

---

# Trabajo Practico - Teorica de Control

## *Analisis de Respuesta en Frecuencia*

---

Alejandro Fabian Nadal

Estudiante de Ing. Sistemas de Información

[alejandronadal@ieee.org](mailto:alejandronadal@ieee.org)

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL,  
FACULTAD REGIONAL RESISTENCIA

7 de octubre de 2020

# Consignas

1. Escribir las ecuaciones diferenciales un sistema resorte-masa-amortiguador y de un sistema R-L-C, que tengan la misma forma matemática.
2. Utilizando la siguiente tabla de analogía mecánico eléctrica:

	'Forcing' Term	'Flow' Term	Time derivatives
<b>Mechanical</b>	Force	Velocity (displacement)	Displacement -> Velocity -> Acceleration
<b>Electrical</b>	Voltage	Current (Charge)	Charge -> Current -> $di/dt$

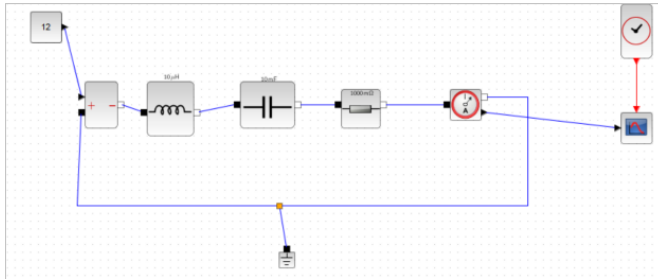
**Analogy between Mechanical and Electrical Terms**

	Mechanical Domain		Electrical Domain	
<b>Store energy</b>	Spring (k)	$f_s = kx_s$	Capacitor (C)	$V_c = \frac{1}{C} q_c$
<b>Dissipate energy</b>	Damper (b)	$f_d = bv_d = b\dot{x}_d$	Resistor (R)	$V_R = Ri_R = R\dot{q}_R$
<b>'Inertial' behavior</b>	Mass (m)	$f_m = ma_m = m\ddot{x}_m$	Inductor (L)	$V_L = L\frac{di}{dt} = L\ddot{q}_L$

**Relationship between Constitutive Elements in Mechanical & Electrical Domains**

Dé valores numéricos iguales al circuito eléctrico y al mecánico, en sus elementos homólogos. Es decir, averigüe a qué es igual el capacitor, la resistencia y la bobina en el modelo mecánico y asigne cantidades iguales a ambos.

3. Dibuje el diagrama de Bode de uno de ellos hasta una frecuencia de  $100.000 \frac{1}{s}$
4. ¿Por qué en la parte de alta frecuencia se da una línea recta con pendiente negativa en el diagrama de bode de ganancia? Debe analizar matemáticamente.
5. Construya el circuito eléctrico del video: [Link al Video](#) .
  - a) ¿Que hace el circuito?
  - b) ¿Que se ve en la ventana de gráficos de salida?
  - c) Para 12V de entrada y una resistencia de 1 Ohm, verifique que la corriente de salida es de 12 A.
6. Basándose en la modalidad anterior, construya el circuito RLC con los valores asignados en el punto 2. Por ejemplo, puede construir esto, con una fuente de corriente continua de 12 V, y verifique la corriente.



7. Reemplace la fuente de 12V continua por una de tensión alterna, y elija dos frecuencias distintas. Capture el diagrama para incluirlo en el informe. Mida la corriente producida en cada caso (altura de la onda).
8. Luego a esa misma frecuencia, fíjese qué produce el diagrama de Bode de ganancias en las dos frecuencias seleccionadas en 7. Intente explicar la relación entre ambas medidas.

## Sistema Resorte-Masa-Amortiguador

Un sistema resorte-masa-amortiguador, como el que se muestra en la figura, puede expresarse mediante la siguiente ecuación:[1]

$$F(t) = M * \frac{dy^2}{dt^2} + R * \frac{dy}{dt} + k * y$$

Donde  $F(t)$  es la fuerza ejercida,  $M$  es la masa del cuerpo,  $R$  el coeficiente de amortiguación,  $k$  el coeficiente del resorte o constante de Hooke, e  $y$  la posición vertical de la masa respecto al origen.

