Unidad II



Contenidos temáticos:

- Generalidades. Característica de los programas lineales. Formulación matemática.
- Solución gráfica. Planteo de la matriz. Coeficientes. Significación.
- Algoritmo Simplex. Primal, Fundamentación y planteo Resolución.
- Tipos de soluciones.
- Casos especiales. (Factibles, no factibles, no-acotadas, infinitas, múltiples).
- Simplex Revisado. Método de las dos fases.
- Análisis de sensibilidad.

Objetivo: Proponer en forma cuantitativa acciones o decisiones a tomar para optimizar sistemas donde existan recursos escasos y se presenten relaciones lineales, mediante la teoría y práctica de la Técnica de Programación Lineal.

¿Qué es la Programación Lineal?

La Programación Lineal utiliza un Modelo Matemático para describir el problema.

La Programación Lineal trata la *Planificación de las actividades* para obtener un *resultado óptimo*, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo matemático) entre todas las alternativas de solución

¿Qué es la Programación Lineal?

- Programación Lineal es una técnica cuantitativa ampliamente aplicada en sistemas que presenten relaciones lineales, para utilizar los recursos escasos de la mejor manera posible.
- La mejor manera de usar los recursos escasos se logra utilizando un modelo del sistema llamado Modelo de Programación Lineal

Historia de la Programación Lineal

- Las ideas básicas de la programación lineal surgieron de un estudio acerca de problemas de asignación de recursos hecho por la fuerza aérea de los EE. UU. durante la Segunda Guerra Mundial,
- George Dantzig, miembro del proyecto SCOOP (*Scientific Computation of Optimun Programs*) de la fuerza aérea, formuló el problema de la programación lineal y diseñó el método simplex de solución en 1.947....
- •George Dantzig nació en 1.914 y trabajó para la Rand Corporation después de su aporte a la fuerza aérea.
- •Fue profesor de Investigación de Operaciones en la Universidad de Standford.
- •Falleció en el 2004.

Programación Lineal

➤ Un problema de **Programación Lineal** se refiere al *uso eficiente o distribución de recursos limitados* para alcanzar los objetivos deseados. Aunque esta es su aplicación más frecuente, la Programación Lineal tiene muchas otras posibilidades.

Los problemas de **Programación Lineal** se caracterizan por el gran número de soluciones que satisfacen las soluciones básicas de cada problema.

Programación Lineal (P.L.)

La elección de una solución en particular como la mejor solución del problema en estudio dependerá en cierto grado del objetivo global implícito en el enunciado del mismo; y esa será la *Solución Optima*.

La programación lineal es una herramienta poderosa, pues aún con aplicaciones parciales, se pueden obtener ahorros importantes.

P.L.: Ámbito de Aplicación

- > PROCESO CONTINUO
- > ALIMENTACIÓN
- > TRANSPORTE
- > METALÚRGICAS
- > AGRICULTURA
- **AUTOMOTRICES**
- ➤ ENERGÍA
- > REDES DE SERVICIO
- > LOGÍSTICA
- > MARKETING
- > MEDIO AMBIENTE

P.L.: Ejemplos de Aplicación

- ✓ PLANEAMIENTO Y PROGRAMACION DE LA PRODUCCION
- ✓ MEZCLA
- ✓ DISTRIBUCION DE PRODUCTOS
- ✓ FABRICAR O VENDER
- ✓ ASIGNACION DE PERSONAL
- ✓ EVALUACION DE INVERSIONES
- ✓ OPTIMIZACION DE MEDIOS
- ✓ MINIMIZACION DE DESPERDICIOS
- ✓ PROBLEMAS DE REDES
- ✓ SCHEDULING

Programación Lineal: Planteo del Modelo

La empresa "CRS", el año pasado, comenzó la producción de dos software, gestión de stock y contabilidad, cuya venta deja los siguientes beneficios por paquete: \$ 3 el primero de ellos, y \$ 4 el segundo.

La elaboración de esta producción, si bien utiliza una serie de materias primas y se realiza en varios sectores de la empresa, solo presenta un gran problema en 3 sectores bien específicos que son las áreas de:

- 1. Análisis.
- 2. Programación
- 3. Implementación.

Pero estos sectores disponen de muy limitado tiempo para su trabajo:

- 900 minutos diarios = 15 horas diarias (Área de Análisis).
- 3000 minutos diarios = 50 horas diarias.
 (Área de Programación)
- 300 minutos diarios = 5 horas diarias. (Área de Implementación)

Los respectivos **insumos** de cada producto, en cada sector, suministrados por los empleados del frigorífico se pueden visualizar en el siguiente cuadro: (expresados en **minutos/paquete**)

SECTOR	gestión de stock	contabilidad
Producto		
Análisis	30	60
Programación	50	250
Implementación	12	12

La Gerencia de la empresa "CRS", desea tener un plan diario de producción que le aporte el **mayor beneficio económico** y en cada proceso de los tres mencionados, **se reduzcan los tiempos ociosos** ya que esto último representa una gran pérdida

Hipótesis:

- Se puede disponer de toda materia prima que se desee.
- Toda la producción se vende.
- Los otros sectores del establecimiento no presentan ningún problema, cualquiera sea la producción.
- El establecimiento desea elaborar los dos tipos de productos.
- Ninguna otra producción del establecimiento interfiere con esta faena.
- El tiempo de los tres sectores en conflicto destinado a los productos y que no se utiliza, se pierde.
- Los tiempos de estos sectores son muy costosos.
 - La empresa desea ganar lo máximo.

Pasos para la elaboración del modelo matemático

1. ¿Que es lo que se produce?

gestión de stock

contabilidad

¿Que es lo que se desea calcular?

Cuantos paquetes de cada producto a producir

X1 = cantidad de paquetes de gestión de stock a producir diarios

X2 = = cantidad de paquetes de contabilidad a producir diarios Unidad = <u>paquetes</u> ó paquetes diarios día Estas cantidades se producen o no, y nunca puede existir una producción negativa, esto implica:

Xi > 0, $\forall i$,

Condición de no negatividad de las variables

2. ¿Cual es el objetivo de la empresa?

El objetivo debe ser único. Si hubiera varios todos se subordinan a uno solo.

En este caso existen varios:

- Producir lo máximo.
- No desperdiciar tiempo en los sectores nombrados.
- Ganar lo máximo.

Pero puede verse que todo se reduce a un solo objetivo: *Ganar lo máximo*; y esto se consigue produciendo lo máximo que se pueda.

En este caso:

O sea:

$$Z = 3 X1 + 4 X2 \Rightarrow MAXIMIZAR$$

A esta función se le da el nombre de **Función Objetivo**, donde se cumple:

z = f (x) → OPTIMIZAR **Función lineal** de las variables que forman la segunda condición, llamada también **Funcional**

3. Condición

Al analizar cada sector surge:

En el sector de Análisis:

Este sector dispone de una cantidad fija de minutos diarios que limitan o restringen cada producto. Es decir, el tiempo total de tiempo usado aquí no puede exceder lo que se dispone, debe ser ≤ 900 minutos diarios.

Si sólo se produce soft de gestión de stock, $30 \text{ x} 1 \leq 900$. Análogamente pasaría si sólo se producen de contabilidad debería cumplirse ahora que $60 \text{ x} 2 \leq 900$.

R1: 30 min. X1 paquete.+ 60 min. X2 paquete. ≤ 900 min. diarios paquete día paquete día
Primera restricción R1 del modelo matemático.

Lo que hace es aproximar una ecuación lineal a la realidad, porque lo modelo lo admite y es conveniente

Suposiciones:

- El uso de recurso es **proporcional** a cada unidad producida.
- La **proporcionalidad** no es suficiente para garantizar la linealidad de todo el modelo.
- Todos los parámetros son constantes
- •Algunas veces las variables pueden ser significativas solamente si están expresadas (si asumen) valores enteros.

Con análogo razonamiento a la primera restricción, se obtienen las siguientes restricciones:

Programación

R2: 50 min. X1 paquete.+ 250 min.X2 paquete. ≤ 3000 min.diarios paquete día paquete día

Control y Prueba

R3: 12 min.X1 paquete.+ 12 min.X2 paquete. ≤ 300 min.diarios paquete día paquete día

Dichas restricciones forman una condición de ligadura.

El modelo matemático:

$$x_i > 0$$
, $\forall i$

$$z = 3 x_1 + 4 x_2 \implies MAXIMIZAR$$

$$\mathbf{R_1}$$
: 30 $\mathbf{x_1} + 60 \ \mathbf{x_2} \le 900$

$$\mathbf{R_2}: 50 \ \mathbf{x_1} + 250 \ \mathbf{x_2} \le 3000$$

$$\mathbf{R_3}$$
: 12 $\mathbf{x_1} + 12 \mathbf{x_2} \leq 300$

Programación Lineal: Planteo del Modelo

2.
$$Z = f(x) => MAX \Rightarrow Función Objetivo$$

3.
$$\sum aij \ xj \le bj \implies Restricciones$$

Donde los:

aij = insumo de cada restricción por cada paquete de producto
 bi = cantidad disponible de cada uno de los recursos

En el sector de Análisis de los 900 minutos diarios que se dispone pueden darse dos casos:

- No existe tiempo ocioso
- Existe sobrante de ese tiempo

A ese tiempo sobrante desconocido se lo indica como otra variable **X3**, la que puede adoptar por lo tanto solamente los valores:

$$=0$$
 ≥ 0

La primera restricción R1, queda escrita:

R1:
$$30 X1 + 60 X2 + X3 = 900$$

Análogamente:

R2: 50 X1 + 250 X2 + X4 = 3000

R3: 12 X1 + 12 X2 + X5 = 300

Donde **X4** y **X5** representan el sobrante de tiempo en los otros dos sectores.

A estas variables (X3, X4, X5), se les da el nombre de variables de **slacks** o de **holgura**.

Las variables X1 y X2, son las variables de decisión que en el modelo de Programación Lineal llevan el nombre de variables reales.

