RC4 (Continuación de caso RC2)

Sistema masa resorte

En la figura se muestra un sistema interconectado de dos masas, en una de ellas se aplica una fuerza externa con la finalidad de generar un movimiento. El ejercicio consiste en encontrar la función de transferencia que permita establecer como salida el desplazamiento de masa m_2, tomando como entrada la fuerza aplicada a la masa m_1.

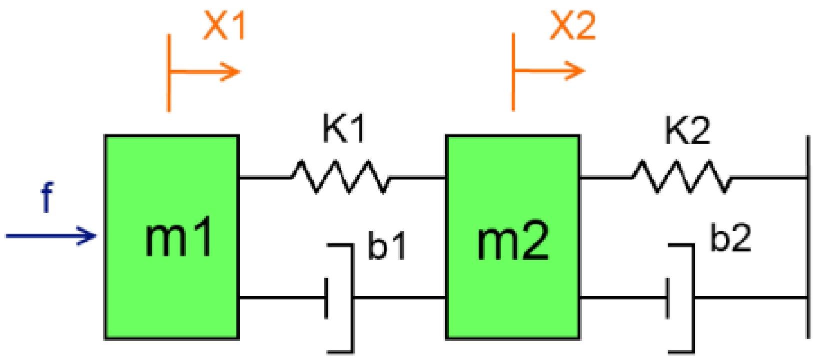

Figura : Modelo mecánico

- k denota a la constante elástica del resorte
- m es la masa
- x desplazamiento de la masa
- **f** fuerza aplicada a la masa para producir dezplazamiento
- b constante de amortiguamiento.

Aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las masas m_1 y m_2 obtenemos:

$$\mathbf{f} - k_1(x_1 - x_2) - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1\ddot{x}_1 \tag{1}$$

$$k_1(x_1 - x_2) + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2x_2 - b_2 = m_1\ddot{x}_1 \tag{2}$$

La teoráa de control moderno y la aplicación de la herramienta matemática conocida como Transformada de Laplace, permiten expresar las funciones de transferencia que simulan el comportamiento del sistema complejo. Para establecer el modelo en el espacio de estados, se inicia definiendo sus variables de estado, para luego estructurar el modelo. Al considerar las variables de estado podemos hacer un cambio de variales siguiente :

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 \\
z_2 &= \dot{x}_1 \\
z_3 &= x_2 \\
z_4 &= \dot{x}_2
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \dot{x}_1 \\
\dot{z}_2 &= \ddot{x}_1 \\
\dot{z}_3 &= \dot{x}_2 \\
\dot{z}_4 &= \ddot{x}_2.
\end{aligned}
$$

Al definir la salida como $y = z_3$, se plantea finalmente el modelo matemático como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, tal como se muestra en la expresión:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= -\frac{k_1}{m_1} z_1 - \frac{b_1}{m_1} z_2 + \frac{k_1}{m_1} z_3 + \frac{b_1}{m_1} z_4 + \frac{f}{m_1} \\
\dot{z}_3 &= z_4 \\
\dot{z}_4 &= \frac{k_1}{m_2} z_1 + \frac{b_1}{m_2} z_2 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_2}\right) z_3 - \left(\frac{b_1 + b_2}{m_2}\right) z_4 \\
y &= z_3
\end{aligned}
\right.
\tag{3}
$$

El cual se expresa matricialmente en la forma siguiente:

$$
\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
-\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\frac{k_1}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\left(\frac{k_1 + k_2}{m_2}\right) & -\left(\frac{b_1 + b_2}{m_2}\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{4}
$$

Es decir

$$
\dot{Z} = AZ + b \qquad \text{donde} \qquad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}
\tag{5}
$$

Problema

Muestre tres diferentes casos a partir de diferentes valores que pueden tomar las masas m_i, las constantes de restitución k_i , de amortiguamiento b_i y la fuerza f .

1. Determine si la matriz A es diagonalizable. En caso no lo sea, plantee condiciones para que si lo sea.

2. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales para cada caso.

3. Grafique los resulados de las posiciones de las masas con respecto al tiempo proporcionado condiciones iniciales adecuadas. Explique el comportamiento de tales gráficas

Observación:

- Para resolver el sistema de ecuaciones lineales desacoplado use únicamente los saberes previos realizados en el curso de Cálculo de una variable.
- Puede guiarse del código que esta compartido en los apuntes de aula publicado en el tercer módulo de Canvas. Así mismo les recuerdo que pueden usar el foro de çonsultasa generales del curso”para respejar dudas.