Análisis de Sensibilidad

Programación Lineal

Introducción

- El análisis de sensibilidad es una de las partes más importantes en la programación lineal, sobretodo para la toma de decisiones; pues permite determinar cuando una solución sigue siendo óptima, dados algunos cambios ya sea en el entorno del problema, en la empresa o en los datos del problema mismo.

- Este análisis consiste en determinar que tan sensible es la respuesta óptima del *Método Simplex*, al cambio de algunos datos como las ganancias o costos unitarios (coeficientes de la función objetivo) o la disponibilidad de los recursos (términos independientes de las restricciones).

Introducción

- La variación en estos datos del problema se analizará individualmente, es decir, se analiza la sensibilidad de la solución debido a la modificación de un dato a la vez, asumiendo que todos los demás permanecen sin alteración alguna. Esto es importante porque estamos hablando de que la sensibilidad es estática y no dinámica, pues solo contempla el cambio de un dato a la vez y no el de varios.

Objetivo Principal del Análisis de Sensibilidad

- Establecer un intervalo de números reales en el cual el dato que se analiza puede estar contenido, de tal manera que la solución sigue siendo óptima siempre que el dato pertenezca a dicho intervalo. Los análisis más importantes son;.

Análisis de Sensibilidad

- Los análisis más importantes son;

1. Los coeficientes de la función objetivo;

2. Los términos independientes de las restricciones

3. Los coeficientes de las restricciones

- y se pueden abordar por medio del *Método Gráfico* o del *Método Simplex*

Análisis de sensibilidad gráfico

- **Ejemplo:**

La Empresa ***Química NODO S.A.*** el año pasado, saco a la venta dos nuevos productos, dos tipos de plaguicida, uno de uso familiar y otro de uso industrial, cuya venta deja los siguientes beneficios por litro: $ 3 el primero de ellos, y $ 4 el segundo.

La elaboración de estos productos, si bien utiliza una serie de materias primas y se realiza en varios lugares de la planta química, solo presenta un gran problema en 3 áreas bien específicas que son las de:

» Mezclado.

» Filtrado

» Envasado

Pero estos sectores disponen de muy limitado tiempo para su trabajo:

- 900 minutos diarios = 15 horas diarias (Área de Mezclado).
- 3000 minutos diarios = 50 horas diarias. (Área de Filtrado)
- 300 minutos diarios = 5 horas diarias. (Área de Envasado)

Análisis de sensibilidad gráfico

- Los respectivos **insumos** de cada producto, en cada sector, suministrados por los empleados de la Empresa Química se pueden visualizar en el siguiente cuadro:
- Expresados en **minutos diarios/litro**

SECTOR SISTEMA	**GESTION COMERCIAL**	**PRODUCCIÓN**
MEZCLA	30	60
FILTRADO	50	250
ENVASADO	12	12

- La Gerencia de la Empresa Química desea tener un plan diario de producción que le aporte el **mayor beneficio económico** y en cada proceso de los tres mencionados, **se reduzcan los tiempos ociosos** ya que esto último representa una gran pérdida.

Análisis de sensibilidad gráfico

- Los respectivos **insumos** de cada producto, en cada sector, suministrados por los empleados de la Empresa Química se pueden visualizar en el siguiente cuadro:
- Expresados en **minutos diarios/litro**

SECTOR SISTEMA	**GESTION COMERCIAL**	**PRODUCCIÓN**
MEZCLA	30	60
FILTRADO	50	250
ENVASADO	12	12

- La Gerencia de la Empresa Química desea tener un plan diario de producción que le aporte el **mayor beneficio económico** y en cada proceso de los tres mencionados, **se reduzcan los tiempos ociosos** ya que esto último representa una gran pérdida.

Diseño del modelo PL

- ***1. ¿Que es lo que se produce?***

  Plaguicida Familiar: PLAFA

  Plaguicida industrial: PLAIN

- ***¿Que es lo que se desea calcular?***

Cuantos litros de cada uno de ellos se desea producir.

Estas son las incógnitas, las que pueden tomar valores variables y que se designa con:

x1 = cantidad de litros de PLAFA

x2 = cantidad de litros de PLAIN

- Estas cantidades se producen o no, y nunca puede existir una producción negativa, esto implica:

  $x_i > 0$, $\forall$ i, ***Condición de no negatividad de las variables.***

Diseño del modelo PL

2. ¿Cual es el objetivo de la empresa?

- *El objetivo debe ser único. Si hubiera varios todos se subordinan a uno solo.*
  - *En este caso existen varios:*
  - *Producir lo máximo.*
  - *No desperdiciar tiempo en los sectores nombrados.*
  - *Ganar lo máximo.*

Diseño del modelo PL

- *Pero puede verse que todo se reduce a un solo objetivo:*
- *Ganar lo máximo; y esto se consigue produciendo lo máximo que se pueda.*
- *En este caso:*

$$Z = 3\,\frac{\$}{\text{litro}}\; x1 \text{ litros} + 4\,\frac{\$}{\text{litro}}\; x2 \text{ litros} \Rightarrow \text{MAXIMIZAR}$$

- *O sea:*

$$Z = 3\,x\mathbf{1} + 4\,x\mathbf{2} \Rightarrow \text{MAXIMIZAR}$$

- *A esta función se le da el nombre de **Función Objetivo,** donde se cumple:*

  *$z = f(x)$ **Función lineal** de las variables que forman la segunda condición, llamada también **Funcional**. .*

Diseño del modelo PL

3. ***Condición***

- *Al analizar cada sector surge:*

*En el sector de **Mezcla**:*

R1: $30 \dfrac{\text{min diarios}}{\text{litro}} x_1 \text{ litros} + 60 \dfrac{\text{min diarios}}{\text{litro}} x_2 \text{ litros} \leq 900 \text{ min diarios}$

*En el de **Filtrado**:*

***R2**:* $50 \dfrac{\text{min diarios}}{\text{litros}} x_1 \text{ litros} + 250 \dfrac{\text{min diarios}}{\text{litros}} x_2 \text{ litros} \leq 3000 \text{ min diarios}$

*En el de **implementación**:*

***R3**:* $12 \dfrac{\text{min diarios}}{\text{litro}} x_1 \text{ litros} + 12 \dfrac{\text{min diarios}}{\text{litro}} x_2 \text{ litros} \leq 300 \text{ min diarios}$

*Dichas restricciones forman una **condición de ligadura**.*

Diseño del modelo PL

- El ***modelo matemático*** tiene la siguiente forma:

$xi > 0$, $\forall$ i

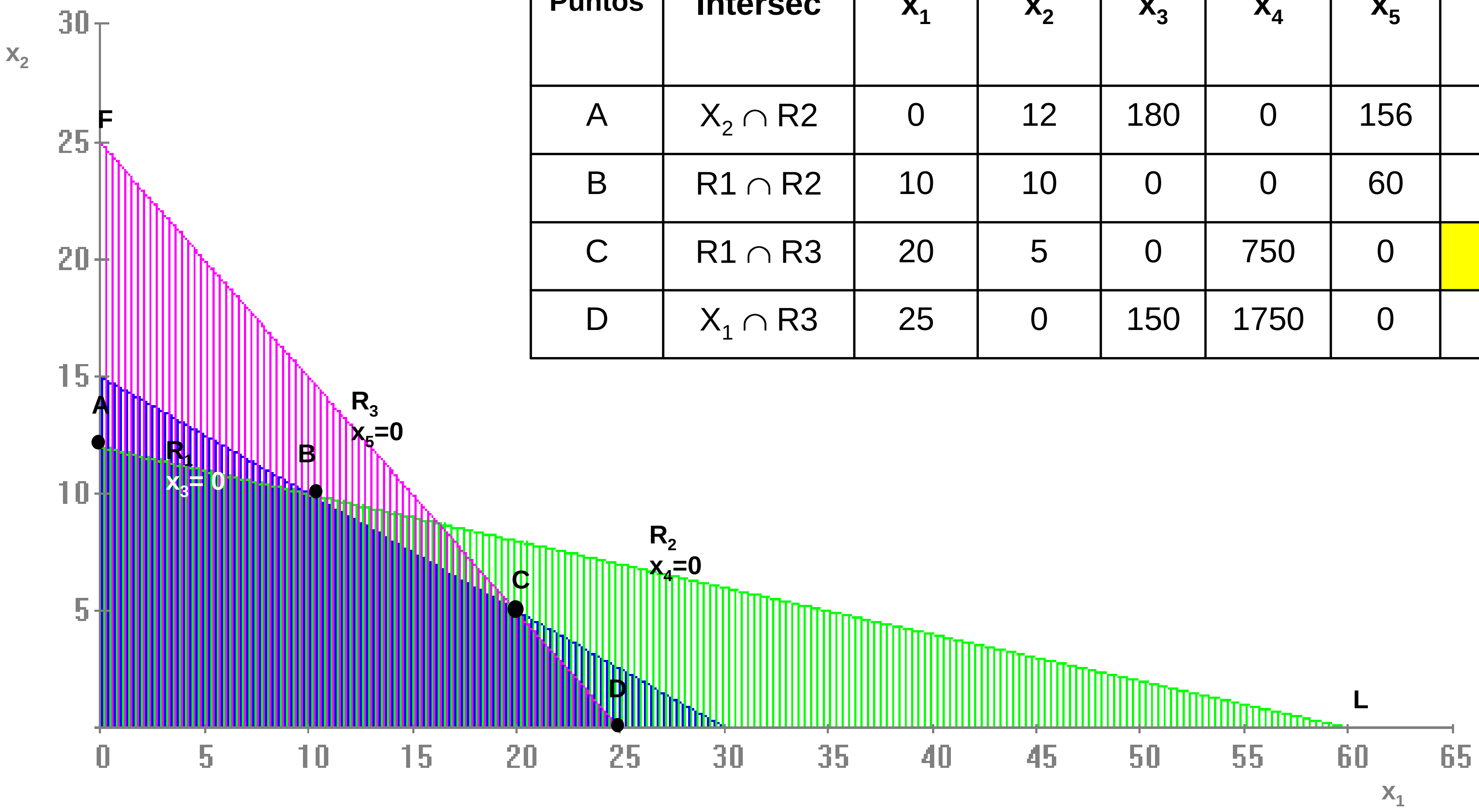
$z = 3\ x1 + 4\ x2$ $\Rightarrow$ MAXIMIZAR

R1: $30\ x1 + 60\ x2 \leq 900$

R2: $50\ x1 + 250\ x2 \leq 3000$

R3: $12\ x1 + 12\ x2 \leq 300$

Resolución gráfica



Puntos	Intersec	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z
A	$X_2 \cap$ R2	0	12	180	0	156	48
B	R1 $\cap$ R2	10	10	0	0	60	70
C	R1 $\cap$ R3	20	5	0	750	0	80
D	$X_1 \cap$ R3	25	0	150	1750	0	75

Agregar una restricción al modelo

Después de recibir este informe, un químico de la planta, entrega al Gerente de la empresa los siguientes datos:

- ***“Durante el proceso de mezclado, las máquinas consumen diariamente combustible a razón de 1/4 litro, por cada litro de PLAFA y 1/8 de litro, por cada litro de PLAIN. Por el momento se dispone de 10 litros diarios de combustible”***

Agregar una restricción al modelo

Estos datos son llevados a la Consultora. Con ellos surge una nueva restricción en el modelo: R4

- **R4:** $1/4\ x1 + 1/8\ x2 \leq 10$

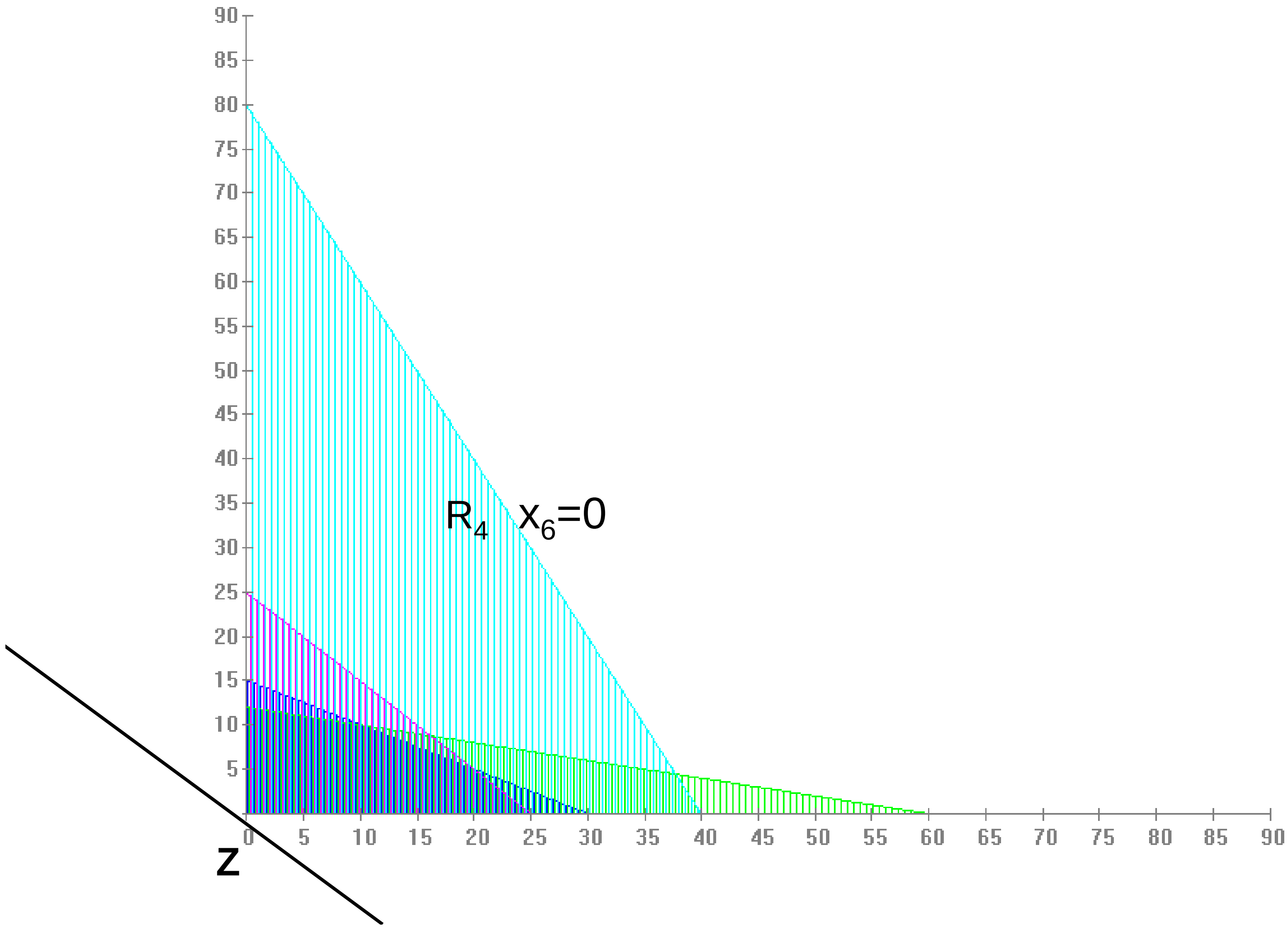
- Al agregarle su correspondiente slack:
  - $1/4\ x1 + 1/8\ x2 + x6 = 10$
- donde:

$$x6 \geq 0$$

- en el cuadro de variables:

VARIABLE	CLASE	SIGNIFICADO	UNIDAD
X_6	Slack	Sobrante de litros diarios de combustible	Litros diarios

La representación gráfica queda:



Conclusiones

- Esta nueva restricción (R4) no afecta al resultado.
- En este gráfico no es una arista del polígono de soluciones; el punto óptimo sigue siendo el mismo punto C. Se produce lo mismo, en las mismas cantidades y la ganancia será la misma pero:

  $x6 = 35/8 = 4.375$ litros, ya que:

  $1/4 \times 20 + 1/8\ x5 + x6 = 10$
- A la respuesta solamente se agrega que:

"Existe un sobrante de 4,375 litros diarios de combustible"

Variación de bi (disponibilidades)

- Unos de los químicos comunica a la Gerencia un error a la estimación de los cálculos y que la cantidad de combustible aun no pudo determinarse con exactitud.
- Para evitar continuas modificaciones, la Consultora procede a realizar el siguiente **Análisis de Sensibilidad**.
- Llama bi a cada una de las cantidades disponibles de las restricciones, resulta:

  b1 = 900

  b2 = 3000

  b3 = 300

  b4 = 10

Variación de b4

- Si se modifica, la representación de R´4 resulta paralela a la recta R4 original, con distintas situaciones:
- Si b4 aumenta, la recta R´4 se aleja del polígono de soluciones, la situación descripta por la Consultora se mantiene igual, con el mismo punto óptimo C. Solamente aumentará el sobrante de la restricción. Cada vez habrá mayor cantidad de litros de combustible que diariamente no se utiliza y se desperdigan;
- Si b4 disminuye, la recta R´´4, paralelamente se acerca al polígono de soluciones. Sigue existiendo un sobrante de combustible: $x6 \geq 0$, el óptimo sigue siendo el mismo C, pero cada vez el sobrante de combustible es menor. ¿Hasta cuando?.
- Hasta que b4 = 5,625 litros diarios.