VARIABLE	CLASE	SIGNIFICADO	UNIDAD
X ₁	Real	gestión de stock producido	paquete diarios
X ₂	Real	contabilidad producido.	paquete diarios
X ₃	Slack	Sobrante de tiempo en el sector de Análisis	Minutos diarios
X ₄	Slack	Sobrante de tiempo en el sector de Programación	Minutos diarios
X ₅	Slack	Sobrante de tiempo en el sector de Implementación	Minutos diarios
Z	Funcional		\$ diarios

Programación Lineal:

Métodos de resolución

- Solución Gráfica
- Método Simplex

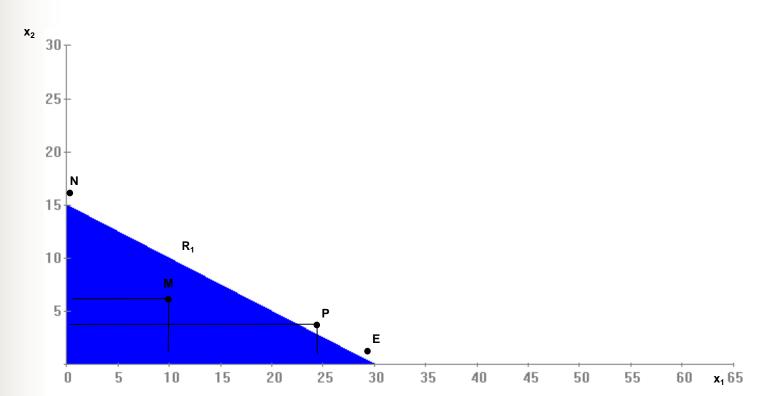
Solución Gráfica

Analizando R1: 30 x1 + 60 x2 = 900

$$X3 = 0$$
,

Si
$$X1 = 0 \Rightarrow 60 X2 = 900 \Rightarrow X2 = 15$$

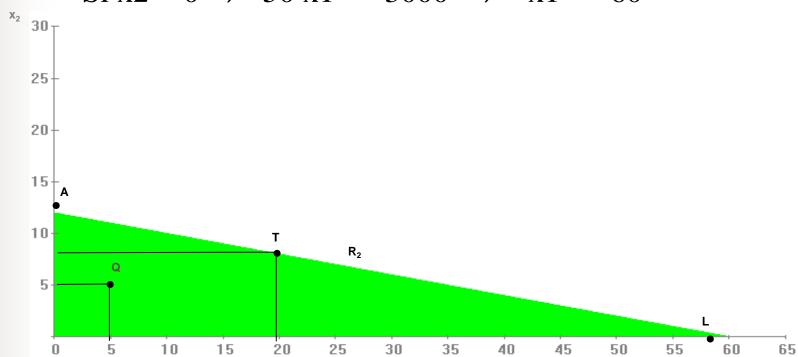
$$Si X2 = 0 \Rightarrow 30 X1 = 900 \Rightarrow X1 = 30$$



Analizando R2: $50 \times 1 + 250 \times 2 = 3000 \times 4 = 0$.

Si
$$x1 = 0 \Rightarrow 250 x2 = 3000 \Rightarrow x2 = 12$$

Si $x2 = 0 \Rightarrow 50 x1 = 3000 \Rightarrow x1 = 60$

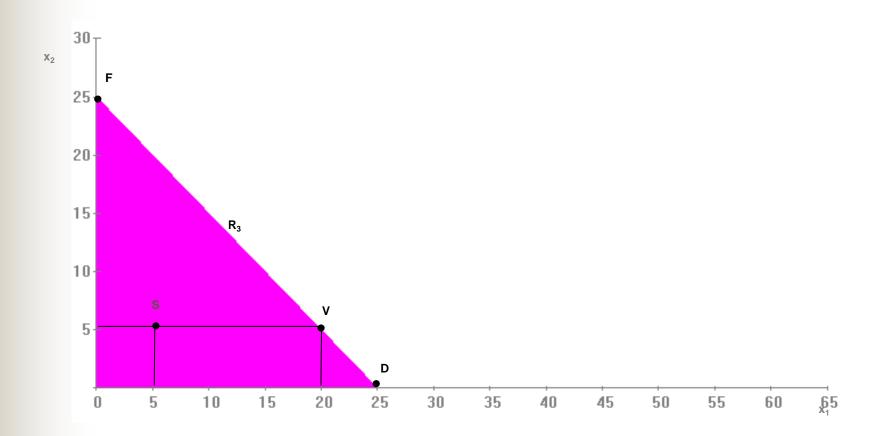


Analizando R3: 12 x1 + 12 x2 = 300

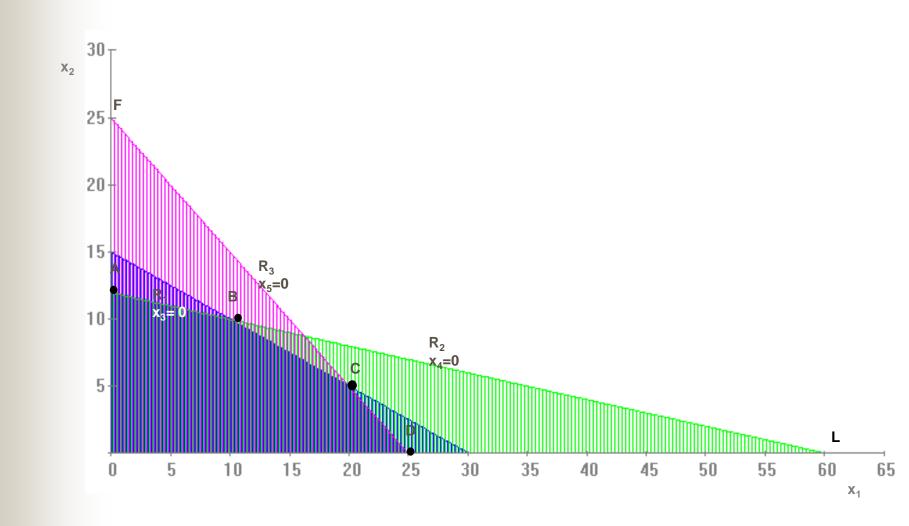
$$x5 = 0$$
.

$$Si x1 = 0 \Rightarrow 12 x2 = 300 \Rightarrow x2 = 25$$

$$Si x2 = 0 \Rightarrow 12 x1 = 300 \Rightarrow x1 = 25$$



Entonces realizando todo en un solo gráfico



Teniendo en cuenta que:

Si la variable **slack** es nula significa que se aprovecha totalmente el recurso;

Las variables **slacks**, cada una, sobre una arista del convexo; se anulan.

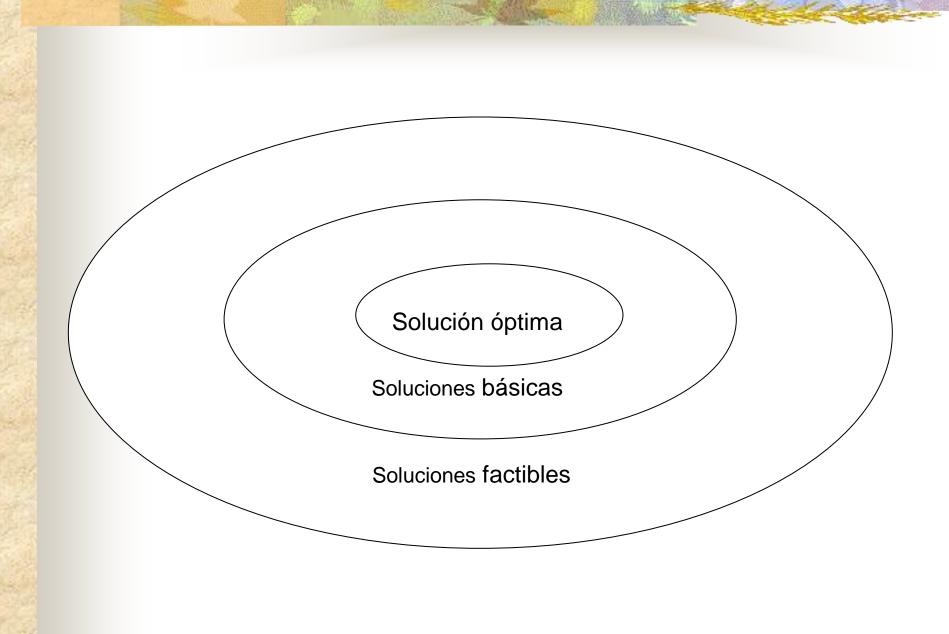
En cada vértice se anulan dos variables slacks.

"Conviene explorar solamente los vértices del convexo y analizar que pasa en cada uno de ellos para buscar la mejor solución"

$$A = (x2 \cap R2) = (0, 12, 180, 0, 156)$$

 $B = (R1 \cap R2) = (10, 10, 0, 0, 60)$
 $C = (R3 \cap R1) = (20, 5, 0, 750, 0)$
 $D = (R3 \cap x1) = (25, 0, 150, 1750,)$

E = No pertenece al polígono de soluciones



1.Calcular el funcional en cada uno de los vértices

Puntos	Rectas que lo forman	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Función Objetivo
A	X ₂ ∩ R2	0	12	180	0	156	48
В	R1 ∩ R2	10	10	0	0	60	70
С	R1 ∩ R3	20	5	0	750	0	80
D	X ₁ ∩ R3	25	0	150	1750	0	75

Gráficamente, dibujando la recta del funcional que pase por el punto (0,0) y luego trazando las paralelas hasta llegar a la que tenga el mayor beneficio.

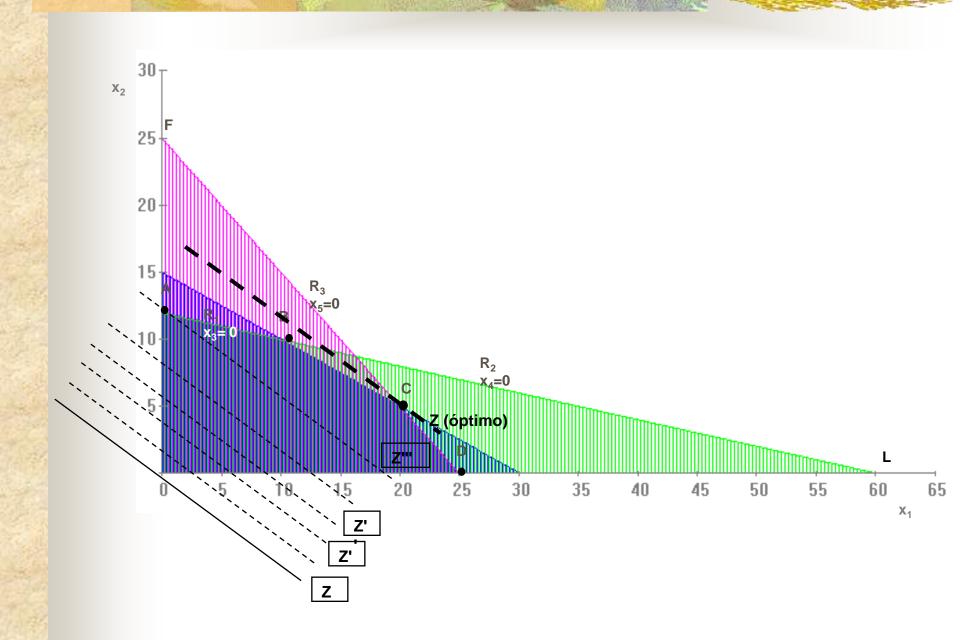
$$z = 3 x1 + 4 x2$$

Si z=0 resulta:

$$x2 = \underbrace{-3 x1}_{4}$$

Que es una recta que pasa por el origen de ordenadas. Allí se dibuja el funcional.

