PRUEBAS ESTADÍSTICAS PARA LOS NÚMEROS PSEUDOALETORIOS

Carrera: Ingeniería en Sistemas de Información

CATEDRA: **SIMULACIÓN**

DOCENTES:

Ing. Carlos Adrián Vecchi
Ing. Dominga Concepción Aquino
Auxiliar Gabriela Dos Santos
Auxiliar Simón Leonardo Figueroa

AÑO 2020

UTN-FRRE

Pruebas Estadísticas para los números pseudoaleatorios

Estas pruebas estadísticas se utilizan para validar si los números de un conjunto r_i son aptos para ser utilizados en un estudio de simulación.

Enunciado de otra manera, el objetivo es validar que el conjunto de números r_i realmente está conformado por números aleatorios.

Prueba de Medias

Una de las propiedades que deben cumplir los números del conjunto r_i es que el valor esperado sea igual a 0,5. Para ello se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: \mu_{r_i} = 0{,}5$$

$$H_1: \mu_{r_i} \neq 0{,}5$$

El **primer paso** consiste en calcular el promedio de los **n** números que contiene el conjunto r_i utilizando la siguiente ecuación:

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$$

Donde **n** es la cantidad total de números pseudoaleatorios dados, y r_i es cada número pseudo aleatorio del conjunto de números r_i

<u>Ejercicio propuesto</u>: Dado los siguientes 10 números del conjunto r_i determine si cumplen las cuatro propiedades de los números pseudoaleatorios con un nivel de aceptación de 95% para cada una de las pruebas.

0,0069	0,3469	0,5958	0,6326	0,4421	0,1496	0,2018	0,1486	0,4553	0,2949

Para el ejercicio la media aritmética es:

$$\bar{r} = 0{,}3275$$

El **segundo paso** es calcular los límites de aceptación inferior y superior por medio de las siguientes ecuaciones:

$$LI_{\bar{r}} = \frac{1}{2} - z_{\alpha/2}\left(\frac{1}{\sqrt{12n}}\right)$$

$$LS_{\bar{r}} = \frac{1}{2} + z_{\alpha/2}\left(\frac{1}{\sqrt{12n}}\right)$$

En el ejercicio propuesto se tiene el nivel de aceptación expresado en porcentajes, por lo tanto, se debe pasar primero a un valor numérico (en el ejercicio 95% pasa a ser 0,95) y luego se calcula α de la siguiente manera:

$$\alpha = 1 - nivel\ de\ aceptación\ numérico$$

En este ejercicio:

$$\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

En las ecuaciones de los límites de aceptación se utiliza el valor $z_{\alpha/2}$ que se obtiene de la **tabla de Distribución Normal Estándar**. Para obtener este valor se debe hacer lo siguiente:

1°) Se necesita $z_{\alpha/2}$, por lo tanto, se debe dividir por 2 el valor α, en el ejercicio propuesto es: $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$.

2°) Luego se debe restar a 1 el valor $\frac{\alpha}{2}$. Para este caso es: $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$

3°) Se busca el valor 0,975 en el **cuerpo** de la **tabla de distribución Normal Estándar**, y se escribe el valor que resulta de sumar el valor de la Fila más el valor de la Columna donde se encontraba el número buscado.

En este ejercicio resulta:

Z	0	…	0,06	…	0,09
0,00	0,5000				0,5359
…					
1,90			0,9750		
…					
4,00	1,0000				1,0000

Haciendo la intersección se obtiene: 1,90+0,06=1,96

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

Entonces:

$$LI_{\bar{r}} = \frac{1}{2} - z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{12n}}\right) = \frac{1}{2} - 1{,}96\left(\frac{1}{\sqrt{12 * 10}}\right) = 0{,}3211$$

$$LS_{\bar{r}} = \frac{1}{2} + z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{12n}}\right) = \frac{1}{2} + 1{,}96\left(\frac{1}{\sqrt{12 * 10}}\right) = 0{,}6789$$

Finalmente, como **tercer paso** se debe comparar si la media aritmética está dentro de los límites de aceptación calculados.

$$LI_{\bar{r}} \leq \bar{r} \leq LS_{\bar{r}}$$

Si el valor de $\bar{r}$ se encuentra entre los límites de aceptación, se concluye que **no se puede rechazar** que el conjunto r_i tiene un valor esperado de 0,5 con un nivel de aceptación de $1-\alpha$. En caso contrario se rechaza que el conjunto r_i tiene un valor esperado de 0,5 y ya no es necesario continuar con las otras pruebas.