Variación de b4

- Aquí la restricción R´´´4 pasa por el punto C.
- Resulta:

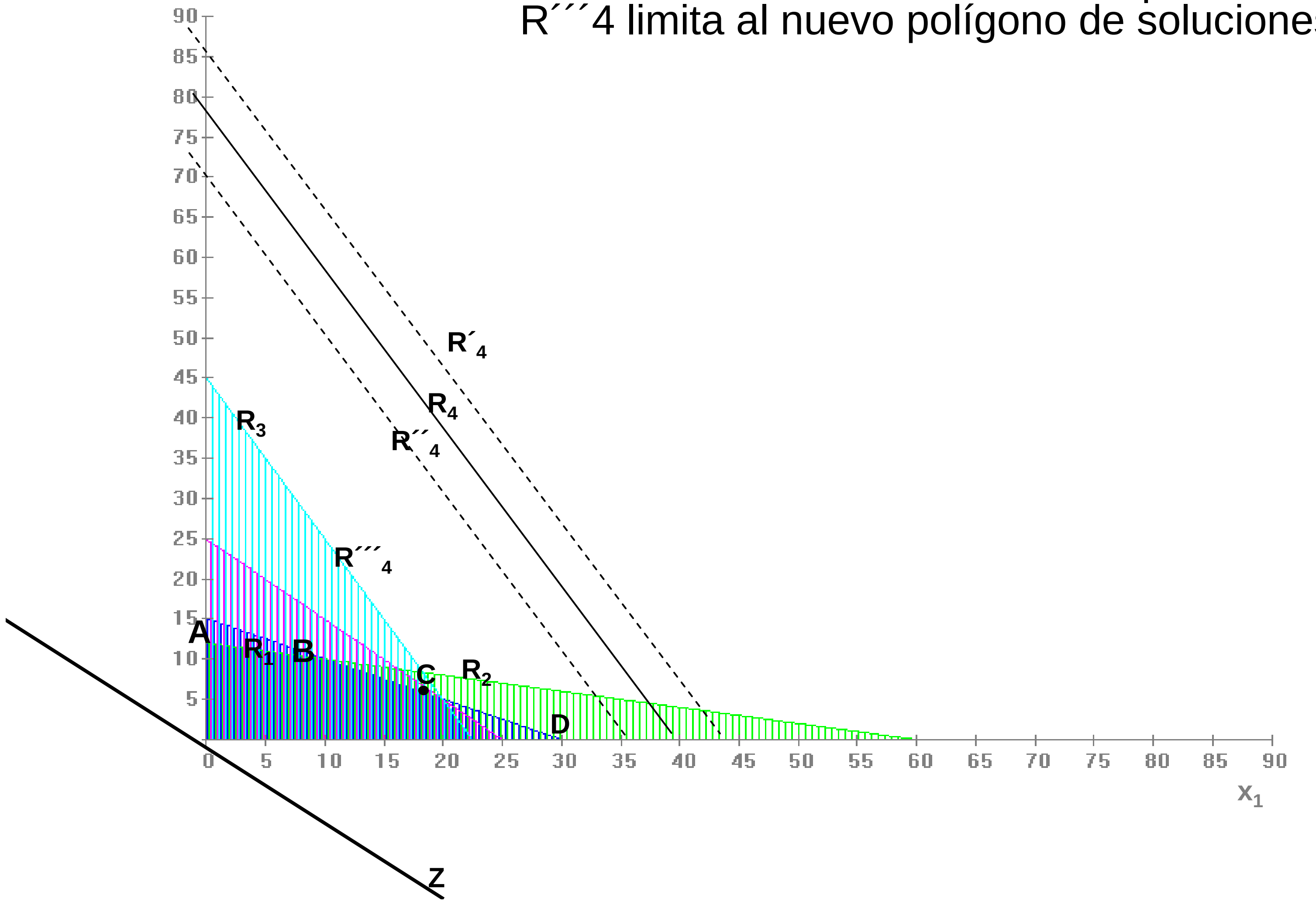
  $1/4 \times 20 + 1/8 \times 5 = 5.625$

  $x6 = 0$

- El óptimo sigue siendo el mismo punto C.

Variación de b4

- Se elabora la misma cantidad de productos, pero la recta R´´´4 limita al nuevo polígono de soluciones :



Variación de b4

- Recién cuando b4 < 5.625 cambia la solución, el polígono de soluciones se modifica: R´´´´4 determina una nueva solución.
- Por ejemplo:

  b4 = 4,875

  H = R1 ∩ R´´´´4

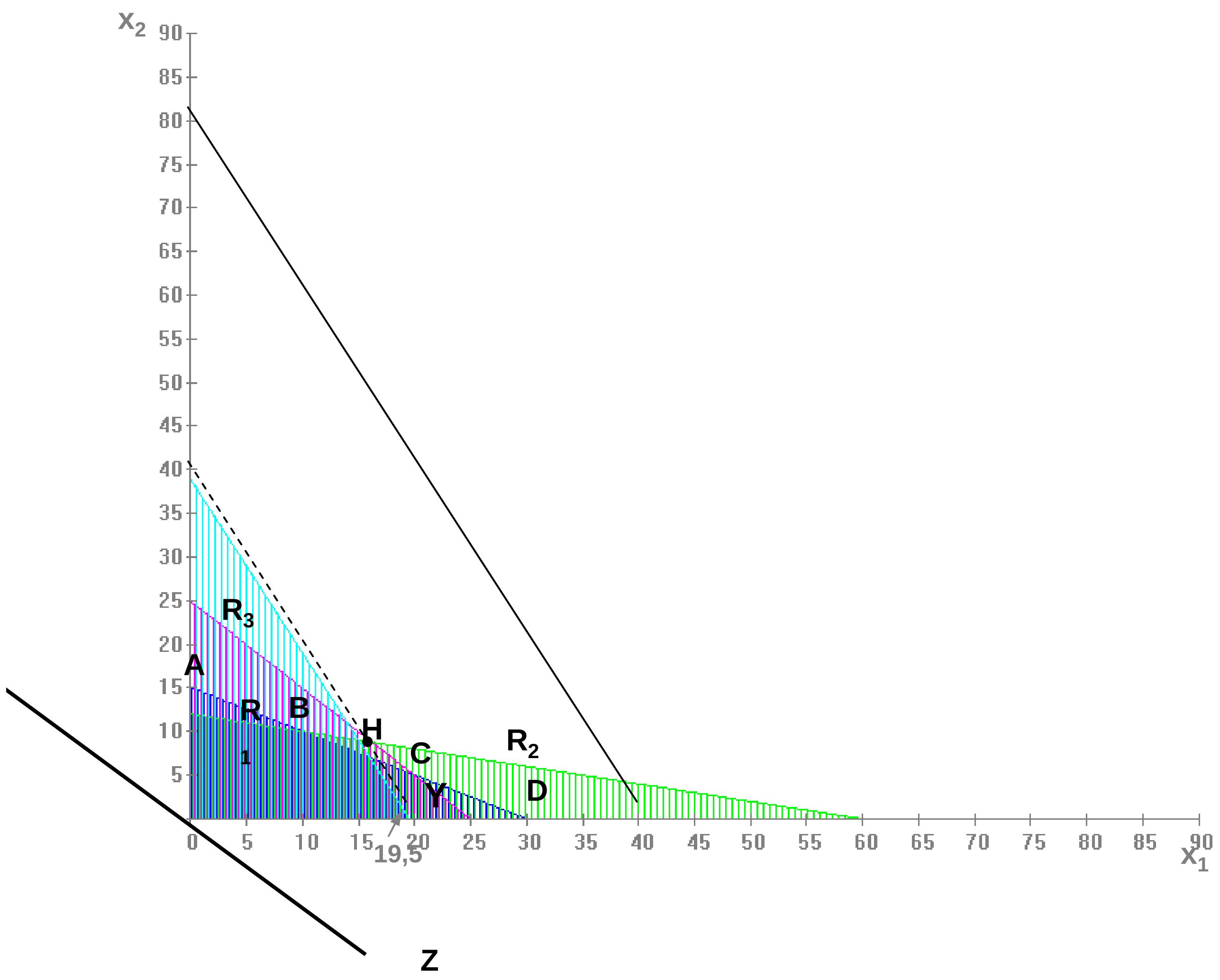
El polígono de soluciones es: 0ABHY

H = (16, 7, 0, 450, 24, 0)

H = (x1, x2, x3, x4, x5, x6)

z= 76

Variación de b4



Variación de b4

La respuesta en este caso es la siguiente:

La solución no se altera mientras b4 ≥ 5,625 litros diarios. Cuando b4<5,625 litros diarios, la solución cambia, las cantidades son distintas y el funcional es menor. Es decir b4 tiene un rango de variabilidad que no afecta a la solución.

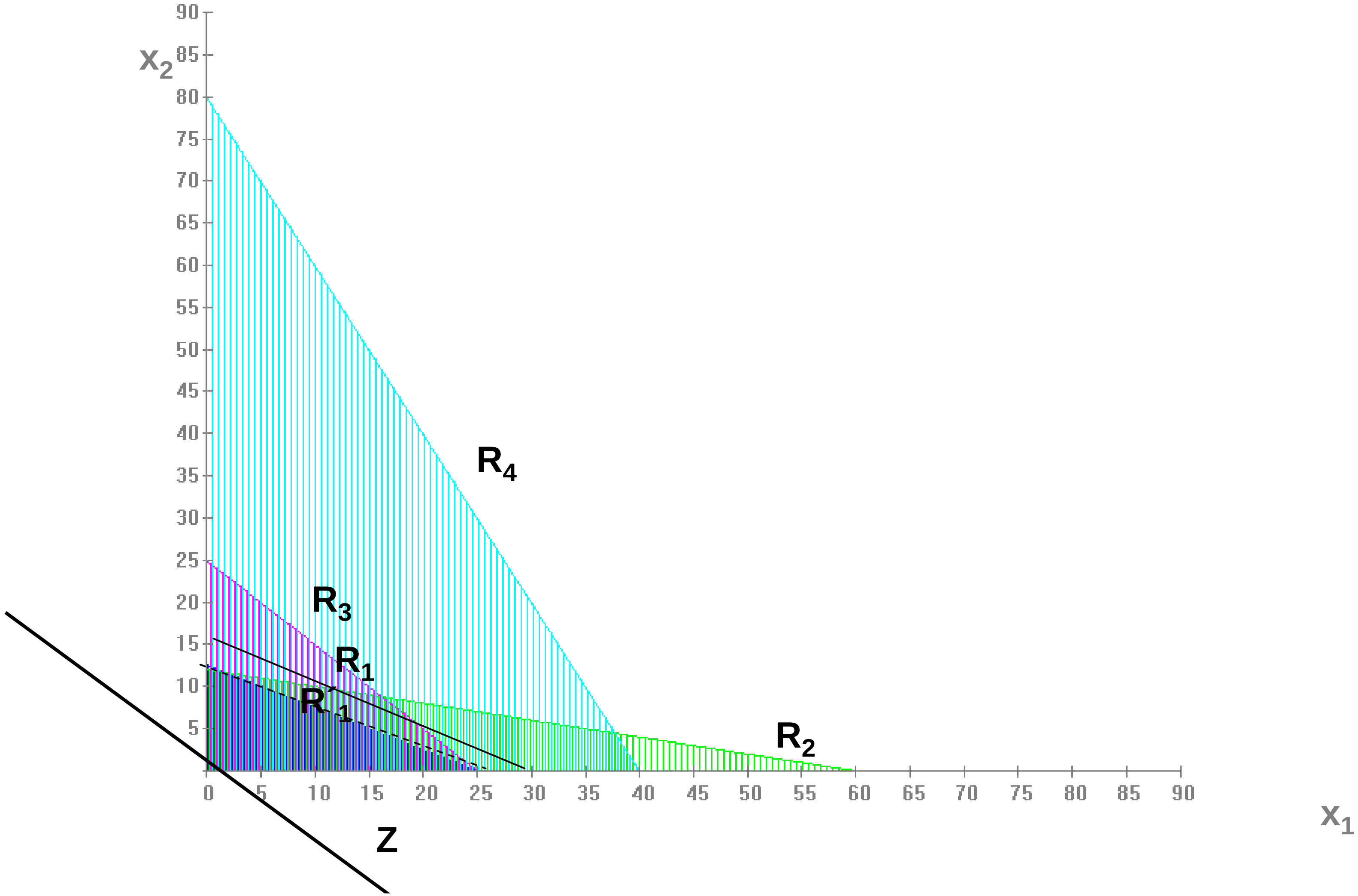
Variación de b2

- El mismo razonamiento puede hacerse con la otra restricción no saturada: R2, donde x4 = 750 (sobran 750 minutos diarios en el sector de filtrado).
- Aquí:
- b2 – x4 = 3000 -750 = 2250
- Se utilizan 2250 minutos diarios de esa restricción. Entonces, mientras b2 ≥ 2250, el punto óptimo es C.
- Recién cuando b2 < 2250 cambia el punto óptimo y debe comenzar a replantearse el problema

