Cálculo Vectorial
Lectura 33: Teorema de Stokes

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Teorema de Stokes

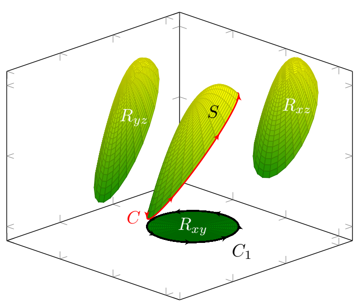

Figura 1. La superficie S está bordeada por la curva C; S se proyecta en cada plano coordenado, obteniendo las regiones R_{xy}, R_{yz} y R_{xz}. La región R_{xy} está cercada por la curva C_1.

Una superficie abierta S, de acuerdo a la descripción que se estudió en la integral de superficie, está limitada por una frontera que no es otra cosa que una curva suave y cerrada C (véase la figura 1). Esta frontera puede estar atravesada por un campo vectorial

$$\mathbf{f}(x,y,z) = P\hat{\mathbf{i}} + Q\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}} \tag{1}$$

La superficie S puede parametrizarse de diversas formas, entre ellas utilizar a x y y como parámetros; de esta forma la ecuación vectorial de la superficie es

$$\mathbf{s} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z(x,y)\hat{\mathbf{k}} \tag{2}$$

cuyo vector normal es

$$\mathbf{n} = -z_x\hat{\mathbf{i}} - z_y\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \tag{3}$$

Estos elementos se utilizarán para calcular la integral de superficie del rotacional de (1). De esta forma:

$$\nabla \times \mathbf{f} = (R_y - Q_z)\hat{\mathbf{i}} + (P_z - R_x)\hat{\mathbf{j}} + (Q_x - P_y)\hat{\mathbf{k}} \tag{4}$$

Con (2), (3) y (4) se puede calcular la integral de superficie:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \left(-z_x\hat{\mathbf{i}} - z_y\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right)\, dx\, dy \\ I &= \iint_S (Q_z - R_y)z_x + (R_x - P_z)z_y + (Q_x - P_y)\, dx\, dy \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora, para calcular la integral de línea del campo $\mathbf{f}$ a lo largo de la frontera C de la superficie (2) (mostrada en la figura 1), se debe calcular la diferencial de trayectoria $d\mathbf{r}$. Hay que observar que la curva es parte de la superficie, por lo que z seguirá dependiendo de x y y, que a su vez dependen de t para dibujar la curva:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z\big(x(t), y(t)\big)\hat{\mathbf{k}} \tag{6}$$

Para obtener la diferencial de trayectoria de (6), a la componente en $\hat{\mathbf{k}}$ debe aplicársele la regla de la cadena multivariable; es decir,

$$\frac{d}{dt}z(x,y) = z_x\frac{dx}{dt} + z_y\frac{dy}{dt}$$

De esta forma, la diferencial de trayectoria de (6) es

$$\mathbf{r}(t) = dx(t)\,\hat{\mathbf{i}} + dy(t)\,\hat{\mathbf{j}} + (z_x\ dx + z_y\ dy)\,\hat{\mathbf{k}}$$

Ahora puede construirse la integral de línea del campo (1) sobre la curva C_1 del plano xy:

$$\begin{aligned} I &= \oint_{C_1} P\ dx + Q\ dy + R\,(z_x\ dx + z_y\ dy) \\ I &= \oint_{C_1} (P + Rz_x)\ dx + (Q + Rz_y)\ dy \qquad (7) \end{aligned}$$

La integral de línea (7) es susceptible de aplicársele el teorema de Green. Al calcular las derivadas parciales del integrando de (7) se debe aplicar la regla de la cadena multivariable a P, Q y R pues son las componentes del campo (1) las cuales dependen de x, y y z (recuérdese que z es dependiente de x y y).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(Q + Rz_y) &= Q_x + Q_z z_x + Rz_{xy} + z_y\,(R_x + R_z z_x) \\ \frac{\partial}{\partial y}(P + Rz_y) &= P_y + P_z z_y + Rz_{xy} + z_x\,(R_y + R_z z_y) \end{aligned}$$

Por lo que el teorema de Green para (7) en la región R_{xy} es

$$\begin{aligned} I &= \iint_{R_{xy}} \frac{\partial}{\partial x}(Q + Rz_y) - \frac{\partial}{\partial y}(P + Rz_y)\ dx\ dy \\ &= \iint_{R_{xy}} Q_x + Q_z z_x + z_y R_x - P_y - P_z z_y - z_x R_y\ dx\ dy \qquad (8) \\ I &= \iint_{R_{xy}} (Q_z - R_y)\,z_x + (R_x - P_z)\,z_y + (Q_x - P_y)\ dx\ dy \qquad (9) \end{aligned}$$

Las integrales (9) y (5) son la misma. Esta relación entre una integral de línea y una integral de superficie se conoce como el teorema de Stokes, el cuál es una generalización del teorema de Green pero aplicado al espacio $\mathbb{R}^3$.

