PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

Investigación de Operaciones

Unidad 4

Programación Lineal Entera

Los problemas de **programación con enteros** se formulan de la misma manera que los problemas de programación lineal, pero agregando la condición de que

Todas las variables de decisión deben tomar valores enteros ***(Programación entera pura)***	Sólo algunas de las variables de decisión deben tomar valores enteros ***(Programación Entera Mixta)***	Todas las variables de decisión deben tomar los valores enteros 0 ó 1 ***(Programación Entera Binaria)***

Definiciones

El ***PL*** obtenido cuando se omiten todos los enteros o las restricciones 0 –1 en las variables se llama ***relajación del PL*** de la PE.

Cualquier **PE** se podría considerar como la relajación del **PL + restricciones** adicionales (las restricciones que establecen cuáles variables tienen que ser enteros o ser 0 ó 1).

De aquí que la relajación del PL es una versión de la PE con menos restricciones.

Esto significa que la ***región factible para cualquier PE debe estar contenida en la región factible para la relajación del PL correspondiente***.

Definiciones

Por la afirmación anterior ***"región factible para cualquier PE debe estar contenida en la región factible para la relajación del PL correspondiente"*** se infiere que

Para cualquier *PE que es un problema de maximización*

Valor óptimo de Z para la relajación del PL $\geq$ valor óptimo de Z para PE

Para cualquier *PE que es un problema de minimización*

Valor óptimo de Z para la relajación del PL $\leq$ valor óptimo de Z para PE

Problema de Programación Lineal

Modelo matemático
Maximizar $Z = 6\,x_1 + 7\,x_2$
Sujeto a las restricciones:
$x_1 + 2\,x_2 \leq 8$
$x_1 - x_2 \leq 4$
$x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$

Resolver el Problema anterior con la condición (x_1 y x_2 enteras)

Modelo matemático
Maximizar $Z = 6x_1 + 7x_2$
Sujeto a las restricciones:
$x_1 + 2x_2 \leq 8$
$x_1 - x_2 \leq 4$
$x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ y x_1 , x_2 enteros

PROCEDIMIENTOS para solucionar problemas de programación entera

- **MÉTODO DEL PLANO DE CORTE**

- **MÉTODO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTE**

MÉTODO DEL PLANO DE CORTE

1.- Es una variante del método simplex.

- Resolver el problema como si fuera un problema ordinario de PL, ignorando las restricciones enteras.

2.- Agregar las nuevas restricciones al problema, las cuales:

- Hacen no factible la solución óptima no entera previa; y
- No excluyen cualesquiera de las soluciones enteras factibles
- ***Las nuevas restricciones agregadas son llamadas planos de corte***.

3.- Obtener una nueva solución por el método simplex

4.- Repetir el proceso (desde el punto 2) hasta obtener una solución entera

MÉTODO DEL PLANO DE CORTE

Resolver el siguiente problema entero puro:

