

Estabilidad para sistemas lineales

Sistema de ecuaciones autonomo

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x}' = \varphi(t, \mathbf{x})$$

Si la variable independiente t no aparece explícitamente en las ecuaciones del sistema, es decir, el sistema es de la forma

$$\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{x})$$

Donde

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

se dice que **el sistema de ecuaciones es autónomo**.

A partir de ahora trabajaremos con sistemas autónomos. Estos sistemas presentan la particularidad de que si $\mathbf{x}(t)$ es una solución, entonces $\mathbf{x}(t + c)$ también es solución para cualquier constante c .

Plano de fase

Un sistema autónomo plano es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}$$

donde supondremos que F y G son funciones continuas y con derivadas parciales de primer orden continuas en todo el plano.

Cada solución del sistema es un par de funciones $x(t)$ e $y(t)$ que definen una curva $C \equiv [x(t), y(t)]$ en el plano XY o plano de fases. Obsérvese que cada punto de la curva C nos determina el estado del sistema en un instante t correspondiente a una condicione inicial determinada, y que por ello es de gran interés el conocimiento de este tipo de curvas, que se suelen llamar trayectorias u órbitas. En cada punto (x, y) de una órbita, el vector $(F(x, y), G(x, y))$ es un vector tangente a dicha órbita, por eso el conjunto de vectores $(F(x, y), G(x, y))$ se llama campo de direcciones del sistema.

Punto critico

Debe observarse que una solución en la que $x(t) = x_0$ e $y(t) = y_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ define únicamente un punto (x_0, y_0) en el plano de fases y verifica que $F(x_0, y_0) =$

$G(x_0, y_0) = 0$. Se dice entonces (x_0, y_0) es un punto crítico o un equilibrio del sistema. Cada punto del plano de las fases o bien es un punto crítico o bien por él pasa una única trayectoria.

Supondremos en lo que sigue que los puntos críticos de los sistemas autónomos que consideremos están aislados, esto es, existe un entorno del punto crítico donde no hay otro punto crítico. Además, supondremos que el punto crítico aislado a estudiar es el $(0, 0)$.

1. Se dice que el punto crítico $(0,0)$ del sistema es **estable** si para todo número $R > 0$, existe algún $r > 0$, $r \leq R$, tal que cada trayectoria que está dentro del círculo $x^2 + y^2 = r^2$ en algún momento $t = t_0$, permanezca dentro del círculo $x^2 + y^2 = R^2$ para todos los $t > t_0$: esto es, si una trayectoria está cerca del punto de equilibrio, se mantendrá cerca a lo largo del tiempo.
2. Se dice que el punto crítico $(0,0)$ del sistema es **asintóticamente estable**, cuando es estable y existe algún número $r_0 > 0$, tal que toda trayectoria que está dentro del círculo $x^2 + y^2 = r_0^2$ en algún momento $t = t_0$, se aproxime al origen cuando $t \rightarrow +\infty$. La expresión "se aproxime al origen cuando $t \rightarrow +\infty$ " se deberá entender de la siguiente forma: si $C \equiv (x(t), y(t))$ es una trayectoria, deberá verificarse que $x(t) \rightarrow 0$, e $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$; es decir, las trayectorias cercanas no sólo se mantienen cerca, sino que se aproximan al punto de equilibrio a lo largo del tiempo.
3. Se dice que el punto crítico $(0,0)$ del sistema es **inestable** cuando no es estable: las trayectorias que empiezan cerca del punto de equilibrio se alejan de este punto a lo largo del tiempo.

