# Temario

- 1. Teoría de la probabilidad
- 2. Variables aleatorias
- **3. Variables aleatorias conjuntas**
- 4. Modelos probabilísticos de fenómenos aleatorios discretos
- 5. Modelos probabilísticos de fenómenos aleatorios continuos

# Objetivo

El alumno **formulará funciones de densidad de probabilidad** para variables aleatorias discretas y continuas, analizará su comportamiento utilizando los fundamentos de la teoría de la probabilidad conjunta e individual de las variables, e **identificará las relaciones de dependencia** entre dichas variables.

# Contenido

**3.1** Variables aleatorias conjuntas discretas, función de probabilidad conjunta, su definición y propiedades, funciones marginales de probabilidad y funciones condicionales de probabilidad.

**3.2** Variables aleatorias conjuntas continuas, función de densidad conjunta, su definición y propiedades. Funciones marginales de densidad y funciones condicionales de densidad.

**3.3** Valor esperado de una función de dos o más variables aleatorias sus propiedades y su valor esperado condicional.

**3.4** Variables aleatorias independientes, covariancia, correlación y sus propiedades, variancia de una suma de dos o más variables aleatorias.

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Discretas

Si $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ son variables aleatorias conjuntas directas. Su función de probabilidad conjunta se define:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X = x_1 \cap X = x_2 \cap \cdots \cap X = x_n)$$

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n)$$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Discretas

Características de la función masa de probabilidad conjunta:

(función de densidad de probabilidad)

1) $0 \leq f_{XY}(x, y) \leq 1$
2) $\sum_{\forall x} \sum_{\forall y} f_{XY}(x, y) = 1$
3) $P(x_0 \leq X \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1) = \sum_{x=x_0}^{x_1} \sum_{y=y_0}^{y_1} f_{XY}(x, y)$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Discretas

EJERCICIO 1

Una gran agencia de seguros presta servicios a numerosos clientes que han adquirido tanto una póliza de propietario de casa como una póliza de automóvil en la agencia. Por cada tipo de póliza, se debe especificar una cantidad deducible. Para una póliza de automóvil, las opciones son $100 y $250, mientras que para la póliza de propietario de casa, las opciones son 0, $100 y $200. Suponga que se selecciona al azar un individuo con ambos tipos de póliza de los archivos de la agencia. Sea X la cantidad deducible sobre la póliza de auto y Y la cantidad deducible sobre la póliza de propietario de casa.

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Discretas

## EJERCICIO 1

Suponga que la tabla de probabilidad conjunta siguiente da la función masa de probabilidad conjunta:

| $f_{XY}(x,y)$ | | y | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 100 | 200 |
| x | 100 | 0.20 | 0.10 | 0.20 |
| | 250 | 0.05 | 0.15 | 0.30 |

Obtener la probabilidad de que el individuo seleccionado pague 100 o más pesos por la póliza de casa y 100 pesos por la póliza de auto.

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Discretas

EJERCICIO 2

Un estudiante de cierta Universidad al sur de Copilco se enteró de un chisme de su profesora de Probabilidad y le urge contarlo a sus compañeros. Para no verse tan chismoso, decidió escribir sólo 3 papelitos con ese chisme, y entregarlo aleatoriamente a sus compañeros. Suponga que en el salón hay 56 estudiantes además del estudiante chismoso, y que hay 20 estudiantes que, si reciben el papelito, le contarán a su Profesora.

Sea X el número de alumnos discretos y Y el número de alumnos indiscretos, obtener la función de probabilidad de X y Y.

## Función masa de probabilidad marginal

Es la función masa de probabilidad de **una** de las variables sola, se obtiene sumando $f_{XY}(x, y)$ con los valores de la otra variable.

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x, y)$$

$$f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Discretas

EJERCICIO 3

Suponga que la tabla de probabilidad conjunta siguiente da la función masa de probabilidad conjunta:

| $f_{XY}(x,y)$ | | y | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 100 | 200 |
| x | 100 | 0.20 | 0.10 | 0.20 |
| | 250 | 0.05 | 0.15 | 0.30 |

Obtener la función de probabilidad marginal de X y de Y.

