Sistema masa resorte

En la figura se muestra un sistema interconectado de dos masas, en una de ellas se aplica una fuerza externa con la finalidad de generar un movimiento. El ejercicio consiste en encontrar la función de transferencia que permita establecer como salida el desplazamiento de masa m_2, tomando como entrada la fuerza aplicada a la masa m_1.

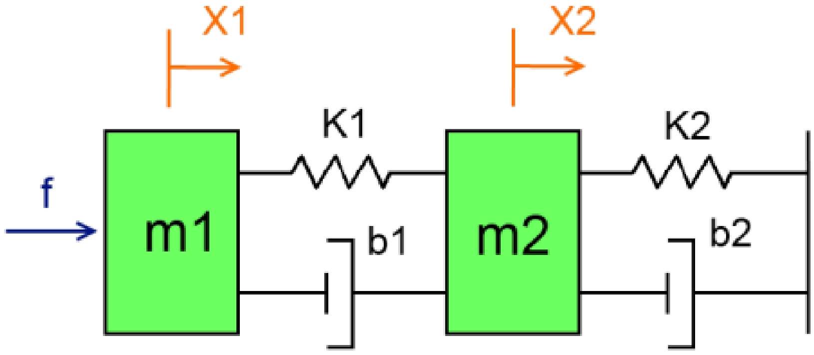

Figura : Modelo mecánico

- k denota a la constante elática del resorte
- m es la masa
- x desplazamiento de la masa
- f fuerza aplicada a la masa para producir dezplazamiento
- b constante de amortiguamiento.

Aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las masas m_1 y m_2 obtenemos:

$$f - k_1(x_1 - x_2) - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1\ddot{x}_1 \tag{1}$$

$$k_1(x_1 - x_2) + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2x_2 - b_2 = m_1\ddot{x}_1 \tag{2}$$

La teoráa de control moderno y la aplicación de la herramienta matemática conocida como Transformada de Laplace, permiten expresar las funciones de transferencia que simulan el comportamiento del sistema complejo. Para establecer el modelo en el espacio de estados, se inicia definiendo sus variables de estado, para luego estructurar el modelo. Al considerar las variables de estado tenemos los reemplazos:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= \dot{x}_1 \\ z_3 &= \dot{x}_2 \\ z_4 &= \dot{x}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{x}_1\\ \dot{z}_2 &= \ddot{x}_1\\ \dot{z}_3 &= \dot{x}_2\\ \dot{z}_4 &= \ddot{x}_2\end{aligned}$$

Al definir la salida como $y = z_3$, se plantea finalmente el modelo matemático como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, tal como se muestra en la expresión:

$$\begin{cases}\dot{z}_1 = z_2\\ \dot{z}_2 = -\dfrac{k_1}{m_1}z_1 - \dfrac{b_1}{m_1}z_2 + \dfrac{k_1}{m_1}z_3 + \dfrac{b_1}{m_1}z_4 + \dfrac{f}{m_1}\\ \dot{z}_3 = z_4\\ \dot{z}_4 = \dfrac{k_1}{m_2}z_1 + \dfrac{b_1}{m_2}z_2 - \left(\dfrac{k_1+k_2}{m_2}\right)z_3 - \left(\dfrac{b_1+b_2}{m_2}\right)z_4\\ y = z_3\end{cases}$$

El cual se expresa matricialmente en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\\ \dot{z}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\dfrac{k_1}{m_1} & -\dfrac{b_1}{m_1} & \dfrac{k_1}{m_1} & \dfrac{b_1}{m_1}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \dfrac{k_1}{m_2} & \dfrac{b_1}{m_2} & -\left(\dfrac{k_1+k_2}{m_2}\right) & -\left(\dfrac{b_1+b_2}{m_2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{f}{m_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Es decir

$$\dot{Z} = AZ + b \qquad \text{donde} \qquad Z = \begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{bmatrix}$$

1. Considerando los siguientes valores para los parámetros del modelo: $k_1 = 20$, $k_2 = 30$, $m_1 = m_2 = 25$, $b_1 = 5$, $b_2 = 8$ y $f = 50$. Muestre las matrices A y b asociadas al modelo.

2. Justifique si la matriz A tiene inversa o no , en caso afirmativo determine dicha inversa.

3. Considerando la matriz $M = b * b^T$, determine el rango de M mediante operaciones elementales por fila

4. Verifique si el vector b pertenece al espacio nulo de la matriz A. ¿Existe alguna forma sistemática de hallar todos los vectores que pertenecen al espacion nulo de la matriz A?, en caso positivo describa dichos vectores