Función de Transferencia
Matemática Superior

Función de Transferencia

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sistema}} \longrightarrow y(t)$$

- **La función de transferencia de sistema lineal invariante en el tiempo esta definida como la razón de la transformada de Laplace de la salida del sistema (o función de respuesta) a la transformada de Laplace de la entrada del sistema (o función de fuerza).**
- **Se considera que todas las condiciones iniciales son cero, el sistema esta inicialmente en un estado de reposo.**

Función de Transferencia

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sistema}} \longrightarrow y(t)$$

(suponiendo condiciones iniciales nulas)

$$\alpha_0 y(t) + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \cdots + \alpha_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \beta_0 x(t) + \beta_1 \frac{dx(t)}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \cdots + \beta_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

Laplace

$$Y(s) \cdot A(s) = X(s) \cdot B(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{B(s)}{A(s)}}_{F(s)} \cdot X(s) = F(s) \cdot X(s)$$

$$A(s) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot s^i$$

$$B(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$$

Salida = F.de transferencia $\times$ Entrada

Ventajas de la Función de Transferencia

- Es una representación compacta de un sistema lineal como cociente de polinomios en *s*.
- Permite predecir la forma de las señales sin necesidad de resolver la ecuación diferencial.
- Tiene una interpretación inmediata en la frecuencia: $s=jw$
- Es una propiedad del sistema: independiente de la magnitud y la naturaleza de la señal de entrada.
- Si se desconoce la ecuación diferencial que describe el sistema, se puede obtener su Función de Transferencia de forma experimental, excitando al sistema con entradas conocidas y estudiando su respuesta.

Función de transferencia

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=k\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

$$A(s)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\cdot s^i$$

$$B(s)=\sum_{i=0}^{m}\beta_i\cdot s^i$$

- Los grados de los polinomios cumplen que $n \geq m$
- La ecuación A(s) se denomina **ecuación característica** del sistema y su orden determina el orden del sistema.
- Las **raíces de A(s)** se denominan **polos** de la función de transferencia. Se representan gráficamente por una X.
- Las **raíces de B(s)** se denominan **ceros** de la función de transferencia. Se representan gráficamente por un ○.
- K es la razón de los coeficientes principales de ambos polinomios. Se lo interpreta como la ganancia en estado estacionario, mide la sensibilidad del sistema.

Ejemplo

La respuesta x(t) de un sistema a una función u(t) esta determinada por la ecuación diferencial:

$$9x'' + 12x' + 13x = 2u' + 3u$$

- Determinar la función de transferencia que caracteriza al sistema
- Proporcionar la ecuación característica del sistema. ¿Cuál es su orden?
- Determinar los polos y ceros de la función de transferencia y graficarlos en el plano s.

$$9x'' + 12x' + 13x = 2u' + 3u$$

- **Determinar la función de transferencia que caracteriza al sistema**

Aplicamos la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}9x'' + \mathcal{L}12x' + \mathcal{L}13x = \mathcal{L}2u' + \mathcal{L}3u$$

$$\Downarrow$$

$$(9s^2 + 12s + 13)X(s) = (2s + 3)U(s)$$

$$\mathrm{X}(s) = \frac{(2s+3)}{(9s^2+12s+13)} . Us()$$

$$\mathrm{G}(s) = \frac{(2s+3)}{(9s^2+12s+13)}$$ Función de trasferencia

- **Proporcionar la ecuación característica del sistema. ¿Cuál es su orden?**

Ecuación característica: $9s^2 + 12s + 13 = 0$

El sistema es de orden 2.

