6. DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICAS

6.1. DIFERENCIAS FINITAS

La diferenciación numérica es muy útil en casos en los cuales se tiene una función que es muy engorrosa de derivar, o en casos en los cuales no se tiene una función explícita sino una serie de datos experimentales.

Para entender de una manera sencilla la discretización por diferencias finitas de una derivada debe tenerse en cuenta la interpretación geométrica de la derivada en un punto, que es la pendiente de la curva en el punto de interés. Considérense tres puntos intermedios en una curva como se muestra en la figura 6.1:

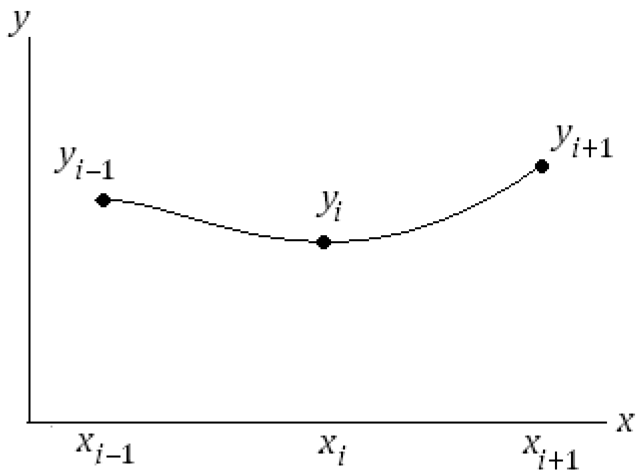

Figura 6.1. Curva discretizada.

Supóngase que interesa la derivada en el punto (x_i, y_i), tres formas de aproximar la pendiente por recta en ese punto son:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad (6.1)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \qquad (6.2)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \qquad (6.3)$$

Las ecuaciones 6.1 a 6.3 son llamadas *diferencias finitas*. La ecuación 6.1 se recomienda para hallar la derivada del punto inicial de una curva, la ecuación 6.2 se recomienda para hallar la derivada del punto final de una curva, y la ecuación

6.3 es la ecuación de *diferencias finitas centrales*, y se recomienda para hallar la derivada en los puntos intermedios de una curva.

En el caso cuando las diferencias $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = \Delta x$ son constantes para todo el dominio, las ecuaciones de diferencias finitas quedan

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \qquad (6.4)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \qquad (6.5)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \qquad (6.6)$$

La ecuación 6.4 se recomienda para hallar la derivada del punto inicial de una curva, la ecuación 6.5 se recomienda para hallar la derivada del punto final de una curva, y la ecuación 6.6 se recomienda para hallar la derivada en los puntos intermedios de una curva.

El método de derivación por diferencias finitas implementado en Matlab se muestra en el algoritmo 6.1.

Algoritmo 6.1: Derivación numérica en Matlab
Entradas: vectores conteniendo los puntos X y Y.
Salidas: vector con el valor de las derivadas, df.

```
function [df]=derivada(X,Y)
N=numel(X);
df(1)=(Y(2)-Y(1))/(X(2)-X(1));
df(N)=(Y(N)-Y(N-1))/(X(N)-X(N-1));
for n=2:N-1
    df(n)=(Y(n+1)-Y(n-1))/(X(n+1)-X(n-1));
end
plot(X,df,'k-')
```

La derivación numérica también puede implementarse de forma muy sencilla en tablas de Excel.

Ejemplo 6.1. Curvas SVAJ para levas (Excel)

Se tiene una tabla datos de la curva de movimiento de un seguidor de leva (ver archivo de Excel que viene con el libro), determinar si la leva cumple con condiciones de continuidad de las curvas de velocidad, aceleración y sobre-aceleración (también conocida como *jerk*).

Teniendo tabulados los datos de tiempo y posición podemos calcular con las ecuaciones (6.4) a (6.6) la velocidad, aceleración y sobreaceleración de forma numérica:

$$v = \frac{dx}{dt}\ , \qquad a = \frac{dv}{dt}\ ,\ \ j = \frac{da}{dt}$$

En las gráficas se observan saltos en la velocidad y aceleración, por lo cual se deduce que este diseño de leva no es adecuado.