Maximizar

- $Z = 5x_1 + 3x_2 + x_3$

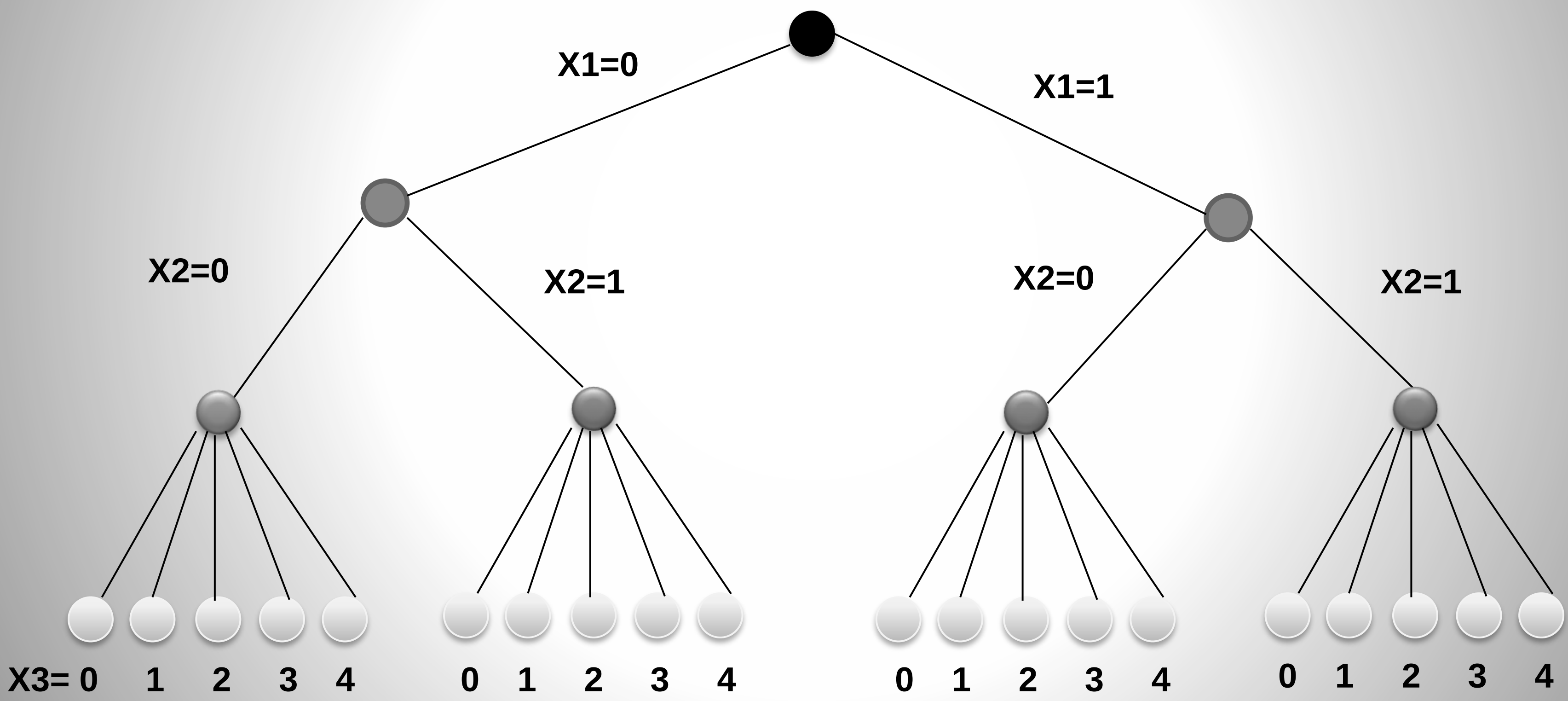
Sujeto a

- $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$
- $3\,x_1 + x_2 + 4\,x_3 \leq 9$
- $x_1 \leq 1$
- $x_2 \leq 1$
- $x_3 \leq 4$

Por ser un problema entero puro

- x_1 y x_2 pueden tomar valor 0 ó 1; y
- x_3 puede valer 0, 1, 2, 3 ó 4

Diagrama de árbol, enumeración de las 20 soluciones posibles, del problema anterior



Resolución de problemas enteros por El método de Ramificación y Acote

En un problema con enteros existe un número finito de soluciones posibles (no todas son factibles) que pueden representarse mediante un diagrama de árbol.

No hace falta enumerar todas las soluciones posibles si se pueden eliminar “ramas dominadas”.

Una rama puede eliminarse si puede demostrarse que no contiene una solución factible que sea mejor que una ya obtenida.

Pasos en el método de Ramificación y Acote

1.- COMENZAR: Resolver el problema como si fuera un problema ordinario de PL (relajación de enteros). La solución obtenida se toma como cota máxima y base para el procedimiento de búsqueda de una solución factible.

2.- RAMIFICAR: A partir de la solución de PL designar una variable como entera y seleccionar, a partir de los posibles valores enteros que pueda tomar, una rama para investigarla.

3.- LIMITAR: Encontrar un límite para el problema definido por la rama seleccionada. El límite está dado por el valor de la mejor solución factible de enteros encontrada hasta el momento, y domina a todos los otros posibles resultados de una rama.

