log(3)

Fractales

Un universo poco frecuentado

Lina Mónica María Oviedo
Ana María Kanashiro
Mauro Alexis Colombini

UNIVERSIDAD NACIONAL
DEL LITORAL

Un acercamiento a los fractales

Introducción

Desde siempre, el currículo escolar presenta a la matemática como una ciencia ya hecha, ya construida, en la que nada queda por hacer, salvo estudiarla, y los alumnos piensan que la matemática se acabó con Euclides, con Pitágoras... Cuán lejos se está de esta idea.

La matemática es una ciencia que ha evolucionado, es una disciplina dinámica y, como tal, hay que enseñarla. El campo de los fractales y su relación con los sistemas dinámicos discretos es un área de investigación importante en matemática que exhibe la particularidad de ser accesible para los no matemáticos.

Esta obra está pensada para trabajar los temas relativos a fractales desde la práctica. En la misma se presentan una serie hojas de trabajo en donde las nociones o conocimientos previos necesarios para progresar en el tema se introducen en el momento que se considera necesario. Cada una de las actividades propuestas puede trabajarse en el aula al abordar el tema fractales o, de manera parcial, al emprender otros temas con los cuales esté relacionado.

Esta propuesta persigue los siguientes propósitos:

Que el lector, a partir de la construcción de los fractales, sea capaz de:

- Analizar la variación de la figura fractal en cada etapa de su construcción.
- Estudiar cómo varían algunas de las propiedades de la figura.
- Encontrar expresiones de dichas propiedades en la etapa enésima de la construcción.
- Concluir acerca del comportamiento para n grande, donde n es el número de la etapa.
- Descubrir el concepto de autosemejanza.
- Encontrar la dimensión fractal.
- Tomar contacto con determinadas curiosidades relativas a fractales como ser: el juego del caos, el helecho Barnsley, etc.

Bibliografía recomendada

Con respecto al tratamiento del tema fractales, en la enseñanza media, existe una bibliografía muy rica e importante de la cual destacamos dos libros fundamentales: *Chaos, fractals and Dynamics. Computer Experiments in Mathematics*, Addison

Wesley (1990), de Robert Devaney y *Fractals for the classroom. Strategic Activities.* Vol. 1, Springer, Verlag (1991) de Peitgen, Maletsky y otros. Desafortunadamente ambos no han sido traducidos al español.

De la bibliografía en español destacamos *El jardín de los fractales*. Red Olímpica (1995) de Néstor Aguilera.

Nociones previas

En nuestra actividad diaria nos encontramos con palabras tales como sistemas dinámicos y caos. Esta última es una palabra que ha cobrado vigencia en los últimos años. Ahora bien ¿qué es el caos?

Según el diccionario, Caos (Del lat. *chaos*, y éste del gr. χαοσ, abertura) es:

1. m. Estado amorfo e indefinido que se supone anterior a la ordenación del comos.
2. m. Confusión, desorden.
3. m. Fís. y Mat. Comportamiento aparentemente errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos, aunque su formulación matemática sea en principio determinista.

Según la Conferencia Internacional sobre Caos, Londres 1986, el caos es: *el comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinista*.

Recordemos que el comportamiento determinista es aquel que está regido por leyes exactas e inamovibles; en cambio, el comportamiento estocástico lo está por el azar.

Luego podríamos decir que el Caos es: *el comportamiento sin ley gobernado completamente por la ley.*

En lo referente a los **sistemas dinámicos**, podemos decir que éstos son aquellos que evolucionan con el tiempo. Un sistema dinámico es un conjunto de variables dependientes del tiempo que se denominan variables de estado, más una regla que permite determinar (sin ambigüedades) el estado del sistema (que puede ser pasado, presente o futuro) en términos de un estado especificado en cierto momento t_0.

El objetivo de la teoría de los mismos es el estudio del comportamiento a largo plazo o *comportamiento asintótico* de un sistema que depende del tiempo. Por ejemplo, el comportamiento de la población de una especie en una determinada situación de estudio.

Así cuando el sistema dinámico es una **ecuación diferencial** cuya variable independiente es el tiempo, se pretende predecir el comportamiento de las soluciones en un futuro remoto ($\tau \to \infty$) o ver qué sucedió en un pasado distante ($\tau \to -\infty$). Este estudio de comportamiento asintótico es abordado por la teoría clásica de estabilidad en sistemas de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, cuando la situación a estudiar ocurre en tiempos determinados en vez de continuamente, el modelo que se adopta es el de un sistema dinámico discreto a través de una ecuación en diferencias finitas o simplemente una ecuación en diferencias.

Ahora bien, usted se estará preguntando qué relación existe entre el caos, los sistemas dinámicos y los objetivos de este libro. Ian Stewart (2001) manifiesta:

> *"Durante los años setenta cuando ambos, caos y fractales, estaban en su infancia, no parecían estar relacionados. Pero son primos matemáticos. Ambos se aferran a la estructura de la irregularidad. En los dos, la imaginación es lo más importante. Pero en el caos, la geometría está subordinada a la dinámica, mientras que en los fractales domina la geometría. Los fractales nos presentan un nuevo lenguaje con el que describir la forma del caos".*

¿Qué son los fractales?

El término fractal está relacionado con la palabra *fractus* que significa roto o no entero. Este término es atribuible a Benoit Mandelbrot quien lo empleó para definir ciertos conjuntos de números que describen objetos con dimensión fraccionaria. Para ello tuvo en cuenta la obra de Julia, Fatou, Hausdorff y Lebesgue.

> *"Mandelbrot inventó el término* fractal *para describir un tipo de objeto geométrico muy diferente: uno que siga manifestando una textura detallada en un gran rango de escalas. En verdad, un fractal matemático real tiene estructura en un rango infinito de escalas"* (Stewart, 2001).

La matemática, entre otras cosas, trata de modelar, a través de la geometría euclídea, los fenómenos naturales cuyas formas y dimensiones se pueden percibir directamente. Sin embargo, existen muchos aspectos de los mismos que no pueden ser representados por estos modelos. Esto requiere de una nueva geometría, en la cual los objetos poseen forma irregular. Esta geometría es llamada geometría fractal o de la naturaleza.

> *"El nombre de fractal procede de que estudia conjuntos de puntos para los cuales se puede definir, de cierta manera, una dimensión fraccionaria, dimensión que permite medir el grado de complejidad del conjunto, variando desde las curvas corrientes de dimensión uno, hasta curvas que llenan áreas del plano, de dimensión dos"* (Luis Santaló, 1992; p. 6).

Los fractales son formaciones gráficas que muestran procesos iterativos que tienen una característica en común: repiten procesos infinitos. Por lo tanto podemos concebir una construcción fractal como una figura autosemejante, es decir, todas sus partes tienen repetición a diferentes escalas, por ejemplo, la hoja de un helecho, la copa de los árboles, las costas, las nubes, etc. Lejos de ser vistos como monstruos o figuras raras, los fractales tienen propiedades específicas de alto valor matemático:

a) Son construcciones que se generan a través de iteraciones sucesivas; la construcción de un fractal implica la ejecución de un algoritmo que se repite indefinidamente.

b) Son objetos que se identifican gráficamente y brindan un acercamiento analítico que posibilita explicar su comportamiento.

c) Tienen dimensión fraccionaria.

La visualización de estos objetos permite la comprensión de los procesos de cambios de acuerdo con la transformación de la misma figura como también el cuestionamiento de las causas de dichos cambios y si éstos son o no controlables.

Según el Dr. Santaló existen dos tipos de fractales:

i) Clásicos: son conjuntos que se obtienen mediante un proceso geométrico euclídeo, por ejemplo el copo de nieve de Von Koch y el triángulo de Sierpinski.

ii) Modernos: son conjuntos que se obtienen iterando infinitas veces una función de variable compleja, donde no se utiliza la geometría euclídea, por ejemplo el Conjunto de Mandelbrot y los conjuntos de Julia.

Estos objetos pueden ser analizados a través de la visualización, entendiendo a esta operación como una herramienta que permite acercarse a comprender los patrones de cambio. Es decir: se pueden entender los procesos de cambio en los fractales de acuerdo con la transformación de la misma figura, identificar por qué cambió, así como controlar ese mismo cambio.

Existen muchas familias de fractales y para iniciar nuestra actividad recurriremos a los fractales denominados clásicos que no presentan obstáculos en su desarrollo, tales como:

- triángulo de Sierpinski,
- tapiz de Sierpinski,
- triángulo de Von Koch,
- curva de Von Koch,
- conjunto de Cantor.

El trabajo con fractales posibilita, según algunos autores, un acercamiento, en la escuela media, a la construcción de la idea de infinito. Fundamentan que se debe partir de un acercamiento geométrico del infinito ya que esto puede dar lugar a situaciones en las que pueden estar presentes las características que definen y dan marco a la noción de infinito como un estado (Albert y otros, 1999).

Reseña histórica

La iteración de funciones simples como la $\sqrt{x}$, x^n o las cuadráticas del tipo $x^2 \pm a$ constituyen sistemas dinámicos. El proceso iterativo consiste en realizar la misma operación matemática, con auxilio de una calculadora, por ejemplo utilizando la salida de una operación como entrada de la próxima. En muchos casos los resultados obtenidos con algunas funciones, para ciertos valores de entrada, son completamente predecibles, en cambio, para otros valores, los resultados no se pueden predecir y aparece el caos.

El conjunto de puntos que se obtiene al iterar una función $f_{(x)}$ cualquiera: { x, $f_{(x)}$, $f_{2(x)}$, ..., $fn_{(x)}$, ...} se lo define como órbita de x.

Ejemplos:

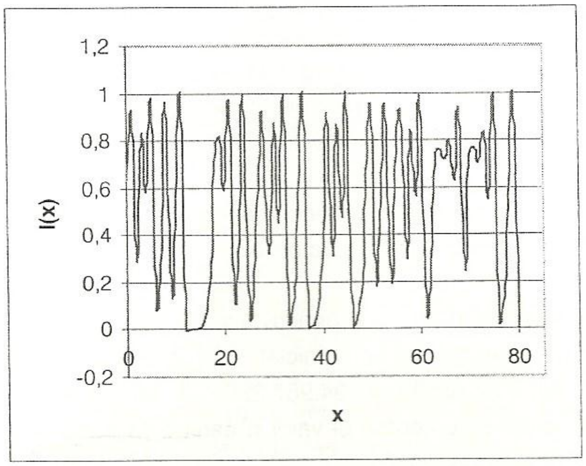
La iteración de la función $h_{(x)} = x^2$ genera la sucesión x; x^2; x^4; x^8; x^{16}; ....; $(x^2)^n$; ..., si consideramos un determinado valor inicial, $x_0 = 2$, la sucesión generada es la siguiente: {2; 4; 16; 256; 65536; 4.294.967.296; ...}. Se observa que a medida que número de iteraciones aumentan el valor obtenido es cada vez más grande y la sucesión generada es divergente.