Cabe aclarar que en este modelo no tenemos en cuenta rozamiento con el aire, energía liberada en forma de calor por el resorte, ni muchos otros factores que deberían tenerse en cuenta para sistemas mas complejos

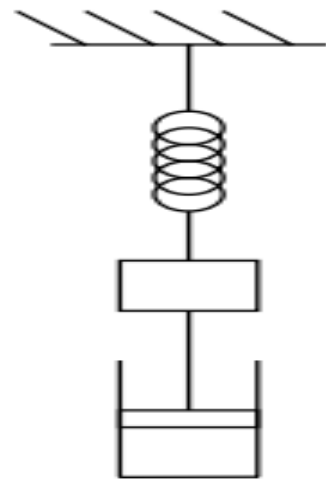


Figura 1: Diagrama del RMA

## Sistema Resistor-Capacitor-Inductor

Este sistema, pese a ser eléctrico, se comporta de manera sumamente similar al mecánico visto antes. Es un circuito amortiguador de señales, comúnmente usado en radios y otros dispositivos de comunicación.

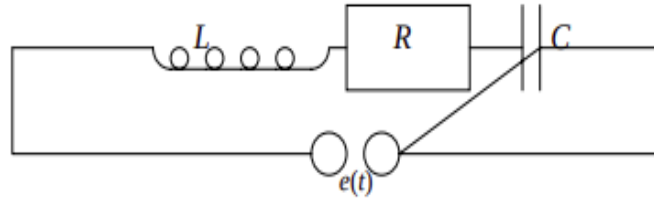


Figura 2: Sistema RCI

La siguiente formula representa el comportamiento del voltaje en función del tiempo:[1]

$$V(t) = L * \frac{d^2q}{dt^2} + R * \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

Donde  $L$  es la inductancia,  $R$  la resistencia,  $C$  la capacitancia, y  $q$  es la carga en función del tiempo.

## Creación de un sistema equivalente

A partir de la tabla dada en las consignas, se deducen las siguientes relaciones:

$$M = L$$

$$b = R$$

$$k = \frac{1}{C}$$

Elijo los siguientes valores para el sistema mecánico, y determino las equivalencias en el eléctrico

$$M = 0,1g, L = 0,1mH$$

$$k = 1N/m, C = 1F$$

$$b = 20Ns/m, R = 20Ohm$$

## Diagrama de Bode

Un diagrama de Bode es un gráfico de la respuesta a la frecuencia de un sistema. Lo usaremos con el objetivo de representar el decaimiento de la potencia con respecto a la frecuencia en el circuito eléctrico.

Para ello, necesitamos la función de transferencia del sistema. El primer paso, será aplicar la **transformada de Laplace** a la función que representa el comportamiento del sistema con respecto al tiempo.

$$L(V(t)) = L * s^2 * I(s) + R * I(s) + \frac{I(s)}{C}$$

$$\frac{I(S)}{e(s)} = \frac{1}{L * s^2 + R * s + \frac{1}{C}}$$

Recordemos que ahora la función está en el dominio de la frecuencia. Ahora, Scilab generará el diagrama de Bode.

---

```
s=poly(0,'s');
L=0.1;
C=1;
R=20;
h=syslin('c',1/(1/C + L*s^2+R*s));
clf(); bode(h,0,100000);
```

