Tutorial: “Fórmula de Mason”

Carrera: Ingeniería en Sistemas de Información

Asignatura: Teoría de Control

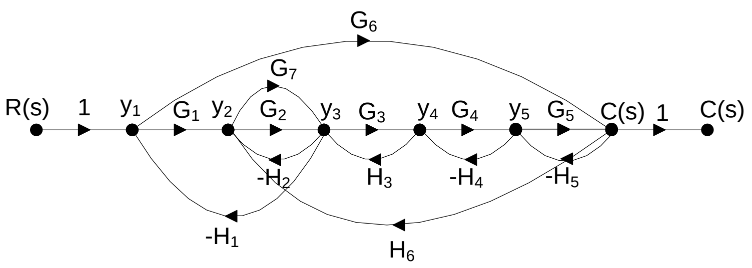
Autor: Ing. Dominga Concepción Aquino

Nivel 4to

En el presente tutorial se explicará paso a paso, cómo se aplica la Fórmula de Mason a un Diagrama de Flujo de Señales dado, para obtener la Función de Transferencia entre dos nodos.

Ejercicio Nº 1:

Dado el siguiente **Diagrama de Flujo de Señales**, se desea calcular por la fórmula de Mason la función de transferencia **C(s)/R(s)**, es decir entre el nodo de salida y el nodo de entrada del sistema.



Nota: R(s) es el nodo de entrada, y C(s) es el nodo de salida.

Para **no olvidar** los elementos que constituyen la **Fórmula de Mason**, se construye la siguiente tabla, en donde los Cofactores son los que se calcula por último, ya que primero es necesario contar con el determinante del sistema.

Trayectorias Directas	Cofactores	Lazos Individuales	Lazos Disjuntos tomados de a dos
$P_1= G_1G_2G_3G_4G_5$	$\Delta_1= 1$	$L_1= -G_2H_2$	$L_1L_4= G_2H_2G_4H_4$
$P_2= G_1G_7G_3G_4G_5$	$\Delta_2= 1$	$L_2= -G_7H_2$	$L_2L_4= G_7H_2G_4H_4$
$P_3= G_6$	$\Delta_3= 1 - (-G_2H_2-G_7H_2+G_3H_3-G_4H_4) + (G_2H_2G_4H_4 + G_7H_2G_4H_4)$	$L_3= G_3H_3$	$L_1L_5= G_2H_2G_5H_5$
		$L_4= -G_4H_4$	$L_2L_5= G_7H_2G_5H_5$
		$L_5= -G_5H_5$	$L_3L_5= -G_3H_3G_5H_5$
		$L_6= -G_1G_2H_1$	$L_6L_4= G_1G_2H_1G_4H_4$
		$L_7= -G_1G_7H_1$	$L_7L_4= G_1G_7H_1G_4H_4$
		$L_8= G_2G_3G_4G_5H_6$	$L_6L_5= G_1G_2H_1G_5H_5$
		$L_9= G_7G_3G_4G_5H_6$	$L_7L_5= G_1G_7H_1G_5H_5$
		$L_{10}= -G_6H_6G_2H_1$	$L_{10}L_4= G_6H_6G_2H_1G_4H_4$
		$L_{11}= -G_6H_6G_7H_1$	$L_{11}L_4= G_6H_6G_7H_1G_4H_4$
		$L_{12}= -G_6H_5H_4H_3H_1$	

El determinante:

$\Delta= 1 - (-G_2H_2-G_7H_2+G_3H_3-G_4H_4-G_5H_5-G_1G_2H_1-G_1G_7H_1+G_2G_3G_4G_5H_6+G_7G_3G_4G_5H_6-G_6H_6G_2H_1-G_6H_6G_7H_1-G_6H_5H_4H_3H_1)+(G_2H_2G_4H_4+G_7H_2G_4H_4+G_2H_2G_5H_5+G_7H_2G_5H_5-G_3H_3G_5H_5+G_1G_2H_1G_4H_4+G_1G_7H_1G_4H_4+G_1G_2H_1G_5H_5+G_1G_7H_1G_5H_5+G_6H_6G_2H_1G_4H_4+G_6H_6G_7H_1G_4H_4)$

Nota: El Determinante es ÚNICO para todo el sistema.

Existe un cofactor por cada trayectoria directa.

Por ejemplo, para hallar el cofactor Δ_3 se analiza P_3 (la trayectoria directa n° 3) con el determinante del sistema, y solamente quedan los lazos del determinante que no toquen en nada a la trayectoria directa en cuestión (ni en nodo ni en ramas).

Por tal motivo al analizar la trayectoria G_6 solamente quedan L_1, L_2, L_3 y L_4 de los lazos individuales, y también quedan $L_1.L_4$ y $L_2.L_4$ de los lazos disjuntos tomados de a dos.