> Sea S una superficie suave abierta en $\mathbb{R}^3$ con borde formado por la curva cerrada C, tal que al proyectar S sobre los tres planos coordenados se obtienen curvas planas cerradas simples. Para el campo vectorial $\mathbf{f} = (x, y, z)$ con derivadas parciales se satisface
>
> $$\iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

Ejemplo. Calcule el valor de

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

a lo largo de la curva $C : \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 10 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$, donde $\mathbf{f}(x, y, z) = y\hat{\mathbf{i}} - 3x\hat{\mathbf{j}} + y^2 z\hat{\mathbf{k}}$.

La superficie que se encuentra acotada por la curva es el casquete esférico, o bien el mínimo del paraboloide, por lo que debe encontrarse la forma paramétrica de una de estas superficies y la orientación del vector normal. La parametrización en este caso será de la esfera, y se despejará z en su sección positiva y los parámetros serán x y y.

$$\begin{aligned} z &= -2 + \sqrt{10 - x^2 - y^2} \\ x &\in \mathbb{R} \\ y &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La ecuación vectorial de la superficie es

$$\mathbf{r}(x, y) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + \left(-2 + \sqrt{10 - x^2 - y^2}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Al aplicar las derivadas parciales

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \hat{\mathbf{i}} - \frac{x}{\sqrt{10-x^2-y^2}}\hat{\mathbf{j}}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \hat{\mathbf{j}} - \frac{y}{\sqrt{10-x^2-y^2}}\hat{\mathbf{k}}$$

y calcular el producto cruz

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{10-x^2-y^2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{\sqrt{10-x^2-y^2}}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

el vector normal es

$$\mathbf{n} = \frac{x}{\sqrt{10-x^2-y^2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{\sqrt{10-x^2-y^2}}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

Para determinar la orientación correcta del vector normal se debe establecer la dirección de la trayectoria. Debido a que la curva es paralela al plano xy, se tomará un sentido antihorario y en consecuencia el vector normal debe salir de la superficie para tener la orientación correcta (estar coordinada con la dirección de la trayectoria). La figura 2 muestra la geometría del problema.

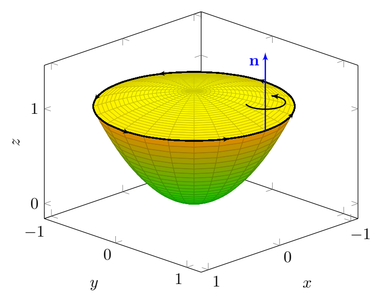

Figura 2. La porción esférica (amarilla) es la superficie a la que se le calcula el vector normal $\mathbf{n}$.

De acuerdo a la figura, el vector normal debe tener componente z positiva para la orientación correcta.

Ahora, el rotacional es

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -3x & y^2 z \end{vmatrix}$$
$$= 2yz\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{k}}$$

cuya evaluación con la superficie es

$$\nabla \times \mathbf{f}\Big|_{\mathbf{r}} = 2y\left(-2+\sqrt{10-x^2-y^2}\right)\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{k}}$$

La región de integración está definida por la proyección de la trayectoria C sobre el plano xy. Para encontrar la región de integración, se requiere la intersección del paraboloide con la esfera:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+(z+2)^2 &= 10 \\ z+(z+2)^2 &= \\ z+z^2+4z+4 &= \\ z^2+5z+4 &= 10 \\ z^2+5z-6 &= 0 \end{aligned}$$

donde las soluciones son $z=1$ y $z=-6$. Se descarta la solución negativa, pues el valor positivo es el único que satisface ambas ecuaciones de la curva C. De esta forma la región de integración es $x^2+y^2=1$. En este ejemplo se realizará un cambio de coordenadas una vez que la integral esté planteada, considerando que los límites de la región de integración son $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. La integral a calcular es

$$I = \iint_R \begin{bmatrix} -4y+2y\sqrt{10-x^2-y^2} \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{10-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{10-x^2-y^2}} \\ 1 \end{bmatrix} dA$$

$$I = \iint_R -\frac{4xy}{\sqrt{10 - x^2 - y^2}} + 2xy - 4\ dA$$

Realizando el cambio de coordenadas, el valor de la integral es

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-\frac{4r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{10-r^2}} + 2r^2\cos\theta\sin\theta - 4\right)\ r\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 -\frac{4r^3\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{10-r^2}} + 2r^3\cos\theta\sin\theta - 4r\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{3}\sqrt{10-r^2}\left(r^2+20\right)\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}r^4\cos\theta\sin\theta - 2r^2\right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(84 - \frac{80}{3}\sqrt{10}\right)\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta - 2\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{169}{2} - \frac{80}{3}\sqrt{10}\right)\sin\theta\cos\theta - 2\ d\theta \\
&= \left[\left(\frac{169}{4} - \frac{40}{3}\sqrt{10}\right)\sin^2\theta - 2\theta\right]_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