Todas las rectas paralelas a z tienen la misma pendiente.



Método Simplex.

El método simplex es un algoritmo. De hecho, cualquier procedimiento iterativo de solución es un algoritmo. Entonces, un algoritmo es simplemente un proceso en el que se repite (se itera) un procedimiento sistemático una y otra vez hasta obtener el resultado deseado. Cada vez que se lleva a cabo el procedimiento sistemático se realiza una iteración. En consecuencia, un algoritmo sustituye un problema difícil por una serie de problemas fáciles.



El método simplex es un procedimiento *algebraíco* en el que cada iteración contiene la solución de un sistema de ecuaciones para obtener una nueva solución a la que se le aplica la prueba de optimalidad.

No obstante, también tiene una interpretación *geométrica* muy útil

OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN

- Uso del computador absolutamente necesario
- **❖**Los modelos buscan optimizar (maximizar o minimizar)
- Herbert Simon introduce el termino satisfizar
- "La diferencia entre optimizar y satisfizar refleja la diferencia entre la teoría y la realidad"

Resultados obtenidos con el software Winqsb

	15:09:43		Wednesday	February	13	2008		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	20,0000	3,0000	60,0000	0	basic	2,0000	4,0000
2	X2	5,0000	4,0000	20,0000	0	basic	3,0000	6,0000
	Objective	Function	(Max.) =	80,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	900,0000	<=	900,0000	0	0,0333	750,0000	1.012,5000
2	C2	2.250,0000	<=	3.000,0000	750,0000	0	2.250,0000	М
3	C3	300,0000	<=	300,0000	0	0,1667	240,0000	360,0000

Estos valores con un significado real, forman la respuesta que la Consultora presentará a la empresa.

Tomando como punto de partida a este modelo matemático y a sus respuestas, la Gerencia del establecimiento, **decidirá sus cursos de acción futura**.

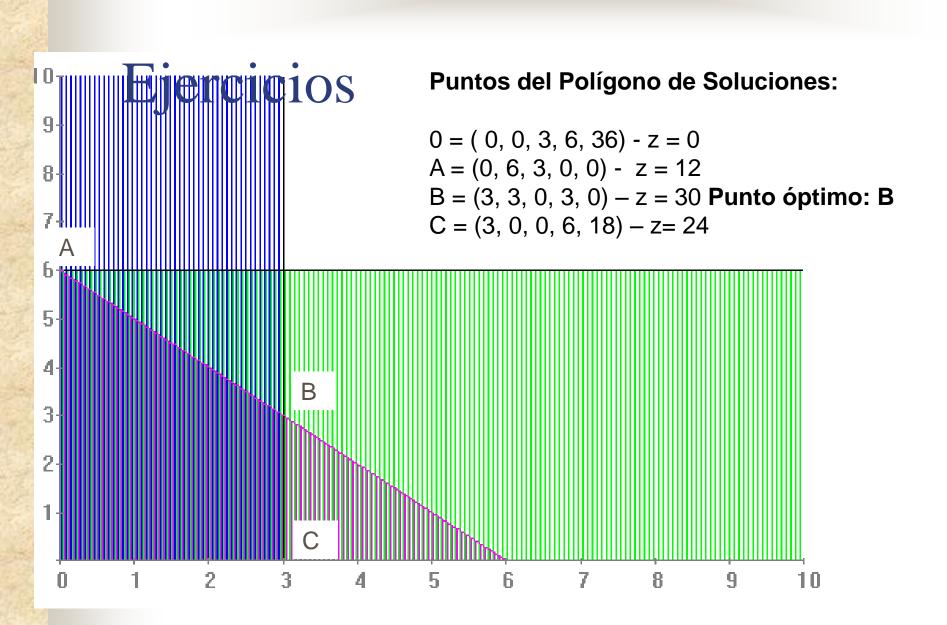
¿PREGUNTAS?

Ejercicios

Ejercicio N°1:

$$x1 \le 3$$

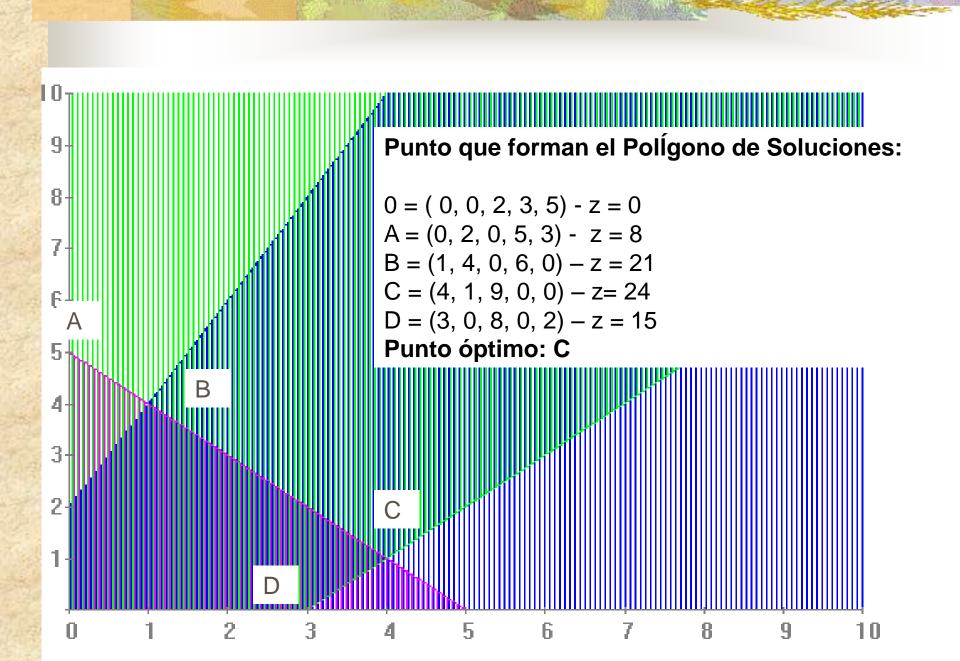
 $x2 \le 6$
 $6x1 + 6x2 \le 36$
 $z = 8x1 + 2x2 --- > MAX$



Ejercicios

Ejercicio N° 2:

$$-2x1 + x2 \le 2$$
 $x1 - x2 \le 3$
 $x1 + x2 \le 5$
 $z = 5x1 + 4x2 ---> MAX$



MINIMIZAR

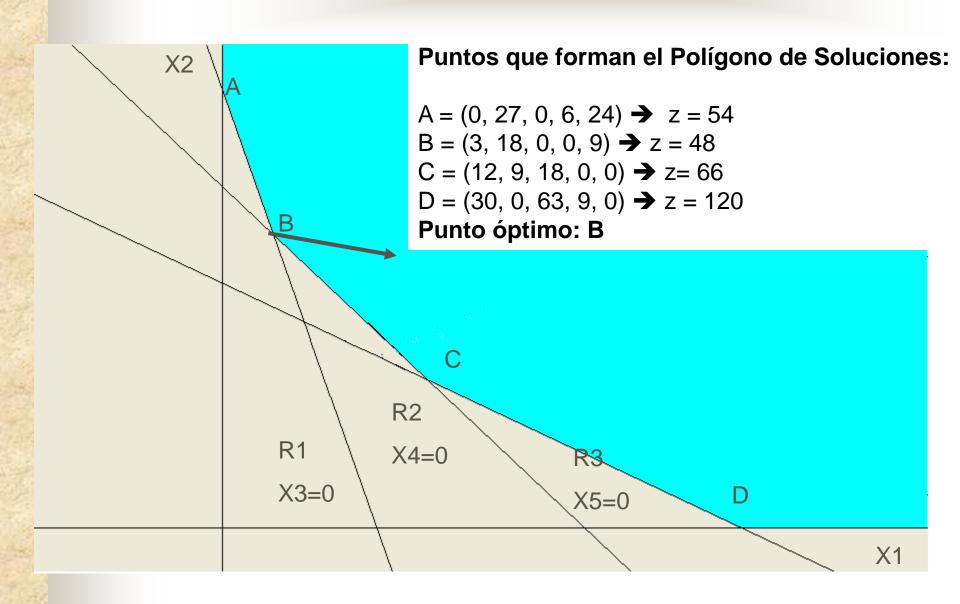
- En un tambo se ha establecido que el alimento debe contener por lo menos 27 unidades del nutriente A, 21 del nutriente B y 30 del nutriente C. Existen en el mercado dos tipos de alimentos compuestos que proporcionan dichos nutrientes: el Monsanto y el Cargill, y que contienen cada kg. de alimento Monsanto: 3 unidades de A, 1 unidad de B, y 1 unidad de C, y cada kg. de alimento Cargill: 1 unidad de A, 1 unidad de B, y 2 unidades de C.
- El precio del alimento Monsato es de 4 \$/kg y el de Cargill es 2 \$/kg.
- Se desea establecer en que proporción deben suministrarse estos alimentos para cumplir con los requerimientos nutritivos, minimizando el costo de alimentación.

Modelo

$$3x1 + x2 \ge 27$$
 $x1 + x2 \ge 21$
 $x1 + 2x2 \ge 30$

$$Z = 4 x1 + 2 x2 \rightarrow MIN$$

Método Gráfico





Vamos a verlo con un ejemplo

Ejemplo 1

Una máquina estampa circuitos, su capacidad de producción es 1 y se mide por cantidad de productos estampados; la capacidad de la máquina es la misma y no depende de los tamaños de los circuitos, si se estampa 3 tipos de circuitos y la cantidad que se puede estampar es:

CLASE	CANTIDAD QUE SE PUEDE ESTAMPAR
A	$\mathbf{N}_{\mathbf{A}}$
В	$\mathbf{N_B}$
C	$\mathbf{N_{C}}$

De cada una, si se procesa sólo una clase, la capacidad es de 100% = 1. Pero si se desea estampar las 3 clases hay que designar variables.

