# RC5 - Factorización QR

## CONTEXTO

La determinación de autovalores y autovectores de una matriz cuadrada A de orden $n$ es un problema que se presenta en numerosas ramas de la Matemática: teoría de E.D.P., determinación de ejes de cónicas y cuádricas, diseño de sistemas de información, estudio de las oscilaciones de ciertas estructuras, optimización lineal entre otras ramas. Dado que los autovalores son las raíces del polinomio característico:

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$$

es claro que los métodos de cálculo de autovalores pueden ser iterativos (ya que según el Teorema de Abel es imposible resolver mediante un número finito de operaciones elementales los polinomios de grado mayor o igual que 5).
Una primera posiblidad para el cálculo de los autovalores es el cálculo (mediante los llamados métodos clásicos) de los coeficientes del polinomio característico. Una vez conocidos estos, el problema se reduce a la resolución de una ecuación algebraica por los métodos ya estudiados. Sin embargo, estos métodos no se usan habitualmente debido a su gran inestabilidad numérica, derivada de la gran sensibilidad de los ceros de un polinomio a los cambios en sus coeficientes.

El gran avance en el problema del cálculo numérico de autovalores y autovectores de una matriz. El comando eig de Matlab implementa una versión algo más sofisticada del mismo. Existen en la literatura otros procedimientos alternativos, como puede ser por ejemplo el proceso de Arnoldi, Leverrier, Krylov, método de la potencia, de la potencia iterada, de la potencia inversa, de Rayleigh, Hotelling entre otros.

**Problema**

En este presente ejercicio nos centraremos en obtener los valores propios de cualquier matriz a partir de la factorización QR mediante un algoritmo. Consideremos $A_0 = A$ y aplicaremos la transofrmación QR lo cual queda $A_0 = Q_0 R_0$.

1. Demostrar que $R_0 = Q_0^t A_0$
2. Llamamos $A_1 = R_0 Q_0 = Q_0^t A_0 Q_0$. En general definimos si $A_k = Q_k R_k$ entonces $A_{k+1} = R_k Q_k$. Si $A_0 = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix}$ hallar $A_7$, $A_8$ y $A_9$
3. Verificar que la diagonal de la matriz $A_9$ se aproxima a los vectores de A. Comparar en el matlab mediante el uso del comando eig.

**Objetivo**

En el presente caso se busca que el alumno

1. Calcule mediante un método iterativo el valor de $A_9$
2. Verifique que la diagonal principal de la matriz $A_k$ se aproxima a los autovalores mientras $k$ va creciendo. Muestre las 10 primeras iteraciones.