# PROGRAMACIÓN LINEALPASOS PARA LA ELABORACION DE UN MODELO MATEMATICO

Miércoles 24 de Abril 2019

Pasos para la elaboración del modelo matemático:

* Establecer hipótesis.

1. ¿Qué es lo que se produce?

b. ¿Qué es lo que se desea calcular? (Por ejemplo: Cuantos paquetes de cada producto a producir)

* Establecer definición de variables ($x_i$) y unidades en los que se miden.

Estas cantidades se producen o no y nunca puede existir una producción negativa:

$x_i > 0 \; ; \; \forall i$ ← Condición de no negatividad de las variables.

2. ¿Cuál es el objetivo de la empresa?

El objetivo debe ser único. Si hubiera varios todos se subordinan a uno solo.

$z = f(x) \rightarrow$ optimizar: recibe el nombre de función objetivo.
Es una función lineal de las variables que forman la segunda condición, también llamada funcional.

3. Condición

Establecer restricciones.

las restricciones hacen aproximar una ecuación lineal a la realidad, porque el modelo lo admite y es conveniente.

Dichas restricciones forman una condición de vigadura.

Programación lineal: planteo del modelo.

1. Condición de no negatividad de las variables:

$x_j > 0 \; ; \; \forall j$

2. Función objetivo

$z = f(x) \rightarrow$ Max o Min.

3. Restricciones.

$\Sigma a_{ij} \cdot x_j \leq b_j$

Donde: $a_{ij}$ = insumo de cada restricción por cada paquete de producto.

$b_j$ = Cantidad disponible de cada uno de los recursos.

4. Variables slacks (Buscar def)

las variables de decisión en el modelo de programación lineal llevan el nombre de variables reales.

| nombre variable | clase | significado | unidad. |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | | | |
| $\vdots$ | | | |
| $x_j$ | | | |
| $z$ | Funcional | | |

Método de resolución para ~~la~~ un modelo de programación lineal son:

1. Solución gráfica.
2. Método Simplex.

1. Solución gráfica:

Si la variable de slack es nulo significa que se aprovecha totalmente el recurso.

Si la var de slack ~~es~~ anula si se encuentra sobre la arista del convexo

En el vértice se anulan dos var de slacks.

Solución óptima ⊆ Soluciones básicas ⊆ Soluciones factibles.

Cuando calculamos el funcional ($z$) en cada uno de los vértices:

Si Max → $z$ con mayor valor es la solución óptima.

Si Min → $z$ con menor valor es la solución óptima

# METODO GRÁFICO Y METODO SIMPLEX

Investigación operativa.

resúmen práctico

Programación lineal.

Pilares: las variables no pueden ser negativas. Z = lineal, único y optimizante.

Planteo del modelo.

1. $x_j \geq 0; \; \forall j$

2. $Z = F(x) \rightarrow$ Max

3. $\sum a_{ij} \, x_j \leq b_i$

Forma de restricciones.

$r_i \leq = \geq b_i$

si $r_i = b_i \rightarrow$ colocar $\geq$ en el planteo de $r_i$.

y tratar como una restricción $\geq$.

$a_{ij}$ = insumo de cada restricción por cada paquete del producto.

$b_i$ = cantidad disponible de cada uno de los recursos.

$x_j$ : variables reales.

1. El objetivo puede cambiarse de max a min. y viceversa. $\overset{\text{max}}{f(x)} = -\overset{\text{min}}{6(x)}$

2. Se puede cambiar el sentido de la desigualdad. $\leq = (-1) \leq = \geq$

3. Una Ec. puede transformarse a desigualdades. $= \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases}$

4. "$\leq$" $\rightarrow$ se le agrega una var. llamada var. faltante. (+).

5. "$\geq$" $\rightarrow$ llamada var. sobrante (−).

6. Var. irrestrictas en signo.

$x_7 = (x_7^+ - x_7^-)$

$x_7^+$ y $x_7^- \geq 0$.

Formato canónico.

"$\leq$" $\rightarrow$ maximización "$\geq$" minimización.

Min:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, x_j \geq b_i$$

$x_j \geq 0$

$\forall j = 1, 2, \ldots, m.$

Max.

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i$$

Sujeto a.