- **Determinar los polos y ceros de la función de transferencia y graficarlos en el plano s.**

Ceros:

$$2s + 3 = 0$$

$$\boldsymbol{s = \frac{-3}{2}}$$

Polos $9s^2 + 12s + 13 = 0$

$$s_1 s_2 = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4.9.13}}{2.9}$$

$$s_1 s_2 = \frac{-12 \pm \sqrt{-324}}{18}$$

$$s_1 = \frac{-12 + 18i}{18}$$

$$s_2 = \frac{-12 - 18i}{18}$$

$$s_1 = \frac{2}{3} + i$$

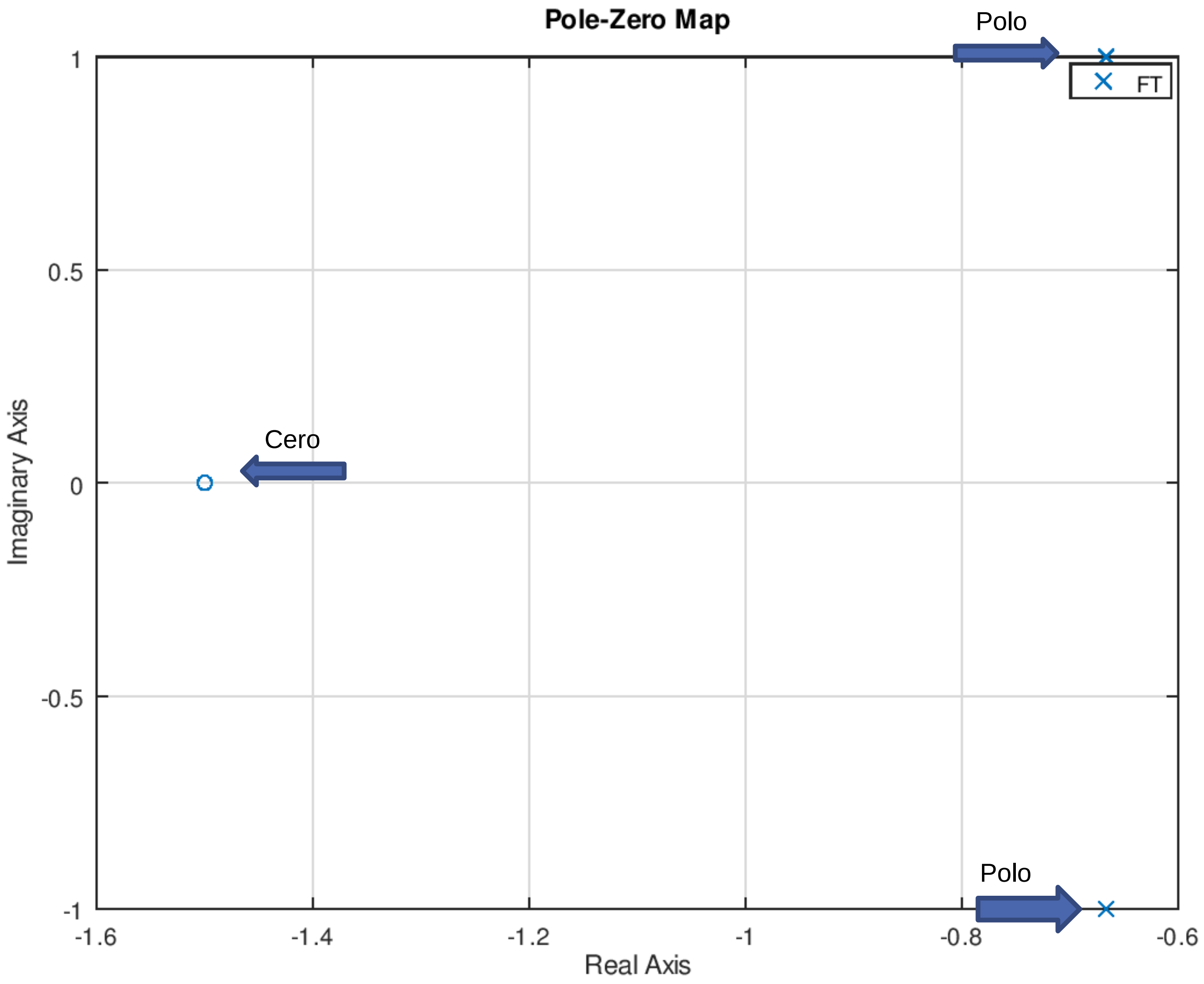
$$s_2 = \frac{2}{3} - i$$

Usando Octave

```
>> syms s

>> %definir los polinomios A(s) y B(s)

>> A=[9 12 13];

>> B=[2 3];

>> %Asignamos la función de transferencia

>> FT= tf(B,A)

          2 s + 3
 y1:  -----------------
      9 s^2 + 12 s + 13
```