En cambio la iteración de la función $g_{(x)} = - x + 2$ para $x_0 = 2,5$ genera la sucesión:{2,5; -0,5; 2,5; -0,5; 2,5; ....}. Observe que, en este caso, los términos de la sucesión oscilan entre dos valores.

Si iteramos la función $j_{(x)}$ $\sqrt{x}$ = para $x_0 = 2,5$, se obtiene la siguiente sucesión: {2,5; 1,58113883; 1,25743343; 1,121353392; 1,048939749; 1,029047982; 1,014420022; 1,007184205; 1,003585674; 1,001791233; 1,000895216; 1,000447508; 1,000223729; 1,000111858; 1,000055928; 1,000027963; 1,000013982; 1,000006991; 1,000003495; 1,000001748; 1,000000874; 1,000000437; 1,000000218; 1,000000109; 1,000000055; 1,000000027; 1,000000014; 1,000000007; 1,000000003; 1,000000002; 1,000000001; 1 }. La sucesión obtenida converge a 1.

En cambio en la iteración de la función cuadrática, denominada logística, $l_{(x)} = 4\ x\ (1 - x)$ aparece lo que se ha dado en llamar el comportamiento caótico, es decir no previsible. Presentamos algunos de los valores de las 80 primeras iteraciones.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$I_{(x)}$	0,6400	0,9216	0,2890	0,8219	0,5854	0,9708	0,1133	0,4020
x	8	9	10	11	12	,,,	71	72
$I_{(x)}$	0,9616	0,1478	0,5039	0,9999	0,0002	,,,	0,7726	0,7028
x	73	74	75	76	77	78	79	80
$I_{(x)}$	0,8355	0,5498	0,9901	0,0393	0,1510	0,5129	0,9993	0,0026



De la observación de la gráfica de las primeras 80 iteraciones se observa que no existe un comportamiento predecible ya que no oscila, no diverge ni converge.

Veamos, primero, algunas nociones referidas a lo que hemos dado en llamar fractales modernos. A principio del siglo pasado Gastón Julia y Pierre Fatou trabajaron en la iteración de expresiones simples como $q_c(z) = z^2 + c$, donde z y c son números complejos. La iteración de la función cuadrática para un valor inicial de $z = z_0$ y distintos valores de c ofrecen resultados sorprendentes.

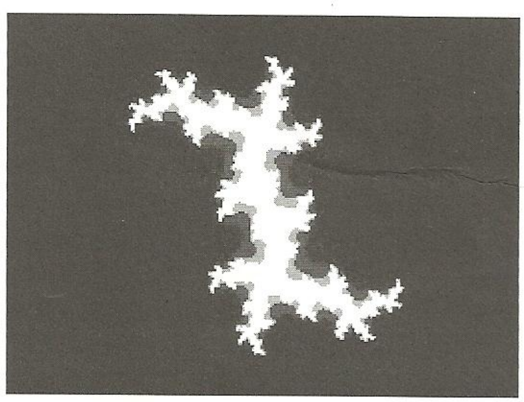
Para ciertos valores de entrada los resultados son completamente predecibles, en cambio para otros, son muy complicados y aparece el caos. El conjunto de números que tomados como condiciones iniciales presentan comportamiento caótico o impredecible se llama conjunto de Julia. Estos conjuntos de Julia son extremadamente complicados aun para las funciones cuadráticas más sencillas. Cuando c varía, los conjuntos de Julia cambian considerablemente. Julia y Fatou realizaron solamente dibujos de diagramas muy toscos de sus figuras.

Una definición precisa del conjunto de Julia es la siguiente: *Para la función $f(z) = z^2 + c$, los puntos que están en la frontera entre el conjunto prisionero y aquellos puntos que escapan al infinito son colectivamente denominados conjunto de Julia y se lo denota con K_c*. Se entiende por conjunto prisionero al conjunto de puntos cuyas órbitas (sucesión generada por la iteración) están acotadas bajo la iteración de $q(z) = z^2 + c$. Cuando el conjunto prisionero está conectado, el conjunto de Julia es la frontera de este conjunto conectado. Cuando el conjunto prisionero está desconectado, el conjunto de Julia es el conjunto prisionero mismo.

Los conjuntos de Julia son ejemplos de fractales, figuras que poseen la propiedad de autosemejanza: no cambian si se amplia o se reduce la escala, cada una de sus partes es parecida al todo.

Julia y Fatou probaron, en 1919, que para cada valor de c, el conjunto de Julia es o un conjunto conexo o un conjunto no conexo (dicotomía estructural).

Recordemos que un conjunto conexo es un conjunto constituido por una sola pieza y continuo. En cambio un conjunto no conexo está constituido por una colección infinita de puntos que puede ser visualizado como una nube de puntos. Cada punto es aislado, por lo tanto estamos hablando de una colección infinita de puntos esparcidos en cualquier región, alrededor de un punto dado.



Conjunto de Julia

Resumiendo, la dicotomía estructural establece que los conjuntos K_c se clasifican en dos variedades: conjuntos conexos, una pieza y conjuntos no conexos, infinitas piezas.

La función $q_c(z) = z^2 + c$ exhibe un gran número de comportamientos dinámicos diferentes para distintos valores de c. También los conjuntos de Julia K_c varían grandemente para diferentes valores de c. Para entender la colección de todos los posibles conjuntos de Julia para las funciones cuadráticas y las figuras que generan, se debe recurrir al conjunto de Mandelbrot, M que es un diccionario o libro de pintura de todos los posibles conjuntos de Julia para las funciones cuadráticas. Es una figura en el plano complejo que nos provee de un *mapa de ruta* de todos los posibles conjuntos de Julia cuadráticos. Esta imagen visualizada por Benoit Mandelbrot y otros a fines de la década de 1970 es muy importante en la dinámica, caracteriza plenamente a los conjuntos de Julia de las funciones cuadráticas y ha sido considerado uno de los más intrincados y bellos objetos en matemática.

La definición del conjunto de Mandelbrot M es: *el conjunto de todos los valores complejos c que hacen que las órbitas para $z_0 = 0$ bajo $z^2 + c$ correspondiente no escapan al infinito.*

Para construir el conjunto de Mandelbrot se necesita, simplemente, entender la órbita crítica, es decir la órbita de 0 para $K_c = z^2 + c$, para diferentes valores de c.

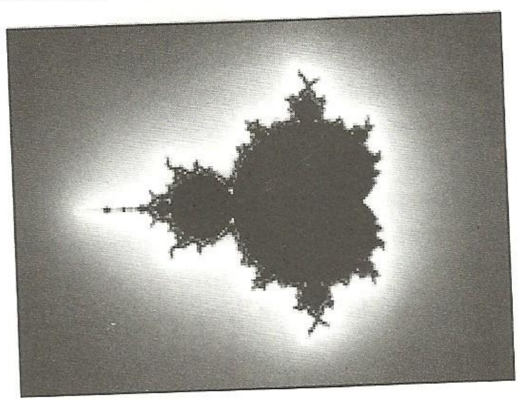
Si la órbita de 0 tiende al infinito, el conjunto de Julia está totalmente desconectado; si la órbita de 0 está acotada, el conjunto de Julia está conectado y consiste en una sola pieza.

La pregunta que surge naturalmente es qué valores de c hacen que las órbitas críticas escapen y cuáles no.

Benoit Mandelbrot, trabajando para IBM, en el año 1978 encontró las respuestas a estos interrogantes con el auxilio de una computadora. Fue el primero en determinar el conjunto de los valores de c para los cuales las órbitas críticas no escapan.

De la definición del conjunto de Mandelbrot podemos encontrar un algoritmo para calcularlo. Sea un cuadrado en el plano complejo, centrado en el origen y con lados de longitud 4. Ubiquemos un conjunto de puntos uniformemente distribuido dentro de este cuadrado, cada uno de estos puntos es un valor complejo de c. Para cada c se le pregunta a la computadora si la órbita de 0 correspondiente escapa al infinito o no. Si no escapa al infinito, se pinta el punto de negro. Ahora bien, no es posible determinar si ciertos valores de c escapan al infinito porque sólo podemos iterar un número finito de veces y los valores de c cerca de los bordes de M tienen órbitas que escapan al infinito solamente después de una cantidad grande de iteraciones. A estos puntos se los pinta de un color de acuerdo al número de iteraciones realizadas.

En la figura se observa el fractal de Mandelbrot.



Conjunto de Mandelbrot

La zona negra está constituida por todos los valores c tal que las iteraciones tienden a 0 y las zonas de color representan valores que escapan de 0.

Para determinar los valores de c que hacen que la órbita de 0 bajo $z^2 + c$ realmente escapen al infinito existe un criterio denominado del escape: supongamos que $|x| \leq 2$, si la órbita de 0 bajo $z^2 + c$ sale del círculo de radio 2 centrado en el origen, entonces esta orbita definitivamente tiende a infinito. Este criterio es muy importante pues todo conjunto de Mandelbrot reside dentro del disco $|x| \leq 2$.

Mandelbrot es el creador de una nueva geometría, llamada geometría fractal, la cual permite describir y representar objetos de la naturaleza tales como hojas, costas, copos de nieves, nubes, montañas, etc. Estos objetos son descriptos por una dimensión que no es un número entero como en las geometrías tradicionales y las propiedades que poseen están ligadas a la dimensión misma. La noción de dimensión no entera o dimensión fraccionaria se debe a los trabajos realizados por Haussdorff, Besicovitch, Mincovski y Boulignard en los comienzos del siglo XX.

Resumiendo: el conjunto de Mandelbrot itera $z^2 + c$ con $z_0 = 0$ y variando la c. El conjunto de Julia itera $z^2 + c$ para c fijo y variando z_0.

