

## 7.- Análisis de los datos de salida para un único sistema

### 7.1- Simulaciones con terminación y estacionarias

En ocasiones, se invierte gran cantidad de esfuerzo en el desarrollo del modelo y su programación y, sin embargo, se dedica poca atención al análisis de los datos de salida: se realiza una única ejecución, de duración arbitraria, y se considera, erróneamente, que los datos obtenidos son una estimación de la respuesta "verdadera" del modelo.

Las variables aleatorias de salida del modelo pueden tener grandes varianzas, con lo cual, los datos obtenidos en una única simulación pueden diferir significativamente de sus valores esperados. El análisis estadístico clásico, aplicable a observaciones IID, no suele ser directamente aplicable a los datos de salida de la simulación, ya que estos, generalmente, no son independientes entre sí.

Dependiendo del tipo de análisis a que quiera someterse al sistema, pueden diferenciarse dos tipos de simulación: las simulaciones con finalización y las simulaciones en estado estacionario.

Una *simulación con finalización* es aquella en la cual las medidas del comportamiento del sistema están definidas relativas al intervalo de tiempo simulado,  $[0, T_E]$ , donde  $T_E$  es el instante (posiblemente una variable aleatoria) en que se produce el evento de finalización, E, el cual es definido antes del comienzo de la simulación. En este caso, las medidas del comportamiento del sistema dependen explícitamente del estado inicial del sistema.

Un ejemplo de este tipo de simulación es un banco que abre sus puertas a las 9 de la mañana y las cierra a las 5 de la tarde, no finalizando el servicio al público hasta que no han sido atendidos todos los clientes que en el momento de cierre se encontraban en el establecimiento. La condición de finalización, E, es que al menos se hayan simulado 8 horas y que el establecimiento este vacío. Una condición inicial razonable es que en el instante inicial no haya clientes en el establecimiento.

Otro ejemplo es la compañía que vende un único producto y debe decidir su política de inventario durante los siguientes 120 meses. La condición de finalización es  $E=120$  meses. Una condición inicial razonable es el nivel actual del inventario.

Una *simulación en estado estacionario* es aquella en la cual las características del sistema se definen en el límite, cuando la duración de la simulación tiende a infinito. Dado que no hay un evento E de finalización, la longitud de una simulación se hace tan larga como sea necesaria para obtener una "buena" estimación de las características de interés.

Un ejemplo, sería un empresa que quiere simular cierto proceso de operación, estimando la velocidad de producción, una vez que el proceso se ha estado ejecutando el tiempo suficiente como para que las condiciones iniciales no tengan ningún efecto.

En el caso de un sistema simulado con finalización, la forma de obtener las muestras necesarias es replicar la simulación tantas veces como sea preciso. Por el contrario, un sistema simulado en estado estacionario basta con que se simule una vez, ya que es la duración de la ejecución lo que determina el número de muestras obtenidas.

El tipo de simulación no depende del sistema en sí, sino del análisis que de él quiera realizarse.

En el ejemplo del empleado que atiende una cola FIFO, consideremos el proceso de salida  $\{D_i, i \geq 1\}$ , donde  $D_i$  es el tiempo de espera en la cola del  $i$ -ésimo cliente. Supongamos que los intervalos entre llegadas sucesivas y los tiempos de servicio son variables aleatorias exponenciales de media  $\frac{1}{\lambda}$  y  $\frac{1}{\omega}$ , respectivamente, satisfaciéndose  $\rho = \frac{\lambda}{\omega} < 1$ .

El objetivo de una simulación con finalización de este sistema puede ser estimar el tiempo medio de espera en la cola por cliente de los primeros  $m$  clientes, con lo cual, la condición de finalización,  $E$ , es que  $m$  clientes comiencen a ser atendidos.

Notaremos  $L(0)$  la condición inicial: el número de clientes en la cola en el instante cero. Sea  $L(0)=0$ . La magnitud a estimar mediante simulación es  $d(m|L(0)=0)$ , que es el tiempo de espera medio en la cola obtenido simulando durante  $m$  clientes y dada la condición inicial de que en el instante cero el número de clientes en la cola sea cero. Viene dada por:

$$d(m|L(0)=0) = E \left[ \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{m} \middle| L(0)=0 \right]$$

La variable aleatoria  $X = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{m}$  es el tiempo de espera medio en la cola por cliente, calculado para los primeros  $m$  clientes, y el objetivo de la simulación es estimar  $E(X)$ , satisfaciéndose la condición inicial  $L(0)=0$ . Dado que  $E(X)$  puede estimarse calculando la media de los  $X$  obtenidos al realizar varias simulaciones independientes, cabe preguntarse cuántas simulaciones independientes de longitud  $m$  clientes es necesario efectuar para obtener una buena estimación.

