Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Matemática Superior

Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

Forma normal:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

Supondremos que los coeficientes $a_{ij}(t)$ y las funciones $f_i(t)$ son **continuas en un intervalo *I***. Si todas las f's son cero diremos que el **sistema lineal** es **homogéneo**.

Forma matricial

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$$

El sistema homogéneo asociado será: $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = 5x - 7y$$

$$\longrightarrow \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Vector solución

DEFINICIÓN

Un **vector solución** en un intervalo *I* es cualquier vector columna

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son funciones diferenciables que satisfacen el sistema de EDOs en el intervalo *I*.

Comprueba que en $(-\infty, \infty)$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}' = \mathbf{AX}$$

son soluciones de:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

Solución

$$\mathbf{X}_1' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}_2' = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_1'$$

$$\mathbf{AX_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_2'$$

TEOREMA

Principio de superposición

Sean $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$,..., $\mathbf{X}_k$ un conjunto de soluciones de un sistema homogéneo en *I*, entonces:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \ldots + c_k\mathbf{X}_k$$

es también una solución en *I*.

TEOREMA

Solución general de sistemas homogéneos

Sea $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ..., $\mathbf{X}_n$ un conjunto fundamental de soluciones de un sistema homogéneo en un intervalo I. Entonces la **solución general** del sistema en el intervalo es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \ldots + c_n\mathbf{X}_n$$

donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

Hemos visto que $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$

son soluciones linealmente independientes de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

en (−∞, ∞). De ahí que forman un conjunto fundamental de soluciones. Y entonces la **solución general** es:

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$$

TEOREMA

Solución general para sistemas homogéneos

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n valores propios reales y distintos de la matriz de coeficientes **A** de un sistema homogéneo, y sean $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ los autovectores correspondientes. La solución general del sistema es entonces:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots c_n\mathbf{K}_n e^{\lambda_n t}$$

Sistemas lineales homogéneos

Podemos hallar siempre, para un sistema lineal homogéneo de primer orden

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

una solución de la forma:

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2$$

$$\mathbf{X_i} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_i \end{pmatrix} e^{\lambda_i t} = \mathbf{K_i} e^{\lambda_i t} \qquad i = 1,2 \ldots n$$

Valores propios (autovalores) y vectores propios (autovectores)

Si $\mathbf{X} = \mathbf{K}e^{\lambda t}$ entonces $\mathbf{X}' = \mathbf{K}\lambda e^{\lambda t}$,

sustituyendo en el sistema de EDOs:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

$$\mathbf{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{K}e^{\lambda t}\ .$$

Donde si dividimos por $e^{\lambda t}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{K} = \lambda\mathbf{K}.$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$$ Ecuación matricial

Y recordemos que si existe una solución no trivial **X**, debe cumplirse entonces que:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$ Ecuación característica

Autovalores reales y distintos

Resolver $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

$$\mathbf{X_i} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_i \end{pmatrix} e^{\lambda_i t} = \mathbf{K_i} e^{\lambda_i t}$$

$i = 1,2$

Solución General

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2$$

Autovectores $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ Ecuación matricial

Autovalores $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ Ecuación característica

Autovalores reales y distintos

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Autovalores

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 4.$$

Autovectores

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 4.$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

Para $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

tenemos $3k_1 + 3k_2 = 0$
$2k_1 + 2k_2 = 0$

Así $3k_1 + 3k_2 = 0$
$k_1 = -k_2.$

$k_1 = \alpha$
$k_2 = -\alpha,$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\alpha=1$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para λ_2 = 4.

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

tenemos $-2k_1 + 3k_2 = 0$

$2k_1 - 3k_2 = 0$

Así $k_1 = \frac{3}{2}k_2$

$k_1 = \frac{3}{2}\alpha$

$k_2 = \alpha$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

α=2 ⇒ Cuando $k_2 = 2$ $k_1 = 3$ ⇒

$$\boxed{\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Solución

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

Autovalores

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 4.$

Autovectores

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{K} e^{\lambda t} \qquad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Solución General

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Autovalores reales iguales

- Supongamos que λ_1 es de multiplicidad 2 y que solo hay un autovector relacionado con este autovalor. Debemos construir una segunda solución de la forma

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2$$

$$\mathbf{X_1} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} = \mathbf{K}.e^{\lambda t}$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}e^{\lambda_1 t}$$

Autovalores

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Ecuación característica

Autovectores

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}$$

Ecuaciones matriciales

Resolver $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \mathbf{X}$

$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

Autovalores

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \left| \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -9-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2 = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = -3}$$

Autovectores

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -9-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

