

o, para las dos secciones de la viga,

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{W}{EI} \left(\frac{x}{24l} - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}l^2x \right) - \frac{P}{EI} \left(\frac{5}{81}l^2x - \frac{1}{9}x^3 \right) & (0 < x < \frac{1}{3}l) \\ -\frac{W}{EI} \left(\frac{x^4}{24l} - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}l^2x \right) - \frac{P}{EI} \left(\frac{19}{162}l^2x + \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{6}x^2l - \frac{1}{162}l^3 \right) & (\frac{1}{3}l < x < l) \end{cases}$$

2.5.14 Ejercicios

- 31 Encuentre la deflexión de una viga sostenida simplemente en sus extremos $x = 0$ y $x = l$, con un momento de torsión bajo su propio peso M uniformemente distribuido y una carga W concentrada en $x = \frac{1}{2}l$.
- 32 Una viga volada con un peso despreciable y de longitud l está sujeta en el extremo $x = 0$. Determine la deflexión de la viga cuando está sometida a una

carga por unidad de longitud, w , sobre la sección $x = x_1$ a $x = x_2$. ¿Cuál es la máxima deflexión si $x_1 = 0$ y $x_2 = l$?

- 33 Una viga volada uniforme de longitud l está sometida a una carga concentrada W en el punto que está a una distancia b del extremo fijo. Determine la deflexión de la viga distinguiendo entre las secciones $0 < x \leq b$ y $b < x \leq l$.

2.6 Funciones de transferencia

2.6.1 Definiciones

La **función de transferencia** de un sistema lineal invariante en el tiempo está definida como la razón de la transformada de Laplace de la salida del sistema (o función de respuesta) a la transformada de Laplace de la entrada del sistema (o función de fuerza), *bajo el supuesto de que todas las condiciones iniciales son cero* (esto es, el sistema está inicialmente en un **estado de reposo**).

Las **funciones de transferencia** se usan frecuentemente en ingeniería para caracterizar las relaciones de entrada-salida de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, y juegan un papel importante en el análisis y diseño de dichos sistemas.

Consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo caracterizado por la ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_0 u \quad (2.65)$$

donde $n \geq m$, las a y las b son coeficientes constantes, y $x(t)$ es la respuesta del sistema o salida correspondiente a la entrada o término de fuerza $u(t)$ aplicado en el tiempo $t = 0$. Aplicando la transformada de Laplace a todo (2.65) llegaremos a la

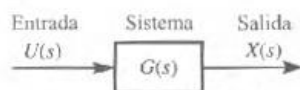


Figura 2.41 Diagrama en bloque de la función de transferencia.

ecuación transformada. Como se supone que todas las condiciones iniciales son cero, vemos de (2.15) que, para obtener la ecuación transformada, simplemente reemplazamos d/dt por s obteniendo

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)X(s) = (b_m s^m + \dots + b_0)U(s)$$

donde $X(s)$ y $U(s)$ denotan las transformadas de Laplace de $x(t)$ y $u(t)$ respectivamente.

La función de transferencia del sistema $G(s)$ se define como

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \quad (2.66)$$

y el sistema puede representarse en forma de diagrama por la operación dentro de la caja de la figura 2.41. Esta representación se conoce como el **diagrama en bloque de entrada-salida** del sistema.

Escribiendo

$$P(s) = b_m s^m + \dots + b_0$$

$$Q(s) = a_n s^n + \dots + a_0$$

la función de transferencia puede expresarse como

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

donde, para hacer que el sistema sea físicamente realizable, los grados m y n de los polinomios $P(s)$ y $Q(s)$ deben ser tales que $n \geq m$. Esto se debe a que si $m > n$, se sigue de (2.61) que la respuesta del sistema $x(t)$ a una entrada realista $u(t)$ involucraría impulsos.

La ecuación $Q(s) = 0$ es llamada la **ecuación característica** del sistema, su orden determina el **orden del sistema** y sus raíces se conocen como los **polos** de la función de transferencia. De la misma manera, las raíces de $P(s) = 0$ son los **ceros** de la función de transferencia.

Es importante darse cuenta de que, en general, una función de transferencia sólo se usa para caracterizar un sistema lineal invariante en el tiempo. Es una propiedad del propio sistema y es independiente tanto de la entrada como de la salida del sistema.

A pesar de que una función de transferencia caracteriza la dinámica del sistema, no proporciona información concerniente a la estructura física real del sistema, y de hecho sistemas que son físicamente distintos puede tener la misma función de transferencia; por ejemplo, el sistema masa-resorte-amortiguador de la figura 2.12 y el circuito RLC de la figura 2.8 tienen ambos la función de transferencia

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{\alpha s^2 + \beta s + \gamma}$$

En el sistema masa-resorte-amortiguador, $X(s)$ determina el desplazamiento $x(t)$ de la masa y $U(s)$ representa la fuerza aplicada $F(t)$, mientras que α denota la masa, β el coeficiente de amortiguamiento y γ la constante de resorte. Por otro lado, en el circuito RLC , $X(s)$ determina la carga $q(t)$ en el capacitor y $U(s)$ representa la fem $e(t)$ aplicada, mientras que α denota la inductancia, β la resistencia y γ la capacitancia.