---

Esto nos genera el siguiente gráfico

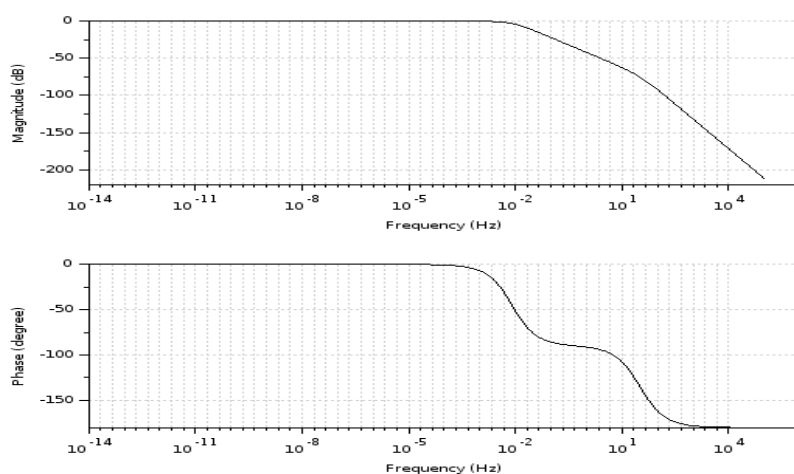


Figura 3: Diagrama de Bode

## ¿Por que la ganancia decae cuando crece la frecuencia?

Para comenzar, hay que tener en cuenta que al elevarse la frecuencia, el sistema debe reaccionar cada vez mas rápido a los cambios de voltaje. La misma inercia de los sistemas hace que sea imposible que reaccionen de forma prácticamente instantánea cuando la frecuencia tiende a infinito.

Ahora bien:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{L * s^2 + R * s + \frac{1}{C}} \right) = 0$$

Esto implica que al crecer la frecuencia, el ratio de la corriente de salida vs la de la entrada decrece. Asumiendo una entrada constante, es la salida la que decrece. Viendo que el denominador es un coeficiente de grado 2, y estamos en una escala logarítmica, es por esto que tenemos una recta decreciente en la zona de alta frecuencia del diagrama de Bode.

## Circuito eléctrico

Imitando el circuito del video de youtube, pero invirtiendo la polaridad de la fuente para obtener amperajes positivos.

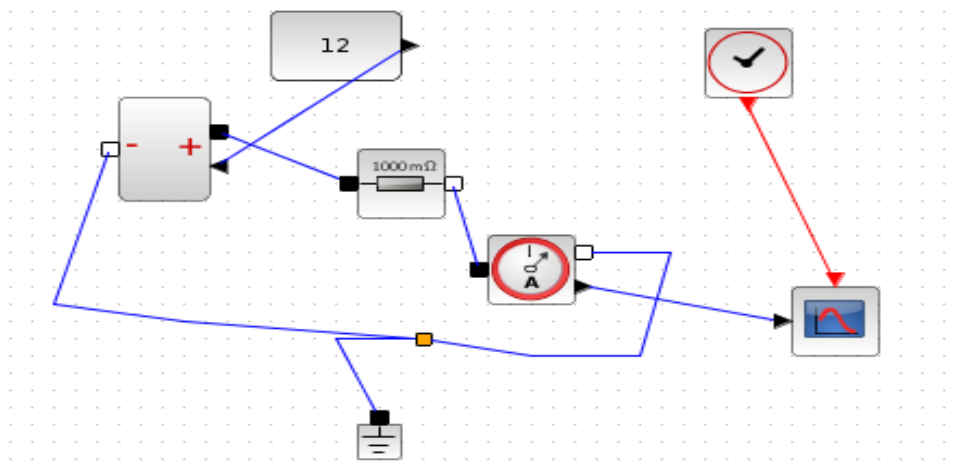


Figura 4: Circuito del video

### ¿Que hace?

La fuente genera 12V, estos se consumen en la resistencia. Un amperímetro mide la corriente y un plotter la grafica. Por ley de Ohm,  $V = \frac{I}{R}$ , por lo tanto,  $12V * 1Ohm = 12A$

Aquí el gráfico de Scilab confirma los cálculos teóricos.