Como en el ejercicio propuesto el valor de $\bar{r} = 0{,}3275$ está dentro de los límites de aceptación $0{,}3211 \leq 0{,}3275 \leq 0{,}6789$ se concluye, que **no se puede rechazar** que el conjunto r_i tiene un valor esperado de 0,5 con un nivel de aceptación de 95%. Por lo tanto, se puede continuar con la aplicación de la siguiente prueba.

Prueba de Varianza

En esta prueba se debe demostrar que el conjunto de números r_i tenga una varianza de 1/12. Para ello se establecen las siguientes hipótesis:

$$H_0: {\sigma_{r_i}}^2 = 1/12$$

$$H_1: {\sigma_{r_i}}^2 \neq 1/12$$

El **primer paso** es calcular la varianza del conjunto de números r_i utilizando la siguiente ecuación:

$$V(r) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2}{n-1}$$

En el ejercicio propuesto la varianza del conjunto de números r_i es:

$$V(r) = 0{,}0420$$

Ahora el **segundo paso** consiste en calcular los límites de aceptación inferior y superior con las siguientes ecuaciones:

$$LI_{V(r)} = \frac{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}{12(n-1)}$$

$$LS_{V(r)} = \frac{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}{12(n-1)}$$

En las ecuaciones de los límites de aceptación se utilizan dos valores que se obtienen de buscar en la **tabla de Chi-Cuadrada**. Para ello se necesita el valor α que se calcula de la misma forma que en la prueba de medias (donde $\alpha = 0{,}05$).

Son dos los valores que debemos buscar de tabla de Chi-Cuadrado. Ahora el proceso de búsqueda es inverso, es decir, se parte de los valores de la columna y de la fila, y se busca el valor de la intersección.

Para $\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}$ que en el ejercicio propuesto es $\chi^2_{0,975;9}$ se obtiene:

V\P	0,55	…	0,975	…	0,999
1	0,3573				0,0000
…					
9			2,7004		
…					
29	27,4025				10,9861

Y para $\chi^2_{\alpha/2;n-1}$ que en el ejercicio propuesto es $\chi^2_{0,025;9}$ se obtiene:

V\P	0,001	…	0,025	…	0,5
1	10,8274				0,4549
…					
9			19,0228		
…					
29	58,3006				28,3361

Aclaración importante: a tener en cuenta en ambas expresiones $\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}$ y $\chi^2_{\alpha/2;n-1}$ el exponente "al cuadrado" que está sobre la letra griega χ (chi), no influye en el resultado, es decir, que NO se debe calcular en ningún momento el cuadrado de algún número, es solo el nombre.

Luego, reemplazando los valores encontrados en los límites de aceptación se obtiene:

$$LI_{V(r)} = \frac{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}{12(n-1)} = \frac{\chi^2_{0,975;9}}{12(n-1)} = \frac{2{,}7004}{12*9} = 0{,}0250$$

$$LS_{V(r)} = \frac{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}{12(n-1)} = \frac{\chi^2_{0,025;9}}{12(n-1)} = \frac{19{,}0228}{12*9} = 0{,}1761$$

El **tercer paso** es verificar si la varianza calculada se encuentra dentro de los límites de aceptación calculados anteriormente $LI_{V(r)} \leq V(r) \leq LS_{V(r)}$.

Si el valor de $V(r)$ se encuentra entre los límites de aceptación, se dice que **no se puede rechazar** que el conjunto r_i tiene una varianza de 1/12, con un nivel de aceptación de $1-\alpha$. En caso contrario, se rechaza que el conjunto r_i tiene una varianza de 1/12.

Como en el ejercicio propuesto el valor de $V(r) = 0{,}0420$ está dentro de los límites de aceptación $0{,}0250 \leq 0{,}0420 \leq 0{,}1761$ se concluye, que **no se puede rechazar** que el conjunto r_i tiene una varianza de 1/12, con un nivel de aceptación de 95%. Por lo tanto, se puede continuar con la aplicación de la siguiente prueba.