Clasificación de los puntos de equilibrio en sistemas lineales

Veremos seguidamente que, en el caso de los sistemas autónomos lineales, la naturaleza y estabilidad del punto crítico queda caracterizada por los autovalores de la matriz del sistema. Consideremos un sistema autónomo lineal

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases}$$

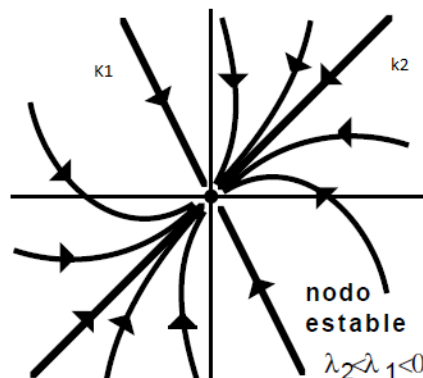
para el que $(0, 0)$ es su único punto crítico. Esto equivale a que la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ del sistema tenga determinante no nulo, y por ello que los autovalores λ_1, λ_2 sean diferentes de cero. En función del comportamiento de las trayectorias en relación con el punto crítico aislado $(0, 0)$, el punto crítico se denominará: nodo, punto de silla, centro, o foco.

Valores propios reales distintos y negativos (nodo estable)

Si λ_1, λ_2 , son valores propios de A tales que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$
 En este caso, toda solución es de la forma

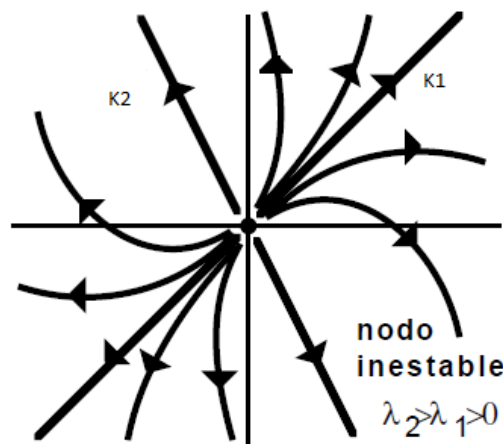
$$x = c_1(K_1 e^{\lambda_1 t}) + c_2(K_2 e^{\lambda_2 t}).$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, entonces de acuerdo a la ecuación anterior $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ decimos que el punto crítico (0,0) es un **nodo (estable) o sumidero nodal**.



Valores propios reales distintos y positivos (nodo inestable)

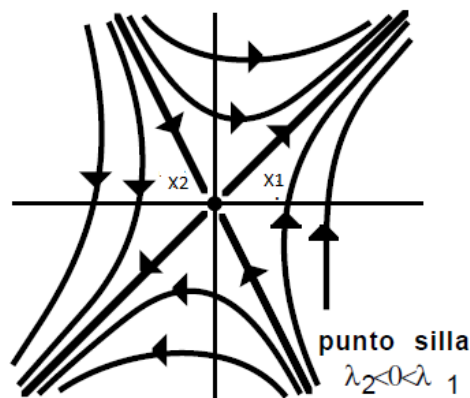
Si λ_1, λ_2 , son valores propios de A tales que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$
 Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, entonces de acuerdo a la ecuación anterior $x(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ decimos que el punto crítico (0,0) es un **nodo (inestable) o sumidero nodal**.



Valores propios reales distintos y de signo opuesto (punto de silla)

Si λ_1, λ_2 , son valores propios de A tales que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$
 Si $\lambda_1 > 0$, entonces de acuerdo a la ecuación anterior $x_1(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$
 Si $\lambda_2 < 0$, entonces de acuerdo a la ecuación anterior $x_2(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

decimos que el punto crítico $(0,0)$ es un **punto de silla inestable**.



Valor propio real repetido (nodo degenerado)

Hay un único valor propio real de multiplicidad dos: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