Pasos en el método de Ramificación y Acote

4.- COMPARAR: Comparar la solución obtenida en la rama con el límite de referencia vigente.

Si el valor de la solución es menor que el límite vigente, se elimina de consideración toda la nueva rama. Se continúa con las ramas que no hayan sido evaluadas aún.	**Si el valor de la solución es mejor que el límite vigente y si la solución es entera** (factible), entonces se convierte en el nuevo límite de referencia. Se examinan las ramas que aún no se han considerado en relación al nuevo límite.	**Si el valor de la solución es mayor que el límite vigente, pero la solución no es entera** (factible) deben explorarse las ramificaciones de nivel inferior en la misma rama.

5.- TERMINAR: Quedarse con la mejor solución factible obtenida una vez examinadas todas las ramificaciones.

MÉTODO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTE

Resolver el siguiente problema entero puro:

Maximizar $Z = x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4$

Sujeto a

$7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 15$

$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 17$

$x_1 \leq 4$ $x_3 \leq 1$

$x_2 \leq 4$ $x_4 \leq 1$

Por ser un problema entero puro

x_3 y x_4 pueden tomar valor 0 ó 1; y

x_1 y x_2 pueden valer 0, 1, 2, 3 ó 4

Iteraciones por ramificación y acote para el problema anterior

0

Solución por PL: x_1=0, x_2=4, x_3=1, x_4=0.25

Utilidad Z=27.75

Solución no entera: RAMIFICAR

Cota inferior=0 Cota superior=27.75

Resolver por WINQSB

(abrir archivo PE1321

$X_4 \leq 0$

2

Solución por PL: x_1=0.14, x_2=4, x_3=1, x_4=0

Utilidad Z=27.14

Solución no entera: RAMIFICAR

Cota inferior=0 Cota superior=27.14

$X_4 \geq 1$

1

Solución por PL: x_1=0, x_2=3, x_3=1, x_4=1

Utilidad Z=25

Solución entera

Cota Inferior (Límite para la rama) = 25

$X_1 \leq 0$

3

Solución por PL: x_1=0, x_2=4, x_3=1, x_4=0

Utilidad Z=27

Solución entera

Cota inferior (Límite para la rama) = 27

$X_1 \geq 1$

4

Solución por PL: x_1=1, x_2=2, x_3=1, x_4=0

Utilidad Z=18

Solución entera

MÉTODO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTE

Resolver el siguiente problema entero puro:

Maximizar $Z = 5x_1 + x_2$

Sujeto a

- $x_1 + 2x_2 \leq 2.5$
- $x_1 + x_2 \leq 3$
- $4x_1 + x_2 \leq 12$

MÉTODO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTE

Resolver el siguiente problema entero puro:

Maximizar $Z = 21x_1 + 11x_2$

Sujeto a

- $7x_1 + 4x_2 \leq 13$

MÉTODO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTE

Resolver el siguiente problema entero puro:

Minimizar $Z = 2x_1 + 3x_2$

Sujeto a

$x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1 + 3x_2 \geq 6$

MÉTODO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTE

Resolver el siguiente problema entero puro:

Minimizar $Z = 21x_1 + 3x_2 + 5x_3$

Sujeto a

- $1x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 7.5$
- $3x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 10.5$
- $X_1 \leq 1$ $X_2 \leq 2$ $X_3 \leq 3$

Problema

Bestel tiene la oportunidad de Invertir en 5 proyectos diferentes (P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5)

- Datos: El beneficio neto esperado de cada proyecto
- El costo esperado de cada proyecto
- Disponibilidad de caja para el próximo año

Otras restricciones adicionales

- Exactamente un proyecto puede ser seleccionado del conjunto de proyectos P_1, P_3 y P_5
- No más de uno de los dos proyectos P_2 y P_4 pueden ser seleccionados

MÉTODO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTE

Resolver el siguiente problema entero binario:

Maximizar $Z = 100P_1 + 80P_2 + 70P_3 + 60P_4 + 90P_5$

Sujeto a

- $60P_1 + 40P_2 + 20P_3 + 40P_4 + 50P_5 \leq 150$
- $P_1 + P_2 + P_3 = 1$
- $P_2 + P_4 \leq 1$

Taha Pág.361

Presupuesto de Capital

Se están evaluando cinco proyectos durante un horizonte de planeación de 3 años. La tabla siguiente muestra los ingresos esperados para cada uno, y sus gastos anuales correspondientes

Proyecto	**Gastos (millones$)/año**			**Ingresos (millones $)**
	1	2	3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Fondos disponibles (millones $)	25	25	25	

¿Cuáles proyectos se deben seleccionar para el horizonte de 3 años?