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Discretas

EJERCICIO 4

Cierto artículo se fabrica en dos líneas de producción diferentes. La capacidad en cualquier día dado para cada línea es de dos artículos. Supóngase que el número de artículos producidos por la línea uno en un día cualquiera es una variable aleatoria X y que el número de artículos producidos por la línea dos está dado por Y. Con base en datos estadísticos se obtuvo la siguiente tabla que corresponde a la función de probabilidad conjunta de X y Y.

| $f_{XY}(x,y)$ | | y | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| x | 0 | 0.1 | 0.20 | 0.20 |
| | 1 | 0.04 | 0.08 | 0.08 |
| | 2 | 0.06 | 0.12 | 0.12 |

.

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Discretas

EJERCICIO 4

| $f_{XY}(x,y)$ | | y | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| x | 0 | 0.1 | 0.20 | 0.20 |
| | 1 | 0.04 | 0.08 | 0.08 |
| | 2 | 0.06 | 0.12 | 0.12 |

a. Calcular la probabilidad de que en un día dado el número de artículos producidos en la línea uno sea mayor que el número de artículos producidos en la línea dos .
b. Obtener la función de probabilidad marginal de X y de Y.
c. Calcular $P(X < 2|Y = 1)$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Discretas

Función de probabilidad condicional

$X \ dado \ que \ Y = y_0$

$$f_{X|y_0}(x|y_0) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x, y_0)}{f_Y(y_0)}; & f_Y(y_0) > 0 \\ 0 & en \ otro \ caso \end{cases}$$

$Y \ dado \ que \ X = x_0$

$$f_{Y|x_0}(y|X = x_0) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x_0, y\ )}{f_X(x_0)}; & f_X(x_0) > 0 \\ 0 & en \ otro \ caso \end{cases}$$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Discretas

## EJERCICIO 5

Para la siguiente función de probabilidad conjunta, obtener la función de probabilidad condicional de X dado $Y \geq 1$

| $f_{XY}(x,y)$ | | y | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| x | 0 | 0.1 | 0.20 | 0.20 |
| | 1 | 0.04 | 0.08 | 0.08 |
| | 2 | 0.06 | 0.12 | 0.12 |

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

Sean X y Y variables aleatorias continuas. Una función de densidad de probabilidad conjunta f(x, y) de estas dos variables para cualquier conjunto A en dos dimensiones

$$P[(X,Y)\epsilon A] = \iint_A f_{XY}(x,y)dx\,dy$$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

Características de la función de probabilidad conjunta:

(función de densidad de probabilidad)

1. $f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1$

3. $P\big((x_1, x_2, \ldots, x_n) \epsilon R\big) =$
   $\iint \ldots \int_R f_{X_1,X_2,\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 6

Sean X ,Y dos variables aleatorias conjuntas con función de densidad:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k(x+y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \qquad en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Calcular el valor de k para que sea una función de densidad

b) Obtener $P(0.5 \leq X \leq 1, 0.5 \leq Y \leq 1)$

c) $P(X + Y \leq 1)$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 7

Supóngase que el tiempo de mantenimiento semanal de una máquina depende de dos variables aleatorias continuas (en horas), donde X es la variable aleatoria que representa la duración del mantenimiento mecánico y, Y es la variable aleatoria que representa la duración de mantenimiento eléctrico. Supóngase que la función de densidad de probabilidad conjunta es: $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \qquad en\ otro\ caso \end{cases}$

Calcular la probabilidad que en alguna semana, el mantenimiento mecánico dure menos de 15 minutos y el mantenimiento eléctrico dure más de 30 minutos.