Pruebas de Uniformidad

Una de las propiedades más importantes que debe cumplir un conjunto de números r_i es la uniformidad. Para comprobar que el conjunto de números cumple con esta propiedad se desarrollaron pruebas estadísticas tales como las pruebas Chi-cuadrada y las de kolmogorov-Smirnov.

Sólo es necesario aplicar una de las pruebas para evaluar el conjunto de números r_i.

Se formula las siguientes hipótesis:

H_0: $r_i \sim U(0,1)$

H_1: r_i no son uniformes

Prueba de Chi-Cuadrada

Esta prueba busca determinar si los números del conjunto r_i se distribuyen uniformemente en el intervalo (0,1).

Primer Paso: este método se basa en obtener las frecuencias de los valores dentro de un intervalo, entonces el primer paso es dividir al conjunto de números r_i en intervalos fijos.

Todos los números que se generan se encuentran entre 0 y 1, y para calcular la cantidad de intervalos "**m**" se debe utilizar la siguiente fórmula:

$$m = \sqrt{n}$$

Si el resultado del cálculo anterior es un número decimal, entonces se tiene que **redondear para arriba**. En este ejercicio será:

$$m = \sqrt{10} = 3{,}1622 \Rightarrow m = 4$$

Segundo paso: calcular el estadístico

$$\chi_o^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}$$

¿Qué es $\boldsymbol{E_i}$? Es la **Frecuencia Esperada**, y se calcula de la siguiente forma: $E_i = \frac{n}{m}$

Para este ejemplo:

$$E_i = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

¿Qué es $\boldsymbol{O_i}$? Es la **Frecuencia Observada**, este valor no se calcula con una fórmula, sino que se obtiene de contar la cantidad de números pseudoaleatorios que caen dentro de cada intervalo.

Para poder facilitar el cálculo del estadístico χ_o^2 se recomienda construir una tabla de la siguiente forma:

Intervalo	O_i	E_i	$(E_i - O_i)^2/E_i$
0,0000-0,…			
…			
0,…-0,9999			

- La primera columna "**Intervalo**" corresponde a los **m** subintervalos calculados previamente.
- La segunda columna "$\boldsymbol{O_i}$" es la frecuencia observada de cada intervalo.
- La tercera columna "$\boldsymbol{E_i}$" es la frecuencia esperada, que al ser una fórmula es la misma para todos los intervalos.
- La cuarta columna es para calcular cada uno de los términos que luego se sumarán para obtener el estadístico.

Para el ejercicio propuesto:

0,0069	0,3469	0,5958	0,6326	0,4421	0,1496	0,2018	0,1486	0,4553	0,2949

Se obtiene la siguiente tabla:

Intervalo	O_i	E_i	$(E_i - O_i)^2/E_i$
0,0000-0,2499	4	2,5	0,9
0,2500-0,4999	4	2,5	0,9
0,5000-0,7499	2	2,5	0,1
0,7500-0,9999	0	2,5	2,5

Como se puede observar se dividió al conjunto en 4 subintervalos (m=4), y los intervalos de la tabla de arriba, van de a 0,25 (que corresponde a 1 divido 4).

Hay que tener cuidado con el cálculo de la frecuencia observada, aunque no parezca suele resultar complicado contar los números visualmente, una buena práctica es marcar los números ya contados para evitar contarlo varias veces al mismo, o que por accidente alguno no sea tenido en cuenta al contar.

Ahora se calcula el estadístico:

$$\chi_o^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i} = 4{,}4$$

En el último y **tercer paso** se tiene que calcular el valor de tabla $\chi^2_{\alpha;m-1}$ usando la **tabla de Chi-Cuadrada** de la misma forma que en la prueba de varianza:

Como α=0,05 y m=4, entonces m-1=3 por lo tanto en la tabla se busca el valor de $\chi^2_{0,05;3}$

V\P	0,001	…	0,05	…	0,5
1	10,8274				0,4549
…					
3			7,8147		
…					
29	58,3006				28,3361

Finalmente se compara, si $\chi_o^2 < \chi^2_{0,05;3}$ entonces **no se puede rechazar** que el conjunto de números r_i sigue una distribución uniforme, en caso contrario, se rechaza que el conjunto de números r_i sigue una distribución uniforme.