Por lo tanto $\Delta_3 = 1 - (-G_2H_2 - G_7H_2 + G_3H_3 - G_4H_4) + (G_2H_2G_4H_4 + G_7H_2G_4H_4)$ o también se puede dejar expresado de la siguiente forma, $\Delta_3 = 1 - (L_1+L_2+L_3+L_4) + (L_1.L_4 + L_2.L_4)$

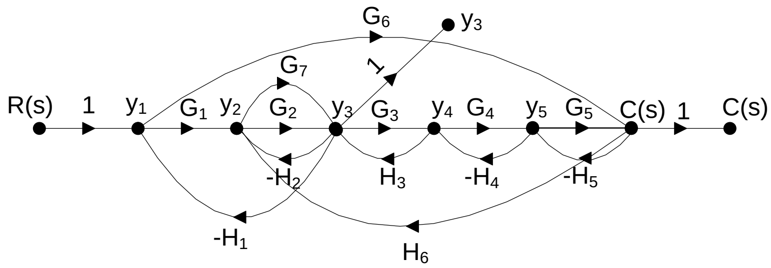
La función de transferencia es la siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\mathrm{G1G2G3G4G5} + \mathrm{G1G7G3G4G5} + \mathrm{G6}(1 - (-\mathrm{G2H2} - \mathrm{G7H2} + \mathrm{G3H3} - \mathrm{G4H4}) + (\mathrm{G2H2G4H4} + \mathrm{G7H2G4H4}))}{\Delta}$$

Ejercicio Nº 2:

Dado el siguiente **Diagrama de Flujo de Señales**, se desea calcular por la fórmula de Mason la función de transferencia **y_3/R(s)**, es decir entre el nodo mixto y_3 y el nodo de entrada del sistema.

Debido a que y_3 es un nodo mixto se deberá crear una salida en el mismo, la cual se realiza prolongando el nodo con una transmitancia unitaria.



Nota: El determinante se calcula una sola vez, porque es ***único*** para todo el sistema.

Como el determinante es único no se vuelven a calcular los lazos ya que los mismos no cambian, por tal motivo solamente se recalculan las trayectorias directas y los cofactores.

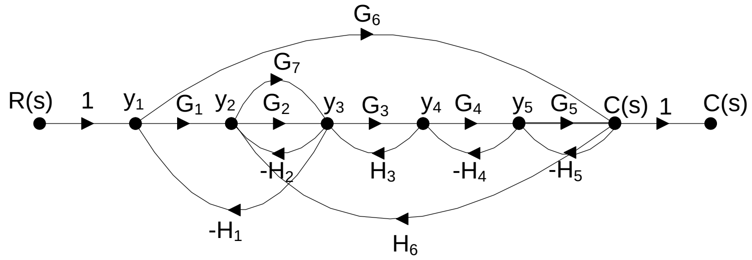
En este caso aumenta la cantidad de trayectorias directas, ya que aparecen dos caminos directos nuevos que van desde el nodo de entrada hasta el nodo y_3.

Trayectorias Directas	Cofactores
$P_1 = G_1G_2$	$\Delta_1 = 1 - (-G_4H_4 - G_5H_5)$
$P_2 = G_1G_7$	$\Delta_2 = 1 - (-G_4H_4 - G_5H_5)$
$P_3 = G_6H_5H_4H_3$	$\Delta_3 = 1$
$P_4 = G_6H_6G_2$	$\Delta_4 = 1 - (-G_4H_4)$
$P_5 = G_6H_6G_7$	$\Delta_5 = 1 - (-G_4H_4)$

$$\frac{y3}{R(s)} = \frac{\mathrm{G1G2}(1 - (-\mathrm{G4H4} - \mathrm{G5H5})) + \mathrm{G1G7}(1 - (-\mathrm{G4H4} - \mathrm{G5H5})) + \mathrm{G6H5H4H3} + \mathrm{G6H6G2}(1 - (-\mathrm{G4H4})) + \mathrm{G6H6G7}(1 - (-\mathrm{G4H4}))}{\Delta}$$

Ejercicio Nº 3:

Dado el siguiente **Diagrama de Flujo de Señales**, se desea calcular por la fórmula de Mason la función de transferencia **C(s)/y_3**, es decir entre el nodo mixto y_3 y el nodo de salida del sistema.



Nota: NO se pueden crear Entradas.

En este caso solamente se realiza el cociente entre la función de transferencia de **C(s)/R(s)** dividido la función de transferencia de **y_3/R(s)** que se calcularon previamente.

$$\frac{\frac{C(s)}{R(s)}}{\frac{y3}{R(s)}} = \frac{C(s)}{\cancel{R(s)}} * \frac{\cancel{R(s)}}{y3} = \frac{C(s)}{y3}$$