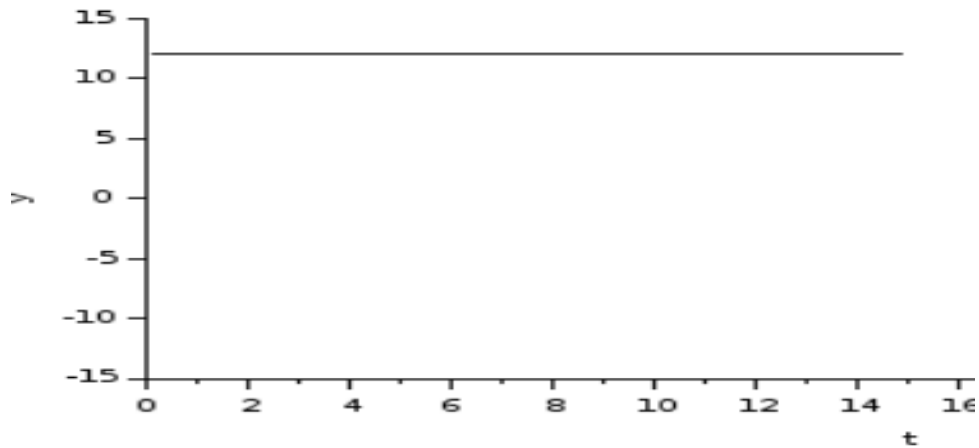


Figura 5: Circuito RLC - CC

## Circuito RLC, corriente continua

Podemos expandir el uso de Xcos a un circuito mas complejo que el de arriba. He aquí el circuito RLC con los valores determinados al principio de este trabajo.

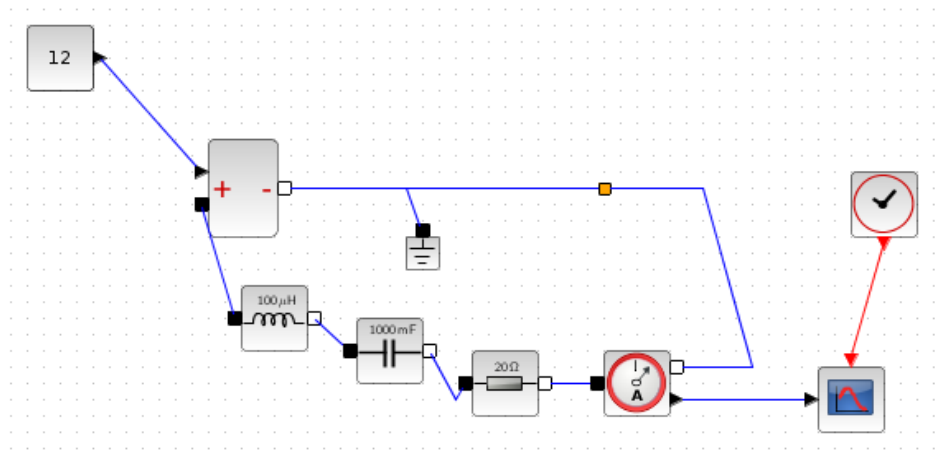


Figura 6: Amperaje con Corriente Continua

Como se puede observar, es meramente un circuito en serie, equivalente al de la figura 2. El amperaje de salida es constante y apenas superior a 0, observar Figura 7.

## Circuito RLC, Corriente alterna

Con el resto de los parámetros siendo constantes, el cambio del circuito de la Figura 8 es el agregado de una fuente de corriente alterna. Alterando un poco los parámetros de la fuente, vemos comportamientos diferentes en el amperaje de la salida, comparar Figura 9

