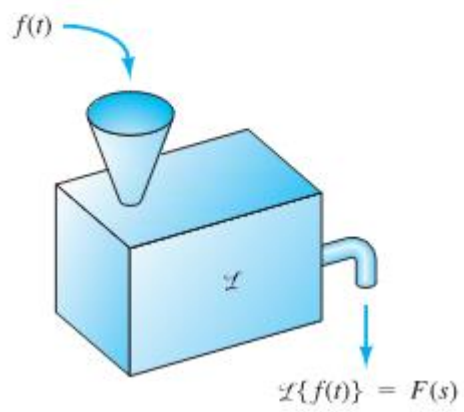
La transformada de Laplace.

Definición

Dada una función $f(t)$ definida para toda $t \geqq 0$, la *transformada de Laplace* de f es la función F definida como sigue:

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad (1)$$

para todo valor de s en los cuales la integral impropia converge.



Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st}.f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st}.f(t)dt$$

$$\mathcal{L}(sen\ t) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.$$

Ejemplo

- Aplicando la definición

Evalúe $\mathscr{L}\{1\}$.

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\, dt = \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-st}}{s}\Bigg|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} =$$

$$\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

Transformada de funciones Básicas

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\} &= \frac{1}{s} \\
\mathcal{L}\{e^{at}\} &= \frac{1}{s-a} \\
\mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{n!}{s^{n+1}} \\
\mathcal{L}\{sen\ at\} &= \frac{a}{s^2+a^2} \\
\mathcal{L}\{\cos at\} &= \frac{s}{s^2+a^2} \\
\mathcal{L}\{senh\ at\} &= \frac{a}{s^2-a^2} \\
\mathcal{L}\{\cosh at\} &= \frac{s}{s^2-a^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\delta(t)\} &= 1 \\
\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} &= e^{-as} \\
\mathcal{L}\{\tfrac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}\} &= \tfrac{1}{(s-a)^n}\ (n \geq 1) \\
\mathcal{L}\{\tfrac{1}{2a^3}(sen\ at - at\cos at)\} &= \tfrac{1}{(s^2+a^2)^2} \\
\mathcal{L}\{\tfrac{1}{2a^3}(sen\, a\,t + a\,t\cos\, a\,t)\} &= \tfrac{s^2}{a^2(s^2+a^2)^2} \\
\mathcal{L}\{\int_0^t \tfrac{t}{2n}\mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{(s^2+a^2)^n}]\ dt\} &= \tfrac{1}{(s^2+a^2)^{n+1}} \\
\mathcal{L}\{\tfrac{t}{2n}\mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{(s^2+a^2)^n}]\} &= \tfrac{s}{(s^2+a^2)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- Usando la tabla

Evalúe $\mathscr{L}\{e^{-3t}\}$.

e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$

$$\mathscr{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}, \quad s > -3.$$

$$\mathscr{L}\{\operatorname{sen} 2t\} = \frac{2}{s^2+4}, \qquad s > 0.$$

$\operatorname{sen} kt$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$

Propiedades

- Linealidad

Si a y b son constantes, entonces

$$\mathscr{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathscr{L}\{f(t)\} + b\mathscr{L}\{g(t)\} \quad ($$

para toda s tal que las transformadas de Laplace tanto de f como de g existen.

- Ejemplo

$$\mathscr{L}\{4e^{-3t} - 10 \operatorname{sen} 2t\} = 4\mathscr{L}\{e^{-3t}\} - 10\mathscr{L}\{\operatorname{sen} 2t\} =$$

$$= \frac{4}{s+3} - \frac{20}{s^2+4}.$$

e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

$\operatorname{sen} kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$

Primer propiedad de traslación en el eje s

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$, entonces $\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\}$ existe para $s > a + c$, y

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a).$$

También se puede escribir $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s \to s-a} = \mathrm{F}(\mathrm{t})_{s \to s-a}$

$f(t)$	$F(s)$	
$e^{at} t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$(s > a)$
$e^{at} \cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}$	$(s > a)$
$e^{at} \operatorname{sen} kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2 + k^2}$	$(s > a)$

Propiedades

Ejemplo

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s\to s-a} = \mathrm{F(t)}_{s\to s-a}$$

$$\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\} =$$

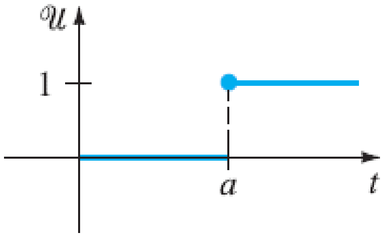
$$\mathscr{L}\{t^3\}\big|_{s\to s-5} = \frac{3!}{s^4}\bigg|_{s\to s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}$$

Segunda propiedad de la traslación en el eje t

Función escalón unitario

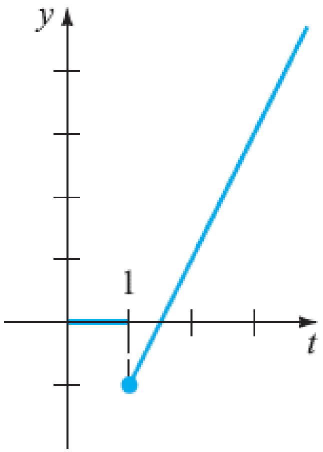
La **función escalón unitario** $\mathcal{U}(t-a)$ se define como

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 2t-3 & \end{cases}$$

$$f(t) = (2t-3).\mathcal{U}(t-1)$$



Segunda propiedad de la traslación

Una función general definida por tramos del tipo:

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases}$$

Es la misma que

$$f(t) = g(t) - g(t)\,\mathcal{U}(t - a) + h(t)\,\mathcal{U}(t - a)$$

Análogamente una función del tipo:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ g(t), & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases}$$

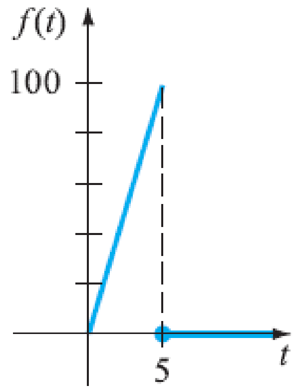
Puede ser escrita por:

$$f(t) = g(t)[\mathcal{U}(t - a) - \mathcal{U}(t - b)].$$

Segunda propiedad de la traslación

Ejemplo:

$$f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}$$



Puede ser escrita por:

$$f(t) = 20t - 20t.\mathcal{U}(t-5)$$

$$f(t) = g(t) - g(t)\,\mathcal{U}(t-a) + h(t)\,\mathcal{U}(t-a)$$

Segunda propiedad de la traslación

Transformada del escalón unitario

$$\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

$$\mathscr{L}\{g(t)\,\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}\,\mathscr{L}\{g(t+a)\}$$

Segunda propiedad de la traslación

Ejemplo 1

$$f(t) = 2 - 3\mathcal{U}(t-2) + \mathcal{U}(t-3)$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\{2\} - 3\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-2)\} + \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-3)\}$$

$$\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

$$= 2\frac{1}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}.$$

Segunda propiedad de la traslación

Ejemplo 2

$$\mathscr{L}\{\cos t\, \mathscr{U}(t-\pi)\}.$$

$$\mathscr{L}\{g(t)\,\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{g(t+a)\}$$

Con

$$g(t) = \cos t \text{ y } a = \pi$$

entonces

$$g(t+\pi) = \cos(t+\pi) = -\cos t$$

$$\mathscr{L}\{\cos t\, \mathscr{U}(t-\pi)\} = -e^{-\pi s}\mathscr{L}\{\cos t\} = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}.$$

Segunda propiedad de la traslación

Ejemplo 2

$$\mathcal{L}[\cos 2t.\,\mathcal{U}(t-5)]$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\,\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\,\mathcal{L}\{g(t+a)\}$$

$$g(t) = \cos 2t$$

$$g(t+5) = \cos 2(t+5)$$

$$g(t+5) = \cos(2t+10)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\,\cos(y) - \sin(x)\,\sin(y)$$

$$g(t+5) = \cos 2t.\,cos10 - sen2t,sen10$$

$$\mathcal{L}[\cos 2t.\,\mathcal{U}(t-5)] = e^{-5s}.\,\mathcal{L}(\cos 2t.\,cos10 - sen2t.\,sen10)$$

$$\mathcal{L}[\cos 2t.\,\mathcal{U}(t-5)] = e^{-5s}.\,(cos10.\frac{s}{s^2+4} - sen10.\frac{2}{s^2+4})$$

Cambio de escala

$$\text{Si} \quad F(s) = \mathcal{L}[\,f(t)\,] \quad \Rightarrow \mathcal{L}[\,f(at)\,] = \frac{1}{a}\,F(\frac{s}{a})$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}\,[\cos(t)] = \frac{s}{s^2+1}$$

Si queremos calcular: $\mathcal{L}[\,\cos(3t)]$

$$\mathcal{L}[\,\cos(3t)] = \frac{1}{3}\,\frac{(s/3)}{(s/3)^2+1} = \frac{1}{3}\,\frac{(s/3)}{(s^2/9)+1} = \frac{1}{3}\,\frac{(s/3)}{(s^2+9)/9} = \frac{s}{s^2+9}$$

Transformada de Laplace de las derivadas

Si $F(s) = \mathcal{L}[\, f(t)\,] \;\Rightarrow\; \mathcal{L}[\, f'(t)\,] = s\,F(s) - f(0)$

Ejemplo:

Sabiendo que $\mathcal{L}[\, t^3\,] = \dfrac{6}{s^4}$ $\qquad t^n \quad \dfrac{n!}{s^{n+1}},\quad n$ un entero positivo

$$\mathcal{L}[\, 3\, t^2\,] = s\,\frac{6}{s^4} - 0 = \frac{6}{s^3}$$

Generalización para derivadas de orden superior

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n\mathscr{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\\ &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0).$$

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Teorema de la deriva de la transformada

Si $F(s) = \mathcal{L}[\,f(t)\,] \Rightarrow \mathcal{L}[\,t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}[\,t^2 e^{2t}] = \frac{2}{(s-2)^3}$$

e^{at} $\qquad \dfrac{1}{s-a}$

$F(s) = (s-2)^{-1}$ $\qquad F'(s) = (-1)\,(s-2)^{-2}$ $\qquad F''(s) = (-1)(-2)(s-2)^{-3}$

Teorema del valor inicial

Si existen los limites indicados se cumple

$$\boxed{\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s\,F(s)}$$

Ejemplo:

Sea $f(t) = 3\,e^{-2t}$

entonces $\lim_{t \to 0} 3\,e^{-2t} = 3$ $\quad F(s) = \dfrac{3}{s+2} \Rightarrow \lim_{s \to \infty} \dfrac{3\,s}{s+2} = 3$

Teorema del valor final

Si existen los limites indicados se cumple

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\,F(s)}$$

Ejemplo:

Sea $f(t) = 3\,e^{-2t}$

entonces

$$\lim_{t \to \infty} 3\,e^{-2t} = 0$$

$$F(s) = \frac{3}{s+2} \Rightarrow \lim_{s \to 0} \frac{3s}{s+2} = 0$$