



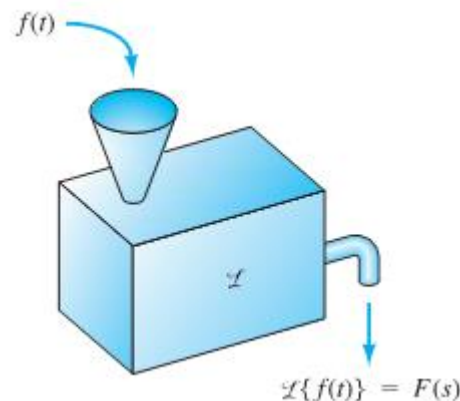
# La transformada de Laplace.

# Definición

Dada una función  $f(t)$  definida para toda  $t \geq 0$ , la *transformada de Laplace* de  $f$  es la función  $F$  definida como sigue:

➤ 
$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

para todo valor de  $s$  en los cuales la integral impropia converge.



# Ejemplo

- Aplicando la definición

Evalúe  $\mathcal{L}\{1\}$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}(1) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} = \\ \mathcal{L}\{1\} &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

# Transformada de funciones Básicas

$\mathcal{L}\{1\}$	$= \frac{1}{s}$	$\mathcal{L}\{\delta(t)\}$	$= 1$
$\mathcal{L}\{e^{at}\}$	$= \frac{1}{s-a}$	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}$	$= e^{-as}$
$\mathcal{L}\{t^n\}$	$= \frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathcal{L}\{\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}\}$	$= \frac{1}{(s-a)^n} \quad (n \geq 1)$
$\mathcal{L}\{\text{sen } at\}$	$= \frac{a}{s^2+a^2}$	$\mathcal{L}\{\frac{1}{2a^3}(\text{sen } at - at \cos at)\}$	$= \frac{1}{(s^2+a^2)^2}$
$\mathcal{L}\{\cos at\}$	$= \frac{s}{s^2+a^2}$	$\mathcal{L}\{\frac{1}{2a^3}(\text{sen } at + at \cos at)\}$	$= \frac{s^2}{a^2(s^2+a^2)^2}$
$\mathcal{L}\{\text{senh } at\}$	$= \frac{a}{s^2-a^2}$	$\mathcal{L}\{\int_0^t \frac{t}{2n} \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+a^2)^n}] dt\}$	$= \frac{1}{(s^2+a^2)^{n+1}}$
$\mathcal{L}\{\cosh at\}$	$= \frac{s}{s^2-a^2}$	$\mathcal{L}\{\frac{t}{2n} \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+a^2)^n}]\}$	$= \frac{s}{(s^2+a^2)^{n+1}}$

# Ejemplo

- Usando la tabla

Evalúe  $\mathcal{L}\{e^{-3t}\}$ .

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}, \quad s > -3.$$

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}, \quad s > 0.$$

$$e^{at} \qquad \frac{1}{s-a}$$

$$\sin kt \qquad \frac{k}{s^2 + k^2}$$

# Propiedades

- Linealidad

Si  $a$  y  $b$  son constantes, entonces

➤ 
$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \quad ($$

para toda  $s$  tal que las transformadas de Laplace tanto de  $f$  como de  $g$  existen.

- Ejemplo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{4e^{-3t} - 10 \sin 2t\} &= 4\mathcal{L}\{e^{-3t}\} - 10\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \\ &= \frac{4}{s+3} - \frac{20}{s^2+4}.\end{aligned}$$

$$e^{at} \qquad \frac{1}{s-a}$$

$$\sin kt \qquad \frac{k}{s^2+k^2}$$

# Primer propiedad de traslación en el eje s

Si  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  existe para  $s > c$ , entonces  $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}$  existe para  $s > a + c$ , y



$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a).$$

También se puede escribir  $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s \rightarrow s-a} = F(s)_{s \rightarrow s-a}$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (s > a)$
$e^{at} \cos kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2} \quad (s > a)$
$e^{at} \sin kt$	$\frac{k}{(s-a)^2 + k^2} \quad (s > a)$