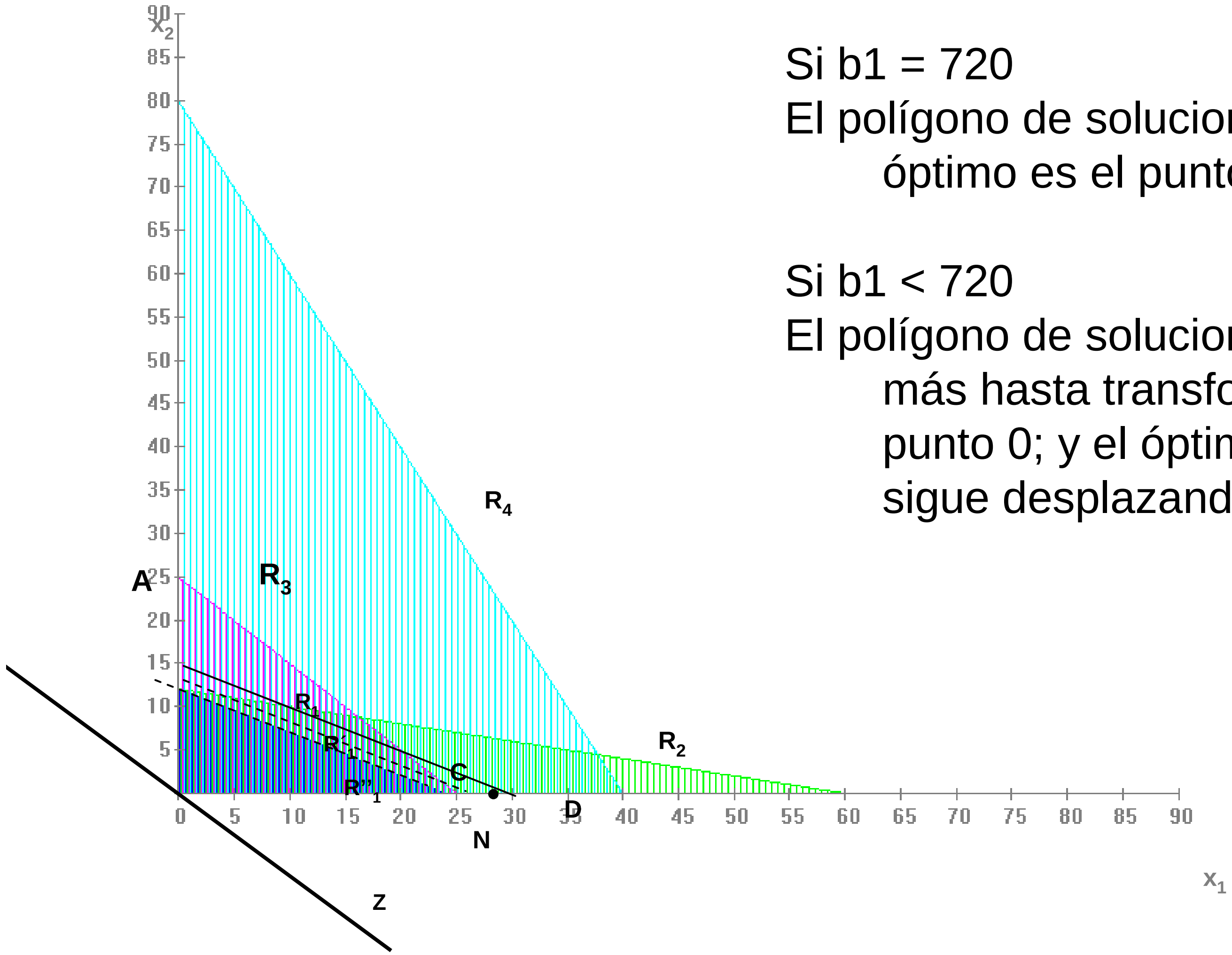
Variación de b1

- Con respecto a las restricciones saturadas, cualquier modificación de sus valores, altera totalmente el resultado del problema, pues se necesita toda la restricción para cubrir la producción.
- Si la restricción saturada, varia, se puede presentar distintos casos:
- $b1 = 900$
- $R1 = 30\,x1 + 60\,x2 \leq 900$
- Si b1 aumenta, con $b1>900$, la recta R1 se desplaza paralelamente alejándose del origen.
- El polígono de soluciones aumenta su superficie. El punto óptimo:
- C lo siguen formando las mismas restricciones;
- $C = R3 \cap R1$, pero se desplaza el punto $L = (65/4; 35/4)$
- Donde: $b1 = 1012{,}5$

Variación de b1



Variación de b1



Si b1 = 720

El polígono de soluciones es: 0AN y el punto óptimo es el punto N

Si b1 < 720

El polígono de soluciones se reduce cada vez más hasta transformarse solamente en el punto 0; y el óptimo es el punto N, que se sigue desplazando hacia 0

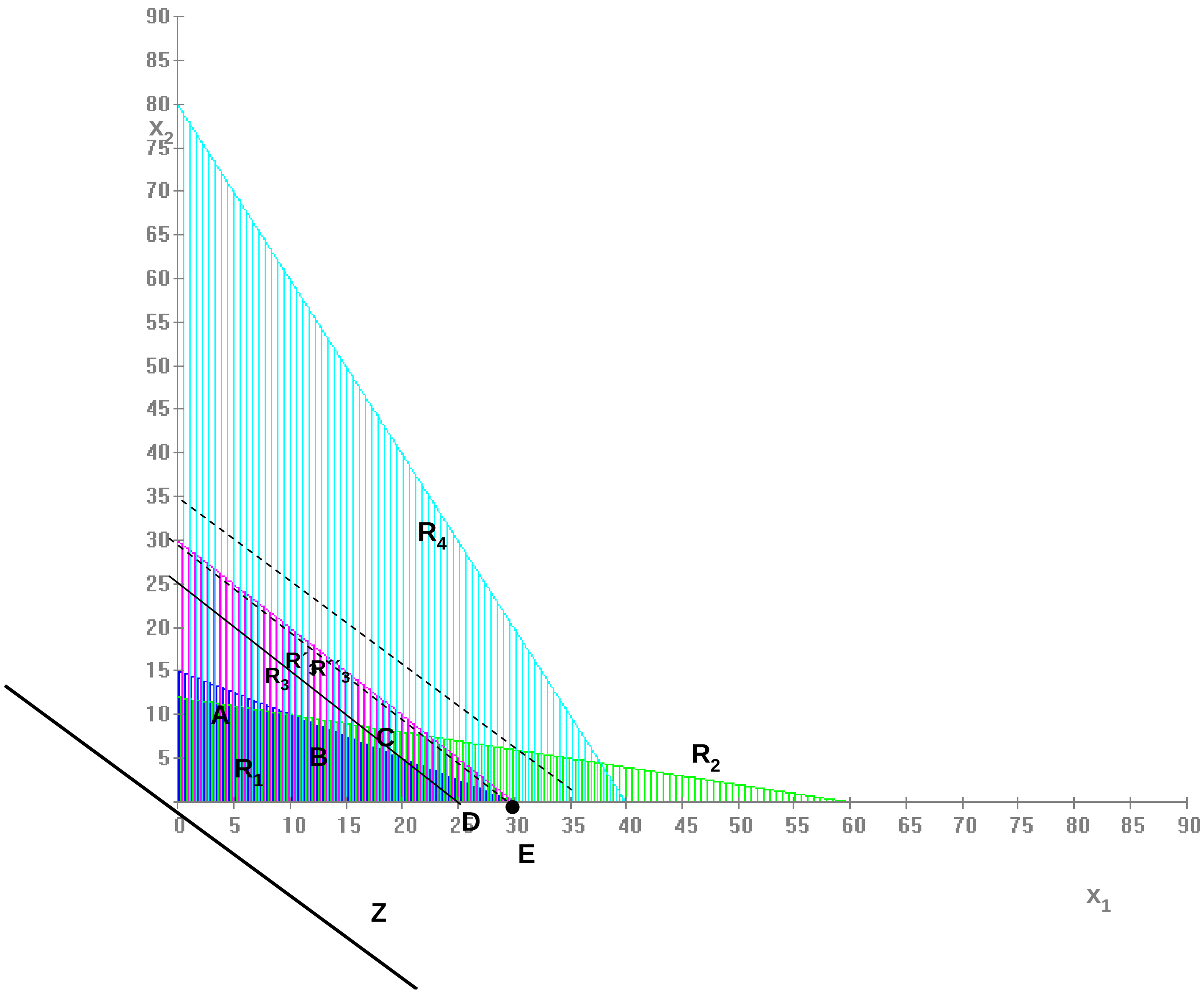
Variación de b3

Un estudio análogo puede hacerse con R3, que es la otra restricción saturada.

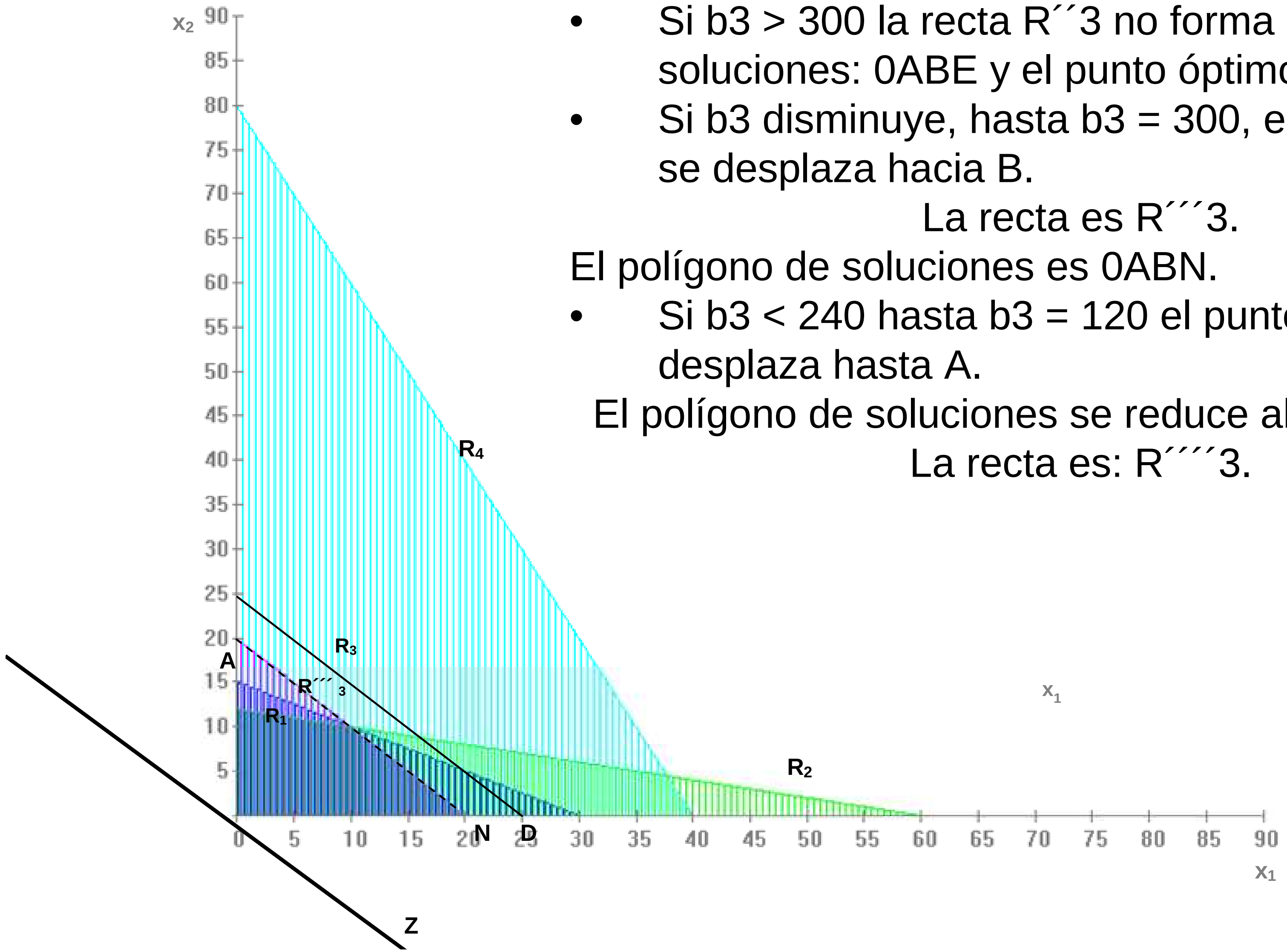
Las variaciones de b3 = 360, son las siguientes:

- Si b3 > 300, hasta b3 = 360 el punto óptimo se desplaza hasta el punto E = (30; 0).
- El polígono de soluciones se modifica y aumenta. Queda R´3

Variación de b3



Variación de b3



- Si b3 > 300 la recta R´´3 no forma el polígono de soluciones: 0ABE y el punto óptimo sigue siendo E.
- Si b3 disminuye, hasta b3 = 300, el punto óptimo se desplaza hacia B.

La recta es R´´´3.

El polígono de soluciones es 0ABN.

- Si b3 < 240 hasta b3 = 120 el punto óptimo se desplaza hasta A.

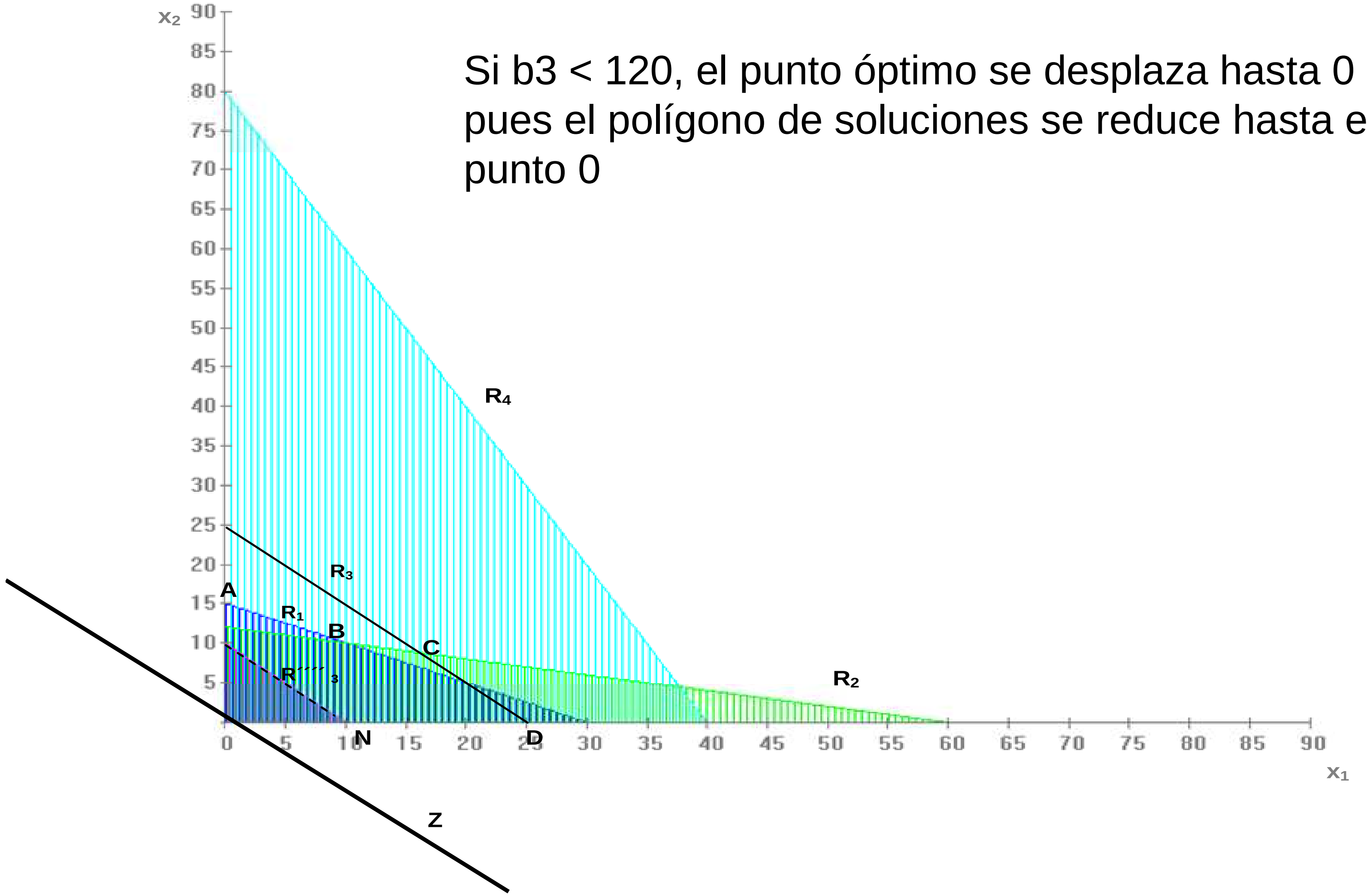
El polígono de soluciones se reduce al convexo: 0AN.

La recta es: R´´´´3.

Variación de b3

i.

Si b3 < 120, el punto óptimo se desplaza hasta 0 pues el polígono de soluciones se reduce hasta el punto 0



Conclusiones

- Estos resultados son resumidos por la Consultora en el siguiente cuadro:
- **RANGO DE VARIACIONES DE LAS RESTRICCIONES DENTRO DE LAS CUALES NO SE ALTERA LA SOLUCION ÓPTIMA**.