Como $\chi_o^2 = 4{,}4$ es menor que $\chi^2_{0,05;3}$=7,8147 entonces **no se puede rechazar** que el conjunto de números r_i sigue una distribución uniforme.

Para el ejercicio propuesto se cumple con la propiedad de uniformidad, por lo tanto, se puede continuar con la siguiente prueba, que es la de independencia.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov

Al igual que la prueba de Chi-Cuadrada es una prueba estadística que sirve para determinar si un conjunto de números r_i cumple con la propiedad de uniformidad. Como se llevan a cabo más cálculos, es recomendable aplicarlo en conjunto de números r_i pequeños, menores o iguales a 20.

Los pasos a seguir son los siguientes:

Primer Paso: ordenar de menor a mayor el conjunto de números r_i.

Para el ejercicio propuesto, el conjunto original es:

0,0069	0,3469	0,5958	0,6326	0,4421	0,1496	0,2018	0,1486	0,4553	0,2949

Y ordenado de menor a mayor queda:

0,0069	0,1486	0,1496	0,2018	0,2949	0,3469	0,4421	0,4553	0,5958	0,6326

Al igual que en la prueba de chi-cuadrado este paso puede resultar complicado, también es recomendable ir marcando a los números ya ordenados para evitar errores que suele ser muy común.

Segundo Paso: calcular los valores de D^+, D^- y D con las siguientes ecuaciones:

$$D^+ = \max_{1<i<n} \left\{ \frac{1}{i} - r_i \right\}$$

$$D^- = \max_{1<i<n} \left\{ r_i - \frac{i-1}{n} \right\}$$

$$D = \max\{D^+; D^-\}$$

De la misma forma que en la prueba de Chi-Cuadrada lo mejor que se puede hacer, para guiarse y no perderse con los cálculos, es armar una tabla en donde se llevarán a cabo cada uno de los cálculos de cada parte de las ecuaciones para los valores de *D*.

i	1	…	i	…	n
$\frac{i}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{i}{n}$	…	$\frac{n}{n}$
r_i (ordenado)	r_1	…	r_i	…	r_n
$\frac{i}{n}$ - r_i	$\frac{1}{n} - r_1$	…	$\frac{i}{n}$ - r_i	…	$\frac{n}{n} - r_n$
$\frac{i-1}{n}$	$\frac{1-1}{n}$	…	$\frac{i-1}{n}$	…	$\frac{n-1}{n}$
$r_i - \left(\frac{i-1}{n}\right)$	$r_1 - \left(\frac{1-1}{n}\right)$	…	$r_i - \left(\frac{i-1}{n}\right)$	…	$r_n - \left(\frac{n-1}{n}\right)$

De esta forma calcular los valores de *D* es menos tedioso y mucho más sencillo de llevarlo a cabo.

La tabla del ejercicio propuesto donde n=10 es la siguiente.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\frac{i}{n}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
r_i (ordenado)	0,0069	0,1486	0,1496	0,2018	0,2949	0,3469	0,4421	0,4553	0,5958	0,6326
$\frac{i}{n}$ - r_i	0,0931	0,0514	0,1504	0,1982	0,2051	0,2531	0,2579	0,3447	0,3042	0,3674
$\frac{i-1}{n}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$r_i - \left(\frac{i-1}{n}\right)$	0,0069	0,0486	-0,0504	-0,0982	-0,1051	-0,1531	-0,1579	-0,2447	-0,2042	-0,2674

Ahora se procede a calcular los valores de *D*:

$$D^+ = 0{,}3674$$
$$D^- = 0{,}0486$$
$$D = 0{,}3674$$

Tercer Paso: ahora se busca en la tabla de Valores Críticos de Kolmogorov-Smirnov el valor crítico $D_{\alpha,n}$. Para el ejercicio propuesto resulta que $D_{0,05,10} = 0{,}410$.

Si el valor *D* es menor o igual a $D_{\alpha,n}$, entonces se dice que **no se ha detectado diferencia significativa** entre la distribución de los números del conjunto r_i y la distribución uniforme. En caso contrario, se concluye que los números del conjunto r_i no siguen una distribución uniforme.