Usando Octave

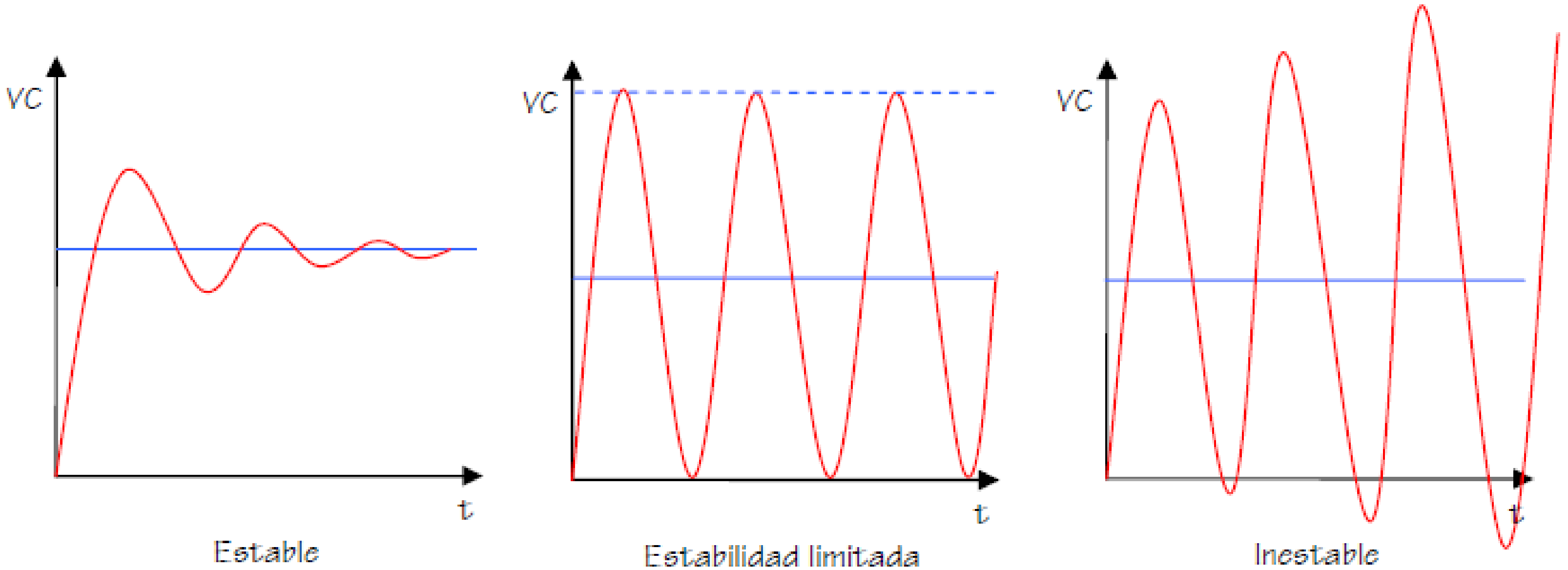
```
>> %calculamos los ceros de la función de transferencia

>> ceros=zero(FT)
ceros = -1.5000

>> %calculamos los polos de la función de transferencia
>> polos=pole(FT)
polos =

  -0.6667 + 1.0000i
  -0.6667 - 1.0000i

>> %graficamos los ceros y polos

>> pzmap(FT)
```



Pole-Zero Map
Polo
FT
Cero
Polo
Imaginary Axis
Real Axis
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.6
-1.4
-1.2
-1
-0.8
-0.6

Estabilidad

1. Un sistema es estable si responde en forma limitada a una excitación limitada.
2. Un sistema estable es aquel en que los transitorios decaen, es decir, la respuesta transitoria desaparece para valores crecientes del tiempo.