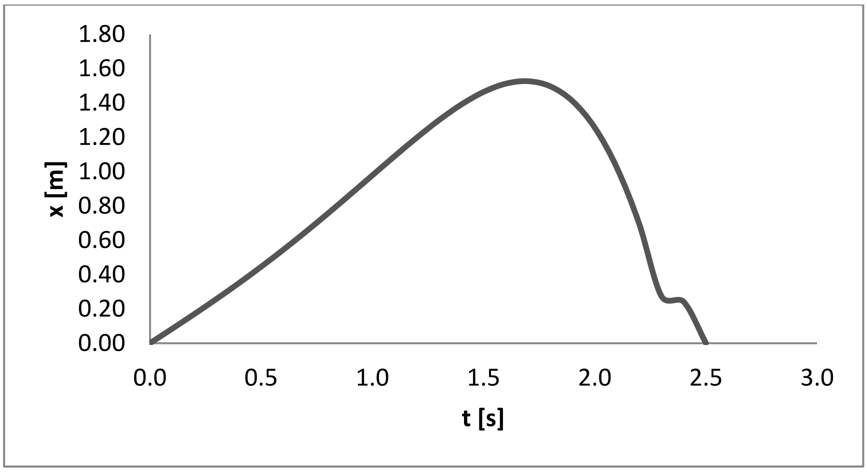

Figura 6.2. Posición del seguidor.

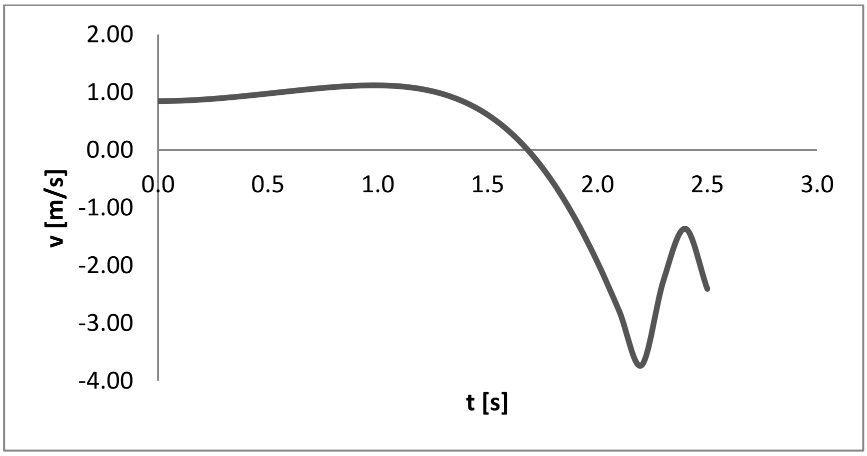

Figura 6.3. Velocidad del seguidor.

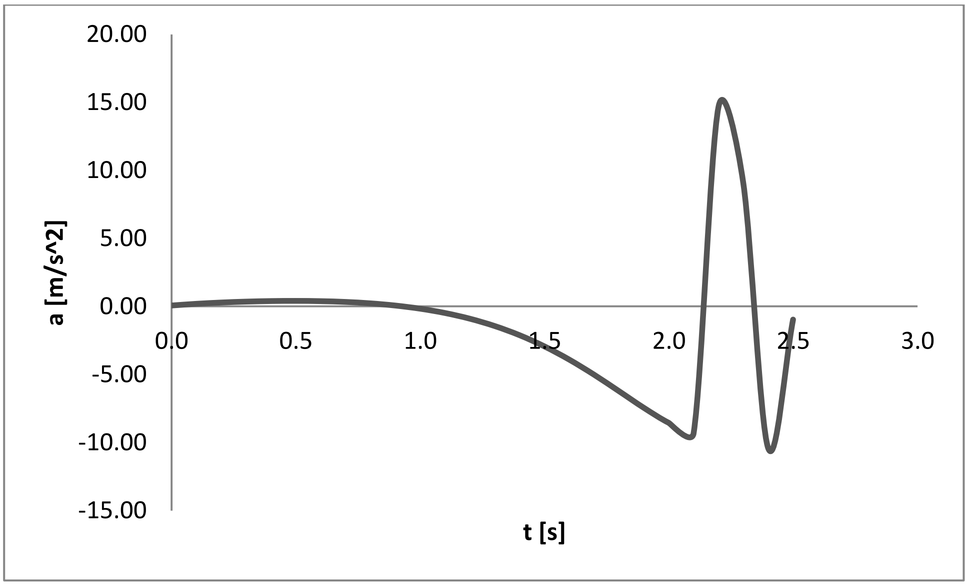

Figura 6.4. Aceleración del seguidor.

