - cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

Como ahora $f(x)$ es una función par, entonces $b_n = 0$

La serie de Fourier de $f(x)$ en términos de cosenos es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1 - cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\left[1 - cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\right)cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Ejemplos de exámenes finales

Ejercicio

Desarrollar la función $f(x) = \begin{cases} -3, & -\pi < x < 0 \\ 3, & 0 < x < \pi \end{cases}$ en una serie de senos

Solución

Al ser $f(x)$ una función impar, el desarrollo en serie de senos está dado por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

El periodo de la función es $T = 2\pi$, por lo que el semiperiodo es $L = \pi$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3) sen(nx) dx = \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi} sen(nx) dx = -\frac{6}{n\pi} [\cos(nx)]|_0^{\pi} = -\frac{6}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1)$$

$$b_n = -\frac{6}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \frac{6}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\pi} [1 - (-1)^n] sen(nx)$$

$$f(x) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [1 - (-1)^n] sen(nx)$$

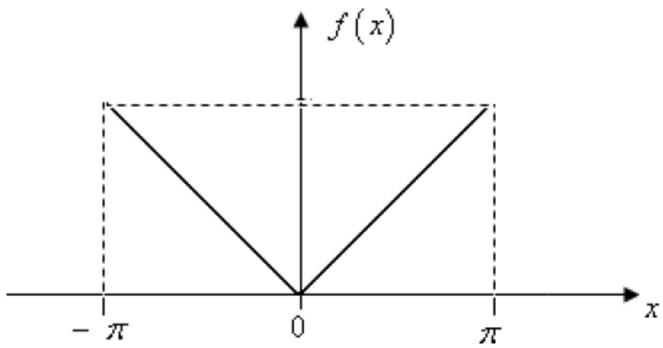
Ejercicio

Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución

La función está dada por dos reglas de correspondencia y su representación gráfica es:



Se trata de una función par, entonces los coeficientes de la serie Trigonométrica de Fourier son: a_0, a_n y $b_n = 0$, y la serie en cuestión es de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

por lo que a_0 y a_n son:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

En las expresiones anteriores L representa el semiperiodo, que en este caso está dado por $L = \pi$; se tiene así:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^{\pi} = \pi$$

Para el segundo coeficiente se tiene:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xcos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xcos(nx)dx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$u = x, \quad du = dx;$

$dv = \ cos(nx)dx; \quad v = \frac{1}{n}sen(nx);$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}sen(nx) - \int \frac{1}{n}sen(nx)dx\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}sen(nx) + \frac{1}{n^2}cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi}$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}sen(n\pi) + \frac{1}{n^2}cos(n\pi) - \frac{1}{n^2}\right)$$

Considerando que $sen(n\pi) = 0$ y $\cos(n\pi) = (-1)^n$ se tiene:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}(-1)^n - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

Por lo tanto, la serie de cosenos de Fourier es,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]cos(nx)$$