Cálculo Vectorial
Lectura 23: Trabajo y Campo Conservativo

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Trabajo

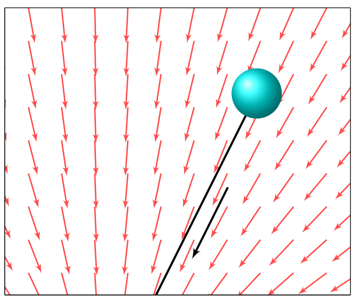

Figura 1. Un campo gravitario, como el terrestre, afecta el movimiento de las masas dentro de su espacio de influencia. El vector negro indica la dirección de la trayectoria de la pelota.

Cuando un cuerpo se desplaza sobre una trayectoria, su entorno influye en el movimiento. Además, son varias fuerzas las que afectan la dinámica del cuerpo estudiado y que actúan sobre la trayectoria (véase la figura 1). Como las fuerzas son vectores, un cuerpo que se mueve a través de una trayectoria atraviesa un campo vectorial de fuerzas.

Para que una fuerza pueda mover a una masa a lo largo de una trayectoria, requiere energía. Una sola fuerza necesita energía para desplazar un cuerpo. Si esto ocurre a través de un campo vectorial, entonces una infinidad de fuerzas necesitarán cierta cantidad de energía para mantener a la masa en movimiento; este es el concepto de trabajo mecánico.

Sean una partícula P, un campo de fuerzas $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ y la trayectoria de desplazamiento $\mathbf{r}(t)$. El trabajo W que realiza el campo $\mathbf{f}$ sobre P a lo largo de $\mathbf{r}$ entre A y B se calcula como

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

Significa que el trabajo es la componente escalar de la fuerza que actúa en la dirección del desplazamiento (figura 2): $W = \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{T}}$.

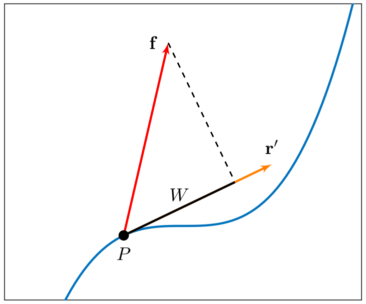

Figura 2

La integral demuestra que, a lo largo de la trayectoria, un cuerpo se ve afectado por una infinidad de fuerzas, y que el trabajo que realiza cada una de esas fuerzas debe sumarse para calcular el trabajo total realizado.

Al ser un número real, el trabajo puede ser positivo, negativo o neutro. El significado físico es:

- $W > 0$, la fuerza se ejerce en el sentido del movimiento.
- $W < 0$, la fuerza se aplica en sentido contrario al movimiento.
- $W = 0$, la fuerza se aplica perpendicularmente al movimiento.

Ejemplo. Calcule el trabajo efectuado al mover una partícula en el campo de fuerzas

$$\mathbf{f} = 3x^2\hat{\mathbf{i}} + (y - 2xz)\,\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \ \ [N]$$

a lo largo de la curva

$$C: \quad \begin{cases} 8z = 3x^3 \\ 4y = x^2 \end{cases} \qquad [m]$$

desde el punto $A(0,0,0)$ hasta el punto $B(2,1,3)$.

Primero hay que parametrizar la curva. Puesto que ambas ecuaciones cartesianas de C dependen de x, el parámetro conveniente es $x = t$; por lo tanto

$$8z = 3x^3 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{8}t^3$$
$$4y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}t^2$$

Por lo tanto, la trayectoria es

$$C: \quad \mathbf{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{4}t^2\hat{\mathbf{j}} + \frac{3}{8}t^3\hat{\mathbf{k}}$$

y su derivada es

$$\mathbf{r}'(t) = \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}t\hat{\mathbf{j}} + \frac{9}{8}t^2\hat{\mathbf{k}}$$

El campo evaluado con la trayectoria es

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = 3t^2\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{4}t^4\right)\hat{\mathbf{j}} + \frac{3}{8}t^3\hat{\mathbf{k}}$$

Los puntos de la trayectoria son

$$A(0,0,0) \Rightarrow x = 0 \therefore t = 0$$
$$B(2,1,3) \Rightarrow x = 2 \therefore t = 2$$

Por lo que la integral para calcular el trabajo es

$$\begin{aligned} W &= \int_0^2 \left(3t^2\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{4}t^4\right)\hat{\mathbf{j}} + \frac{3}{8}t^3\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}t\hat{\mathbf{j}} + \frac{9}{8}t^2\hat{\mathbf{k}}\right)\, dt \\ &= \int_0^2 3t^2 + \frac{1}{8}t^3 + \frac{3}{64}t^5 \, dt \\ &= \left[t^3 + \frac{1}{32}t^4 + \frac{1}{128}t^6\right]_0^2 \\ &= 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

El trabajo es $W = 9 \ \ [J]$.

Existen campos vectoriales en los cuales la energía necesaria para mover una partícula a lo largo de una trayectoria cerrada se conserva; es decir, el trabajo es nulo pues se gana la energía que se gasta. Este tipo de campos se llaman conservativos.

2. Campo Conservativo

Una integral de línea puede calcularse en la forma

$$I = \int_C P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy \tag{1}$$

que es conocida como la forma escalar de la integral de línea. A continuación se utilizará un campo escalar para llegar a (1) y conocer la definición de campo conservativo. Partiendo del campo escalar $g(x,y)$, donde x y y dependen de t, la derivada total de g es

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

de la cual se desprende la diferencial total,

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}\ dx + \frac{\partial g}{\partial y}\ dy \tag{2}$$

Al integrar la expresión (2) sobre una trayectoria,

$$\int_C dg = \int_C \frac{\partial g}{\partial x}\ dx + \frac{\partial g}{\partial y}\ dy$$

puede observarse que se trata de (1) tomando en cuenta que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = Q(x,y)$$

La diferencial (2) puede expresarse mediante el producto punto como

$$\begin{aligned} dg &= \frac{\partial g}{\partial x}\ dx + \frac{\partial g}{\partial y}\ dy \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial g}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot\left(dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}\right) \\ dg &= \nabla g \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

donde $d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}$, obtenida a partir de $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}}$. Por lo que la integral de línea puede escribirse como

$$I = \int_C \nabla g \cdot d\mathbf{r}$$

A ∇g se le da el nombre de campo conservativo.

Sea $\mathbf{f}(x,y,z)$ un campo vectorial. A $\mathbf{f}$ se le llama campo conservativo, si existe un campo escalar $g(x,y,z)$ tal que

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \nabla g(x,y,z)$$

Se recuerda que el rotacional de un gradiente es igual a $\mathbf{0}$; por lo tanto, un campo irrotacional es conservativo.

Ejemplo. ¿El campo

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \left(6xy - 2z^2 + y^2z\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(3x^2 + 2xyz\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(xy^2 - 4xz\right)\hat{\mathbf{k}}$$

es conservativo?

Para determinar si $\mathbf{f}$ es conservativo, se obtendrá su rotacional.

$$\nabla\times\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 6xy - 2z^2 + y^2z & 3x^2 + 2xyz & xy^2 - 4xz \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{0}$$

El campo $\mathbf{f}$ es irrotacional y en consecuencia es conservativo.

El rotacional permitirá plantear las condiciones de análisis para determinar si un campo es conservativo; de este proceso se desprende el estudio de las ecuaciones diferenciales exactas.