Como $D = 0{,}3674$ es menor que $D_{0,05,10} = 0{,}410$ se concluye que **no se ha detectado diferencia significativa** entre la distribución de los números del conjunto r_i y la distribución uniforme.

Para el ejercicio propuesto se cumple con la propiedad de uniformidad, por lo tanto, se puede continuar con la siguiente prueba, que es la de independencia.

Pruebas de Independencia

Es necesario recordar que las dos propiedades más importantes que deben satisfacer un conjunto de números r_i son uniformidad e independencia.

Existen varias pruebas, sin embargo, solamente se estudiarán dos en este documento. De la misma forma que sucedía con las pruebas estadísticas de la uniformidad, solamente es necesario aplicar una de las pruebas siguientes, si el conjunto de números r_i satisfacen la prueba, ese conjunto puede ser utilizado en un estudio de simulación.

Se formulan las siguientes hipótesis:

H_0: los números del conjunto r_i son independientes.
H_1: los números del conjunto r_i no son independientes.

Prueba de corridas arriba y abajo

Esta prueba estadística consiste en los siguientes pasos.

Primer Paso: armar la secuencia **S** compuesta de unos y ceros. Esta secuencia se construye de la siguiente forma.
Partiendo de un valor r_i:

- Si r_i es menor o igual a r_{i-1} (el r_i anterior) entonces s_i va a ser 0
- Caso contrario s_i va a ser 1.

Como siempre se pregunta por el valor anterior, el primer elemento (correspondiente a r_1) no se lo va a poder comparar porque no existe un número anterior, por lo tanto, la secuencia **S** va a tener **n-1** números.

En el ejercicio propuesto:

0,0069	0,3469	0,5958	0,6326	0,4421	0,1496	0,2018	0,1486	0,4553	0,2949

La secuencia **S** resultante es:

S={ 1 1 1 0 0 1 0 1 0 }

Se puede observar que la secuencia **S** tiene n-1 números, y que los 1 (unos) están remarcados, lo cual es una ayuda visual para el siguiente paso.

Segundo Paso: calcular el número de corridas observadas, C_o. Una corrida es una secuencia consecutiva de unos o ceros. En este paso se debe contar cada secuencia de ceros y unos que existen en **S**, sin importar el tamaño de las mismas (es decir, si la secuencia de ceros o unos tiene un solo elemento, ya es considerado una corrida de longitud uno). En este caso para el ejercicio propuesto el valor $C_o = 6$.

Tercer Paso: calcular el valor esperado μ_{Co}, la varianza del número de corridas ${\sigma_{Co}}^2$ y el estadístico z_o mediante las siguientes ecuaciones:

$$\mu_{Co} = \frac{2n-1}{3}$$

$$\sigma_{Co}{}^{2} = \frac{16n - 29}{90}$$

$$z_o = \left|\frac{C_o - \mu_{Co}}{\sigma_{Co}}\right|$$

<u>Aclaración importante</u>: en la ecuación de z_0 se usa σ_{Co} (el desvío estándar), en cambio, se calcula $\sigma_{Co}{}^{2}$ (la varianza), por lo tanto, se debe aplicar la raíz cuadrada a este último para que pueda ser utilizado.

Para el ejercicio propuesto:

$$\mu_{Co} = \frac{2n - 1}{3} = \frac{2 * 10 - 1}{3} = 6{,}3333$$

$$\sigma_{Co}{}^{2} = \frac{16n - 29}{90} = \frac{16 * 10 - 29}{90} = 1{,}4556$$

$$z_0 = \left|\frac{C_o - \mu_{Co}}{\sqrt{\sigma_{Co}{}^{2}}}\right| = \left|\frac{6 - 6{,}3333}{\sqrt{1{,}4556}}\right| = 0{,}2763$$

Cuarto Paso: se compara el estadístico z_0 con el valor crítico $z_{\alpha/2}$ de la tabla de Distribución Normal Estándar. Si $z_0 \leq z_{\alpha/2}$ entonces se concluye que **no se puede rechazar** que los números del conjunto r_i son independientes. En caso contrario, se concluye que los números del conjunto r_i no son independientes.

Como en el ejercicio propuesto $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ al compararlo con el estadístico $z_0 = 0{,}2763$, se concluye que los números del conjunto r_i son independientes. **Es decir, de acuerdo con esta prueba, los números son aptos para ser utilizados en un estudio de simulación**.