RESTRICCION	RANGO
b_1	Saturada, no puede modificarse sin modificar el resultado.
b_2	≥ 2250 minutos diarios, no se modifica el resultado, si b_2 > 2250 el excedente de esta cantidad no se utiliza. Si b_2 = 2250, restricción saturada (idem b_1)
b_3	saturada, idem b_1
b_4	≥ 5,625 litros diarios, (idem b_2)

Variación de ci (beneficios)

- La Gerencia por su parte también quiere conocer que fluctuaciones puede tener cada uno de los beneficios que deja cada artículo.
- Si dichos beneficios aumentan, la ganancia será mayor, pero estos aumentos pueden no ser proporcionales entre si, en cuyo caso cabe la posibilidad de que la producción de uno de los dos artículos deje de ser conveniente.
- La consultora estudió las variaciones de cada beneficio por separado.

$$Z = 3\ x1 + 4\ x2$$

- Si se llama:

$$Z = c1\ x1 + c2\ x2$$

Variación de c1

- En el gráfico, la recta z (óptima) queda entre las restricciones, R1 y R3.
- Las variaciones de c1, modificaran la pendiente del funcional, la recta z oscilará, hasta ponerse coincidente con R1 o con R3 que serán los valores extremos que podrá tomar la pendiente de z, sin moverse del punto C.

Pendiente de z = $- \frac{c1}{c2}$

si se deja fijo c2 = 4, queda:

Pendiente de z = $- \frac{c1}{4}$

como la pendiente de R3 es z = $- \frac{12}{12}$

Variación de c1

si la pendiente de z = a la pendiente de R3, entonces:

$$-\frac{c_1}{4} = -\frac{12}{12}$$

resulta:

$c_1 = 4$

además, como la pendiente de R1 = $-\dfrac{30}{60}$

Si la pendiente de z = a la pendiente de R1

$$-\frac{c_1}{4} = -\frac{30}{60}$$

resulta:

$c_1 = 2$

Luego el rango de variación de c1 = (2;4)

Variación de c1

- Es decir:
- ***Mientras el beneficio de PLAFA se mantenga entre los valores de 2 y 4 el punto óptimo C no varia.***
- ***La producción de cada artículo no cambia, como tampoco los usos de las restricciones, si bien el beneficio total presenta modificaciones.***

Variación de c2

Pendiente de z = $-\dfrac{c1}{c2}$

si se deja fijo c1 = 3, queda:

Pendiente de z = $-\dfrac{3}{c2}$

si la pendiente de z = a la pendiente de R3, entonces:

$$-\frac{3}{c2} = -\frac{30}{60}$$

resulta:

c1 =6

Variación de c2

además, como la pendiente de R3 = $- \dfrac{12}{12}$

Si la pendiente de z = a la pendiente de R3

$$- \frac{c1}{c2} = - \frac{12}{12}$$

resulta:

$$c2 = 3$$

Luego el rango de variación de c2 = (3;6)

Variación de c2

Es decir:

- ***Mientras el beneficio de PLAIN se mantenga entre los valores de 3 y 6 el punto óptimo C no varia.***
- ***La producción de cada artículo no cambia, si bien el beneficio total presenta modificaciones. Los usos de las restricciones no cambian.***)

Variación de ci

RANGO DE VARIACIONES DE LOS COEFICIENTES DEL FUNCIONAL DENTRO DE LAS CUALES NO SE ALTERA EL PUNTO ÓPTIMO

RESTRICCION	RANGO
c_1	2:4
c_2	3:6

Agregado de una restricción de ≥

- Estudios de mercado realizados posteriormente, señalan la conveniencia de entregar una cantidad mínima de PLAFA de 8 litros diarios.
- Este nuevo dato entregado a la Consultora, hace que al modelo matemático se le deba agregar una nueva restricción más: R5.

  R5: $x1 \geq 8$

  Aquí $b5 = 8$.
- En este caso la restricción es mínimo. La ecuación con el agregado de una nueva variable slack queda:

  R5: $x1 - x7 = 8$

Agregado de una restricción de ≥

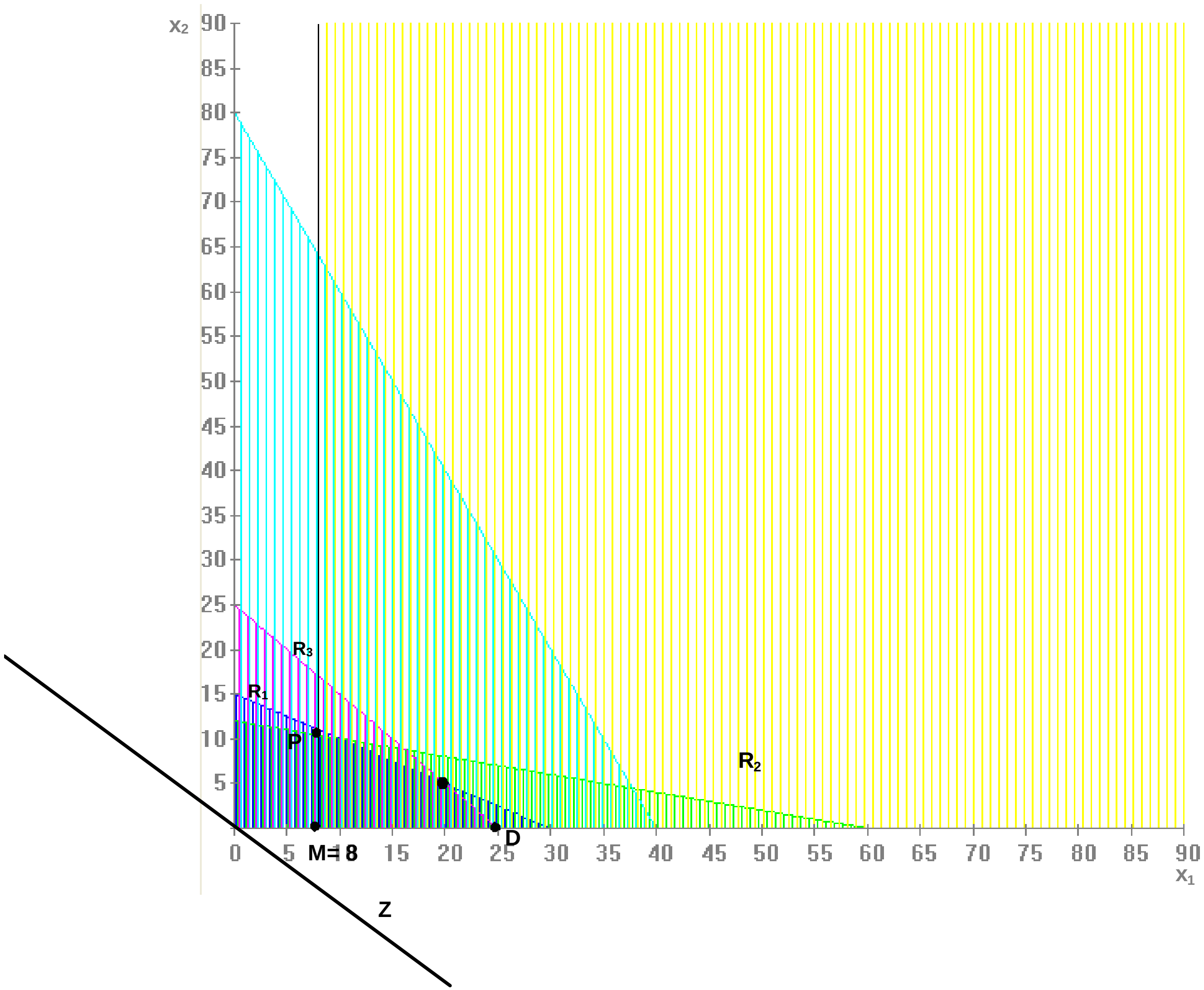
Donde

VARIABLE	CLASE	SIGNIFICADO	UNIDAD
X_7	Slack	Excedente de litros diarios de PLAFA producidos sobre el requerimiento mínimo	Litros de PLAFA

También $x7 \geq 0$

Agregado de una restricción de ≥

El nuevo gráfico queda:



Agregado de una restricción de ≥

- El convexo de soluciones se reduce al polígono MPBCD
- Pero el punto óptimo sigue siendo C con una nueva coordenada: $x7 = 12$ (se producen 12 litros diarios de PLAFA sobre el requerimiento mínimo).
- $C = (x1; x2; x3; x4; x5; x6; x7)$
- $C = (20; 5; 0; 750; 0; 4{,}375; 12)$

- Además mientras b5 varíe entre 0 y 20, es decir:

1 - $0 \leq b5 \leq 20$

  - La recta R5 se desplazará paralelamente al eje de las x2, alejándose del origen de coordenadas y achicando el polígono de soluciones, pero manteniendo el mismo punto óptimo C.
  - x7 se irá reduciendo hasta anularse

    $$20 \geq x7 \geq 0$$

  - si b5 aumenta

Agregado de una restricción de ≥

2 - 20 ≤ b5 ≤ 25 el polígono de soluciones continua disminuyendo pero el punto óptimo cambia, desplazándose sobe el lado CD del polígono.

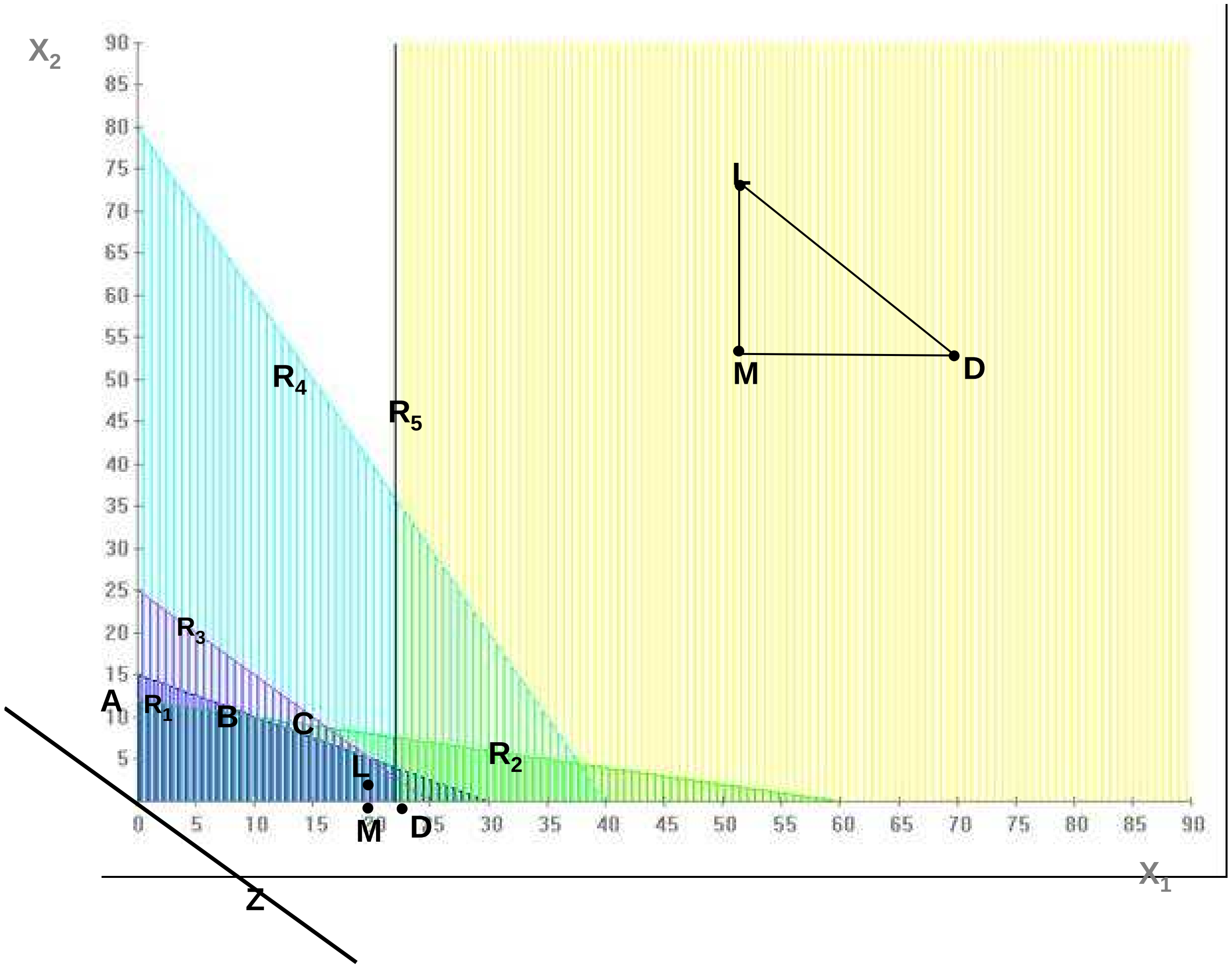
Por ejemplo, si b5 = 22

El modelo matemático queda:

z = 3 x1 + 4 x2 ----> MAXIMIZAR

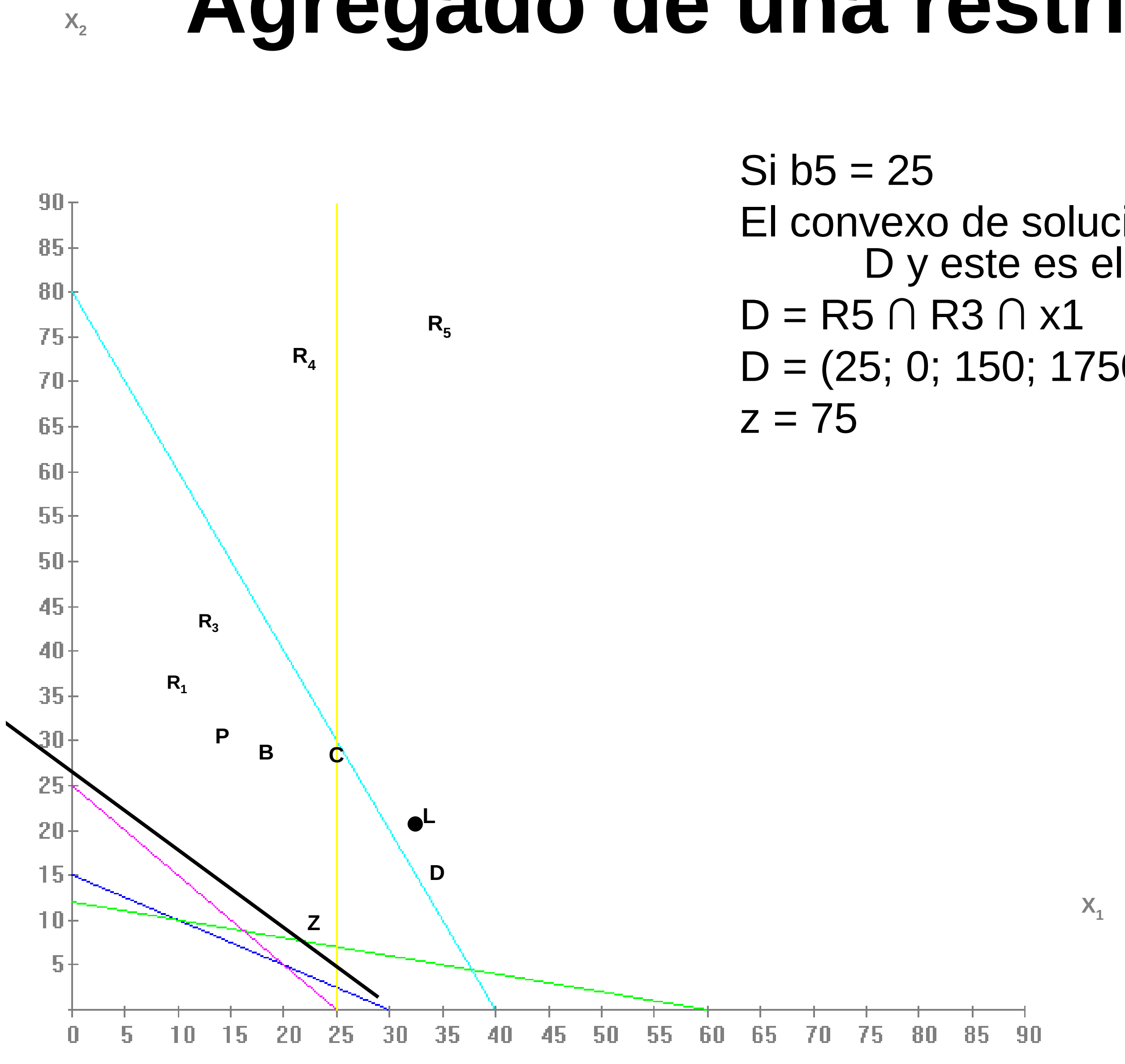
	30 =	x1 + 60 x2 + 900		x3			
50	x1+ 250 3000	x2		+ x4			=
12	x1 + 12 300	x2			+ x5		=
1/4	x1 + 1/8 10	x2				+ x6	=
	x1	+ x7	=	22			

Agregado de una restricción de ≥



y en el gráfico:
El convexo de soluciones es MLD, con L como punto óptimo.
L = R3 ∩ R5
L = (22; 3; 60, 1150; 0; 4,125; 0)

Agregado de una restricción de ≥



Si b5 = 25

El convexo de soluciones se reduce al punto D y este es el punto óptimo.