Variables

 $xA \leq NA$

xB ≤ NB

xC ≤ NC

Son las cantidades de circuitos que se pueden estampar de cada clase.

Restricciones:

Para estampar solo un tipo Donde 1/ NA es la capacidad de producir un circuito A.

Para estampar los tres tipos

Ejemplo

Una empresa automotriz está equipada para producir automóviles y camiones. Su planta fabril está organizada en 4 departamentos: estampado, montajes de motores, línea de montaje de automóviles, y línea de montaje de camiones.

La capacidad de producción de cada departamento está limitada de la siguiente forma:

- Estampado: puede producir 25.000 automóviles ó 35.000 camiones, por año;
- Montaje de Motores: 33.333 automóviles ó 16.667 camiones, por año;
- Línea de montaje de camiones: 15.000 unidades por año;

Por otra parte se desea producir como mínimo 12.000 automóviles y 8.000 camiones por año, estimándose así mismo en 18.000 unidades la cantidad demandada máxima anual de automóviles.

El margen de beneficios es de 15.000 \$/ automóvil, y de 12.500 \$/ camión. Se desea conocer el plan de producción que haga máximo el margen de

contribución total de los beneficios.

Nota: Cómo modifica el planteo la existencia de una capacidad máxima de 22.500 unidades anuales en la línea de montaje de automóviles?

Pérdidas, Agregado, Reciclaje, Mezcla



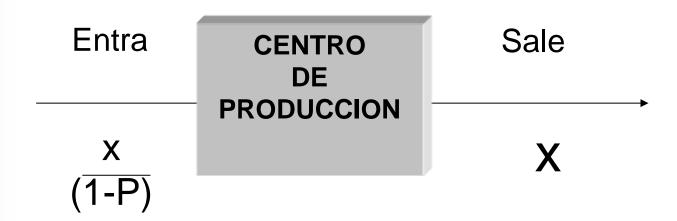
Pérdida

Situación que sucede habitualmente en la realidad, cuando se trabaja con porcentajes. Pérdida en un centro

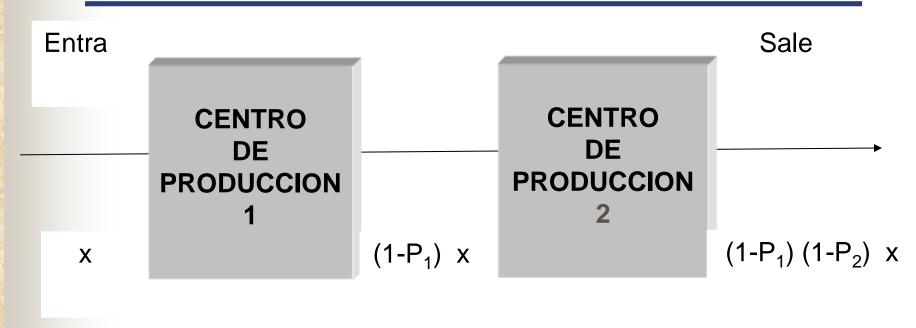


Pérdida

O también se puede plantear:



Pérdida en varios centros sucesivos



P₁ %

P₂ %

Pérdida en varios centros sucesivos

Entra

 $\frac{X}{(1-P_1)(1-P_2)}$

CENTRO
DE
PRODUCCION
1

 $\frac{x}{(1-P_2)}$

CENTRO
DE
PRODUCCION
2

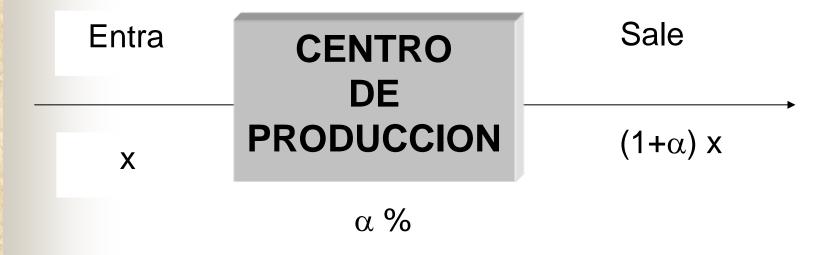
Χ

Sale

Agregado

Se introduce durante el proceso un porcentaje de "algo" que se desea eliminar.

Agregado en un centro





Entra

CENTRO
DE
PRODUCCION

Sale

X

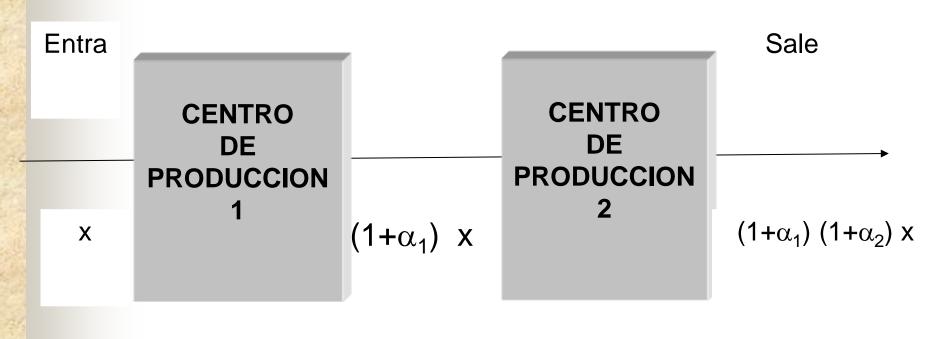
Si quiero que salga x, debo ingresar: <u>x</u>

_

 $(1+\alpha)$

 $\frac{x}{(1+\alpha)}$

Agregado en varios centros sucesivos



 α_1 %

 α_2 %

Agregado en varios centros sucesivos

Entra

 $\frac{x}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}$

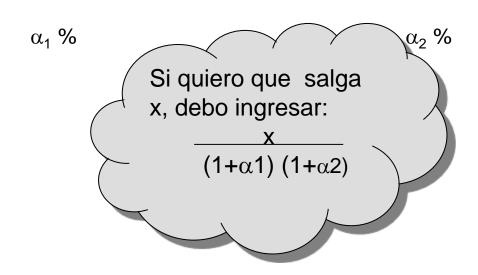
CENTRO
DE
PRODUCCION 1

 $\frac{x}{(1+\alpha_2)}$

CENTRO
DE
PRODUCCION 2

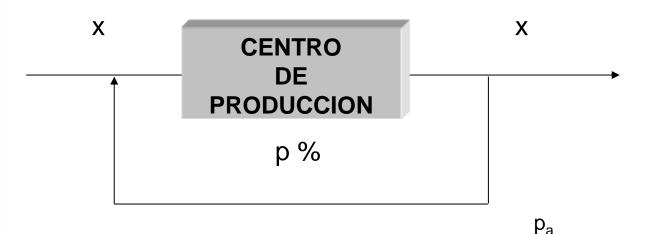
Sale

Χ



Reciclaje

Por cada unidad **x** se pierde **p**, ese **p** que se pierde se lo hace ingresar nuevamente a la línea de proceso.



Por cada unidad en el centro pasan

Serie geométrica con n --> ∞, es la cantidad inicial + la suma de lo que se va reciclando.

 p_a

Ejemplo

- I) Plantear el problema
 - a) definir las variables
 - b) plantear las inecuaciones
 - c) plantear las ecuaciones

Una fábrica produce cinco clases de tornillos de precisión en tres grupos de máquinas automáticas. Cada producto puede hacerse en cualquiera de los tres grupos de máquinas, pero el tiempo requerido en cada grupo es distinto, como se muestra en el siguiente cuadro (en hs.)

Productos	1	2	3	4	5
Grupo de máq. 1	0,4	0,2	0,4	0,2	0,4
Grupo de máq. 2	0,8	0,6	0,6	0,2	0,6
Grupo de máq. 3	1,0	1,0	0,8	0,6	1,0

Ejemplo

La disponibilidad semanal es de 2400 horas/máquina para cada grupo.
Las ordenes para cada tipo de tornillo son respectivamente de 800, 1800, 1400, 1800 y 800 unidades.

Se sabe estadísticamente que un 10% en el grupo 1, 8% en el grupo 2 y 5% en el grupo 3de la producción sale fallada.

Si el costo de trabajo para cada grupo de máquinas es de \$12, \$9 y \$ 15 respectivamente, establecer el programa de producción que minimice el costo total.

Mezcla

Vamos a verlo con un ejemplo.-

Ejemplo

Una empresa tiene 2 oficinas y se quiere distribuir personal, hombres y mujeres de tal manera que en la oficina 1 haya al menos un 40% de mujeres y en la oficina 2 menos del 60% de mujeres, el total del personal no debe superar a 51 personas. El sueldo de cada uno es:

Mezcla

SEXO	OFICINA	SUELDO (\$)		
Ť	Oficina 1	100		
Ť	Oficina 1	120		
Ť	Oficina 2	80		
Ť	Oficina 2	150		

Mezcla

Variables reales

x1: Cantidad de 🛊 en la oficina 1 a contratar por mes.

x2: Cantidad de 🛉 en la oficina 1 a contratar por mes.

x3: Cantidad de 🛊 en la oficina 2 a contratar por mes.

x4: Cantidad de 🛉 en la oficina 2 a contratar por mes.

Función Objetivo:

z = 100 x1 + 120 x2 + 80 x3 + 150 x4 ---- > MIN

Restricciones:

Total de personas en la oficina 1

R1:
$$x1 \ge 40 (x1+x2)$$
 ó $x1 \ge 0.40 (x1+x2)$

Total de personas en la oficina 1

Mezcla

Haciendo pasaje de términos:

$$x1 - 0.4 x1 - 0.4 x2 \ge 0$$

Queda:

R1: $0.6 \times 1 - 0.4 \times 2 \ge 0$

Total de personas en la oficina 1

R2: $x3 \le 0.60 (x3+x4)$

Queda:

R2: $0.4 \times 3 - 0.6 \times 4 \le 0$

R3: $x1 + x2 + x3 + x4 \le 51$

Agrego slacks

z = 100 x1 + 120 x2 + 180 x3 + 150 x4 + 0 x5 + 0 x6 + 0 x7 ---- > MIN

R1: $0.6 \times 1 - 0.4 \times 2 - \times 5 = 0$

R2: $0.4 \times 3 - 0.6 \times 4 + \times 6 = 0$

R3: x1 + x2 + x3 + x4 + x7 = 51

Mezcla

Análisis:

Oficina

$$x_i \stackrel{\leq}{\geq} \mathbf{P} \% \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

Método Simplex

PROGRAMACIÓN LINEAL

Es un método matemático que se emplea para resolver problemas de optimización. En palabras simples la P.L. busca asignar recursos limitados, entre actividades que compiten, de la forma mas óptima posible.