En la práctica, un sistema completo puede formarse de cierto número de componentes, cada una caracterizada por su propia función de transferencia y relacionadas con una operación en caja. Así que la función de transferencia de entrada-salida del sistema completo se obtiene por las reglas del **álgebra del diagrama de bloque**.

Como $G(s)$ puede escribirse

$$G(s) = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

donde z_i s y p_i s son los ceros y los polos de la función de transferencia respectivamente, observamos que $G(s)$ es conocida, excepto por un factor constante, si se conocen las posiciones de todos los polos y los ceros. Por consiguiente, con frecuencia se usa un dibujo de los polos y los ceros de $G(s)$ como una ayuda en el análisis gráfico de la función de transferencia (una convención común es marcar la posición de un cero mediante un círculo \circ y la de un polo mediante una cruz \times). Como los coeficientes de los polinomios $P(s)$ y $Q(s)$ son reales, todas las raíces complejas suceden siempre en pares complejos conjugados, así que el **dibujo polo-cero** es simétrico con respecto del eje real.

EJEMPLO 2.50

La respuesta $x(t)$ de un sistema a una función de fuerza $u(t)$ está determinada por la ecuación diferencial

$$9 \frac{d^2 x}{dt^2} + 12 \frac{dx}{dt} + 13x = 2 \frac{du}{dt} + 3u$$

- Determine la función de transferencia que caracteriza al sistema.
- Proporcione la ecuación característica del sistema. ¿Cuál es el orden del sistema?
- Determine los polos y los ceros de la función de transferencia e ilústrellos en un diagrama en el plano s .

Solución

(a) Supongamos que todas las condiciones iniciales son cero, aplicando la transformada de Laplace a toda la ecuación diferencial

$$9 \frac{d^2 x}{dt^2} + 12 \frac{dx}{dt} + 13x = 2 \frac{du}{dt} + 3u$$

llegamos a

$$(9s^2 + 12s + 13)X(s) = (2s + 3)U(s)$$

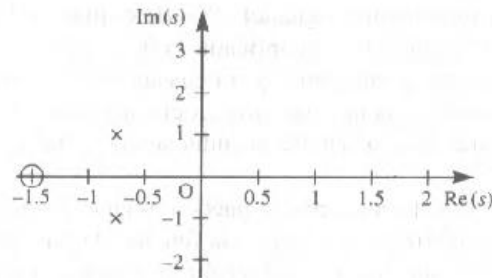


Figura 2.42 Dibujo polo (X)-cero (O) para el ejemplo 2.50.

así la función de transferencia del sistema está dada por

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2s + 3}{9s^2 + 12s + 13}$$

(b) La ecuación característica del sistema es

$$9s^2 + 12s + 13 = 0$$

y el sistema es de orden 2.

(c) Los polos de la función de transferencia son las raíces de la ecuación característica

$$9s^2 + 12s + 13 = 0$$

que son

$$s = \frac{-12 \pm \sqrt{(144 - 468)}}{18} = \frac{-2 \pm j3}{3}$$

Esto es, la función de transferencia tiene polos simples en

$$s = -\frac{2}{3} + j \quad \text{y} \quad s = -\frac{2}{3} - j$$

Los ceros de la función de transferencia están determinados al igualar a cero el polinomio del numerador $2s + 3$, dando un cero simple en

$$s = -\frac{3}{2}$$

En la figura 2.42 se muestra el dibujo de polos y ceros que corresponde al plano s .

2.6.2 Estabilidad

La estabilidad de un sistema es una propiedad de vital importancia para los ingenieros. De manera intuitiva podemos ver un sistema estable como uno que permanece en reposo a menos que sea excitado por una fuente externa, y retorna al

reposo si se quitan tales influencias externas. Así un sistema estable es uno cuya respuesta, en la ausencia de una entrada, se aproximará a cero conforme el tiempo tiende a infinito. Esto garantiza entonces que cualquier entrada acotada producirá una salida acotada; esta propiedad se toma con frecuencia como la definición de un **sistema lineal estable**.

Es claro que la estabilidad es una propiedad del propio sistema, y no depende del sistema de entrada o de la función de fuerza. Como un sistema puede ser caracterizado en el dominio s por su función de transferencia $G(s)$, será posible usar la función de transferencia para especificar condiciones para que el sistema sea estable.

Considerando la respuesta en el tiempo de

$$X(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

a cualquier entrada $u(t)$ dada, es necesario factorizar el polinomio del denominador

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

y puede haber varias formas de los factores.