• Si nos referimos a los denominados fractales Geométricos debemos referirnos, en primer lugar, al *conjunto de Cantor*. Éste fue descubierto por el matemático alemán Georg Cantor en la última parte del siglo XIX y constituye el ejemplo más simple de fractales que se conoce. Este conjunto se construye por un proceso iterativo.

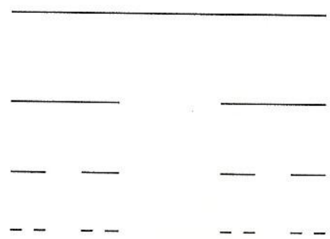
Se describe, a continuación, cómo se construye el conjunto de Cantor del tercio medio:

1. Consideremos el conjunto de puntos en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Quitemos el tercio medio: el intervalo $1/3 < x < 2/3$. Nótese que el intervalo removido es abierto, nos queda un par de intervalos cerrados, cada uno de los cuales tiene longitud $\frac{1}{3}$ de la inicial.

2. Procedamos de igual manera en cada uno de los dos intervalos: de cada intervalo remanente quitemos el tercio medio, al intervalo [0, 1/3] le quitamos $1/9 < x < 2/9$ y al intervalo [2/3, 1] el intervalo $7/9 < x < 8/9$, siempre intervalos abiertos, tenemos ahora 4 intervalos, cada uno de longitud 1/9 del intervalo original.

3. Repitamos el proceso una y otra vez. En cada etapa se remueve el tercio medio de cada intervalo remanente de la etapa anterior. En cada etapa el número de intervalos se duplica. Los puntos remanentes forman el conjunto de Cantor.

El número de segmentos crece *ad-infinitum* mientras que sus longitudes decrecen a cero de modo que en la etapa final no hay intervalos remanentes, sólo una nube de puntos. Este conjunto de infinitos puntos desconectados es el conjunto de Cantor.



Los conjuntos de Julia tienen algunas propiedades en común con el de Cantor, pero aquellos pueden ser conexos o no.

En los tiempos de su descubrimiento el conjunto de Cantor causó considerable sensación entre los matemáticos pero fue visto como una curiosidad matemática durante mucho tiempo, recién en la década de los 60 Stephen Smale demostró que este conjunto juega un papel importante en los sistemas dinámicos.

• La *curva de Koch*: Niels Helge Von Koch fue un matemático sueco quien, en 1904, introdujo lo que se conoce como la curva de Koch que presenta propiedades sorprendentes desde el punto de vista matemático:

1. no es posible trazar una tangente en un punto de la curva,
2. la longitud entre dos puntos cualesquiera de la curva es infinita.

Los matemáticos de la época bautizaron a esta curva y a otras similares "monstruos matemáticos".

Uniendo tres copias rotadas de la curva de Koch se produce una figura conocida como la curva de copo de nieve o la isla de Koch. Esta construcción presenta las siguientes características:

1. no es posible trazar una tangente en un punto de la curva,
2. la longitud entre dos puntos cualesquiera de su perímetro es infinita,
3. en su interior la curva limita un área finita.

• El *triángulo de Sierpinski*: en 1915 un matemático polaco, Waclaw Sierpinski, presenta una figura fractal conocida con ese nombre. La misma se caracteriza por presentar autosimilaridad.

La idea es sencilla. En un triángulo se dibuja otro, uniendo los puntos medios de cada uno de sus lados, generándose así cuatro triángulos semejantes al anterior, de los cuales tres comparten su orientación. Eliminamos el triángulo central que es el único que no comparte su orientación con el triángulo original. Se repite este proceso en los triángulos remanentes.

El triángulo de Sierpinski es uno de los pocos fractales que puede dibujarse con exactitud, sin ayuda de una computadora.

Aplicaciones de los fractales

Aunque en los primeros años pudo parecer que los fractales eran meras curiosidades matemáticas sin ninguna utilidad, restringidos sólo a unos pocos matemáticos teóricos, con el paso del tiempo se encontraron innumerables aplicaciones en ciencias tan dispares como la Física, la Química, la Economía, la Biología, la Geografía, la Informática, etc.

Dar una explicación detallada de las distintas aplicaciones de los fractales sería interminable, por lo tanto se explicará resumidamente algunas aplicaciones separadas en distintas áreas científicas.

Vamos a mencionar, a continuación, algunas en distintas áreas científicas.

• *Geografía*: se utilizan los fractales para calcular distancias con mayor precisión, por ejemplo permiten determinar con mayor precisión las distancias entre dos puntos sobre la costa continental. Usted se podría preguntar ¿qué importancia tiene calcular mejor una distancia? Pues en asuntos como la exploración espacial, por ejemplo, equivocarse en un "pequeño" cálculo, a escalas diferentes, puede significar millones y millones de kilómetros de "error" lo que puede provocar serios problemas.

Quizá la forma más útil de aplicar los fractales en la geografía es la elaboración de mapas en tres dimensiones muy detallados que permiten entregar una imagen 99,9% real en comparación con la forma de nuestro planeta y su geomorfología.

La geometría fractal no sólo permite analizar la forma de objetos, sino que puede ir más allá, analizando fenómenos geográficos que transcurren en el tiempo. Así, Mandelbrot analizó la recurrencia en las crecidas del río Nilo: si en un año ocurría una crecida mayor a cierta norma, ese año se marcaba con un uno, y con cero en caso contrario. Los resultados obtenidos le indicaron que las crecidas ocurrían a ráfagas, es decir, si en un año ocurría una crecida, era más probable que en el siguiente año ocurriera otra (a este fenómeno se le llamó "efecto Josué", en alusión a la historia bíblica). Esto se debe a que la cantidad de crecidas sigue un patrón fractal. De hecho, este resultado era similar a sus resultados sobre errores en una línea telefónica, y su gráfico de unos y ceros es muy similar al del polvo de Cantor. Mandelbrot encontró que las crecidas en el río Nilo siguen un patrón con dimensión fractal $D=0.9$, mientras que el Rhin tiene $D=0.5$ y el Loira $D=0.5$ (Mandelbrot 1975).

A pesar de todo lo dicho, es difícil pensar que el polvo de Cantor pueda ser un modelo realista de crecidas de ríos, o la isla de Koch una isla real. Ambos son objetos fractales muy regulares. Por esta razón, para construir modelos más realistas se necesita introducir algo de desorden aleatorio. A modo de ejemplo, podemos desordenar los puntos del conjunto de Cantor, pero con la condición de que las distancias entre los puntos del conjunto sigan teniendo la misma distribución (es decir, en un paso dado de la construcción del polvo de Cantor, tómense todos los segmentos de recta, e intercálense al azar). Es claro que el conjunto resultante seguirá siendo autosemejante, aunque se verá mucho más desordenado. Por esta razón, los modelos realistas necesitan introducir el azar, pero respetando la semejanza propias de los fractales.

• *Medicina*: se utilizan técnicas fractales para predecir la Osteoporosis, dolorosa enfermedad ósea que afecta a pacientes normalmente de la tercera edad o con una clara deficiencia en el calcio de sus huesos. La Osteoporosis requiere de algún tiempo (muchas veces considerable) para que pueda ser detectada, aunque ya esté presente en el paciente. La enfermedad se detecta por medio de análisis a la textura de los huesos, la que se ve afectada cuando la enfermedad ataca. Muchas veces la alteración debe ser muy avanzada para poder detectarla, lo que en la mayor parte de los casos hace que el tratamiento sea muy largo. El proceso involucra la predicción en forma aproximada con técnicas fractales de cómo evolucionaría la textura del hueso con el transcurso de la enfermedad.

• *Ciencias Naturales*: uno de sus objetivos es encontrar los principios que unifican aparentemente a diversos fenómenos. Con dicho objetivo se han aplicado nociones y métodos computacionales para comprender mejor los mecanismos que gobiernan formación de patrones en organismos vivientes.

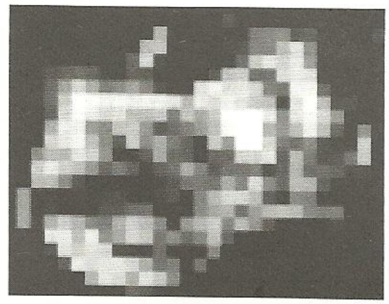
Ciertos objetos de la naturaleza presentan similitudes con los fractales, esta semejanza es tan grande que no puede ser dejada de lado. Actualmente existen fórmulas matemáticas que modelan formas naturales semejantes a sí misma, por ejemplo el helecho de Barnsley.

También se pueden simular gráficamente los modelos químicos de reacción y difusión.

Los cambios de escala que estudia la geometría fractal han dado lugar al estudio de las relaciones alométricas, es decir, cómo se escalan unas cantidades respecto de otras. A modo de ejemplo: el metabolismo de los animales por kilogramo de peso (es decir, el consumo de energía por kilo corporal) no es lineal; los animales grandes gastan en proporción menos energía que los pequeños. Si no fuera así, y un elefante comiera proporcionalmente a su peso lo mismo que un ratón, entonces acabaría con sus recursos de manera inmediata.

• *Informática*: las aplicaciones que se presentan en esta área son verdaderamente impresionantes y creativas, permiten el desarrollo de muchas técnicas distintas y se considera pionera en el campo de sus aplicaciones. La aplicación más común es la de la Transformación fractal, proceso que se utiliza en el tratamiento de imágenes para reducir su espacio "físico" (o peso en bytes) mediante esta técnica.

Imagínese que tiene una fotografía o dibujo cualquiera en la pantalla de su computadora. Cada imagen o fotografía se representa en la pantalla mediante pixeles o "puntos" que, unidos todos y en determinados colores, forman la imagen. Se habla muchas veces de "resoluciones de pantallas". Estas resoluciones de pantallas son la "capacidad" en pixels que puede mostrar simultáneamente el monitor de su computadora. Entonces, mientras más pixels sea capaz de mostrar su PC, mayor será la "resolución de imagen" de la foto o dibujo que esté observando.



Por ejemplo, una alta resolución de pixels nos permitirá ver la primera imagen. Por el contrario, una baja resolución de pixels nos permitirá ver una imagen como la que está del lado derecho. Pero notemos algo importante: informáticamente, es decir, si medimos en "bytes", la primera imagen "pesa" (o contiene mayor cantidad de información) que la segunda. Por lo tanto si se quiere utilizar imágenes de gran resolución, por ejemplo en una página web o una imagen que se envía desde un satélite ubicado en la órbita de Marte a la Tierra, es necesario que la imagen esté comprimida.