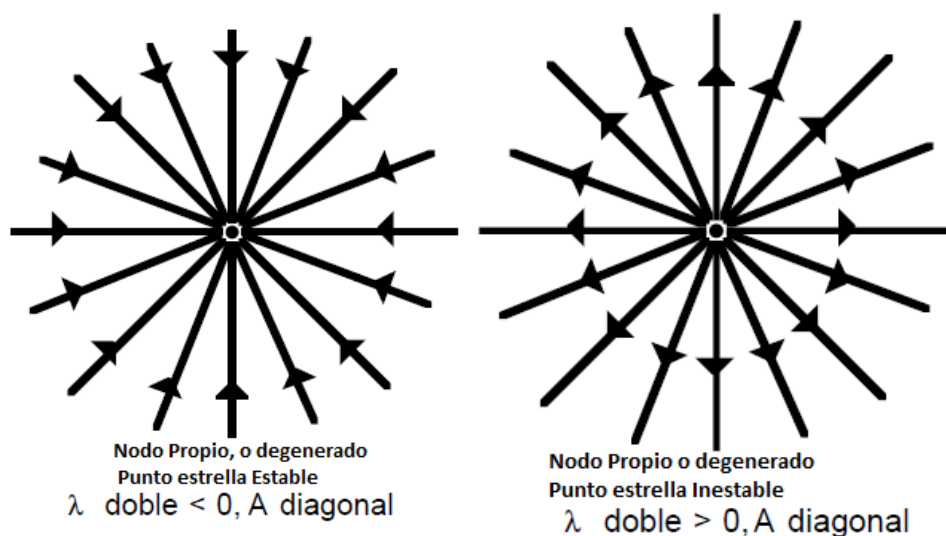
Dos vectores propios linealmente independientes (nodo propio degenerado)

Si se pueden conseguir dos vectores propios K_1 y K_2 linealmente independientes asociados

al valor propio λ entonces toda solución puede reescribirse como

$$x = (c_1 K_1 + c_2 K_2) e^{\lambda t}.$$

En este caso el punto crítico $(0,0)$ se dice nodo propio, nodo degenerado o punto estrella y es estable o inestable según $\lambda < 0$ o $\lambda > 0$ respectivamente.



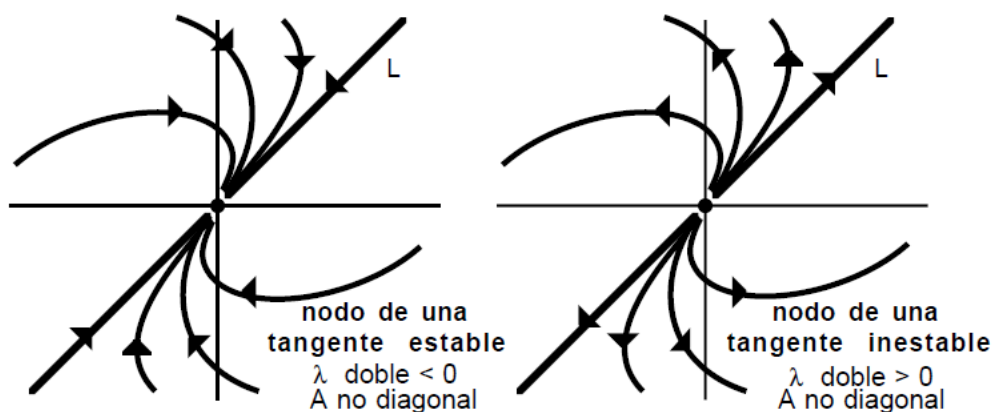
Un solo vector linealmente independiente (nodo impropio degenerado)

En el caso de conseguir solo vector propio K_1 linealmente independiente asociado al valor propio λ . Las soluciones son de la forma:

$$x = c_1(K_1 e^{\lambda t}) + c_2(K_1 t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t}).$$

El comportamiento de todas las soluciones $x = x(t)$ es similar: la recta determinada por K_1 es una asíntota y si $\lambda > 0$, entonces de acuerdo a la ecuación anterior $x_1(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y si $\lambda < 0$, entonces de acuerdo a la ecuación anterior $x_1(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$

En este caso el punto crítico $(0,0)$ se dice nodo impropio estable o nodo degenerado estable si $\lambda < 0$ o nodo impropio inestable o nodo degenerado inestable si $\lambda > 0$



Valores propios complejos conjugados (centro, punto de espiral)

los valores propios de A son complejos conjugados: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ la solución tiene la forma:

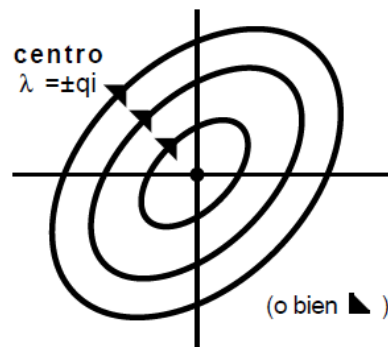
$$x = c_1 e^{at} (B_1 \cos(bt) - B_2 \sin(bt)) + c_2 e^{at} (B_2 \cos(bt) + B_1 \sin(bt)).$$

Valor propio imaginario puro

Si λ_1 es un imaginario puro y la solución se puede escribir como

$$x = C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt),$$

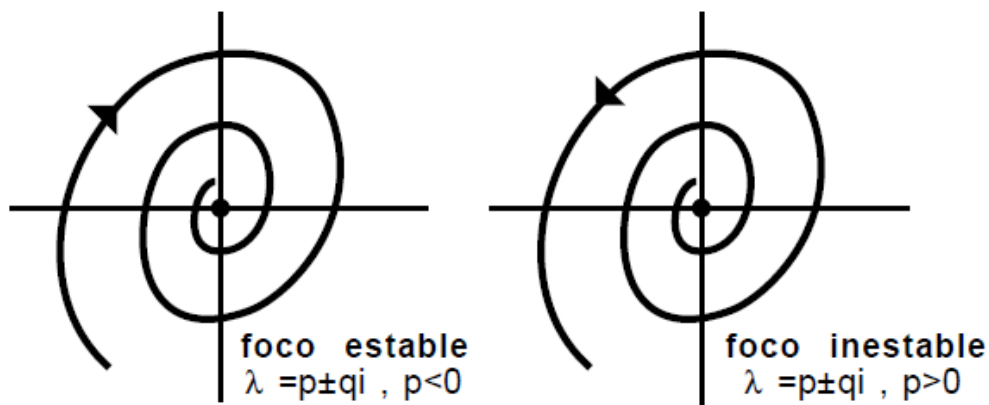
donde C_1 y C_2 son vectores constantes. Esto implica que todas las soluciones son periódicas con periodo $2\pi/b$ que se corresponden a elipses centradas en el origen. En este caso el punto crítico $(0,0)$ se llama **centro** y la orientación de todas las orbitas es la misma.



Valor propio con parte real no nula

Si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ el punto crítico se llama un **punto espiral** y es estable cuando $\alpha < 0$ e inestable cuando $\alpha > 0$.

Cuando el punto espiral es estable se le llama también sumidero espiral y cuando es inestable fuente espiral.



Utilidad de la estabilidad en la ingeniería

Supongamos que tenemos un sistema de ED lineales no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

donde $A \in M_{n \times n}(\mathcal{R})$ y supongamos que el sistema homogéneo asociado es asintóticamente estable. Entonces toda solución del sistema homogéneo (las raíces de $p(\lambda) = 0$ tienen parte real negativa) verifica que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_h(t) = \mathbf{0}.$$

Como la solución general del sistema no homogéneo es de la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t),$$

donde $x_h(t)$ es la solución general del sistema homogéneo y $x_p(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo, si tomamos límites cuando t tiende a infinito, tenemos que

$$x(t) \simeq x_p(t),$$

es decir, para tiempos grandes (aquí lo de grande depende de cada sistema) la solución del sistema no homogéneo es básicamente la solución particular del mismo y la parte correspondiente al sistema homogéneo se va reduciendo con el tiempo.

En ingeniería a la función $f(t)$ se le llama entrada del sistema y $x_p(t)$ es la salida del mismo. Si el sistema es asintóticamente estable, al variar la entrada, varía la salida sin que la parte homogénea intervenga en el proceso.

Esto es lo que ocurre en la mayoría de los sistemas lineales utilizados en las ciencias experimentales, como en circuitos o vibraciones mecánicas.