Para $\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

tenemos $\quad 6k_1 - 18k_2 = 0$

$\qquad\qquad 2k_1 - 6k_2 = 0$

Así $\quad k_1 = 3\, k_2 \;\Rightarrow\; k_1 = 3\alpha$, $k_2 = \alpha$, $\;\Rightarrow\;$ $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha = 1$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovectores

$$\boxed{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P}=\mathbf{K}}$$

λ_1 = −3. A= $\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$ $\mathbf{K}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -9-\lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-(-3) & -18 \\ 2 & -9-(-3) \end{pmatrix} . \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6) \end{pmatrix} . \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$$

$$6p_1 - 18p_2 = 3$$

$$2p_1 - 6p_2 = 1$$

Autovectores

$$\boxed{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P}=\mathbf{K}}$$

$$\begin{cases} 6p_1-18p_2=3 \\ 2p_1-6p_2=1 \end{cases}$$

$$6p_1-18p_2=3$$

$$p_1=\frac{1}{2}-3p_2$$

$$p_1=\frac{1}{2}-3\alpha \qquad p_2=\alpha$$

$$\Rightarrow$$

$$p_1=\frac{1}{2}-3\alpha \qquad p_2=0+\alpha$$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1\\ \mathbf{p}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}\alpha$$

$$\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1/2\\ 0\end{pmatrix}}$$

Solución

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

Autovalores

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

Autovectores

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}.e^{\lambda t}$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}e^{\lambda_1 t}$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Podemos escribir la solución general como:

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right]$$

Autovalores complejos

TEOREMA

Soluciones correspondientes a un autovalor complejo

Sea **A** la matriz de coeficientes con elementos reales de un sistema homogéneo, y sea $\mathbf{K}_1$ un autovector correspondiente al autovalor complejo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Entonces

$$\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} \text{ y } \qquad \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t}$$

son soluciones.

TEOREMA

Soluciones reales asociadas a un autovalor complejo

Sea $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ un valor propio complejo de la matriz de coeficientes **A** de un sistema homogéneo, y sean $\mathbf{B}_1 = \mathrm{Re}(\mathbf{K}_1)$ y $\mathbf{B}_2 = \mathrm{Im}(\mathbf{K}_1)$. Entonces podemos escribir la solución como:

$$\mathbf{X}_1 = [\mathbf{B}_1 \cos \beta t - \mathbf{B}_2 \sin \beta t]\, e^{\alpha t}$$

$$\mathbf{X}_2 = [\mathbf{B}_2 \cos \beta t + \mathbf{B}_1 \sin \beta t]\, e^{\alpha t}$$

soluciones linealmente independientes en $(-\infty,\infty)$. (Demuéstralo).

Nota: Si queremos escribir las soluciones en términos de funciones reales, basta con emplear:

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)\right)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)\right)$$

Resolver $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Autovalores

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \qquad \lambda_1 = 2i$$

Autovectores

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

Para $\lambda_1 = 2i$,

$$\begin{aligned} (2 - 2i)k_1 + \qquad\qquad 8k_2 &= 0 \\ -k_1 + (-2 - 2i)k_2 &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos

$$k_1 = -(2 + 2i)k_2$$

obtenemos

$$k_1 = -(2 + 2i)k_2$$

k_1 = -(2+2i)α
k_2 = α,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2+2i).\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -(2+2i) \\ 1 \end{pmatrix}$$

α = -1

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathrm{Re}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_2 = \mathrm{Im}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\qquad \lambda_1 = 2i$ $\qquad \alpha = 0$ $\qquad \beta = 2$

$$\mathbf{X}_1 = [\mathbf{B}_1 \cos \beta t - \mathbf{B}_2 \sin \beta t]\, e^{\alpha t}$$

$$\mathbf{X}_2 = [\mathbf{B}_2 \cos \beta t + \mathbf{B}_1 \sin \beta t]\, e^{\alpha t}$$

Solución General

$$\mathbf{X} = c_1\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 2t\right] + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\sin 2t\right]$$

$$X = c_1\begin{pmatrix} 2\cos 2t - 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2\cos 2t + 2\sin 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$$

TEOREMA

Solución general de sistemas no homogéneos

Sea $\mathbf{X}_p$ una solución dada de un sistema no homogéneo en el intervalo I, y sea

$$\mathbf{X}_c = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \dots + c_n\mathbf{X}_n$$

solución general en el mismo intervalo del sistema homogéneo asociado. Entonces la **solución general** del sistema no homogéneo en el intervalo es:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p.$$

La solución general $\mathbf{X}_c$ del sistema homogéneo se llama **función complementaria** del sistema no homogéneo.

Sistemas no Homogéneos, variación de parámetros

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$$

la solución general de será

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$$

- Donde:

X$_c$ es la solución complementaria asociada al sistema homogéneo X'= AX

X$_p$ es la solución particular.

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{\Phi}(t).\mathrm{C} \qquad \mathbf{X}_p = \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\, dt$$

Solución General

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\, dt$$

Matriz fundamental

- Si $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ en I, su solución general es la combinación lineal:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \ldots + c_n\mathbf{X}_n,$$

que también podemos escribir como:

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n} \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n} \\ \vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \cdots + c_nx_{nn} \end{pmatrix}$$

Que matricialmente podemos escribir como

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}$$

donde **C** es el $n \times 1$ vector de constantes arbitrarias $c_1, c_2, \ldots, c_n$, y

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama ***matriz fundamental*** del sistema.

Determinar la solución general en $(-\infty, \infty)$.

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Solución

Primero resolvemos el sistema homogéneo

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

Autovalores

La ecuación característica de la matriz de coeficientes es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+5) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -5$$

λ = −2, −5, y los vectores propios son

Autovectores

$$k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Así, las soluciones son:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\, dt$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\, dt = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-5t} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}e^{-t}$$