El problema se reduce a tomar una decisión "si-no" para cada proyecto. Se define una variable binaria Xj como sigue:

$$X_j = \begin{cases} 1 \text{ si se selecciona el proyecto } j \\ 0, \text{ si no se selecciona el proyecto } j \end{cases}$$

Entonces, el programa lineal entero es:

Maximizar **Z**= 20X1 + 40X2 + 20X3 +15X4 + 30X5

Sujeto a

$$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 7X_4 + 8X_5 \le 25$$

$$X_1 + 7X_2 + 9X_3 + 4X_4 + 6X_5 \le 25$$

$$8X_1 + 10X_2 + 2X_3 + X_4 + 10X_5 \le 25$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 = (0;1)$$

Taha Pág.362 Otro ejemplo

Se deben cargar cinco artículos en un barco. A continuación se muestra el peso wi, el volumen vi y el valor unitario ri de cada artículo i.

Artículo *i*	Peso unitario, *wi* (ton)	Volumen unitario, *vi* (yd^3)	Valor unitario,ri (100 $)
1	5	1	4
2	8	8	7
3	3	6	6
4	2	5	5
5	7	4	4

El peso y el volumen máximo de la carga son 112 toneladas y 109 yardas cúbicas, respectivamente. Formule el modelo de programa lineal entero y determine la carga más valiosa

PROBLEMA DE CARGO FIJO (ejemplo Taha 364)

Tres empresas telefónicas pidieron que me suscribiera a su servicio de larga distancia dentro del país. MaBell cobra $16 fijos por mes, más $0,25 por minuto. PaBell cobra $25 fijos por mes, pero el costo por minuto se reduce a $0,21. y con BabyBell, la tarifa fija es de $18 mensual, y la proporcional es $0,22 por minuto. Suelo hacer un promedio de 200 minutos de llamadas de larga distancia al mes.

Suponiendo que no pague el cargo fijo si no hago llamadas, y que puedo repetir a voluntad mis llamadas entre las tres empresas ¿cómo debo repartir las llamadas entre las tres empresas para minimizar mi recibo telefónico mensual?

Se definen

X1 = Minutos de larga distancia por mes con MaBell
X2 = Minutos de larga distancia por mes con PaBell
X3 = Minutos de larga distancia por mes con BabyBell

Y1=1 si X1> 0 Y1=0 si X1=0
Y2=1 si X2> 0 Y2= 0 si X2=0
Y3=1 si X3> 0 Y3= 0 si X3=0

Se puede asegurar que Yj, sea igual a 1 si X, es positiva usando la restricción
Xj < MYj ,j = 1,2,3

Se debe seleccionar el valor de M lo suficientemente grande como para no restringir en forma artificial a las variables Xi,. Como hago aproximadamente 200 minutos de llamadas por mes, entonces Xi < 200 para toda j, y se puede seleccionar M = 200 con seguridad.

El modelo completo es

$$\text{Min } Z = 0.25X1 + 0.21X2 + 0.22X3 + 16Y1 + 25Y2 + 18Y3$$

sujeta a

$$X1 + X2 + X3 \geq 200$$

$$X1 \leq 200Y1$$

$$X2 \leq 200Y2$$

$$X3 \leq 200Y3$$

$$X1 + X2 + X3 \geq 0$$

$$Y1, Y2, Y3 = (0, 1)$$

El concepto de “cargo fijo” es característico de lo que en las publicaciones se llama problema del cargo fijo.

Ejercicio.
Jobco planea producir al menos 2000 piezas en tres máquinas. El tamaño mínimo de lote en cualquier máquina es 500 piezas. La siguiente tabla contiene los datos pertinentes del caso.