Supuestos de la P.L.

- Proporcionalidad
- Aditividad
- Divisibilidad
- Certidumbre
- Objetivo único
- No negatividad

Modelo General de PL

```
Definición de variables:
        Sea xj = \#...; j = 1, 2, 3....n
Función objetivo:
Max. o Min. z = C1X1 + C2X2 + ... + CjXj + ... + CnXn
Sujeto a restricciones: i = 1, 2, 3, ..., m
a11X1 + a12X2 + ... + a1jXj + ... + a1nXn
                                                                 \leq = \geq
                                                                             b1
a21X1 + a22X2 + ... + a2jXj + ... + a2nXn
                                                                 \leq = \geq
                                                                             b2
                                                      \leq = \geq
ai1X1 + ai2X2 + ... + aijXj + ... + ainXn
                                                                 bi
                                                      \leq = \geq
am1X1 + am2X2 + ... + amjXj + ... + amnXn
                                                                 bm
Condiciones de signo para variables:
                                          toda xi \ge 0
m = # total de restricciones,
n = # de variables de decisión (originales)
Cj, aij y bi son constantes (o parámetros) dados.
```

Métodos de Resolución

Método Gráfico

Empleado principalmente para PPL con dos variables de decisión. Este método se basa en la idea de obtener regiones de soluciones factibles (RSF), en las cuales se encontraría la combinación de variables de decisión que optimizan el modelo.

Método Algebraico (SIMPLEX)

Empleado principalmente para PPL con más de dos variables de decisión. Este método se desarrollo con base en el método gráfico y corresponde a un sistema heurístico, por lo cual requiere de una solución inicial factible para empezar a funcionar.

Introducción

- El método gráfico indica que la solución óptima de PL siempre está asociada a un punto esquina (vértice) del espacio de soluciones
- Este resultado es la clave del método
 Simplex algebraico y general para resolver cualquier modelo de PL

Introducción

- La transición de la solución del punto esquina geométrico hasta el método simplex implica un procedimiento de cómputo que determina en forma algebraica los puntos esquina (vértices)
- Se deben primero convertir a todas las restricciones de desigualdad en ecuaciones, para después manipular esas en ecuaciones en una forma sistemática

Introducción

- Un propiedad general del método simplex es que resuelve la PL en iteraciones
- Cada iteración desplaza la solución a un nuevo vértice que tiene el potencial de mejorar el valor de la función objetivo
- El proceso continua hasta que ya no se pueden obtener mejoras

Espacio de soluciones en forma de ecuación

Para estandarizar, la representación algebraica del espacio de soluciones de Programación Lineal se forma bajo dos condiciones:

- Todas las restricciones (excepto las de no negatividad) son ecuaciones con lado derecho no negativo
- Todas las variables son no negativas.

Conversión de desigualdades a ecuaciones

En las restricciones de < el lado derecho se puede pensar como representando el límite de disponibilidad y el lado izquierdo representaría el uso de ese recurso limitado por parte de las actividades (variables) del modelo, la diferencia entre ambos representa la cantidad no usado u holgura del recurso

Conversión de desigualdades a ecuaciones

Dada la restricción

$$6X1 + 4X2 \le 24$$

O bien

$$X1 + X2 > 800$$

Cada slack (holgura) toma significado diferente

Método gráfico	Método algebraico				
Grafica todas las restricciones, incluyendo	Representa el espacio de soluciones con <i>m</i>				
las de no negatividad	ecuaciones con <i>n</i> variables, y restringe a				
	todas las variables a valores no negativos;				
	m < n				
El espacio de soluciones consiste en una	El sistema tiene infinidad de soluciones				
infinidad de puntos esquina factibles	factibles				
*	•				
Identifica puntos factibles de esquina del	Determina las soluciones básicas				
espacio de soluciones	factibles de las ecuaciones				
Los candidatos a la solución óptima	Las candidatas a solución óptima				
corresponden a una cantidad <i>finita</i> de	corresponden a una cantidad <i>finita</i> de				
puntos de esquina	soluciones básicas factibles				
Se usa la función objetivo para determinar	Se usa la función objetivo para determinar				
el punto esquina óptimo entre todos los	el solución básica factible óptimo entre				
candidatos	todas las candidas				

PREPARANDO EL MODELO PARA ADAPTARLO AL MÉTODO SIMPLEX

Esta es la forma estándar del modelo:

Función objetivo: $c1 \cdot x1 + c2 \cdot x2 + ... + cn \cdot xn$

Sujeto a:

$$a11 \cdot x1 + a12 \cdot x2 + ... + a1n \cdot xn = b1$$

 $a21 \cdot x1 + a22 \cdot x2 + ... + a2n \cdot xn = b2$

. . .

 $am1 \cdot x1 + am2 \cdot x2 + ... + amn \cdot xn = bm$

 $x1,..., xn \ge 0$ Para ello se deben cumplir las siguientes condiciones:

El objetivo es de la forma de maximización o de minimización.

Todas las restricciones son de igualdad.

Todas las variables son no negativas.

Las constantes a la derecha de las restricciones son no negativas.

El método símplex fue desarrollado en 1947 por el Dr. George Dantzig y conjuntamente con el desarrollo de la computadora hizo posible la solución de problemas grandes planteados con la técnica matemática de programación lineal.

El algoritmo denominado símplex es la parte medular de este método; el cual se basa en la solución de un sistema de ecuaciones lineales con el conocido procedimiento de Gauss-Jordan y apoyado con criterios para el cambio de la solución básica que se resuelve en forma iterativa hasta que la solución obtenida converge a lo que se conoce como óptimo.

- •El conjunto de soluciones factibles para un problema de P.L. es un conjunto convexo.
- •La solución óptima del problema de programación lineal , si existe, es un punto extremo (vértice) del conjunto de soluciones factibles.
- •El número máximo de puntos extremos (vértices) por revisar en la búsqueda de la solución óptima del problema es finito.

Forma Estándar de un PPL

La forma estándar pasa por realizar los siguientes cambios:

1º Conversión de desigualdades en igualdades (ecuaciones)

a.- Restricción menor o igual (≤)

Para transformar este tipo de restricción a una ecuación de tipo igualdad se debe aumentar su lado izquierdo con una variable de "holgura". Esta representa la cantidad disponible del recurso que excede al empleo que le dan las actividades.

Ej.

```
6X1 + 4X2 \le 24
F.e
6X1 + 4X2 + h1 = 24 \qquad \text{(h1... cantidad no utilizada de recurso)}
h1 \ge 0
```

b.- Restricción mayor o igual (≥)

Ej.

Las restricciones de este tipo comúnmente determinan requerimientos mínimos de especificaciones. En este caso se debe incorporar una variable de superávit que representa el requerimiento mínimo del lado izquierdo, sobre el requerimiento mínimo del derecho (cuanto falta para cumplir con lo pedido).

$$X1 + X2 \ge 800$$

 $X1 + X2 - r1 = 800$
 $r1 \ge 0$

Sin embargo la F.E pasa por hacer un ajuste más:

F.E

$$X1 + X2 - r1 + t1 = 800$$

 $r1, t1 \ge 0$

t1 = variable artificial (se necesita para generar la solución inicial del simplex)

d.- Restricción de igualdad (=)

Aquí la estandarización pasa sólo por incorporar una variable artificial. Ej.

$$X1 + X2 = 800$$

 $X1 + X2 + t1 = 800$
 $t1 \ge 0$

Como las variables artificiales no tienen sentido, es importante que el simplex las deje fuera al comienzo del procedimiento y esto se logra al penalizar la inclusión de las variables artificiales en la función objetivo con un coeficiente 'M' muy grande que para el caso de maximizar es 'M' y para el caso de minimizar es '+ M'.

2º Cambios de variables

a.- Variables no restringidas

Algunas veces las variables de decisión pueden tomar cualquier valor real.

Xi s.r.s

Cambio de variable

Xi = Ui - Vi

Ui Parte positiva de Xi

Vi Parte negativa de Xi

Ej.

 $X1 + X2 \le 24$

X1 ≥ 0, X2 s.r.s

Luego X2 = U2 - V2

F.E.

X1 + U2 - V2 + h1 = 24

b.- Variables negativas

Algunas veces las variables de decisión pueden tomar negativos.

 $Xi \leq 0$

Cambio de variable

Yi = -Xi

Donde Yi \geq 0

Ej.

 $X1 + X2 \le 40$

 $X1 \ge 0, X2 \le 0$

Luego Y2 = -X2, o bien X2 = -Y2

F.E.

X1 - Y2 + h1 = 40

3º Cambio en criterio de optimización

Muchas veces el objetivo no es maximizar.

```
MIN (Z)
Cambio de variable: Z* = -Z
MIN Z = MAX ( Z*)

Ej.
MIN [ Z = X1 + X2 ]

Z* = -Z

F.E

MAX [ Z* = -X1 - X2]
```

EJEMPLO

MIN (Z = 15X1 + 10X2 - 20X3)

S/A

R1) $X1+2X2+4X3 \ge 30$

R2) 5X1+5X2+3X3 = 40

R3) $X1 + X2 + X3 \le 70$

R4) X1 s.r.s; X2≤0; X3≥0

Cambios de variable:

$$Z^* = -Z$$

Forma Estándar

Forma Tabular

BASE	Z	U1	V1	Y2	Х3	r1	t1º	t2	h1	SOLUCION
Z	1	15	-15	-10	-20	0	M	M	0	0
t1	0	1	-1	-2	4	-1	1	0	0	30
t2	0	5	-5	-25	3	0	0	1	0	40
h1	0	1	-1	-1	1	0	0	0	1	70

BASE	U1	V1	Y2	Х3	r1	t1°	t2	h1	SOLUCION
Z	15	-15	-10	-20	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	1	1	0	0
t1	1	-1	-2	4	-1	1	0	0	30
t2	5	-5	-25	3	0	0	1	0	40
h1	1	-1	-1	1	0	0	0	1	70

Métodos de Resolución ALGEBRAICO

Se una vez obtenida la F.E se esta en condiciones de iniciar el Simplex que nos permitirá encontrar la (s) solución (es) del PPL.

