Cálculo Vectorial
Lectura 15: Regiones en Coordenadas Curvilíneas

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Regiones

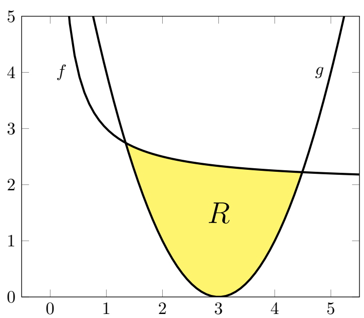

Figura 1. Región R limitada por $f = \frac{1}{x} + 2$ y $g = (x-3)^2$, en el plano xy.

Una región en un sistema de coordenadas es una sección de superficie limitada por una o varias curvas; la figura 1 muestra una región limitida por una parábola y una hipérbola en el plano coordenado xy.

Puesto que se ha establecido el uso de sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales, hay que tomar en cuenta la representación de regiones en dichos sistemas. La representación de una misma región en diferentes sistemas variará de acuerdo a los factores de escala, pues éstos alteran la métrica del lugar geométrico durante el cambio de coordenadas.

La forma en la que influyen los factores de escala no es lineal, pues las regiones son áreas y por lo tanto deben tratarse como tal: el producto de dos distancias lineales indicará el área. El rectángulo es un área básica en un sistema ortogonal. Al cambiar a un sistema curvilíneo ortogonal, el área debe calcularse mediante los respectivos vectores unitarios utilizando las propiedades del producto cruz. Si las ecuaciones de transformación se definen mediante el campo $\mathbf{f} = x\,(u,v)\,\hat{\mathbf{i}} + y\,(u,v)\,\hat{\mathbf{j}}$, entonces la norma del producto cruz de las derivadas parciales de $\mathbf{f}$ ajustará el área en el sistema curvilíneo; esto es posible porque en realidad se está calculando una diferencial de área. La definición completa de diferencial de área se estudiará con integrales múltiples. El área de la región en el sistema coordenado es:

$$
\begin{aligned}
A_{xy} &= \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \right\| A_{uv} \\
&= \left\| h_u \hat{\mathbf{u}} \times h_v \hat{\mathbf{v}} \right\| A_{uv} \\
&= |h_u|\,|h_v|\,\|\hat{\mathbf{u}}\|\,\|\hat{\mathbf{v}}\| \left(\sin \frac{\pi}{2}\right) A_{uv} \\
A_{xy} &= |h_u h_v|\, A_{uv} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Como se vio anteriormente, el jacobiano de la transformación es el producto de los factores de escala y puede sustituirse en la ecuación (1). Se concluye que el área de una región en el plano xy es proporcional, mediante el jacobiano, al área del plano uv.

Sea R una región en el plano xy con área A_{xy}. En el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales uv, la región R posee un área

$$A_{xy} = \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| A_{uv}$$

tal que:

- si $0 < \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| < 1$, el sistema uv aumenta la región R.
- si $\left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| = 1$, la región no se ve escalada.
- si $1 < \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right|$, el sistema uv reduce la región R.

Ejemplo. Sean las ecuaciones de transformación

$$T: \quad \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$$

Calcule el área de la región limitada por $y = x + 2$, $y = -x + 2$, $y = x + 3$ y $y = -x + 3$.

Para calcular la región es necesario transformar las cuatro rectas a coordenadas uv mediante la sustitución de las ecuaciones de transformación en cada ecuación cartesiana.

$$\begin{aligned} y &= x + 2 \\ u - v &= u + v + 2 \qquad \Rightarrow \qquad v = -1 \\ y &= -x + 2 \\ u - v &= -u - v + 2 \qquad \Rightarrow \qquad u = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x + 3 \\ u - v &= u + v + 3 \qquad \Rightarrow \qquad v = -\frac{3}{2} \\ y &= -x + 3 \\ u - v &= -u - v + 3 \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Al transformar la región se obtiene un cuadrado con longitud de lado igual a $\frac{1}{2}$, por lo que el área en el plano uv es $A_{uv} = \frac{1}{4}$ $[u^2]$. Por otro lado, el jacobiano de la transformación es

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad -2$$

Por lo que el área en el sistema xy es

$$A_{xy} = 2A_{uv} \qquad \Rightarrow \qquad A_{xy} = \frac{1}{2} \ \left[u^2\right]$$

La figura 2 muestra la región tanto en el plano xy como en el uv.

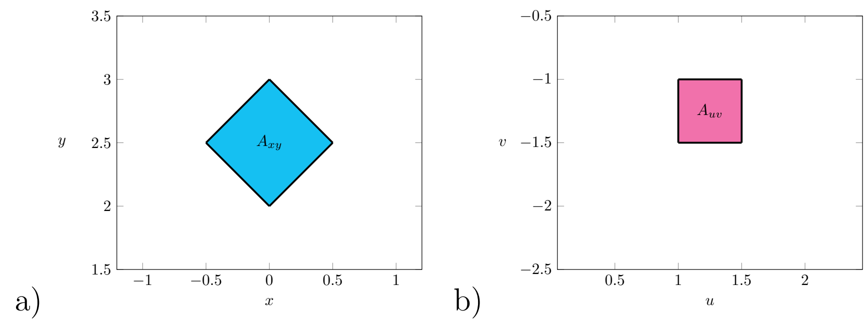

Figura 2. a) Región en el sistema cartesiano. b) Región en el sistema curvilíneo.