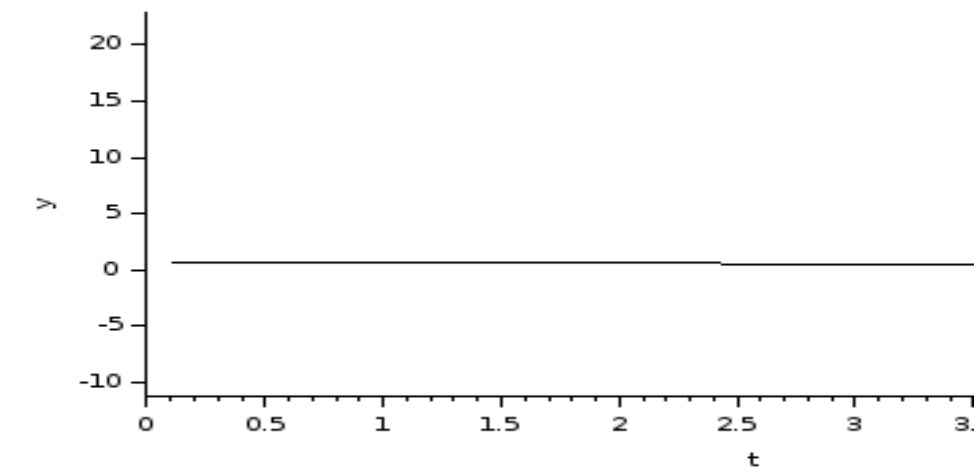


Figura 7: Amperaje con Corriente Continua

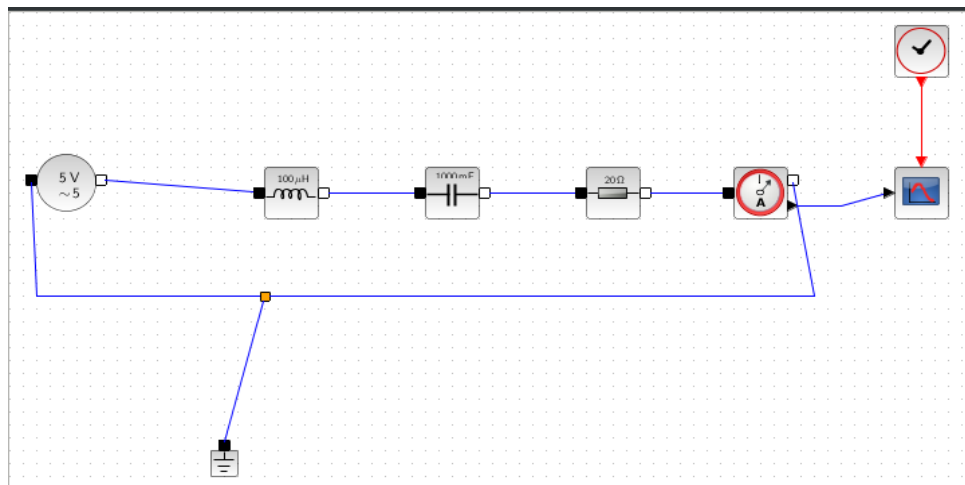


Figura 8: Circuito RLC en Xcos, CA

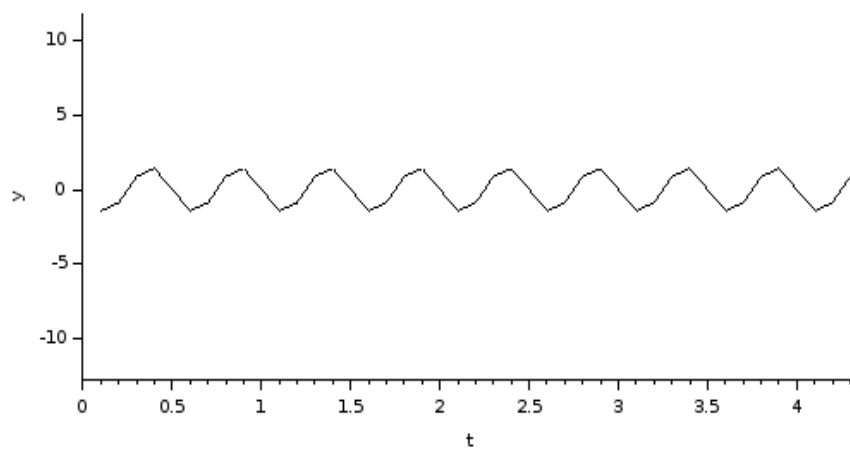


Figura 9: Amperaje: 30V, 2Hz



con la Figura 10. El comportamiento en la Figura 10 es por sobre todo interesante debido a los picos cortados, debido a la respuesta cíclica del capacitor frente a la variación del voltaje en función del tiempo.

