

RC6

0.1. Descomposición LU

0.1.1. Eliminación gaussiana

Dada una matriz A de $m \times n$, a menudo necesitamos resolver un sistema lineal de la forma $Ax = b$. De hecho, al utilizar el método de Newton para resolver un sistema lineal o al resolver una ecuación diferencial parcial mediante un método implícito de diferencias finitas, necesitaremos resolver un sistema lineal una y otra vez a medida que iteramos hacia una solución (con A diferente cada vez) en el primer caso, pero a menudo con la misma A cada vez, pero con una b diferente en el último caso.

El medio básico para hacer esto es la eliminación gaussiana por reducción de filas. En la mayoría de los casos, esta operación se realizará mediante una rutina proporcionada. Por ejemplo, el comando de barra invertida de MATLAB resuelve $Ax = b$ mediante el comando simple $x = A \backslash b$, y el operador de barra invertida elige automáticamente la que considera la mejor manera de hacerlo (que no siempre es la eliminación gaussiana).

Para conjuntos de datos de tamaño pequeños, el tiempo de respuesta está por debajo del umbral de percepción del usuario, por lo que importa poco cómo se encuentre la solución. Sin embargo, es valioso comprender las ideas ocultas debajo de estas rutinas para poder utilizarlas de manera más eficiente para grandes conjuntos de datos.

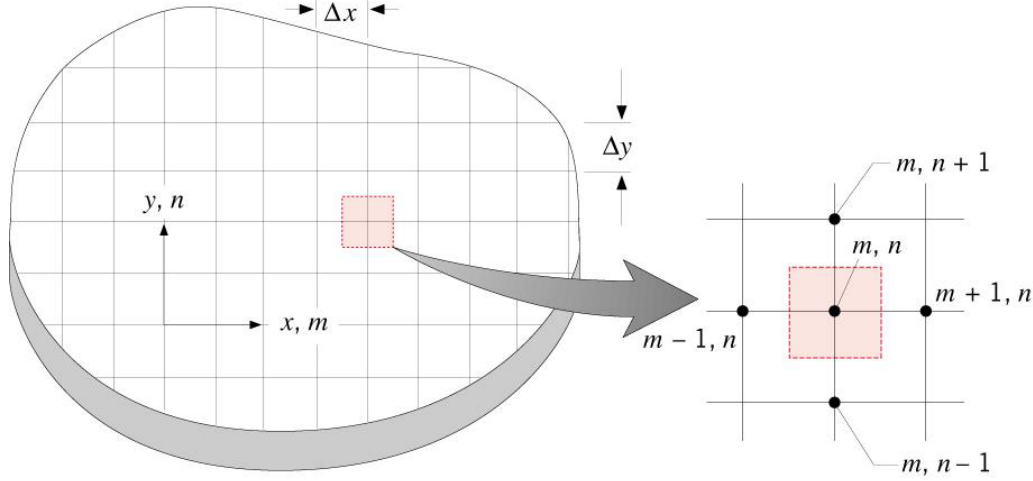
0.1.2. Descomposición LU

Una factorización de A en la forma $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior. No siempre existe una factorización LU de la matriz A , pero si los principales menores principales de A son todos diferentes de cero, entonces la factorización LU de A existe y es única.

0.2. Aplicación

0.2.1. Esquema de diferencias finitas

Un esquema bien conocido para resolver numéricamente una ecuación diferencial parcial es utilizar diferencias finitas. La idea es discretizar la ecuación diferencial parcial reemplazando las derivadas parciales con sus aproximaciones, es decir, diferencias finitas. A continuación ilustraremos el esquema con la ecuación de Laplace.



Dividamos una región bidimensional en regiones pequeñas con incrementos en las direcciones x y y dados Δx y Δy como se muestra en la siguiente figura.

Cada punto nodal se designa mediante un esquema de numeración m y n , donde m indica el incremento x y n indica el incremento y .

Se supone que la distribución de temperatura en el medio está representada por el punto nodal de temperatura. La temperatura $T_{m,n} = T(x_m, y_n)$ en cada punto nodal (x_m, y_n) (que es denotado simbólicamente por (m, n) como en el diagrama anterior) es la temperatura promedio del región sombreada circundante. A medida que aumenta el número de puntos nodales, se obtiene mayor precisión en la representación de la distribución de temperatura.