Como el algoritmo se mueve de punto en punto extremo requiere que variables basicas entren y salgan. Las reglas para seleccionar las variables de entrada y salida se conocen como condiciones de optimalidad y factibilidad. Resumiendo:

- <u>C. Optimalidad</u>: la variable de entrada en un problema de maximización es la variable no básica que tiene el coeficiente mas negativo en el reglon de la F.O. los empates se rompen arbritariamente. Se llega al optimo en la iteración donde todos coeficientes del reglon de la F.O. de las variables básicas son positivos.
- <u>C. Factibilidad</u>: tanto para los problemas de maximización como minimización, la variable de salida es la variable básica asociada con la razón no negativa más pequeña entre los "lados derecho" y los coeficientes de la columna entrante.

Métodos de Resolución ALGEBRAICO

Pasos del Simplex:

Paso 0 : determinar la solución factible inicial.

<u>Paso 1</u>: seleccione la variable de entrada empleando la condición de optimalidad.

Deténgase si no hay variable de entrada.

Paso 2 : seleccione una variable de salida utilizando la condición de factibilidad.

<u>Paso 3</u> : determine las nuevas soluciones básicas empleando los calculos apropiados de

Gauss – Jordan, luego vuelva al paso 1.

Métodos de Resolución ALGEBRAICO

EJEMPLO

Max
$$Z = 7x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

S/A

$$2x_1 + x_2 \le 30$$

 $3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 25$
 $x_2 + 2x_3 \le 20$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

BASE	X1	X2	Х3	h1	h2	h3	SOLUCIO N
Z	-7	-4	-5	0	0	0	0
h1	2	1	0	1	0	0	30
h2	3	2	1	0	1	0	25
h3	0	1	2	0	0	1	20

BASE	X1	X2	Х3	h1	h2	h3	SOLUCION
Z	-7	-4	-5	0	0	0	0
h1	2	1	0	1	0	0	30
h2	3	2	1	0	1	0	25
h3	0	1	2	0	0	1	20



BASE	X1	X2	Х3	h1	h2	h3	SOLUCION	
z	-7	-4	-5	0	0	0	0	Razón
h1	2	1	0	1	0	0	30	30 / 2
h2	3	2	1	0	1	0	25	25 / 3
h3	0	1	2	0	0	1	20	

BASE	X1	X2	X3	h1	h2	h3	SOLUCION		
Z	-7	-4	-5	0	0	0	0	Razón]
h1	2	1	0	1	0	0	30	30 / 2	
h2	3	2	1	0	1	0	25	25 / 3	
h3	0	1	2	0	0	1	20		

BASE	X1	X2	Х3	h1	h2	h3	SOLUCION	
Z	-7	-4	-5	0	0	0	0	Razón
h1	2	1	0	1	0	0	30	30 / 2
h2	3	2	1	0	1	0	25	25 / 3
h3	0	1	2	0	0	1	20	

Forma Tabular Especial

BASE	X1	X2	Х3	h1	h2	h3	SOLUCI ON	
Z	-7	-4	-5	0	0	0	0	Razón
h1	2	1	0	1	0	0	30	30 / 2
h2	3	2	1	0	1	0	25	25 / 3
h3	0	1	2	0	0	1	20	

PIVOTE

Gauss Jordan

BASE	X1	X2	Х3	h1	h2	h3	SOLUCION
Z	0	2	0	0	7/3	4/3	85
h1	0	0	0	1	-2/3	1/3	20
X1	1	1/2	0	0	1/3	-1/6	5
h3	0	1/2	1	0	0	1/2	10

¡Optimo!

Métodos de Resolución ALGEBRAICO SIMPLEX

SOLUCIÓN

Z	85
X1	5
X2	0
X3	0
h1	20
h2	0
h3	10

Cambio del tipo de optimización

- Si en nuestro modelo, deseamos minimizar, podemos dejarlo tal y como está, pero deberemos tener en cuenta nuevos criterios para la condición de parada (deberemos parar de realizar iteraciones cuando en la fila del valor de la función objetivo sean todos menores o iguales a 0), así como para la condición de salida de la fila. Con objeto de no cambiar criterios, se puede convertir el objetivo de minimizar la función F por el de maximizar F·(-1).
- **Ventajas:** No deberemos preocuparnos por los criterios de parada, o condición de salida de filas, ya que se mantienen.
- Inconvenientes: En el caso de que la función tenga todas sus variables básicas positivas, y además las restricciones sean de desigualdad "≤", al hacer el cambio se quedan negativas y en la fila del valor de la función objetivo se quedan positivos, por lo que se cumple la condición de parada, y por defecto el valor óptimo que se obtendría es 0.
- **Solución:** En la realidad no existen este tipo de problemas, ya que para que la solución quedara por encima de 0, alguna restricción debería tener la condición "≥", y entonces entraríamos en un modelo para el método de las Dos Fases.

Todas las restricciones son de igualdad.

- Si en nuestro modelo aparece una inecuación con una desigualdad del tipo "≥", deberemos añadir una nueva variable, llamada variable de exceso si, con la restricción si ≥ 0. La nueva variable aparece con coeficiente cero en la función objetivo, y restando en las inecuaciones.
- Surge ahora un problema, veamos como queda una de nuestras inecuaciones que contenga una desigualdad "≥":

 $a11 \cdot x1 + a12 \cdot x2 \ge b1$ $a11 \cdot x1 + a12 \cdot x2 - 1 \cdot xs = b1$

Todas las restricciones son de igualdad.

Como todo nuestro modelo, está basado en que todas sus variables sean mayores o iguales que cero, cuando hagamos la primera iteración con el método Simplex, las variables básicas no estarán en la base y tomarán valor cero, y el resto el valor que tengan. En este caso nuestra variable xs, tras hacer cero a x1 y x2, tomará el valor -b1. No cumpliría la condición de no negatividad, por lo que habrá que añadir una nueva variable, xr, que aparecerá con coeficiente cero en la función objetivo, y sumando en la inecuación de la restricción correspondiente.

Todas las restricciones son de igualdad

Quedaría entonces de la siguiente manera:

$$a11 \cdot x1 + a12 \cdot x2 \ge b1$$
 $a11 \cdot x1 + a12 \cdot x2 - 1 \cdot xs + 1 \cdot xr = b1$

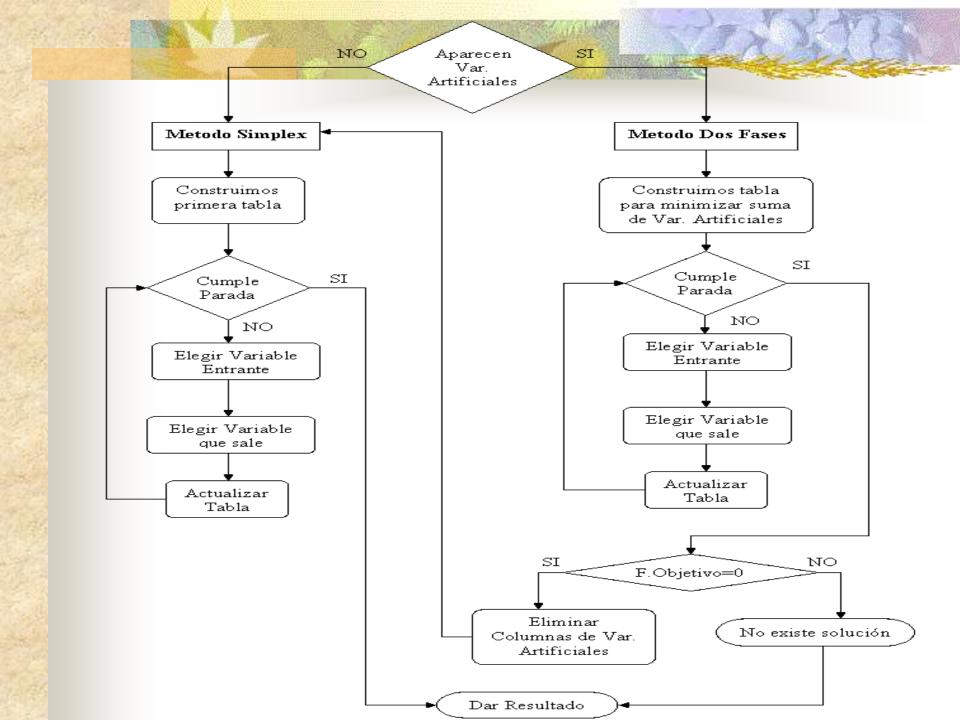
- Este tipo de variables se les llama variables artificiales, y aparecerán cuando haya inecuaciones con desigualdad ("=","≥").
 Esto nos llevará obligadamente a realizar el método de las Dos Fases
- Del mismo modo, si la inecuación tiene una desigualdad del tipo "≤", deberemos añadir una nueva variable, llamada variable de holgura si, con la restricción si "≥" 0 . La nueva variable aparece con coeficiente cero en la función objetivo, y sumando en las inecuaciones.

A modo resumen podemos dejar esta tabla, según la desigualdad que aparezca, y con el valor que deben estar las nuevas variables.

Tipo de desigualdad	Tipo de variable que aparece		
<u>></u>	- exceso + artificial		
=	+ artificial		
<u>≤</u>	+ holgura		

DESARROLLANDO EL MÉTODO SIMPLEX

Una vez que hemos estandarizado nuestro modelo, puede ocurrir que necesitemos aplicar el método Simplex o el método de las Dos Fases. Véase en la figura como debemos actuar para llegar a la solución de nuestro problema.