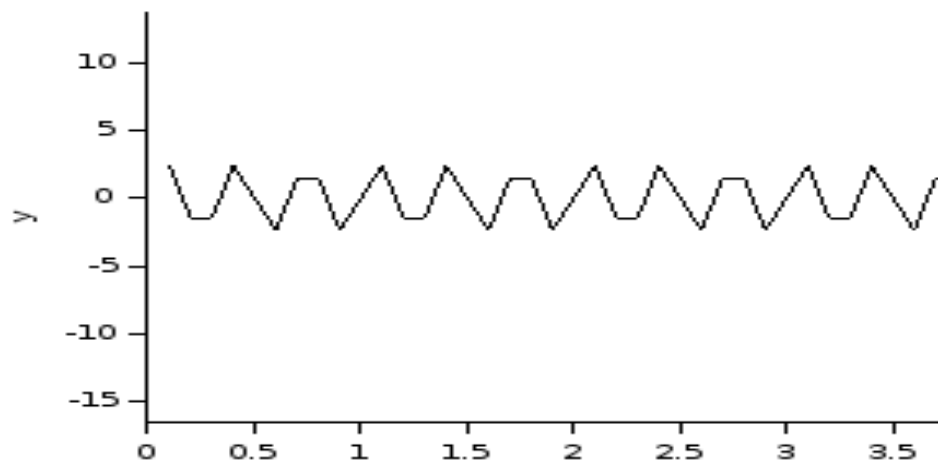


Figura 10: Amperaje: 50V, 7Hz

## Comparación entre estas dos frecuencias

Comparemos ahora la respuesta del circuito frente a estas dos frecuencias distintas.

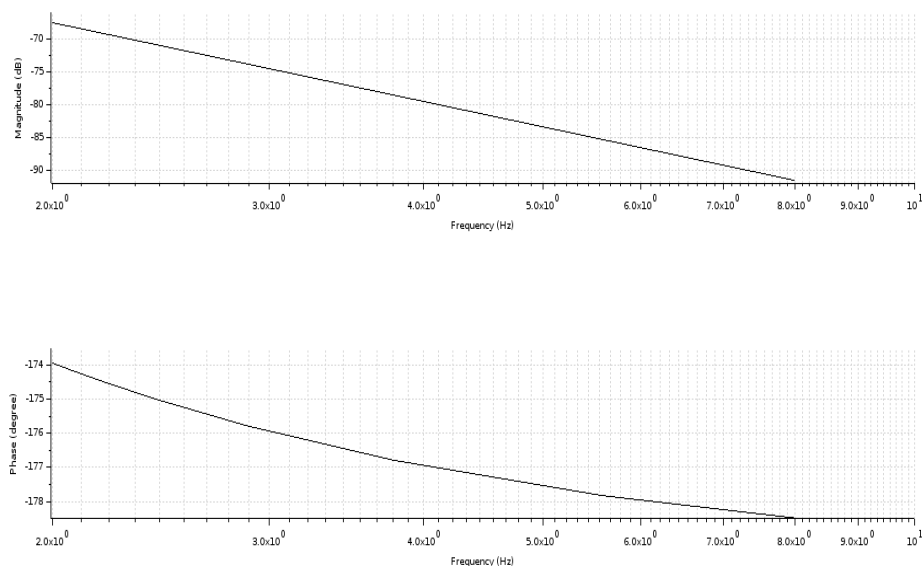


Figura 11: Diagrama de Bode, de 2 a 7 Hz

En la Figura 11 podemos ver un gráfico donde se observa como cae la relación salida/entrada al aumentar la frecuencia de 2 a 7 Hz. Considerando a la entrada con potencia constante, se observa que la potencia de la salida disminuye al aumentar la frecuencia.

## Referencias

- [1] P. Edwards. “Mass-Spring-Damper Systems, The Theory”. En: (2001). DOI: <https://faculty.washington.edu/seattle/physics227/reading/reading-3b.pdf>.