Obsérvese que las magnitudes de interés en las simulaciones con finalización dependen explícitamente de las condiciones iniciales. En particular:

$$d(m|L(0)=l_1) \neq d(m|L(0)=l_2) \quad \text{para } l_1 \neq l_2$$

El objetivo de una simulación en estado estacionario de este mismo sistema puede ser estimar el tiempo medio de espera por cliente en la cola,  $d$ , en estado estacionario (realizando una simulación "suficientemente" larga), que se define como:

$$d = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{m} \quad \text{con probabilidad 1 para cualquier } L(0)$$

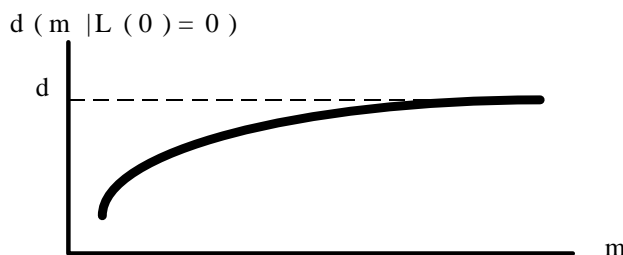
es decir, que si se realiza un número infinito de simulaciones, obteniéndose de cada una de ellas:

$$\bar{D}(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{m}$$

con  $m$  suficientemente grande, entonces  $\bar{D}(m)$  estará arbitrariamente próximo a  $d$  para virtualmente (con probabilidad 1) todas las simulaciones.

Si  $\rho = \frac{\lambda}{\omega} < 1$  suponemos que el límite  $d$  existe y es finito. Sin embargo, si  $\rho = \frac{\lambda}{\omega} > 1$ , en

promedio los clientes llegan a mayor velocidad que son atendidos, con lo cual al progresar el tiempo la cola se hará más y más larga, con lo cual el límite divergirá a infinito. Obsérvese que  $d$  es independiente del estado inicial del sistema.



La figura muestra la forma que tendrá la representación gráfica de  $d(m | L(0) = 0)$  frente a  $m$ , para  $\rho < 1$ .  $d(m | L(0) = 0)$  se aproxima asintóticamente a  $d$ , cuando  $m$  tiende a infinito. Obsérvese que  $d(m | L(0) = 0)$  es pequeño para valores pequeños de  $m$ , ya que  $L(0)$  se ha escogido arbitrariamente igual a cero.

Con el fin de aclarar que se entiende por estado estacionario, definamos, para el ejemplo de la cola, la *distribución transitoria* de tiempo de espera en el instante  $i$ ,  $F_{i,l}(x)$ , como:

$$F_{i,l}(x) = P\{D_i \leq x | L(0) = l\}$$

el adjetivo "transitoria" indica que hay una distribución diferente para cada instante  $i$ . Puede demostrarse que para cualquier  $x \geq 0$  existe una *distribución en el estacionario* del tiempo de espera,  $F(x)$ , definida:

$$F(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} F_{i,l}(x) \quad \text{para todo } L(0) = l$$

es decir, existe un índice de tiempo  $i'$  tal que para todo  $i$  mayor o igual que  $i'$ ,  $F_{i,l}(x) \approx F(x)$  para todo  $x \geq 0$ . En el instante en el cual  $F_{i,l}(x)$  no varía esencialmente con  $i$ , se dice que el proceso  $\{D_i, i \geq 0\}$  está en "estado estacionario". Estado estacionario no significa que a partir de cierto instante los tiempos de espera obtenidos en la ejecución de la simulación sean constantes, sino que lo son las distribuciones de los tiempos de espera. Si  $D$  es el tiempo de espera de un cliente, una vez que el sistema está en estado estacionario, entonces puede demostrarse que  $E(D)=d$ .