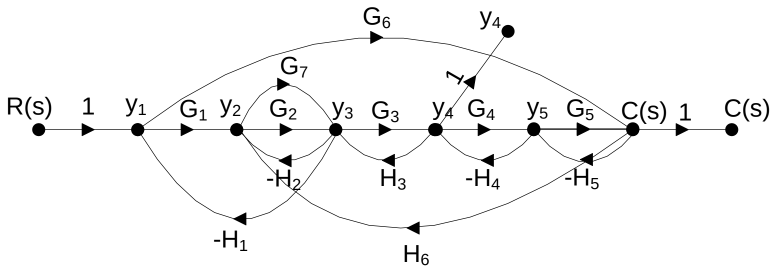
$$\frac{\frac{C(s)}{R(s)}}{\frac{y3}{R(s)}} = \frac{\frac{G1G2G3G4G5+G1G7G3G4G5+G6(1-(-G2H2-G7H2+G3H3-G4H4)+(G2H2G4H4+G7H2G4H4))}{\Delta}}{\frac{G1G2(1-(-G4H4-G5H5))+G1G7(1-(-G4H4-G5H5))+G6H5H4H3+G6H6G2(1-(-G4H4))+G6H6G7(1-(-G4H4))}{\Delta}}$$

Como el determinante Δ es único se cancelan, y quedan los numeradores nomás.

$$\frac{C(s)}{y3} = \frac{G1G2G3G4G5 + G1G7G3G4G5 + G6(1-(-G2H2 - G7H2 + G3H3 - G4H4) + (G2H2G4H4 + G7H2G4H4))}{G1G2(1-(-G4H4 - G5H5)) + G1G7(1-(-G4H4 - G5H5)) + G6H5H4H3 + G6H6G2(1-(-G4H4)) + G6H6G7(1-(-G4H4))}$$

Ejercicio Nº 4:

Dado el siguiente **Diagrama de Flujo de Señales**, se desea calcular por la fórmula de Mason la función de transferencia **y_4/R(s)**, es decir entre el nodo mixto y_4 y el nodo de entrada del sistema.



Nota: Se pueden crear Salidas.

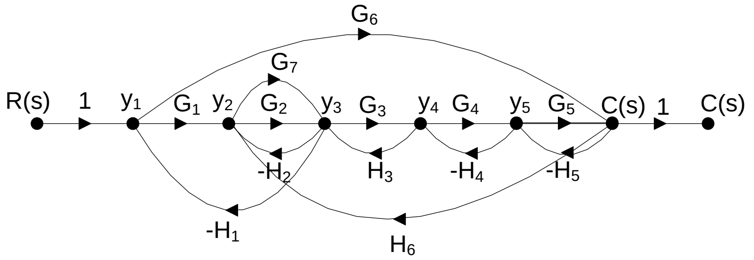
Debido a que y_4 es un nodo mixto se procede de la misma forma que la que se explicó anteriormente en el ejercicio Nº 2.

Trayectorias Directas	Cofactores
$P_1 = G_1G_2G_3$	$\Delta_1 = 1 - (-G_5H_5)$
$P_2 = G_1G_7G_3$	$\Delta_2 = 1 - (-G_5H_5)$
$P_3 = G_6H_5H_4$	$\Delta_3 = 1 - (-G_2H_2 - G_7H_2)$
$P_4 = G_6H_6G_2G_3$	$\Delta_4 = 1$
$P_5 = G_6H_6G_7G_3$	$\Delta_5 = 1$

$$\frac{y4}{R(s)} = \frac{G1G2G3(1-(-G5H5)) + G1G7G3(1-(-G5H5)) + G6H5H4(1-(-G2H2 - G7H2)) + G6H6G2G3 + G6H6G7G3}{\Delta}$$

Ejercicio Nº 5:

Dado el siguiente **Diagrama de Flujo de Señales**, se desea calcular por la fórmula de Mason la función de transferencia **y_4/y_3**, es decir entre el nodo mixto y_3 y el nodo mixto y_4.



Nota: NO se pueden crear Entradas.

En este caso solamente se realiza el cociente entre la función de transferencia de **y_4/R(s)** dividido la función de transferencia de **y_3/R(s)** que se calcularon previamente.

$$\frac{\frac{y4}{R(s)}}{\frac{y3}{R(s)}} = \frac{y4}{\cancel{R(s)}} * \frac{\cancel{R(s)}}{y3} = \frac{y4}{y3}$$

$$\frac{\frac{y4}{R(s)}}{\frac{y3}{R(s)}} = \frac{\frac{G1G2G3(1-(-G5H5))+G1G7G3(1-(-G5H5))+G6H5H4(1-(-G2H2-G7H2))+G6H6G2G3+G6H6G7G3}{\Delta}}{\frac{G1G2(1-(-G4H4-G5H5))+G1G7(1-(-G4H4-G5H5))+G6H5H4H3+G6H6G2(1-(-G4H4))+G6H6G7(1-(-G4H4))}{\Delta}}$$

Como el determinante Δ es único se cancelan, y quedan los numeradores nomás.

$$\frac{y4}{y3} = \frac{G1G2G3(1-(-G5H5)) + G1G7G3(1-(-G5H5)) + G6H5H4(1-(-G2H2-G7H2)) + G6H6G2G3 + G6H6G7G3}{G1G2(1-(-G4H4-G5H5)) + G1G7(1-(-G4H4-G5H5)) + G6H5H4H3 + G6H6G2(1-(-G4H4)) + G6H6G7(1-(-G4H4))}$$