D = R5 ∩ R3 ∩ x1

D = (25; 0; 150; 1750; 0; 3,75; 0)

z = 75

Agregado de una restricción de ≥

Si b5 > 25

Esto es un pedido incompatible con el resto de las restricciones de la planta. No se puede elaborar más de 25 litros diarios de PLAFA, pues no hay tiempos disponibles en el sector de elaboración.

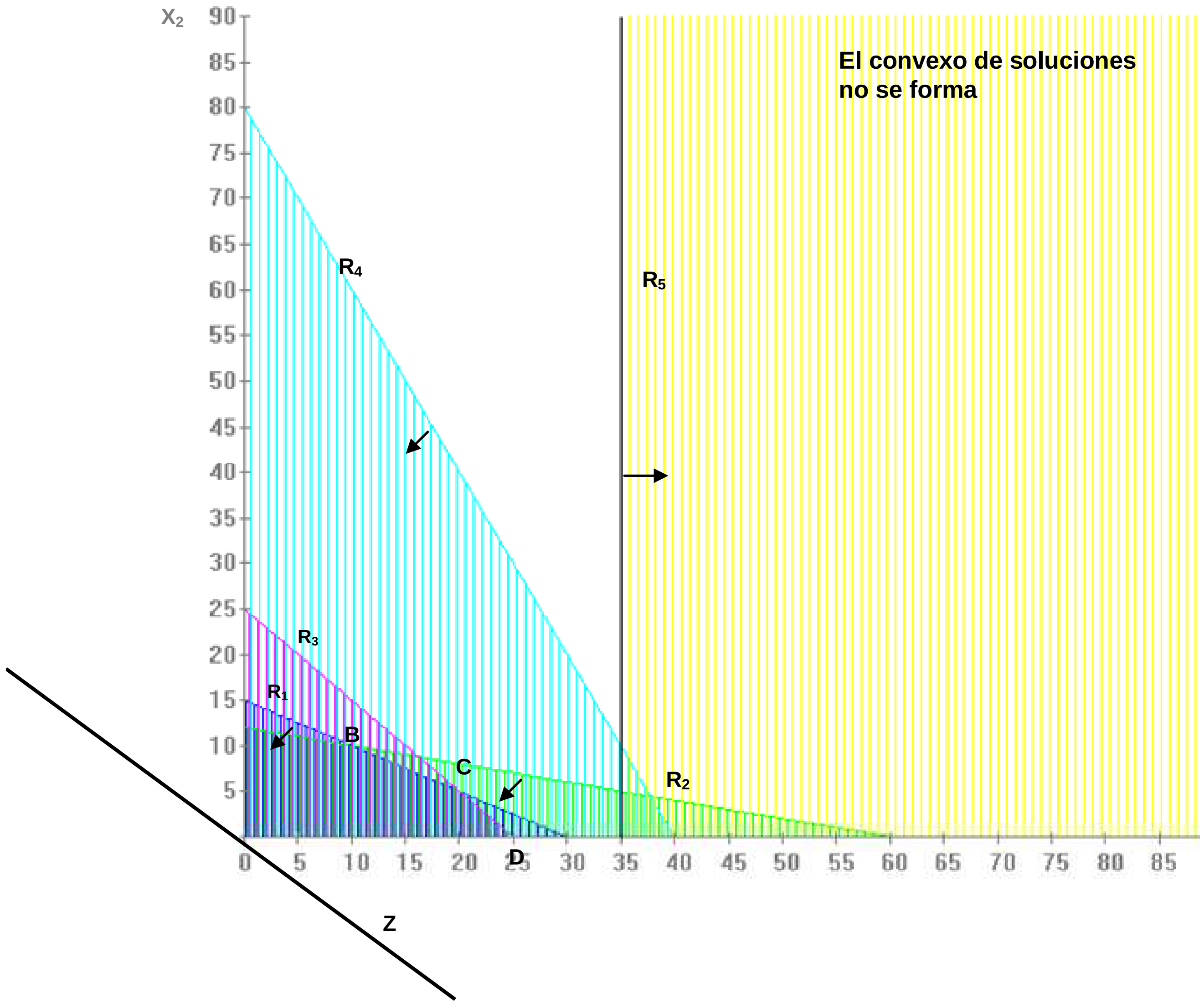
Por ejemplo, si b5 = 35

El gráfico queda:

x_1

Agregado de una restricción de ≥

:



Caso Reddy Mikks

- Reddy Mikks produce pinturas para interiores y exteriores, M1 y M2. La tabla siguiente proporciona los datos básicos del problema.

	Ton de materia prima de		
	Pinturas para exteriores	Pinturas para interiores	máxima disponibilidad diaria
Materia prima M1	6	4	24
Materia prima M2	1	2	6
Utilidad por Ton (miles de $)	5	4	

Caso Reddy Mikks

- Una encuesta de mercado indica que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que 1 tonelada más que la de pintura para exteriores. También, que la demanda máxima diaria de pintura para interiores es de 2 toneladas.
- Reddy Mikks desea determinar la mezcla óptima (la mejor) de productos para exteriores y para interiores que maximice la utilidad diaria total.
- El modelo de programación lineal, como en cualquier modelo de investigación de operaciones, tiene tres componentes básicos.

1. Las variables de decisión que se trata de determinar.
2. El objetivo (la meta) que se trata de optimizar.
3. Las restricciones que se deben satisfacer.

Trabajemos en el pizarrón

Análisis de sensibilidad Método Simplex

- El análisis de sensibilidad estudia el cambio de la solución óptima que resulta de hacer cambios en los parámetros del modelo de PL

Método Simplex

- La tabla siguiente contiene los casos posibles que pueden surgir en el análisis de sensibilidad, así como las acciones par obtener la nueva solución (suponiendo que exista)

Método Simplex

Condición resultante de los cambios	**Acción acordada**
La solución actual queda óptima y factible	**No es necesario acción alguna**
La solución actual se vuelve no factible	**Usar simplex dual para recuperar la factibilidad**
La solución actual se vuelve no óptima	**Usar simplex primal para recuperar la optimalidad**
La solución actual se vuelve no óptima y no factible al mismo tiempo	**Usar simples generalizado para obtener una nueva solución**

Ejemplo para trabajar

- TOYCO arma tres juguetes: trenes, camiones y coches, con tres operaciones. Los límites diarios de tiempo disponible para las tres operaciones son 430,460 y 420 minutos, respectivamente, y las utilidades por tren, camión y coche de juguete son $3, $2 y $5, respectivamente. Los tiempos de armado por tren, en las tres operaciones son 1, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los tiempos respectivos por camión y por coche son (2, 0, 4) y (1, 2, 0) minutos (un tiempo de cero indica que no se usa la operación).

Ejemplo para trabajar

- Si x1, x2 y x3 representan la cantidad diaria de unidades armadas de trenes, camiones y coches, y si el modelo de programación lineal correspondiente, y su dual son los siguientes:

Primal de TOYCO	Dual de TOYCO
Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$	Minimizar $z = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$
sujeta a	sujeta a
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (operación 1)	$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$
$3x_1 + 2x_3 \leq 460$ (operación 2)	$2y_1 + 4y_3 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \leq 420$ (operación 3)	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$x_k \geq 0, \forall\, k$	$y_k \geq 0, \forall\, k$
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 0,\ x_2 = 100,\ x_3 = 230,\ z = \$1350$	$y_1 = 1,\ y_2 = 2,\ y_3 = 0,\ w = \$1350$

La solución primal óptima indica producir camiones de juguete x2 = 100 y coches de juguete x3 = 230, pero no armar trenes x1 = 0, porque no son rentables.

La tabla óptima asociada para el primal

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

Método Simplex

Cambios que afectan la factibilidad

La factibilidad de la solución optima en el momento solo puede variar si

1) Cambia el lado derecho de las restricciones
2) Se agrega al modelo una nueva restricción

En ambos casos se tiene no factibilidad cuando al menos un elemento del lado derecho en la tabla óptima se hace negativo; esto es una o más variables básicas actuales se vuelven negativas

Método Simplex -Cambios que afectan la factibilidad

1) Cambia el lado derecho de las restricciones

Estos cambios requieren volver a calcular el lado derecho de la tabla, según el siguiente cálculo

$$\begin{pmatrix}\text{Nuevo lado derecho}\\ \text{en la tabla de}\\ \text{la iteración i}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inversa}\\ \text{la iteración i}\end{pmatrix} \text{X} \begin{pmatrix}\text{Nuevo lado derecho de}\\ \text{la iteración i}\end{pmatrix}$$

Recuerde que el lado derecho de la tabla expresa los valores de las variables básicas

Ejemplo

- Suponga que TOYCO desea ampliar sus líneas de ensamble aumentando en 40% la capacidad diaria de cada una, hasta 602, 644 y 588 minutos, respectivamente. Con esos aumentos, el único cambio que se hará en la tabla óptima es el lado derecho de las restricciones (y el valor objetivo óptimo). Así, la nueva solución básica se calcula como sigue:

Caso TOYCO

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 602 \\ 644 \\ 588 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 322 \\ 328 \end{pmatrix}$$

AsÍ, las variables básicas actuales (x2, x3 y x6) siguen siendo factibles con los nuevos valores 140, 322 y 328.
La utilidad óptima correspondiente es $1890.

Caso TOYCO

Aunque la nueva solución es atrayente, tanto desde el punto de vista de mayor utilidad, TOYCO reconoce que para implementarla pasará algo de tiempo. En consecuencia se hizo otra proposición que es cambiar la holgura de capacidad de la operación 3 (x6 = 20 minutos) a la capacidad de la operación 1, con lo que cambia la combinación de las tres operaciones a 450,460 y 400 minutos, respectivamente. La solución resultante es

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 450 \\ 460 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 230 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Caso TOYCO

Esta solución es no factible, porque x6 = −40. Se aplicará el método simplex dual para recuperar la factibilidad. Primero se modifica el lado derecho de la tabla, como se ve en la columna enmarcada. Observe que el valor asociado de z = 3×0+2×110+5×230 = $1370.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1370
x_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	110
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	-40

Caso TOYCO

Comenzando con el simplex dual, sale x6 y entra x4, con lo que la tabla óptima factible es la siguiente (en general, el simplex dual requerirá más de una iteración para recuperar la factibilidad).

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	5	0	0	0	$5/2$	$1/2$	1350
x_2	$1/4$	1	0	0	0	$1/4$	100
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
x_4	-1	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	20

La solución óptima (en función de x1, x2 y x3) queda igual que en el modelo original. También se demuestra que no se usó la capacidad adicional para la operación 1 (x4 = 20). La única conclusión entonces es que la operación 2 es el cuello de botella.

Método Simplex -Cambios que afectan la factibilidad

Intervalo de factibilidad de los elementos del lado derecho

Otra forma de examinar el efecto de cambiar la disponibilidad de los recursos (vector del lado derecho) es determinar el intervalo para el cual la solución actual o del momento permanece factible

Caso TOYCO

En el modelo de TOYCO, suponer que lo que interesa es determinar el intervalo de factibilidad de la capacidad de la operación 1. Se puede hacer reemplazando el lado derecho con

$$\begin{pmatrix} 430 + D1 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix}$$

La cantidad D1 representa el cambio en la capacidad de la operación 1, arriba y abajo del valor actual de 430 minutos. La solución actual básica permanece factible si todas las variables básicas son no negativas, esto es,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 430 + D_1 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 + D_1/2 \\ 230 \\ 20 - 2D_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caso TOYCO

Estas condiciones conducen a las siguientes cotas de D_1:

$$\begin{aligned}
(x_2 \geq 0) &: 100 + D_1/2 \geq 0 \Rightarrow D_1 \geq -200 \\
(x_3 \geq 0) &: x_3 \text{ es independiente de } D_1 \\
(x_6 \geq 0) &: 20 - 2D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \leq 10
\end{aligned}$$

Así, la solución actual permanece factible cuando,

$$-200 \leq D_1 \leq 10$$

Esto equivale a variar los minutos de disponibilidad de la operación en el intervalo

$$430 - 200 \leq (\text{Capacidad de la operación } 1) \leq 430 + 10$$

o sea

$$230 \leq (\text{Capacidad de la operación } 1) \leq 440$$

Caso TOYCO

El cambio en el valor objetivo óptimo asociado con D_1 es $D_1 y_1$, siendo y_1 el valor por unidad (precio dual), en $ por minuto de la operación 1.

Para ilustrar el uso del intervalo determinado, suponga que la capacidad de la operación 1 cambia desde su valor actual de 430 a 400 minutos. La solución básica actual permanece factible, porque la nueva capacidad queda dentro del intervalo factible. Para calcular los valores nuevos de las variables se usa

$$D_1 = 400 - 430 = -30$$

Caso TOYCO

Así $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 + (-30)/2 \\ 230 \\ 20 - 2(-30) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 230 \\ 80 \end{pmatrix}$

Para calcular el cambio asociado en el valor óptimo de la función objetivo se calculan primero los precios duales, con el método 1 de la sección 4.2.3, esto es

$$\begin{pmatrix} \text{Valores óptimos de} \\ \text{las variables duales} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Coeficientes originales} \\ \text{de las variables óptimas} \\ \text{básicas primales} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Inversa} \\ \text{óptima} \end{pmatrix}$$

Así,

$$(y_1, y_2, y_3) = (2, 5, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 0)$$

Caso TOYCO

Esto quiere decir que el valor de la operación 1 por minuto es $y_1 = \$1$, y que el cambio de la utilidad óptima es $D_1 y_1 = -30 \times 1 = -\$30$. Recuerde $y_1 = 1$, el valor dado por unidad, sigue siendo válido sólo dentro del intervalo especificado:

$$-200 \leq D_1 \leq 10$$

Todo cambio que salga de este intervalo causa no factibilidad; de aquí la necesidad de usar el método simplex dual para determinar la nueva solución, si es que existe.

Para determinar los intervalos factibles D_2 y D_3, los cambios asociados con las operaciones 2 y 3 se pueden usar procedimientos parecidos. La determinación de D_1, D_2 y D_3 en la forma establecida, y su relación con los valores duales óptimos y_1, y_2 y y_3 sólo son válidas cuando se considera por separado cada recurso. Si se quisiera cambiar los tres recursos al mismo tiempo, se debe deducir un conjunto distinto de condiciones, con los elementos del lado derecho $430 + D_1$, $460 + D_2$ y $420 + D_3$.