Máquina	Costo de preparación	Costo de producción/unidad	Capacidad (unidades)
1	300	2	600
2	100	10	800
3	200	5	1200

Formule el problema como programa lineal entero y determine su solución óptima

PROBLEMA DE COBERTURA DE CONJUNTO

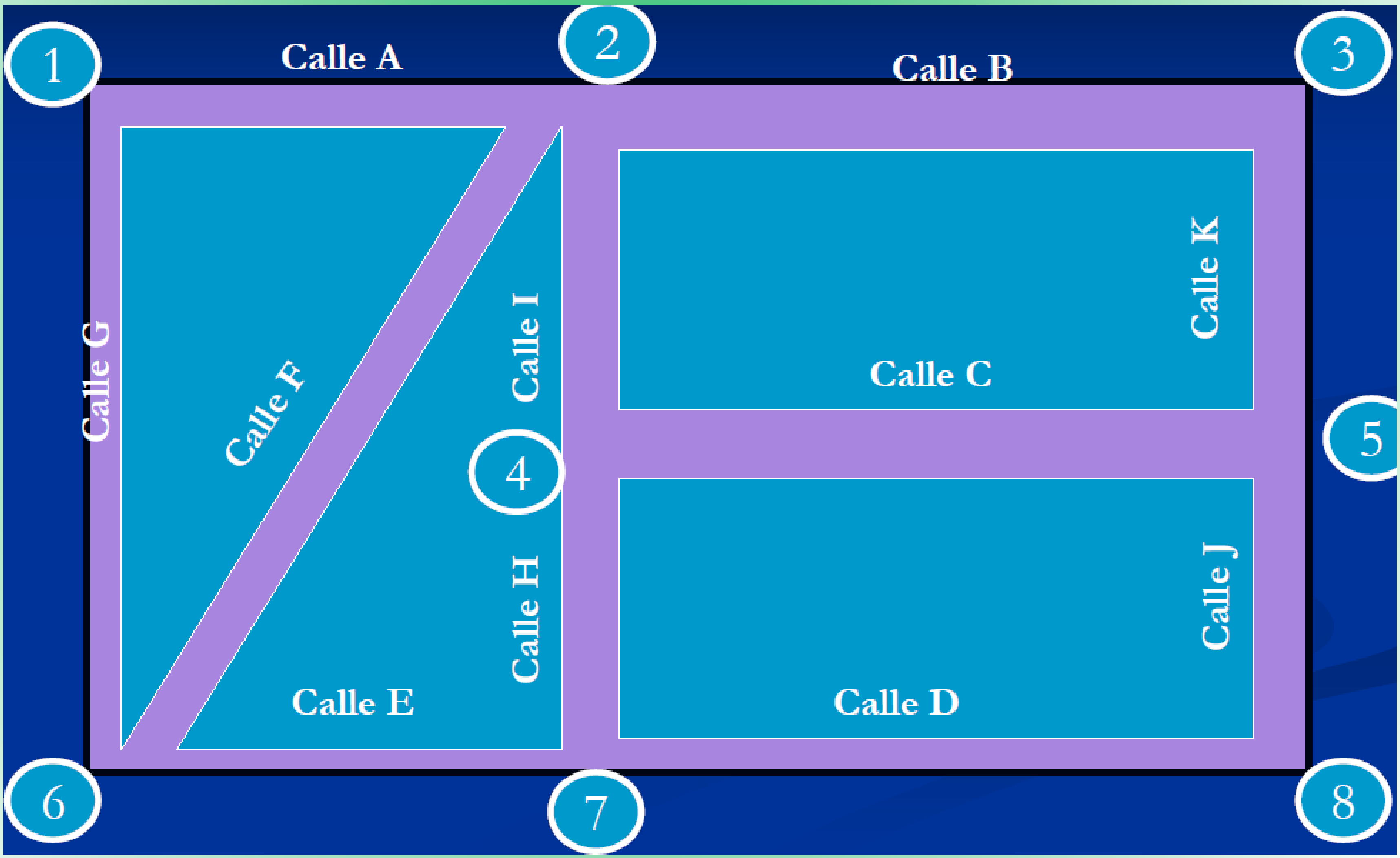
Para promover la seguridad en la universidad, el Departamento de Seguridad de la U de A está en proceso de instalar teléfonos de emergencia en lugares seleccionados. Dicho departamento desea instalar la cantidad mínima de teléfono, para que cada una de las calles principales de la universidad tenga al menos un teléfono. El mapa de las calles principales (A a K) de la universidad se muestra en la siguiente filmina.