La compresión fractal es una tecnología bastante controvertida, con detractores y admiradores. La idea básica es expresar que la imagen es un sistema de funciones iteradas (IFS). La imagen puede mostrarse rápidamente, y un zoom proporciona infinitos niveles de detalles fractales (sintéticos). El problema es cómo generar eficientemente la imagen IFS.

La compresión fractal:

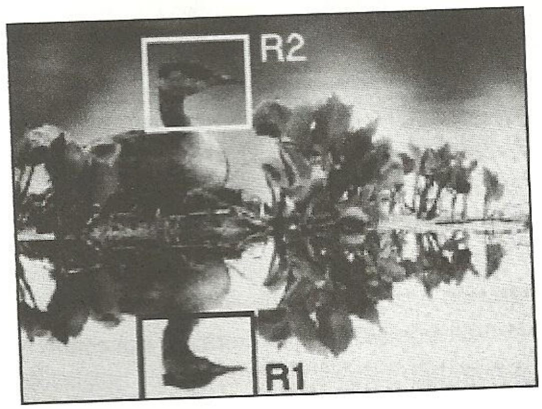
- Es un método de compresión que pierde un poco de información (como JPG).
- Los fractales en compresión fractal de imágenes son Sistemas de Funciones Iterados.
- La resolución al agrandar es poderosa, pero no una forma de comprimir 100:1.
- La compresión es lenta, la descompresión es rápida.
- La tecnología está patentada.

Dado que los fractales matemáticos servían para generar imágenes que se veían naturales, se pensó que también podría servir en el sentido opuesto: para comprimirlas. La idea es tomar una imagen y llevarla a un sistema de funciones iterado, que podría generar el original. Este problema aún no se resuelve.

Fue Barnsley quien en 1988 anunció al mundo que lo había resuelto y patentó la tecnología. El problema fue que tomaba alrededor de 100 horas codificar una imagen y alrededor de 30 minutos decodificarla, con una persona guiando el proceso.

El resultado (especulado) era una compresión 10.000:1. En el caso de una imagen de un pato, por ejemplo, uno debería poder observar patitos distorsionados por todo su plumaje, lo cual no es evidentemente una suposición muy natural.

Poco después con uno de sus alumnos de doctorado, de apellido Jacquin, desarrolló un sistema para representar imágenes llamado Sistema de Funciones Iteradas Particionado (PIFS). Un algoritmo que comprimía automáticamente la imagen en un Sistema de Funciones Iterado Particionado. El algoritmo no era sofisticado, ni rápido, pero sí automático. El costo fue que una imagen de 24-bit de colores podía ser comprimido de 8:1 a 50:1, lo cual aún es bastante bueno.



La idea de Jacquin es, a primera vista, muy simple. En lugar de considerar una imagen como formada por copias de sí misma (bajo las transformaciones apropiadas), ahora estaría formada por copias de partes de sí misma. En una postal veraniega es difícil que el trozo de una nube se parezca a la postal completa, pero es posible encontrar otra sección de alguna nube o de otro elemento de la imagen que se parezca al trozo de nube. La figura muestra regiones de una imagen que son similares a diferentes escalas y bajo una transformación apropiada. El enfoque general consiste en subdividir la imagen mediante una partición (en el caso más sencillo en regiones cuadradas de tamaño fijo) y encontrar para cada región resultante otra parecida en la imagen.

Hoja de trabajo 1

El conjunto de Cantor

Relación con el currículo
Límite Sucesión numérica Convergencia

Objetivos

1. Encontrar el algoritmo para la construcción del fractal de Cantor.

2. Analizar la variación de la longitud del segmento en cada etapa de la construcción.

3. Encontrar la expresión para cada uno de los subintervalos en cada etapa de la construcción.

4. Encontrar la expresión general para determinar el número de subintervalo.

5. Calcular la longitud de cada subintervalo.

6. Analizar qué ocurre con la longitud cuando el número de subintervalos aumenta indefinidamente.

Desarrollo

En esta actividad procederemos a construir el conjunto de Cantor, al que se considera, en muchos sentidos, como el más simple de todos los fractales.

Ejercicio 1

Para obtener el conjunto de Cantor se procede del siguiente modo:

a. Etapa 0, n = 0. Dibuje un segmento de longitud unitaria (l=1) y llámelo $C_0 = [0, 1]$.

b. Etapa 1, n = 1. Divida el segmento en tres subsegmentos de longitud $\frac{1}{3}$ cada uno, borre el segmento central, excepto los extremos y quédese con los segmentos restantes. Llame a esto $C_{11} = [0, \frac{1}{3}]$; $C_{12} = [\frac{2}{3}, 1]$.

b_1. ¿Cuál es la longitud de cada segmento remanente?

c. Etapa 2. Repita, nuevamente, esta operación: a cada segmento remanente divídalo en tres subsegmentos y deseche el tercio medio sin incluir los extremos.

c_1. ¿Cuál es la longitud de cada segmento remanente?

c_2. Complete los siguientes cuatro subintervalos generados:

C_{21} = [......, ...]; C_{22} = [.... , ...]; C_{23} = [..... , ...]; C_{24} = [.... ; .....]

c_3. ¿Cuál es el valor de n?, ¿cuánto vale la longitud l de cada subintervalo?

d. Repita el algoritmo para n = 3, n = 4 y complete la tabla 1:

Etapas	N° de intervalos remanentes	Longitud de cada intervalo
0	1	1
1	2	$\frac{1}{3}$
2		
3		
4		

Tabla 1

e. ¿Cuántos subintervalos hay en la etapa 5? y ¿en la etapa 6? ¿Cuál es la longitud de cada subsegmento en dichas etapas?

f. Generalice para encontrar el número de intervalos y la longitud para la etapa n.

g. Cuando n crece indefinidamente, ¿qué sucede con el número de intervalos y la longitud de los mismos?

El conjunto que se obtiene después de ∞ pasos es el conjunto de Cantor que denominamos C y es la intersección de todos los subintervalos remanentes de todas las etapas.

Ejercicio 2

Enuncie el algoritmo para construir el fractal de Cantor.

Ejercicio 3

a. Usted puede construir otro conjunto de Cantor dividiendo un segmento, al que se le asigna longitud 1, en cinco subsegmentos. Elimine el intervalo $2/5 < x < 3/5$ del intervalo $0 \leq x \leq 1$ en la primer etapa. Luego remueva los quintos medios de cada intervalo remanente, y así sucesivamente. Realice un listado de los intervalos que fueron removidos hasta la etapa 3.

b. Complete la tabla 2.

c. ¿Cuántos subintervalos hay en la etapa 3?, y ¿en la etapa 4? ¿Cuál es la longitud de cada subsegmento en dichas etapas?

Etapas	Número de intervalos remanentes	Longitud del intervalo desechado	Longitud de los intervalos remanentes
1			
2			
3			
4			

Tabla 2

d. Generalice para encontrar el número de intervalos remanentes y su longitud para la etapa n.

e. Cuándo n crece indefinidamente, ¿qué sucede con el número de intervalos y la longitud de los mismos?

Hoja de Trabajo 2

El triángulo de Sierpinski

Objetivos

1. Realizar la construcción del fractal siguiendo un determinado algoritmo.
2. Determinar el número de triángulos remanentes en cada etapa.
3. Analizar la variación del área en cada etapa de la construcción.
4. Generar las sucesiones de las áreas.
5. Encontrar la expresión general para el cálculo de las áreas.
6. Analizar los distintos comportamientos.

Relación con el currículo

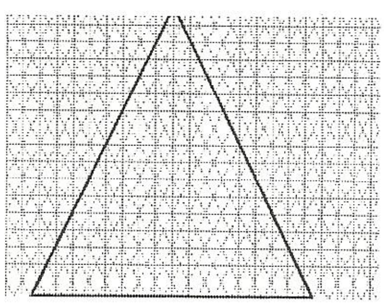
Construcciones numéricas.
Construcciones geométricas.
Serie geométrica.
Área Semejanza.
Visualización.
Concepto de límite.

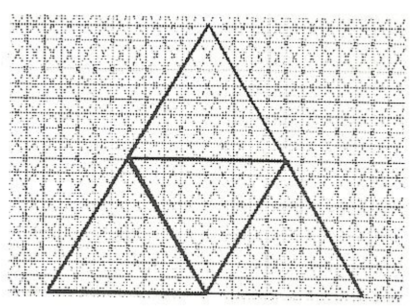
Desarrollo

Ejercicio 1

El siguiente proceso de construcción, cuando se repite una y otra vez, genera el fractal conocido como el triángulo de Sierpinski.

Partiendo de un triángulo equilátero, una los puntos medios de los lados, y obtendrá 4 subtriángulos. Deseche el triángulo central (inferior), guardando solamente los tres subtriángulos de las esquinas.





Para realizar esta actividad utilice una copia de la hoja modelo que está al final del libro.

Repita en cada subtriángulo el proceso y deseche nuevamente el triángulo central inferior. ¿Cuántos triángulos remanentes quedan?

Repita el algoritmo dos veces más. ¿Cuántos triángulos remanentes obtuvo en cada etapa?

a. ¿Qué ocurriría si se repite el proceso una y otra vez? ¿Cómo cambia la figura?

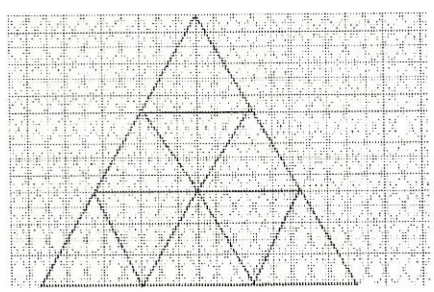
Si el proceso continuara indefinidamente obtendríamos el triángulo de Sierpinski.

b. Explique qué pasaría si en lugar de conservar los tres triángulos de las esquinas, se aplica el algoritmo para el triángulo central inferior hasta la etapa 5.

c. Repita el algoritmo desde la etapa 1 a la 3 para un triángulo rectángulo e isósceles, e informe lo que observa.

Ejercicio 2

Una modificación en el algoritmo permite construir un fractal distinto a los dos anteriores: *divida cada lado del triángulo equilátero en tres partes, como se muestra en la figura, guarde solamente los seis subtriángulos que tienen un lado en alguno de los bordes.*



a. Repita el proceso realizando una segunda iteración en cada uno de los seis subtriángulos remanentes. ¿Cuántos subtriángulos quedan? Sombréelos.