Factor simple de la forma $s + \alpha$, con α real

Esto corresponde a un polo simple en $s = -\alpha$, y en la expansión en fracciones parciales de $G(s)$ llegará a un término de la forma $c/(s + \alpha)$ que tiene la respuesta en el tiempo correspondiente $ce^{\alpha t}H(t)$, usando la forma estricta de la inversa dada en (2.12). Si $\alpha > 0$, de manera que el polo está en la mitad izquierda del plano s , la respuesta en el tiempo tenderá a cero conforme $t \rightarrow \infty$. Si $\alpha < 0$ de manera que el polo está en la mitad derecha del plano s , la respuesta en el tiempo crecerá sin cota conforme $t \rightarrow \infty$. Se sigue que un sistema estable debe tener polos simples con valores reales de $G(s)$ en la mitad izquierda del plano s .

$\alpha = 0$ corresponde a un polo simple en el origen teniendo una respuesta en el tiempo correspondiente que es un escalón $cH(t)$. Un sistema que tiene tal polo se dice que es **estable marginalmente**; esto no asegura que una entrada acotada llevará a una salida acotada, ya que, por ejemplo, si tal sistema tiene una entrada que es un escalón d aplicado en el tiempo $t = 0$ entonces la respuesta será una rampa $cd tH(t)$, que no está acotada cuando $t \rightarrow \infty$.

Factores simples repetidos de la forma $(s + \alpha)^n$, con α real

Esto corresponde a un polo múltiple en $s = -\alpha$, y llevará en la expansión en fracciones parciales de $G(s)$ a un término de la forma $c/(s + \alpha)^n$ cuya respuesta en el tiempo es $[c/(n-1)!]t^{n-1}e^{\alpha t}H(t)$. De nuevo, la respuesta decaerá a cero conforme $t \rightarrow \infty$ sólo si $\alpha > 0$, esto indicará que un sistema estable debe tener todos los polos repetidos con valores reales de $G(s)$ en la mitad izquierda del plano s .

Factores cuadráticos de la forma $(s + \alpha)^2 + \beta^2$, con α y β reales

Esto corresponde a un par de polos complejos conjugados en $s = -\alpha + j\beta$, $s = -\alpha - j\beta$, y llevará en la expansión en fracciones parciales de $G(s)$ a un término de la forma

$$\frac{c(s + \alpha) + d\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

que tiene la respuesta en el tiempo correspondiente

$$e^{-\alpha t}(c \cos \beta t + d \sin \beta t) = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \gamma)$$

donde $A = \sqrt{c^2 + d^2}$ y $\gamma = \tan^{-1}(c/d)$.

Nuevamente vemos que los polos en la mitad izquierda del plano s (que corresponden a $\alpha > 0$) tienen respuestas en el tiempo correspondientes que se desvanecen, en la forma de una senoidal exponencialmente amortiguada, cuando $t \rightarrow \infty$. Un sistema estable debe tener, por tanto, polos complejos conjugados localizados en la mitad izquierda del plano s ; esto es, todos los polos complejos deben tener la parte real negativa.

Si $\alpha = 0$, la respuesta en el tiempo correspondiente será una senoidal periódica que no se desvanece cuando $t \rightarrow \infty$. De nuevo, esta respuesta a un sistema estable marginalmente dará lugar, por ejemplo, a una respuesta que crece sin cota conforme $t \rightarrow \infty$ cuando la entrada es una senoidal con la misma frecuencia β .

En la figura 2.43 aparece un resumen de las respuestas correspondientes a los diversos tipos de polos.

El concepto de estabilidad puede expresarse en la forma de la definición 2.3

DEFINICIÓN 2.3

Un sistema lineal causal invariante en el tiempo físicamente realizable con función de transferencia $G(s)$ es estable siempre que todos los polos de $G(s)$ estén en la mitad izquierda del plano s .

El requerimiento en la definición de que el sistema sea físicamente realizable, esto es, $n \geq m$ en la función de transferencia $G(s)$ de (2.66), evita términos de la forma s^{m-n} en la expansión en fracciones parciales de $G(s)$. Dicho término correspondería a la derivación de orden $m - n$, y si se usa una entrada tal como $\sin \omega t$ para excitar a sistema entonces la respuesta incluirá un término tal como $\omega^{m-n} \sin \omega t$ o $\omega^{m-n} \cos \omega t$ que se puede hacer tan grande como se quiera aumentando la frecuencia de entrada ω .

En términos de los polos de la función de transferencia $G(s)$, su abscisa de convergencia σ_c , corresponde a la parte real del polo más lejano localizado a la derecha en el plano s . Por ejemplo, si

$$G(s) = \frac{s + 1}{(s + 3)(s + 2)}$$

entonces la abscisa de convergencia es $\sigma_c = -2$.