Es lógico poner los teléfonos en los cruces de las calles, para que cada uno dé servicio cuando menos a dos calles. En la figura siguiente se ve que la distribución de las calles requiere un máximo de ocho ubicaciones de teléfono

Se definirá

$$X_j = \begin{cases} 1, \text{ si un teléfono esta en el lugar } j \\ 0, \text{ caso contrario} \end{cases}$$

Mapa de las calles de la U de A



Para cumplir con las restricciones del problema se requiere instalar al menos un teléfono en cada una de las 11 calles (A a K). El modelo es:

Minimizar Z = X + X2 + X3 + X4 +X +X6 +X7 + X8

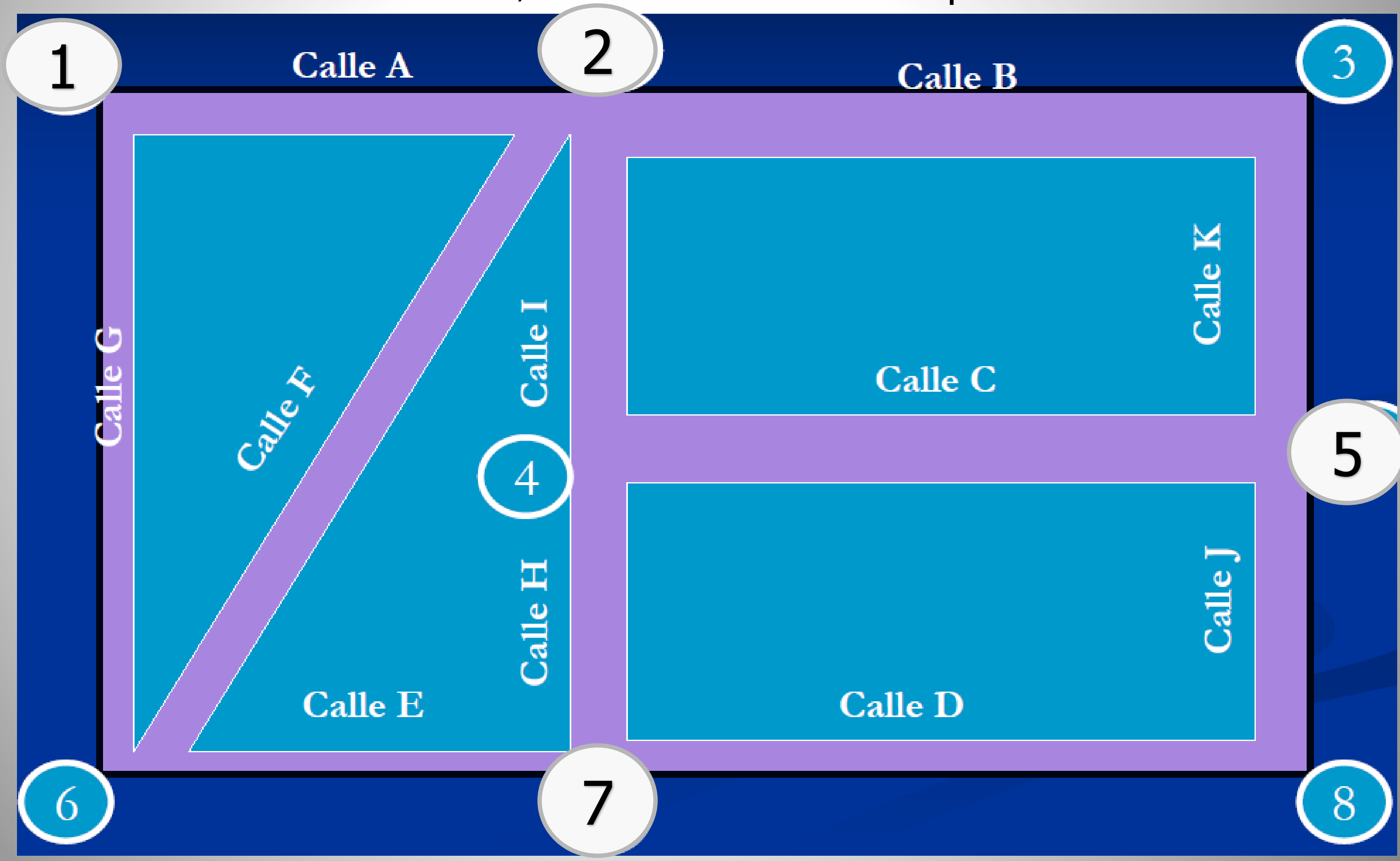
sujeta a

X1 + X2 ≥ 1 (Calle A)
X2 + X3 ≥ 1(Calle B)
X4+X5 ≥ 1(Calle C)
X7 + X8 ≥ 1 (Calle D)
X6 + X7 ≥ 1(Calle E)
X2 + X6 ≥ 1(Calle F)
X1 + X6 ≥ 1(Calle G)
X4 + X7 ≥ 1 (Calle H)
X2 + X4 ≥ 1 (Calle I)
X5 + X8 ≥ 1 (Calle J)
X3 + X5 ≥ 1 (Calle K)

X1=(0,1), j = l, 2 …. 8

La solución óptima del problema requiere instalar cuatro teléfonos, en los cruceros 1, 2, 5 y 7. El problema tiene óptimos alternativos.

Mapa de las calles de la U de A, en blanco una de las posibles soluciones



El modelo anterior es característico de lo que se conoce en forma genérica como problema de cobertura de conjunto. En este modelo, todas las variables son binarias. Para cada restricción, todos los coeficientes del lado izquierdo son 0 ó 1, y el lado derecho tiene la forma (> 1). La función objetivo minimiza siempre $c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n$ donde $c_j > 0$ para toda $j = 1, 2, ..., n$.
En este ejemplo, $c = 1$ para toda j. Sin embargo, si c_j representa el costo de instalación en el lugar j, esos coeficientes pueden asumir valores distintos de 1.