Método SIMPLEX

ALGEBRA DEL MÉTODO SIMPLEX

- Construcción de la primera tabla: En la primera columna de la tabla aparecerá lo que llamaremos base, en la segunda el coeficiente que tiene en la función objetivo cada variable que aparece en la base (llamaremos a esta columna Cb), en la tercera el término independiente de cada restricción (P0), y a partir de ésta columna aparecerán cada una de las variables de la función objetivo (Pi). Para tener una visión más clara de la tabla, incluiremos una fila en la que pondremos cada uno de los nombres de las columnas. Sobre ésta tabla que tenemos incluiremos dos nuevas filas: una que será la que liderará la tabla donde aparecerán las constantes de los coeficientes de la función objetivo, y otra que será la última fila, donde tomará valor la función objetivo. Nuestra tabla final tendrá tantas filas como restricciones

Tabla						
			C 1	C 2		Cn
Base	Сь	Po	P1	P ₂	•••	Pn
Pi1	Ci1	bi1	a11	a12	•••	a1n
Pi2	Ci2	bi2	a21	a22	•••	a2n
	•••	•••	•••	•••	•••	•••
Pim	Cim	bim	am1	am2	•••	a mn
Z		Zo	Zı-Cı	Z2-C2	···	Zn-Cn

- Los valores de la fila Z se obtienen de la siguiente forma: El valor Z0 será el de sustituir Cim en la función objetivo (y cero si no aparece en la base). El resto de columnas se obtiene restando a este valor el del coeficiente que aparece en la primera fila de la tabla.
- Se observará al realizar el método Simplex, que en esta primera tabla, en la base estarán las variables de holgura.
- Condición de parada: Comprobaremos si debemos de dar una nueva iteración o no, que lo sabremos si en la fila Z aparece algún valor negativo. Si no aparece ninguno, es que hemos llegado a la solución óptima del problema.
- Elección de la variable que entra: Si no se ha dado la condición de parada, debemos seleccionar una variable para que entre en la base en la siguiente tabla. Para ello nos fijamos en los valores estrictamente negativos de la fila Z, y el menor de ellos será el que nos de la variable entrante.

- Elección de la variable que sale: Una vez obtenida la variable entrante, obtendremos la variable que sale, sin más que seleccionar aquella fila cuyo cociente P0/Pj sea el menor de los estrictamente positivos (teniendo en cuenta que sólo se hará cuando Pj sea mayor de 0). La intersección entre la columna entrante y la fila saliente nos determinará el elemento pivote.
- Actualización de la tabla: Las filas correspondientes a la función objetivo y a los títulos permanecerán inalterados en la nueva tabla. El resto deberá calcularse de dos formas diferentes:

Método de las Dos Fases

Éste método difiere del Simplex en que primero hay que resolver un problema auxiliar que trata de minimizar la suma de las variables artificiales. Una vez resuelto este primer problema y reorganizar la tabla final, pasamos a la segunda fase, que consiste en realizar el método Simplex normal.

■ FASE 1

En esta primera fase, se realiza todo de igual manera que en el método Simplex normal, excepto la construcción de la primera tabla, la condición de parada y la preparación de la tabla que pasará a la fase 2.

- - Construcción de la primera tabla: Se hace de la misma forma que la tabla inicial del método Simplex, pero con algunas diferencias. La fila de la función objetivo cambia para la primera fase, ya que cambia la función objetivo, por lo tanto aparecerán todos los términos a cero excepto aquellos que sean variables artificiales, que tendrán valor "-1" debido a que se está minimizando la suma de dichas variables (recuerde que minimizar F es igual que maximizar F·(-1)).
- La otra diferencia para la primera tabla radica en la forma de calcular la fila Z. Ahora tendremos que hacer el cálculo de la siguiente forma: Se sumarán los productos Cb·Pj para todas las filas y al resultado se le restará el valor que aparezca (según la columna que se éste haciendo) en la fila de la función objetivo.

Tabla								
		C ₀	C1	C2	•••	Cn-k	•••	Cn
Base	Cb	Po	P1	P2	•••	Pn-k	•••	Pn
Pi1	Ci1	bi1	a11	a12	•••	a1n-k	•••	a1n
Pi2	Ci2	bi2	a21	a22	•••	a2n-k	•••	a2n
•••	•••	•••	•••	•••	•••	•••	•••	•••
Pim	Cim	bim	am1	am2	•••	amn-k	•••	amn
Z		Z ₀	Zı	Z 2	•••	Zn-k	•••	Zn

Siendo $Zj = \Sigma(Cb \cdot Pj) - Cj$ y los Cj = 0 para todo j comprendido entre 0 y n-k (variables de decisión, holgura y exceso), y Cj = -1 para todo j comprendido entre n-k y n (variables artificiales).

- Condición de parada: La condición de parada es la misma que en el método Simplex normal. La diferencia estriba en que pueden ocurrir dos casos cuando se produce la parada: la función toma un valor 0, que significa que el problema original tiene solución, o que tome un valor distinto, indicando que nuestro modelo no tiene solución.

Eliminar Columna de variables artificiales: Si hemos llegado a la conclusión de que el problema original tiene solución, debemos preparar nuestra tabla para la segunda fase. Deberemos eliminar las columnas de las variables artificiales, modificar la fila de la función objetivo por la original, y calcular la fila Z de la misma forma que en la primera tabla de la fase 1.

■ Obtención de la solución: Cuando se ha dado la condición de parada, obtenemos el valor de las variables básicas que están en la base y el valor óptimo que toma la función que están en la base mirando la columna P0. En el caso de que estemos minimizando, se multiplicará por "-1" el valor óptimo.

Infinitas soluciones: Cumplida la condición de parada, si se observa que alguna variable que no está en la base, tiene un 0 en la fila Z, quiere decir que existe otra solución que da el mismo valor óptimo para la función objetivo. Si estamos ante este caso, estamos ante un problema que admite infinitas soluciones, todas ellas comprendidas dentro del segmento (o porción del plano, o región del espacio, dependiendo del número de variables del problema) que define Ax+By=Z0. Si se desea se puede hacer otra iteración haciendo entrar en la base a la variable que tiene el 0 en la fila Z, y se obtendrá otra solución.

Solución ilimitada: Si al intentar buscar la variable que debe abandonar la base, nos encontramos que toda la columna de la variable entrante tiene todos sus elementos negativos o nulos, estamos ante un problema que tiene solución ilimitada. No hay valor óptimo concreto, ya que al aumentar el valor de las variables se aumenta el valor de la función objetivo, y no viola ninguna restricción.

No existe solución: En el caso de que no exista solución, seguro que tendremos que realizar las dos fases, por lo que al término de la primera sabremos si estamos en tal situación.

Empate de variable entrante: Se puede optar por cualquiera de ellas, sin que afecte a la solución final, el inconveniente que presenta es que según por cual se opte se harán más o menos iteraciones. Se aconseja que se opte a favor de las variables básicas, ya que son aquellas las que quedarán en la base cuando se alcance la solución con estos métodos.

■ Curiosidad Fase 1: Al finalizar la fase 1, si el problema original tiene solución, todas las variables artificiales, en la fila Z deben tener el valor "1".

Casos especiales

- 1. Problema infactible
- 2. Región no acotada, pero objetivo acotado
- 3. Problemas con restricciones redundantes
- 4. Múltiples soluciones

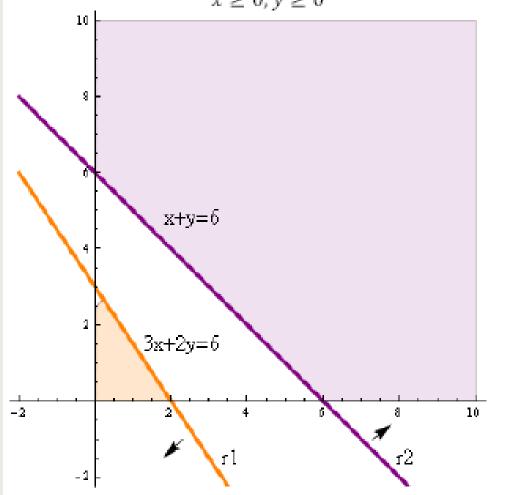
Caso Especial 1

■ 1. Problema infactible

Se trata de problemas en los que no se puede determinar la región factible, es decir no hay ningún punto que satisface todas las restricciones. Este caso suele presentarse cuando nos hemos equivocado al formular el problema lineal

1. Problema infactible

Como se ve en la figura las restricciones R1 y R2 no tienen ningún punto en común por lo que el problema no tiene solución x = u, y = v



$$Max Z = 2x + y$$

Sujeto a

$$x + y \ge 6$$

$$3x + 2y \le 6$$

$$X \ge 0, Y \ge 0$$

Sin soluciones factibles

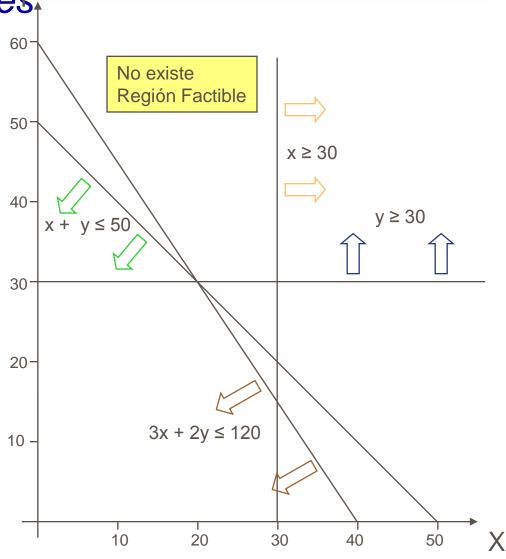
Consideremos el siguiente problema:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

s.a:
$$3x + 2y \le 120$$

 $x + y \le 50$
 $x \ge 30$
 $y \ge 30$
 $x, y \ge 0$

No existe región factible

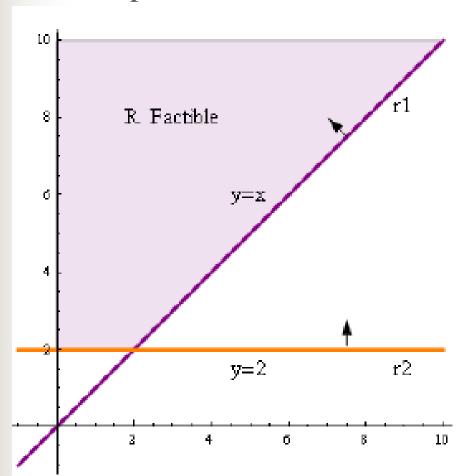


2. Región no acotada, pero objetivo acotado

Este caso se presenta cuando no es posible elegir un punto de la región factible como punto óptimo ya que siempre es posible encontrar otro punto que mejore el valor de la función objetivo obtenido con el punto anterior

2. Región no acotada, pero objetivo acotado

En el ejemplo se ve como la región factible es ilimitada y como el problema es de maximización, dado un punto de la región factible siempre es posible encontrar otro cuyo valor de *z* sea mayor y por tanto no es posible determinar la solución del problema.