Supongamos que deseamos estimar  $d(25|L(0)=0)$ , para el sistema de la cola atendida por un operario, en el caso  $\rho = 0.9$ . La solución exacta, calculada por métodos analíticos, es  $d(25|L(0)=0)=2.124$ . Para ello, se realizan 10 simulaciones independientes, obteniéndose los siguientes

resultados para  $\frac{\sum_{i=1}^{25} D_i}{25}$ :

1.051	6.438	2.646	0.805	1.505
0.546	2.281	2.822	0.414	1.307

los resultados están comprendidos entre 0.414, que es el menor, y 6.438, el mayor. Obsérvese además, que la mayoría difieren considerablemente del valor verdadero, 2.124.

Concluimos pues, que una sola simulación es insuficiente para obtener una estimación fiable y que es necesario desarrollar un método que nos permita establecer la proximidad entre la estimación y el valor verdadero. Para ello, normalmente, suele construirse un intervalo de confianza para el valor verdadero. Este razonamiento es igualmente aplicable a las simulaciones en estado estacionario: es necesario poder establecer la precisión del estimador.

## 7.2- Intervalos de confianza para simulaciones con finalización

Consideremos en primer lugar la construcción de *intervalos de confianza para simulaciones con finalización*. Supongamos que repetimos  $n$  veces, de forma independiente, una simulación con finalización, donde la longitud de cada réplica esta determinada por el evento de finalización,  $E$ , y todas comienzan con la misma condición inicial. La independencia de cada réplica se consigue usando diferentes números aleatorios en cada una.

Supongamos, por simplicidad, que de la simulación desea estimarse una sola magnitud de interés. Notemos  $\bar{X}_j$  al estimador de la magnitud de interés obtenido en la  $j$ -ésima réplica. Si las repeticiones de la simulación son independientes, las  $\bar{X}_j$ 's serán variables aleatorias IID, con lo cual, puede usarse el análisis estadístico clásico para construir un intervalo de confianza para  $\mu = E(X)$ .

Si los estimadores  $X_1, \dots, X_n$  obtenidos al realizar  $n$  repeticiones independientes de la simulación pueden considerarse variables aleatorias aproximadamente normales (cosa que, en la práctica, frecuentemente sólo ocurre de forma aproximada), entonces un intervalo de confianza del

$$100(1-\alpha) \text{ para } \mu = E(X) \text{ es } \bar{X} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n}}.$$

Veamos ahora cómo determinar el número de replicaciones que son necesarias para obtener un intervalo de confianza de una determinada longitud.

Se definen dos modos de medir la longitud de un intervalo de confianza. Se llama:

- *precisión absoluta del intervalo de confianza* a la mitad de la longitud del intervalo.
- *precisión relativa del intervalo de confianza* al cociente de la mitad de la longitud del intervalo por la magnitud del estimador del punto medio del intervalo,  $\bar{X}$ .

El objetivo es construir un intervalo de confianza para  $\mu$ , del  $100(1-\alpha)\%$ , y tal que su precisión relativa sea menor o igual que  $\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ). A continuación presentamos un método secuencial para obtener una estimación no sesgada del número de replicaciones necesarias:

$$\text{Sea } n_0 \geq 2 \text{ el número inicial de replicaciones y sea: } \delta(n, \alpha) = t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

la semilongitud del intervalo. Entonces, se sigue el siguiente procedimiento secuencial:

(0).- Realizar  $n_0$  replicaciones de la simulación y asignar  $n = n_0$ .

(1).- Calcular  $\bar{X}$  y  $\delta(n, \alpha)$  a partir de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

(2).- Si  $\frac{\delta(n, \alpha)}{|\bar{X}|} \leq \gamma$ , usar

$$I(\alpha, \gamma) = [\bar{X} - \delta(n, \alpha), \bar{X} + \delta(n, \alpha)]$$

como un intervalo de confianza del  $100(1-\alpha)\%$  para  $\mu$  y terminar. En caso contrario, reemplazar  $n$  por  $n+1$ , realizar una nueva replicación de la simulación, e ir al paso (1).

Obsérvese que el procedimiento calcula una nueva estima de  $\sigma^2(X)$ ,  $s^2$ , después de cada nueva simulación y que el número de simulaciones requerido es una variable aleatoria.

### 7.3- Intervalos de confianza para simulaciones en estado estacionario

Sean  $Y_1, Y_2, \dots$  las salidas de una única simulación, por ejemplo,  $Y_i$  puede ser el tiempo de espera en la cola del  $i$ -ésimo cliente. Definimos la respuesta en estado estacionario del sistema

$$\{Y_i, i \geq 1\}, \nu, \text{ suponiendo que exista, como: } \nu = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^m Y_i}{m} \quad \text{con probabilidad 1.}$$

Suponemos que el límite  $\nu$  es independiente del estado inicial de la simulación.