Ejercicio El condado de Washington abarca seis pueblos que necesitan servicio de ambulancia de emergencia. Debido a la proximidad de algunos de los pueblos, una sola estación puede dar servicio a más de una comunidad. Se estipula que la estación debe estar a menos de 15 minutos por carretera de los pueblos a los que proporciona servicio. La siguiente tabla muestra los tiempos de conducción por carretera, en minutos, entre los seis pueblos.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	23	14	18	10	32
2	23	0	24	13	22	11
3	14	24	0	60	19	20
4	18	13	60	0	55	17
5	10	22	19	55	0	12
6	32	11	20	17	12	0

Formule un programa lineal entero cuya solución dé como resultado la cantidad mínima de estaciones, y sus ubicaciones.(Taha pag.368)

Restricciones “o bien”

Jobco usa una sola máquina para procesar tres trabajos. El tiempo de procesamiento y la fecha de entrega (en días) para cada trabajo se ven en la siguiente tabla. Las fechas de entrega se miden a partir de la referencia cero, que es el tiempo supuesto de inicio del primer trabajo.

Trabajo	Tiempo de procesamiento (días)	Fecha de entrega (días)	Multa por retardo, $/día
1	5	25	19
2	20	22	12
2	15	35	34

El objetivo del problema es determinar la secuencia mínima de penalización por retraso al procesar los tres trabajos.

Restricciones “o bien”

Definiremos a

Xj = Fecha de inicio del trabajo j (en días a partir de la referencia cero)

El problema tiene dos clases de restricciones: las de no interferencia (para que los trabajos no se procesen al mismo tiempo) y las restricciones de fecha de vencimiento.