Prueba de corridas arriba y abajo de la media

Esta prueba estadística consiste en los siguientes pasos.

Primer Paso: armar la secuencia **S** compuesta de unos y ceros. Esta secuencia se construye de la siguiente forma:

- Si $r_i < 0{,}5$ entonces $s_i = 0$
- En caso contrario $s_i = 1$

La secuencia **S** tiene la misma cantidad de números que el conjunto de números r_i, es decir, posee **n** números debido a que cada r_i es comparado con 0,5.

En el ejercicio propuesto:

0,0069	0,3469	0,5958	0,6326	0,4421	0,1496	0,2018	0,1486	0,4553	0,2949

La secuencia **S** resultante es:

S= {0 0 1 1 0 0 0 0 0 0}

Se puede observar que la secuencia **S** tiene **n** números, y que los 1 (unos) están remarcados, lo cual es una ayuda visual para el siguiente paso.

Segundo Paso: calcular el número de corridas observadas, C_o. Una corrida es una secuencia consecutiva de unos o ceros. En este paso se debe contar cada secuencia de ceros y unos que existen en **S**, sin importar el tamaño de las mismas (es decir, si la secuencia de ceros o unos tiene un solo elemento, ya es considerado una corrida de longitud uno). En este caso para el ejercicio propuesto el valor $C_o = 3$.

También se calculan los valores de n_0 y n_1, donde n_0 es igual a la cantidad de ceros que hay en la secuencia **S**, y n_1 es igual a la cantidad de unos que hay en dicha secuencia, cumpliéndose que $n_0 + n_1 =$ **n**. Para el ejercicio propuesto el valor de $n_0 = 8$ y $n_1= 2$, por lo tanto 8+2=10.

Tercer Paso: calcular el valor esperado μ_{Co}, la varianza del número de corridas ${\sigma_{Co}}^2$ y el estadístico z_o mediante las siguientes ecuaciones:

$$\mu_{Co} = \frac{2n_0n_1}{n} + \frac{1}{2}$$

$${\sigma_{Co}}^2 = \frac{2n_0n_1(2n_0n_1 - n)}{n^2(n-1)}$$

$$z_0 = \frac{C_o - \mu_{Co}}{\sigma_{Co}}$$

<u>Aclaración importante</u>: en la ecuación de z_0 se usa σ_{Co} (el desvío estándar), en cambio, se calcula ${\sigma_{Co}}^2$ (la varianza), por lo tanto, se debe aplicar la raíz cuadrada a este último para que pueda ser utilizado, y también hay que tener en cuenta que ya no posee las barras de valor absoluto, por lo tanto se puede obtener un valor negativo.

Para el ejercicio propuesto:

$$n_0 = 8$$

$$n_1 = 2$$

$$\mu_{Co} = \frac{2n_0n_1}{n} + \frac{1}{2} = \frac{2*8*2}{10} + \frac{1}{2} = 3{,}7$$

$${\sigma_{Co}}^2 = \frac{2n_0n_1(2n_0n_1 - n)}{n^2(n-1)} = \frac{2*8*2(2*8*2-10)}{10^2(10-1)} = 0{,}7822$$

$$z_0 = \frac{C_o - \mu_{Co}}{\sqrt{{\sigma_{Co}}^2}} = \frac{3 - 3{,}7}{\sqrt{0{,}7822}} = -0{,}7915$$

Cuarto Paso: obtener el valor crítico $z_{\alpha/2}$, de la tabla de Distribución Normal Estándar. Si el estadístico z_0 está dentro del intervalo $-z_{\alpha/2} \leq z_0 \leq z_{\alpha/2}$ se concluye que **no se puede rechazar** que el conjunto r_i es independiente. En caso contrario, se concluye que los números del conjunto r_i no son independientes.

En el ejercicio propuesto el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y como el estadístico $z_0 = -0{,}7915$ cae dentro del intervalo $-1{,}96 \leq -0{,}7915 \leq 1{,}96$ se concluye que los números del conjunto r_i son independientes. **Es decir, de acuerdo con esta prueba, los números son aptos para ser utilizados en un estudio de simulación.**