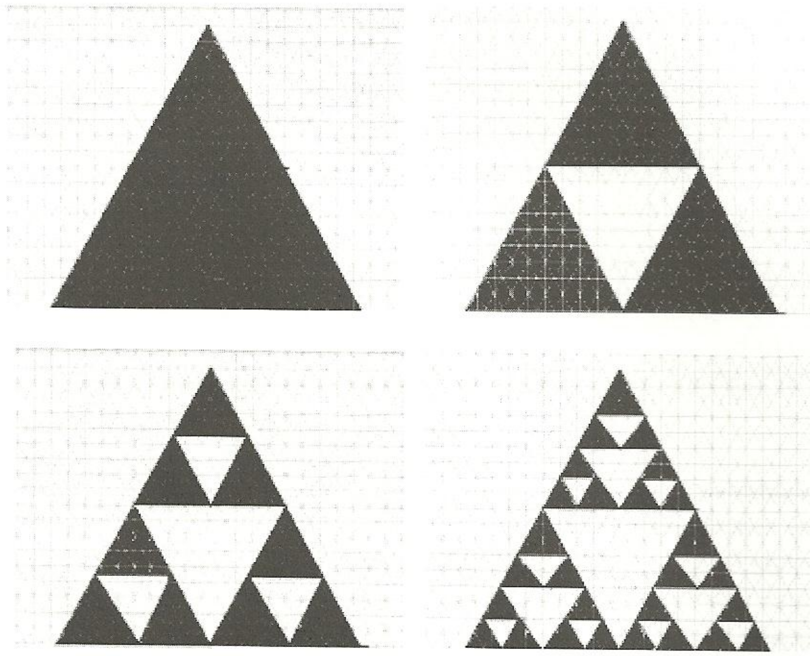
b. Repita el proceso una y otra vez y recuerde que, en cada etapa, cada triángulo es transformado en seis nuevos subtriángulos cuyo lado es un tercio de la longitud del anterior. Si la iteración continúa indefinidamente ¿qué se observaría?

c. Explique qué sucedería si en lugar de guardar los seis subtriángulos del borde, guardara los tres interiores. ¿Qué figura aparece después de dos iteraciones?

Ejercicio 3

A continuación se muestran las cuatro primeras etapas de la construcción del triángulo de Sierpinski.

a.



b. Haciendo uso de las mismas, complete la siguiente tabla:

Etapa	Número de triángulos sombreados	Área de cada triángulo	Área total sombreada
0	1	1	1
1	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
2			
3			
4			
5			

c. ¿Cuál es la constante multiplicativa utilizada para encontrar el número de triángulos de una etapa a otra?, ¿y en el caso del área?

d. Encuentre las expresiones para calcular el número de triángulos, el área de cada uno de ellos en la etapa n y el área total sombreada.

e. Cuando n aumenta indefinidamente, ¿qué sucede con el número de triángulos?, ¿qué ocurre con el área de cada triángulo? ¿con el área total sombreada?, y ¿con el área sin sombrar?

Ejercicio 4

Realice la misma actividad que en el Ejercicio 3, con el triángulo rectángulo.

Ejercicio 5

Realice la misma actividad para el triángulo modificado visto en el ejercicio 2.

Hoja de trabajo 3

El fractal de Pascal

Objetivos

Relación con el currículo
Congruencia. Módulo aritmético. Semejanza. Representación Gráfica.

1. Construir el triángulo de Pascal.
2. Encontrar la relación entre el triángulo coloreado y el triángulo de Sierpinski.
3. Generar distintas coloraciones del triángulo de Pascal que están relacionadas con el triángulo de Sierpinski modificado.
4. Trabajar el concepto de módulo aritmético.

Desarrollo

El triángulo de Pascal presenta algunas características interesantes relacionadas con los fractales.

Recordemos que el mismo es un arreglo de números que representan a los coeficientes binomiales de la expresión $(x + y)^n$, $n \in N_0$, a medida que n crece.

El procedimiento seguido en la construcción del triángulo aritmético o de Pascal es el siguiente: numeremos las filas del triángulo a partir de n = 0, es decir fila 0, fila 1,..., fila n. Como puede verse en la figura 1, la fila 0 contiene un solo elemento, la 1, dos, la 2, tres y, por inducción matemática la fila n contendrá n + 1 elementos.

Los elementos del vértice, el primero y el último de cada fila son 1, los otros se obtienen sumando los dos elementos de la fila anterior entre los que se encuentra situado:

$$a_{k+1'j+1} = a_{k'j} + a_{k'j+1}$$

donde k identifica al renglón y j a la columna.

Ejercicio 1

En la página siguiente le presentamos las 6 primeras filas del triángulo de Pascal. Complete el mismo hasta la fila 15.

Los números del triángulo reciben el nombre de números combinatorios, en la fila 5 tenemos, por ejemplo, seis números: 1, 5, 10, 10, 5, 1 que son precisamente los coeficientes del desarrollo de $(x + y)^5$ y pueden escribirse de la siguiente manera:

$C_{5,0} = 1$; $C_{5,1} = 5$; $C_{5,2} = 10$; $C_{5,3} = 10$; $C_{5,4} = 5$; $C_{5,5} = 1$

donde el número combinatorio $C_{k,j}$ representa el número de grupos distintos de j elementos que pueden formarse a partir de los k objetos dados. Para calcular estos coeficientes se puede recurrir a la fórmula:

$$C_{k,j} = \frac{k!}{j!(k-j)!},$$

donde k! se lee factorial de k, siendo $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \ldots 2 \cdot 1$

Algunas particularidades del triángulo de Pascal: en el mismo aparecen las sucesiones de los números naturales, de los números triangulares (1, 3, 6, 10, 15; 21, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$, ...), de los números tetraédricos (1, 4, 10, 20, 35, ...) , etc.

n						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											

Ejercicio 2

Dado el triángulo de Pascal hasta la fila 15,

1														
1	1													
1	2	1												
1	3	3	1											
1	4	6	4	1										
1	5	10	10	5	1									
1	6	15	20	15	6	1								
1	7	21	35	35	21	7	1							
1	8	28	56	70	56	28	8	1						
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1					
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1				
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1		
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1

a. Colorear con negro las celdas correspondientes a números impares y dejar los números pares en blanco.

b. Observe la figura obtenida y responda a las siguientes cuestiones:

b_1. ¿De qué color es el elemento que se encuentra debajo de dos negras?

b_2. ¿De qué color es el elemento que se encuentra debajo de dos blancas?

b_3. Complete lo siguiente, negro + negro = blanco + blanco =--------------------, de acuerdo a b_1 y b_2.

b_4. y ¿blanco + negro = ------------------------------?

c. Enuncie una regla, en función de los colores, para pintar un elemento del renglón k-ésimo teniendo en cuenta los colores de los dos elementos inmediatamente superiores del renglón k-1-ésimo.

d. Colorear los elementos del renglón 16 usando el algoritmo visto en c.

e. Observe los primeros cuatro renglones pintados y compare con el triángulo de Sierpinski. (Ver Hoja de Trabajo n° 2). ¿Puede encontrar alguna relación entre el triángulo de Pascal y el de Sierpinski?

f. Observe los primeros ocho renglones ¿existe una relación con los cuatro primeros? ¿y con el triángulo de Sierpinski?

g. Si colorea los 8 renglones siguientes ¿qué etapa del triángulo de Sierpinski aparece?

h. ¿Cuántos renglones se deben colorear para representar la etapa 4 del triángulo de Sierpinski?, ¿y la etapa 5?

i. ¿Es cierta la siguiente afirmación?: en el triángulo de Pascal se tienen tantos números pares como impares (ayuda: relacionar con el triángulo de Sierpinski y su área).

Comentario: si reemplazamos en el triángulo de Pascal los números pares por 0 y los números impares por 1, la regla enunciada en c (blanco + blanco = negro + negro = blanco; blanco + negro = negro + blanco = negro) se puede reescribir como suma de 0 y 1. Esto se conoce como la aritmética módulo 2; a los números pares se le asigna el valor 0 porque es el resto que poseen al ser divididos por 2, y a los impares se le asigna el valor 1 ya que al ser divididos por 2 presentan ese resto.

Las sumas:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

El triángulo de Pascal, en este caso, presenta la siguiente configuración. Coloree los 1 de negro y los 0 blancos.

1

1 1

1 0 1

1 1 1 1

1 0 0 0 1

1 1 0 1 1 1

Esta idea puede generalizarse. Consideremos, por ejemplo, la aritmética módulo 3, donde los restos, después de dividir por 3, son 0, 1 y 2.

j. Completar los 15 primeros renglones del triángulo de Pascal según la aritmética módulo 3 y colorear los 9 primeros renglones, según la siguiente regla:

Si la entrada es 1 ó 2 pinte la casilla de negro. Si la entrada es 0 deje blanco.

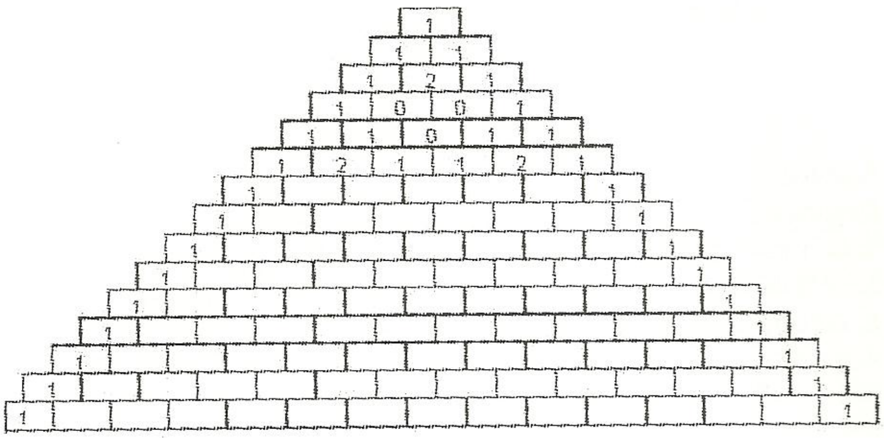
Comentario:

Las sumas:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

k. Comparar la figura obtenida en los 9 primeros renglones con el triángulo de Sierpinski modificado (Ejercicio 2, Hoja de trabajo n° 2).