Estabilidad

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

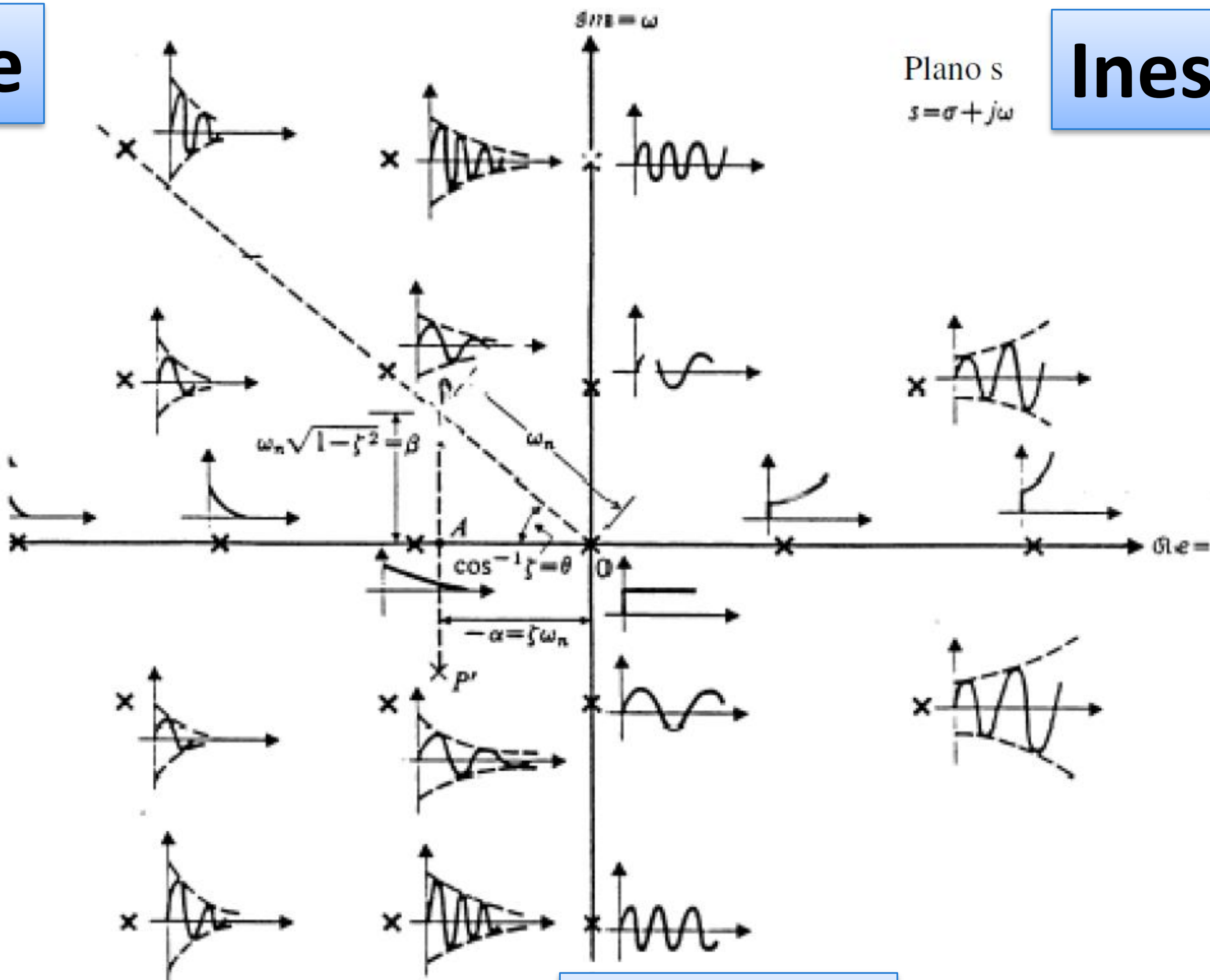
Factor	Término
1) s	1
2) s^2+b^2	$\cos bt,\quad \sin bt$
3) $s-a$	e^{at}
4) $(s-a)^2+b^2$	$e^{at}\cos bt,\quad e^{at}\sin bt$
5) $s^n,\ n>1$	$t^k,\ k\le n-1$
6) $(s^2+b^2)^n,\ n>1$	$t^k\cos bt,\quad t^k\sin bt,\ k\le n-1$
7) $(s-a)^n,\ n>1$	$t^k e^{at},\ k\le n-1$
8) $((s-a)^2+b^2)^n,\ n>1$	$t^k e^{at}\cos bt,\quad t^k e^{at}\sin bt,\ k\le n-1$

