# Cálculo Vectorial

## Lectura 6: Derivada de Funciones Vectoriales

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero de 2020

## 1. Derivada de Funciones Vectoriales de Variable Escalar

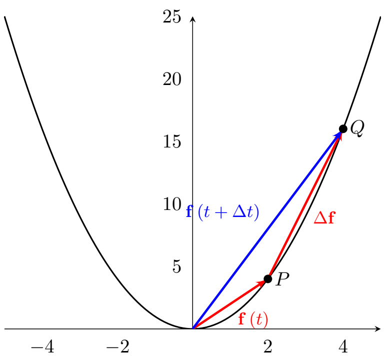


Figura 1. El incremento vectorial $\Delta\mathbf{f}$ se obtiene al incrementar la variable $t$; dicho incremento hace que la función vectorial cambie del punto $P$ al punto $Q$.

En Cálculo de una variable se define a la derivada como la razón de cambio instantáneo de una función $f\left(x\right)$ cuando la variable independiente $x$ se incrementa. Este concepto puede trasladarse a una función vectorial con variable escalar.

Dos vectores imagen de la función $\mathbf{f}\left(t\right)$ son $\mathbf{p}=\mathbf{f}\left(t\right)$ y $\mathbf{q}=\mathbf{f}\left(t+\Delta t\right)$. Para alcanzar a $\mathbf{q}$ partiendo de $\mathbf{p}$ se puede calcular el vector $\Delta\mathbf{f}$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{q}&=\mathbf{p}+\Delta\mathbf{f}\\ \mathbf{q}-\mathbf{p}&=\Delta\mathbf{f}\\ \mathbf{f}\left(t+\Delta t\right)-\mathbf{f}\left(t\right)&=\Delta\mathbf{f}\end{aligned}\tag{1}$$

La expresión (1) denota la variación de la función vectorial $\mathbf{f}$, la cual se muestra en la figura 1. Esta variación se consigue al variar la variable independiente $t$ mediante $\Delta t$, por lo que para saber la razón de cambio instantáneo de $\mathbf{f}$ respecto a $t$ se calcula el límite

$$\mathbf{f}'\left(t\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta t}$$

que es la derivada de una función vectorial de variable escalar.

> Sea $\mathbf{f}\left(t\right)$ una función vectorial de variable escalar. La derivada de $\mathbf{f}$ respecto de la variable $t$ se define como
>
> $$\frac{d\mathbf{f}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{f}\left(t+\Delta t\right)-\mathbf{f}\left(t\right)}{\Delta t}$$

Si se analiza una función vectorial con variable escalar $t$ a partir de sus componentes, se observará que cada componente es una función de una sola variable. Por ejemplo, la función vectorial

$$\mathbf{f}\left(t\right)=f_1\left(t\right)\hat{\mathbf{i}}+f_2\left(t\right)\hat{\mathbf{j}}\tag{2}$$

está compuesta por las funciones $f_1$ y $f_2$, las cuales pueden derivarse de manera usual. Como la derivada es un operador lineal, al aplicar esta propiedad la expresión (2) se deriva como:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(t) &= f_1(t)\,\hat{\mathbf{i}} + f_2(t)\,\hat{\mathbf{j}} \\ \frac{d}{dt}\mathbf{f}(t) &= \frac{d}{dt}\left(f_1(t)\,\hat{\mathbf{i}} + f_2(t)\,\hat{\mathbf{j}}\right) \\ &= \frac{d}{dt}f_1(t)\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{d}{dt}f_2(t)\,\hat{\mathbf{j}} \\ &= \left(\frac{d}{dt}f_1(t)\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{d}{dt}f_2(t)\right)\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, para derivar una función vectorial de variable escalar se deriva cada componente respecto a la variable independiente.

***Ejemplo***. Obtenga la derivada de la función vectorial

$$\mathbf{f}(t) = t^2\hat{\mathbf{i}} + \sin 2t\hat{\mathbf{j}} - \ln(t+1)\,\hat{\mathbf{k}}$$

¿Cuál es el significado geométrico de esta derivada en el punto $P(0,0,0)$?