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \qquad x_j \geq 0.$$

$\forall j = 1, 2, \ldots, m.$

Mim
Condición de parada: la fila del valor de Z sean todos $\leq 0$.

Max.
Cond. parada: La fila del valor de Z sen todos $\geq 0$.
Si los coeficientes de Z $\geq 0 \rightarrow$ llega al óptimo.

Si slack $= 0 \rightarrow$ el recurso se usa por completo. (no hay más ese recurso).
Si slack $> 0 \rightarrow$ recurso abundante.

Forma estandar: tiene todas las variables no negativas y todas las ri son igualdades. (Max y Min).

Solución gráfica.

**SOLUCIÓN GRÁFICA**

1 Como las var son positivas, solo se trabaja en el primer cuadrante.
$x_1$ = Eje horizontal
$x_2$ = Eje vertical.

2. Convertir las desigualdades en ecuaciones y graficar las recta resultantes.

3. Determinar cual es el semiespacio que cumple con la restricción y marcar

4. Trazar Z y sus paralelas:
Min → primer pto de esquina que encuentra.
Max → último pto de esquina que encuentra.

Restricciones:

1. Capacidad: Cuando la capacidad total de producción es 100% o 1 y se distribuye esta capacidad entre las distintas variables de decisión.

$HA \rightarrow b_i$ = cantidad disp. del recurso (Cantidad a producir).
$XA \rightarrow x_j$ = Var. de decisión.

$R_1: \frac{1}{HA} \cdot XA \leq 1 \rightarrow$ Si es 1 solo.

$R_1: \frac{1}{HA} XA + \frac{1}{HB} \cdot XB \leq 1$

2. Pérdida.

a. Entra: $x \rightarrow$ Sale: $(1-P)\% \, x$. $P$ = es la pérdida.

b. Entra: $\frac{1}{(1-P)} \cdot x \rightarrow$ Sale: $x$.

Si son varios centros de producción.

a. Entra: $x \rightarrow$ Sale$_1$: $(1-P_1)x \rightarrow$ Sale$_2$: $(1-P_1)(1-P_2)x$.

b. Entra: $x \cdot \frac{1}{(1-P_1)(1-P_2)} \rightarrow$ Sale$_1$ = $\frac{1}{(x-P_2)} x \rightarrow$ Sale$_2$ = $x$.

3. Agregado.

a. Entra: $x \cdot \frac{1}{(1+\alpha)} \rightarrow$ Sale: $x$ b. Entra: $x \rightarrow$ Sale: $x \cdot (1+\alpha)$

Varios centros.

a. Entra: $x \frac{1}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)} \rightarrow$ Sale$_1$ = $x \cdot \frac{1}{(1+\alpha_2)} \rightarrow$ Sale$_2$ = $x$.

b. Entra: $x \rightarrow$ Sale$_1$: $(1+\alpha_1) * x \rightarrow$ Sale$_2$: $(1+\alpha_2)(1+\alpha_1)x$.

4. reciclaje.

5. Mezcla.

# Metodo Simplex.

## MÉTODO SIMPLEX

Condiciones.
1: las $r_i$ son Ecuaciones con lado derecho no negativo. (Excepto las de no neg).
2: las $x_j$ son no negativas.

1. $r_i$ " $\leq$ ". lado derecho → limite de disponibilidad.
lado izquierdo → el uso del recurso limitado.

var. slack → la cantidad no usado del recurso (+), $S_1 \geq 0$
↳ var. de holgura.

2. $r_i$ " $\geq$ ". lado derecho → limite minimo.

var slack → var. de excedencia. (−) ; $S_1 \geq 0$

Lado derecho no sea negativo → multiplicar la Ecuación por (−1).

variable artificial.

var Entrada (Min): var. no básica con el coeficiente más positivo

| desigualdad | variable/s |
|---|---|
| $\geq$ | − slack exceso + artificial. |
| $=$ | + artificial. |
| $\leq$ | + slack holgura. |

var entrada: variable no básica con el coeficiente más negativo en Z Max
↳ Max (El valor de la var. Ent en la nueva iteración = $\theta$).
Var salida: 1. hallar $\theta$ = $\dfrac{\text{lado derecho de las ecuaciones (solución)}}{\text{Coeficiente de restricción de la var. Entrada corresp.}}$
↓
Para Max y Min.
2. Elegir $\theta$ menor positivo. (su valor es cero en la nueva iteración).