Un método ampliamente utilizado para la construcción del intervalo de confianza para  $\nu$  es el de la *media por lotes*, en el cual se dividen los datos de salida  $Y_1, Y_2, \dots$  en "observaciones" aproximadamente IID, a las cuales son aplicables las técnicas estadísticas clásicas para la construcción del intervalo de confianza para  $\nu$ .

Supongamos por el momento que  $Y_1, Y_2, \dots$  es un proceso estocástico de covarianza estacionaria, con  $E(Y_i) = \nu$  para todo  $i$ . Supongamos que ejecutamos una simulación de longitud  $m$  y dividimos los  $m$  datos resultantes,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ , en  $n$  grupos o lotes de longitud  $l$  (se cumplirá  $m = nl$ ):

el primer lote consiste en las observaciones  $Y_1, \dots, Y_l$ ,

el segundo en  $Y_{l+1}, \dots, Y_{2l}$ , etc. ...

entonces:

$\bar{Y}_j(l)$  es la media de las  $l$  observaciones del lote  $j$ -ésimo

$$\bar{\bar{Y}}(n, l) = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{Y}_j(l)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^m Y_i}{m} \quad \text{es la media del conjunto completo de las observaciones, el estimador de } \nu.$$

Si se escoge la longitud de los lotes,  $l$ , suficientemente grande, puede demostrarse que los  $\bar{Y}_j(l)$ 's están aproximadamente no correlacionados y aproximadamente distribuidos normalmente. En consecuencia, son aproximadamente IID normales.

Dado que  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  es un proceso de covarianza estacionaria con  $E(Y_i) = \nu$ , las  $\bar{Y}_j(l)$ 's tienen la misma media,  $\nu$ , y varianza.

De todo ello, si la longitud de los lotes,  $l$ , es suficientemente grande, se deduce que las  $\bar{Y}_j(l)$ 's son aproximadamente variables aleatorias IID normales con la misma media,  $\nu$ , y varianza, con lo cual, podemos construir un intervalo de confianza del  $100(1 - \alpha) \%$  para  $\nu$  de la forma:

$$\bar{\bar{Y}}(n, l) \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_{\bar{Y}_j(l)}^2(n)}{n}}$$

donde :

$$s_{\bar{Y}_j(l)}^2(n) = \frac{\sum_{j=1}^n [\bar{Y}_j(l) - \bar{\bar{Y}}(n, l)]^2}{n-1}$$

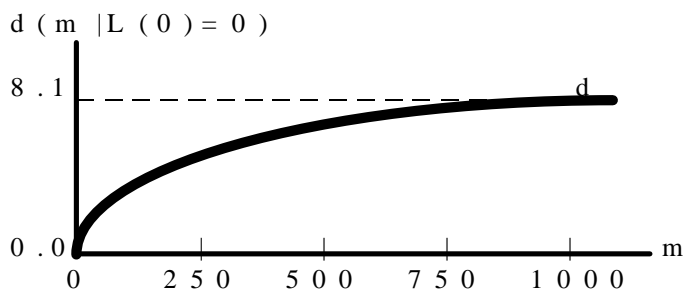
Hay tres fuentes potenciales de error cuando se usa esta expresión del intervalo de confianza:

- En la práctica  $Y_1, Y_2, \dots$  raramente son de covarianza estacionaria. Sin embargo, si  $V$  existe, en general,  $Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots$  son aproximadamente de covarianza estacionaria para  $k$  suficientemente grande. El problema puede resolverse dejando avanzar la simulación un número “adecuado” de observaciones antes de comenzar a recoger datos. El problema es determinar el valor de ese número “adecuado”.
- Si la longitud de los lotes,  $l$ , no es suficientemente larga, las  $\bar{Y}_j(l)$ 's pueden no estar distribuidas normalmente.
- Si  $l$  no es suficientemente grande, las  $\bar{Y}_j(l)$ 's pueden estar correlacionadas y  $\frac{s_{\bar{Y}_j(l)}^2(n)}{n}$  puede ser un estimador de  $\sigma^2(\bar{Y}(n, l))$  considerablemente sesgado.