Se puede obtener una ecuación en diferencias finitas adecuada para los nodos interiores de un sistema bidimensional estable considerando la ecuación de Laplace en el punto nodal m, n como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{m,n} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{m,n} = 0 \quad (1)$$

Las segundas derivadas en el punto nodal (m, n) se pueden expresar como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{m,n} \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m+\frac{1}{2},n} - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{m,n} \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{m,n+\frac{1}{2}} - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \quad (3)$$

Como se muestra en la figura, los gradientes de temperatura se pueden aproximar (como se

deriva de la serie de Taylor) como una función lineal de las temperaturas nodales como

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n+\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n-\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y} \quad (7)$$

$$(8)$$

donde, $T_{m,n} = T(x_m, y_n)$. Sustituyendo estas 4 expresiones en , obtenemos (2)

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \quad (10)$$

$$(11)$$

Por último, reemplazamos en la ecuación (2) estas dos expresiones y tenemos

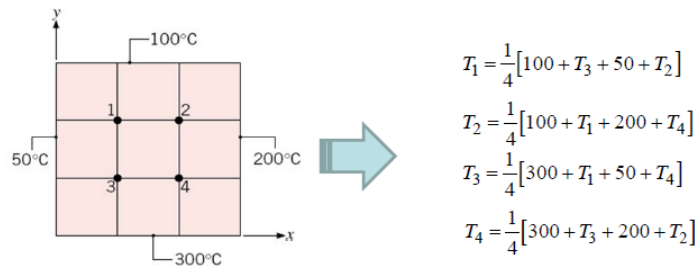
$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2}$$

Supongamos que $\Delta x = \Delta y$ entonces, la aproximación en diferencia finita de la ecuación de Laplace para regiones interiores se puede expresar como

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{i,j} = 0$$

También se obtienen de manera similar aproximaciones de orden superior para nodos interiores y nodos de frontera.

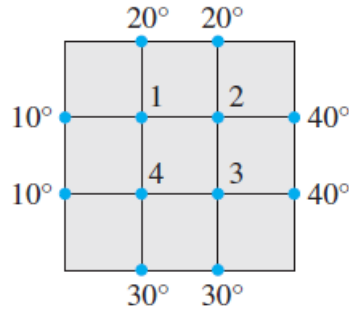
Ejemplo: distribución del calor en un medio Una placa rectangular bidimensional está sujeta a las condiciones límite de temperatura uniforme (con la superficie superior mantenida a $100^\circ C$, $50^\circ C$ lado izquierdo, $200^\circ C$ lado derecho y $300^\circ C$ el lado inferior) como se muestra en la siguiente figura



0.3. Su trabajo comienza aquí

1. Problema

Suponga que la placa que se muestra en la figura representa una sección transversal de una viga de metal, con un flujo de calor insignificante en la dirección perpendicular a la placa. Sea T_1 , T_2 , T_3 y T_4 denota las temperaturas en los cuatro nodos interiores de la malla en la figura.



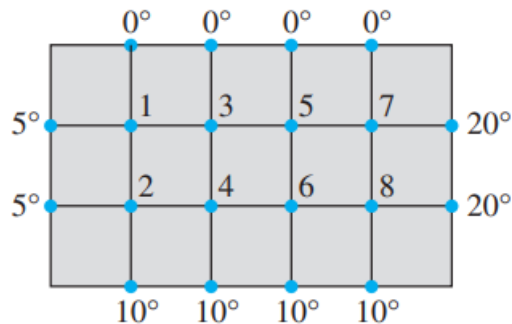
La solución al problema del flujo de calor en estado estacionario para la placa de la figura se aproxima mediante la solución de la ecuación

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 60 \\ 70 \end{bmatrix}$$

- Calcule la descomposición LU de A .
- Usa la factorización LU para resolver el sistema

2. Problema

La solución al problema del flujo de calor en estado estacionario para la placa de la figura



se aproxima mediante la solución de la ecuación $Ax = b$; donde $b = [5 \ 15 \ 0 \ 10 \ 0 \ 10 \ 20 \ 30]^t$

y

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

En este caso la matriz es orden 8 para lo cual sería óptimo definir un algoritmo en Matlab para que realice la descomposición. Un algoritmo para obtener la descomposición LU es el siguiente.

1. Definimos las matrices $L = I$ y $U = A$.
2. En el paso k , $k = 1, \dots, n - 1$, hacemos los cambios

$$L \rightarrow LL_k^{-1} \quad y \quad U \rightarrow L_k U$$

3. Luego de estos $n - 1$ pasos, obtenemos la descomposición LU de A ,

$$A = LU$$

Dada la matriz cuadrada A podemos programar este algoritmo en MATLAB de la siguiente manera.

Algoritmo de factorización LU .

```
n=size(A,1);
L=eye(n);
U=A;
for k=1:n-1
    for i=k+1:n
        L(i,k)=U(i,k)/U(k,k);
        U(i,k:n)=U(i,k:n)-L(i,k)*U(k,k:n);
    end
end
```

- a) Use el algortimo dado para hallar la descomposición LU de A .
- b) Usa la factorización LU para resolver el sistema