Columna pivot = Columna var. Entrada.
reglón pivot = fila de var. Salida.
pivot = intersección columna pivot y fila pivot.

1. Nuevo renglón pivot = $\dfrac{\text{Reglón pivot Actual}}{\text{pivot}}$.

2. Nuevo reglón = renglón Actual − (su coeficiente en la columna pivot) * nuevo renglón pivot.

Columna Solución.

$z$ = indica la ganancia.
producir (el coeficiente en la columna Solución) de $x_1$

Si la var. de holgadura (stock) = 0 → El recurso se uso por completo.
> 0 → El recurso es abundante.

Casos anómalos y Soluciones.
(Solución única)
1. Obtención de la solución: se llega a la cond. de parada, obtenemos valor de var. básicas y el valor óptimo de $z$
(Soluciones alternativas)
2. infinitas Soluciones: llegamos a la condición de parada y en la fila $z$, una variable que no está en la base, tiene valor cero → ∃ otra solución que da el mismo valor óptimo para $z$.
(Solución no Acotada)
3. Solución ilimitada: la columna de la var. de entrada tiene todos sus eltos negativos o nulos.

4. No hay solución

5. Empate de var. entrante (Solución degenerada)
6. Curiosidad Fase 1
7. problema infactible: se reconoce por alguna var. artificial que da en la base de la tabla óptima.

Costo de oportunidad (producto): nos indica cuanto disminuirá el funcional si se fabrica una unidad de ese producto. el Cop para los productos de base = 0.

Cop puede ser:
1. cero: Soluciones alternativas.
2. Negativo: una disminución negativa del funcional es un aumento del mismo. var. de entrada candidata.
3. positiva: si nos obligamos a producir una unidad más de ese producto nuestro funcional disminuirá en un valor igual al producto entre la cant. de unidades fabricadas y dicho costo de oportunidad.

Valor marginal → Aumento del funcional (stock). si tuviéramos una unidad más de ese recurso.

Tipos de Soluciones.

Solución única.

Solución alternativa:

Solución no Acotado

Tabla Simplex.

| $c_k$ | $x_k$ | $c_j$ <br> $B$ | $x_1$ | ... | $x_n$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | | | | | |
| | $\vdots$ | | | | | |
| | $x_j$ | | | | | |
| | $z$ | | | | | |
| | $z_i - c_j$ | | | | | |

$c_k$: Coeficiente de las variables. (comienza con cero) en $z$.
$x_k$: Variables en Base (comienza con slacks en Base)
$B$: Valor (comienza con $B_i$ correspondiente a c/ Slack).

$x_1 \ldots x_n$: Variables.
$c_j$: Coeficiente de cada var en $z$.
$z$: valor

Pivot = intersección entre var sal y var. ent.

$\theta = B_i /$ columna de

Vent = $z$ con mayor valor negativo → max.
Var salida: $\theta$ menor valor positivo → max.

$$\text{Valor} = \text{Valor ant}_i - \frac{\text{Columna pivot}_i \cdot \text{fila pivot}_i}{\text{pivot}}$$

1. Var ent.
2. hallar $\theta$ y Var Sal.
3. hallar pivot.
4. Pasar a otra iteración.

# PROGRAMACIÓN NO LINEAL

Programación no lineal.

Programación restringuida - Metodo jacobiano → no hay restricciones

Condición necesaria.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial z}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X = (x_1 ; x_2)$$

condición suficiente

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial z''}{\partial x_1 x_1} & \frac{\partial z''}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial z''}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial z''}{\partial x_2 x_2} \end{bmatrix} = \begin{cases} H > 0 \rightarrow \min \\ H < 0 \rightarrow \max \\ H = 0 \rightarrow \text{hacer otra derivada} \end{cases}$$

$X . H . X^T =$

1. hallar primera derivada de $Z$ respecto de cada" Variable en $Z$.
2. $\nabla f(x) = 0$
3. hallar derivados segundos
4. hallar $H$
5. $X . H . X^T$ y evaluamos $>0 \rightarrow \min$ ; $<0 \rightarrow \max$
6. hallar n determinantes.