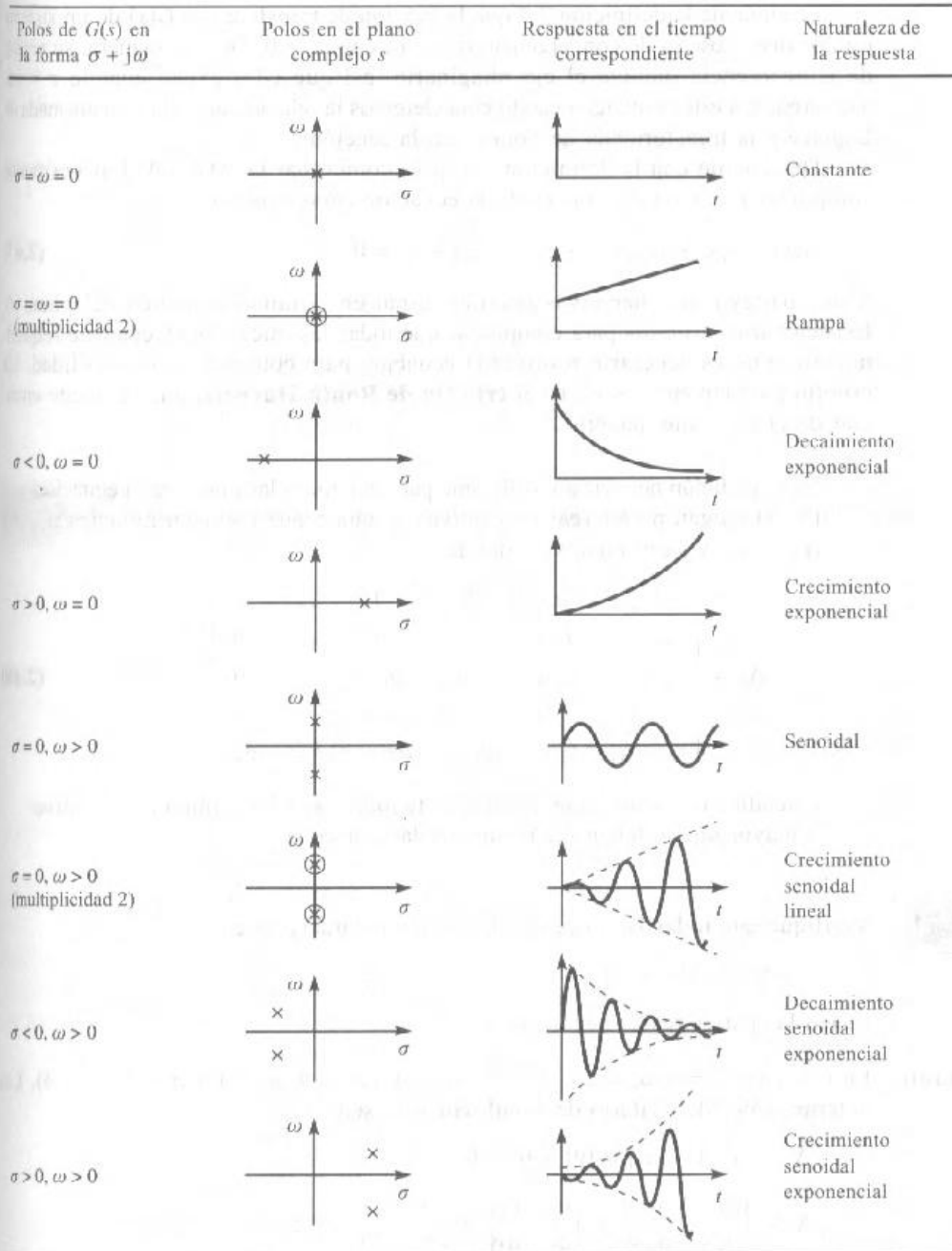


Figura 2.43 Relaciones entre los polos de la función de transferencia y el tiempo de respuesta.

Se sigue de la definición 2.3 que la función de transferencia $G(s)$ de un sistema estable tiene abscisa de convergencia $\sigma_c = -\alpha$, con $\alpha > 0$. De esta manera, su región de convergencia incluye el eje imaginario, así que $G(s)$ existe cuando $s = j\omega$. Volveremos a este resultado cuando consideremos la relación entre la transformada de Laplace y la transformada de Fourier en la sección 5.4.1.

De acuerdo con la definición 2.3, para comprobar la estabilidad, necesitamos comprobar que todas las raíces de la ecuación característica

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.67)$$

tienen partes reales negativas (esto es, están en la mitad izquierda del plano s). Existen varios criterios para comprobar que todas las raíces satisfacen este requerimiento, y no es necesario resolver la ecuación para comprobar la estabilidad. Un criterio ampliamente usado es el **criterio de Routh-Hurwitz**, que se puede enunciar de la siguiente manera:

Una condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación (2.67) tengan partes reales negativas es que todos los determinantes $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ sean positivos, donde

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-(2r-1)} & a_{n-2r} & a_{n-2r-1} & a_{n-2r-2} & \dots & a_{n-r} \end{vmatrix} \quad (2.68)$$

entendiendo que en cada determinante todas las a con subíndice negativo o mayor que n deben ser reemplazadas por cero.

EJEMPLO 2.51

Verifique que todas las raíces de la ecuación característica

$$s^4 + 9s^3 + 33s^2 + 51s + 26 = 0$$

tienen las partes reales negativas.