I. Colorear las 18 filas siguientes según el algoritmo anterior y comparar, nuevamente, con el triángulo de Sierpinski modificado.



Hoja de trabajo 4

Árboles

Objetivos

1. Construir un árbol a partir de un algoritmo dado.

2. Determinar la longitud de las ramas del árbol.

3. Determinar la suma de dicha longitud.

4. Identificar partes del árbol que son réplicas del árbol entero.

Relación con el currículo
Construcciones numéricas. Construcciones geométricas. Serie geométrica Semejanza. Visualización. Concepto de límite.

Desarrollo

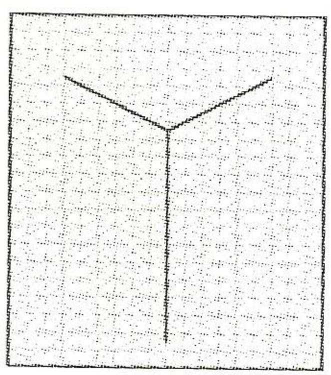
Cuando un árbol crece, sus ramas también lo hacen. De las ramas grandes crecen otras pequeñas, de estas pequeñas crecen otras más pequeñas y así sucesivamente. Este fenómeno ocurre en la naturaleza.

Vamos a construir, siguiendo este criterio, árboles matemáticos; para ello utilizaremos el siguiente algoritmo:

Algoritmo: *"desde el punto final de cada rama dibuja dos nuevas ramas de longitud igual a la mitad y en una dirección de 60° respecto de la dirección anterior".*

Ejercicio 1

a. En la figura se ha dibujado la etapa 1 del árbol. Dibuje las cuatro ramas nuevas para la etapa 2 utilizando la grilla rayada y rotada 90°.



Dibuje las ocho nuevas ramas para la etapa 3 y repita nuevamente para la etapa 4.

Continúe el proceso hasta que las ramas sean muy pequeñas para ser dibujadas.

Supongamos que la longitud inicial del árbol sea igual a 1. La longitud de cada una de las dos primeras ramas es $\frac{1}{2}$.

b. ¿Cuántas ramas tienen longitud $\frac{1}{4}$?, ¿y $\frac{1}{16}$?

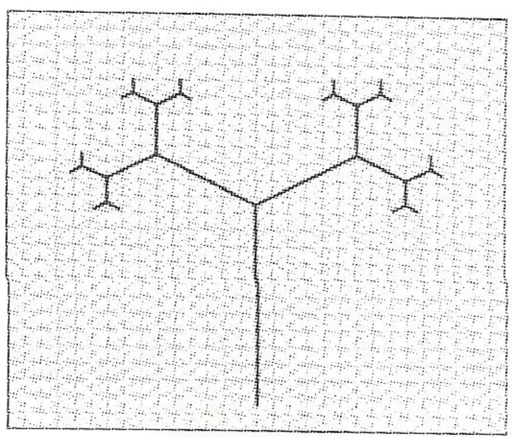
c. ¿Cuánto suman las longitudes de todas las ramas de longitud $\frac{1}{4}$? ¿y de $\frac{1}{16}$?

d. Si repitiéramos el algoritmo n veces, ¿cuál sería el valor de la suma de las longitudes de todas las ramas del árbol?

¿Qué ocurre con la longitud cuando n crece indefinidamente?

e. ¿Puedo encontrar partes del árbol que se parezcan al árbol entero?

En el siguiente gráfico rodee con un círculo algunas partes que son imágenes exactas del árbol mismo.



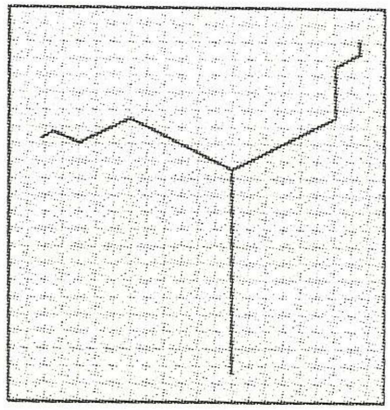
Vamos a jugar un rato. Para ello necesitamos una moneda y una copia de la hoja modelo. Construyamos la rama de un árbol de la siguiente manera:

f. Dibuje en la parte inferior de la hoja y en el medio un segmento al que le asignaremos longitud 1. Tire la moneda una vez; si sale cara, dibuje un segmento de longitud ½ hacia la derecha, si sale seca, dibújelo hacia la izquierda.

Vuelva a tirar el dado, si sale cara, vuelva a dibujar un segmento, ahora de longitud ¼ hacia la derecha; si sale seca, dibújelo hacia la izquierda.

Una secuencia puede ser: derecha, derecha, izquierda, izquierda... (DDII) o izquierda, izquierda, derecha, izquierda (IIDI), etc.

g. Indique qué secuencia sigue la rama de la izquierda y la rama de la derecha del árbol siguiente:



h. Dibuje la rama del árbol que sigue la siguiente secuencia: DIDIIIDI

i. Trace la rama simétrica a la anterior. ¿Cuál es la secuencia?

j. ¿Cómo debería ser la secuencia para que la ramificación formara una espiral? Enuncie por lo menos dos posibilidades.

Supongamos que se tiene el árbol completo. Si estamos en un punto donde brotan dos ramas y decido avanzar girando siempre en un mismo sentido (derecho o izquierdo), la poligonal recorrida resulta ser una espiral. Se pueden caracterizar por sucesiones (D D D D .... o I I I I ...).

Ejercicio 2

a. Dibuje la poligonal comenzando por el tronco y girando siempre a la derecha.

b. Compruebe que la longitud de la espiral hallada en el ítem a es finita.

c. ¿Cuántas espirales de longitud 2 se pueden dibujar?

d. Encontrar 4 espirales de longitud 1. En el árbol, ¿cuántas espirales de longitud ½ se pueden encontrar?

e. Si colecciona todas las espirales que pueda encontrar en el árbol se puede observar, claramente, que no son de igual longitud. ¿Se puede decir que estas ramas son réplicas una de otra, excepto por la longitud?

f. ¿Cuál es la longitud de una rama completa?, ¿y si incluimos el tronco?

g. Escriba la sucesión generada al considerar las longitudes de las distintas ramas.

Hoja de trabajo 5

La curva de Koch

Objetivos

1. Analizar la variación de áreas y perímetros en cada etapa de la construcción.

2. Generar las sucesiones de los perímetros y las áreas.

3. Encontrar una expresión para determinar el valor del perímetro y del área en la etapa enésima.

4. Concluir acerca del comportamiento de dichos valores para n grande.

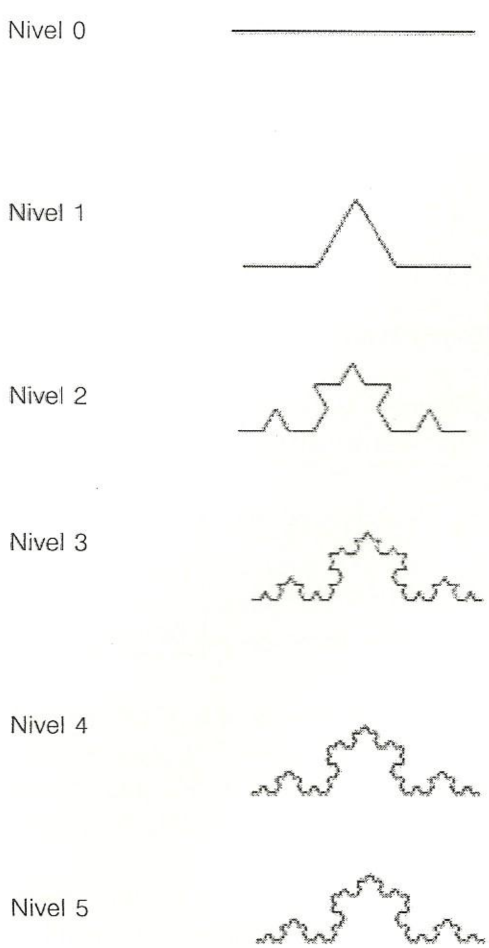
5. Determinar la convergencia o no de las sucesiones.

Relación con el currículo

↓

Construcciones numéricas.
Construcciones geométricas.
Sucesiones.
Serie geométrica.
Semejanza.
Visualización.
Concepto de límite.
Convergencia.
Área.
Perímetro.

Desarrollo



La curva de Koch es un fractal que se genera considerando un segmento al que se le asigna longitud unidad, y siguiendo el presente algoritmo:

Se divide el segmento unitario en tres partes iguales y se construye un triángulo equilátero sobre el segmento central, suprimiéndose la base del mismo. Queda así formada una poligonal de 4 lados.

Si se repite nuevamente el procedimiento sobre cada lado de la poligonal se genera una nueva poligonal de 16 lados y así sucesivamente.

Ejercicio 1

a. Partiendo del segmento de longitud 1 repita el algoritmo tres veces.

b. Cuente el número de segmentos en cada etapa y encuentre la ley que siguen. Haciendo uso de la misma, calcule el número para la etapa 4 y 5 y, posteriormente, complete la siguiente tabla.

Etapas	N° de segmentos
0	1
1	4
2	16
3	
4	
5	
. . .	
N	

Tabla 1

c. Imagine que el proceso se repite de manera indefinida. Describa cómo evoluciona la poligonal. La curva obtenida es la llamada curva de Koch.

El fractal copo de nieve

Para construir el fractal copo de nieve se comienza con un triángulo equilátero con lados de longitud 1. Se aplica el algoritmo para construir la curva de Koch en cada uno de sus lados, una y otra vez. La curva copo de nieve es la que resulta de repetir este procedimiento indefinidamente.

Ejercicio 2

a. Construya el fractal copo de nieve hasta la etapa 3.

b. Cuente el número de segmentos que se forman en cada etapa y complete la tabla 2. Infiera qué ocurre en las etapas 4, 5 y n.

c. Encuentre la constante multiplicativa que permite calcular el número de segmentos de una etapa a otra.

d. Si el proceso se repite indefinidamente indique cómo cambia la figura.