# Propiedades

Ejemplo

$$\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\} =$$

$$\mathcal{L}\{t^3\} \Big|_{s \rightarrow s-5} = \frac{3!}{s^4} \Big|_{s \rightarrow s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s \rightarrow s-a} = F(s)_{s \rightarrow s-a}$$

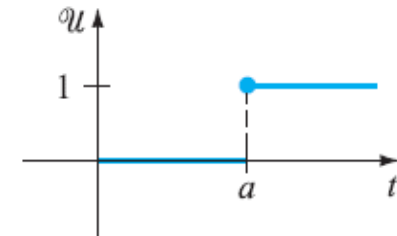


# Segunda propiedad de la traslación en el eje t

Función escalón unitario

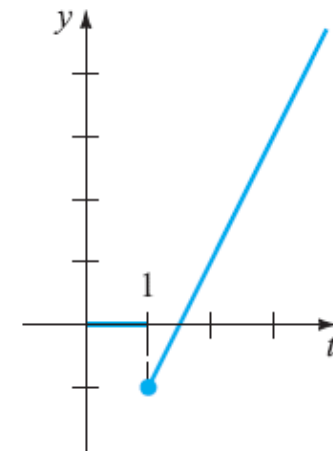
La **función escalón unitario**  $\mathcal{U}(t - a)$  se define como

$$\mathcal{U}(t - a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 2t - 3 & \end{cases}$$

$$f(t) = (2t - 3) \cdot \mathcal{U}(t - 1)$$



# Segunda propiedad de la traslación

Una función general definida por tramos del tipo:

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases}$$

Es la misma que

$$f(t) = g(t) - g(t) \mathcal{U}(t - a) + h(t) \mathcal{U}(t - a)$$

Análogamente una función del tipo:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ g(t), & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases}$$

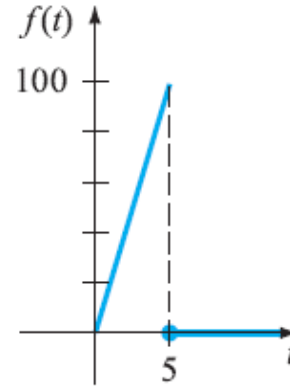
Puede ser escrita por:

$$f(t) = g(t)[\mathcal{U}(t - a) - \mathcal{U}(t - b)].$$

# Segunda propiedad de la traslación

Ejemplo:

$$f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}$$



Puede ser escrita por:

$$f(t) = 20t - 20t(t - 5)$$

$$f(t) = g(t) - g(t) \mathcal{U}(t - a) + h(t) \mathcal{U}(t - a)$$

# Segunda propiedad de la traslación

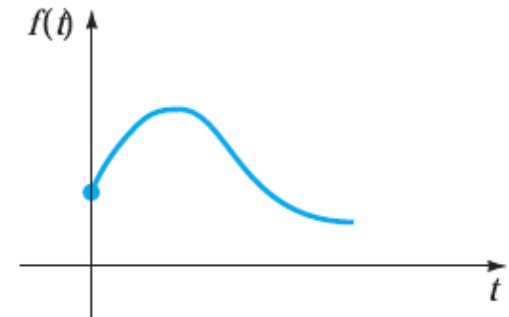
Transformada del escalón unitario

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

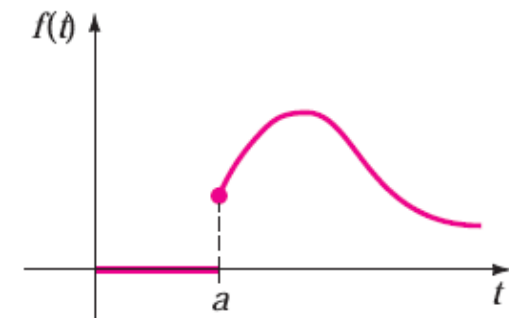
Si  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  y  $a > 0$ , entonces

$$\mathcal{L}\{f(t - a) \mathcal{U}(t - a)\} = e^{-as} F(s).$$

$$\mathcal{L}\{g(t) \mathcal{U}(t - a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{g(t + a)\}$$