Solución En este caso $n = 4$, $a_0 = 26$, $a_1 = 51$, $a_2 = 33$, $a_3 = 9$, $a_4 = 1$ y $a_r = 0$ ($r > 4$). Los determinantes del criterio de Routh-Hurwitz son

$$\Delta_1 = |a_{n-1}| = |a_3| = |9| = 9 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 51 & 33 \end{vmatrix} = 246 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 51 & 33 & 9 \\ 0 & 26 & 51 \end{vmatrix} = 10\,440 > 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 \\ 51 & 33 & 9 & 1 \\ 0 & 26 & 51 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 26 \end{vmatrix} = 26\Delta_3 > 0$$

De donde $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ y $\Delta_4 > 0$, así que todas las raíces de la ecuación característica dada tienen partes reales negativas. Esto se puede verificar ya que las raíces son -2 , -1 , $-3 + j2$ y $-3 - j2$.

EJEMPLO 2.52

El movimiento continuo del regulador de una máquina de vapor está modelado por la ecuación diferencial

$$m\ddot{\eta} + b\dot{\eta} + d\eta - e\omega = 0 \quad (2.69)$$

$$I_0\dot{\omega} = -f\eta \quad (2.70)$$

donde η es una pequeña fluctuación en el ángulo de inclinación, ω es una pequeña fluctuación en la velocidad angular de la rotación y m , b , d , e , f e I_0 son todas constantes positivas. Verifique que el movimiento del regulador es estable siempre que

$$\frac{bd}{m} > \frac{ef}{I_0}$$

Solución Al derivar (2.69) se obtiene

$$m\ddot{\eta} + b\dot{\eta} + d\eta - e\dot{\omega} = 0$$

y, al usar (2.70), llegamos a

$$m\ddot{\eta} + b\dot{\eta} + d\eta + \frac{ef}{I_0}\eta = 0$$

para la cual la ecuación característica correspondiente es

$$ms^3 + bs^2 + ds + \frac{ef}{I_0} = 0$$

Este es un polinomio cúbico, así los parámetros de (2.67) son

$$n = 3, \quad a_0 = \frac{ef}{I_0}, \quad a_1 = d, \quad a_2 = b, \quad a_3 = m \quad (a_r = 0, r > 3)$$

Los determinantes (2.68) del criterio de Routh-Hurwitz son

$$\Delta_1 = |a_2| = b > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & m \\ ef/I_0 & d \end{vmatrix} = bd - \frac{mef}{I_0}$$

(y así $\Delta_2 > 0$ siempre que $bd - mef/I_0 > 0$ o $bd/m > ef/I_0$), y

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_2 > 0 \quad \text{si } \Delta_2 > 0$$

Así la acción del regulador es estable siempre que $\Delta_2 > 0$; esto es,

$$\frac{bd}{m} > \frac{ef}{I_0}$$

2.6.3 Respuesta al impulso

De (2.66) encontramos que para un sistema que tiene función de transferencia $G(s)$ la respuesta $x(t)$ del sistema, inicialmente en estado de reposo, a una entrada $u(t)$ está determinada por la relación en las transformadas

$$X(s) = G(s)U(s)$$

Si la entrada $u(t)$ es la función impulso unitario $\delta(t)$ entonces la respuesta del sistema estará determinada por

$$X(s) = G(s)\mathcal{L}\{\delta(t)\} = G(s)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace llegamos a la respuesta en el tiempo correspondiente $h(t)$, que se llama la **respuesta al impulso** del sistema (algunas veces también es conocida como la **función de peso** del sistema); esto es, la respuesta al impulso está dada por

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \quad (2.71)$$

Por tanto, tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.4: RESPUESTA AL IMPULSO

La respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema lineal invariante en el tiempo es la respuesta del sistema a un impulso unitario aplicado en el tiempo $t = 0$ cuando todas las condiciones iniciales son cero. Es tal que $\mathcal{L}\{h(t)\} = G(s)$, donde $G(s)$ es la función de transferencia del sistema.

Como la respuesta al impulso es la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia, se sigue que tanto la respuesta al impulso como la función de transferencia llevan la misma información acerca de la dinámica del sistema lineal invariante en el tiempo. Por tanto, en teoría, es posible determinar la información completa acerca del sistema excitándolo con un impulso y midiendo la respuesta. Por esta razón, es una práctica común en ingeniería ver la función de transferencia como la transformada de Laplace de la respuesta al impulso, ya que esto pone gran énfasis en los parámetros del sistema cuando se consideran diseños de sistemas.

En la sección 2.6.2 vimos que como la función de transferencia $G(s)$ caracteriza por completo un sistema lineal invariante en el tiempo, puede usarse para especificar las condiciones de estabilidad de sistemas, las cuales son que todos los polos de $G(s)$ estén en la mitad izquierda del plano s . De manera alternativa, al caracterizar el sistema por su respuesta de impulso, podemos decir que el sistema es estable siempre que su respuesta al impulso decaiga a cero conforme $t \rightarrow \infty$.