---

Derivando cada componente de la función se obtiene la derivada completa.

$$\mathbf{f}'(t) = 2t\hat{\mathbf{i}} + 2\cos 2t\hat{\mathbf{j}} - \frac{1}{t+1}\hat{\mathbf{k}}$$

Para determinar el valor de $t$ que permite alcanzar al punto $P$ se iguala el vector de posición $\mathbf{p}$ a la función vectorial.

$$\mathbf{f}(t) = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = t^2 \\ 0 = \sin 2t \\ 0 = -\ln(t+1)\end{cases}$$

Se determina que con $t=0$ se alcanza al punto deseado.

Al evaluar la derivada con el valor de la variable independiente se obtiene el vector

$$\begin{aligned}\mathbf{f}'(0) &= 0\hat{\mathbf{i}} + 2\cos 0\hat{\mathbf{j}} - \frac{1}{0+1}\hat{\mathbf{k}} \\ &= 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Geométricamente, la función $\mathbf{f}$ representa una curva en el espacio que contiene al origen (el punto $P$). El vector derivada es tangente a la función en el origen e indica la dirección en la cual la variable $t$ se incrementa (véase la figura 2).

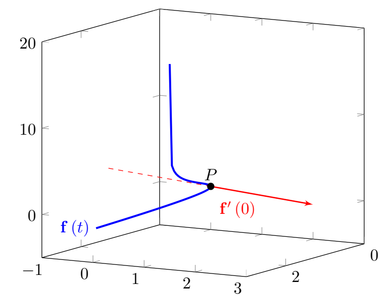


Figura 2

# 2. Derivada de Funciones Vectoriales de Variable Vectorial

La derivada de funciones vectoriales de variable vectorial hace uso de las derivadas parciales por medio del gradiente. La función

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x})\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$$

tiene como componentes $n$ campos escalares dependientes del vector $\mathbf{x}$, y al ser funciones de variable vectorial son susceptibles de derivarse parcialmente mediante el gradiente:

$$\nabla f_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \end{bmatrix}, \quad \nabla f_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \nabla f_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Se observa que la función $\mathbf{f}$ tiene $n \times m$ derivadas, arrojadas por cada gradiente. Esto indica que la derivada de una función vectorial de variable vectorial es una matriz.

Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ una función vectorial de variable vectorial, tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La derivada de $\mathbf{f}$ respecto del vector $\mathbf{x}$ es la matriz

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

cuyos renglones son los gradientes $\nabla f_i$ y cuyas columnas son las derivadas $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$. A la matriz derivada se le conoce como matriz jacobiana o gradiente generalizado.

El gradiente generalizado es la forma que modela la derivada de cualquier tipo de función, ya sea de variable vectorial o escalar:

- para una función escalar de variable escalar, la matriz jacobiana solo posee un renglón y una columna.
- para una función escalar de variable vectorial, la matriz jacobiana solo tiene un renglón.
- en una función vectorial de variable escalar, el gradiente generalizado está conformado por una columna.
- en una función vectorial de variable vectorial, el gradiente generalizado es una matriz cuadrada o rectangular de más de un renglón y más de una columna.

***Ejemplo***. Obtenga la matriz jacobiana del campo vectorial

$$\mathbf{f}(x, y) = e^x \cos y \hat{\mathbf{i}} + e^x \sin y \hat{\mathbf{j}} + \left(x^2 + y^2\right) \hat{\mathbf{k}}$$

---

La matriz jacobiana se obtendrá mediante derivadas parciales de $\mathbf{f}$.

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = e^x \cos y \hat{\mathbf{i}} + e^x \sin y \hat{\mathbf{j}} + 2x\hat{\mathbf{k}}$$
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = -e^x \sin y \hat{\mathbf{i}} + e^x \cos y \hat{\mathbf{j}} + 2y\hat{\mathbf{k}}$$

Por lo que la matriz jacobiana es

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$