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 8

Cuando se usa cierto método para recolectar un volumen fijo de muestras de roca resulta que hay 4 tipos de roca. Sean $X, Y$ y $Z$ la proporción por volumen de los tipos de roca 1, 2 y 3 en una muestra seleccionada aleatoriamente. Sea la función de densidad.

$$f_{\mathrm{XYZ}}(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{144} xy(1-z) & 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y + z \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Determinar la probabilidad de que las rocas tipo 1 y 2 representen menos del 50% de la muestra.

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

Función de probabilidad marginal

Si $X$ y $Y$ son dos variables aleatorias conjuntas continuas, entonces se define la función de densidad marginal de $X$ como:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Y la función de densidad marginal de Y como:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 9

De la función de densidad de probabilidad conjunta siguiente:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \qquad\qquad en\ otro\ caso \end{cases}$$

Determinar la función de densidad marginal de X y de Y

## EJERCICIO 10

Dos variables aleatorias tienen la siguiente función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y); 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \qquad \qquad \qquad en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Obtener $P(X < 0.8)$
b) Obtener $P(Y > 1.5 | X < 1)$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

Función de probabilidad condicional

Si $X$ y $Y$ son dos variables aleatorias conjuntas continuas, entonces se define la función de densidad marginal de $X$ como:

$$f_{X|y_0}(x|Y=y_0) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x,y_0)}{f_Y(y_0)}; & f_Y(y_0) > 0 \\ 0; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para ambas v.v.a.a. (discretas y continuas) se obtiene la misma expresión

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

## EJERCICIO 11

Sean $X_1$y $X_2$ las proporciones de dos sustancias distintas que se encuentran en una muestra de una mezcla de reactivos que se usa como insecticida. Supóngase que $X_1$y $X_2$ tienen una densidad de probabilidad conjunta representada por:

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}2, & x_1\geq 0, 0\leq x_2\leq 1, x_1+x_2\leq 1\\ 0, & en\ otro\ caso\end{cases}$$

a) Calcular $P\left(X_1\leq\frac{3}{4}, X_2\leq\frac{3}{4}\right)$

b) Calcular $P\left(X_1\leq\frac{1}{2}\middle| X_2\leq\frac{1}{2}\right)$

# INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

Dos variables aleatorias conjuntas son independientes si y sólo si:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Para todo valor de $x$ y de $y$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 12

Sea X el precio que el transportista inicial paga por un barril de petróleo crudo, y Y, el que paga la refinería que compra ese petróleo. La densidad conjunta de está dada por:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{200} \qquad 20 < x < y < 40$$

Determinar si las v.v.a.a. conjuntas son independientes o no.

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 13

Dada la siguiente función de probabilidad conjunta, determinar si las variables son o no independientes.

| $f_{XY}(x,y)$ | | y | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| x | 0 | 0.1 | 0.20 | 0.20 |
| | 1 | 0.04 | 0.08 | 0.08 |
| | 2 | 0.06 | 0.12 | 0.12 |

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

## VALOR ESPERADO

Si $X$ $y$ $Y$ son variables aleatorias conjuntas con función de probabilidad o de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$ y si $g(x,y)$ es una función de dichas variables aleatorias. Entonces el valor esperado de $g(x,y)$se define como:

$$E[g(X,Y)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\forall R_x} \sum_{\forall R_y} g(x,y) f_{XY}(x,y) & discretas \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y) dxdy & continuas \end{cases}$$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

## PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO

1. $E[c] = c$
2. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
3. Si $X$ y $Y$ son variables aleatorias independientes, entonces:

$$E[g_1(X)g_2(Y)] = E[g_1(x)]E[g_2(y)]$$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

## EJERCICIO 14

La función de densidad de probabilidad conjunta de la cantidad de $X$ almendras y $Y$ nueces de macadamia en una lata de una libra de nueces está dada por:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 24xy; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \leq 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad en\ otro\ caso \end{cases}$$

Si una libra de almendras le cuesta a la compañía \$1.00 y una libra de nueces le cuesta \$1.50, y suelen completar la lata con cacahuates que tienen un costo de \$0.50 por libra, determinar el costo esperado total del contenido de la lata.