Etapa	N° de segmentos	Longitud de cada segmento
0	3	1
1	12	$\frac{1}{3}$
2	48	$\frac{1}{9}$
3		
4		
5		
...		
N		

Tabla 2

Ejercicio 3

a. De una etapa a otra el perímetro de la figura aumenta. Calcule el perímetro en las cinco primeras etapas y generalice para la etapa n. Complete la tabla 3.

b. Encuentre la constante multiplicativa para calcular el perímetro de una etapa a otra.

c. Si el proceso iterativo continúa indefinidamente, ¿cuál será el perímetro del fractal copo de nieve resultante?

Etapa	longitud del Perímetro
0	3
1	4
2	$\frac{16}{3}$
3	
4	
5	
...	
n	

Tabla 3

Ejercicio 4

a. A medida que el copo de nieve crece su área también lo hace. Calcule el área para las etapas 3, 4 y 5 y complete la siguiente tabla:

Etapa	Área
0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
1	$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{3}{9}$
2	$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{3}{9}+\frac{\sqrt{3}}{4}\,3\frac{4}{9^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{3}{9}+3\frac{4}{9^2})$
3	
4	
5	
...	
n	

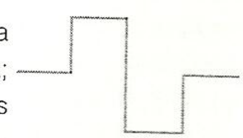
Tabla 4

b. Encuentre la expresión del área para el nivel n.

c. ¿Cuál es el área del copo de nieve completo?

d. ¿Es el perímetro del fractal copo de nieve finito o infinito? ¿Es el área finita o infinita?

Si tiene dificultades para calcular el área del fractal copo de nieve, consulte las notas al final de la hoja de trabajo.



A partir de la construcción del fractal copo de nieve resulta sencillo generar otros fractales siguiendo una ley de recurrencia; por ejemplo, si en vez de dividir el segmento unidad en tres partes iguales, se lo divide en cuatro partes iguales y se construye un cuadrado hacia arriba en el segmento 2, eliminando la base, y un cuadrado hacia abajo en el segmento 3, eliminando el segmento paralelo a la base.

Ejercicio 5

a. La poligonal obtenida, a la que llamaremos C_1 tiene 8 lados de longitud . . . . y por lo tanto su longitud total será . . . . Si se repite la operación sobre cada uno de estos lados resulta una poligonal C_2 de . . . . lados, cada uno de longitud . . . .

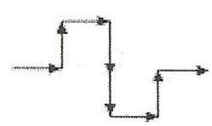
b. Proceda de igual modo para C_3, C_4, C_5 y complete la Tabla 5.

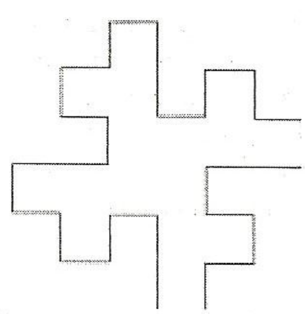
c. ¿Qué ocurre cuando n aumenta indefinidamente?

Etapas	Número de segmentos	Longitud de cada segmento	Longitud Total
0	1	1	1
1	8	$\frac{1}{4}$	2
2	64	$\frac{1}{16}$	4
3			
4			
5			
...			
n			

Tabla 5

d. Dado un cuadrado, cuyo lado tiene longitud 1. Si se repite este algoritmo sobre cada lado del cuadrado, indefinidamente, se obtiene una curva fractal cerrada. Realice la iteración gráfica, hasta la etapa 3.





e. Complete la siguiente tabla:

Etapa	Longitud del Perímetro	Valor del Área
0	4	1
1	8	1
2	16	1
3		
4		
5		
. . .		
n		

Tabla 6

f. ¿Qué ocurre con el perímetro cuando n aumenta indefinidamente?, ¿y con el área?

Curiosidades

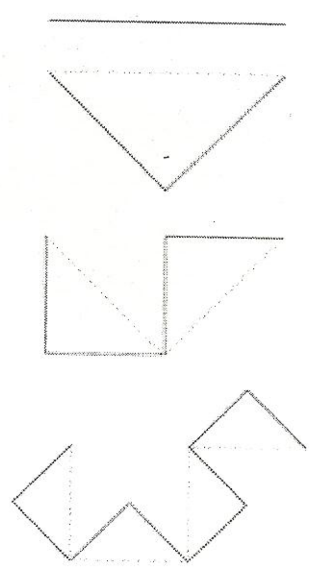
Otro fractal interesante es el llamado dragón, la construcción del mismo consiste en el siguiente proceso iterativo: a partir de un segmento de longitud arbitraria (Etapa 0) se construye un triángulo rectángulo isósceles, en dónde el segmento original es la hipotenusa.

Etapa 0

Etapa 1

Etapa 2

Etapa 3



(Etapa 1). A partir de este triángulo se construyen dos nuevos en donde cada cateto del anterior es la hipotenusa de uno de los nuevos. (Etapa 2). Si se repite este proceso indefinidamente se obtiene el fractal dragón cuya imagen puede observarse en la Figura 2.

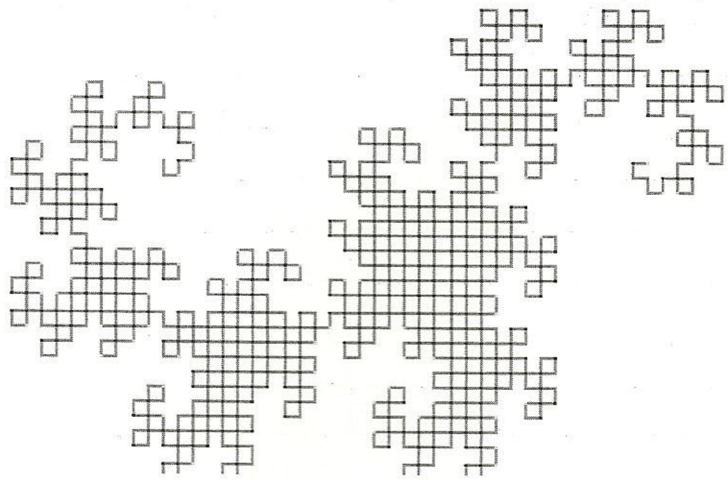


Figura1. Curva de Dragón. Etapa 10

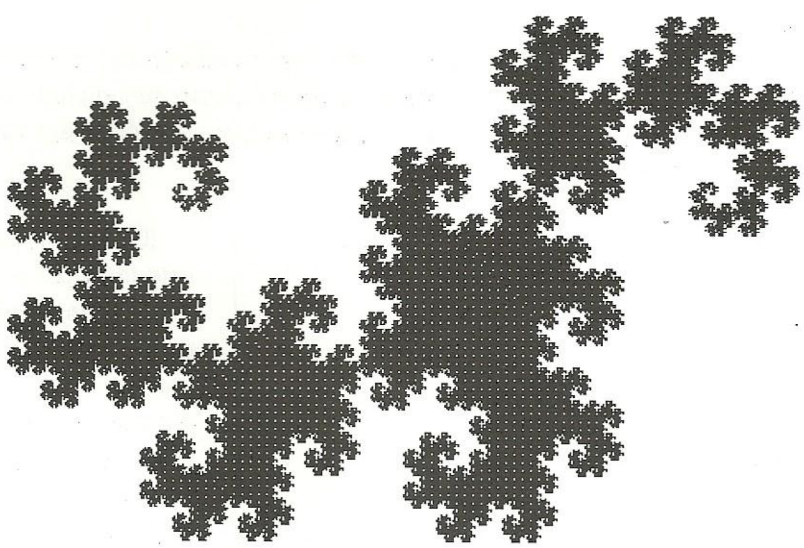


Figura 2- Fractal Dragon

Algunos comentarios sobre el fractal de Von Koch, el copo de nieve

La construcción de la curva copo de nieve es un ejercicio interesante para aproximarse a la idea de infinito.

La generación de esta curva es un proceso iterativo *ad infinitum* que se construye de la siguiente manera: se parte de un triángulo equilátero de lado de longitud **a**, cada segmento (lado) se divide en tres y el segmento del medio se sustituye por dos segmentos que forman con él un triángulo equilátero. Se repite la misma operación con los segmentos de longitud **a**/3, **a**/9, **a**/27, etc.

Cada segmento se transforma en cuatro segmentos más cortos en cada paso del proceso iterativo y al cabo de n iteraciones la longitud de cada uno de ellos es: **a** . $(4/3)^n$. A medida que el número de iteraciones aumenta, el valor del área encerrada por la curva converge a un valor finito, en cambio el valor del perímetro diverge.

Se parte de un problema geométrico y por lo tanto visualizable. La mayor dificultad es que la figura límite no es conocida ni se puede acceder a ella de una manera fácil.

Se puede trabajar tanto de manera gráfica como numérica con la sucesión generada por la iteración, el término general puede escribirse como una función de n.

Según Bloch (2000): "*Los alumnos no tienen ninguna razón para poner en duda, a su nivel, el hecho que el límite del perímetro es el perímetro de la figura límite*".

Una aproximación experimental del límite por el cálculo puede permitir conjeturar dos casos, el límite es finito (en este caso el área) o el límite es infinito (en este caso el perímetro) y si bien el alumno del nivel medio o de un primer curso en la universidad no dispone de los conocimientos suficientes para dilucidar este problema, resulta interesante presentarle ambos casos para que puedan construir las nociones y criterios en lo que hace a dos sucesiones diferentes y poder comparar que no son de la misma naturaleza.

En las primeras generaciones, las figuras son fácilmente realizables por los alumnos. La curva límite no es fácil de describir: un perímetro expresado por una sucesión en la cual la expresión del término general no es tan complicada y que tiene propiedades curiosas que no pueden determinarse más que por pasaje al límite (Oviedo, 2003).

Notas

1) En el cálculo del valor del área, en cada etapa aparecen los términos de la sucesión generada por la serie geométrica donde a = 3 y la razón $r = \frac{4}{9}$.

2) Recordemos que una serie geométrica responde a la siguiente expresión

$$\sum_{1}^{\infty} a\,r^{n-1} = a + a\,r + a\,r2 + \ldots$$

Cada término se obtiene del anterior multiplicando por la razón común r.

Si r = 1, entonces la suma de los n primeros términos $s_n = a + a + a + a + \ldots + a = n\,a$ y la suma total de la serie es $s = \lim\limits_{n\to\infty} n\,a = \infty$, dicho límite no existe y en consecuencia la serie diverge.