$$Max Z = x + 3y$$

Sujeto a

$$y \ge x$$

$$y \le 2$$

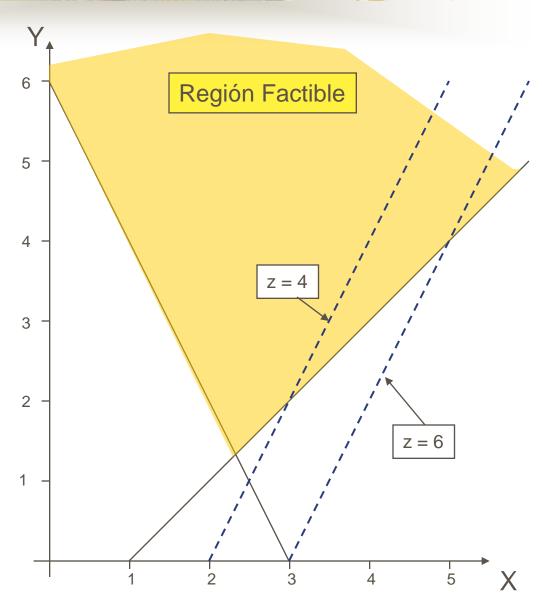
$$X \ge 0, Y \ge 0$$

PPL no acotado

max
$$z = 2x - y$$

s.a: $x - y \le 1$
 $2x + y \ge 6$
 $x, y \ge 0$

La región factible es no acotada. Se muestran en el gráfico las rectas de nivel para z = 4 y z = 6. Pero podemos desplazar las rectas de nivel hacia la derecha indefinidamente sin abandonar la región factible. 1 Por tanto, el valor de z puede crecer indefinidamente.

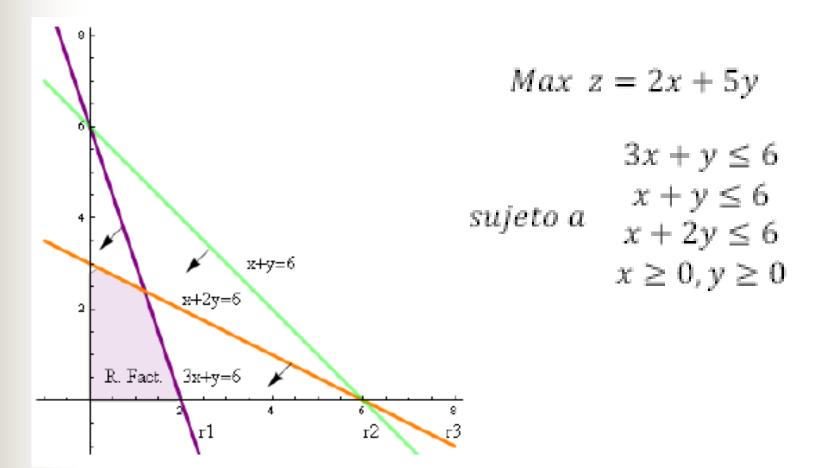


Problemas con restricciones redundantes

Este caso se presenta cuando el problema tiene restricciones que no intervienen en la determinación de la región factible. Una restricción redundante no influye en la solución de un problema pero si puede dificultar su resolución ya que aumenta el tamaño del mismo.

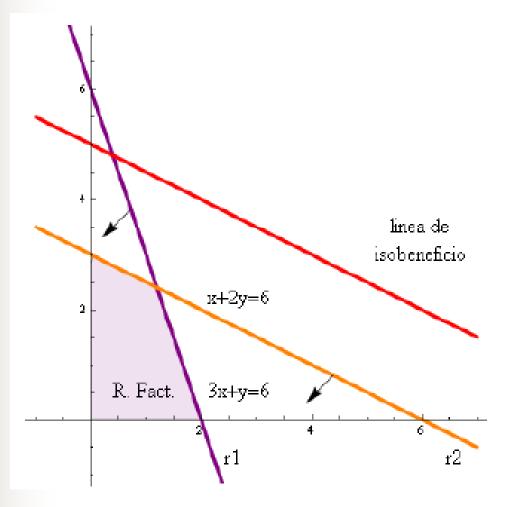
Problemas con restricciones redundantes

En el ejemplo observamos que la región factible queda determinada únicamente por las restricciones R1 y R3, no interviniendo en su determinación la restricción R2. Por tanto R2 es una restricción redundante.



Múltiples soluciones

Este caso se presenta cuando una de las restricciones es paralela a la función objetivo.



$$Max Z = 2x + 4y$$

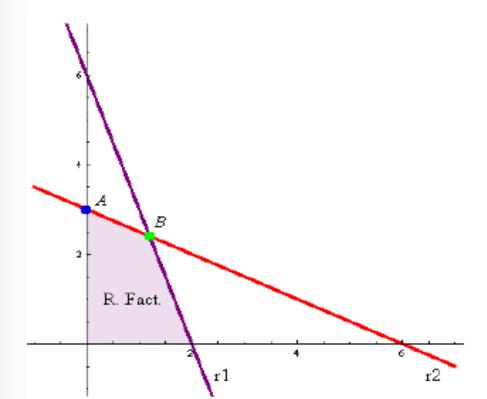
Sujeto a

$$3x + y \le 6$$

$$x +2y \le 6$$

$$X \ge 0, Y \ge 0$$

Múltiples soluciones
En ejemplo se observa que es paralela a la función objetivo por lo que al trazar la línea de isobeneficio y acercarla al origen de coordenadas, vemos que es tangente a la región factible en el punto A y en el punto B y por ello en los infinitos puntos del segmento AB. Por ello el problema tiene infinitas soluciones óptimas.



Número infinito de soluciones óptimas

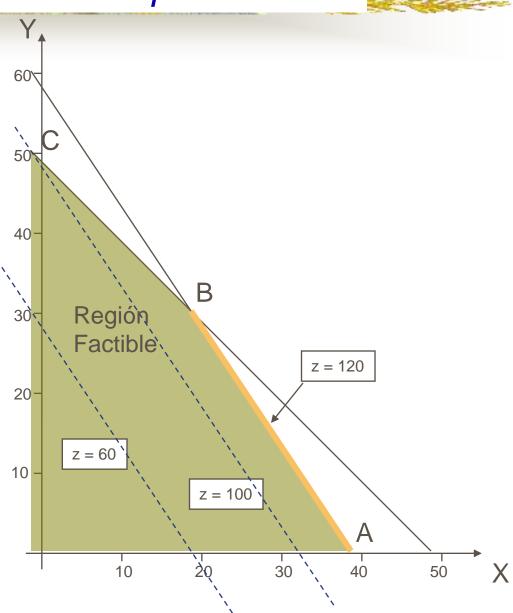
Consideremos el siguiente problema:

$$\max z = 3x + 2y$$

s.a:
$$3x + 2y \le 120$$

 $x + y \le 50$
 $x, y \ge 0$

Cualquier punto (solución) situado en el segmento AB puede ser una solución óptima de z =120.



Conclusiones

De los casos anteriormente descritos se puede deducir que un problema lineal puede tener

- 0 soluciones (si el problema es infactible),
- 1 solución
- o infinitas soluciones.

Lo que no es posible es que el problema tenga un número finito de soluciones diferentes de 1.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

1. Introducción

El análisis de sensibilidad es una de las partes más importantes en la programación lineal, sobretodo para la toma de decisiones; pues permite determinar cuando una solución sigue siendo óptima, dados algunos cambios ya sea en el entorno del problema, en la empresa o en los datos del problema mismo.

Este análisis consiste en determinar que tan sensible es la respuesta óptima del *Método Simplex*, al cambio de algunos datos como las ganancias o costos unitarios (coeficientes de la función objetivo) o la disponibilidad de los recursos (términos independientes de las restricciones).

La variación en estos datos del problema se analizará individualmente, es decir, se analiza la sensibilidad de la solución debido a la modificación de un dato a la vez, asumiendo que todos los demás permanecen sin alteración alguna. Esto es importante porque estamos hablando de que la sensibilidad es estática y no dinámica, pues solo contempla el cambio de un dato a la vez y no el de varios.

1. Introducción

Objetivo Principal del Análisis de Sensibilidad

Establecer un intervalo de números reales en el cual el dato que se analiza puede estar contenido, de tal manera que la solución sigue siendo óptima siempre que el dato pertenezca a dicho intervalo

1. Introducción

Los análisis más importantes son;

- 1. Los coeficientes de la función objetivo; y
- 2. Los términos independientes de las restricciones
- y se pueden abordar por medio del *Método Gráfico* o del *Método Simplex*

Aplicación del Análisis

- Cambio en el segundo miembro de las restricciones
- Cambio en los coeficientes de la función objetivo
- Cambio en los coeficientes de las variables de las restricciones
- Adición de nuevas variables al problema
- Adición de nuevas restricciones

Trabajamos material página

 http://www.elprisma.com/apuntes/matemat icas/analisisdesensibilidad/default.asp

Analisis de sensibilidad gráfico

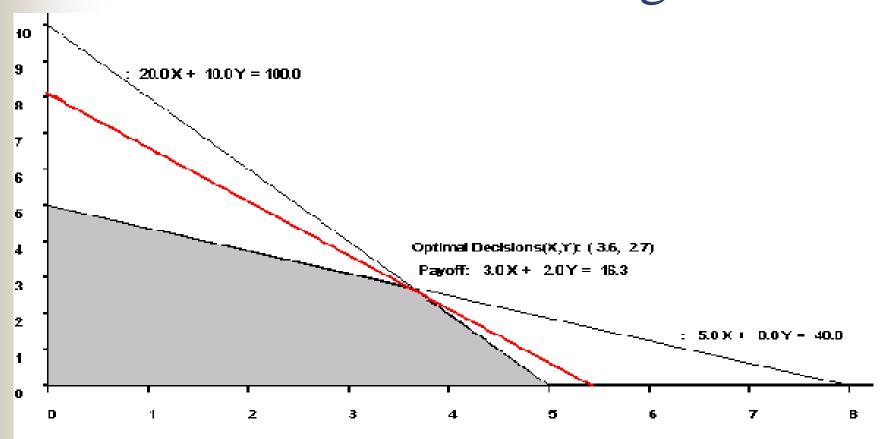
 Partamos del siguiente problema de programación lineal

$$Z = x + 2y \rightarrow Maximizar$$
s.a.: $5 x + 8 y \le 40$

$$10x + 20 y \le 100$$

$$X > 0; y > 0$$

Analisis de sensibilidad gráfico



Analisis de sensibilidad gráfico