Un sistema lineal causal invariante en el tiempo físicamente realizable con función de transferencia G(s) es estable siempre que todos los polos de G(s) estén en la mitad izquierda del plano s

Localización de las raíces

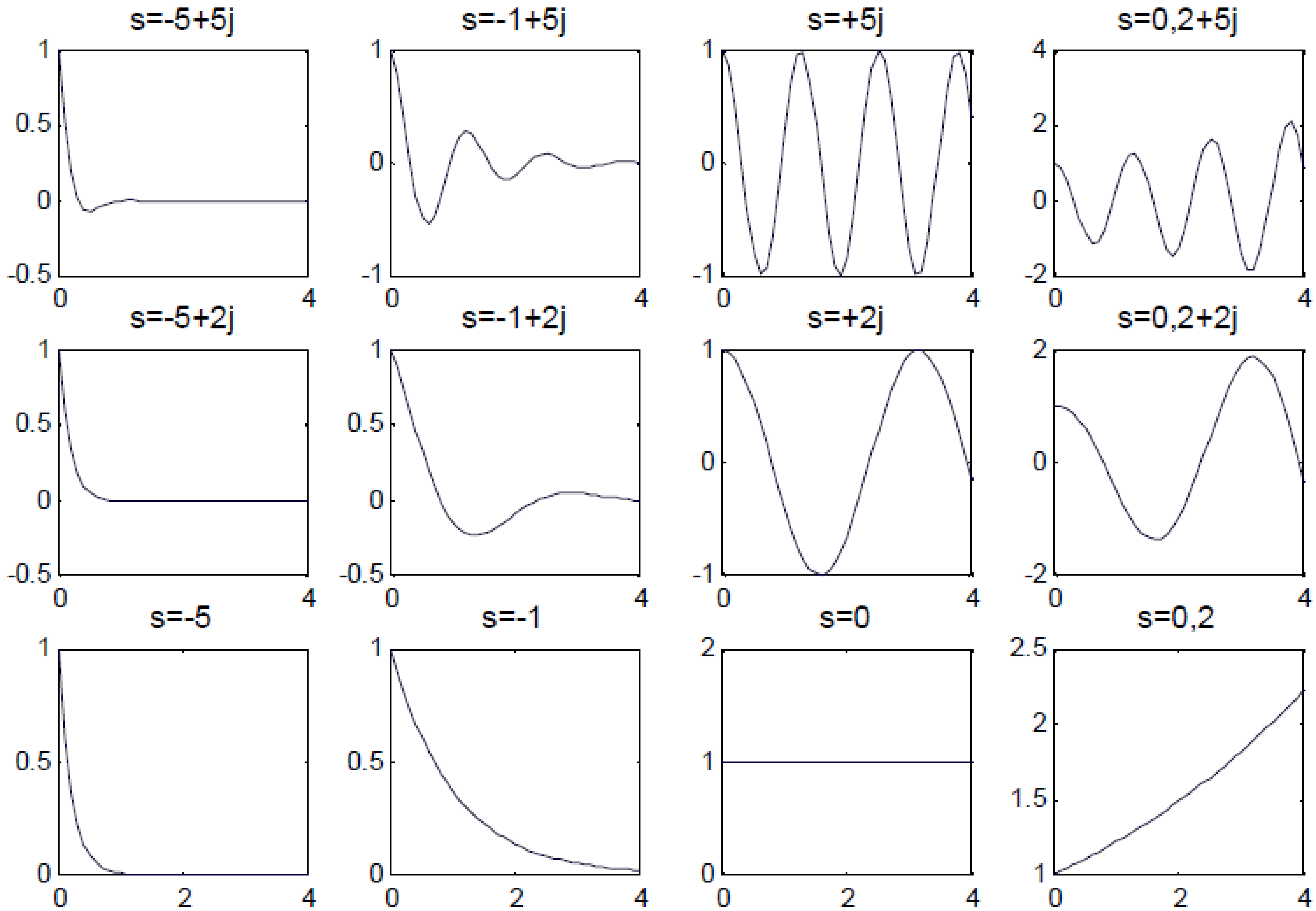
Estable

Inestable



Marginalmente Estable

Localización de las raíces



Criterio de estabilidad de Hurwitz

Dada una ecuación característica

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Una condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación característica tengan partes reales negativas es que los determinantes $\Delta_1, \Delta_2, \ldots.$ Δ_n sean positivos.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ impar} \\ a_1 \text{ si } n \text{ par} \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \cdots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ par} \\ a_1 \text{ si } n \text{ impar} \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ impar} \\ a_1 \text{ si } n \text{ par} \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ par} \\ a_1 \text{ si } n \text{ impar} \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & & \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & a_0 \end{vmatrix}$$

Este criterio se aplica por medio del uso de determinantes formados con los coeficientes de la ecuación característica

n es el grado de la ecuación característica

Criterio de estabilidad de Hurwitz

Los determinantes se forman de la siguiente manera:

$$\Delta_1 = \left| a_{n-1} \right| ;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} ;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} ;\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{vmatrix}$$

Criterio de estabilidad de Hurwitz

$$8s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 3s + 5 = 0$$

$a_4 = 8 \quad a_3 = 5 \quad a_2 = 6 \quad a_1 = 3 \quad a_0 = 5 \quad n = 4$

$$\Delta_1 = \left|a_{n-1}\right| \qquad \Delta_1 = a_3 \qquad \Delta_1 = 5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -107$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{vmatrix} \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 5\Delta_3 = -535$$

El sistema es inestable

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 6 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -107 \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 5\Delta_3 = -535$$

```
>> A=[5 3;8 6]

A =

     5     3
     8     6

>> Det= det(A)

Det =

     6
```

```
>> A=[5 3 0;8 6 5;0 5 3]

A =

     5     3     0
     8     6     5
     0     5     3

>> Det =det(A)

Det =

  -107
```

```
>> A=[5 3 0 0;8 6 5 0;0 5 3 0;0 8 6 5]

A =

     5     3     0     0
     8     6     5     0
     0     5     3     0
     0     8     6     5

>> Det=det(A)

Det =

  -535
```

Ejemplo

Tenemos la siguiente función de transferencia, y queremos saber que valores deberá tomar la constante k para que el sistema sea estable.