Adición de nuevas restricciones

La adición de una nueva restricción a un modelo existente puede llevar a uno de los dos casos siguientes:

1. La nueva restricción es redundante, lo que quiere decir que se satisface con la solución óptima actual y, por consiguiente, se puede eliminar por completo del modelo.
2. La solución actual viola la nueva restricción, y en este caso se puede aplicar el método simplex dual para recuperar la factibilidad.

- Observe que la adición de una nueva restricción, como en el caso 2, nunca puede mejorar el valor objetivo óptimo actual.

Caso TOYCO

Suponga que TOYCO cambia el diseño de los juguetes, y que para el cambio se requerirá agregar una cuarta operación en las líneas de ensamble. La capacidad diaria de la nueva operación es 500 minutos, y los tiempos por unidad, para los tres productos en esta operación, son 3, 1 y 1 minutos, respectivamente. La restricción resultante se forma, por consiguiente, como sigue:

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

Esta restricción es redundante, porque queda satisfecha con la solución óptima actual $x_1 = 0$, $x_2 = 100$ y $x_3 = 230$. Eso quiere decir que la solución óptima actual permanece sin cambio.

Caso TOYCO

Ahora suponga que los tiempos por unidad, en TOYCO, para la cuarta operación son 3,3 y 1 minutos, respectivamente. Todos los datos restantes del modelo permanecen igual. En este caso, la cuarta restricción

$$3x1 + 3x2 + x3 \leq 500$$

no queda satisfecha por la solución óptima actual. En consecuencia, debemos aumentar la nueva restricción a la tabla óptima actual, como sigue (x7 es una holgura):

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Solución
z	4	0	0	1	2	0	0	1350
x_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	0	100
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	0	20
x_7	3	3	1	0	0	0	1	500

Caso TOYCO

Como las variables x2 y x3 son básicas, se deben sustituir y eliminar sus coeficientes de restricción en la fila de x7, lo que se puede hacer con la siguiente operación:

Nueva fila de x7=Fila anterior de x7−{3×(fila de x2)+1×(fila de x3)}

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Solución
z	4	0	0	1	2	0	0	1350
x_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	0	100
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	0	20
x_7	$9/4$	0	0	$-3/2$	$1/4$	0	1	-30

La aplicación del método simplex dual dará como resultado la nueva solución óptima x1 = 0, x2 = 90, x3 = 230, z = $1330 (¡compruébelo!)

Cambios que afectan la optimalidad

Examinaremos dos soluciones particulares que podrían afectar la optimalidad de la solución actual:

1. Cambios en los coeficientes objetivo originales.
2. Adición de una nueva actividad económica (variable) al modelo.

Cambios en los coeficientes de la función objetivo.

Esos cambios sólo afectan la optimalidad de la solución. Por consiguiente requieren recalcular los coeficientes de la fila z, con el siguiente procedimiento:

1. Calcular los valores duales con los métodos 1 y 2 sección 4.2.3 dual óptimo
2. Usar los nuevos valores duales en la fórmula 2, sección 4.2.4 cálculos con la tabla simplex, para determinar los nuevos coeficientes en el fila de z.

Se presentarán dos casos:

1. La nueva fila de z satisface la condición de optimalidad, y la solución permanece sin cambio (sin embargo, el valor objetivo óptimo puede cambiar).
2. La condición de optimalidad no se satisface, y en ese caso se aplica el método simplex (primal) para recuperar la optimalidad.

Cambios en los coeficientes de la función objetivo.

Esos cambios sólo afectan la optimalidad de la solución. Por consiguiente requieren recalcular los coeficientes de la fila z, con el siguiente procedimiento:

1. Calcular los valores duales con los métodos 1 y 2
2. Usar los nuevos valores duales en la fórmula 2, sección 4.2.4, para determinar los nuevos coeficientes en el fila de z.

Se presentarán dos casos:

1. La nueva fila de z satisface la condición de optimalidad, y la solución permanece sin cambio (sin embargo, el valor objetivo óptimo puede cambiar).
2. La condición de optimalidad no se satisface, y en ese caso se aplica el método simplex (primal) para recuperar la optimalidad.

Caso TOYCO

En el modelo de TOYCO, suponga que la empresa tiene nueva política de precios para igualar la competencia. Bajo la nueva política, las utilidades por unidad son $2, $3 y $4, por los trenes, camiones y autos, respectivamente. La nueva función objetivo es

Maximizar z = 2x1 + 3x2 + 4x3

Así,

(Nuevos coeficientes objetivo de x2, x3 y x6 básicas)=(3,4,0)

Las variables duales se calculan con el método 1 de la sección 4.2.3, como sigue:

$$(y_1, y_2, y_3) = (3, 4, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (3/2, 5/4, 0)$$

Caso TOYCO

- Los coeficientes de la fila z se determinan como la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de las restricciones duales (fórmula 2, sección 4.2.4). No es necesario recalcular los coeficientes de las variables básicas $x2$, $x3$ y $x6$ en el fila objetivo, porque siempre son iguales a cero, independientemente de los cambios hechos a los coeficientes objetivo (¡compruébelo!).

$$x1 : y1 + 3y2 + y3 - 2 = 3/2 + 3(5/4) + 0 - 2 = 13/4$$

$$x4 : y1 - 0 = 3/2$$

$$x5 : y2 - 0 = 5/4$$

Caso TOYCO

Nótese que el lado derecho de la restricción dual asociada con x1 es 2, el coeficiente nuevo en la función objetivo modificada.

Los cálculos indican que en la solución actual, x1 = 0 trenes, x2 = 100 camiones y x3 = 230 autos, permanece óptima. La nueva utilidad correspondiente se calcula como 2 × 0 + 3 × 100 + 4 × 230 = $1220.

Ahora suponga que cambia la función objetivo de TOYCO a

Maximizar z = 6x1 + 3x2 + 4x3

Caso TOYCO

Los cambios correspondientes en la fila de z se indican en la siguiente tabla (¡compruébelos!):

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$\boxed{-3/4}$	0	0	$\boxed{3/2 \quad 5/4}$		0	$\boxed{1220}$
x_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

Caso TOYCO

- Los elementos que están en las celdas enmarcadas son las nuevas $z_j - c_j$ para las variables no básicas $x1$, $x4$ y $x5$. Todos los elementos restantes de la tabla son iguales a los de la iteración original óptima. Entonces, la nueva solución óptima se determina haciendo entrar a $x1$ y salir a $x6$, con lo que se obtiene $x1 = 10$, $x2 = 102.5$, $x3 = 215$ y $z = \$1227.50$ (¡compruébelos!) .

Intervalo de optimalidad de los coeficientes objetivo

- Otra forma de investigar el efecto de los cambios en los coeficientes de la función objetivo es calcular el intervalo para el que cada coeficiente individual mantenga la solución óptima actual. Esto se hace reemplazando el cj actual con cj + dj donde dj representa la cantidad (positiva o negativa) de cambio.

Caso TOYCO

Suponga que la función objetivo del modelo de TOYCO cambia a

Maximizar $z = (3 + d_1)x_1 + 2x_2 + 5x_3$

Determinar el intervalo de optimalidad para el cambio d_1.

Seguiremos el procedimiento que se describió arriba. Sin embargo, observe que, como x_1 no es básica en la tabla óptima, los valores duales no se verán afectados por este cambio y en consecuencia permanecerán igual que en el modelo original (es decir, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$).

Caso TOYCO

En realidad, como $x1$ es no básica, sólo se afectará su coeficiente en la fila z, y todos los demás coeficientes de ese fila permanecen sin cambio (¿por qué?).

Eso quiere decir que se necesita aplicar la fórmula 2, sección 4.2.4 a la restricción dual asociada sólo con $x1$, esto es,

$x1 : y1 + 3y2 + y3 - (3 + d1) = 1 + 3 \times 2 + 0 - (3 + d1) = 4 - d1$

Como el modelo de TOYCO es un problema de maximización, la solución original permanecerá óptima siempre que

$$4 - d1 \geq 0,$$

o sea $$d1 \leq 4$$

Caso TOYCO

Esto equivale a decir que la solución actual permanece óptima siempre que el coeficiente objetivo $c1(= 3 + d1)$ de $x1$, no sea mayor que $3 + 4 = \$7$.

Ahora se considerará el cambio $d2$ en el coeficiente objetivo de $x2$:

$$\text{Maximizar } z = 3x1 + (2 + d2)x2 + 5x3$$

La diferencia en este caso es que $x2$ es básica y su cambio afectará los valores duales para después afectar todos los coeficientes de todas las variables no básicas del fila z

(recuerde que los coeficientes de las variables básicas en la fila z siempre son iguales a cero, independientemente de cualquier cambio en la función objetivo).

Caso TOYCO

- Al aplicar el método 1, sección 4.2.3, para calcular los valores duales se obtiene:

$$\text{nueva } (y_1, y_2, y_3) = (2 + d_2, 5, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1 + d_2/2, 2 - d_2/4, 0)$$

Se pueden calcular los coeficientes de las variables no básicas en la fila z como sigue:

$$\begin{array}{llll} x_1: & y_1 + 3y_2 + y_3 - 3 & = (1 + d_2/2) + 3 \times (2 - d_2/4) + 0 - 3 & = 4 - d_2/4 \geq 0 \quad (1) \\ x_4: & y_1 - 0 & = (1 + d_2/2) - 0 & = 1 + d_2/2 \geq 0 \quad (2) \\ x_5: & y_2 - 0 & = (2 - d_2/4) - 0 & = 2 - d_2/4 \geq 0 \quad (3) \end{array}$$

Caso TOYCO

Las desigualdades (1), (2) y (3), respectivamente, dan como resultado

$$d2 \leq 16,\ d2 \geq -2 \text{ y } d2 \leq 8$$

o sea,

$$-2 \leq d2 \leq 8$$

Por lo tanto, dada c2 = 2 + d2, se obtiene

$$0 \leq c2 \leq 10$$

Adición de una nueva actividad.

La adición de una nueva actividad en un modelo de programación lineal equivale a agregar una nueva variable. En forma intuitiva, la adición de una nueva actividad sólo es deseable si es rentable, esto es, si mejora el valor óptimo de la función objetivo. Esta condición se puede verificar aplicando la fórmula 2, sección 4.2.4, a la nueva actividad. Como esa nueva actividad no es todavía parte de la solución, se puede considerar como una variable no básica. Eso quiere decir que los valores duales asociados con la solución actual permanecen invariables.

Si la fórmula 2 indica que la nueva actividad satisface la condición de optimalidad, la actividad no es rentable. En caso contrario, es mejor tener en cuenta la nueva actividad.

Caso TOYCO

TOYCO reconoce que los trenes de juguete no se producen en la actualidad porque no son rentables. La empresa quiere reemplazar los trenes con un nuevo producto, un carro de bomberos de juguete, que se arme en las instalaciones existentes. TOYCO estima que la utilidad por carro de bomberos es $4 y que los tiempos de ensamble por unidad son 1 minuto en cada una de las operaciones 1 y 2, y 2 minutos en la operación 3.

Caso TOYCO

Sea x7 el nuevo producto, el carro de bomberos. Como (y1, y2, y3) = (1, 2, 0) son los valores duales óptimos, el costo reducido de x7 se puede calcular como sigue:

$$1y1 + 1y2 + 2y3 - 4 = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 0 - 4 = -1$$

Según este resultado, conviene económicamente incluir a x7, en la solución básica óptima.

Para obtener el nuevo óptimo se calcula primero su columna de restricciones con la fórmula 1, sección 4.2.4, como sigue:

$$\text{Columna de restricción de } x_7 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Caso TOYCO

Así, se debe modificar la tabla simplex actual como sigue:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_7	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	-1	1	2	0	1350
x_2	$-1/4$	1	0	$1/4$	$1/2$	$-1/4$	0	100
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	0	$1/2$	0	230
x_6	2	0	0	1	-2	1	1	20

Se determina el nuevo valor óptimo haciendo entrar x7 a la solución básica, y en ese caso debe salir x6. La nueva solución es x1 = 0, x2 = 0, x3 = 125, x7 = 210 y z = $1465 (¡compruébelo!)

El caso de agregar una actividad nueva también abarca al caso en que se hicieron cambios al uso de los recursos, en una actividad existente. En forma específica se puede considerar a x7 como si al principio tuviera un coeficiente objetivo cero y uso cero de sus tres recursos, y que esos valores cero se cambiaron a los nuevos valores para x7. Por esta razón, no es necesario describir por separado el caso de cambiar los coeficientes de restricción de una variable existente.

VARIACIONES PARAMETRICAS

Los planteos que se realizan son sobre problemas reales, sometidos a modificaciones.
Las tablas óptimas deben adaptarse a casos reales, pues:

- existen precios que varían (los c_j)
- los coeficientes tecnológicos del problema pueden no estar dados correctamenteo sufrir modificaciones posteriores (los a_{ij})
- las restricciones son variables, pueden depender de la rotura de una máquina (los b_i)

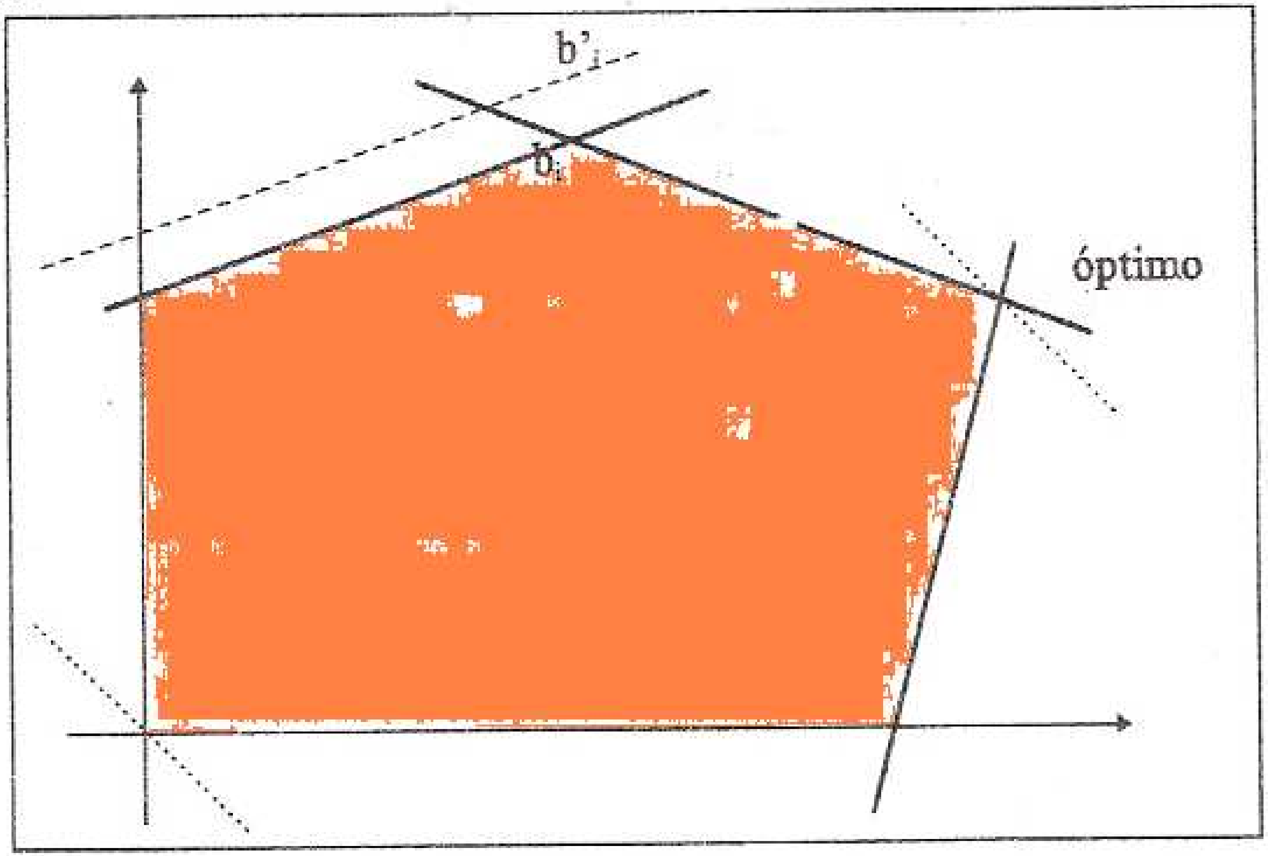
En consecuencia, el problema de Programación Lineal no termina al encontrar la solución óptima matemática.