EJEMPLO 2.53

Determine la respuesta al impulso del sistema lineal cuya respuesta $x(t)$ a una entrada $u(t)$ está determinada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 5u(t) \quad (2.72)$$

Solución La respuesta al impulso $h(t)$ es la respuesta del sistema a $u(t) = \delta(t)$ cuando todas las condiciones iniciales son cero. Por tanto, está determinada como la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2h}{dt^2} + 5\frac{dh}{dt} + 6h = 5\delta(t) \quad (2.73)$$

sujeta a las condiciones iniciales $h(0) = \dot{h}(0) = 0$. Aplicando la transformada de Laplace en (2.73) da

$$(s^2 + 5s + 6)H(s) = 5\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 5$$

así que

$$H(s) = \frac{5}{(s+3)(s+2)} = \frac{5}{s+2} - \frac{5}{s+3}$$

que al invertir da la respuesta al impulso deseada

$$h(t) = 5(e^{-2t} - e^{-3t})$$

De manera alternativa, la función de transferencia $G(s)$ del sistema determinado por (2.72) es

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 5s + 6}$$

que, como antes $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = 5(e^{-2t} - e^{-3t})$.

Nota: Este ejemplo sirve para ilustrar la necesidad de incorporar 0^- como el límite inferior en la integral de la transformada de Laplace, a fin de poder aplicar un impulso en $t = 0$. El efecto del impulso es provocar un cambio escalonado en $i(t)$ en $t = 0$, con la condición inicial considerando lo que pasa en 0^- .

2.6.4 Teoremas del valor inicial y del valor final

Los teoremas del valor inicial y del valor final son dos teoremas muy útiles que nos permite predecir el comportamiento del sistema conforme $t \rightarrow 0$ y $t \rightarrow \infty$ sin invertir la transformada de Laplace.

TEOREMA 2.6

El teorema del valor inicial

Si a $f(t)$ y $f'(t)$ se les puede aplicar la transformada de Laplace y si $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ existe entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Demostración De (2.13),

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_{0-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0-)$$

donde tenemos que destacar el hecho de que el límite inferior es 0^- . Ahora

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0-)] &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0-}^{0+} f'(t) e^{-st} dt + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0+}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt \end{aligned} \quad (2.74)$$

Si $f(t)$ es discontinua en el origen, de manera que $f(0+) \neq f(0-)$, entonces, de (2.59), $f'(t)$ contiene un término de impulso $[f(0+) - f(0-)]\delta(t)$, así que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0-}^{0+} f'(t) e^{-st} dt = f(0+) - f(0-)$$

Además, como la transformada de Laplace de $f'(t)$ existe, es de orden exponencial y tenemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0+}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = 0$$

de manera que (2.74) se convierte en

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0-) = f(0+) - f(0-)$$

dando el resultado requerido:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0+)$$

Si $f(t)$ es continua en el origen entonces $f'(t)$ no contiene un término de impulso y el lado derecho de (2.74) es cero, dando

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0-) = f(0+)$$

□

Es importante reconocer que el teorema del valor inicial no da el valor inicial de $f(0-)$ usado cuando determinamos la transformada de Laplace, sino más bien da el valor de $f(t)$ conforme $t \rightarrow 0+$. Esta diferencia está destacada en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.54

El circuito de la figura 2.44 está formado por un resistor R y un capacitor C conectados en serie a una fuente de voltaje constante E . Antes de cerrar el interruptor en el tiempo $t = 0$, tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Determine la corriente $i(t)$ en el circuito en el tiempo t después de cerrar el interruptor e investigue el uso del teorema del valor inicial.

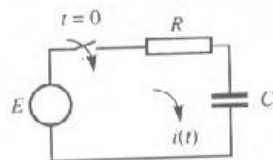


Figura 2.44 Circuito RC del ejemplo 2.54.

Solución Aplicando la ley de Kirchhoff en el circuito de la figura 2.44, tenemos

$$Ri + \frac{1}{C} \int i \, dt = E_0$$

que, aplicando la transformada de Laplace, da la ecuación transformada

$$RI(s) + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} = \frac{E_0}{s}$$

Por tanto,

$$I(s) = \frac{E_0/R}{s + 1/RC}$$

Aplicando la transformada inversa se obtiene la corriente $i(t)$ en $t \geq 0$ como

$$i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-t/RC} \quad (2.75)$$

Aplicando el teorema del valor inicial,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0+} i(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sI(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sE_0/R}{s + 1/RC} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{E_0/R}{1 + 1/RCs} = \frac{E_0}{R}\end{aligned}$$

Esto es

$$i(0+) = \frac{E_0}{R}$$

un resultado que se confirma fácilmente permitiendo que $t \rightarrow 0+$ en (2.75). Observamos que no es igual al estado inicial $i(0) = 0$ debido al hecho de que hay un cambio escalonado en $i(t)$ en $t = 0$.