Producto de matrices.

$A = 2 \times 3 \qquad B = 3 \times 2$

$2$ ↓ Fila ; $3$ ↳ columna

columna A = Fila en B → para hacer A.B.

El orden del nuevo matriz = Fila A * columna de B.

Fila 1. columna 1 +

AB =

Metodo de lagrange → hay restricciones de igualdad.

Condición necesaria: $\nabla f(x_0) = 0$

Condición suficiente

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P^T & Q \end{bmatrix}_{(m+n)\cdot(m+n)} \qquad P = \begin{bmatrix} \nabla g_1(x) \\ \vdots \\ \nabla g_m(x) \end{bmatrix}_{m\times n}$$

n = número de variables

m = número de restricciones

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_i x_j} \end{bmatrix} \quad \forall i; j$$

P = Gradiente de cada restricción

Q = Derivada Segunda de L respecto de n variables.

① Tranformar Z y bi (→ restricciones) en una sola función:

$$L(x_1, x_n, \lambda) = Z \mp \lambda \sum bi$$

↳ − si $Z \to max$

→ + si $Z \to min$.

② Derivamos respecto de las n variables y $\lambda$.

③ Hallamos el valor de $X_1$ y $X_2$ y $\lambda$.

④ Hallamos determinantes de $H^B$

conclusión $X_0$:

① Es un punto máximo si comenzando con el determinante principal mayor de orden $(2m+1)$, los últimos $(n-m)$ determinantes menores de $H^B$ forman una pauta de signos alternativos $(-1)^{m+1}$.

② Es un punto mínimo si comenzando con el determinante menor principal $(2m+1)$, los ultimos $(n-m)$ determinante menores principales de $H^B$ tienen el signo $(-1)^m$.

Metodo de Kuhn-Tucker → restricciones de desigualdad.

1. Paso las restricciones a forma ideal

max $b_i \leq$ min $b_i \geq$

2. Paso inecuaciones a Ecuaciones. (Agrego slacks) $\leq \rightarrow$ slack positiva, $\geq \rightarrow$ slack negativa

$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, s_1, s_2) =$

3. $L = Z \pm \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$

4. derivar respecto de $x, \lambda, S$ → cuando derivo por $S_i$ multiplico por $S_i$.

5. $2^m$ = número de combinaciones posibles.

reemplazo las combinaciones en las derivadas. Buscar la mejor combinación.

1. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \rightarrow S_1 \neq 0, S_2 \neq 0$
2. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0 \rightarrow S_1 \neq 0, S_2 = 0$
3. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0 \rightarrow S_1 = 0, S_2 \neq 0$
4. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0 \rightarrow S_1 = 0, S_2 = 0$

6. Formo las matrices $X^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}$ $S_0 = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_n \end{bmatrix}$ $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_n \end{bmatrix}$

los valores de las variables (reales x y slacks) deben ser positivas

los valores de los $\lambda$'s deben ser positivos.

$g_i \leq 0$ → las restricciones evaluadas en el punto $(x_1, x_2, x_n)$ hallado deben ser menores o iguales a cero.

En el caso de minimización elegir aquellos puntos donde la función objetivo tiene menor valor y sus multiplicadores son no negativos y $g_i \leq 0$.

En el caso de maximización elegir aquellos puntos donde Z tiene mayor valor, los multiplicadores son no negativos y $g_i \leq 0$.

Convexo Separable

$r^2 = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2$

$r^2 = Z$

recta y circunferencia. (para hallar ptos de intersección).

despejar $x_2$ (dejar en función de $x_1$)

2. reemplazo $x_2$ en Z.

3. igualar Z ($r^2$) a cero y Aplicar la resolvente

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ Algo $- r^2$

4. Para hallar $r^2 = Z$

$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$

5. reemplazo $r^2$ en la resolvente para hallar $x_1$.

6. reemplazo $x_1$ en la Ec (de la recta) para hallar $x_2$.

Algoritmo de programación no lineal.

Método de Busqueda dicotómica

Solo para casos de maximización y con 1 variable.