Pueden surgir dos casos:

1. hay variaciones de los c_j , a_{ij} , b_i
2. se necesita saber **qué variaciones** de los c_j , a_{ij} , b_i no modifican el problema

El estudio puede verse analítaicamente y graficamente

Graficamente:



- una variación del coeficiente del funcional, origina oscilaciones en la pendiente del funcional, pero dentro de ciertos límites el punto óptimo sigue siendo el mínimo
- una variación en las restricciones, desplaza la restricción paralela a sí misma, pero si ella no está saturada, dentro de ciertos límites, el punto óptimo sigue siendo el mismo pero si está saturada, el punto óptimo se desplaza
- una variación de los coeficientes tecnológicos hace oscilar las rectas de las restricciones, pero dentro de ciertos límites, el punto óptimo no se modifica

VARIACION DE LOS c_j (COEFICIENTES DEL FUNCIONAL):

Estos cambios producen variaciones en la pendiente del funcional, hasta que queda paralelo a una de las restricciones que pasan por la solución óptima.

El punto óptimo sigue siendo el mismo dentro de ciertos límites: $P = (x_1, x_2)$

Se producen los mismos productos y en las mismas cantidades, pero el z cambia (aumenta o disminuye).

Cuando el funcional se hace paralelo a una de las restricciones que forman el punto óptimo, se tienen soluciones alternativas.

Luego al seguir variando el coeficiente del funcional, el punto óptimo se desplaza.

En el ejemplo:

$$x_1 + x_2 \leq 10 \qquad R_1$$

$$x_1 + 3 \leq 24 \qquad R_1$$

$$x_2 \leq 6 \qquad R_1$$

con las condiciones:

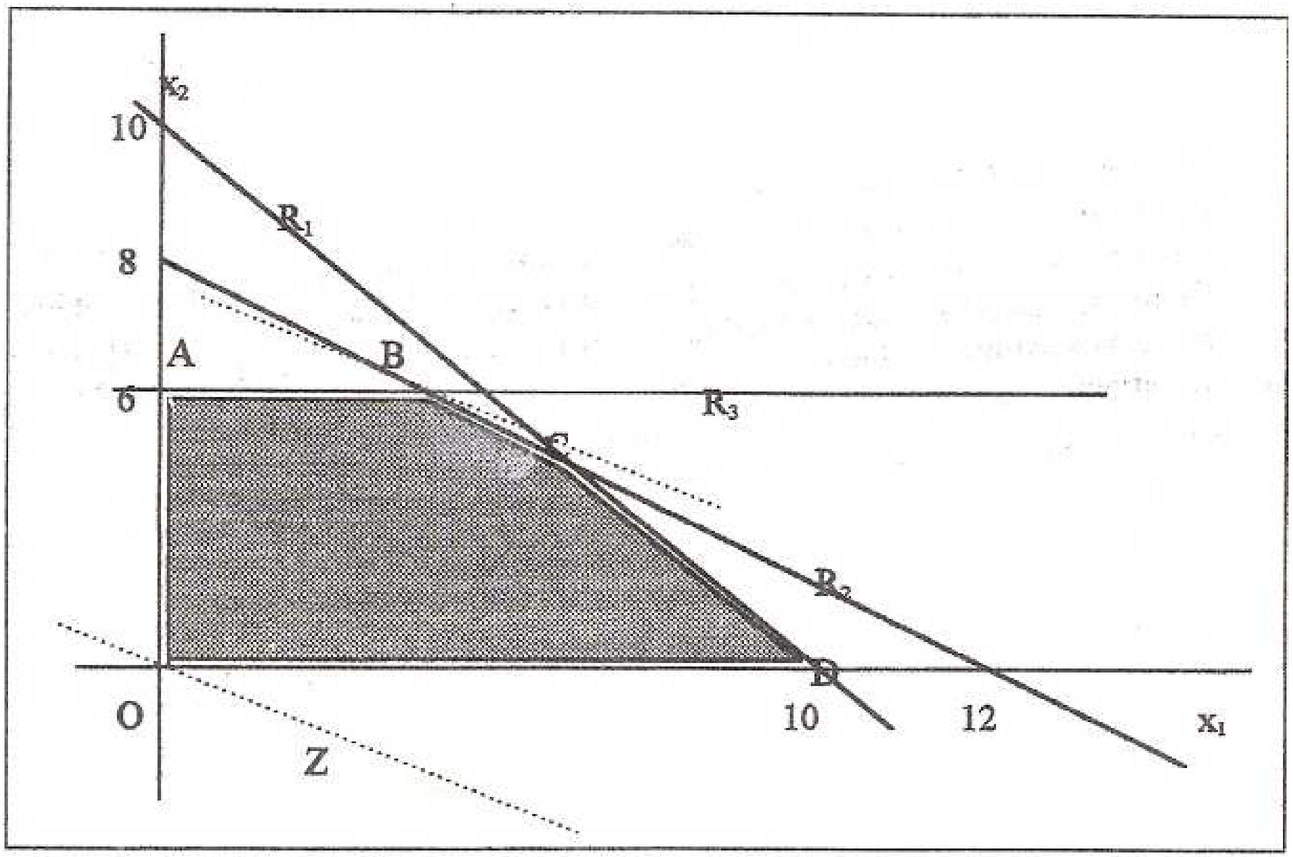
$$x \geq 0$$

$$z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad \rightarrow \quad \text{Máx.}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 24 \\ x_2 \qquad + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

$$z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad \rightarrow \quad \text{Máx.}$$

Graficamente:



$$B = R_2 \cap R_2 = (x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5)$$

$$= (3 ; 6 ; 1 ; 0 ; 0) \text{ con } z = 15$$

En la tabla óptima:

				c_1	c_2			
				1	2	0	0	0
	C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	0	x_3	1	0	0	1	-1/2	1/2
c_1	1	x_1	3	1	0	0	1/2	-3/2
c_2	2	x_2	6	0	1	0	0	1
			15	0	0	0	1/2	1/2
				y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

$c_1 = 1$

Se cambia c_1 ; se buscan los límites dentro de los cuales no se modifica el punto óptimo, es decir la tabla sigue siendo la misma (la estructura de la solución no varía):

el intervalo es $\left[\overline{C_1} ; \underline{C_1}\right]$

Existen varias formas de calcular este intervalo:

I) c_1 interviene en las columnas A_4 y A_5 de la tabla óptima

Para que la tabla siga siendo óptima, los $z_j - c_j$ deben ser todos positivos o cero.
En la columna A_4

$$0 + C_1 \,.\, 1/2 + 0 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 \geq 0$$

En la columna A_5

$$0 - C_1 \,.\, 3/2 + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 \leq 4/3$$

Resulta que $\boxed{0 \leq c_1 \leq 4/3}$

Cuando c_1 alcanza estos límites se está en presencia de soluciones alternativas.

II) Se analizan las pendientes

$$\text{pendiente de } z = -\frac{c_1}{c_2}$$

Como el óptimo es $R_2 \cap R_3$ saco las soluciones alternativas de la siguiente forma:

pendiente de z = pendiente de R_2 $\rightarrow$ solución alternativa

pendiente de z = pendiente de R_2 $\rightarrow$ solución alternativa

Luego:

$$-\frac{c_1'}{2} = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 4/3$$

$$-\frac{c_1'}{2} = \frac{-0}{1} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 0$$

Resulta que $\boxed{0 \leq c_1 \leq 4/3}$

Debe recordarse que:

- se estudian por separado las variaciones de c_1 y c_2
- si cambian los dos coeficientes simultaneamente, uno puede ser escrito en función del otro

				c_1' 4/3	2	0	0	0
	C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	0	x_3	1	0	0	1	-1/2	(1/2)
c_1'	4/3	x_1	3	1	0	0	1/2	-3/2
	2	x_2	6	0	1	0	0	1
			16	0	0	0	2/3	(0)
	0	x_5	2	0	0	2	-1	1
c_1'	4/3	x_1	6	1	0	3	-1	0
	2	x_2	4	0	1	-2	1	0
			16	0	0	0	2/3	0

Alternativo

En esta tabla se vuelven a calcular los límites de c_1'

$$\boxed{4/3 \leq c_1' \leq 2}$$

y así se continúa.

Con $c_1'' = 2$

				c_1''				
				2	2	0	0	0
	C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	0	x_5	2	0	0	2	-1	1
c_1''	2	x_1	6	1	0	3	-1	0
	2	x_2	4	0	1	-2	(1)	0
			20	0	0	2	(0)	0
	0	x_5	6	0	1	0	0	1
c_1''	2	x_1	10	1	1	1	0	0
	0	x_4	4	0	1	-2	1	0
			20	0	0	2	0	0

Alternativo

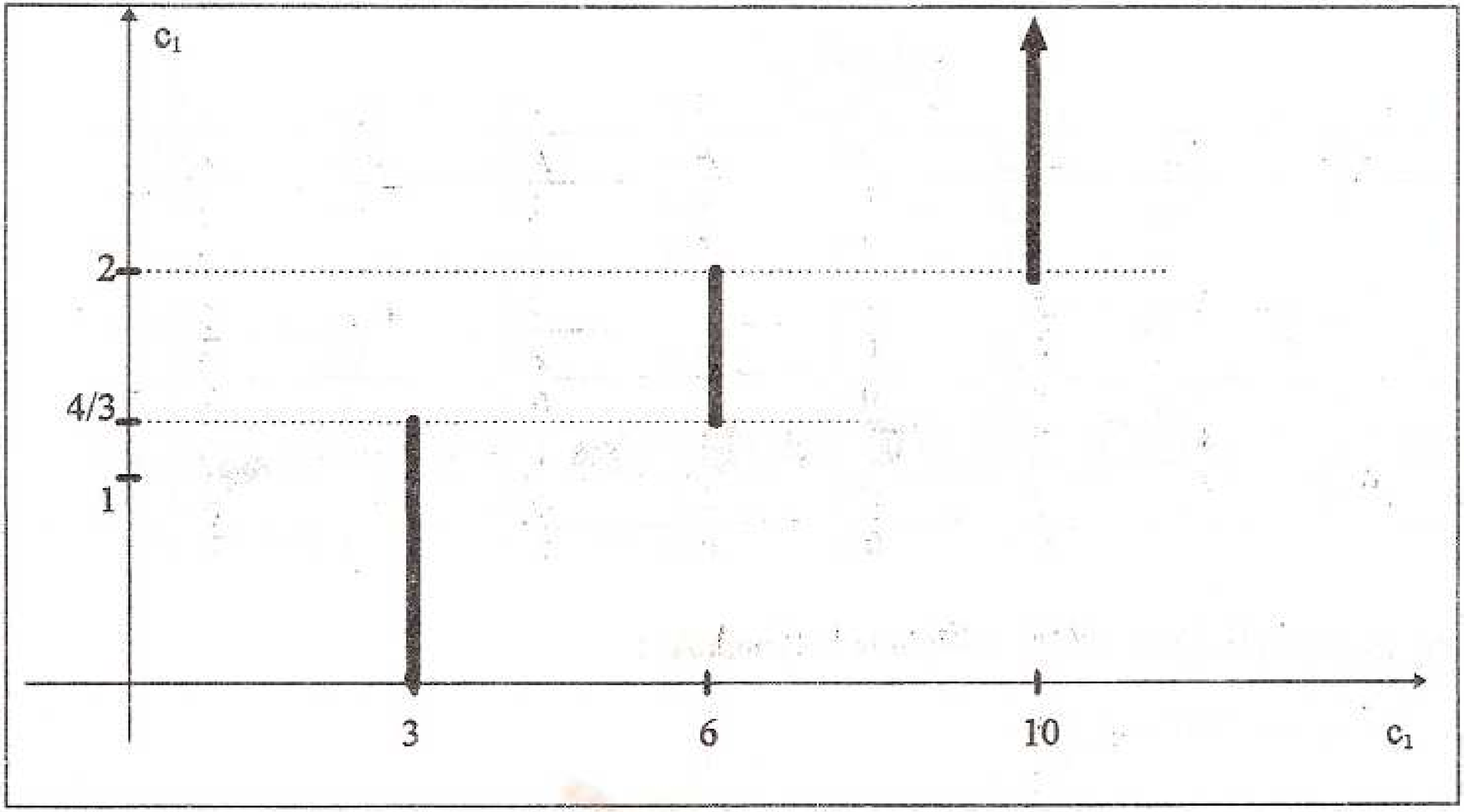
Los límites de c_1''

$$\boxed{4/3 \leq c_1'' \leq \text{no existen}}$$

Puede escribirse el siguiente cuadro:

c_1	x_1	x_2	punto óptimo	z
$0 \rightarrow 1$	3	6	B	$12 \rightarrow 15$
$1 \rightarrow 1$	3	6	B	$15 \rightarrow 16$
$4/3 \rightarrow 1$	6	4	$B \rightarrow D$	$16 \rightarrow 20$
$2 \rightarrow \infty$	10	0	D	$20 \rightarrow \infty$

Se construye la **Curva de Oferta**



CASO EN EL CUAL EL X_j NO SE FABRICA

Cuando las x_j no forman parte de la base, el c_j correspondiente sólo afecta al $z_j - c_j$ respectivo:

			c_j no se fabrica	
C	X	B	A_1	A_j
0	x_3			
0	x_4			
c_1	x_1		a_{ij}	
			$z_j - c_j$	

$$c_1 \; a_{ij} - c_j = z_j - c_j$$

Con un $c_j = c_j + \Delta$ se tendrá $z_j - c_j < 0$. Esto obligará a una nueva iteración para introducir el resultado en la base:

$$c_1 \; a_{ij} - (c_j + \Delta) < 0$$
$$c_1 \; a_{ij} - c_j - \Delta \quad < 0$$
$$z_j - c_j \quad - \Delta \quad < 0$$
$$\Rightarrow \quad \Delta > z_j - c_j$$

Cuando el incremento del c_j es **mayor** que el $z_j - c_j$, se introduce a este artículo en la base, pues puede hacerse una iteración.

Es decir, el valor del $z_j - c_j$ indica el aumento del coeficiente del funcional de la variable x_j (nula) que se necesita para que esta variable tome un valor $\neq 0$.

Por otra parte una disminución del coeficiente del funcional, correspondiente a una variable que no pertenece a la base óptima, no hará mas que mantenerla fuera de ella, pues el $z_j - c_j$ seguirá valiendo más que 0 y no se deberá iterar e introducirla en la base.

En el ejemplo

				c_1'' 2	2	0	0	0
	C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	0	x_5	2	0	0	2	-1	1
c_1''	2	x_1	6	1	0	3	-1	0
	2	x_2	4	0	1	-2	(1)	0
			20	0	0	2	(0)	0
	0	x_5	6	0	1	0	0	1
c_1''	2	x_1	10	1	1	1	0	0
	0	x_4	4	0	1	-2	1	0
			20	0	0	2	0	0

el artículo x_2 (artículo 2) no se fabrica. En la columna A_2 :

$$0 + 2 \times 1 + 0 - c_2' < 0$$
$$c_2' > 2$$

pero $c_2' = c_2' + \Delta$. Entonces

$$0 + 2 \times 1 + 0 - (c_2 + \Delta) < 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta > 2 - c_2$$

En el ejemplo:

			c_j: 4	c_2: 3	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	6	0	-1	1	0	-1
0	x_4	4	0	-2	0	1	-1
4	x_1	2	1	2	0	0	1
		8	0	5	0	0	4
			y_4	$z_j - c_j$ y_5	y_1	y_2	y_3

En este ejemplo x_2 no se fabrica.

$$4 \times 2 - c_2 = 5$$

Para poder hacer una iteración se necesita tener un c_2' tal que:

$$4 \times 2 - c_2' < 0$$

$$4 \times 2 - (c_2' + \Delta) < 0$$

$$4 \times 2 - c_2' + \Delta < 0$$

$$\Rightarrow \Delta > 5$$

VARIACIONES DE LOS b_i

Las variaciones de los b_i, producen desplazamientos paralelos de la recta correspondiente a esa restricción.