**a)**  $f(t), t \geq 0$



**b)**  $f(t - a) \mathcal{U}(t - a)$

# Segunda propiedad de la traslación

## Ejemplo 1

$$f(t) = 2 - 3\mathcal{U}(t - 2) + \mathcal{U}(t - 3)$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\{2\} - 3\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t - 2)\} + \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t - 3)\} \qquad \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

$$= 2 \frac{1}{s} - 3 \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}.$$

# Segunda propiedad de la traslación

Ejemplo 2

$$\mathcal{L}\{\cos t \mathcal{U}(t - \pi)\}.$$

$$\mathcal{L}\{g(t) \mathcal{U}(t - a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{g(t + a)\}$$

Con

$$g(t) = \cos t \text{ y } a = \pi$$

entonces

$$g(t + \pi) = \cos(t + \pi) = -\cos t$$

$$\mathcal{L}\{\cos t \mathcal{U}(t - \pi)\} = -e^{-\pi s} \mathcal{L}\{\cos t\} = -\frac{s}{s^2 + 1} e^{-\pi s}.$$

# Segunda propiedad de la traslación

Ejemplo 2

$$\mathcal{L}[\cos 2t \cdot \mathcal{U}(t - 5)]$$

$$\mathcal{L}\{g(t) \mathcal{U}(t - a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{g(t + a)\}$$

$$g(t) = \cos 2t$$

$$g(t + 5) = \cos 2(t + 5)$$

$$g(t + 5) = \cos(2t + 10)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$g(t + 5) = \cos 2t \cdot \cos 10 - \sin 2t \cdot \sin 10$$

$$\mathcal{L}[\cos 2t \cdot \mathcal{U}(t - 5)] = e^{-5s} \cdot \mathcal{L}(\cos 2t \cdot \cos 10 - \sin 2t \cdot \sin 10)$$

$$\mathcal{L}[\cos 2t \cdot \mathcal{U}(t - 5)] = e^{-5s} \cdot \left( \cos 10 \cdot \frac{s}{s^2 + 4} - \sin 10 \cdot \frac{2}{s^2 + 4} \right)$$

# Cambio de escala

$$\text{Si } F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}[\cos(t)] = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Si queremos calcular:  $\mathcal{L}[\cos(3t)]$

$$\mathcal{L}[\cos(3t)] = \frac{1}{3} \frac{(s/3)}{(s/3)^2 + 1} = \frac{1}{3} \frac{(s/3)}{(s^2/9) + 1} = \frac{1}{3} \frac{(s/3)}{(s^2 + 9)/9} = \frac{s}{s^2 + 9}$$



# Transformada de Laplace de las derivadas

Si  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}[f'(t)] = s F(s) - f(0)$

Ejemplo:

Sabiendo que  $\mathcal{L}[t^3] = \frac{6}{s^4}$   $t^n \quad \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \text{ un entero positivo}$

$$\mathcal{L}[3t^2] = s \frac{6}{s^4} - 0 = \frac{6}{s^3}$$

# Generalización para derivadas de orden superior

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0).$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0).$$

# Teorema de la deriva de la transformada

Si  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}[t^2 e^{2t}] = \frac{2}{(s-2)^3}$$

$$e^{at} \quad \frac{1}{s-a}$$

$$F(s) = (s-2)^{-1}$$

$$F'(s) = (-1)(s-2)^{-2}$$

$$F''(s) = (-1)(-2)(s-2)^{-3}$$

# Teorema del valor inicial

Si existen los límites indicados se cumple

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

Ejemplo:

Sea  $f(t) = 3 e^{-2t}$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} 3 e^{-2t} = 3$$

$$F(s) = \frac{3}{s+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s}{s+2} = 3$$

# Teorema del valor final

Si existen los limites indicados se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

Ejemplo:

Sea  $f(t) = 3 e^{-2t}$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 3 e^{-2t} = 0$$

$$F(s) = \frac{3}{s+2} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s}{s+2} = 0$$