$x_1 = \frac{1}{2}\left[x_r + x_L - \Delta\right]$ $(x_L)$ $\qquad x_2 = \frac{1}{2}\left[x_r + x_L + \Delta\right]$ $(x_R)$

Metodo de Sección dorada.

$x_1 = x_r - \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cdot (x_r - x_L)$ $(x_L)$ $\qquad x_2 = x_L + \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cdot (x_r - x_L)$ $(x_R)$

Búsqueda dicotomica - Pasos

1. hallar $x_1$ y $x_2$
2. Evaluar $f(x)$ en $x = x_1$ y $x_2$.
3. Elijo el extremo a ajustar (cambio el menor por el valor de su x correspondiente)
4. Formo el nuevo intervalo a iterar.
5. Paramos cuando la diferencia en $x_1$ y $x_2$ sea igual o menor que $\Delta$.

Sección dorada

1. Hallamos $x_1$ y $x_2$. Evaluamos en F.
2. Actualizamos el extremo correspondiente al menor valor evaluado en F.

Si Actualizamo $x_2 \rightarrow$ Sabemos $x_2 = x_1$ del paso anterior

$x_1 \rightarrow$ Sabemos $x_1 = x_2$ del paso Anterior

3 - 4 5 .. BD.

Método de gradiente

$x^0 = (0;0) \Rightarrow$ punto inicial (si no nos dice es $(0,0)$)

1. Evaluo $z$ en $x^0 (0;0)$

2. Calculo $\nabla z (x^0)$ para hallar $x_1$ y $x_2$.

3. Calculo el próximo paso.

$$x^{k+1} = x^k + r \nabla f(x^k) = (x_1^{k+1} ; x_2^{k+1})$$

4. obtengo $h(r)$ reemplazando el punto $x^{k+1}$ en $z$.

$h(r) = z(x_1^{k+1}, x_2^{k+1})$. Derivo $h'(r)$ y luego hallo el valor de $r$ $h'(r) = 0 \rightarrow$

5. reemplazo $r$ en $x^{k+1}$

6. reemplazo $(x_1^{k+1} ; x_2^{k+1})$ en $z$.

7. Termino cuando $x^k$ y $x^{k+1}$ son aproximadamente iguales.

↳ calculo la diferencia entre $z(x^k)$ y $z(x^{k+1})$

Guia Tp nº 5.

Arbol de expansión.

Diagrama de red y matriz de preferencia.

Matriz de precedencia.

| | $n_1$ | ... | $n_n$ → arco siguiente |
|---|---|---|---|
| $n_1$ | | | $x$ |
| ⋮ | | | |
| $n_n$ | | | |

$x$ ↳ para que inicio $n_n$ tiene que terminar $n_1$.

$n_n$ ↳ Arco Anterior.

si tengo columnas vacías → Tareas iniciales.

si tengo filas vacías → Tareas finales

la diagonal principal siempre es cero

dos arcos no pueden comenzar y terminar en los mismos nodos.

diagrama de potenciales

nivel 1 → Tarea inicial

nivel n → Tarea final

Modelo de Stock.

la demanda es constante, reposición por lotes. no hay agotamiento. no hay Velocidades
hay Costo de almacenamiento

Modelo 1

$d = D \cdot T$

$C_1$ = Costo de almacenamiento

$b$ = Costo de producto.

$K$ = Costo de preparación, lanzamiento o emisión de orden.

Modelo 2

= Modelo 1 $D, K, b, C_1$

+ $S_p$ = stock de protección.

Modelo 3

Modelo 2 = $D, K, b, C_1, S_p$ + $C_2$ = Costo de agotamiento.

Modelo 5.

calcular $q_i$, donde $i$ = numero de precios diferentes.

Si $q_i$ cae dentro del intervalo de validez, es decir el intervalo donde esta $q$, calcular el CTE.

Si no calcular $q_{i-1}$, hasta que $q$ caiga en el intervalo.

luego Compara

$q(b_2)$ comparar con $q(b_3)$ y elegir el menor

$$\left.\begin{array}{l} CTE\,(q(b_2),\ b_2) \\ CTE\,(\quad ,\ b_3) \end{array}\right\}$$ comparar y elegir el menor

limite inferior del intervalo de $b_3$