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

## EJERCICIO 15

Suponer que X y Y no son v.v.a.a. independientes que tienen la distribución de probabilidad conjunta:

| $f_{XY}(x,y)$ | | y | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 |
| x | -1 | 0.02 | 0.06 | 0.02 | 0.10 |
| | 0 | 0.04 | 0.15 | 0.20 | 0.10 |
| | 1 | 0.01 | 0.15 | 0.14 | 0.01 |

Encontrar:

a) El primer momento con respecto al origen de 2X-3Y
b) El valor esperado de XY

## VALOR ESPERADO CONDICIONAL

Si $X$ $y$ $Y$ son dos variables aleatorias conjuntas, se define el valor esperado condicional como:

$$\mu_{Y|x_0} = E[Y|X = x_0] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x_0}(y|x_0)dy & continua \\ \displaystyle\sum_{\forall R_Y} y f_{Y|x_0}(y|x_0) & discreta \end{cases}$$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

## EJERCICIO 16

Sean las variables aleatorias conjuntas X y Y, con una distribución de probabilidad dada por la siguiente tabla

| $f_{XY}(x,y)$ | y | | |
|---|---|---|---|
| x | | -1 | 1 |
| | 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ |
| | 2 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ |
| | 3 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |

Determinar $\mathrm{E}[X|Y > 0]$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 17

Suponga que el porcentaje X de alumnos y Y de alumnas que han concluido un examen de probabilidad y estadística se puede describir mediante la función densidad de probabilidad conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 8xy; & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

¿Cuál es el porcentaje esperado de alumnos que hayan concluido el examen cuando el 20% de las alumnas ya lo concluyó?

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas

## COVARIANCIA

Medida de dispersión que indica en promedio, qué tanto se alejan conjuntamente los valores de sus medias respectivas

Si X y Y son dos v.v.a.a. conjuntas, su covariancia está dada por:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas

## COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE PEARSON

Medida de dispersión estandarizada que indica en promedio, qué tanto se alejan conjuntamente los valores de sus medias respectivas

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

## COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN

Medida de dispersión estandarizada que indica grado de explicación de una variable con respecto de otra

$$\rho^2 = \frac{Cov(X,Y)^2}{Var(X)Var(Y)} = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}$$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 18

La función de probabilidad conjunta de la cantidad de deducible sobre una póliza de automóvil (X) y la cantidad deducible sobre póliza de propietario de casa (Y) está dada por:

| $f_{XY}(x,y)$ | | $x$ $y$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 100 | 200 |
| $x$ | 100 | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| | 250 | 0.05 | 0.15 | 0.3 |

a) Obtener la covariancia de la función conjunta.
b) Obtener el coeficiente de correlación de Pearson
c) Obtener el grado de explicación entre variables.

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 19

La función de probabilidad conjunta de la cantidad de almendras (X) y la cantidad de nueces (Y) está dada por:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 24xy; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Obtener la covariancia de la función conjunta.
b) Obtener el coeficiente de correlación de Pearson.
c) Obtener el grado de explicación entre variables.

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

## VARIANCIA DE DOS O MÁS VARIABLES

$$Var[aX + bY] = a^2Var[X] + 2abCov[X,Y] + b^2Var[Y]$$

Si dos variables aleatorias X e Y son independientes, entonces la varianza de su suma es igual a la suma de sus varianzas.

$$var[X + Y] = var[X] + var[Y]$$

# TEMA III
# Variables aleatorias Conjuntas Continuas

Para obtener la variancia de una suma de 3 variables aleatorias:

$$Var[aX + bY + cZ] = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY}^2 & \sigma_{XZ}^2 \\ \sigma_{XY}^2 & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ}^2 \\ \sigma_{XZ}^2 & \sigma_{YZ}^2 & \sigma_Z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A esta matriz se le conoce como matriz de variancias y covariancias.