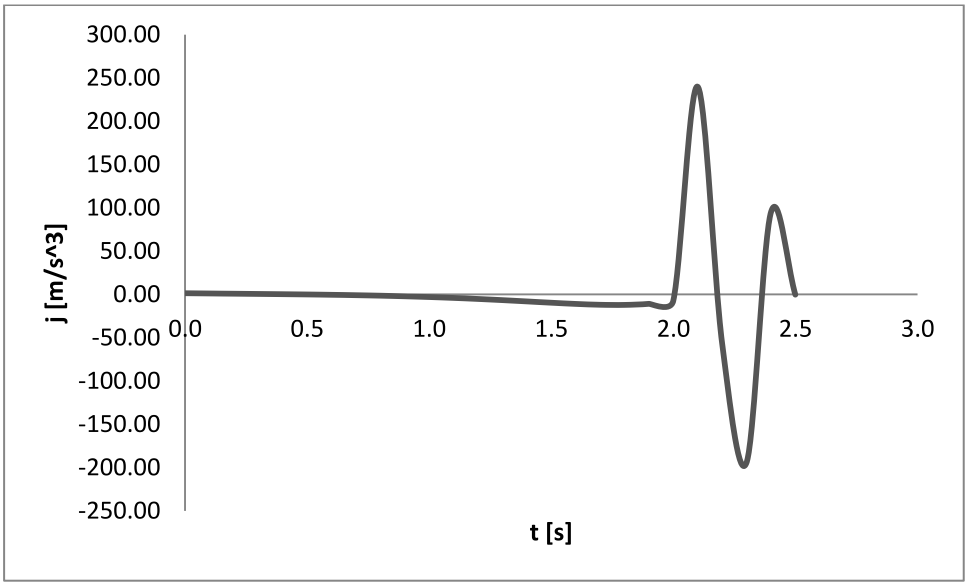

Figura 6.5. Sobreaceleración del seguidor.

6.2. MÉTODO DE LOS TRAPECIOS

La integración numérica es muy útil en casos en los cuales se tiene una función que es muy engorrosa de integrar o que no posee anti-derivada, o en casos en los cuales no se tiene una función explícita sino una serie de datos experimentales. Aunque hay varios métodos de integración numérica, acá solo se mostrará en método de los trapecios, ya que es el más sencillo de implementar y de entender.

Para entender el método de los trapecios debe tomarse en cuenta la interpretación geométrica de una integral como área bajo la curva, siendo así, considérese el área de un trapecio entre dos puntos de una curva como se muestra en la figura 6.6.

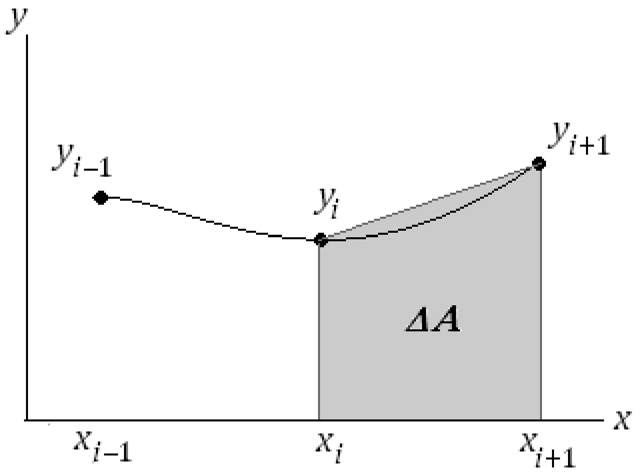

Figura 6.6. Área de un trapecio entre dos puntos de una curva.

El área del trapecio es:

$$\Delta A_{i+1} = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i) \qquad (6.7)$$

El valor de la integral en un intervalo con n+1 puntos x_0 a x_n es entonces la suma de las distintas áreas por sub-intervalo:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} y(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta A_i \qquad (6.8)$$

En el caso que el tamaño de sub-intervalo sea un valor Δx constante, la ecuación 6.8 resulta

$$I = \int_{x_0}^{x_n} y(x)dx \approx \frac{1}{2}\Delta x(y_0 + y_n) + \Delta x \sum_{i=1}^{n-1} y_i \qquad (6.9)$$

Otra forma de verlo, y más fácil de programar en una hoja de Excel, es la siguiente: el valor acumulado de la integral en el intervalo *i* (notado como I_i) es

$$\boxed{I_i = I_{i-1} + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})(y_i + y_{i-1})} \qquad (6.10)$$

Y el valor I de la integral en el dominio de interés es el valor final acumulado de la ecuación 6.10. La ecuación 6.10 puede ponerse fácilmente en términos de fórmula de celdas en una hoja de Excel, descargar el archivo de Excel de la página donde se descarga el libro para ver el ejemplo 6.2 resuelto en Excel.