TEOREMA 2.7

El teorema del valor final

Si a $f(t)$ y $f'(t)$ se les puede aplicar la transformada de Laplace, y si $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existe entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Demostración De (2.13),

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_{0-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0-)$$

Tomando límites, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0-)] &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{\infty} f'(t) dt = [f(t)]_{0-}^{\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0-)\end{aligned}$$

dando el resultado requerido:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

La restricción de que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ debe existir significa que el teorema no se cumple para funciones tales como e^t , que tiende a infinito conforme $t \rightarrow \infty$, o $\sin \omega t$, cuyo límite está indefinido. Como en la práctica el teorema del valor final se usa para obtener el comportamiento de $f(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ a partir del conocimiento de la transformada

$F(s)$, es más común expresar la restricción en términos de las restricciones de $F(s)$, las cuales son que $sF(s)$ debe tener todos sus polos en la mitad izquierda del plano s ; esto es, $sF(s)$ debe representar una función de transferencia estable. Es importante usar el teorema con precaución y que la restricción sea plenamente reconocida, ya que la existencia de $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ no implica que $f(t)$ tenga un valor límite cuando $t \rightarrow \infty$.

EJEMPLO 2.55

Investigue la aplicación del teorema del valor final a la función de transferencia

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s-3)} \quad (2.76)$$

Solución

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{(s+2)(s-3)} = 0$$

así que el uso del teorema del valor final implica que para la función de tiempo $f(t)$ correspondiente a $F(s)$ tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

Sin embargo, aplicando la transformada inversa en (2.76) se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{5}(e^{3t} - e^{-2t})$$

implicando que $f(t)$ tiende a infinito conforme $t \rightarrow \infty$. Esta contradicción surge ya que el teorema no es válido en este caso. A pesar de que $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ existe, $sF(s)$ tiene un polo en $s = 3$, que no está en la mitad izquierda del plano s .

El teorema del valor final proporciona una herramienta útil para determinar la **ganancia en estado estacionario (GEE)** y los **errores en estado estacionario**, o **compensación**, en sistemas de control con retroalimentación, los cuales son características importantes en el diseño de los sistemas.

La GEE de un sistema estable es la respuesta del sistema en estado estacionario, esto es, la respuesta cuando $t \rightarrow \infty$, a una entrada de escalón unitario. Para un sistema con una función de transferencia $G(s)$ tenemos, a partir de (2.66), que su respuesta $x(t)$ está relacionada con la entrada $u(t)$ por la ecuación transformada

$$X(s) = G(s)U(s)$$

Para una entrada de escalón unitario

$$u(t) = 1H(t) \quad \text{dando} \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

así que

$$X(s) = \frac{G(s)}{s}$$

Por el teorema del valor final, la ganancia en estado estacionario es

$$\text{GEE} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

EJEMPLO 2.56

Determine la ganancia en estado estacionario de un sistema que tiene función de transferencia

$$G(s) = \frac{20(1+3s)}{s^2+7s+10}$$

Solución La respuesta $x(t)$ a una entrada de escalón unitario $u(t) = 1H(t)$ está dada por la ecuación transformada

$$\begin{aligned} X(s) &= G(s)U(s) \\ &= \frac{20(1+3s)}{s^2+7s+10} \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Por el teorema del valor final, la ganancia en estado estacionario está dada por

$$\begin{aligned} \text{GEE} &= \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20(1+3s)}{s^2+7s+10} = 2 \end{aligned}$$

Observamos que para una entrada de escalón de magnitud K , esto es, $u(t) = KH(t)$, la respuesta en estado estacionario será $\lim_{s \rightarrow 0} kG(s) = 2K$; esto es,

respuesta en estado estacionario a una entrada de escalón = GEE \times magnitud del escalón unitario de entrada

Un sistema de control con retroalimentación unitaria que tiene una función de transferencia con trayectoria hacia adelante $G(s)$, entrada de referencia o salida deseada $r(t)$ y una salida real $x(t)$ está ilustrado en la figura 2.45 con un diagrama de bloque. Definiendo el error como $e(t) = r(t) - x(t)$, se sigue que

$$G(s)E(s) = X(s) = R(s) - E(s)$$

dado

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

Así, por el teorema del valor final, el error en estado estacionario (EEE) es

$$\text{GEE} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} \quad (2.77)$$

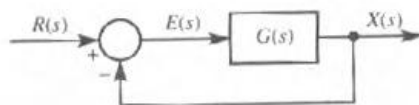


Figura 2.45 Sistema de control con retroalimentación unitaria.

EJEMPLO 2.57

Determine el EEE del sistema de la figura 2.45 cuando $G(s)$ es igual que en el ejemplo 2.56 y $r(t)$ es un escalón de magnitud K .

Solución Como $r(t) = KH(t)$, tenemos $R(s) = K/s$, así, usando (2.77),

$$EEE = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK/s}{1 + G(s)} = \frac{K}{1 + GEE}$$

donde $GEE = 2$ como está determinado en el ejemplo 2.56. Así

$$EEE = \frac{1}{3} K$$

Es claro, a partir del ejemplo 2.57, que si queremos reducir el EEE que claramente es deseable en la práctica, entonces es necesario aumentar la GEE. Sin embargo, tal crecimiento puede conducir a una respuesta transitoria indeseable y en el diseño de sistemas debe alcanzarse el equilibrio. Aquí no son consideradas las técnicas detalladas para mitigar estos problemas; para tal discusión el lector puede consultar textos especializados (ver por ejemplo J. Schwarzenbach y K. F. Gill, *System Modelling and Control*, Edward Arnold, Londres, 1984).