Cabe preguntarse por qué no se usa un análisis del tipo de las simulaciones con terminación para estimar una magnitud en estado estacionario,  $V$ .

Para ilustrar el peligro de realizar réplicas independientes (todas con la misma condición inicial) y realizar un análisis con terminación de un sistema para el cual, en realidad, queremos estimar un parámetro en estado estacionario, consideremos el ejemplo de la cola atendida por un empleado (M/M/1), con  $\rho = 0.9$ .

Supongamos que queremos estimar el tiempo medio de espera por cliente en la cola en estado estacionario,  $d=8.1$ , y realizamos para ello  $n$  réplicas independientes, de longitud  $m=320$  clientes cada una, con condición inicial  $L(0)=0$ . Dado que  $E(X_j) = d(320|L(0)=0) = 6.01$  (ver figura), y  $E(\bar{X}) = 6.01$  es un estimador sesgado de  $d$  independientemente de las replicaciones que se hagan. Aumentando el número de replicaciones,  $n$ , se reduce la longitud del intervalo de confianza para  $d(320|L(0)=0)$ , no para  $d$ .



De la figura queda claro porque el análisis con terminación no da buenos resultados para la estimación de magnitudes en el estacionario: los datos de salida al comienzo de la simulación no son una buena estimación del comportamiento en el estacionario, ya que la simulación comienza, en el instante cero, en un estado, en general, diferente del estacionario.

Este problema, llamado del transitorio inicial, puede resolverse dejando avanzar la simulación  $k$  observaciones antes de comenzar a recoger datos. El problema es escoger un valor adecuado de  $k$ .

## 7.4- Simulaciones con más de una magnitud de interés

Hemos visto la forma de construir el intervalo de confianza cuando hay una sola magnitud de interés en la simulación. Sin embargo, en la mayoría de las simulaciones prácticas hay varias magnitudes de interés. Supongamos que  $I_j$  es el intervalo de confianza del  $100(1 - \alpha_j)\%$  de la magnitud de interés  $\mu_j$  ( $j:1,2,\dots,k$ ).

La probabilidad de que todos los  $k$  intervalos de confianza contengan simultáneamente a sus respectivos  $\mu_j$  ( $j:1,2,\dots,k$ ) satisface:

$$P\{\mu_j \in I_j \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, k\} \geq 1 - \sum_{j=1}^k \alpha_j \quad (\text{desigualdad de Bonferroni})$$

tanto si los  $I_j$ 's son independientes o no.

Supongamos que se construyen intervalos, con un 90% de confianza ( $\alpha_j = 0.1$  para todo  $j$ ), para 10 magnitudes diferentes de interés. Entonces, la probabilidad de que los 10 intervalos de confianza contengan simultáneamente cada uno su valor verdadero es ¡mayor o igual que cero!. En consecuencia, no parecen excesivamente fiables las conclusiones extraídas de ese estudio.

Si se desea que la confianza total asociada con  $k$  intervalos de confianza sea al menos del  $100(1 - \alpha)\%$ , deben escogerse los intervalos de confianza de modo que  $\sum_{j=1}^k \alpha_j = \alpha$ .

## 7.5- Ejercicio

Se propone al alumno entregar una memoria escrita con el siguiente contenido:

a).- Construir los intervalos de confianza del 90%, para las tres magnitudes de interés del problema del apartado 1.5 y para los posibles números de empleados (5, 6 y 7), a partir de los resultados obtenidos en las 10 replicaciones realizadas para cada caso.

b).- Suponiendo que en la simulación del apartado 1.5 la única magnitud de interés fuera el tiempo medio de espera en la cola por cliente, calcular el número de replicaciones necesarias para, en cada uno de los tres casos ( $n=5, 6$  y  $7$ ), obtener una precisión relativa  $\gamma = 0.15$ . Realizar el número de replicaciones requerido y obtener los intervalos de confianza.

c).- Supongamos que en la simulación del apartado 1.5 las tres magnitudes de salida son de interés: tiempo medio de espera en la cola por cliente, número total de clientes en las colas en promedio, tiempo máximo de espera en la cola por cliente. Centrémonos sólo en el caso con 5 empleados. Se desea que la confianza global asociada con los tres intervalos de las magnitudes de salida sea de, al menos, el 90%. Seleccionar adecuadamente los intervalos de confianza para ello y calcular el número de replicaciones necesario. Realizarlas y obtener los intervalos de confianza.