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 4s + 10k}$$

Ecuación característica

$$s^3 + 5s^2 + 4s + 10k = 0$$

Ecuación característica $s^3 + 5s^2 + 4s + 10k = 0$

$a_3 = 1$ $a_2 = 5$ $a_1 = 4$ $a_0 = 10k$ $n = 3$

$$\Delta_1 = |a_{n-1}| \qquad \Delta 1 = |a_2| \qquad \Delta 1 = |5| \qquad \Delta 1 = 5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \qquad \Delta 2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} \qquad \Delta 2 = \begin{vmatrix} 5 & 10k \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \qquad \Delta 2 = 20 - 10\text{k}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad \Delta 3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \qquad \Delta 3 = \begin{vmatrix} 5 & 10k & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 10k \end{vmatrix} \qquad \Delta 3 = 200k - 20k^2$$

Ecuación característica $s^3 + 5s^2 + 4s + 10k = 0$

$a_3 = 1$ $a_2 = 5$ $a_1 = 4$ $a_0 = 10k$ $n = 3$

$\Delta 1 = 5$

$\Delta 2 = 20 - 10\mathrm{k}$

$20 - 10\mathrm{k} > 0$

$\mathrm{k} < 2$

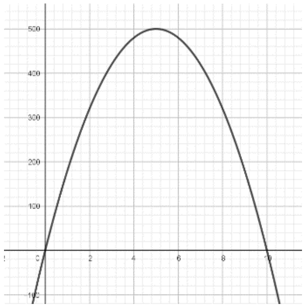
$\Delta 3 = 200k - 20k^2$

$200k - 20k^2 > 0$

$k.(200 - 20k) > 0$

$k.(200 - 20k) > 0$

$k \in (0; 10)$



$Para\ que\ el\ sistema\ sea\ estable\ \ k \in (0; 2)$

Respuesta al impulso

$$\boxed{Y(s) = \underbrace{\frac{B(s)}{A(s)}}_{F(s)} \cdot X(s) = F(s) \cdot X(s)}$$

Salida = F.de transferencia × Entrada

Si $X(s) = \delta(t)$ entonces $Y(s) = F(s).\mathcal{L}\,\delta(t) = F(s)$

La respuesta al impulso estará dada por:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\,Y(s) = \mathcal{L}^{-1}\,g(s)$$

Respuesta al impulso

- Determine la respuesta al impulso del sistema lineal cuya respuesta x(t) a una entrada u(t) esta determinada por la ecuación diferencial:

$$x'' + 5x' + 6x = 5.\, u(t)$$

La respuesta al impulso h(t) es la respuesta al sistema a u(t) = δ(t) cuando las condiciones iniciales son cero

$$h'' + 5h' + 6h = 5.\, \delta(t)$$

Respuesta al impulso

$$x'' + 5x' + 6x = 5.u(t)$$

$$h'' + 5h' + 6h = 5.\delta(t) \quad \text{Con } h'(0) = (0) = 0$$

Aplicamos la transformada de Laplace

$$(s^2+5s + 6)H(s) = 5$$

$$H(s) = \frac{5}{(s+3).(s+2)} = \frac{5}{(s+2)} - \frac{5}{(s+3)}$$

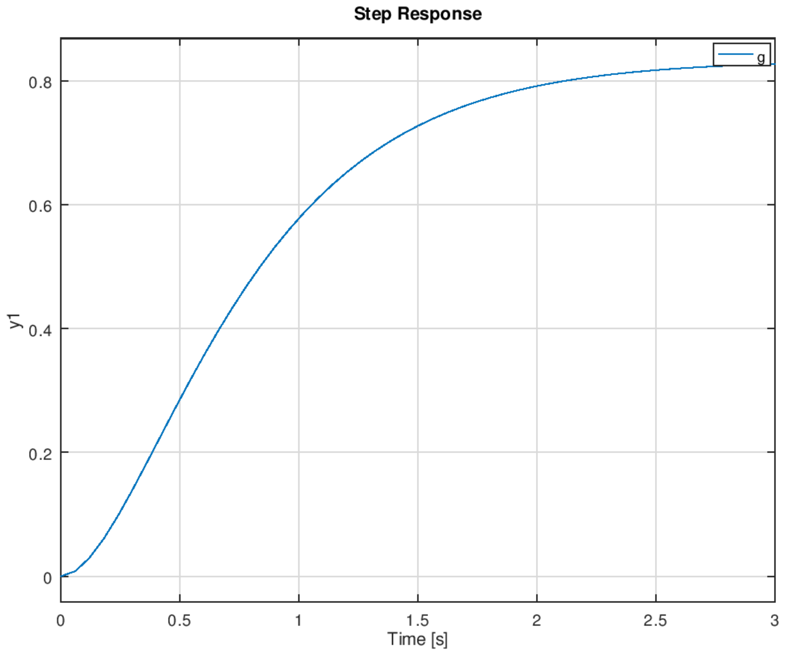
Función de transferencia:

$$\text{F}(s) = \frac{5}{(s+3).(s+2)}$$

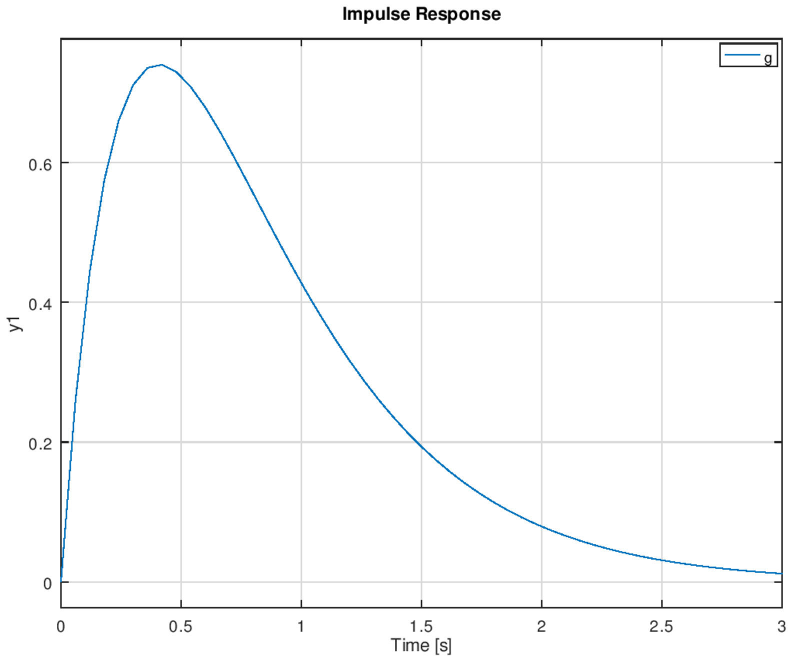
Respuesta al impulso:

$$h(t) = 5.(e^{-2t} - e^{-3t})$$

step(F)



impulse(F)



Teorema del valor inicial

Si existen los limites indicados se cumple

$$\boxed{\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s\,F(s)}$$

Ejemplo:

Sea $f(t) = 3\,e^{-2t}$

entonces $\displaystyle\lim_{t \to 0} 3\,e^{-2t} = 3$ $\quad F(s) = \dfrac{3}{s+2} \Rightarrow \displaystyle\lim_{s \to \infty} \dfrac{3\,s}{s+2} = 3$

Teorema del valor final

Si existen los limites indicados se cumple

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\,F(s)}$$

Ejemplo:

Sea $f(t) = 3\,e^{-2t}$

entonces

$$\lim_{t \to \infty} 3\,e^{-2t} = 0$$

$$F(s) = \frac{3}{s+2} \Rightarrow \lim_{s \to 0} \frac{3\,s}{s+2} = 0$$

Función de transferencia $F(s) = \frac{3}{s+2}$

```
>> A=[3]
A =  3
>> B=[1 2]
B =  1   2

>> g=tf(A,B)

       3
 y1:  -----
      s + 2

>> impulse(g)
```