2.6.5 Ejercicios

- 34 La respuesta $x(t)$ de un sistema para una función de fuerza $u(t)$ está determinada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 3\frac{du}{dt} + 2u$$

- Determine la función de transferencia que caracteriza al sistema.
 - Escriba la ecuación característica del sistema. ¿Cuál es el orden del sistema?
 - Determine los polos y los ceros de la función de transferencia e ilústrellos con un diagrama en el plano s .
- 35 Repita el ejercicio 34 para un sistema cuya respuesta $x(t)$ a una entrada $u(t)$ está determinada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 17\frac{dx}{dt} + 13x = \frac{d^2u}{dt^2} + 5\frac{du}{dt} + 6u$$

- 36 ¿Cuál de las siguientes funciones de transferencia representa un sistema estable y cuál representa un sistema inestable?

(a) $\frac{s-1}{(s+2)(s^2+4)}$ (b) $\frac{(s+2)(s-2)}{(s+1)(s-1)(s+4)}$

(c) $\frac{s-1}{(s+2)(s+4)}$ (d) $\frac{6}{(s^2+s+1)(s+1)^2}$
 (e) $\frac{5(s+10)}{(s+5)(s^2-s+10)}$

- 37 ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones características representan un sistema estable?

- $s^2 - 4s + 13 = 0$
- $5s^3 + 13s^2 + 31s + 15 = 0$
- $s^3 + s^2 + s + 1 = 0$
- $24s^4 + 11s^3 + 26s^2 + 45s + 36 = 0$
- $s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0$

- 38 La ecuación diferencial que gobierna el movimiento de un sistema masa-resorte-amortiguador con regulador es

$$m\frac{d^3x}{dt^3} + c\frac{d^2x}{dt^2} + K\frac{dx}{dt} + Krx = 0$$

donde m , c , K y r son constantes positivas. Verifique que el movimiento del sistema es estable siempre que $r < cm$.

- 39 El comportamiento de un sistema que tiene un regulador de ganancia está caracterizado por la ecuación característica

$$s^4 + 2s^3 + (K + 2)s^2 + 7s + K = 0$$

donde K es la ganancia del regulador. Verifique que el sistema es estable siempre que $K > 2.1$.

- 40 Un sistema de retroalimentación tiene la ecuación característica

$$s^3 + 15Ks^2 + (2K - 1)s + 5K = 0$$

donde K es un factor constante de ganancia. Determine el rango de los valores positivos de K para los cuales el sistema será estable.

- 41 Determine las respuestas al impulso de los sistemas lineales cuya respuesta $x(t)$ a una entrada $u(t)$ está determinada por las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 15\frac{dx}{dt} + 56x = 3u(t)$

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 25x = u(t)$

(c) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 8x = 4u(t)$

(d) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 13x = u(t)$

¿Qué puede decirse acerca de la estabilidad de cada uno de los sistemas?

- 42 La respuesta de un sistema dado a un escalón unitario $u(t) = 1H(t)$ está dada por

$$x(t) = 1 - \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

¿Cuál es la función de transferencia del sistema?

- 43 Verifique el teorema del valor inicial para las funciones

(a) $2 - 3 \cos t$ (b) $(3t - 1)^2$

(c) $t + 3 \sin 2t$

- 44 Verifique el teorema del valor final para las funciones

(a) $1 + 3e^{-t} \sin 2t$ (b) $t^2 e^{-2t}$

(c) $3 - 2e^{-3t} + e^{-t} \cos 2t$

- 45 Use el teorema del valor final para verificar el valor obtenido para $i_2(t)$ conforme $t \rightarrow \infty$ para el circuito del ejemplo 2.28.

- 46 Analice si se puede aplicar el teorema del valor final para obtener el valor de $i_2(t)$ conforme $t \rightarrow \infty$ para el circuito del ejemplo 2.29.

- 47 Use los teoremas del valor inicial y del valor final para encontrar el salto en $t = 0$ y el valor límite conforme $t \rightarrow \infty$ para la solución del problema de valor inicial

$$7\frac{dy}{dt} + 5y = 4 + e^{-3t} + 2\delta(t)$$

con $y(0^-) = -1$.

2.6.6 Convolución

La convolución es un concepto que tiene muchas aplicaciones en varios campos de la ingeniería. En la sección 2.6.7 la usaremos para obtener la respuesta de un sistema lineal a cualquier entrada en términos de la respuesta al impulso.

DEFINICIÓN 2.5: Convolución

Dadas dos funciones continuas a pedazos $f(t)$ y $g(t)$, la **convolución** de $f(t)$ y $g(t)$, denotada por $f * g(t)$, está definida como

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

En el caso particular en que $f(t)$ y $g(t)$ son funciones causales

$$f(\tau) = g(\tau) = 0 \quad (\tau < 0), \quad g(t - \tau) = 0 \quad (\tau > t)$$