El estudio, análogo al de las variaciones de los c_j, se hace en el Dual.

Además:

$$A\,X = B$$

con $\quad X \geq 0\,,\; X = A^{-1}\,B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}\,B \geq 0$

En el problema (citado como ejemplo al comienzo del tema):

$$\begin{aligned} x_1 + \, x_2 &\leq 10 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 &\leq 24 \\ x_2 &= 6 \end{aligned}$$

$Z = x_1 + 2\,x_2 \quad$ **Máximo con** $x_j \geq 0 \;\; \forall j$

con las ecuaciones:

$$
\begin{array}{rrrrrcl}
x_1 & + \; x_2 & + \; x_3 & & & = & 10 \\
2\,x_1 & + \; 3\,x_2 & & + \; x_4 & & = & 24 \\
 & x_2 & & & + \; x_5 & = & 6
\end{array}
$$

$$Z = x_1 + 2\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 \quad \text{Máximo}$$

Como:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Debe cumplirse que

$$
\begin{array}{c|l}
 & \left.\begin{matrix} 10 \\ 24 \\ 6 \end{matrix}\right\} B \\
\hline
A^{-1} & X \geq 0
\end{array}
$$

Al variar cada b_i :

$$\begin{array}{c|l} & b_1 \\ & 24 \\ & \;\;6 \\ \hline A^{-1} & b_1 - 9 \geq 0 \end{array}$$

$$b_1 \geq 9$$

$$\begin{array}{c|l} & 10 \\ & b_2 \\ & \;\;6 \\ \hline A^{-1} & 13 - b_2 \geq 0 \\ & b_2 / 2 - 9 \geq 0 \end{array}$$

$$18 \leq b_2 \leq 26$$

$$
\begin{array}{c|l}
 & 10 \\
 & 24 \\
 & b_3 \\
\hline
A^{-1} & -2 + b_3 / 2 \geq 0 \\
 & 12 + 3/2\, b_3 \geq 0 \\
 & b_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$4 \leq b_3 \leq 8$$

Si se quita una unidad, $b_3 = 5$

En la tabla óptima del Dual:

			b_1	b_2	b_3		
			10	24	6	0	0
B	Y	C	A_1^t	A_2^t	A_3^t	A_4^t	A_5^t
24	y_2	1/2	1/2	1	0	-1/2	0
$b_3 = 6$	y_3	1/2	-1/2	0	1	3/2	-1
		29/2	-1/2	0	0	-9/2	-5
			$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_1$	$-x_2$

Al hacer $b_3 = 5$, el último renglón queda:

29/2	-1/2	0	0	-9/2	-5

La tabla sigue siendo óptima, pero el funcional disminuyó:

$$\Delta z = 15 - 29/2 = 1/2$$

Además $y_3 = 1/2$, que es el valor marginal del recurso 3.

$$\frac{\Delta z}{\Delta b_i} = \frac{1/2}{1} = 1/2 = y_3$$

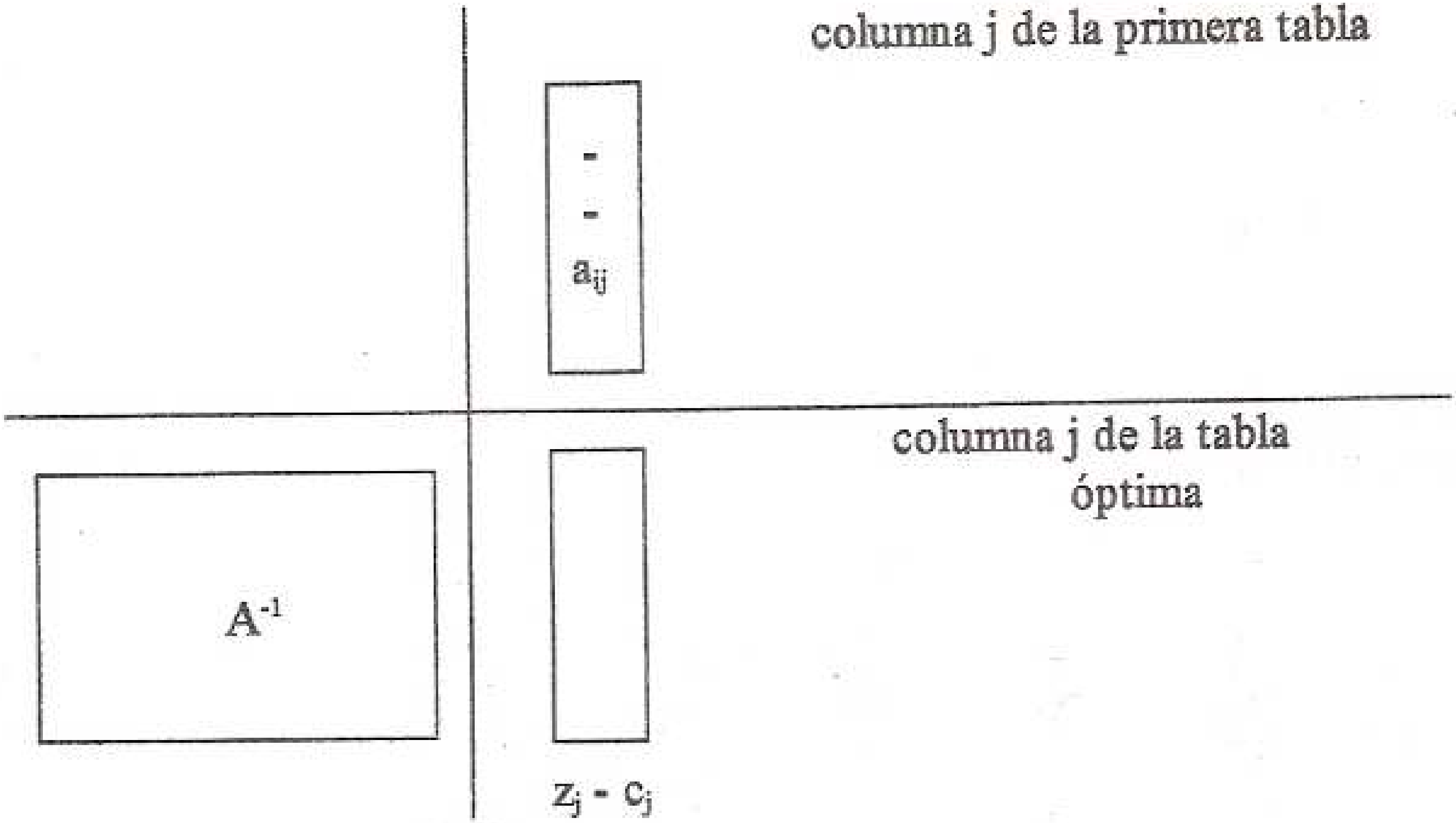
El valor marginal es la pendiente del funcional.
Los límites de b_3 dentro de los cuales permanece la tabla óptima del Dual son:

$$24 \times 1/2 - b_3 \; 1/2 - 10 \leq 0 \qquad 4 \leq b_3$$
$$24 \times (-1/2) - b_3 \; 3/2 \leq 0 \qquad b_3 \leq 8$$
$$- b_3 \leq 0 \qquad b_3 \geq 0$$

Resulta así: $4 \leq b_3 \leq 8$

VARIACION DE LOS COEFICIENTES a_{ij}
COEFICIENTES TECNOLÓGICOS

Continuamos usando como ejemplo el problema tratado en el ítem anterior



				columna 1 de la primera tabla
				1
				2
				a_{ij}
c_k				
0	1	-1/2	1/2	$a_{ij} / 2$
1	0	1/2	-3/2	$1 - 3/2\ a_{ij}$
2	0	0	1	a_{ij}

El $z_j - c_j$ debe ser mayor que cero para que la tabla siga siendo óptima:

$$0\ (a_{ij} / 2) + 1\ (1 - 3/2\ a_{ij}) + 2\ a_{ij} - 1 \geq 0$$

$$a_{ij} \geq 0$$

VARIACIONES GRÁFICAS

Problema:

Variar graficamente la restricción entre cero e infinito. Graficar las variaciones del funcional, de las variables reales, de las slack y el valor marginal de dicha restricción en el siguiente problema:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 \leq 10 & & R_1 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 24 & & R_2 \\ x_2 \leq 6 & & R_3 \\ x_1 + x_2 \geq 4 & & R_4 \end{array}$$

$$Z = 4\,x_1 + 5\,x_2 \quad \text{Máximo con} \quad x_j \geq 0 \quad \forall\, j$$

Quedan las ecuaciones:

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 + x_2 + x_3 & & & & & = & 10 \\
2x_1 + 3x_2 & + x_4 & & & & = & 24 \\
x_2 & & + x_5 & & & = & 6 \\
x_1 + x_2 & & & + x_6 & + \mu & = & 4
\end{array}
$$

$$Z = 4x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - M\mu \qquad \text{Máximo}$$

El convexo de soluciones factibles es ABCDEF (ver gráfico)

$A = (0, 4) = x_1 \cap R_4$

$B = (0, 6) = x_1 \cap R_3$

$C = (3, 6) = R_2 \cap R_3$

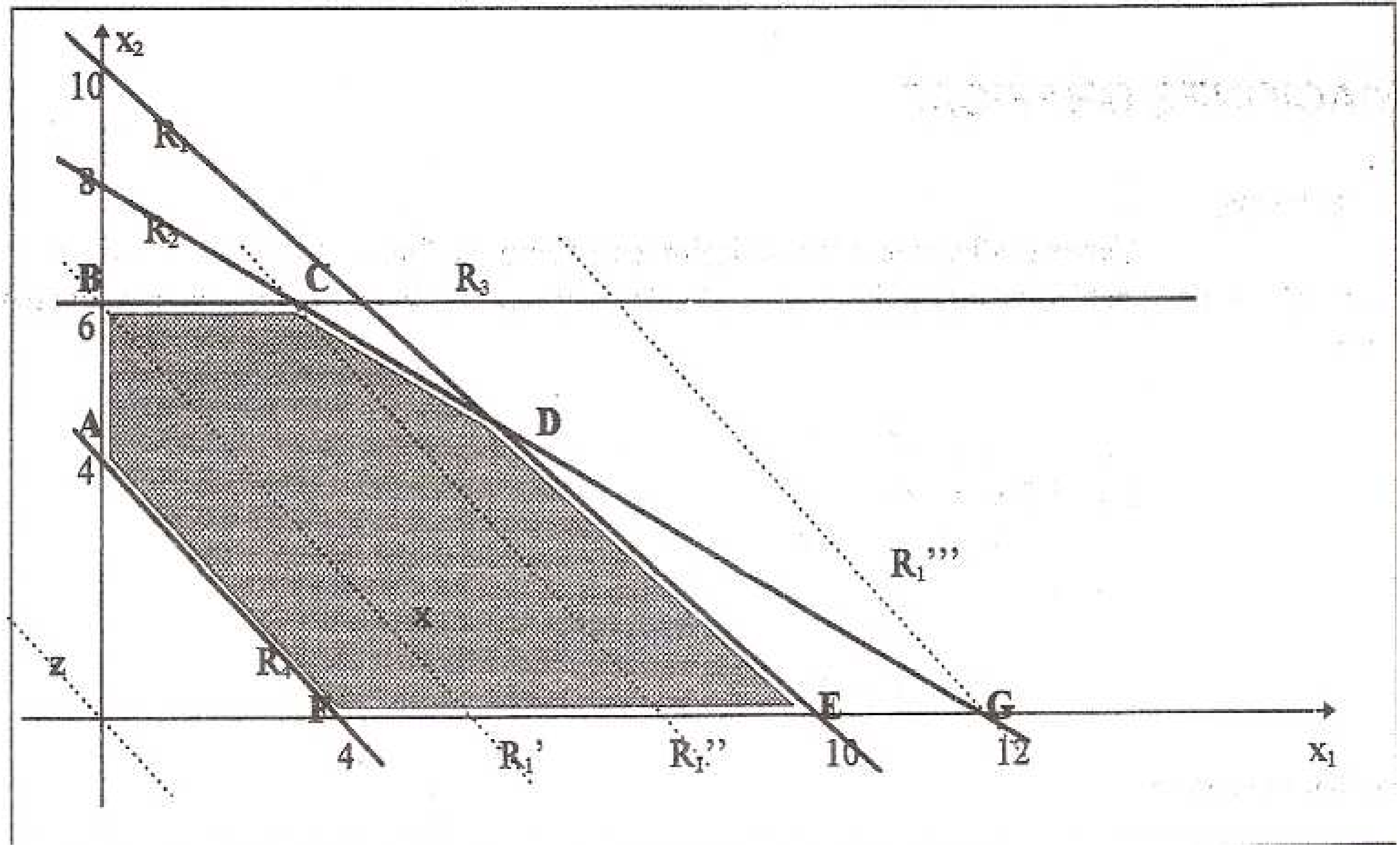
$D = (6, 4) = R_1 \cap R_2$ punto óptimo

$E = (10, 0) = x_2 \cap R_1$

$F = (4, 0) = x_2 \cap R_4$

$$D = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6, 4, 0, 0, 2, 6)$$

con $z = 44$



x_2
10
R_1
8
R_2
B
C
R_3
6
A
D
4
R_1'''
x
z
R_4
F
E
G
4
R_1'
R_1''
10
12
x_1

I) Si $b_1 < 4$, el polígono es vacío, pues la restricción determina una incompatibilidad.

con:

$b_1 = 0$, la R_1 pasa por el origen 0

con:

$b_1 = 4$, la R_1 pasa por AF , o sea el polígono de soluciones se reduce al segmento AF. Entonces, la solución óptima es el vértice A

II) Cuando R_1 pasa por AF coincide con R_4.

Se desplaza a R_1 paralelamente a sí misma hasta que $b_1 = 6$

Resulta entonces la recta R_1', que pasa por el vértice B.

El óptimo se desplaza por $x_2 \cap R_1$, desde A hasta B.

El vértice $B = x_2 \cap R_1' \cap R_3$ y el intervalo es

$$4 \leq b_1 \leq 6$$

III) Se desplaza R_1 hasta R_1''

R_1 pasa por el vértice C.

El punto óptimo está en $x_1 \cap R_3$

En el vértice C aparece otro degeneramiento, pues se cruzan

$$R_1'' \cap R_2 \cap R_3$$

El intervalo es

$$6 \leq b_1 \leq 9$$

IV) En el intervalo

$$9 \leq b_1 \leq 12$$

R_1 se desplaza y el óptimo se forma con las: $R_1 \cap R_2$

El óptimo se desplaza desde C hasta $G = x_1 \cap R_2 \cap R_1'''$

El punto D no es límite del intervalo.

V) En el intervalo

$$12 \leq b_1 \leq \infty$$

R_1 se sigue desplazando pero ya no forma el polígono de soluciones. El punto óptimo sigue en $G = R_2 \cap x_1$

El siguiente cuadro resume todo lo hecho:

b_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	Punto óptimo	z
$0 \to 4$	incompatible								
4	0	4	0	12	2	0	$10/2 = 5$	A	20
6	0	6	0	6	0	2	$12/3 = 4$	B	30
9	3	6	0	0	0	5	$6/3 = 2$	C	42
12	12	0	0	0	6	8	$0/(b_1 - 12) = 0$	G	48
$12 \to \infty$	12	0	$b_1 - 12$	0	6	8	$0/(b_1 - 12) = 0$	G	48