Estabilidad de Lyapunov Ejercicio resuelto

Sea el sistema

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot X$$

Sabemos que el sistema es asintóticamente estable si se cumple que:

$$V(\|x\|) > 0 \quad y \quad V(\|x\|)' < 0$$

Tomamos como función de Lyapunov a la expresión cuadrática

$$V(\|x\|) = x^t \cdot M \cdot x > 0$$

$$V(\|x\|)' = x^t \cdot (A^t \cdot M + M \cdot A) x < 0$$

Encontrar

Se define a $P = A^t \cdot M + M \cdot A = -N$ como **ecuación de Lyapunov**. La estabilidad asintótica del sistema lineal está asegurada si siendo P una matriz **simétrica definida negativa**, se puede encontrar M una matriz simétrica definida positiva.

$$P = A^t \cdot M + M \cdot A = -N$$

Resolviendo

A) Determinamos los Autovalores de A.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$$

En Octave

```
>> A=[0 1;-2 -3];
>> eig(A)
ans =
-1
-2
```

B) Encontramos la matriz M

Sea $N = I$ y $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$A^t \cdot M + M \cdot A = -N$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2b & -2c \\ a-3b & b-3c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2b & a-3b \\ -2c & b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4b & a-3b-2c \\ a-3b-2c & 2b-6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -4b &= -1 \\ a - 3b - 2c &= 0 \\ a - 3b - 2c &= 0 \\ 2b - 6c &= -1 \end{aligned}$$

$$a = \frac{5}{4} \quad b = \frac{1}{4} \quad c = \frac{1}{4}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Debemos comprobar

$$V(\|x\|) = x^t \cdot M \cdot x > 0 \rightarrow (x_1 \quad x_2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} > 0$$

$$V(\|x\|) = \frac{5}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2$$

Calculamos los autovalores de M

$$\det(M - \lambda I) = 0 \quad \lambda_1 = 0.19 \quad \lambda_2 = 1.31$$

Como los autovalores de M son todos positivos la ecuación $V(\|x\|) > 0$

Calculos Ocave

```
>> pkg load symbolic
```

```
>> A=[0 1;-2 -3]
```

```
A =
```

```
0 1
-2 -3
```

```
>> eig(A)
```

```
ans =
```

```
-1
-2
```

```
>> A=[0 1;-2 -3];
```

```
>> eig(A)
```

```
ans =
```

```
-1
-2
```

```
>> syms a b c
```

```
>> M=[a b;b c]
```

```
M = (sym 2x2 matrix)
```

```
[a b]
[ ]
[b c]
```

```
>> T1=A'*M
```

```
T1 = (sym 2x2 matrix)
```

```
[ -2*b    -2*c ]
[          ]
[a - 3*b  b - 3*c]
```

```
>> T2=M*A
```

```
T2 = (sym 2x2 matrix)
```

```
[-2*b  a - 3*b]
[          ]
[-2*c  b - 3*c]
```

```
>> T1+T2
```

```
ans = (sym 2x2 matrix)
```

```
[ -4*b      a - 3*b - 2*c]
[                               ]
[a - 3*b - 2*c  2*b - 6*c ]
```

```
>> S=[0 -4 0;1 -3 -2;1 -3 -2;0 2 -6]
```

```
S =
```

```
0 -4 0
1 -3 -2
1 -3 -2
0 2 -6
```

```
>> R=[-1;0;0;-1]
```

```
R =
```

```
-1
0
0
-1
```

```
>> linsolve(S,R)
```

```
ans =
```

```
1.25000
0.25000
0.25000
```

```
>> x=[x1;x2]
```

```
x = (sym 2x1 matrix)
```

```
[x1]
[ ]
[x2]
```

```
>> M=[1.25 0.25;0.25 0.25]
```

```
M =
```

```
1.25000 0.25000
0.25000 0.25000
```

```
>> V=x'*M*x
```

```
 / ____ \  / ____ \
 |5*x1  x2| |x1  x2|
x1*|---- + --| + x2*|-- + --|
 \ 4    4 /  \ 4    4 /
```

```
>> eig(M)
```

```
ans =
```

```
0.19098
1.30902
```