La implementación en Matlab del método de los trapecios con la ecuación 6.10 se muestra en el algoritmo 6.2.

Algoritmo 6.2: Método de los trapecios en Matlab
Entradas: valor inicial de la integral I0, vectores conteniendo los puntos X y Y.
Salidas: vector con el valor acumulativo de la integral, I.

```
function [I]=integral(I0,X,Y)
N=numel(X);
I(1)=I0;
for n=2:N
    I(n)=I(n-1)+0.5*(Y(n)+Y(n-1))*(X(n)-X(n-1));
end
plot(X,I,'k-');
```

Ejemplo 6.2. Mecánica de la fractura (Excel)

El crecimiento de una grieta en el borde de una placa por ciclo de esfuerzos viene dado por la ecuación de Paris

$$\frac{da}{dN} = A\left(\Delta\sigma Y\sqrt{a}\right)^m \qquad (E6.1)$$

Donde N es el número de ciclos, A y m son constantes del material, $\Delta\sigma$ es la diferencia de esfuerzos a tensión sobre la pieza y Y viene dado por la ecuación E3.2. Cuando se observa una grieta de tamaño a_0, el número de ciclos restante para fractura catastrófica de la pieza se obtiene separando las variables e integrando la ecuación E6.1:

$$N_f = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{A\left(Y\Delta\sigma\sqrt{a}\right)^m} \qquad (E6.2)$$

Supóngase que se tiene la placa del ejemplo 3.1 con $\Delta\sigma = 17.78\text{ksi}, A = 6.6 \times 10^{-9}, m = 2.25$, con una grieta inicial de $a_0 = 0.25\text{in}$. El número de ciclos restante para falla es

$$N_f = \int_{0.25}^{0.62} \frac{da}{6.6 \times 10^{-9} \left(17.78 \left[1.99 - 0.41 \left(\frac{a}{2.5}\right) + 18.70 \left(\frac{a}{2.5}\right)^2 - 38.48 \left(\frac{a}{2.5}\right)^3 + 53.85 \left(\frac{a}{2.5}\right)^4\right] \sqrt{a}\right)^{2.25}}$$

Aplicando la ecuación (6.2) en una hoja de Excel tenemos la gráfica de crecimiento de la grieta:

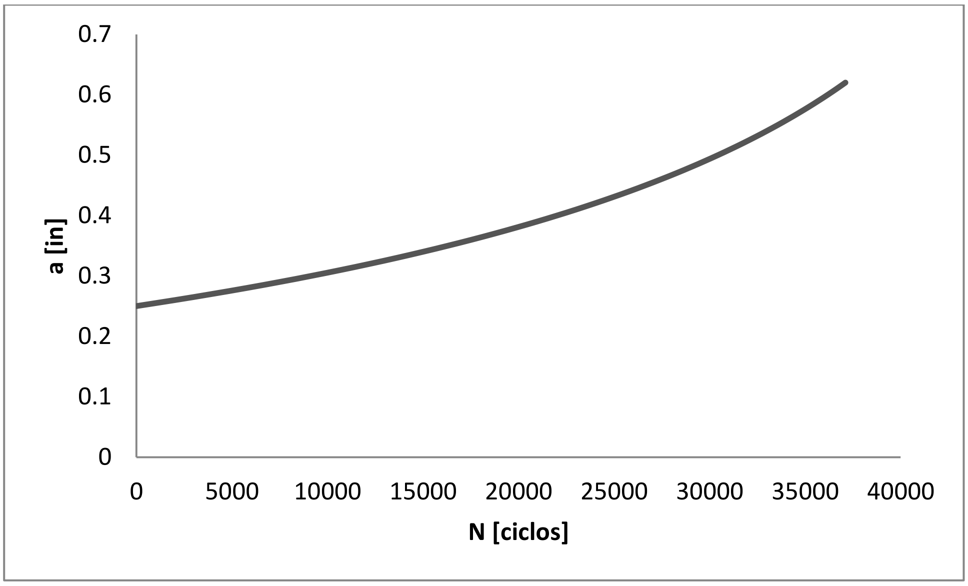

Figura 6.7. Crecimiento de grieta calculado por integración numérica.

Según el valor final de la integral los ciclos de falla son:

$$N_f = 37120$$