Cálculo Vectorial
Lectura 28: Aplicaciones Físicas de la Integral Doble

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Densidad Superficial

Un concepto físico muy conocido es la densidad. A pesar de ser un concepto muy puntual, es frecuente que se asuma que la densidad solo es la cantidad de masa por unidad de volumen. Sin embargo, no es la única densidad que existe, ya que en realidad la densidad denota la cantidad de carga, masa, flujo magnético por unidad de longitud, área o volumen. En general, cuando hablamos sobre densidad establecemos la cantidad de *algo* por unidad de longitud/área/volumen. El caso que se estudiará a continuación es la densidad de superficie.

La función $\sigma(x, y)$ se conoce como función de densidad superficial e indica la cantidad k de masa, carga, [...] por unidad de superficie. Puesto que en cada punto de una región puede calcularse una diferencial de área dA, entonces

$$dk = \sigma(x, y)\ dA$$

Se concluye que la cantidad k que tiene una región plana (una placa metálica, una hoja de papel, una superficie de vidrio) puede calcularse mediante la integral doble.

Sea $\sigma(x, y)$ la cantidad k por unidad de área en una región plana R (densidad superficial). La cantidad total de k en la región es

$$k = \iint_R \sigma(x, y)\ dA$$

Este concepto permite utilizar la densidad superficial para calcular, por ejemplo, la masa o la cantidad de carga de una placa. El cálculo de la masa de una superficie permite tener materiales que aíslen el sonido en una habitación. En cuanto a la cantidad de carga eléctrica, permite el análisis del comportamiento de los conductores eléctricos para el diseño de circuitos.

Si se desea calcular la masa de una superficie se utiliza la integral

$$m = \iint_R \sigma\ dA \tag{1}$$

Para la densidad de carga se utiliza

$$Q = \iint_R \sigma\ dA \tag{2}$$

Ejemplo. Un disco limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25 \ [m]$ posee una densidad superficial de carga $\sigma(x, y) = \sqrt{14 + 2x^2 + 2y^2} \ \left[\frac{C}{m}\right]$. Calcule la cantidad total de carga en el disco.

La cantidad de carga en la región se obtiene mediante la integral (2):

$$Q = \iint_R \sqrt{14 + 2x^2 + 2y^2} \, dA$$

La región R está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Al observar el integrando y la región, conviene realizar un cambio a coordenadas polares. La circunferencia expresada en dicho sistema es $r = 5$, por lo que r varía de 0 a 5 y θ lo hace de 0 a 2π. Al sustituir las ecuaciones de transformación en la función de densidad la integral que debe calcularse es

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^5 \sqrt{14 + 2r^2} \ r \ dr \ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} \left[\sqrt{\left(14 + 2r^2\right)^3}\right]_0^5 \ d\theta \\
&= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} 512 - 14\sqrt{14} \ d\theta \\
&= \left(\frac{256}{3} - \frac{7}{3}\sqrt{14}\right) \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \left(\frac{256}{3} - \frac{7}{3}\sqrt{14}\right) \theta \Big|_0^{2\pi} \\
Q &= \frac{\pi}{3}\left(512 - 14\sqrt{14}\right)
\end{aligned}$$

El disco tiene una carga total de $\frac{\pi}{3}\left(512 - 14\sqrt{14}\right) \ [C]$.

2. Momento Estático

Cada cuerpo posee un único punto donde, conceptualmente, puede concentrarse toda la masa. Los cuerpos planos no son la excepción: una superficie plana posee un punto donde puede concentrarse toda su masa. Si ahora se añade un eje de referencia, mientras más cercano sea el punto que concentra la masa al eje, menor será la tendencia a la rotación. Este fenómeno incluye dos cantidades: los momentos estáticos o primer momento de área, que ayuda a localizar el punto de concentración de masa (llamado centro de masa); y el momento de inercia o segundo momento de área, que indica la tendencia del cuerpo plano a rotar respecto del eje.

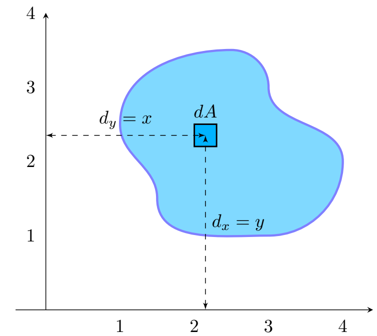

Figura 1. Para calcular los momentos estáticos a los ejes x o y se requiere la distancia de diferencial de área al respectivo eje coordenado.

El momento estático de un punto es el producto de su masa por la distancia al eje de referencia. Como un área, posee una diferencial de masa, definida a partir de la integral en (1), su momento estático es la integral del producto de la distancia al eje de referencia por la diferencial de masa. La geometría del momento estático de una diferencial de área se ilustra en la figura 1.

El momento estático M_L, respecto de un eje de referencia L, de una superficie plana R con densidad superficial σ se calcula como

$$M_L = \iint_R d_L \sigma \ dA$$

donde d_L es la distancia perpendicular a L.

Para calcular los momentos estáticos respecto a los ejes del sistema cartesiano, de acuerdo a la geometría mostrada en la figura 1, se calculan las integrales

$$M_x = \iint_R y\sigma(x,y)\ dA \qquad M_y = \iint_R x\sigma(x,y)\ dA$$

En tanto que el centro de masa se calcula mediante los momentos.