$$I = -4\pi$$

2. Circulación

Además del trabajo, una integral de línea permite calcular la cantidad de campo vectorial que viaja en la misma dirección de una trayectoria cerrada. El cálculo de la integral de línea permite evaluar la proyección del campo sobre el vector tangente a la trayectoria: si el signo del resultado es positivo, entonces el campo se encuentra con dirección *a favor* de la trayectoria; en cambio, un signo negativo indica que el campo posee dirección *en contra* del sentido de la trayectoria.

En la dinámica de fluidos, la tendencia de un campo vectorial a moverse en sentido de una trayectoria se conoce como circulación (Γ). Cuando los vectores del campo se mueven acompañando el sentido de la trayectoria, éstos tienden a arremolinarse. Esto se debe a que la trayectoria es cerrada.

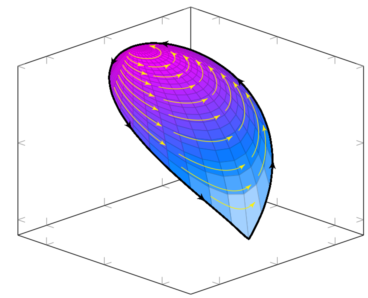

Figura 3. Un campo vectorial puede seguir a una trayectoria cerrada sobre una superficie. Ésta es la circulación.

Como la circulación incluye un movimiento que se cierra sobre sí mismo, entonces es una medida de la rotación vectorial sobre una trayectoria cerrada, tal como se muestra en la figura 3, donde los vectores de un campo rotan dentro de una superficie encerrada por una curva. Al hablar de rotación vectorial, la forma de cuantificarla es mediante el rotacional. De esta manera, la circulación de un campo $\mathbf{f}$ se mide al sumar todas las rotaciones vectoriales sobre una superficie encerrada por una trayectoria C.

Sea $\mathbf{f}(x, y, z)$ un campo vectorial con derivadas parciales sobre una superficie S con frontera C. La circulación del campo sobre la trayectoria se calcula como

$$\Gamma = \iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{S}$$

Ejemplo. Calcule la circulación total del campo vectorial

$$\mathbf{f}(x, y, z) = xy\hat{\mathbf{i}} + yz\hat{\mathbf{j}} + xz\hat{\mathbf{k}}$$

a lo largo de la curva $C : \begin{cases} 1 = x^2 + y^2 \\ 1 = x + y + z \end{cases}$, recorrida en sentido antihorario.

La geometría de la curva se presenta en la figura 4.

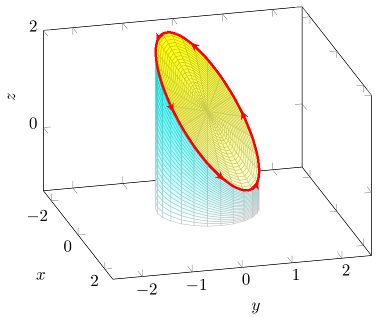

Figura 4

Para obtener el vector normal puede utilizarse tanto el plano como el cilindro. La ventaja de usar el plano es que ya se tiene el vector normal (de la ecuación cartesiana), el cual debe apuntar hacia el primer octante para que esté orientado con la trayectoria. De esta forma, la ecuación parametrizada del plano y su vector normal son

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(x,y) &= x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + (1-x-y)\,\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{n} &= \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Por otro lado, el rotacional del campo es

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{f} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} \\ &= -y\hat{\mathbf{i}} - z\hat{\mathbf{k}} - x\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

La región de integración es la sombra del plano encerrada por el cilindro. Es más conveniente hacer un cambio a coordenadas polares, donde los intervalos de integración están definidos por $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

A evaluar el rotacional con la ecuación del plano, la integral para calcular la circulación es

$$\begin{aligned}\Gamma &= \iint_S \left(-y\hat{\mathbf{i}} - z\hat{\mathbf{k}} - x\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right)\, dA \\ &= \iint_S -y - z - x\; dA \\ &= \iint_S -y - (1-x-y) - x\; dA \\ &= -\iint_S dA \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\; dr\; d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^1 d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\; d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} \\ \Gamma &= -\pi\end{aligned}$$

Por lo que la circulación total del campo sobre la trayectoria es $\Gamma = -\pi\ [u\Gamma]$.

Como el rotacional tiene unidades $\left[\frac{1}{s}\right]$ y la diferencial de superficie es un área con unidades $[m^2]$, la circulación posee como unidades a $\left[\frac{m^2}{s}\right]$.