Primero se examinarán las restricciones de no interferencia.

Dos trabajos, i y j, con tiempos de procesamiento pi, y pj, no se procesarán al mismo tiempo si $X_j > X_j + p_j$ ó si $X_j > X_i + p_i$, dependiendo de si el trabajo j es anterior al i, o viceversa. Como todos los programas matemáticos manejan sólo restricciones simultáneas, se transformarán las restricciones “o bien” (también se llaman “uno u otro”) a las siguientes restricciones simultáneas

1, si i es anterior a j

0, si j es anterior a i

Para M suficientemente largo, la restricción “o bien” se convierte a las restricciones simultáneas siguientes

$My_{ij}+(X_i - X_j) \geq p_j$ y $M(1-y_{ij})+(X_j-X_i) \geq p_i$

Si $yij = 0$, la primera restricción es activa y la segunda es redundante (porque en su lado izquierdo estará M, que es mucho mayor que pi). Si $yij = 1$, la primera restricción es redundante y la segunda es activa. A continuación se examina la restricción de la fecha de vencimiento. Como dj es la fecha de vencimiento para el trabajo j, sea sj la variable no restringida. Entonces, la restricción correspondiente es

$$Xj + pj + sj = dj$$

Si $sj > 0$, se cumple con la fecha de entrega, y si $sj < 0$, se incurre en una penalización por retraso. Si se usa la sustitución

$$sj = sj^{+} - sj^{-}, \text{ donde } sj^{+}, sj^{-} > 0$$

la restricción se vuelve

$$Xj + pj + sj^{+} - sj^{-} = dj$$

El costo de penalización por retraso es proporcional a sj- .

El modelo para este problema es

Minimizar $Z = l9s_1^- + 12s_2^- + 34s_3^-$

sujeta a

$$
\begin{array}{lllll}
X_1 - X_2 & & +My_{12} & & \geq 20 \\
-X_1 + X_2 & & -My_{12} & & \geq 5 - M \\
X_1 \quad - & X_3 & +My_{13} & & \geq 15 \\
X_1 \quad + & X_3 & -My_{13} & & \geq 5 - M \\
X_2 \; - & X_3 & & +My_{23} & \geq 15 \\
-X_2 + & X_3 & & -My_{23} & \geq 20 - M
\end{array}
$$

$$X_1 + s_1^+ - s_1^- = 25 - 5$$

$$X_2 + s_2^+ - s_2^- = 22 - 20$$

$$X_3 + s_3^+ - s_3^- = 35\text{-}15$$

$X_1, X_2, X_3, S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^-, S_3^+, S_3^- > 0$

$Y_{12}, Y_{13}, Y_{23} = (0, 1)$

Para resolverlo, se escoge M 1000, valor que es mayor que los tiempos de procesamiento de las tres actividades.

La solución óptima (es X1 = 20, X2 = 0 y X3 = 25. Eso quiere decir que el trabajo 2 comienza en el tiempo 0, el trabajo 1 comienza en el tiempo 20 y el trabajo 3 comienza en 25, por lo que la secuencia óptima de procesamiento es

$2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$.

Esta solución indica terminar el trabajo 2 en el tiempo 0 + 20 = 20, el trabajo 1 en el tiempo 20 + 5 = 25 y el trabajo 3 en 25 + 55 = 40 días. El trabajo 3se demora 40 - 35 = 5 días de su fecha de entrega, a un costo de 5 X $34 = $170.

Ejercicio (Taha 371)

Para producir dos artículos intercambiables se usa una máquina. Su capacidad diaria es cuando mucho de 20 unidades del artículo 1 y 10 unidades del artículo 2. También, esa máquina se puede ajustar para producir cuando mucho 12 unidades del artículo 1 y 22 del producto 2, diariamente. El análisis del mercado indica que la demanda máxima diaria combinada de los dos artículos es de 35 unidades. Las utilidades unitarias para los dos artículos son $10 y $12 (1 y 2, respectivamente), ¿cuál de los dos ajustes de máquina se debe seleccionar? Formule el problema como programa lineal entero y determine su óptimo