Las coordenadas del centro de masa de una región plana R se calculan como

$$x_m = \frac{M_y}{m} \qquad y_m = \frac{M_x}{m}$$

Ejemplo. Sea una placa metálica R cuya función de densidad superficial es $\sigma(x,y) = xy\ [\frac{kg}{m^2}]$. Obtenga las coordenadas del centro de masa, si la placa está definida por la región interior a las curvas $y = x^2 - 6x + 10$ y $y = -x + 6$.

Para calcular la localización del centro de masa se requieren la masa y los momentos estáticos, demás de los intervalos de integración. La figura 2 muestra la región que define a la placa.

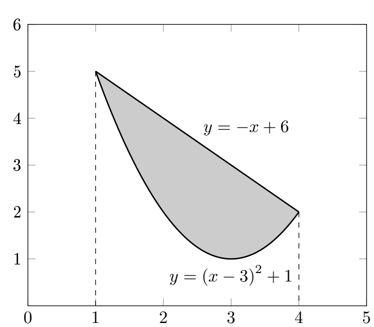

Figura 2

Gracias a la figura 2 los intervalos de integración quedan definidos como $x^2 - 6x + 10 \leq y \leq -x + 6$ y $1 \leq x \leq 4$.

Para calcular la masa, solo se integra la función de densidad.

$$\begin{aligned}
m &= \int_1^4 \int_{x^2-6x+10}^{-x+6} xy\ dy\ dx \\
&= \int_1^4 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2-6x+10}^{-x+6} dx \\
&= \int_1^4 -\frac{1}{2}x^5 + 6x^4 - \frac{55}{2}x^3 + 54x^2 - 32x\ dx \\
&= \left[-\frac{1}{12}x^6 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{55}{8}x^4 + 18x^3 - 16x^2\right]_1^4 \\
m &= \frac{1089}{40}\ [kg]
\end{aligned}$$

El cálculo del momento en x involucra la distancia al eje, que es y:

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_1^4 \int_{x^2-6x+10}^{-x+6} xy^2\ dy\ dx \\
&= \int_1^4 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2-6x+10}^{-x+6} dx \\
&= \frac{1}{3}\int_1^4 x(-x+6)^3 - x\left(x^2 - 6x + 10\right)^3\ dx \\
&= \left[-\frac{1}{24}x^8 + \frac{6}{7}x^7 - \frac{23}{3}x^5 + \frac{115}{3}x^5 - \frac{227}{2}x^4 + \right. \\
&\quad \left. +188x^3 - \frac{392}{3}x^2\right]_1^4 \\
M_x &= \frac{4113}{56}\ [kg \cdot m]
\end{aligned}$$

Para el momento en y la distancia al eje es $d_y = x$.

$$
\begin{aligned}
M_y &= \int_1^4 \int_{x^2-6x+10}^{-x+6} x^2 y \; dy \; dx \\
&= \int_1^4 x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2-6x+10}^{-x+6} \; dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^4 x^2 \left(-x+6\right)^2 - x^2\left(x^2-6x+10\right)^2 \; dx \\
&= \left[-\frac{1}{14}x^7 + x^6 - \frac{11}{2}x^5 + \frac{27}{2}x^4 - \frac{32}{3}x^3\right]_1^4 \\
M_y &= \frac{963}{14} \; [kg \cdot m]
\end{aligned}
$$

Ya se pueden calcular las coordenadas del centro de masa:

$$
\begin{aligned}
x_m &= \frac{M_y}{m} & y_m &= \frac{M_x}{m} \\
x_m &= \frac{2140}{847} & y_m &= \frac{2285}{847}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el centro de masa de la placa está en $C\left(\frac{2140}{847}, \frac{2285}{847}\right)$.

3. Momento de Inercia

Una región puede verse afectada por una fuerza, la cual puede hacerla rotar alrededor de un eje. Debido a su masa, la región puede verse inmutable ante la fuerza o bien puede comenzar a rotar muy fácilmente. Los factores por los cuales el movimiento de rotación puede o no comenzar son la masa de la región y el cuadrado de su distancia al eje de rotación. Mientras mayor sea la distancia, mayor es la tendencia de giro. Esta medida de rotación se llama momento de inercia.

El momento de inercia I_L, respecto de un eje de referencia L, de una superficie plana R con densidad superficial σ se calcula como

$$I_L = \iint_R d_L^2 \sigma \; dA$$

donde d_L^2 es el cuadrado de la distancia perpendicular a L.

Ejemplo. Una placa de madera R tiene densidad superficial uniforme igual a 4 $\left[\frac{kg}{m^2}\right]$. Obtenga el momento de inercia respecto del eje x, si la placa está definida por el cuadrado $1 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 3$.

El eje de rotación es x, por lo que la distancia del madero al eje es y. La función de densidad σ es constante e igual a 4. La integral para calcular el momento de inercia es

$$
\begin{aligned}
I_x &= \int_1^3 \int_1^3 4y^2 \; dy \; dx \\
&= \int_1^3 \left[\frac{4}{3}y^3\right]_1^3 \; dx \\
&= \int_1^3 \frac{104}{3} \; dx \\
&= \frac{104}{3}x\Big|_1^3 \\
I_x &= \frac{208}{3} \; \left[kg \cdot m^2\right]
\end{aligned}
$$

Por lo que el momento de inercia buscado es $I_x = \frac{208}{3}$ $[kg \cdot m^2]$.