Si r = 1, se tiene:

$$s_n = a + a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \ldots + a\,r^{n-1}$$

$$r\,s_n = \quad a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \ldots + a\,r^{n-1} + a\,r^n$$

Restando estas ecuaciones:

$$s_n - r\,s_n = a - a\,r^n \ \text{ y } \ s_n(1 - r) = a\,(1 - r^n)$$

luego la suma de los n primeros términos de la serie será:

$$sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

si -1 < r < 1, entonces $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, así que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{(1-r)}$$

Así cuando ê r ê< 1, la serie geométrica es convergente y su suma es $\frac{a}{(1-r)}$.

Si ê r ê> 1, la sucesión $\{r^n\}$ es divergente y el $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, es decir no existe y la serie geométrica diverge.

En el caso del cálculo del área del fractal copo de nieve, la expresión para la iteración n-sima es:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{9} + 3\frac{4}{9^2} + 3\frac{4^2}{9^3} + \ldots + 3\frac{4^{n-1}}{9^n}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sum_{1}^{n} 3\frac{4^{n-1}}{9^n}\right)$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\sum_{1}^{n} 3\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$$

luego el área total es $A = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{5}\right)$.

Hoja de trabajo 6

Relación con el currículo

Congruencia.
Construcciones geométricas.
Semejanza.
Visualización.
Concepto de límite.

Autosemejanza

Objetivos

1. Analizar el significado de autosemejanza.

2. Reconocer fractales autosemejantes y estrictamente autosemejantes.

Desarrollo

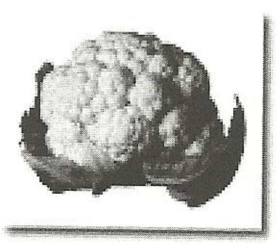
Cuando hablamos de fractales decimos que son figuras autosemejantes, es decir, las partes de los mismos son pequeñas réplicas del todo.

Peitgen, Maletsky y otros (1991), al introducir el concepto de autosemejanza dan el siguiente ejemplo:

"Consideremos la portada de un libro que contiene una fotografía de una mano sosteniendo a un libro. La portada del libro mostrada en la fotografía contiene a la misma mano sosteniendo el mismo libro, el que en su propia portada muestra la misma mano sosteniendo al libro y así una y otra vez.

Si pudiéramos introducirnos más y más profundamente dentro de la portada del libro, veríamos siempre la imagen de una mano que sostiene a un libro. Esta es la propiedad de autosemejanza"

En la naturaleza, a menudo, nos encontramos con objetos que presentan estas características, por ejemplo la hoja de un helecho, la coliflor, el brócoli, etc.



Existen diferentes grados de autosimilaridad y se dice que un objeto es estrictamente autosimilar cuando puede ser descompuesto en partes que son réplicas exactas del todo, es decir cada parte arbitraria es una copia exacta del objeto completo en una escala determinada.

a) ¿Qué puede decir usted en cuanto a la autosemejanza de un gajo de la coliflor con respecto a la coliflor completa? ¿Y del brócoli? ¿Qué otros objetos autosemejantes puede encontrar en la naturaleza?

Si observamos un conjunto de circunferencias concéntricas, Figura a, podemos preguntarnos si en dicha figura existe autosimilitud

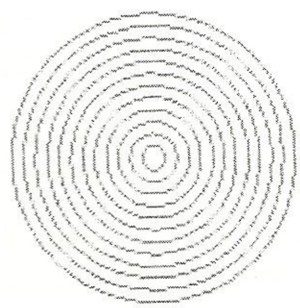


Figura a

Si consideramos arbitrariamente partes de la misma, Figura b y Figura c, vemos que dichas partes no son iguales al todo. Ahora bien, si escogemos una parte que contenga el centro, Figura d, vemos que es autosemejante.

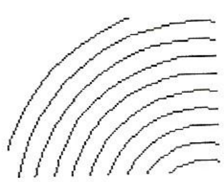


Figura b

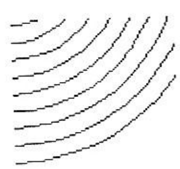


Figura c

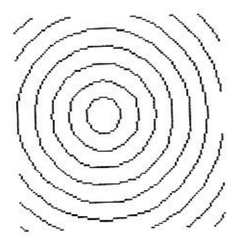


Figura d

En el caso de los árboles, cuando éstos crecen expandiéndose en conjuntos similares de ramas, vemos que a medida que éstas aumentan se hacen más y más parecidas. Sin embargo, recién cuando el árbol ha alcanzado su crecimiento completo podemos decir que existe la autosimilaridad en sentido estricto.

b) Explique por qué sólo el árbol completo es estrictamente autosemejante. Recuerde la definición.

c) Considere el triángulo de Sierpinski y seleccione cualquier porción de cualquier tamaño que contenga una parte sombreada, ¿será una réplica exacta del triángulo completo? ¿es el triángulo de Sierpinski estrictamente autosemejante?

¿Puede mencionar qué otros fractales de los ya vistos cumplen con esta propiedad?

Hoja de trabajo 7

Un aproximación a la dimensión fractal

Relación con el currículo
Construcciones geométricas. Construcciones numéricas. Visualización.

Objetivos

1. Analizar el significado de dimensión.
2. Determinar la dimensión de ciertos fractales ya vistos.

Desarrollo

La noción de dimensión fractal provee un modo de medir cuán rugosa es una curva o una superficie. Existe una manera numérica muy accesible de medir el grado de rugosidad de un fractal. En un principio se la denominó dimensión de Hausdorff- Besicovitch en honor a los dos matemáticos que la inventaron y desarrollaron. Actualmente se conoce como dimensión fractal.

De la geometría clásica sabemos que la dimensión es un número entero, por ejemplo una recta tiene dimensión 1, un plano dimensión 2 y un cubo dimensión 3. Intuitivamente vemos que en la recta existe esencialmente una dirección posible sobre la cual moverse, en el plano dos y en el espacio tres. Pero esta idea no nos permite calcular la dimensión, por ejemplo, del triángulo de Sierpinski pues si nos ubicamos en un punto del triángulo en la etapa 0, las direcciones posibles serían las del plano (dimensión 2) y si pensamos en la forma final del fractal de Sierpinski, hay sólo una dirección (dimensión 1). En realidad la dimensión del triángulo de Sierpinski es un número comprendido entre 1 y 2, es decir la dimensión no es un número entero. En un primer momento esto puede resultar ridículo, ¿cuál es el sentido de decir que algo tiene dimensión 1,5?

En realidad un fractal ocupa más espacio que una curva uniforme pero menos que una superficie.

Obtendremos, a continuación, una fórmula para el cálculo de la dimensión de fractales autosemejantes como los vistos en el curso, comenzando con los casos de dimensión entera conocidos: recta, cuadrado y cubo. Cabe aclarar:

- La recta es un objeto autosemejante ya que si consideramos un segmento y lo dividimos en cuatro segmentos de igual longitud, a cada trozo se lo puede dilatar por un factor 4 y obtener el segmento original. Lo mismo ocurriría si lo dividimos en 15 partes iguales y a una parte la dilatamos por un factor 15. En general podemos romper una línea en n pedazos autosemejantes, cada uno con un factor de dilatación n.

• En el caso de un cuadrado, éste puede subdividirse en 4 subcuadrados autosemejantes y aquí el factor de dilatación es 2. Si lo rompemos en 9 partes autosemejantes, el factor de dilatación (o magnificación) será 3.

• Un cuadrado de lado 1 se puede dividir en n^2 subcuadrados autosimilares donde el lado del cuadrado original se divide en n partes cada una de longitud 1/n; luego el factor de dilatación es n.

He aquí una manera de distinguir la dimensión de un objeto, el exponente en cada uno de los casos es siempre el mismo y es, precisamente, la dimensión.

Formalicemos este procedimiento para definir la dimensión D, la cual nos será útil para encontrar posteriormente la dimensión fractal. Si uno quiere encontrar el exponente puede recurrir al logaritmo del número de piezas en el que el objeto ha sido subdividido.

Así, para la recta se obtiene:

$$\log(\text{número de piezas}) = \log(n^1) = 1 \log n,$$

para el cuadrado:

$$\log(\text{número de piezas}) = \log(n^2) = 2 \log n$$

y para el cubo:

$$\log(\text{número de piezas}) = \log(n^3) = 3 \log n$$

Recordemos que hemos dividido a la recta, al cuadrado y al cubo en piezas que, al magnificarse o dilatarse por un factor n, dan la figura original. Así si dividimos el logaritmo del número de piezas por el logaritmo del factor de magnificación se obtiene la dimensión D, luego D está dada por la siguiente fórmula:

$$D = \frac{\log(\text{númerodepiezas})}{\log(\text{factordedilatación})} \quad (1)$$

entonces para la recta, el cuadrado y el cubo D es 1, 2, 3 respectivamente.

Encontremos la dimensión del triángulo de Sierpinsky, S. Sabemos que la dimensión viene dada por la expresión (1). En la primera etapa (ver Hoja de Trabajo 2) se obtienen tres piezas autosemejantes y el factor de dilatación es 2, luego la dimensión:

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}58$$

La dimensión de S, en esta primera etapa, está comprendida entre 1 y 2. Ahora bien, en la segunda etapa S tiene 9 subtriángulos autosemejantes y el factor de magnificación es 4, luego:

$$D = \frac{\log 9}{\log 4} = \frac{\log 3^2}{\log 2^2} = \frac{2 \log 3}{2 \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}58$$

y, en la etapa n:

$$D = \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \frac{n \log 3}{n \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}58$$

Luego para el triángulo de Sierpinski la dimensión fractal es aproximadamente 1,58.

La dimensión fractal es una manera de indicar la complejidad de una figura autosemejante.

De cierto modo decimos que "mide cuántos puntos" yacen o están en un conjunto dado. La dimensión del plano es más grande que la de la recta mientras que S se ubica en algún lugar entre esos dos conjuntos. Su dimensión es mayor que la dimensión de la recta y menor que la del plano.

De otro modo, los tres subtriángulos formados en la etapa 1 tienen el mismo número de puntos en el sentido que cada conjunto de puntos es incontable. De alguna manera se piensa que la dimensión fractal captura la noción de "cuán grande un conjunto es" bastante bien.

Ejercicio

Calcule la dimensión de los siguientes fractales:

a. Conjunto del tercio medio de Cantor.

b. Conjunto del quinto medio de Cantor.

c. Triángulo y Carpeta de Sierpinski.

d. Curva de von Koch y del Copo de Nieve.

e. Dragón.